Álgebra III
Semana 11

Alejandro García Montoro
agarciamontoro@correo.ugr.es

20 de enero de 2016

Ejercicio 1. *Prueba que la extensión* $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})/\mathbb{Q}$ *es cíclica de grado 4.*

Solución. Sea $\beta = \sqrt{2}$. Manipulando esta expresión, llegamos a lo siguiente:

$$\beta^2 = 2$$
$$\beta^2 - 2 = 0$$

de donde deducimos que β es raíz del polinomio $P(X) = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

Por el Teorema de Lagrange, sabemos que $\mathbb{Q}(\beta)/\mathbb{Q}$ es una extensión cíclica de grado 2.

Sea ahora $= \sqrt{1+\beta}$. Manipulando de nuevo:

$$\alpha^2 = 1 + \beta$$
$$\alpha^2 - (1+\beta) = 0$$

de donde deducimos que α es raíz del polinomio $Q(X) = X^2 - a \in \mathbb{Q}(\beta)[X]$, donde $a = 1 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\beta)$.

Por el Teorema de Lagrange, sabemos que $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}(\beta)$ es una extensión cíclica de grado 2.

Concluimos entonces que $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ tiene grado 4, aunque quedaría por demostrar si es cíclica o tiene al grupo de Klein como grupo de Galois.

En general, que una extensión tenga subextensiones cíclicas no implica que la extensión sea cíclica. Hagámoslo de otra manera entonces:

Reescribiendo la relación anterior tenemos:

$$\alpha^2 = 1 + \beta$$
$$\alpha^2 - 1 = \beta$$
$$\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 = 2$$
$$\alpha^4 - 2\alpha^2 - 1 = 0$$

de donde deducimos que el polinomio irreducible —se ve claramente por Eisenstein— de α es $f(X) = X^4 - 2X^2 - 1$.

Las cuatro raíces de este polinomio son $\pm\alpha$ y $\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Si tomamos σ un elemento de $Aut(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ tal que $\sigma(\alpha) = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, entonces $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, luego

$$\sigma(\sigma(\alpha)) = \sigma(\sqrt{2-\sqrt{2}}) = \sigma\left(\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\right) = \frac{\sigma(\sqrt{2})}{\sigma(\alpha)} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Es decir, el orden de σ es mayor estricto que 2. Como este orden tiene que dividir al orden del grupo de Galois, que sabemos que es 4 por el estudio anterior, concluimos que el orden de σ es exactamente 4.

De entre los dos posibles grupos que teníamos, esta condición nos deja una sola posibilidad: el grupo cíclico.

Por tanto, la extensión $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ es cíclica de grado 4.

Ejercicio 2. *Se considera la sucesión* $\{\alpha_n\}_n$*, definida:*

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0 \\ \alpha_{n+1} &= \sqrt{\alpha_n + \sqrt{2}} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Prueba que la extensión $\mathbb{Q}(\alpha_n)/\mathbb{Q}$ *es cíclica de grado* 2^n*.*

Solución. Estudiamos $n = 1$:

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_0 + \sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$$

Como vemos, $\alpha_1 = \sqrt[4]{2}$; es decir, su polinomio irreducible —de nuevo, por Eisenstein— es $P(X) = X^4 - 2$.

Pero entonces la extensión $\mathbb{Q}(\alpha_1)/\mathbb{Q}$ es de grado 4. Por tanto, la afirmación dada en el enunciado es falsa.