Álgebra III
Semana 1

Alejandro García Montoro
agarciamontoro@correo.ugr.es

24 de octubre de 2015

Ejercicio 1.

Solución.

Apartado 1.1. Veamos que $\langle \varphi, \psi \rangle$ es isomorfo a D_4:

Sabemos que $D_4 = \langle a, b / a^2 = b^4 = 1, ba = ab^3 \rangle$

Comprobemos entonces que los elementos de $\langle \varphi, \psi \rangle$ cumplen esas restricciones. Atendiendo únicamente a las imágenes de i y $\sqrt[4]{3}$, es directo verlo:

- i:
  - $\varphi^2(i) = \varphi(\varphi(i)) = \varphi(-i) = i$
  - $\psi^4(i) = \psi(\psi(\psi(\psi(i)))) = \psi(\psi(\psi(i))) = \psi(\psi(i)) = \psi(i) = i$
- $\sqrt[4]{3}$:
  - $\varphi^2(\sqrt[4]{3}) = \varphi(\varphi(\sqrt[4]{3})) = \varphi(\sqrt[4]{3}) = \sqrt[4]{3}$
  - $\psi^4(\sqrt[4]{3}) = \psi(\psi(\psi(\psi(\sqrt[4]{3})))) = \psi(\psi(\psi(i\sqrt[4]{3}))) = \psi(\psi(-\sqrt[4]{3})) = \psi(-i\sqrt[4]{3}) = \sqrt[4]{3}$

Concluimos entonces que $\varphi^2 = \psi^4 = id$. Como id es el 1 de nuestro grupo, tenemos la primera relación. Para la segunda, seguimos el mismo proceso:

- i:
  - $\psi\varphi(i) = \psi(\varphi(i)) = \psi(-i) = -i$
  - $\varphi\psi^3(i) = \varphi(\psi^3(i)) = \varphi(i) = -i$
- $\sqrt[4]{3}$:
  - $\psi\varphi(\sqrt[4]{3}) = \psi(\varphi(\sqrt[4]{3})) = \psi(\sqrt[4]{3}) = i\sqrt[4]{3}$
  - $\varphi\psi^3(\sqrt[4]{3}) = \varphi(\psi^3(\sqrt[4]{3})) = \varphi(-i\sqrt[4]{3}) = i\sqrt[4]{3}$

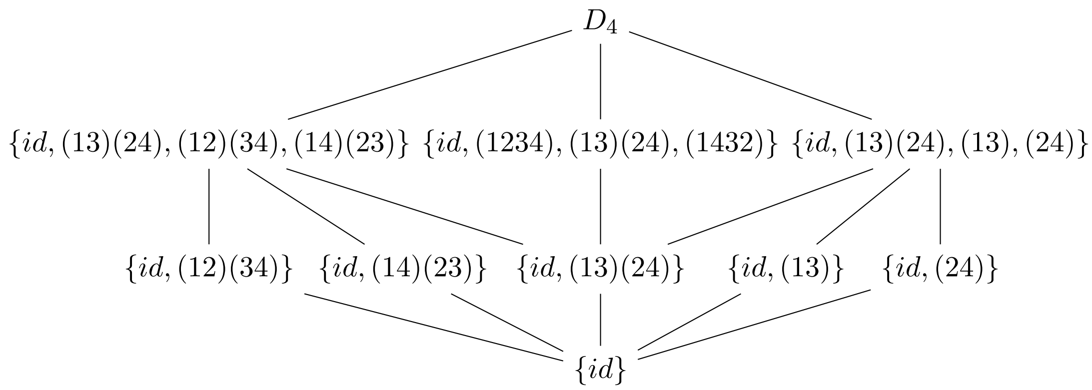
Por tanto, $\psi\varphi = \varphi\psi^3$, que es la segunda relación.

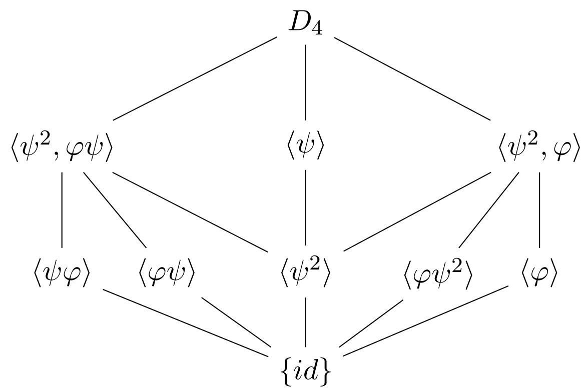
Así, concluimos que $\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \psi / \varphi^2 = \psi^4 = id, \psi\varphi = \varphi\psi^3 \rangle = D_4$

Apartado 1.2. Como ψ es la rotación de amplitud $\pi/4$ y φ es la simetría del eje 1—3, con los vértices numerados como en el enunciado, tenemos las siguientes expresiones:

$$\varphi = (24) \qquad \psi = (1234)$$

Apartado 1.3. El retículo de subgrupos de D_4, con notación de permutaciones, y en función de φ y ψ, queda representado en las siguientes dos figuras:





Apartado 1.4. Es claro que los tres primeros subgrupos, $\langle \psi^2, \varphi\psi \rangle$, $\langle \psi \rangle$ y $\langle \psi^2, \varphi \rangle$ son de orden 4, uno generado por un elemento de orden 4, ψ y los otros dos isomorfos al grupo de Klein.

Los otros cinco son de orden 2, ya que están generados por un solo elemento de orden 2; basta comprobar que los cuadrados de cada elemento generador son iguales a la identidad, usando las relaciones que da la presentación del grupo.

Ejercicio 2.

Solución.

Apartado 2.1. Sean $x \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$ y $H = \langle \phi_1, \ldots, \phi_t \rangle \subset Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)/\mathbb{Q})$. Queremos probar que

$$\phi(x) = x \ \ \forall \phi \in H \iff \phi_i(x) = x \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, t$$

Veamos las dos implicaciones:

($\implies$) Trivial. Si $\phi(x) = x \quad \forall \phi \in H$, como $\phi_i \in H \quad \forall i = 1, 2, \ldots, t$, entonces, claramente, $\phi_i(x) = x \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, t$

($\impliedby$) Sabemos que $\forall \phi \in H$, ϕ es una composición de los ϕ_i. Evidentemente, si cada uno de los ϕ_i deja fijo a x, entonces cualquier composición que hagamos con ellos dejará fijo a x. □

Apartado 2.2. Sea F^H el conjunto de todos los elementos fijos de H.

El elemento neutro para la suma y el elemento neutro para el producto están en F^H, ya que $0, 1 \in \mathbb{Q} \implies 0, 1 \in F^H$.

Como H es un subconjunto de automorfismos, todos sus elementos son, en particular, homomorfismos. Por tanto, el conjunto F^H es cerrado para la suma y el producto. Además, es claro que todos los elementos de F^H
$\{0\}$ tienen, inverso para la suma e inverso para el producto, pues los coeficientes, que son elementos de $\mathbb{Q}$, los tienen.

Concluimos por tanto que F^H es un cuerpo. □

Apartado 2.3. Sean $H_1 \subset H_2 \subset Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)/\mathbb{Q})$ y $x \in F^{H_2}$. Queremos probar que $x \in F^{H_1}$.

Tal y como hemos tomado x, tenemos que $\varphi(x) = x, \forall \varphi \in H_2$. Si tomamos que $H_1 = \langle \phi_1, \ldots, \phi_t \rangle$, ,como $H_1 \subset H_2$, es claro que $\phi_i \in H_2$, $\forall i = 1, \ldots, t$. Por tanto, $\phi_i(x) = x$, $\forall i = 1, \ldots, t$.

Concluimos entonces, en virtud del primer apartado, que $x \in F^{H_1}$, tal y como queríamos demostrar. □

Apartado 2.4. Por los apartados anteriores, sabemos que el retículo tiene la misma estructura que el de D_4 pero *invertido*.

Para calcular qué cuerpo corresponde a cada subgrupo, basta con calcular los elementos que se quedan fijos por los generadores de dicho subgrupo y obtener una base del cuerpo correspondiente.

Si tomamos $H = D_4$, tenemos que los únicos elementos que quedan fijos por *todos* los automorfismos de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)/\mathbb{Q}$ son única y exclusivamente los elementos de $\mathbb{Q}$. Por tanto, en este caso: $F^H = \mathbb{Q}$.

En el caso de $H = \{id\}$, como todos los automorfismos dejan fijos a todos los elementos, concluimos que $F^H = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)/\mathbb{Q}$.

Describimos a continuación el cálculo de dos subcuerpos para ilustrar esta técnica. Para esto hay que tener siempre en cuenta que todos los automorfismos que consideramos dejan fijos a los elementos de $\mathbb{Q}$.

Sea $H = \langle \varphi \rangle$. Calculemos F^H:

Sea

$$x = a_0 + a_1\sqrt[4]{3} + a_2\sqrt[4]{3}^2 + a_3\sqrt[4]{3}^3 + a_4 i + a_5 i\sqrt[4]{3} + a_6 i\sqrt[4]{3}^2 + a_7 i\sqrt[4]{3}^3$$

un elemento genérico de $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$.

Como $\varphi(i) = -i$ y $\varphi(\sqrt[4]{3}) = \sqrt[4]{3}$, tenemos que

$$\varphi(x) = a_0 + a_1\sqrt[4]{3} + a_2\sqrt[4]{3}^2 + a_3\sqrt[4]{3}^3 - a_4 i - a_5 i\sqrt[4]{3} - a_6 i\sqrt[4]{3}^2 - a_7 i\sqrt[4]{3}^3$$

Por tanto, x será un elemento fijo si esas dos expresiones son iguales; esto es:

$$x \in F^H \iff x = \varphi(x) \iff a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = 0$$

Así, los elemetos de F^H son de la forma

$$x = a_0 + a_1\sqrt[4]{3} + a_2\sqrt[4]{3}^2 + a_3\sqrt[4]{3}^3$$

es decir, generados por el elemento $\sqrt[4]{3}$. Concluimos entonces que

$$F^H = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$$

Sea ahora $H = \langle \psi\varphi \rangle$. Calculemos F^H:

Tomando el mismo elemento $x \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$, la imagen por el único generador de H es:

$$\psi\varphi(x) = a_0 + a_1 i\sqrt[4]{3} - a_2\sqrt[4]{3}^2 - a_3 i\sqrt[4]{3}^3 - a_4 i + a_5\sqrt[4]{3} + a_6 i\sqrt[4]{3}^2 + a_7\sqrt[4]{3}^3$$

Entonces, tenemos las siguientes condiciones:

$$x \in F^H \iff x = \psi\varphi(x) \iff \begin{cases} a_2 = a_4 = 0 \\ a_1 = a_5 \\ -a_3 = a_7 \end{cases}$$

Es decir, nuestro elemento x debe ser de la forma:

$$x = a_0 + a_1\sqrt[4]{3} + a_3\sqrt[4]{3}^3 + a_1 i\sqrt[4]{3} + a_6 i\sqrt[4]{3}^2 - a_3 i\sqrt[4]{3}^3$$

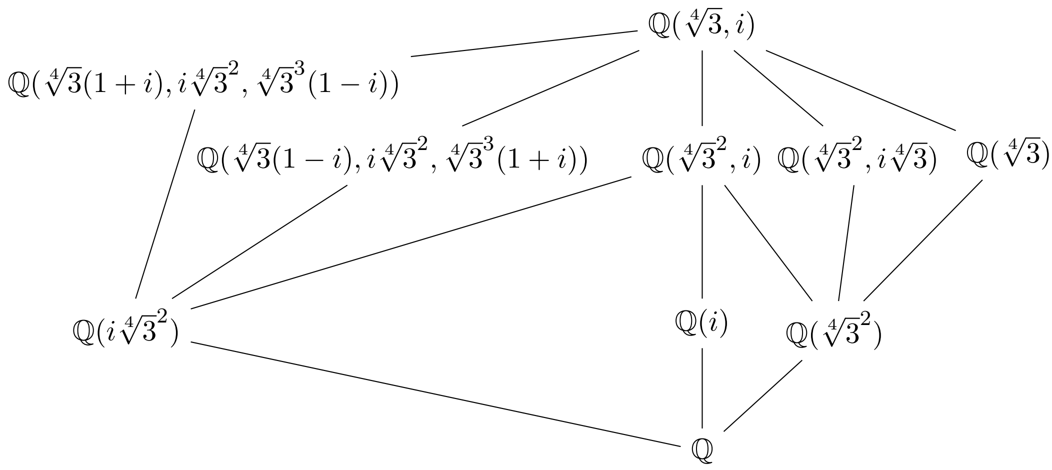
Juntando los coeficientes iguales y sacando factor común convenientemente

$$x = a_0 + a_1(\sqrt[4]{3} + i\sqrt[4]{3}) + a_3(\sqrt[4]{3}^3 - i\sqrt[4]{3}^3) + a_6 i\sqrt[4]{3}^2$$
$$x = a_0 + a_1\sqrt[4]{3}(1 + i) + a_3\sqrt[4]{3}^3(1 - i) + a_6 i\sqrt[4]{3}^2$$

Por tanto, una base del cuerpo será $\{\sqrt[4]{3}(1+i), \sqrt[4]{3}^3(1-i), i\sqrt[4]{3}^2\}$, con lo que

$$F^H = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}(1+i), \sqrt[4]{3}^3(1-i), i\sqrt[4]{3}^2)$$

Las cuentas con los demás subgrupos son exactamente iguales, de manera que el retículo de subcuerpos formados por los elementos que dejan fijos los subgrupos de $Aut(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)/\mathbb{Q})$ es el siguiente:



Ejercicio 3.

Solución. Sea $p(X,Y,Z) = X^4 + Y^4 + Z^4$. Para escribirlo en función de los polinomios simétricos, seguimos el algoritmo estudiado:

1. Tomamos el monomio mayor, siguiendo el orden lexicográfico; esto es, el X^4. Como $X^4 = X^4 + Y^0 + Z^0$, elegimos el siguiente polinomio en función de los polinomios simétricos:

   $$e_1^{4-0} e_2^{0-0} e_3^0$$

   y notamos

   $$q(X,Y,Z) = p(X,Y,Z) - e_1^4$$

   Tenemos que

   $$\begin{aligned} e_1^4 = (X+Y+Z)^4 = &X^4 + Y^4 + Z^4 + \\ &4(X^3Y + X^3Z + Y^3X + Y^3Z + Z^3X + Z^3Y) + \\ &6(X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2) + \\ &12(X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} q(X,Y,Z) = p(X,Y,Z) - e_1^4 = &- 4(X^3Y + X^3Z + Y^3X + Y^3Z + Z^3X + Z^3Y) \\ &- 6(X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2) \\ &- 12(X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2) \end{aligned}$$

Partimos ahora del polinomio $q(X,Y,Z)$ y hacemos el mismo trabajo:

2. El monomio mayor es $-4X^3Y$, así que

$$-4X^3Y = -4X^3Y^1Z^0 \implies \text{Tomamos } -4e_1^{3-1}e_2^{1-0}e_3^0 = -4e_1^2e_2$$

Calculamos el valor de $4e_1^2e_2$:

$$\begin{aligned} e_1^2 = (X+Y+Z)^2 =& X^2 + Y^2 + Z^2 + 2(XY + XZ + YZ) \\ e_2 =& XY + XZ + YZ \\ e_1^2e_2 =& X^3Y + X^3Z + Y^3X + Y^3Z + Z^3X + Z^3Y + \\ & 5(X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2) + \\ & 2(X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2) \\ 4e_1^2e_2 =& 4X^3Y + X^3Z + Y^3X + Y^3Z + Z^3X + Z^3Y + \\ & 20(X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2) + \\ & 8(X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2) \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} r(X,Y,Z) = q(X,Y,Z) + 4e_1^2e_2 =& 8(X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2) + \\ & 2(X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2) \end{aligned}$$

Repetimos el proceso con el polinomio r.

3. El monomio mayor es $8X^2Y^2$, así que

$$8X^2Y^2 = 8X^2Y^2Z^0 \implies \text{Tomamos } 8e_1^{2-2}e_2^{2-0}e_3^0 = 8e_2^2$$

El valor de $8e_2^2$ es:

$$\begin{aligned} 8e_2^2 = 8(XY + XZ + YZ)^2 =& 8(XY^2 + XZ^2 + YZ^2) + \\ & 16(X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2) \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$s(X,Y,Z) = r(X,Y,Z) - 8e_2^2 = -14(X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2)$$

Repetimos el proceso con el polinomio s.

4. El monomio mayor es $-14X^2YZ$, así que

$$-14X^2YZ - 14X^2Y^1Z^1 \implies \text{Tomamos } -14e_1^{2-1}e_2^{1-1}e_3^1 = -14e_1e_3$$

Calculamos el valor de $14e_1e_3$:

$$14e_1e_3 = 14(X+Y+Z)XYZ = 14(X^2YZ + XY^2Z + XYZ^2)$$

Tenemos entonces que

$$s(X,Y,Z) + 14e_1e_3 = 0$$

5. Juntando todas las expresiones de los pasos anteriores llegamos a:

$$\begin{aligned} s(X,Y,Z) + 14e_1e_3 = 0 &\implies s(X,Y,Z) = -14e_1e_3 \implies \\ -14e_1e_3 = r(X,Y,Z) - 8e_2^2 &\implies r(X,Y,Z) = -14e_1e_3 + 8e_2^2 \implies \\ -14e_1e_3 + 8e_2^2 = q(X,Y,Z) + 4e_1^2e_2 &\implies q(X,Y,Z) = -14e_1e_3 + 8e_2^2 - 4e_1^2e_2 \implies \\ -14e_1e_3 + 8e_2^2 - 4e_1^2e_2 = p(X,Y,Z) - e_1^4 &\implies \\ p(X,Y,Z) = -14e_1e_3 + 8e_2^2 - 4e_1^2e_2 + e_1^4 & \end{aligned}$$

Concluimos entonces que la expresión de $p(X,Y,Z)$ en polinomios simétricos es:

$$p(X,Y,Z) = e_1^4 + 8e_2^2 - 4e_1^2e_2 - 14e_1e_3$$

$\square$