Álgebra III
Semana 3

Alejandro García Montoro
agarciamontoro@correo.ugr.es

24 de octubre de 2015

Ejercicio 1.

Solución. Considerando $\mathbb{F}_p$, el cuerpo F es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_p$. Así, como espacio vectorial, tenemos que

$$F \cong \mathbb{F}_p^n$$

con un $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, concluimos que F tiene p^n elementos.

Ejercicio 2.

Solución.

Apartado 2.1. Sea $\alpha = \sqrt{7}$. α es claramente algebraico sobre $\mathbb{Q}$, pues es raíz del polinomio $p(X) = X^2 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$.

Apartado 2.2. Sea $\alpha = \sqrt[3]{3}$. α es claramente algebraico sobre $\mathbb{Q}$, pues es raíz del polinomio $p(X) = X^3 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

Apartado 2.3. Supongamos que π^2 es algebraico sobre $\mathbb{Q}$. Consideramos la extensión de cuerpos siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q}(\pi^2) \arrow[d, dash] \arrow[dd, dash, bend right] \\
\mathbb{Q}(\pi) \arrow[d, dash] \\
\mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

Como π^2 es algebraico sobre $\mathbb{Q}$, al ser el generador de $\mathbb{Q}(\pi^2)$, concluimos que $\mathbb{Q}(\pi^2)/\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica.

Sabemos por teoría que dada una torre de cuerpos $K \subset F \subset E$, K/E es algebraica $\iff$ E/F y F/K son algebraicas. Por tanto, como $\mathbb{Q}(\pi^2)/\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica, también lo es $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}$.

Concluimos que π —por pertenecer a la extensión algebraica $\mathbb{Q}(\pi)$— es algebraico, lo que es una contradicción. Por tanto, nuestra hipótesis era falsa: π^2 es trascendente sobre $\mathbb{Q}$.

Apartado 2.4. Sea $\alpha = e^3 + 1$. Podemos escribir $e^3 + 1 - \alpha = 0$, luego concluimos que e es algebraico en la extensión $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$.

Por el mismo razonamiento anterior, el suponer que α es algebraico sobre $\mathbb{Q}$ nos lleva a concluir que e también lo es. Eso es una contradicción, luego $\alpha = e^3 + 1$ es trascendente sobre $\mathbb{Q}$.

Apartado 2.5. Sea $\alpha = \sqrt{i} + 2$. Manipulando un poco esta igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha - 2 &= \sqrt{i} \\ (\alpha - 2)^4 &= -1 \\ \alpha^4 - 8\alpha^3 - 32\alpha + 17 &= 0 \end{aligned}$$

Es claro entonces que α es raíz del polinomio $p(X) = X^4 - 8X^3 - 32X + 17 \in \mathbb{Q}[X]$, con lo que α es algebraico.

Ejercicio 3.

Solución. Sea $f(X) = X^3 + 3X + 1$ un polinomio en $\mathbb{Q}[X]$. No podemos usar el criterio de Eisenstein para ver que es irreducible, pero sabemos por Ruffini que todas las raíces que ese polinomio puede tener en $\mathbb{Q}$ son de la forma

$$\frac{p}{q} \ / \ p, q \in \mathbb{Z}, \ \ p|1 \text{ y } q|1$$

Por tanto, el conjunto de posibles raíces es $\{1, -1\}$. Pero ninguna de esas es raíz de $f(X)$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= -3 \neq 0 \\ f(1) &= 5 \neq 0 \end{aligned}$$

Como $f(X)$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}$ y es un polinomio de grado 3 —entre sus raíces hay al menos una real—, concluimos que $f(X)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[X]$.

Apartado 3.1. Calculemos $(1 + \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2)$, con α raíz de $f(X)$.

Desarrollando:

$$(1 + \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2) = 1 + 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3$$

Sabemos, por ser α raíz de $f(X)$, que $\alpha^3 + 3\alpha + 1 = 0$. Si manipulamos la igualdad anterior teniendo en cuenta esta condición, llegamos a lo que queremos:

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2) &= \alpha^3 + 3\alpha + 1 + 2\alpha^2 - \alpha \\ (1 + \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2) &= 2\alpha^2 - \alpha \end{aligned}$$

Aquí termina el cálculo, pues los elementos de $\mathbb{Q}(\alpha)$, que es la extensión que estamos considerando, son de la siguiente forma:

$$\mathbb{Q}(\alpha) = \frac{\mathbb{Q}[X]}{X^3 + 3X + 1} = \{a + b\alpha + c\alpha^2 / a, b, c \in \mathbb{Q}\}$$

Apartado 3.2. Calculemos $\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}$, con α raíz de $f(X)$:

Queremos obtener los a, b, c que satisfacen la siguiente igualdad:

$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} = a + b\alpha + c\alpha^2$$

Multiplicando por $1 + \alpha + \alpha^2$ y desarrollando:

$$1 + \alpha = (a + b\alpha + c\alpha^2)(1 + \alpha + \alpha^2)$$
$$1 + \alpha = a + (a + b)\alpha + (a + b + c)\alpha^2 + (b + c)\alpha^3 + c\alpha^4$$

Simplificamos la parte de la derecha tomando el resto de dividir el polinomio asociado, $a + (a + b)X + (a + b + c)X^2 + (b + c)X^3 + cX^4$ entre $1 + 3X + X^3$; que vale $(a - b - c) + (a - 2b - 4c)X + (a + b - 2c)X^2$. Llegamos entonces a la igualdad

$$1 + \alpha = (a - b - c) + (a - 2b - 4c)X + (a + b - 2c)X^2$$

De aquí, igualando coeficientes tenemos un sistema de ecuaciones —esto lo podemos hacer porque los elementos de $\mathbb{Q}(\alpha)$ se escriben de forma única—:

$$1 = a - b - c$$
$$1 = a - 2b - 4c$$
$$0 = a + b - 2c$$

cuya solución es $a = \frac{5}{7}, b = -\frac{3}{7}, c = \frac{1}{7}$. Por tanto, concluimos el ejercicio:

$$\frac{1+\alpha}{1+\alpha+\alpha^2} = \frac{5}{7} - \frac{3}{7}\alpha + \frac{1}{7}\alpha^2$$

Ejercicio 4.

Solución.

Apartado 4.1. Sea $\alpha = 2 + \sqrt{5}$.

Manipulando esta igualdad:

$$\alpha - 2 = \sqrt{5}$$
$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 5$$
$$\alpha^2 - 4\alpha - 1 = 0$$

Por tanto, α es raíz de $p(X) = X^2 - 4X - 1$. Como las raíces de $p(X)$ son $2 \pm \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$, concluimos que

$$Irr(2 + \sqrt{5}, \mathbb{Q}) = X^2 - 4X - 1$$

Es claro además que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Apartado 4.2. Sea $\alpha = \sqrt[4]{5} + \sqrt{5}$.

Manipulando esta igualdad:

$$\begin{aligned}
\alpha - \sqrt{5} &= \sqrt[4]{5} \\
\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{5} + 5 &= \sqrt{5} \\
\alpha^2 + 5 &= \sqrt{5}(1 - 2\alpha) \\
\alpha^4 + 25 + 10\alpha^2 &= 5 + 20\alpha^2 - 20\alpha \\
\alpha^4 - 10\alpha^2 + 20\alpha + 20 = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, α es raíz de $p(X) = X^4 - 10X^2 + 20X + 20$. Para ver que es irreducible, basta aplicar Eisenstein con el primo 5. Concluimos que

$$Irr(\sqrt[4]{5} + \sqrt{5}, \mathbb{Q}) = X^4 - 10X^2 + 20X + 20$$

Es claro además que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$, pues $\sqrt{5} = \sqrt[4]{5}^4$.

Apartado 4.3. Sea $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

Elevando al cuadrado:

$$\alpha^3 = 2 + 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4} + 4$$

Como $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = \alpha$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\alpha^3 &= 2 + 6\alpha + 4 \\
\alpha^3 - 6\alpha - 6 = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, α es raíz de $p(X) = X^3 - 6X - 6$. Aplicando el criterio de Eisenstein con el primo 3, concluimos que es irreducible. Así:

$$Irr(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}, \mathbb{Q}) = X^3 - 6X - 6$$

Es claro además que $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, pues $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2}^2$.