Álgebra III
Semana 4

Alejandro García Montoro
agarciamontoro@correo.ugr.es

24 de octubre de 2015

Ejercicio 1. *Sea E/K una extensión algebraica tal que para cualquier extensión finita F/K existe un K-homomorfismo $\sigma : F/K \to E/K$. Demuestra que entonces E es una clausura algebraica de K.*

Solución. Sea E/K la extensión algebraica que se especifica en el enunciado. Queremos ver que E es una clausura algebraica de K; es decir, que E es una extensión algebraica y es un cuerpo algebraicamente cerrado sobre K. Usaremos una caracterización de clausura algebraica muy interesante para este ejercicio: el cuerpo E es una clausura algebraica sobre K si E/K es una extensión algebraica y todo polinomio no constante $p \in K[X]$ descompone en $E[X]$.

Lo primero lo tenemos por hipótesis. Para probar lo segundo, tomemos $p \in K[X]$ un polinomio cualquiera no constante con coeficientes en K.

Consideramos F, el cuerpo de descomposición de p. Por la definición de cuerpo de descomposición sabemos que la extensión F/K es finita[1].

Podemos entonces aplicar la hipótesis del enunciado: como F/K es finita, existe un homomorfismo $\sigma : F/K \to E/K$. El polinomio p se queda invariante por σ, pues los coeficientes de p están en K y estos elementos son fijos por σ. Además, tenemos que:

$$\begin{aligned} p = \sigma(p) = \sigma\left((X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)\right) = (X-\sigma(\alpha_1))\cdots(X-\sigma(\alpha_n)) = \\ = (X-\beta_1)\cdots(X-\beta_n) \end{aligned}$$

donde $\beta_i = \sigma(\alpha_i) \in E$.

De aquí deducimos directamente, junto con la hipótesis del enunciado, que E cumple la caracterización expuesta anteriormente, con lo que E es una clausura algebraica de K.

[1] Como $F = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ —donde α_i son todas las raíces de p y n, su grado— tenemos que $[F : K] \leq n!$

Ejercicio 2. *Demuestra que la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$ no es una extensión finita de $\mathbb{Q}$.*

Solución. Consideremos el polinomio $p_n = X^n - 2$, donde $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $q = 2$ divide a todos los coeficientes menos al líder y que su cuadrado $q^2 = 4$ no divide al coeficiente constante, sea cual sea n. Por tanto, el criterio de Eisenstein nos dice que p_n es irreducible, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, sabemos que existe una extensión $F_n/\mathbb{Q}$ en la que p_n tiene al menos una raíz: sea ésta α. Como $F_n = \mathbb{Q}[\alpha]$ y tenemos que $Irr(\alpha, \mathbb{Q}) = p_n$ tiene grado n, entonces $F_n/\mathbb{Q}$ es de grado n. Podemos crear entonces una extensión de grado n por cada polinomio p_n.

Si $\bar{\mathbb{Q}}$ es la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$, tenemos la torre de cuerpos

$$\mathbb{Q} \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots \subset \bar{\mathbb{Q}}$$

Entonces, $\bar{\mathbb{Q}}$ tiene subextensiones de cualquier grado. Concluimos entonces que $[\bar{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}] = \infty$.

Ejercicio 3. *Sea F/K una extensión con F algebraicamente cerrado. Si llamamos*

$$E = \{\alpha \in F \mid \alpha \text{ es algebraico sobre } K\}$$

demuestra que E es una clausura algebraica de K.

Solución. Tenemos que demostrar que E es una clausura algebraica de K; es decir, que E/K es una extensión algebraica y que E es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Lo primero lo tenemos por la definición de E. Para probar lo segundo, basta con demostrar una de las caracterizaciones equivalentes de cuerpo algebraicamente cerrado; a saber:

1. Todo polinomio no constante en $E[X]$ tiene al menos una raíz en E.

2. Todo polinomio no constante en $E[X]$ descompone en E.

3. Todo polinomio no constante irreducible en $E[X]$ tiene grado 1.

4. E no tiene extensiones algebraicas propias.

Vamos a usar la caracterización 1, así que tomamos

$$p(X) = \sum_{i=0}^{n} a_n X^i \in E[X]$$

un polinomio cualquiera no constante con coeficientes en E.

Como F es algebraicamente cerrado y $E \subset F$ sabemos, por 1, que existe en F una raíz de p; esto es, $\exists \alpha \in F \ / \ p(\alpha) = 0$.

Podemos considerar entonces $K' = K(a_0, \ldots, a_n)$ el cuerpo extensión de K con todos los coeficientes del polinomio p. Es evidente por la construcción de K' que α es algebraico sobre K'.

Pero por hipótesis los a_i, por ser elementos de E, son algebraicos sobre K, luego α es algebraico también sobre K y, por tanto, cumple la condición dada por la definición de E. Esto es, $\alpha \in E$.

Tenemos entonces que para todo polinomio no constante en $E[X]$, existe una raíz en E; es decir, E es algebraicamente cerrado.

Concluimos así que E es una clausura algebraica de K.