

Álgebra III

Semana 8

Alejandro García Montoro
agarciamontoro@correo.ugr.es

24 de noviembre de 2015

Ejercicio 1. Sea K un cuerpo y sean u y v dos elementos tales que las extensiones $K(u)$ y $K(v)$ tienen grados coprimos m y n , respectivamente. ¿Cuál es el grado de $[K(u, v) : K]$?

Solución. Como tenemos la torre de cuerpos $K \subset K(u) \subset K(u, v)$ —ver figura 1—, sabemos que

$$[K(u, v) : K] = [K(u, v) : K(u)][K(u) : K] = [K(u, v) : K(u)]m$$

luego $m \mid [K(u, v) : K]$.

Lo mismo podemos decir de $K \subset K(v) \subset K(u, v)$, así que $n \mid [K(u, v) : K]$.

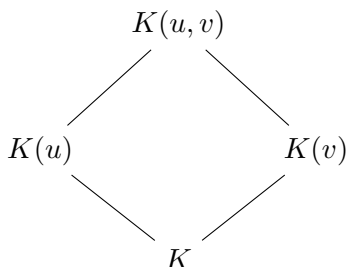


Figura 1: Subcuerpos de $K(u, v)$.

De los dos hechos anteriores y teniendo en cuenta que m y n son coprimos, podemos concluir que $mn \mid [K(u, v) : K]$.

Pero, además, sabemos que podemos acotar el grado que buscamos con el grado de las subextensiones de la siguiente manera:

$$[K(u, v) : K] \leq mn$$

Es entonces evidente que

$$[K(u, v) : K] = mn$$