

Álgebra III

Semana 4

Alejandro García Montoro
agarciamontoro@correo.ugr.es

24 de octubre de 2015

Ejercicio 1. Sea E/K una extensión algebraica tal que para cualquier extensión finita F/K existe un K -homomorfismo $\sigma : F/K \rightarrow E/K$. Demuestra que entonces E es una clausura algebraica de K .

Solución. Sea E/K la extensión algebraica que se especifica en el enunciado. Queremos ver que E es una clausura algebraica de K ; es decir, que E es una extensión algebraica y es un cuerpo algebraicamente cerrado sobre K . Usaremos una caracterización de clausura algebraica muy interesante para este ejercicio: el cuerpo E es una clausura algebraica sobre K si E/K es una extensión algebraica y todo polinomio no constante $p \in K[X]$ descompone en $E[X]$.

Lo primero lo tenemos por hipótesis. Para probar lo segundo, tomemos $p \in K[X]$ un polinomio cualquiera no constante con coeficientes en K .

Consideramos F , el cuerpo de descomposición de p . Por la definición de cuerpo de descomposición sabemos que la extensión F/K es finita¹.

Podemos entonces aplicar la hipótesis del enunciado: como F/K es finita, existe un homomorfismo $\sigma : F/K \rightarrow E/K$. El polinomio p se queda invariante por σ , pues los coeficientes de p están en K y estos elementos son fijos por σ . Además, tenemos que:

$$\begin{aligned} p &= \sigma(p) = \sigma((X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)) = (X - \sigma(\alpha_1)) \cdots (X - \sigma(\alpha_n)) = \\ &= (X - \beta_1) \cdots (X - \beta_n) \end{aligned}$$

donde $\beta_i = \sigma(\alpha_i) \in E$.

De aquí deducimos directamente, junto con la hipótesis del enunciado, que E cumple la caracterización expuesta anteriormente, con lo que E es una clausura algebraica de K .

¹Como $F = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ —donde α_i son todas las raíces de p y n , su grado— tenemos que $[F : K] \leq n!$

Ejercicio 2. Demuestra que la clausura algebraica de \mathbb{Q} no es una extensión finita de \mathbb{Q} .

Solución. Consideremos el polinomio $p_n = X^n - 2$, donde $n \in \mathbb{N}$. Es claro que $q = 2$ divide a todos los coeficientes menos al líder y que su cuadrado $q^2 = 4$ no divide al coeficiente constante, sea cual sea n . Por tanto, el criterio de Eisenstein nos dice que p_n es irreducible, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, sabemos que existe una extensión F_n/\mathbb{Q} en la que p_n tiene al menos una raíz: sea ésta α . Como $F_n = \mathbb{Q}[\alpha]$ y tenemos que $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q}) = p_n$ tiene grado n , entonces F_n/\mathbb{Q} es de grado n . Podemos crear entonces una extensión de grado n por cada polinomio p_n .

Si $\bar{\mathbb{Q}}$ es la clausura algebraica de \mathbb{Q} , tenemos la torre de cuerpos

$$\mathbb{Q} \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots \subset \bar{\mathbb{Q}}$$

Entonces, $\bar{\mathbb{Q}}$ tiene subextensiones de cualquier grado. Concluimos entonces que $[\bar{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}] = \infty$.

Ejercicio 3. Sea F/K una extensión con F algebraicamente cerrado. Si llamamos

$$E = \{\alpha \in F \mid \alpha \text{ es algebraico sobre } K\}$$

demuestra que E es una clausura algebraica de K .

Solución. Tenemos que demostrar que E es una clausura algebraica de K ; es decir, que E/K es una extensión algebraica y que E es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Lo primero lo tenemos por la definición de E . Para probar lo segundo, basta con demostrar una de las caracterizaciones equivalentes de cuerpo algebraicamente cerrado; a saber:

1. Todo polinomio no constante en $E[X]$ tiene al menos una raíz en E .
2. Todo polinomio no constante en $E[X]$ descompone en E .
3. Todo polinomio no constante irreducible en $E[X]$ tiene grado 1.
4. E no tiene extensiones algebraicas propias.

Vamos a usar la caracterización 1, así que tomamos

$$p(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in E[X]$$

un polinomio cualquiera no constante con coeficientes en E .

Como F es algebraicamente cerrado y $E \subset F$ sabemos, por 1, que existe en F una raíz de p ; esto es, $\exists \alpha \in F / p(\alpha) = 0$.

Podemos considerar entonces $K' = K(a_0, \dots, a_n)$ el cuerpo extensión de K con todos los coeficientes del polinomio p . Es evidente por la construcción de K' que α es algebraico sobre K' .

Pero por hipótesis los a_i , por ser elementos de E , son algebraicos sobre K , luego α es algebraico también sobre K y, por tanto, cumple la condición dada por la definición de E . Esto es, $\alpha \in E$.

Tenemos entonces que para todo polinomio no constante en $E[X]$, existe una raíz en E ; es decir, E es algebraicamente cerrado.

Concluimos así que E es una clausura algebraica de K .