

## Содержание

<b>1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности .....</b>	<b>2</b>
1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса .....	2
1.2. Критерий Коши .....	4
<b>2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней .....</b>	<b>5</b>
2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке .....	5
2.2. Достижение точных верхних и нижних граней .....	5
<b>3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции .....</b>	<b>6</b>
<b>4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций. ....</b>	<b>6</b>
4.1. Теорема Ролля .....	6
4.2. Теоремы Лагранжа и Коши .....	7
<b>5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа</b>	<b>8</b>
5.1. Член в форме Лагранжа .....	8
5.2. Член в форме Пеано .....	9
<b>6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия. ....</b>	<b>10</b>
6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции .....	10
6.2. Достаточные условия локальных экстремумов .....	10
6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости .....	11
<b>7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте .....</b>	<b>12</b>
<b>8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных .....</b>	<b>13</b>
<b>9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением .....</b>	<b>14</b>
<b>10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия. ....</b>	<b>16</b>
10.1. Необходимые условия .....	16
10.2. Достаточные условия .....	17
<b>11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница. ....</b>	<b>18</b>
11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом .....	18
11.2. Формула Ньютона-Лейбница .....	19
<b>12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда. ....</b>	<b>20</b>
12.1. Непрерывность суммы функционального ряда .....	20
12.2. Интегрируемость суммы функционального ряда .....	22
12.3. Дифференцируемость суммы функционального ряда .....	23

# ГОС по матану

**Disclaimer:** доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

Экзамен - это тропа

*Коновалов Сергей Петрович*

## 1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности

### 1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса

**Определение 1.1.1:** Если  $E \subset \mathbb{R}$  – ограниченное сверху (снизу) множество, то  $M(m) \in \mathbb{R}$  такое, что

$$\forall x \in E : x \leq M(x \geq m)$$

называется **верхней (нижней) гранью** множества  $E$ .

**Определение 1.1.2:** Наименьшая из верхних граней множества  $E$  называется **точной верхней гранью**:  $\sup E$ .

Наибольшая из нижних граней множества  $E$  называется **точной нижней гранью**:  $\inf E$ .

**Теорема 1.1.1** (О существовании точной верхней (нижней) грани): Любое ограниченное сверху (снизу) непустое множество  $E \subset \mathbb{R}$  имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

*Доказательство:* Пусть  $B$  – множество верхних граней множества  $E$ . Введём обозначение  $A := \mathbb{R} \setminus B$ .

Тогда если произвольное число  $a$  меньше какого-то  $x \in E$ , то оно точно не верхняя грань  $E \Rightarrow a \in A$ .

Заметим также свойство множества  $B$ :

$$\forall b \in B : \forall x > b : x \in B$$

Тогда по одной из аксиом действительных чисел

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A : \forall b \in B : a \leq c \leq b$$

Пусть  $\sup E := c$ . Проверим свойства точной верхней грани:

1.  $c$  является верхней гранью

От противного. Пусть  $c \notin B$ , тогда  $\exists x \in B : x > c$ , причём  $c < \frac{x+c}{2} < x$ .

Но тогда заметим, что  $\frac{x+c}{2} \in A$ , что противоречит выбору  $c$  как числа больше либо равного любого элемента  $A$

2.  $c$  является наименьшей из верхних граней

От противного. Пусть  $\exists M \in B : M < c$ . Но тогда  $M < \frac{M+c}{2} < c$ , причём  $\frac{M+c}{2} \in B$ , что противоречит выбору  $c$  как числа меньше либо равного любого элемента  $B$ .

□

**Теорема 1.1.2** (Вейерштрасса): Каждая ограниченная сверху (снизу) неубывающая (невозрастающая) последовательность сходится, причём её предел равен точной верхней (нижней) грани.

*Доказательство:*  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена сверху  $\Rightarrow \exists \sup \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = l$

Отсюда:

1.  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq l < l + \varepsilon$
2.  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : l - \varepsilon < x_N$  (по определению супремума)

Заметим, что получилось в точности определение предела.

□

**Теорема 1.1.3** (Принцип Кантора вложенных отрезков): Всякая последовательность вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ , то есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

имеет непустое пересечение, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

*Доказательство:* Из вложенности очевидно следует

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n, b_{n+1} \leq b_n$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_1, b_n \geq a_1$$

Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = b$$

А значит отрезок  $[a, b]$  (возможно вырожденный) включён в пересечение всех отрезков.

□

**Теорема 1.1.4** (Больцано-Вейерштрасса): Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство:* Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  – рассматриваемая ограниченная последовательность, то есть

$$\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_1 \leq x_n \leq b_1$$

Заметим, что один из отрезков  $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$  содержит бесконечно много элементов последовательности.

Пусть  $[a_2, b_2]$  – тот из отрезков, который содержит бесконечно много элементов.

Продолжая данный трюк счётное количество раз получим последовательность вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ . Также заметим, что данные отрезки стягиваются:

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$$

Тогда по принципу Кантора:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

Осталось построить подпоследовательность, будем брать  $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ , причём так, чтобы  $n_k > n_{k-1}$ . Очевидно,  $n_1 = 1$ . Существование предела также очевидно:

$$0 \leq |c - x_{n_k}| \leq b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

□

## 1.2. Критерий Коши

**Определение 1.2.1:** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

**Теорема 1.2.1** (Критерий Коши сходимости числовой последовательности): Числовая последовательность сходится  $\Leftrightarrow$  она фундаментальна.

*Доказательство:*  $\Rightarrow$  По определению предела:

$$\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника в условиях предела:

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - l + l - x_n| \leq |x_{n+p} - l| + |x_n - l| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$  Вначале докажем, что из фундаментальности следует ограниченность:

$$\varepsilon := 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < 1$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : \min(x_1, \dots, x_N, x_{N+1} + 1) \leq x_n \leq \max(x_1, \dots, x_N, x_{N+1} + 1)$$

Тогда из ограниченной последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  по теореме Больцано-Вейерштрасса достанем сходящуюся подпоследовательность:

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \exists l : \forall \varepsilon > 0 : \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) : |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Также по определению фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

Объединим эти два условия и получим требуемое:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 = \max(N(\varepsilon), n_{K(\varepsilon)+1}) : \forall n > N_0 :$$

$$|x_n - l| = |x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}} + x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l| \leq |x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}}| + |x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l| < \varepsilon$$

□

## 2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней

### 2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

**Определение 2.1.1:** Пусть  $f$  определена в некоторой окрестности  $U_{\delta_0}(x_0)$ , где  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , то функция называется **непрерывной в точке  $x_0$** .

**Определение 2.1.2:**  $f$  называется **непрерывной на множестве  $X \subset \mathbb{R}$** , если

$$\forall x_0 \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

**Теорема 2.1.1** (Первая теорема Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции): Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то  $f$  ограничена на  $[a, b]$ .

*Доказательство:* От противного, пусть  $f$  неограничена сверху. Тогда

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = +\infty$$

То есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$$

Причём  $\forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n \leq b$ , то есть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  – ограниченная, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

Однако из  $f(x_{n_k}) > n$  следует, что  $f(x_0) = \infty$ . Противоречие.  $\square$

### 2.2. Достижение точных верхних и нижних граней

**Теорема 2.2.1** (Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях): Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$\exists x', x'' \in [a, b] : f(x') = \sup_{x \in [a, b]} f(x); \quad f(x'') = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

*Доказательство:* Пусть  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Тогда по определению супремума

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in [a, b] : M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

В том числе для  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b] : \forall n \in \mathbb{N} : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = M$$

Последнее равенство было получено устремлением  $k \rightarrow \infty$  в неравенстве  $M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$ .

Таким образом,  $M$  действительно достигим функцией  $f$  в точке  $x_0$ . Для инфимума аналогично.  $\square$

### 3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

**Теорема 3.1** (Больцано-Коши о промежуточных значениях): Пусть  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ . Тогда

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : c := f(x_1) < d := f(x_2) : \forall e \in (c, d) : \exists \gamma \in [a, b] : f(\gamma) = e$$

*Доказательство:* Рассмотрим частный случай  $c < e = 0 < d$ .

Построим последовательность отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $[a_1, b_1] = [x_1, x_2]$  (мы не знаем в каком порядке идут иксы).

Заметим, что  $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ .

Рассмотрим  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ . Какие могут быть случаи?

- Если  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ , то мы победили и останавливаемся.
- Если  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$ , то  $a_2 := a_1, b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ .
- Если  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$ , то  $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 := b_1$ .

Либо после конечного числа шагов мы найдём требуемую точку, либо построим последовательность стягивающихся отрезков:

$$b_n - a_n = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{n-1}}$$

Тогда по принципу Кантора  $\{\gamma\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ , причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \gamma \in [a, b]$$

Тогда в силу непрерывности  $f$ :

$$f(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Заметим, что после каждой итерации алгоритма изначальное свойство сохраняется:

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

Совершив предельный переход в неравенстве, получим

$$f^2(\gamma) \leq 0$$

Из чего следует  $f(\gamma) = 0$ .

В общем случае рассматривается вспомогательная функция  $F(x) = f(x) - e$ .  $\square$

### 4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

#### 4.1. Теорема Ролля

**Определение 4.1.1:** Пусть  $f$  определена в некоторой  $\delta_0$  окрестности точки  $x_0$ . Если

$$\exists \delta \in (0, \delta_0) : \forall x \in U_{\delta}(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$$

то  $x_0$  – **точка локального максимума**.

Также аналогично вводятся определения локального минимума, а также строгие экстремумы, в которых неравенство строгое.

**Теорема 4.1.1** (Ферма о необходимом условии локального экстремума): Если  $x_0$  – точка локального экстремума функции  $y = f(x)$ , дифференцируемой в  $x_0$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство:* БОО  $x_0$  – точка локального максимума.

Заметим, что тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

А при существовании производной оба этих предела совпадают, поэтому производной в  $x_0$  остаётся лишь быть равной нулю.  $\square$

**Теорема 4.1.2** (Ролля): Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ , причём  $f(a) = f(b)$ , то

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

*Доказательство:* Заметим, что если  $f \equiv \text{const}$ , то утверждение тривиально.

Иначе,  $f$  непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists m < M : m = \min_{x \in [a, b]} f(x); \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

Заметим, что либо  $m \neq f(a)$ , либо  $M \neq f(a)$ .

Это значит, что существует локальный минимум или максимум в некоторой точке  $c \in (a, b)$ , а по теореме Ферма мы знаем, что  $f'(c) = 0$ .  $\square$

## 4.2. Теоремы Лагранжа и Коши

**Теорема 4.2.1** (Обобщённая теорема о среднем): Если  $f, g$  непрерывны на  $[a, b]$ , дифференцируемы на  $(a, b)$ , то

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

*Доказательство:* Рассмотрим

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

Заметим, что  $h$  всё ещё непрерывна на отрезке и дифференцируема на интервале, причём

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(a)$$

То есть  $h$  удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Требуемое доказано.  $\square$

**Теорема 4.2.2** (Лагранжа о среднем): Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ , то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

*Доказательство:* В обобщённой теореме о среднем возьмём  $g(x) = x$ .  $\square$

**Теорема 4.2.3** (Коши о среднем): Если  $f, g$  непрерывны на  $[a, b]$ , дифференцируемы на  $(a, b)$  и  $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ , то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство:* Очевидная интерпретация обобщённой теоремы о среднем.

Необходимо уточнить лишь, почему  $g(b) - g(a) \neq 0$ , чтобы мы смогли поделить на него.

Если бы  $g(b) = g(a)$ , то по теореме Ролля  $\exists c : g'(c) = 0$ , что противоречит с условием текущей теоремы.  $\square$

## 5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа

### 5.1. Член в форме Лагранжа

**Лемма 5.1.1:** Если  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $\exists!$  многочлен степени  $\leq n$  такой, что

$$f(x_0) = P_n(f, x_0); f'(x_0) = P'_n(f, x_0); \dots; f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(f, x_0)$$

Этот многочлен имеет вид

$$P_{n(f,x)} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

и называется **многочленом Тейлора** степени  $n$  относительно точки  $x_0$ .

*Доказательство:* Очевидно проверяем каждую производную  $\square$



**Лемма 5.1.2** (Об отношении): Если  $\varphi, \psi$   $(n+1)$  раз дифференцируемы в  $U_\delta(x_0)$ , причём

$$\forall k = \overline{0, n} : \varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) = 0$$

но

$$\forall k = \overline{0, n} : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \psi^{(k)}(x) \neq 0$$

то

$$\forall x \in U_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$$

*Доказательство:* Заметим, что  $\varphi, \psi$  удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем. Тогда

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x) : \frac{\varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_0}{\psi(x) - \underbrace{\psi(x_0)}_0} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \underbrace{\varphi'(x_0)}_0}{\psi'(\xi_1) - \underbrace{\psi'(x_0)}_0} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = \dots = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$

□

**Теорема 5.1.1** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа): Если  $f$   $(n+1)$  раз дифференцируема в  $U_\delta(x_0)$ ,  $\delta > 0$ , то

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : f(x) - P_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

*Доказательство:* Сведём к предыдущей лемме об отношении:

$$\varphi(x) := f(x) - P_n(f, x); \quad \psi(x) := (x - x_0)^{n+1}$$

Все требуемые свойства проверяются очевидно.

□

## 5.2. Член в форме Пеано

**Теорема 5.2.1** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано): Если  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ , то

$$f(x) - P_n(f, x) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$$

где  $P_{n(f, x)}$  — многочлен Тейлора степени  $n$  функции  $f$  относительно  $x_0$ .

*Доказательство:* По определению, если  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке, то она  $n-1$  раз дифференцируема в окрестности.

Снова используем лемму об отношении, но для случая  $n-1$ :

$$\varphi(x) := f(x) - P_n(f, x); \quad \psi(x) = (x - x_0)^n$$

Получим, что

$$\exists \xi \in (x_0, x) : \frac{f(x) - P_n(f, x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n!(\xi - x_0)}$$

Заметим, что при  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \xi \rightarrow x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(f, x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n!(\xi - x_0)} = \frac{1}{n!} (f(x_0) - P_n(f, x_0))^{(n)} = 0$$

□

## 6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.

### 6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции

**Теорема 6.1.1:** Пусть  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда

1.  $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$  — неубывающая на  $(a, b)$
2.  $\forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$  — невозрастающая на  $(a, b)$
3.  $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$  — возрастающая на  $(a, b)$
4.  $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$  — убывающая на  $(a, b)$

*Доказательство:*

1.  $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$  По теореме Лагранжа:

$$\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b : \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$$

То есть для произвольных  $x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Обратно, пусть  $f(x)$  неубывающая. Тогда

$$\forall x_0 \in (a, b) : \forall \Delta x : \text{sign} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \text{sign} \Delta x$$

Ну и тогда при  $|\Delta x| < \min(x_0 - a, b - x_0)$ :

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

Совершим предельный переход в неравенстве и получим требуемое.

2. Аналогично предыдущему пункту
3. Контрпримером для  $\Leftarrow$  является  $f(x) = x^3$  в точке 0
4. Контрпримером для  $\Leftarrow$  является  $f(x) = -x^3$  в точке 0

□

### 6.2. Достаточные условия локальных экстремумов

**Теорема 6.2.1** (Первое достаточное условие экстремума функции): Пусть  $f$  непрерывна в  $U_{\delta_0}(x_0)$  и дифференцируема в  $\dot{U}_{\delta_0}(x_0)$ ,  $\delta_0 > 0$ :

1. Если  $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) > 0$  и  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) < 0$ , то  $x_0$  — точка строгого локального максимума  $f$
2. Если  $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) < 0$  и  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) > 0$ , то  $x_0$  — точка строгого локального минимума  $f$

*Доказательство:* По сути просто заменили в определении локального экстремума монотонность на достаточное условие знакопостоянности производной из предыдущей теоремы.  $\square$

**Теорема 6.2.2** (Второе достаточное условие локального экстремума): Если  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0, \forall k = \overline{1, n-1} : f^{(k)}(x_0) = 0$ , то

1. Если  $n$  чётно, то  $f$  имеет в точке  $x_0$  локальный минимум при  $f^{(n)}(x_0) > 0$  и локальный максимум при  $f^{(n)}(x_0) < 0$ .
2. Если  $n$  нечётное, то  $f$  не имеет локального экстремума в точке  $x_0$ .

*Доказательство:*

1. Воспользуемся разложением в Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (учитывая факт нулевых производных):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$$

Так как  $n$  чётно, то  $n = 2m$ :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2m}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1), x \rightarrow x_0$$

Левая часть в некоторой окрестности точки  $x_0$  имеет тот же знак, что и правая. Тогда в силу чётной степени в знаменателе левой части получаем, что разность  $f(x) - f(x_0)$  одного знака с  $n$ -ой производной.

2. Рассмотрим  $f(x) = x^3$ .

$\square$

### 6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости

**Определение 6.3.1:**  $f$  называется **выпуклой (вниз) (вогнутой вверх)** на  $(a, b)$ , если её график лежит не выше хорды, стягивающей любые две точки этого графика над  $(a, b)$ .

$f$  называется **выпуклой (вверх) (вогнутой вниз)** на  $(a, b)$ , если её график лежит не ниже хорды, стягивающей любые две точки этого графика над  $(a, b)$ .

**Теорема 6.3.1:** Пусть  $f$  дважды дифференцируема на  $(a, b)$ :

1.  $f$  выпукла вниз на  $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$ .
2.  $f$  выпукла вверх на  $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$ .
3.  $f$  строго выпукла вниз на  $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$ .
4.  $f$  строго выпукла вверх на  $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$ .

*Доказательство:*

1.  $\Leftarrow$  Рассмотрим эквивалентное определение выпуклости:

$$\forall x_0, x_1 : a < x_0 < x_1 < b : \forall t \in [0, 1] :$$

$$x_t := tx_0 + (1-t)x_1 : f(x_t) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

Разложим  $f$  в формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке  $x_t$ :

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x_t) : f(x_0) = f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_0 - x_t)^2$$

$$\exists \xi_2 \in (x_1, x_t) : f(x_1) = f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_1 - x_t)^2$$

Из-за знакопостоянности второй производной из этих равенств следуют следующие неравенства:

$$f(x_0) \geq f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t)$$

$$f(x_1) \geq f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t)$$

Умножим первое на  $t$ , второе на  $1-t$  и сложим их:

$$tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \geq f(x_t) + \underbrace{f'(x_t)(tx_0 + (1-t)x_1 - x_t)}_0$$

$\Rightarrow$  Рассмотрим произвольную точку  $x_0 \in (a, b)$  и достаточно малую окрестность  $\delta := \min(x_0 - a, b - x_0)$ . Тогда

$$\forall u \in (-\delta, \delta) : x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - u) + \frac{1}{2}(x_0 + u) : f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u)$$

Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x_0 \pm u) = f(x_0) \pm f'(x_0)u + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \rightarrow 0$$

В прошлой строчке мы записали сразу два равенства благодаря  $\pm$ , давайте умножим каждое на  $\frac{1}{2}$  и сложим их:

$$\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \rightarrow 0$$

Тогда при достаточно малых  $u$   $\frac{f''(x_0)}{2}u^2$  обязано будет стать такого же знака, как и  $\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) - f(x_0) \geq 0$

2. Аналогично
3.  $\Leftarrow$  аналогично только со строгими неравенствами, а  $\Rightarrow$  вообще говоря не верно, например, для  $f(x) = x^4$
4.  $\Leftarrow$  аналогично только со строгими неравенствами, а  $\Rightarrow$  вообще говоря не верно, например, для  $f(x) = -x^4$

□

## 7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте

**Определение 7.1:** Компактным множеством в метрическом пространстве  $X$  называется такое множество  $K$ , что из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

**Определение 7.2:** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $X$  – метрическое пространство, называется равномерно непрерывной на множестве  $X' \subset X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X' : \rho(x_1, x_2) < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

**Теорема 7.1** (Кантора о равномерной непрерывности): Если  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на компактном множестве  $K \subset \mathbb{R}^n$ , то она равномерно непрерывна на  $K$ .

*Доказательство:* От противного, выпишем отрицание равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in K : \|x_1 - x_2\| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Выбирая  $\delta := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}, \dots$  построим последовательность пар из отрицания непрерывности:  $\{(x_{1,m}, x_{2,m})\}_{m=1}^{\infty} \subset K^2$ .

Причём

$$\forall m \in \mathbb{N} : \|x_{1,m} - x_{2,m}\| < \frac{1}{m} : |f(x_{1,m}) - f(x_{2,m})| \geq \varepsilon$$

По одному из определений компактности выделим из последовательности пар подпоследовательность, у которой сходятся первые координаты:

$$\exists \{(x_{1,m_k}, x_{2,m_k})\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{1,m_k} = x_0 \in K$$

Причём заметим, что (комбинируем то, как мы строили последовательность пар и сходимости первых координат подпоследовательности):

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > 0 : \|x_{2,m_k} - x_0\| \leq$$

$$\|x_{1,m_k} - x_0\| + \|x_{1,m_k} - x_{2,m_k}\| < 2\varepsilon$$

То есть

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{1,m_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2,m_k} = x_0 \quad \xRightarrow{\text{непрерывность } f} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{1,m_k}) - f(x_{2,m_k})) &= 0 \end{aligned}$$

Противоречие! □

## 8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

**Определение 8.1:** Пусть  $f$  определена в некоторой окрестности  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Полным приращением**  $f$  в точке  $x_0$  называется

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n} + \Delta x_n) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$$

$f$  называется **дифференцируемой** в  $x_0$ , если

$$\Delta f(x_0) = (A, \Delta x) + o(\|\Delta x\|), \Delta x \rightarrow 0$$

где  $A \in \mathbb{R}^n$  называется **градиентом**:  $\text{grad } f(x_0) = A$

**Определение 8.2:** Дифференциалом дифференцируемой в  $x_0$  функции  $f$  назовём выражение  $(A, \Delta x)$  из определения дифференцируемости.

**Определение 8.3:** Частной производной в точке  $x_0$  называется предел (если он существует):

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_{0,1}, \dots, x_{0,j} + \Delta x, \dots, x_{0,n}) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,j}, \dots, x_{0,n})}{\Delta x}$$

**Теорема 8.1** (Необходимое условие дифференцируемости): Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ , то существуют частные производные  $\forall j = \overline{1, n}$ , причём

$$\text{grad } f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

*Доказательство:* Сразу следует из определения - есть предел по всем многомерным приращениям, а значит и по однокоординатным в том числе.  $\square$

**Теорема 8.2** (Достаточное условие дифференцируемости): Если  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , вместе со своими частными производными, причём они непрерывны в  $x_0$ , то  $f$  дифференцируема в  $x_0$ .

*Доказательство:* Воспользуемся  $n$  раз «умным нулём», каждый из которых будет снимать приращение по одной из координат:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= \\ f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n} + \Delta x_n) - f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}) + \\ & f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}) - f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1}, x_{0,n}) \\ & \quad + \dots + \\ & f(x_{0,1} + \Delta x_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) = \\ & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, \xi_n) \Delta x_n + \\ & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-2} + \Delta x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_{0,n}) \Delta x_{n-1} \\ & \quad + \dots + \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \Delta x_1 = \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \Delta x_i + o(\|\Delta x\|), \Delta x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\square$

## 9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением

**Определение 9.1:** Кубом радиуса  $\delta$  вокруг точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  назовём

$$K_{\delta, x_0} = \times_{k=1}^n (x_0^k - \delta, x_0^k + \delta)$$

где под  $\times$  подразумевается декартово произведение.

**Теорема 9.1:** Пусть  $F(x, y) = F(x_1, \dots, x_n, y)$  дифференцируема в окрестности точки  $(x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0)$ .

Её производная  $\frac{\partial F}{\partial y}$  непрерывна в этой окрестности, причём  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$ :

$$\forall x \in K_{\delta, x_0} : \exists! y = \varphi(x) : \forall (x, y) \in K_{\delta, x_0} \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) :$$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x) \wedge \exists \varphi'(x_0)$$

*Доказательство:* БОО будем считать, что  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ .

По непрерывности частной производной,  $\exists$  окрестность точки  $(x_0, y_0)$ , в которой  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ .

Тогда из непрерывности  $F$  по  $y$  и знакоопределённости производной следует

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Расширяем территорию дальше, из непрерывности  $F$  по  $x$  следуют

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in K_{\delta, x_0} : F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции берём существование, а из знакоопределённости производной единственность:

$$\exists! \varphi(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Заметим, что  $\varphi$  непрерывна по построению в  $(x_0, y_0)$ : мы брали  $x$  из  $2\delta$  окрестности точки  $x_0$ , а значение лежало в  $2\varepsilon$  окрестности точки  $y_0$ .

Теперь докажем дифференцируемость  $\varphi$ , для этого распишем дифференцируемость  $F$ :

$$F(x, y) - \underbrace{F(x_0, y_0)}_0 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) \cdot (x_k - x_0^k) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \alpha(x, y)$$

где  $\alpha = o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|)$ ,  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ .

Воспользуемся умножением на «умную единицу»:

$$\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(x, y) \cdot (x_i - x_0^i)^2}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2} + \frac{\alpha(x, y) \cdot (y - y_0)^2}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2}$$

Введём новые обозначения:

$$\alpha_i(x, y) := \frac{\alpha(x, y) \cdot (x_i - x_0^i)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2}; \quad \beta(x, y) := \frac{\alpha(x, y) \cdot (y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2}$$

Тогда

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) + \alpha_k(x, y) \right) (x_k - x_0^k) + \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(x, y) \right) (y - y_0)$$

Подставляя  $y = \varphi(x)$  в выражение выше, будем использовать новые обозначения:

$$\tilde{\alpha}_k(x) := \alpha_k(x, \varphi(x)); \quad \tilde{\beta}(x) := \beta(x, \varphi(x))$$

Таким образом,

$$\underbrace{F(x, \varphi(x))}_0 = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x) \right) (x_k - x_0^k) + \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x) \right) (\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

Выразим приращение  $\varphi$ :

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))} + \gamma_k(x) \right) (x_k - x_0^k)$$

где

$$\gamma_k(x) := - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x)}$$

Остаётся заметить, что  $\tilde{\alpha}_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ ;  $\tilde{\beta}(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ , а это значит, что

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \sum_{k=1}^n A_k (x_k - x_0^k) + \gamma(x); \quad \gamma(x) = o(\|x - x_0\|), x \rightarrow x_0$$

Что и является требуемой дифференцируемостью  $\varphi$  в  $x_0$ .  $\square$

## 10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия.

### 10.1. Необходимые условия

**Определение 10.1.1:** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется точкой **локального максимума** функции  $f(x)$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$$

**Определение 10.1.2:** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется точкой **локального минимума** функции  $f(x)$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$$

**Определение 10.1.3:** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется точкой **строгого локального максимума** функции  $f(x)$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) < f(x_0)$$

**Определение 10.1.4:** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется точкой **строгого локального минимума** функции  $f(x)$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) > f(x_0)$$

**Теорема 10.1.1** (Необходимые условия локального экстремума): Если  $x_0$  — точка локального экстремума функции  $f(x)$ , дифференцируемой в окрестности точки  $x_0$ , то  $df(x) \equiv 0$ .



*Доказательство:* Рассмотрим для каждого  $k = \overline{1, n}$ :

$$\psi(x_k) = f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n), \quad \text{где } x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$$

Тогда заметим, что  $\psi$  дифференцируема в окрестности  $x_0^k$ , применяя теорему о необходимом условии экстремума функции одного переменного, получим

$$\psi'(x_0^k) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0$$

В силу произвольности  $k$  и того, что дифференциал – это вектор частных производных, получим требуемое.  $\square$

## 10.2. Достаточные условия

**Определение 10.2.1:** Если  $f$  дифференцируема в окрестности точки  $x_0$  и  $df(x_0) \equiv 0$ , то  $x_0$  называется **стационарной точкой** функции  $f$ .

**Теорема 10.2.1** (Достаточные условия локального экстремума): Если  $x_0$  – стационарная точка функции  $f$ , дважды дифференцируемой в точке  $x_0$ , то

1. Если  $d^2f(x_0)$  – положительно определённая квадратичная форма, то  $x_0$  – точка строгого локального минимума функции  $f$
2. Если  $d^2f(x_0)$  – отрицательно определённая квадратичная форма, то  $x_0$  – точка строгого локального максимума функции  $f$
3. Если  $d^2f(x_0)$  – неопределённая квадратичная форма, то  $x_0$  не является точкой локального экстремума

*Доказательство:*

1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0) + o(\rho^2), \quad \rho \rightarrow 0$$

где

$$dx_k = x_k - x_0^k, k = \overline{1, n}; \quad \rho = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_0^k)^2} = \|dx\|_2$$

Тогда (в условиях  $df(x_0) \equiv 0$  и  $\xi_k := \frac{dx_k}{\|dx\|}$ ):

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2f(x_0) + o(\rho^2) =$$

$$\frac{1}{2}\rho^2 \left( \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \xi_i \xi_j}_{F(\xi_1, \dots, \xi_n)} + o(1) \right), \quad \rho \rightarrow 0$$

В следствие нормировки, очевидно,  $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1$ .

Таким образом, минимум введённого функционала  $F$  на сфере (компактной в  $\mathbb{R}^n$ ) будет достигаться:

$$\min_{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1} F(\xi_1, \dots, \xi_n) =: C > 0$$

Таким образом, для достаточно маленьких  $\rho$ :

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{C}{4}\rho^2 > 0$$

2. Аналогично

3. Вводим  $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$  аналогично предыдущим пунктам, из-за того что  $d^2f$  – неопределённая, то

$$\exists \xi_1(x_1), \xi_2(x_2) : F(\xi_1^1, \dots, \xi_1^n) > 0 \wedge F(\xi_2^1, \dots, \xi_2^n) < 0$$

Тогда при достаточно малых  $\rho$ :

$$\text{sign}(f(x_1) - f(x_0)) = \text{sign } F(\xi_1) > 0; \text{sign}(f(x_2) - f(x_0)) = \text{sign } F(\xi_2) < 0$$

Что и требовалось.

□

## 11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница.

### 11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом

**Определение 11.1.1:** Разбиением  $P$  отрезка  $[a, b]$  называется конечное множество точек отрезка  $[a, b]$ :

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b; \quad \Delta x_k := x_k - x_{k-1}; k = \overline{1, n}$$

**Определение 11.1.2:** Диаметром разбиения  $P$  называется

$$\Delta(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

**Определение 11.1.3:** Верхней суммой Дарбу разбиения  $P$  функции  $f$  называется

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

**Определение 11.1.4:** Нижней суммой Дарбу разбиения  $P$  функции  $f$  называется

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

**Определение 11.1.5:** Функция  $f$  называется интегрируемой по Риману на  $[a, b]$  ( $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists P : U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

**Определение 11.1.6:** Интегралом Римана интегрируемой по Риману на  $[a, b]$  функции  $f$  называется

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_P U(P, f) = \sup_P L(P, f)$$

**Теорема 11.1.1** (Основные свойства интеграла Римана):

1. (Линейность) Если  $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ , то  $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ , причём

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

Кроме того,  $\forall c \in \mathbb{R}$  выполняется, что  $cf_1 \in \mathcal{R}[a, b]$ , причём

$$\int_a^b cf_1(x) dx = c \int_a^b f_1(x) dx$$

2. (Монотонность) Если  $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $\forall x \in [a, b] : f_1(x) \leq f_2(x)$ , то

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

3. (Аддитивность):

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \forall c \in (a, b) : f \in \mathcal{R}[a, c] \wedge f \in \mathcal{R}[c, b]$$

$$\text{Причём } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. (Оценка) Если  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$ , то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a)$$

**Определение 11.1.7:** Пусть  $\forall b' \in (a, b) : f \in \mathcal{R}[a, b']$ . Тогда  $F(b') = \int_a^{b'} f(x) dx$  называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

Будем считать, что  $F(a) = 0$ , а для  $\alpha > \beta$ :

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = - \int_\beta^\alpha f(x) dx$$

**Теорема 11.1.2** (Основные свойства интеграла с переменным верхним пределом): Если  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , то интеграл с переменным верхним пределом  $F(x)$  непрерывен на  $[a, b]$ .

Если, кроме того,  $f$  непрерывна в  $x_0 \in [a, b]$ , то  $F(x)$  дифференцируема в  $x_0$ , причём  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

*Доказательство:* Непрерывность следует из комбинирования свойств аддитивности и оценки:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \wedge x_2 - x_1 < \frac{\varepsilon}{M} : |F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx \leq M(x_2 - x_1) < \varepsilon$$

В условиях непрерывности  $f$ , докажем, что производная интеграла действительно равна  $f(x_0)$ :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} |f(t) - f(x_0)|$$

Благодаря непрерывности  $f$  мы знаем, что при  $x \rightarrow x_0$  сможем оценить итоговый супремум сверху  $\varepsilon$ .  $\square$

## 11.2. Формула Ньютона-Лейбница

**Определение 11.2.1:** Первообразной функции  $f$  на  $[a, b]$  называется такая дифференцируемая на  $[a, b]$  функция  $F$ , что

$$\forall t \in [a, b] : F'(t) = f(t)$$

**Определение 11.2.2:** Интегральной суммой  $S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$  называется

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

где  $P : a = x_0 < \dots < x_n = b, \forall i = \overline{1, n} : t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

**Теорема 11.2.1** (Интеграл как предел интегральных сумм):

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \exists \lim_{\Delta(P) \rightarrow 0} S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$$

При этом  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta(P) \rightarrow 0} S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$

**Теорема 11.2.2** (Основная теорема интегрального исчисления): Если  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  имеет первообразную  $F$  на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

*Доказательство:* Для любого разбиения  $P$ :

$$F(b) - F(a) \stackrel{\text{телескопическая сумма}}{=} \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) \stackrel{\text{теорема Лагранжа}}{=} \sum_{k=1}^n F'(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Устремляя  $\Delta(P) \rightarrow 0$  получим, что  $F(b) - F(a)$  равно требуемому интегралу по эквивалентному определению.  $\square$

## 12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда.

### 12.1. Непрерывность суммы функционального ряда

**Определение 12.1.1:** Функциональная последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  сходится равномерно на  $E$  к функции  $f(x)$  ( $f_n \rightrightarrows f$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Определение 12.1.2:** Функциональная последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  **сходится поточечно** на  $E$  к функции  $f(x)$ , если

$$\forall x \in E : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Теорема 12.1.1** (Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности):

$$f_n \xrightarrow[E]{} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

**Определение 12.1.3:** Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ , если равномерно сходится на  $E$  функциональная последовательность  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$

**Теорема 12.1.2** (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ равномерно сходится на } E \Leftrightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

**Теорема 12.1.3** (Предельный переход в равномерно сходящихся последовательностях): Если  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно сходится к  $f$  на множестве  $E$  метрического пространства,  $x_0$  – предельная точка  $E$ , причём

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

То есть оба предела существуют и равны.

*Доказательство:* Воспользуемся критерием Коши равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Совершим предельный переход  $x \rightarrow x_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+p} - a_n| \leq \varepsilon$$

То есть числовая последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  имеет какой-то предел  $a$ , теперь нужно установить, что он равен пределу предельной функции:

$$|f(x) - a| = |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|$$

Стоит упомянуть про кванторы:

- Берём номер  $N$  больший  $N_1$  для равномерного предела функций и  $N_2$  для числового предела  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$
- $\delta$ -окрестность  $x_0$  меньшую требуемой для фиксированного  $f_N(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_N$

□

**Следствие 12.1.3.1:** Если  $f_n(x)$  непрерывна на  $E$ ,  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E$ , то  $f$  непрерывна на  $E$ .

**Теорема 12.1.4** (Предельный переход в функциональных рядах): Если  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ ,  $x_0$  – предельная точка  $E$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  :  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

*Доказательство:* Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм. □

## 12.2. Интегрируемость суммы функционального ряда

**Теорема 12.2.1** (Интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности): Если  $\forall n \in \mathbb{N}$  :  $f_n$  интегрируема по Риману на  $[a, b]$  и  $f_n \rightrightarrows f$  на  $[a, b]$ , то  $f$  интегрируема по Риману на  $[a, b]$  и

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

*Доказательство:* Воспользуемся тем, что каждый элемент функциональной последовательности интегрируем:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 : \exists P : U(P, f_n) - L(P, f_n) < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Далее определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Итак, оценим верхнюю сумму Дарбу предела:

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \left( \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) \Delta x_k = U(P, f_n) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Аналогично для нижней:

$$L(P, f) \geq L(P, f_n) - \frac{\varepsilon}{3}$$

Таким образом,

$$U(P, f) - L(P, f) \leq U(P, f_n) - L(P, f_n) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Мы доказали интегрируемость  $f$ , осталось доказать, что интеграл равен тому, что надо:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b-a) < \varepsilon$$

□

**Теорема 12.2.2** (Интегрирование функциональных рядов): Если  $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  равномерно сходится на  $[a, b]$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in \mathcal{R}[a, b]$  и

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

*Доказательство:* Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм.  $\square$

### 12.3. Дифференцируемость суммы функционального ряда

**Теорема 12.3.1** (Дифференцирование функциональных последовательностей): Если

1.  $f_n$  дифференцируемы на  $(a, b)$
2.  $f_{n'} \rightrightarrows$  на  $(a, b)$
3.  $\exists x_0 \in (a, b) : f_{n(x_0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$

То

1.  $f_n \rightrightarrows f$  на  $(a, b)$
2.  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$
3.  $f_{n'} \rightarrow f'$  на  $(a, b)$

*Доказательство:* Используем равномерную сходимость производных:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in (a, b) : |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

А также сходимость самих функций в точке  $x_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Применим теорему Лагранжа для непрерывных  $f_n$  между произвольной точкой  $x$  и фиксированной  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \exists \xi \in \{x, x_0\} : |(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))| = \\ |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| |x - x_0| \end{aligned}$$

Тогда мы можем доказать фундаментальность самой последовательности:

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &\leq |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| + |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| |x - x_0| < \\ &\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| < \varepsilon \end{aligned}$$

Значит по критерию Коши  $f_n \rightrightarrows f$  на  $(a, b)$ .

Остаётся доказать дифференцируемость  $f$  в произвольной точке  $x \in (a, b)$ , для этого введём вспомогательные функции:

$$\varphi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}; \quad \varphi(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Докажем фундаментальность  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| &= \frac{|(f_{n+p}(t) - f_n(t)) - (f_{n+p}(x) - f_n(x))|}{t - x} \stackrel{\text{теорема Лагранжа}}{=} \\ &|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{aligned}$$

Получили, что  $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$  на  $A := (a, b) \setminus \{x\}$ .

Заметим, что  $x$  – предельная точка  $A$ , тогда применим теорему о непрерывном поточечном пределе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x, t \in A} \varphi_n(t) = \lim_{t \rightarrow x, t \in A} \varphi(t) = f'(x)$$

Заметим, что этими равенствами мы доказываем как существование, так и равенство пределов.  $\square$