Содержание

ГОС по матану

Disclaymer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности

1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Определение 1.1.1: Если $E \subset \mathbb{R}$ – ограниченное сверху (снизу) множество, то $M(m) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\forall x \in E : x \leq M(x \geq m)$$

называется **верхней (нижней) гранью** множества E.

Определение 1.1.2: Наименьшая из верхних граней множества E называется **точной верхней гранью**: $\sup E$.

Наибольшая из нижних граней множества E называется **точной нижней гранью**: $\inf E$.

Теорема 1.1.1 (О существовании точной верхней (нижней) грани): Любое ограниченное сверху (снизу) непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство: Пусть B – множество верхних граней множества E. Введём обозначение $A \coloneqq \mathbb{R} \setminus B$.

Тогда если произвольное число a меньше какого-то $x \in E$, то оно точно не верхняя грань $E \Rightarrow a \in A$.

Заметим также свойство множества B:

$$\forall b \in B : \forall x > b : \; x \in B$$

Тогда по одной из аксиом действительных чисел

$$\exists c \in R : \forall a \in A : \forall b \in B : \; a \leq c \leq b$$

Пусть $\sup E \coloneqq c$. Проверим свойства точной верхней грани:

1. c является верхней гранью

   От противного. Пусть $c \notin B$, тогда $\exists x \in B : x > c$, причём $c < \frac{x+c}{2} < x$.

   Но тогда заметим, что $\frac{x+c}{2} \in A$, что противоречит выбору c как числа больше либо равного любого элемента A
2. c является наименьшей из верхних граней

   От противного. Пусть $\exists M \in B : M < c$. Но тогда $M < \frac{M+c}{2} < c$, причём $\frac{M+c}{2} \in B$, что противоречит выбору c как числа меньше либо равного любого элемента B.

□

Теорема 1.1.2 (Вейерштрасса): Каждая ограниченная сверху (снизу) неубывающая (невозрастающая) последовательность сходится, причём её предел равен точной верхней (нижней) грани.

Доказательство: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху $\Rightarrow \exists \sup \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = l$

Отсюда:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq l < l + \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : l - \varepsilon < x_N$ (по определению супремума)

Заметим, что получилось в точности определение предела. □

Теорема 1.1.3 (Принцип Кантора вложенных отрезков): Всякая последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, то есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

имеет непустое пересечение, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Доказательство: Из вложенности очевидно следует

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n,\ b_{n+1} \leq b_n$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_1, b_n \geq a_1$$

Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = b$$

А значит отрезок $[a, b]$ (возможно вырожденный) включён в пересечение всех отрезков. □

Теорема 1.1.4 (Больцано-Вейерштрасса): Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – рассматриваемая ограниченная последовательность, то есть

$$\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} :\ a_1 \leq x_n \leq b_1$$

Заметим, что один из отрезков $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right], \left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ содержит бесконечно много элементов последовательности.

Пусть $[a_2, b_2]$ – тот из отрезков, который содержит бесконечно много элементов.

Продолжая данный трюк счётное количество раз получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Также заметим, что данные отрезки стягиваются:

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$$

Тогда по принципу Кантора:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}$$

Осталось построить подпоследовательность, будем брать $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, причём так, чтобы $n_k > n_{k-1}$. Очевидно, $n_1 = 1$. Существование предела также очевидно:

$$0 \le \left|c - x_{n_k}\right| \le b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

□

1.2. Критерий Коши

Определение 1.2.1: Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

Теорема 1.2.1 (Критерий Коши сходимости числовой последовательности): Числовая последовательность сходится ⇔ она фундаментальна.

Доказательство: ⇒ По определению предела:

$$\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника в условиях предела:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|x_{n+p} - l + l - x_n\right| \le \left|x_{n+p} - l\right| + |x_n - l| < \varepsilon$$

⇐ Вначале докажем, что из фундаментальности следует ограниченность:

$$\varepsilon \coloneqq 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < 1$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : \min(x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1) \le x_n \le \max(x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1)$$

Тогда из ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по теореме Больцано-Вейерштрасса достанем сходящуюся подпоследовательность:

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \exists l : \forall \varepsilon > 0 : \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) : \ \left|x_{n_k} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Также по определению фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

Объединим эти два условия и получим требуемое:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 = \max\left(N(\varepsilon), n_{K(\varepsilon)+1}\right) : \forall n > N_0 :$$

$$|x_n - l| = \left|x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}} + x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l\right| \le \left|x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}}\right| + \left|x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l\right| < \varepsilon$$

□

2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней

2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Определение 2.1.1: Пусть f определена в некоторой окрестности $U_{\delta_0}(x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Если $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется **непрерывной в точке** x_0.

Определение 2.1.2: f называется **непрерывной на множестве** $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall x_0 \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x - x_0| < \delta : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.1 (Первая теорема Вейшерштрасса о непрерывной на отрезке функции): Если f непрерывна на $[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство: От противного, пусть f неограничена сверху. Тогда

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = +\infty$$

То есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : \ f(x_n) > n$$

Причём $\forall n \in \mathbb{N} : a \le x_n \le b$, то есть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0)$$

Однако из $f(x_n) > n$ следует, что $f(x_0) = \infty$. Противоречие. □

2.2. Достижение точных верхних и нижних граней

Теорема 2.2.1 (Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях): Если f непрерывна на $[a, b]$, то

$$\exists x', x'' \in [a, b] : \ f(x') = \sup_{x\in[a,b]} f(x); \quad f(x'') = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

Доказательство: Пусть $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда по определению супремума

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in [a, b] : \ M - \varepsilon < f(x) \le M$$

В том числе для $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b] : \forall n \in \mathbb{N} : \ M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0) = M$$

Последнее равенство было получено устремлением $k \to \infty$ в неравенстве $M - \frac{1}{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \le M$.

Таким образом, M действительно достижим функцией f в точке x_0. Для инфимума аналогично. □

3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

Теорема 3.1 (Больцано-Коши о промежуточных значениях): Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : c := f(x_1) < d := f(x_2) : \ \forall e \in (c, d) : \exists \gamma \in [a, b] : f(\gamma) = e$$

Доказательство: Рассмотрим частный случай $c < e = 0 < d$.

Построим последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, где $[a_1, b_1] = \{x_1, x_2\}$ (мы не знаем в каком порядке идут иксы).

Заметим, что $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

Рассмотрим $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$. Какие могут быть случаи?

- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, то мы победили и останавливаемся.
- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$, то $a_2 := a_1, b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$, то $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 := b_1$.

Либо после конечного числа шагов мы найдём требуемую точку, либо построим последовательность стягивающихся отрезков:

$$b_n - a_n = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{n-1}}$$

Тогда по принципу Кантора $\{\gamma\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причём

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma \in [a, b]$$

Тогда в силу непрерывности f:

$$f(\gamma) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Заметим, что после кажой итерации алгоритма изначальное свойство сохраняется:

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

Совершив предельный переход в неравенстве, получим

$$f^2(\gamma) \le 0$$

Из чего следует $f(\gamma) = 0$.

В общем случае рассматривается вспомогательная функция $F(x) = f(x) - e$. □

4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

4.1. Теорема Ролля

Определение 4.1.1: Пусть f определена в некоторой δ_0 окрестности точки x_0. Если

$$\exists \delta \in (0, \delta_0) : \forall x \in U_{\delta(x_0)} : \ f(x) \le f(x_0)$$

то x_0 – **точка локального максимума**.

Также аналогично вводятся определения локального минимума, а также строгие экстремумы, в которых неравенство строгое.

Теорема 4.1.1 (Ферма о необходимом условии локального экстремума): Если x_0 – точка локального экстремума функции $y = f(x)$, дифференцируемой в x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: БОО x_0 – точка локального максимума.

Заметим, что тогда

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq 0; \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

А при существовании производной оба этих предела совпадают, поэтому производной в x_0 остаётся лишь быть равной нулю. □

Теорема 4.1.2 (Ролля): Если f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), причём $f(a) = f(b)$, то

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Доказательство: Заметим, что если $f \equiv \text{const}$, то утверждение тривиально.

Иначе, f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists m < M : \ m = \min_{x\in[a,b]} f(x); \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Заметим, что либо $m \neq f(a)$, либо $M \neq f(a)$.

Это значит, что существует локальный минимум или максимум в некоторой точке $c \in (a, b)$, а по теореме Ферма мы знаем, что $f'(c) = 0$. □

4.2. Теоремы Лагранжа и Коши

Теорема 4.2.1 (Обобщённая теорема о среднем): Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Доказательство: Рассмотрим

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

Заметим, что h всё ещё непрерывна на отрезке и дифференцируема на интервале, причём

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(a)$$

То есть h удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Требуемое доказано. □

Теорема 4.2.2 (Лагранжа о среднем): Если f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : \ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Доказательство: В обобщённой теореме о среднем возьмём $g(x) = x$. $\square$

Теорема 4.2.3 (Коши о среднем): Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$, то

$$\exists c \in (a, b) : \ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство: Очевидная интерпретация обобщённой теоремы о среднем.

Необходимо уточнить лишь, почему $g(b) - g(a) \neq 0$, чтобы мы смогли поделить на него.

Если бы $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля $\exists c : \ g'(c) = 0$, что противоречит с условием текущей теоремы. $\square$

5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа

5.1. Член в форме Лагранжа

Лемма 5.1.1: Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то $\exists!$ многочлен степени $\leq n$ такой, что

$$f(x_0) = P_n(f, x_0); f'(x_0) = P'(f, x_0); ...; f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(f, x_0)$$

Этот многочлен имеет вид

$$P_{n(f,x)} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

и называется **многочленом Тейлора** степени n относительно точки x_0.

Доказательство: Очевидно проверяем каждую производную $\square$

Лемма 5.1.2 (Об отношении): Если φ, ψ $(n + 1)$ раз дифференцируемы в $U_\delta(x_0)$, причём

$$\forall k = \overline{0, \text{n}} : \ \varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) = 0$$

но

$$\forall k = \overline{0, \text{n}} : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \ \psi^{(k)}(x) \neq 0$$

то

$$\forall x \in U_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : \ \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$$

Доказательство: Заметим, что φ, ψ удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем. Тогда

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x) : \ \frac{\varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_{0}}{\psi(x) - \underbrace{\psi(x_0)}_{0}} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \underbrace{\varphi'(x_0)}_{0}}{\psi'(\xi_1) - \underbrace{\psi'(x_0)}_{0}} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = ... = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$

$\square$

Теорема 5.1.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа):
Если f $(n+1)$ раз дифференцируема в $U_\delta(x_0), \delta > 0$, то
$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : \; f(x) - P_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Доказательство: Сведём к предыдущей лемме об отношении:
$$\varphi(x) \coloneqq f(x) - P_n(f, x); \quad \psi(x) \coloneqq (x - x_0)^{n+1}$$
Все требуемые свойства проверяются очевидно. □

5.2. Член в форме Пеано

Теорема 5.2.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано):
Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то
$$f(x) - P_n(f, x) = o\big((x - x_0)^n\big), x \to x_0$$
где $P_{n(f,x)}$ – многочлен Тейлора степени n функции f относительно x_0.

Доказательство: По определению, если f n раз дифференцируема в точке, то она $n-1$ раз дифференцируема в окрестности.

Снова используем лемму об отношении, но для случая $n-1$:
$$\varphi(x) \coloneqq f(x) - P_{n(f,x)}; \quad \psi(x) = (x - x_0)^n$$
Получим, что
$$\exists \xi \in (x_0, x) : \; \frac{f(x) - P_{n(f,x)}}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n!(\xi - x_0)}$$
Заметим, что при $x \to x_0 \Rightarrow \xi \to x_0$:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n(f,x)}}{(x - x_0)^n} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n!(\xi - x_0)} = \frac{1}{n!}\big(f(x_0) - P_n(f, x_0)\big)^{(n)} = 0$$
□

6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.

6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции

Теорема 6.1.1: Пусть f дифференцируема на (a, b). Тогда
1. $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ – неубывающая на (a, b)
2. $\forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ – невозрастающая на (a, b)
3. $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ – возрастающая на (a, b)
4. $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ – убывающая на (a, b)

Доказательство:

1. $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ По теореме Лагранжа:
   $\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b : \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$
   То есть для произвольных $x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.
   Обратно, пусть $f(x)$ неубывающая. Тогда
   $\forall x_0 \in (a, b) : \forall \Delta x : \text{sign } (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \text{sign } \Delta x$
   Ну и тогда при $|\Delta x| < \min(x_0 - a, b - x_0)$:
   $$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$
   Совершим предельный переход в неравенстве и получим требуемое.

2. Аналогично предыдущему пункту

3. Контрпримером для $\Leftarrow$ является $f(x) = x^3$ в точке 0

4. Контрпримером для $\Leftarrow$ является $f(x) = -x^3$ в точке 0

□

6.2. Достаточные условия локальных экстремумов

Теорема 6.2.1 (Первое достаточное условие экстремума функции): Пусть f непрерывна в $U_{\delta_0}(x_0)$ и дифференцируема в $\dot{U}_{\delta_0}(x_0), \delta_0 > 0$:
1. Если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) > 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума f
2. Если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) < 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) > 0$, то x_0 – точка строгого локального минимума f

Доказательство: По сути просто заменили в определении локального экстремума монотонность на достаточное условие знакопостоянности производной из предыдущей теоремы. □

Теорема 6.2.2 (Второе достаточное условие локального экстремума): Если f n раз дифференцируема в точке x_0, $f^{(n)}(x_0) \neq 0, \forall k = \overline{1, \text{n-1}} : f^{(k)}(x_0) = 0$, то
1. Если n чётно, то f имеет в точке x_0 локальный минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$ и локальный максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$.
2. Если n нечётное, то f не имеет локального экстремума в точке x_0.

Доказательство:
1. Воспользуемся разложением в Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (учитывая факт нулевых производных):
   $$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), x \to x_0$$
   Так как n чётно, то $n = 2m$:
   $$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2m}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1), x \to x_0$$

Левая часть в некоторой окрестности точки x_0 имеет тот же знак, что и правая. Тогда в силу чётной степени в знаменателе левой части получаем, что разность $f(x) - f(x_0)$ одного знака с n-ой производной.
2. Рассмотрим $f(x) = x^3$.

□

6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости

Определение 6.3.1: f называется **выпуклой (вниз) (вогнутой вверх)** на (a, b), если её график лежит не выше хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b).

f называется **выпуклой (вверх) (вогнутой вниз)** на (a, b), если её график лежит не ниже хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b).

Теорема 6.3.1: Пусть f дважды дифференцируема на (a, b):
1. f выпукла вниз на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$.
2. f выпукла вверх на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$
3. f строго выпукла вниз на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$.
4. f строго выпукла вверх на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$

Доказательство:
1. $\Leftarrow$ Рассмотрим эквивалентное определение выпуклости:

$$\forall x_0, x_1 : a < x_0 < x_1 < b : \forall t \in [0, 1] :$$

$$x_t := tx_0 + (1-t)x_1 : \ f(x_t) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

Разложим f в формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке x_t:

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x_t) : f(x_0) = f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t) + \tfrac{f''(\xi_1)}{2!}(x_0 - x_t)^2$$

$$\exists \xi_2 \in (x_1, x_t) : f(x_1) = f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t) + \tfrac{f''(\xi_2)}{2!}(x_1 - x_t)^2$$

Из-за знакопостоянности второй производной из этих равенств следуют следующие неравенства:

$$f(x_0) \geq f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t)$$

$$f(x_1) \geq f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t)$$

Умножим первое на t, второе на $1 - t$ и сложим их:

$$tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \geq f(x_t) + \underbrace{f'(x_t)(tx_0 + (1-t)x_1 - x_t)}_{0}$$

$\Rightarrow$ Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и достаточно малую окрестность $\delta := \min(x_0 - a, b - x_0)$. Тогда

$$\forall u \in (-\delta, \delta) : x_0 = \tfrac{1}{2}(x_0 - u) + \tfrac{1}{2}(x_0 + u) : \ f(x_0) \leq \tfrac{1}{2}f(x_0 - u) + \tfrac{1}{2}f(x_0 + u)$$

Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x_0 \pm u) = f(x_0) \pm f'(x_0)u + \tfrac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \to 0$$

В прошлой строчке мы записали сразу два равенства благодаря $\pm$, давайте умножим каждое на $\frac{1}{2}$ и сложим их:

$$\frac{1}{2}f(x_0-u)+\frac{1}{2}f(x_0+u)=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}u^2+o(u^2), u\to 0$$

Тогда при достаточно малых u $\frac{f''(x_0)}{2}u^2$ обязано будет стать такого же знака, как и $\frac{1}{2}f(x_0-u)+\frac{1}{2}f(x_0+u)-f(x_0)\geq 0$

2. Аналогично
3. $\Leftarrow$ аналогично только со строгими неравенствами, а $\Rightarrow$ вообще говоря не верно, например, для $f(x)=x^4$
4. $\Leftarrow$ аналогично только со строгими неравенствами, а $\Rightarrow$ вообще говоря не верно, например, для $f(x)=-x^4$

$\square$