Содержание

ГОС по матану

Disclaymer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

`Экзамен - это тропа`

—

Коновалов Сергей Петрович

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности

1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Определение 1.1.1: Если $E \subset \mathbb{R}$ – ограниченное сверху (снизу) множество, то $M(m) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\forall x \in E : x \leq M(x \geq m)$$

называется **верхней (нижней) гранью** множества E.

Определение 1.1.2: Наименьшая из верхних граней множества E называется **точной верхней гранью**: $\sup E$.

Наибольшая из нижних граней множества E называется **точной нижней гранью**: $\inf E$.

Теорема 1.1.1 (О существовании точной верхней (нижней) грани): Любое ограниченное сверху (снизу) непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство: Пусть B – множество верхних граней множества E. Введём обозначение $A := \mathbb{R} \setminus B$.

Тогда если произвольное число a меньше какого-то $x \in E$, то оно точно не верхняя грань $E \Rightarrow a \in A$.

Заметим также свойство множества B:

$$\forall b \in B : \forall x > b : \ x \in B$$

Тогда по одной из аксиом действительных чисел

$$\exists c \in R : \forall a \in A : \forall b \in B : \ a \leq c \leq b$$

Пусть $\sup E := c$. Проверим свойства точной верхней грани:

1. c является верхней гранью

   От противного. Пусть $c \notin B$, тогда $\exists x \in B : x > c$, причём $c < \frac{x+c}{2} < x$.

   Но тогда заметим, что $\frac{x+c}{2} \in A$, что противоречит выбору c как числа больше либо равного любого элемента A
2. c является наименьшей из верхних граней

От противного. Пусть $\exists M \in B : M < c$. Но тогда $M < \frac{M+c}{2} < c$, причём $\frac{M+c}{2} \in B$, что противоречит выбору c как числа меньше либо равного любого элемента B.

□

Теорема 1.1.2 (Вейерштрасса): Каждая ограниченная сверху (снизу) неубывающая (невозрастающая) последовательность сходится, причём её предел равен точной верхней (нижней) грани.

Доказательство: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху $\Rightarrow \exists \sup \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = l$

Отсюда:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq l < l + \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : l - \varepsilon < x_N$ (по определению супремума)

Заметим, что получилось в точности определение предела. □

Теорема 1.1.3 (Принцип Кантора вложенных отрезков): Всякая последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, то есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

имеет непустое пересечение, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Доказательство: Из вложенности очевидно следует

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n,\ b_{n+1} \leq b_n$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_1, b_n \geq a_1$$

Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = b$$

А значит отрезок $[a, b]$ (возможно вырожденный) включён в пересечение всех отрезков. □

Теорема 1.1.4 (Больцано-Вейерштрасса): Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – рассматриваемая ограниченная последовательность, то есть

$$\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} :\ a_1 \leq x_n \leq b_1$$

Заметим, что один из отрезков $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ содержит бесконечно много элементов последовательности.

Пусть $[a_2, b_2]$ – тот из отрезков, который содержит бесконечно много элементов.

Продолжая данный трюк счётное количество раз получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Также заметим, что данные отрезки стягиваются:

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$$

Тогда по принципу Кантора:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}$$

Осталось построить подпоследовательность, будем брать $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, причём так, чтобы $n_k > n_{k-1}$. Очевидно, $n_1 = 1$. Существование предела также очевидно:

$$0 \le \left|c - x_{n_k}\right| \le b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \underset{k \to \infty}{\to} 0$$

□

1.2. Критерий Коши

Определение 1.2.1: Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

Теорема 1.2.1 (Критерий Коши сходимости числовой последовательности): Числовая последовательность сходится ⇔ она фундаментальна.

Доказательство: ⇒ По определению предела:

$$\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника в условиях предела:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|x_{n+p} - l + l - x_n\right| \le \left|x_{n+p} - l\right| + |x_n - l| < \varepsilon$$

⇐ Вначале докажем, что из фундаментальности следует ограниченность:

$$\varepsilon := 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < 1$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : \min(x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1) \le x_n \le \max(x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1)$$

Тогда из ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по теореме Больцано-Вейерштрасса достанем сходящуюся подпоследовательность:

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \exists l : \forall \varepsilon > 0 : \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) : \ \left|x_{n_k} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Также по определению фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

Объединим эти два условия и получим требуемое:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 = \max\left(N(\varepsilon), n_{K(\varepsilon)+1}\right) : \forall n > N_0 :$$

$$|x_n - l| = \left|x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}} + x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l\right| \le \left|x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}}\right| + \left|x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l\right| < \varepsilon$$

□

2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней

2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Определение 2.1.1: Пусть f определена в некоторой окрестности $U_{\delta_0}(x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Если $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется **непрерывной в точке** x_0.

Определение 2.1.2: f называется **непрерывной на множестве** $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall x_0 \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x - x_0| < \delta : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.1 (Первая теорема Вейшерштрасса о непрерывной на отрезке функции): Если f непрерывна на $[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство: От противного, пусть f неограничена сверху. Тогда

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = +\infty$$

То есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : \ f(x_n) > n$$

Причём $\forall n \in \mathbb{N} : a \le x_n \le b$, то есть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \ \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0)$$

Однако из $f(x_n) > n$ следует, что $f(x_0) = \infty$. Противоречие. □

2.2. Достижение точных верхних и нижних граней

Теорема 2.2.1 (Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях): Если f непрерывна на $[a, b]$, то

$$\exists x', x'' \in [a, b] : \ f(x') = \sup_{x \in [a,b]} f(x); \quad f(x'') = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

Доказательство: Пусть $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Тогда по определению супремума

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in [a, b] : \ M - \varepsilon < f(x) \le M$$

В том числе для $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b] : \forall n \in \mathbb{N} : \ M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \ \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0) = M$$

Последнее равенство было получено устремлением $k \to \infty$ в неравенстве $M - \frac{1}{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \le M$.

Таким образом, M действительно достижим функцией f в точке x_0. Для инфимума аналогично. $\square$

3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

Теорема 3.1 (Больцано-Коши о промежуточных значениях): Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Тогда

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : c := f(x_1) < d := f(x_2) : \ \forall e \in (c,d) : \exists \gamma \in [a,b] : f(\gamma) = e$$

Доказательство: Рассмотрим частный случай $c < e = 0 < d$.

Построим последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, где $[a_1, b_1] = \{x_1, x_2\}$ (мы не знаем в каком порядке идут иксы).

Заметим, что $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

Рассмотрим $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$. Какие могут быть случаи?

- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, то мы победили и останавливаемся.
- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$, то $a_2 := a_1, b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$, то $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 := b_1$.

Либо после конечного числа шагов мы найдём требуемую точку, либо построим последовательность стягивающихся отрезков:

$$b_n - a_n = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{n-1}}$$

Тогда по принципу Кантора $\{\gamma\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причём

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma \in [a,b]$$

Тогда в силу непрерывности f:

$$f(\gamma) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Заметим, что после кажой итерации алгоритма изначальное свойство сохраняется:

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

Совершив предельный переход в неравенстве, получим

$$f^2(\gamma) \le 0$$

Из чего следует $f(\gamma) = 0$.

В общем случае рассматривается вспомогательная функция $F(x) = f(x) - e$. $\square$

4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

4.1. Теорема Ролля

Определение 4.1.1: Пусть f определена в некоторой δ_0 окрестности точки x_0. Если

$$\exists \delta \in (0, \delta_0) : \forall x \in U_{\delta(x_0)} : \ f(x) \leq f(x_0)$$

то x_0 – **точка локального максимума**.

Также аналогично вводятся определения локального минимума, а также строгие экстремумы, в которых неравенство строгое.

Теорема 4.1.1 (Ферма о необходимом условии локального экстремума): Если x_0 – точка локального экстремума функции $y = f(x)$, дифференцируемой в x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: БОО x_0 – точка локального максимума.

Заметим, что тогда

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0; \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

А при существовании производной оба этих предела совпадают, поэтому производной в x_0 остаётся лишь быть равной нулю. □

Теорема 4.1.2 (Ролля): Если f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), причём $f(a) = f(b)$, то

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Доказательство: Заметим, что если $f \equiv \text{const}$, то утверждение тривиально.

Иначе, f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists m < M : \ m = \min_{x \in [a,b]} f(x); \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Заметим, что либо $m \neq f(a)$, либо $M \neq f(a)$.

Это значит, что существует локальный минимум или максимум в некоторой точке $c \in (a, b)$, а по теореме Ферма мы знаем, что $f'(c) = 0$. □

4.2. Теоремы Лагранжа и Коши

Теорема 4.2.1 (Обобщённая теорема о среднем): Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Доказательство: Рассмотрим

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

Заметим, что h всё ещё непрерывна на отрезке и дифференцируема на интервале, причём

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(a)$$

То есть h удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Требуемое доказано. $\square$

Теорема 4.2.2 (Лагранжа о среднем): Если f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Доказательство: В обобщённой теореме о среднем возьмём $g(x) = x$. $\square$

Теорема 4.2.3 (Коши о среднем): Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$, то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство: Очевидная интерпретация обобщённой теоремы о среднем.

Необходимо уточнить лишь, почему $g(b) - g(a) \neq 0$, чтобы мы смогли поделить на него.

Если бы $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля $\exists c : g'(c) = 0$, что противоречит с условием текущей теоремы. $\square$

5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа

5.1. Член в форме Лагранжа

Лемма 5.1.1: Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то $\exists!$ многочлен степени $\leq n$ такой, что

$$f(x_0) = P_n(f, x_0); f'(x_0) = P'(f, x_0); ...; f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(f, x_0)$$

Этот многочлен имеет вид

$$P_{n(f,x)} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

и называется **многочленом Тейлора** степени n относительно точки x_0.

Доказательство: Очевидно проверяем каждую производную $\square$

Лемма 5.1.2 (Об отношении): Если φ, ψ $(n+1)$ раз дифференцируемы в $U_\delta(x_0)$, причём
$$\forall k = \overline{0,\text{ n}}: \ \varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) = 0$$
но
$$\forall k = \overline{0,\text{ n}} : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0): \ \psi^{(k)}(x) \neq 0$$
то
$$\forall x \in U_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x): \ \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$$

Доказательство: Заметим, что φ, ψ удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем. Тогда
$$\exists \xi_1 \in (x_0, x): \ \frac{\varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_{0}}{\psi(x) - \underbrace{\psi(x_0)}_{0}} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \underbrace{\varphi'(x_0)}_{0}}{\psi'(\xi_1) - \underbrace{\psi'(x_0)}_{0}} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = \dots = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$
□

Теорема 5.1.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа): Если f $(n+1)$ раз дифференцируема в $U_\delta(x_0), \delta > 0$, то
$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x): \ f(x) - P_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Доказательство: Сведём к предыдущей лемме об отношении:
$$\varphi(x) \coloneqq f(x) - P_n(f, x); \quad \psi(x) \coloneqq (x - x_0)^{n+1}$$
Все требуемые свойства проверяются очевидно. □

5.2. Член в форме Пеано

Теорема 5.2.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано): Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то
$$f(x) - P_n(f, x) = o\big((x - x_0)^n\big), x \to x_0$$
где $P_{n(f,x)}$ – многочлен Тейлора степени n функции f относительно x_0.

Доказательство: По определению, если f n раз дифференцируема в точке, то она $n-1$ раз дифференцируема в окрестности.

Снова используем лемму об отношении, но для случая $n-1$:
$$\varphi(x) \coloneqq f(x) - P_{n(f,x)}; \quad \psi(x) = (x - x_0)^n$$
Получим, что
$$\exists \xi \in (x_0, x): \ \frac{f(x) - P_{n(f,x)}}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n!(\xi - x_0)}$$
Заметим, что при $x \to x_0 \Rightarrow \xi \to x_0$:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n(f,x)}}{(x-x_0)^n} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n!(\xi - x_0)} = \frac{1}{n!}\big(f(x_0) - P_n(f, x_0)\big)^{(n)} = 0$$
□

6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.

6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции

Теорема 6.1.1: Пусть f дифференцируема на (a, b). Тогда
1. $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ – неубывающая на (a, b)
2. $\forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ – невозрастающая на (a, b)
3. $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ – возрастающая на (a, b)
4. $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ – убывающая на (a, b)

Доказательство:

1. $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ По теореме Лагранжа:
   $\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b : \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$
   То есть для произвольных $x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.
   Обратно, пусть $f(x)$ неубывающая. Тогда
   $\forall x_0 \in (a, b) : \forall \Delta x : \text{sign } (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \text{sign } \Delta x$
   Ну и тогда при $|\Delta x| < \min(x_0 - a, b - x_0)$:
   $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$
   Совершим предельный переход в неравенстве и получим требуемое.
2. Аналогично предыдущему пункту
3. Контрпримером для $\Leftarrow$ является $f(x) = x^3$ в точке 0
4. Контрпримером для $\Leftarrow$ является $f(x) = -x^3$ в точке 0

$\square$

6.2. Достаточные условия локальных экстремумов

Теорема 6.2.1 (Первое достаточное условие экстремума функции): Пусть f непрерывна в $U_{\delta_0}(x_0)$ и дифференцируема в $\dot{U}_{\delta_0}(x_0), \delta_0 > 0$:
1. Если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) > 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума f
2. Если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) < 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) > 0$, то x_0 – точка строгого локального минимума f

Доказательство: По сути просто заменили в определении локального экстремума монотонность на достаточное условие знакопостоянности производной из предыдущей теоремы. □

Теорема 6.2.2 (Второе достаточное условие локального экстремума): Если f n раз дифференцируема в точке x_0, $f^{(n)}(x_0) \neq 0, \forall k = \overline{1, \text{n-1}} : f^{(k)}(x_0) = 0$, то
1. Если n чётно, то f имеет в точке x_0 локальный минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$ и локальный максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$.
2. Если n нечётное, то f не имеет локального экстремума в точке x_0.

Доказательство:
1. Воспользуемся разложением в Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (учитывая факт нулевых производных):
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), x \to x_0$$
Так как n чётно, то $n = 2m$:
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2m}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1), x \to x_0$$
Левая часть в некоторой окрестности точки x_0 имеет тот же знак, что и правая. Тогда в силу чётной степени в знаменателе левой части получаем, что разность $f(x) - f(x_0)$ одного знака с n-ой производной.
2. Рассмотрим $f(x) = x^3$.

□

6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости

Определение 6.3.1: f называется **выпуклой (вниз) (вогнутой вверх)** на (a, b), если её график лежит не выше хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b).

f называется **выпуклой (вверх) (вогнутой вниз)** на (a, b), если её график лежит не ниже хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b).

Теорема 6.3.1: Пусть f дважды дифференцируема на (a, b):
1. f выпукла вниз на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$.
2. f выпукла вверх на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$
3. f строго выпукла вниз на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$.
4. f строго выпукла вверх на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$

Доказательство:
1. $\Leftarrow$ Рассмотрим эквивалентное определение выпуклости:

$$\forall x_0, x_1 : a < x_0 < x_1 < b : \forall t \in [0,1] :$$
$$x_t \coloneqq tx_0 + (1-t)x_1 : \; f(x_t) \le tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

Разложим f в формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке x_t:

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x_t) : f(x_0) = f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t) + \tfrac{f''(\xi_1)}{2!}(x_0 - x_t)^2$$
$$\exists \xi_2 \in (x_1, x_t) : f(x_1) = f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t) + \tfrac{f''(\xi_2)}{2!}(x_1 - x_t)^2$$

Из-за знакопостоянности второй производной из этих равенств следуют следующие неравенства:

$$f(x_0) \ge f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t)$$
$$f(x_1) \ge f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t)$$

Умножим первое на t, второе на $1-t$ и сложим их:

$$tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \ge f(x_t) + \underbrace{f'(x_t)(tx_0 + (1-t)x_1 - x_t)}_{0}$$

$\Rightarrow$ Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in (a,b)$ и достаточно малую окрестность $\delta \coloneqq \min(x_0 - a, b - x_0)$. Тогда

$\forall u \in (-\delta, \delta) : x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - u) + \frac{1}{2}(x_0 + u) : \; f(x_0) \le \frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u)$

Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x_0 \pm u) = f(x_0) \pm f'(x_0)u + \tfrac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \to 0$$

В прошлой строчке мы записали сразу два равенства благодаря $\pm$, давайте умножим каждое на $\frac{1}{2}$ и сложим их:

$$\tfrac{1}{2}f(x_0 - u) + \tfrac{1}{2}f(x_0 + u) = f(x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \to 0$$

Тогда при достаточно малых u $\frac{f''(x_0)}{2}u^2$ обязано будет стать такого же знака, как и $\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) - f(x_0) \ge 0$

2. Аналогично
3. $\Leftarrow$ аналогично только со строгими неравенствами, а $\Rightarrow$ вообще говоря не верно, например, для $f(x) = x^4$
4. $\Leftarrow$ аналогично только со строгими неравенствами, а $\Rightarrow$ вообще говоря не верно, например, для $f(x) = -x^4$

$\square$

7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте

Определение 7.1: **Компактным** множеством в метрическом пространстве X называется такое множество K, что из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 7.2: Функция $f : X \to \mathbb{R}$, где X – метрическое пространство, называется равномерно непрерывной на множестве $X' \subset X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X' : \rho(x_1, x_2) < \delta : \; |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Теорема 7.1 (Кантора о равномерной непрерывности): Если $f : K \to \mathbb{R}$ непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на K.

Доказательство: От противного, выпишем отрицание равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in K : \|x_1 - x_2\| < \delta : \ |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Выбирая $\delta \coloneqq 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{m}, ...$ построим последовательность пар из отрицания непрерывности: $\left\{\left(x_{1,m}, x_{2,m}\right)\right\}_{m=1}^{\infty} \subset K^2$.

Причём

$$\forall m \in \mathbb{N} : \left\|x_{1,m} - x_{2,m}\right\| < \tfrac{1}{m} : \left|f\left(x_{1,m}\right) - f\left(x_{2,m}\right)\right| \geq \varepsilon$$

По одному из определений компактности выделим из последовательности пар подпоследовательность, у которой сходятся первые координаты:

$$\exists \left\{\left(x_{1,m_k}, x_{2,m_k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} x_{1,m_k} = x_0 \in K$$

Причём заметим, что (комбинируем то, как мы строили последовательность пар и сходимости первых координат подпоследовательности):

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > 0 : \left\|x_{2,m_k} - x_0\right\| \leq$$

$$\left\|x_{1,m_k} - x_0\right\| + \left\|x_{1,m_k} - x_{2,m_k}\right\| < 2\varepsilon$$

То есть

$$\lim_{k\to\infty} x_{1,m_k} = \lim_{k\to\infty} x_{2,m_k} = x_0 \overset{\text{непрерывность } f}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(f\left(x_{1,m_k}\right) - f\left(x_{2,m_k}\right)\right) = 0$$

Противоречие! □

8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

Определение 8.1: Пусть f определена в некоторой окрестности $x_0 \in \mathbb{R}^n$. **Полным приращением** f в точке x_0 называется

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f\left(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n} + \Delta x_n\right) - f\left(x_{0,1}, ..., x_{0,n}\right)$$

f называется **дифференцируемой** в x_0, если

$$\Delta f(x_0) = (A, \Delta x) + o(\|\Delta x\|), \Delta x \to 0$$

где $A \in \mathbb{R}^n$ называется **градиентом**: $\operatorname{grad} f(x_0) = A$

Определение 8.2: **Дифференциалом** дифференцируемой в x_0 функции f назовём выражение $(A, \Delta x)$ из определения дифференцируемости.

Определение 8.3: **Частной производной** в точке x_0 называется предел (если он существует):

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_{0,1}, ..., x_{0,j} + \Delta x, ..., x_{0,n}) - f(x_{0,1}, ..., x_{0,j}, ..., x_{0,n})}{\Delta x}$$

Теорема 8.1 (Необходимое условие дифференцируемости): Если f дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то существуют частные производные $\forall j = \overline{1,\text{n}}$, причём

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

Доказательство: Сразу следует из определения - есть предел по всем многомерным приращениям, а значит и по однокоординатным в том числе. □

Теорема 8.2 (Достаточное условие дифференцируемости): Если f определена в некоторой окрестности точки x_0, вместе со своими частными производными, причём они непрерывны в x_0, то f дифференцируема в x_0.

Доказательство: Воспользуемся n раз «умным нулём», каждый из которых будет снимать приращение по одной из координат:

$$\Delta f(x_0) =$$
$$f(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n} + \Delta x_n) - f(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}) +$$
$$f(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}) - f(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1}, x_{0,n})$$
$$+ ... +$$
$$f(x_{0,1} + \Delta x_1, x_{0,2}, ..., x_{0,n}) - f(x_{0,1}, ..., x_{0,n}) =$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, \xi_n)\Delta x_n +$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-2} + \Delta x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_{0,n})\Delta x_{n-1}$$
$$+ ... +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_{0,2}, ..., x_{0,n})\Delta x_1 =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i + o(\|\Delta x\|), \Delta x \to 0$$

□

9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением

Определение 9.1: **Кубом** радиуса δ вокруг точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ назовём

$$K_{\delta,\boldsymbol{x_0}} = \bigtimes_{k=1}^n \left(x_0^k - \delta, x_0^k + \delta\right)$$

где под $\times$ подразумевается декартово произведение.

Теорема 9.1: Пусть $F(\boldsymbol{x}, y) = F(x_1, ..., x_n, y)$ дифференцируема в окрестности точки $(\boldsymbol{x_0}, y_0) = \left(x_0^1, ..., x_0^n, y_0\right)$.

Её производная $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в этой окрестности, причём $F(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$:

$$\forall x \in K_{\delta,x_0} : \exists! y = \varphi(x) : \forall (x, y) \in K_{\delta,x_0} \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) :$$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x) \wedge \exists \varphi'(x_0)$$

Доказательство: БОО будем считать, что $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.

По непрерывности частной производной, $\exists$ окрестность точки (x_0, y_0), в которой $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$.

Тогда из непрерывности F по y и знакоопределённости производной следует

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \ F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Расширяем территорию дальше, из непрерывности F по x следут

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in K_{\delta,x_0} : F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции берём существование, а из знакоопределённости производной единственность:

$$\exists! \varphi(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Заметим, что φ непрерывна по построению в (x_0, y_0): мы брали x из 2δ окрестности точки x_0, а значение лежало в 2ε окрестности точки y_0.

Теперь докажем дифференцируемость φ, для этого распишем дифференцируемость F:

$$F(x, y) - \underbrace{F(x_0, y_0)}_{0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) \cdot \left(x_k - x_0^k\right) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) +$$

$$\alpha(x, y)$$

где $\alpha = o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|), (x, y) \to (x_0, y_0)$.

Воспользуемся умножением на «умную единицу»:

$$\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(x,y) \cdot \left(x_i - x_0^i\right)^2}{\|(x,y) - (x_0, y_0)\|_2^2} + \frac{\alpha(x,y) \cdot (y - y_0)^2}{\|(x,y) - (x_0, y_0)\|_2^2}$$

Введём новые обозначения:

$$\alpha_i(x, y) \coloneqq \frac{\alpha(x,y) \cdot \left(x_i - x_0^i\right)}{\|(x,y) - (x_0, y_0)\|_2^2}; \quad \beta(x, y) \coloneqq \frac{\alpha(x,y) \cdot (y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0, y_0)\|_2^2}$$

Тогда

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) + \alpha_k(x, y)\right)\left(x_k - x_0^k\right) +$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(x, y)\right)(y - y_0)$$

Подставляя $y = \varphi(x)$ в выражение выше, будем использовать новые обозначения:

$$\tilde{\alpha}_k(x) \coloneqq \alpha_k(x, \varphi(x)); \quad \tilde{\beta}(x) \coloneqq \beta(x, \varphi(x))$$

Таким образом,

$$\underbrace{F(x,\varphi(x))}_{0} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x)\Big)(x_k - x_0^k) +$$

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x)\Big)(\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

Выразим приращение φ:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0))} + \gamma_k(x)\right)(x_k - x_0^k)$$

где

$$\gamma_k(x) := -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0))} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0))+\tilde{\alpha}_k(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0))+\tilde{\beta}(x)}$$

Остаётся заметить, что $\tilde{\alpha}_k(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0; \tilde{\beta}(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0$, а это значит, что

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \sum_{k=1}^{n} A_k(x_k - x_0^k) + \gamma(x); \quad \gamma(x) = o(\|x - x_0\|), x \to x_0$$

Что и является требуемой дифференцируемостью φ в x_0. □

10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия.

10.1. Необходимые условия

Определение 10.1.1: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \ f(x) \le f(x_0)$$

Определение 10.1.2: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \ f(x) \ge f(x_0)$$

Определение 10.1.3: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **строгого локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \ f(x) < f(x_0)$$

Определение 10.1.4: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **строгого локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \ f(x) > f(x_0)$$

Теорема 10.1.1 (Необходимые условия локального экстремума): Если x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$, дифференцируемой в окрестности точки x_0, то $\mathrm{d}f(x) \equiv 0$.

Доказательство: Рассмотрим для каждого $k = \overline{1, \text{n}}$:

$$\psi(x_k) = f\left(x_0^1, ..., x_0^{k-1}, x_k, x_0^{k+1}, ..., x_0^n\right), \quad \text{где } x_0 = \left(x_0^1, ..., x_0^n\right)$$

Тогда заметим, что ψ дифференцируема в окрестности x_0^k, применяя теорему о необходимом условии экстремума функции одного переменного, получим

$$\psi'\left(x_0^k\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0$$

В силу произвольности k и того, что дифференциал – это вектор частных производных, получим требуемое. □

10.2. Достаточные условия

Определение 10.2.1: Если f дифференцируема в окрестности точки x_0 и $\mathrm{d}f(x_0) \equiv 0$, то x_0 называется **стационарной точкой** функции f.

Теорема 10.2.1 (Достаточные условия локального экстремума): Если x_0 – стационарная точка функции f, дважды дифференцируемой в точке x_0, то
1. Если $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ – положительно определённая квадратичная форма, то x_0 – точка строгого локального минимума функции f
2. Если $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ – отрицательно определённая квадратичная форма, то x_0 – точка строгого локального максимума функции f
3. Если $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ – неопределённая квадратичная форма, то x_0 не является точкой локального экстремума

Доказательство:
1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:
$$f(x) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0) + o(\rho^2), \rho \to 0$$
где
$$\mathrm{d}x_k = x_k - x_0^k, k = \overline{1,\text{n}}; \quad \rho = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(x_k - x_0^k\right)^2} = \|\mathrm{d}x\|_2$$
Тогда (в условиях $\mathrm{d}f(x_0) \equiv 0$ и $\xi_k := \frac{\mathrm{d}x_k}{\|\mathrm{d}x\|}$) :
$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2 f(x_0) + o(\rho^2) =$$
$$\frac{1}{2}\rho^2 \left(\underbrace{\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\xi_i\xi_j}_{F(\xi_1,...,\xi_n)} + o(1), \right) \rho \to 0$$
В следствие нормировки, очевидно, $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1$.

Таким образом, минимум введённого функционала F на сфере (компактной в $\mathbb{R}^n$) будет достигаться:
$$\min_{\xi_1^2+...+\xi_n^2=1} F(\xi_1, ..., \xi_n) =: C > 0$$
Таким образом, для достаточно маленьких ρ:
$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{C}{4}\rho^2 > 0$$
2. Аналогично
3. Вводим $F(\xi_1, ..., \xi_n)$ аналогично предыдущим пунктам, из-за того что $\mathrm{d}^2 f$ – неопределённая, то

$$\exists \xi_1(x_1), \xi_2(x_2):\ F(\xi_1^1, ..., \xi_1^n) > 0 \wedge F(\xi_2^1, ..., \xi_2^n) < 0$$

Тогда при достаточно малых ρ:

$$\text{sign }(f(x_1) - f(x_0)) = \text{sign } F(\xi_1) > 0; \text{sign }(f(x_2) - f(x_0)) = \text{sign } F(\xi_2) < 0$$

Что и требовалось.

□

11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница.

11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом

Определение 11.1.1: **Разбиением** P отрезка $[a, b]$ называется конечное множество точек отрезка $[a, b]$:

$$P : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b; \quad \Delta x_k := x_k - x_{k-1}; k = \overline{1,\text{ n}}$$

Определение 11.1.2: **Диаметром разбиения** P называется

$$\Delta(P) = \max\nolimits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

Определение 11.1.3: **Верхней суммой Дарбу** разбиения P функции f называется

$$U(P, f) = \sum\nolimits_{k=1}^n \sup\nolimits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

Определение 11.1.4: **Нижней суммой Дарбу** разбиения P функции f называется

$$U(P, f) = \sum\nolimits_{k=1}^n \inf\nolimits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

Определение 11.1.5: Функция f называется **интегрируемой по Риману** на $[a, b]$ ($f \in \mathcal{R}[a, b]$), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists P :\ U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

Определение 11.1.6: **Интегралом Римана** интегрируемой по Риману на $[a, b]$ функции f называется

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = \inf\nolimits_P U(P, f) = \sup\nolimits_P L(P, f)$$

Теорема 11.1.1 (Основные свойства интеграла Римана):
1. (Линейность) Если $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$, то $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$, причём
$$\int_a^b (f_1+f_2)(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$$
Кроме того, $\forall c \in \mathbb{R}$ выполняется, что $cf_1 \in \mathcal{R}[a,b]$, причём
$$\int_a^b cf_1(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$$
2. (Монотонность) Если $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]:\ f_1(x) \leq f_2(x)$, то
$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$$
3. (Аддитивность):
$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow \forall c \in (a,b):\ f \in \mathcal{R}[a,c] \wedge f \in \mathcal{R}[c,b]$$
Причём $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
4. (Оценка) Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]:\ |f(x)| \leq M$, то
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M(b-a)$$

Определение 11.1.7: Пусть $\forall b' \in (a,b):\ f \in \mathcal{R}[a,b']$. Тогда $F(b') = \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x$ называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

Будем считать, что $F(a) = 0$, а для $\alpha > \beta$:
$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

Теорема 11.1.2 (Основные свойства интеграла с переменным верхним пределом): Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то интеграл с перменным верхним пределом $F(x)$ непрерывен на $[a,b]$.

Если, кроме того, f непрерывна в $x_0 \in [a,b]$, то $F(x)$ дифференцируема в x_0, причём $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство: Непрерывность следует из комбинирования свойств аддитивности и оценки:
$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \wedge x_2 - x_1 < \tfrac{\varepsilon}{M}:\ |F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq M(x_2 - x_1) < \varepsilon$$

В условиях непрерывности f, докажем, что производная интеграла действительно равна $f(x_0)$:
$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \leq \sup_{t\in[x_0,x]}|f(t) - f(x_0)|$$
Благодаря непрерывности f мы знаем, что при $x \to x_0$ сможем оценить итоговый супремум сверху ε. □

11.2. Формула Ньютона-Лейбница

Определение 11.2.1: **Первообразной** функции f на $[a, b]$ называется такая дифференцируемая на $[a, b]$ функция F, что

$$\forall t \in [a, b] : \ F'(t) = f(t)$$

Определение 11.2.2: **Интегральной суммой** $S\left(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n\right)$ называется

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$$

где $P : a = x_0 < ... < x_n = b, \forall i = \overline{1, \text{n}} : t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Теорема 11.2.1 (Интеграл как предел интегральных сумм):

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \exists \lim_{\Delta(P)\to 0} S\left(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n\right)$$

При этом $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta(P)\to 0} S\left(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n\right)$

Теорема 11.2.2 (Основная теорема интегрального исчисления): Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ имеет первообразную F на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Доказательство: Для любого разбиения P:

$$F(b) - F(a) \overset{\text{телескопическая сумма}}{=} \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) \overset{\text{теорема Лагранжа}}{=}$$

$$\sum_{k=1}^n F'(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Устремляя $\Delta(P) \to 0$ получим, что $F(b) - F(a)$ равно требуемому интегралу по эквивалентному определению. □

12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда.

12.1. Непрерывность суммы функционального ряда

Определение 12.1.1: Функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ **сходится равномерно** на E к функции $f(x)$ ($f_n \rightrightarrows f$), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall x \in E : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Определение 12.1.2: Функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится поточечно** на E к функции $f(x)$, если

$$\forall x \in E : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Теорема 12.1.1 (Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности):

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \ \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$$

Определение 12.1.3: Фукнциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на E, если равномерно сходится на E функциональная последовательность $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

Теорема 12.1.2 (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ равномерно сходится на } E \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \ \left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

Теорема 12.1.3 (Предельный переход в равномерно сходящихся последовательностях): Если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к f на множестве E метрического пространства, x_0 – предельная точка E, причём

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \to x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n$$

То есть оба предела существуют и равны.

Доказательство: Воспользуемся критерием Коши равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \ \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$$

Совершим предельный переход $x \to x_0$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|a_{n+p} - a_n\right| \leq \varepsilon$$

То есть числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет какой-то предел a, теперь нужно установить, что он равен пределу предельной функции:

$$|f(x) - a| = |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|$$

Стоит упомянуть про кванторы:

- Берём номер N больший N_1 для равномерного предела функций и N_2 для числового предела $a_n \underset{n \to \infty}{\to} a$
- δ-окрестность x_0 меньшую требуемой для фиксированного $f_N(x) \underset{x \to x_0}{\to} a_N$

□

Следствие 12.1.3.1: Если $f_n(x)$ непрерывна на E, $f_n \rightrightarrows f$ на E, то f непрерывна на E.

Теорема 12.1.4 (Предельный переход в функциональных рядах): Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E, x_0 – предельная точка E, $\forall n \in \mathbb{N}:$ $\lim_{x \to x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x \to x_0, x \in E} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Доказательство: Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм. □

12.2. Интегрируемость суммы функционального ряда

Теорема 12.2.1 (Интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности): Если $\forall n \in \mathbb{N}:$ f_n интегрируема по Риману на $[a, b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$, то f интегрируема по Риману на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство: Воспользуемся тем, что каждый элемент функциональной последовательности интегрируем:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 : \exists P : \ U(P, f_n) - L(P, f_n) < \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Далее определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in [a, b] : \ |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Итак, оценим верхнюю сумму Дарбу предела:

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in[x_{k-1}, x_k]} f(x)\Delta x_k \le$$

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\sup_{x\in[x_{k-1}, x_k]} f_n(x) + \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}\Big)\Delta x_k = U(P, f_n) + \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Аналогично для нижней:

$$L(P, f) \ge L(P, f_n) - \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Таким образом,

$$U(P, f) - L(P, f) \le U(P, f_n) - L(P, f_n) + \tfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Мы доказали интегрируемость f, осталось доказать, что интеграл равен тому, что надо:

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \le \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b-a) < \varepsilon$$

□

Теорема 12.2.2 (Интегрирование функциональных рядов): Если $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство: Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм. □

12.3. Дифференцируемость суммы функционального ряда

Теорема 12.3.1 (Дифференцирование функциональных последовательностей): Если
1. f_n дифференцируемы на (a, b)
2. $f_n' \rightrightarrows$ на (a, b)
3. $\exists x_0 \in (a, b): \; f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\to}$

То
1. $f_n \rightrightarrows f$ на (a, b)
2. f дифференцируема на (a, b)
3. $f_n' \to f'$ на (a, b)

Доказательство: Используем равномерную сходимость производных:
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in (a, b) : \; \left|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$$
А также сходимость самих функций в точке x_0:
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \; \left|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$
Применим теорему Лагранжа для непрерывных f_n между произвольной точкой x и фиксированной x_0:
$$\exists \xi \in \{x, x_0\} : \; \left|\big(f_{n+p}(x) - f_n(x)\big) - \big(f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\big)\right| = \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right||x - x_0|$$
Тогда мы можем доказать фундаментальность самой последовательнсоти:
$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \le \left|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right| + \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right||x - x_0| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - x_0| < \varepsilon$$
Значит по критерию Коши $f_n \rightrightarrows f$ на (a, b).

Остаётся доказать дифференцируемость f в произвольной точке $x \in (a, b)$, для этого введём вспомогательные функции:
$$\varphi_n(t) := \tfrac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}; \quad \varphi(t) := \tfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$$
Докажем фундаментальность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$:
$$\left|\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)\right| = \tfrac{\left|\left(f_{n+p}(t) - f_n(t)\right) - \left(f_{n+p}(x) - f_n(x)\right)\right|}{t - x} \overset{\text{теорема Лагранжа}}{=} \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$$
Получили, что $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на $A := (a, b) \setminus \{x\}$.

Заметим, что x – предельная точка A, тогда применим теорему о непрерывном поточечном пределе:
$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x, t\in A} \varphi_n(t) = \lim_{t\to x, t\in A} \varphi(t) = f'(x)$$
Заметим, что этими равенствами мы доказываем как существование, так и равенство пределов. □

13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора.

13.1. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда

Определение 13.1.1: Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ называется **степенным рядом** с центром в точке z_0 и коэффициентами $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Определение 13.1.2: **Радиусом сходимости** степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ называется

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}; \quad 0 \le R \le +\infty$$

Теорема 13.1.1 (Коши-Адамара): Если $R \in [0, +\infty]$ – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, то
1. $\forall z, |z - z_0| < R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится, притом абсолютно
2. $\forall z, |z - z_0| > R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ расходится

Доказательство:
1. Пусть $|z - z_0| =: r < R$.

   Возьмём произвольный $\rho \in (r, R) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$. По определению верхнего предела:
   $$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{\rho}$$
   Тогда:
   $$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ \left|c_n (z - z_0)^n\right| \le \left(\frac{r}{\rho}\right)^n; \quad \frac{r}{\rho} < 1$$
   По теореме Вейерштрасса мы можем ограничить рассматриваемый ряд сходящимя числовым (геометрическая прогрессия) и всё доказано.
2. Пусть $|z - z_0| > R$, то есть $\frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{R}$. Значит по плотности действительных чисел:
   $$\exists \varepsilon > 0 : \ \frac{1}{|z-z_0|} \le \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |z - z_0| \ge \frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}$$
   По определению верхнего предела:
   $$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \forall k \in \mathbb{N} : \ \sqrt[n_k]{\left|a_{n_k}\right|} > \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow$$
   $$\left|a_{n_k} z^{n_k}\right| \ge \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^{n_k} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}\right)^{n_k} \ge 1$$
   Получили, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

□

Теорема 13.1.2 (Равномерная сходимость степенного ряда): Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$, то он сходится равномерно в любом круге $|z - z_0| \leq R$, где $0 < r < R$

Доказательство: $|z - z_0| = r < R \Rightarrow$ по теореме Коши-Адамара $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится абсолютно, то есть $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$

Тогда для любого z из рассматриваемого круга справедлива оценка

$$\left|c_n (z - z_0)^n\right| \leq |c_n| r^n$$

А значит по теореме Вейерштрасса имеется равномерная сходимость. □

Теорема 13.1.3 (Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов): Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где $|x - x_0| < R, R > 0$. Тогда

1. $f(x)$ бесконечно дифференцируема $\forall x, |x - x_0| < R$, причём
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)...(n-k+1)(x - x_0)^{n-k}$$
2. $f(x)$ интегрируема по Риману $\forall x, |x - x_0| < R$ на отрезке с концами x_0, x, причём
$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$
3. Все степенные ряды, упомянутые в пунктах 1, 2 имеют радиус сходимости R.
4. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Доказательство: Если мы возьмём $x : |x - x_0| = r < R$, то на отрезке $[x_0, x]$ ряд для $f(x)$ сходится равеномерно, а значит мы можем его почленно интегрировать по теореме об интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов.

Радиус сходимости дифференцированного (и, вообще говоря, интегрированного) ряда не меняется, так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. А значит он также равномерно сходится на $[x_0, x]$, поэтому мы можем применить теорему о дифференцировании функционального ряда.

Заметим, что $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$, что и требовалось. □

13.2. Ряд Тейлора

Определение 13.2.1: Если f бесконечно дифференцируема в точке x_0, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

называется её **рядом Тейлора** с центром в точке x_0.

Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора называется **рядом Маклорена**.

Теорема 13.2.1 (Достаточное условие представимости функции рядом Тейлора): Если f бесконечно дифференцируема на $(x_0 - h, x_0 + h)$, причём

$$\exists M : \forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) : \ \left|f^{(n)}(x)\right| \le M$$

То $f(x)$ представима своим рядом Тейлора в точке x_0 при всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$

Доказательство: По теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}; \quad \xi \in (x_0, x)$$

Следовательно

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right| \le M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Почему $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$? Заметим, что n-ый элемент разложения экспоненты (имеющий бесконечный радиус сходимости, поэтому для неё априори он существует) в ряд Маклорена – это $\frac{x^n}{n!}$, а по необходимому условию сходимости ряда, он стремится к 0 равномерно. □

14. Теорема об ограниченной сходимости для интеграла Лебега

Определение 14.1: Пусть f – ограниченная измеримая функция, определённая на измеримом по Лебегу множестве E. И Q – разбиение области значений функции f.

Тогда **интегральной суммой Лебега** назовём

$$S\left(Q, f, \{t_i\}_{i=1}^{n}\right) = \sum_{i=1}^{N} f(t_i)\mu(E_i)$$

где $E_i = \{x \in E \mid f(x) \in [y_{i-1}, y_i)\}$

Теорема 14.1 (Критерий/определение интеграла Лебега для ограниченных функций): Если f – ограниченная измеримая на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то она интегрируема по Лебегу на E, причём

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\Delta(Q)\to 0} S\left(Q, f, \{t_i\}_{i=1}^{n}\right)$$

Определение 14.2: Назовём **срезкой** неотрицательной функции f для $N \in \mathbb{N}$:

$$f_{[N]}(x) = \begin{cases} f(x), f(x) \le N \\ N, f(x) > N \end{cases}$$

Теорема 14.2 (Критерий/определение интеграла Лебега для измеримых неотрицательных функций): Если f – измеримая неотрицательная функция, определённая на измеримом множестве E конечной меры, то

$$\lim_{N\to\infty} \int_E f_{[N]} \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_E f(x) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

Теорема 14.3 (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла): Пусть

- $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – измеримые на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры
- $f_m \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ на E
- $\forall n \in \mathbb{N} :\ |f_n(x)| \le F(x)$ при почти всех $x \in E$, где F – произвольная суммируемая функция на E

Тогда f суммируема на E, причём

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu(x)$$

Доказательство: Совершив предельный переход $n \to \infty$ мы можем утверждать, что $|f(x)| \le F(x)$ при почти всех $x \in E$ – значит f суммируемая на E.

Осталось доказать равенство интеграла и предела интегралов.

Как мы знаем, из сходимости почти всюду следует сходимость по мере:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mu(E_m(\varepsilon) := \{x \in E \mid \|f_m - f\| \ge \varepsilon\}) = 0$$

Другими словами

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m > M :\ \mu(E_m(\varepsilon)) < \delta$$

Оценим разность интеграла и предела интегралов:

$$\left|\int_E (f - f_m) \,\mathrm{d}\mu(x)\right| \le \int_{E_m} |f_m - f| \,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{E\setminus E_m} |f_m - f| \,\mathrm{d}\mu(x) \le$$

$$2\int_{E_m} F \,\mathrm{d}\mu(x) + \varepsilon\mu(E \setminus E_m) < \varepsilon(\mu(E) + 2)$$

Что и требовалось. □

15. Дифференциальные формы на открытых подмножествах евклидова пространства, оператор внешнего дифференцирования d и его независимость от криволинейной замены координат

15.1. Дифференциальные формы, оператор внешнего дифференцирования

В этом и других билетов, связанных с дифференциальными формами введём понятия $E = \mathbb{R}^n$ – евклидово пространство.

E^* – сопряжённое к нему, aka пространство линейных функционалов aka линейных форм aka ковекторов.

Если мы будем употреблять $p \in \mathbb{N}$, то мы имеем ввиду количество векторов

$$x_1, ..., x_p \in E$$

Если мы будем употреблять $q \in \mathbb{N}$, то мы имеем ввиду количество ковекторов
$$y^1, ..., y^q \in E^*$$
Обратите внимание на индексы, это важно.

Определение 15.1.1: **Полилинейной формой валентности** (p, q) называется функция $U : E^p \times (E^*)^q \to \mathbb{R}$, линейная по каждому из аргументов.

Утверждение 15.1.1: Полилинейная форму однозначно определяется значениями на базисных элементах E и E^*, то есть числами
$$\omega_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{j}} := \omega_{i_1,...,i_p}^{j_1,...,j_q} = U\left(e_{i_1}, ..., e_{i_p}, e^{j_1}, ..., e^{j_q}\right)$$
где $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис E, а $\left\{e^j\right\}_{j=1}^q$ – двойственный базис E^*.

Доказательство: Очевидно из линейности. □

Определение 15.1.2: Набор чисел $\left\{\omega_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{j}} \mid i \in \left(\overline{1, \text{n}}\right)^p, j \in \left(\overline{1, \text{n}}\right)^q\right\}$ (то есть мы рассматриваем значения на всех комбинациях базисных векторов и ковекторов) называется **тензором**

Утверждение 15.1.2: Множество полилинейных форм валентности (p, q) образует **линейное пространство** Ω_p^q.

Определение 15.1.3: **Тензорным произведением** форм $U \in \Omega_{p_1}^{q_1}; V \in \Omega_{p_2}^{q_2}$ называется форма $U \otimes V \in \Omega_{p_1+p_2}^{q_1+q_2}$, задаваемая формулой.
$$\forall \boldsymbol{x} \in E^{p_1+p_2} : \forall \boldsymbol{y} \in E^{q_1+q_2} :$$
$$U \otimes V\left(x_1, ..., x_{p_1}, x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}, y^1, ..., y^{q_1}, y^{q_1+1}, ..., y^{q_1+q_2}\right) =$$
$$U\left(x_1, ..., x_{p_1}, y^1, ..., y^{q_1}\right) \cdot V\left(x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}, y^{q_1+1}, ..., y^{q_1+q_2}\right)$$

Определение 15.1.4: $W \in \Omega_p^0$ называется **симметрической**, если она не изменяется при любой перестановке её аргументов.

Определение 15.1.5: $W \in \Omega_p^0$ называется **антисимметрической (кососимметрической)**, если при любой перестановке пары её аргументов она меняет знак.

Введём линейное пространство антисимметрических форм:
$$\Lambda_p := \left\{W \in \Omega_p^0 \mid W - \text{антисимметрическая}\right\}$$

Определение 15.1.6: Пусть $\pi_p = (i_1, ..., i_p)$ – перестановка индексов $\{1, ..., p\}$. Тогда

$$\forall W \in \Omega_p^0 : \forall \boldsymbol{x} \in E^p : \ (\pi_p W)(x_1, ..., x_p) := W\left(x_{i_1}, ..., x_{i_p}\right)$$

Определение 15.1.7: **Симметризацией формы** $W \in \Omega_p^0$ называется форма

$$\text{sym } W := \tfrac{1}{p!} \textstyle\sum_{\pi_p \in S_p} \pi_p W$$

Определение 15.1.8: **Антисимметризацией формы** $W \in \Omega_p^0$ называется форма

$$\text{asym } W := \tfrac{1}{p!} \textstyle\sum_{\pi_p \in S_p} \text{sgn } \pi_p \cdot \pi_p W$$

Определение 15.1.9: Если $U \in \Lambda_p, V \in \Lambda_q$, то их **внешним произведением** называется

$$U \wedge V := \tfrac{(p+q)!}{p!q!} \text{ asym } (U \otimes V)$$

Теорема 15.1.1 (Основные свойства внешнего произведения):
1. Линейность
   - $(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2) \wedge V = \alpha_1 (U_1 \wedge V) + \alpha_2 (U_2 \wedge V)$
   - $U \wedge (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) = \alpha_1 (U \wedge V_1) + \alpha_2 (U \wedge V_2)$
2. Ассоциативность
   - $(U \wedge V) \wedge W = U \wedge (V \wedge W)$
3. Антикоммутативность
   - $\forall U \in \Lambda_p : \forall V \in \Lambda_q : \ U \wedge V = (-1)^{pq} (V \wedge U)$

Утверждение 15.1.3: Базисом в пространстве Λ_p является система

$$\left\{ f^{i_1} \wedge ... \wedge f^{i_p} \mid 1 \le i_1 < ... < i_p \le n \right\}$$

где $\{f_i\}_{i=1}^n$ – базис в $E^* = \Lambda_1$. (Принято брать базис проекторов)

Определение 15.1.10: **p-формой (дифференциальной формой валентности (степени) p)** на множестве $U \subset E$ называется отображение $\Omega : U \to \Lambda_p$.

В силу линейности пространства Λ_p, нам достаточно задать поведение получаемой формы лишь на базисе, поэтому

$$\forall x \in U : \ \Omega(x) \coloneqq \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} \omega_{i_1, \ldots, i_p}(x) f^{i_1} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}$$

Таким образом, дифференциальная форма однозначно задаётся наобором действительнозначных функций

$$\left\{\omega_{i_1,\ldots,i_p} \mid 1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n\right\}$$

Определение 15.1.11: **Внешнее дифференцирование p-формы** определяется как $(p+1)$-форма

$$\mathrm{d}\Omega : U \to \Lambda_{p+1}$$

По правилу

$$\forall x \in U : \ \ \mathrm{d}\Omega(x) \coloneqq (p+1) \ \mathrm{asym} \ (\Omega'(x))$$

где под производной подразумевается производная по Фреше.

Стоит заметить, что, формально $\Omega' : U \to U \to \Lambda_p$, однако мы считаем, что $U \to \Lambda_p \subset \Omega^0_{p+1}$ (Действительно, линейно по $p+1$ вектору получаем число).

Также стоит упомянуть, что для любого базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ из E и двойственного к нему базиса $(e^1, \ldots, e^n)$ существует соглащение, что

$$\forall i = \overline{1, \mathrm{n}} : \ e^i = \mathrm{d}e_i$$

Которое не лишено смысла, ведь e_i – это 0-форма. А e^i – это функционал, то есть 1-форма.

Теорема 15.1.2 (Основные свойства операции внешнего дифференцирования):
1. $\mathrm{d}(\Omega \wedge \Pi) = (\mathrm{d}\Omega \wedge \Pi) + (-1)^p(\Omega \wedge \mathrm{d}\Pi)$, где Ω – p-форма, а Π – q-форма.
2. $d(d\Omega) = 0$

Доказательство:
1. Для простоты считаем, что форма – одночлен, по линейности всё очевидно доказывается для произвольной формы.

   Фиксируем базис, в котором

   $$\Omega(x) = \omega(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}; \quad \Pi(x) = \pi(x)\,\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_q}$$

   Тогда

$$\mathrm{d}(\Omega \wedge \Pi) = \mathrm{d}\big(\omega(x)\pi(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_q}\big) =$$
$$\mathrm{d}(\omega(x)\pi(x)) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_q} =$$
$$\pi(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\omega}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_q} +$$
$$\omega(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\pi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_q} =$$
$$d\Omega \wedge \Pi(x) + (-1)^p(\Omega \wedge \mathrm{d}\Pi)$$

В последнем переходе мы воспользовались свойством антикоммутативности внешнего произведения для перестановки всех $\mathrm{d}x^{j_{\ldots}}$ перед всеми $\mathrm{d}x^{i_{\ldots}}$, остальное свернули по определению

2. Распишем двойной дифференциал:
$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\Omega) = \mathrm{d}\Big(\sum_{j,\forall k: j \neq i_k} \frac{\partial\omega}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}\Big) =$$
$$\sum_{l, l\neq j, \forall k: l \neq l_k} \sum_{j,\forall k: j \neq i_k} \frac{\partial^2\omega}{\partial x_l \partial x_j}\,\mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} =$$
$$\sum_{j,l,j<l,\forall k: j\neq i_k \wedge l \neq i_k} \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x_j \partial x_l}\right)\mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_p} = 0$$

□

15.2. Независимость внешнего дифференцирования от замены координат

Определение 15.2.1: Пусть
- Ω – дифференциальная p-форма в области $U \subset \mathbb{R}^n$
- $\varphi : V \to U$ – диффеоморфизм области $V \subset \mathbb{R}^n$ на U

Тогда $\varphi^*\Omega$ – дифференциальная p-форма в области V, определяемая как
$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n : \ (\varphi^*\Omega)(y)(\boldsymbol{b}) := \Omega(\varphi(y))\big(\varphi'(y)b_1, \ldots, \varphi'(y)b_p\big)$$

Утверждение 15.2.1 (Правило подсчёта): Мы можем выразить форму после замены координат через упомянутое выше базисное представление:
$$(\varphi^*\Omega)(y) = \sum_{1\leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} \omega_{i_1,\ldots,i_p}(\varphi(y))\,\mathrm{d}\varphi^{i_1}(y) \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_p}(y)$$

Доказательство: Заметим, что для произвольного вектора $b \in \mathbb{R}^n$ верно
$$\mathrm{d}\varphi^i(y)(b) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial\varphi^i}{\partial y^l}(y)\,\mathrm{d}f^l(b) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial\varphi^i}{\partial y^l}(y) b^l = (\varphi'(y)b)^i = \mathrm{d}f^i(\varphi'(y)b)$$
Не забывайте, что в качестве $\mathrm{d}f^i$ мы берём проекцию на i-ую координату. Что и требовалось. □

Лемма 15.2.1 (Независимость внешнего дифференцирования от замены координат):
$$\varphi^*(\mathrm{d}\Omega) = \mathrm{d}(\varphi^*\Omega)$$

Доказательство: БОО считаем, что Ω – это одночлен, для многочленов обобщается очевидно по линейности.

Зафиксируем $\Omega = \omega(x) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$

Тогда по свойствам внешнего дифференцирования:

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\omega(x) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$$

Тогда по правилу подсчёта

$$\varphi^*(\mathrm{d}\Omega) = \mathrm{d}\omega(\varphi(y)) \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_1}(y) \wedge ... \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_p}(y)$$

С другой стороны, по определению замены координат

$$\varphi^*(\Omega) = \omega(\varphi(y))\,\mathrm{d}\varphi^{i_1}(y) \wedge ... \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_p}(y)$$

Применим оба свойства внешнего дифференцирования (двойной дифференциал нулевой и псевдодистрибутивность):

$$\mathrm{d}(\varphi^*\Omega) = \mathrm{d}\omega(\varphi(y)) \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_1}(y) \wedge ... \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_p}(y)$$

□

16. Интегрирование дифференциальной формы с компактным носителем. Зависимость интеграла от замены координат.

Из Утверждение 15.1.3 Пространство Λ_n одномерно. Иными словами, если $(f^1, ..., f^n)$ – базис E^*, то

$$\{cf^1 \wedge ... \wedge f^n \mid c \in \mathbb{R}\} = \Lambda_n$$

Тогда если $(e_0^1, ..., e_0^n)$ – ортонормированный базис в E^* сопряжённый к $(e_1^0, ..., e_n^0)$ – ортонормированному базису в E^*.

Введём форму **ориентированного объёма**

$$V_{e^0} = e_0^1 \wedge ... \wedge e_0^n \overset{\text{соглашение}}{=} \mathrm{d}e_1^0 \wedge ... \mathrm{d}e_n^0$$

Возьмём произвольный базис $(e_1^0, ..., e_n^*)$ в E, связанный с исходным матрицей перехода T:

$$\forall j:\ e_j = t_j^i e_i^0$$

Рассмотрим действие:

$$V_{e_0}(e_1, ..., e_n) = \mathrm{d}e_1^0 \wedge ... \mathrm{d}e_n^0(e_1, ..., e_n) = \det\left(\mathrm{d}e_i^0(e_j)\right)_{i,j=1}^n = \det T$$

Причём $\forall$ базиса форма ориентированного объёма на нём самом равна 1:

$$V_{e_0} = \det T \cdot V_e$$

В начале определим интеграл от форм из Λ_n.

Определение 16.1: Интегралом от формы $\Omega(x) = \alpha(x)V_{e_0}$ по области $D \subset E$ называется

$$\int_D \Omega = \int_D \alpha(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Определение 16.2: Если Ω – гладкая $n-1$ форма, заданная на замыкании куба $K \subset \mathbb{R}$, то

$$\int_{\partial K} \Omega := \int_K \mathrm{d}\Omega$$

Определение 16.3: **Клеткой** называется диффеоморфный образ куба

Определение 16.4: Для формы Ω и диффеоморфизма $\varphi : U \to V$, $M \subset U$ – клетки, $K \subset V$ – куба:

$$\int_M \Omega = \int_K \varphi^* \Omega$$

17. Общая формула Стокса

Определение 17.1: **Границей клетки** $M = \varphi(K)$ называется

$$\partial M \coloneqq \varphi(\partial K)$$

Теорема 17.1 (Теорема Стокса для клетки): Если Ω – гладкая $m-1$ форма, заданная в окрестности m-мерной клетки, то

$$\int_{\partial M} \Omega = \int_M \mathrm{d}\Omega$$

Доказательство: Используя Теорему Стокса для куба (aka определение интеграла по формам меньших размерностей) и свойство инвариантности внешнего дифференцирования от замены координат:

$$\int_{\partial M} \Omega = \int_{\partial K} \varphi^* \Omega = \int_K \mathrm{d}(\varphi^* \Omega) = \int_K \varphi^*(\mathrm{d}\Omega) = \int_M \mathrm{d}\Omega$$

□

18. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке

В доказательствах некоторых теорем этого конспекта используется интересный трюк: если у нас есть цепочка равенств $a = b$, то мы с лёгкостью сможем продолжить её, написав $a = b = \frac{a+b}{2}$. Если вы понимаете, что в доказательстве теоремы с интегралами происходит какая-то дичь, то вспоминайте этот трюк!

Определение 18.1:

$$L_{2\pi} \coloneqq \{f \in L_1[-\pi, \pi] \mid f - 2\pi \text{ периодическая}\}$$

Определение 18.2: **Ядром Дирихле** $D_n(u)$ называется выражение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

Определение 18.3: Пусть $f \in L_{2\pi}$, тогда **частичной суммой тригонометрического ряда Фурье** называется

$$S_n(f,x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

где

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}\mu(t); \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

Лемма 18.1 (О представлении частичной суммы): Если $f \in L_{2\pi}$, то n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье может быть представлена

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)\,\mathrm{d}\mu(u)$$

Теорема 18.1 (Теорема Римана об осцилляции): Если $f \in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_I f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}\mu(x) = 0$$

Теорема 18.2 (Признак Дини): Если $f \in L_{2\pi}$ и $\varphi_{x_0} \in L_1(0,\delta), \delta > 0$, где

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $S(x_0)$

Доказательство: Рассмотрим разность $S_n(f,x_0) - S(x_0)$, пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f,x_0) - S(x_0) \overset{\text{трюк}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+u)+f(x-u)-2S(x_0))D_n(u)\,\mathrm{d}\mu(u)$$

В данном переходе мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно u
- Интеграл по $[-\pi,\pi]$ от ядра Дирихле равен π
- Если заменить в представлении частичной суммы t на $-t$, то ничего не изменится.

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв в формуле ядра Дирихле

$$\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) = \sin(nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

А также добавим и вычтем интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)}{t}\sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

Итак, приступим

$$S_n(f,x_0) - S(x_0) =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)}{t} \sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t) +$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\cos(nt)}{2}\,\mathrm{d}\mu(t) +$$
$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^{\pi}(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\sin(nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}\mu(t) +$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\sin(nt)\left(\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}\mu(t)$$

По условию φ_{x_0} сумирумая, значит по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)$ суммируема как сумма суммируемых и константы, значит по теореме Римана об осцилляции второе слагаемое стремится к нулю.

В третьем слагаемом $(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \in L_1[\delta,\pi]$, так как мы отделились от нуля и по теореме Римана об осцилляции третье слагаемое стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:
$$\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{t} \overset{t\to 0}{\sim} \frac{1-\frac{t^2}{8}}{2\left(\frac{t}{2}-\frac{t^3}{48}\right)}) - \frac{1}{t} = \frac{t-\frac{t^3}{8}-t+\frac{t^3}{24}}{t^2} = 0$$

Значит мы умножили суммируемую функцию $f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)$ на другую, имеющую устранимый разрыв в нуле, а значит
$$(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\left(\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{t}\right) \in L_1[0,\delta]$$

И опять применяем теоремы об осцилляции. □

Определение 18.4: Будем говорить, что функция f удовлетворяет **условию Гёльдера** порядка $\alpha \in (0,1]$ в точке x_0, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0)$ и константы $C > 0, \delta > 0$ такие, что
$$\forall t, 0 < t < \delta :\ |f(x_0+t) - f(x_0+0)| \le Ct^\alpha \wedge |f(x_0-t) - f(x_0-0)| \le Ct^\alpha$$

Теорема 18.3 (Признак Липшица): Если $f \in L_{2\pi}$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α в точке x_0, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Доказательство: По условию теоремы, хотим
$$S(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Значит функция φ_{x_0} из признака Дини будет иметь вид
$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+(f(x_0-t)-f(x_0-0))}{t}$$

То что φ измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла
$$\left|\int_0^{\delta}\varphi_{x_0}(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right| \le \int_0^{\delta}\frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}\,\mathrm{d}\mu(t) + \int_0^{\delta}\frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}\,\mathrm{d}\mu(t) \le$$
$$2C\int_0^{\delta} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\mu(t) = 2C\frac{\delta^\alpha}{\alpha}$$

Значит мы можем применить признак Дини и всё доказано. □

19. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье

Утверждение 19.1: Анализ доказательства признака Дини (Теорема 18.2) показывает, что критерием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f \in L_{2\pi}$ к $S(x_0)$ в точке x_0 является равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) \sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t) = 0$$

Лемма 19.1: Пусть $f \in L_{2\pi}, g$ – измеримая, 2π-периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции $\chi(t) = f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$ равномерно по x.

Теорема 19.1 (Признак Жордана): Если $f \in L_{2\pi}$ и является функцией ограниченной вариации на $[a, b]$, то тригонометрический ряд Фурье f сходится к $f(x_0)$ в каждой точке $x_0 \in [a, b]$ непрерывности $f(x)$ и к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ в каждой точке разрыва $x_0 \in [a, b]$.

Если, кроме того, $f \in C[a, b]$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.

Доказательство: Так как f ограниченной вариации, то она представима в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1, f_2 – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждения для неубывающих функций.

По (Утверждение 19.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) \sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t) = 0$$

Раскроем φ_{x_0} и $S(x_0)$ и будем доказывать лишь для

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t) = 0$$

А для слагаемого с минусами аналогично.

По определению правостороннего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_1, 0 < \delta_1 < \delta : \; 0 \le f(x_0+\delta_1) - f(x_0+0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как f монотонна и используем теорему о среднем для него:

$$\exists \delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 : \; \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \sin(nt)\,\mathrm{d}t =$$

$$(f(x_0+\delta_1) - f(x_0+0)) \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Но мы знаем, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ сходится, поэтому интеграл с переменным верхним пределом ограничен:

$$\exists C > 0 : \; \left|\int_0^u \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \le C$$

Но теперь рассмотрим:

$$\forall A > 0: \left|\int_0^A \frac{\sin(nt)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \overset{nt=:u}{=} \left|\int_0^{nA} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right| \leq C$$

Используя эту оценку, получим, что

$$\left|\int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leq 2\varepsilon C$$

Таким образом, разобьём исходный интеграл от 0 до δ на сумму интегралов от 0 до δ_1 и от δ_1 до δ.

Получим, что предел интеграла действительно равен нулю, применим признак Дини и получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости.

Вспомним, как мы расписывали разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$ на четыре слагаемых в доказательстве признака Дини (Теорема 18.2).

Применим к каждому из трёх последних слагаемых вспомогательную лемму (Лемма 19.1) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела первого слагаемого (который мы уже рассматривали в текущем доказательстве).

Это сделать несложно, заметим, что если f непрерывна на $[a', b']$, то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы можем найти δ_1 из текущего доказательства независимо от x_0.

Также независимо от x_0 мы ограничиваем интеграл от $\frac{\sin(nx)}{x}$, поэтому второе утвеждение текущец теоремы доказано. □

20. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Интегральная теорема Коши.

20.1. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана

Замечание 20.1.1: В ТФКП используются следующие станартные оборзначения z - комплексная переменная

$z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}$

$f(z)$ - исследуемая функция

$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) : u, v \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Определение 20.1.1: Функция $f : B_{r(z_0)} \to \mathbb{C}$ называется *дифференцируемой* в z_0 если

$$\exists A \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), |z - z_0| \to 0$$

Теорема 20.1.1: $f : B_{r(z_0)} \to \mathbb{C}$ дифференцируема тогда и только тогда когда
1. $u(x,y), v(x,y)$ дифференцируемы в (x_0, y_0)
2. Выполняются *условия Коши-Римана*:
$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$
При этом $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{i(\partial v)}{\partial x}(x_0, y_0)$

Доказательство:

($\Longrightarrow$)

Пусть f дифференцируема. Тогда $\Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z) = A\Delta z + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$

Обозначим $A = a + ib$ и распишем Δf по координатно.

$$\{\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)$$

Из того, что $\alpha(\Delta z) = o(\Delta z)$ следует α_1, α_2 тоже $o(\Delta x, \Delta y)$

Отсюда по определию u, v дифференцируемы. Причем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = b$

($\Longleftarrow$)

Пусть u, v дифференцируемы и выполняются УКР, тогда

$$\begin{aligned}\Delta f = \Delta u + i\Delta v &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y)\end{aligned}$$

Что и означает дифференцируемость.

□

20.2. Интегральная теорема Коши

Определение 20.2.1: Пусть γ - кусочно гладкая кривая в D - области. Тогда *приращением аргумента функции вдоль кривой* $\Delta_\gamma f$ называется $Im \int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)}$

Определение 20.2.2: Пусть γ - кусочно гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{C}$, $a \in C \setminus \gamma$. Тогда индксом a относительно γ называется

$$J_\gamma(a) = \frac{\Delta_\gamma(z-a)}{2\pi}$$

Определение 20.2.3: Пусть γ - кусочно гладкая кривая лежит в области D. Тогда говорят что $\gamma \sim 0(\operatorname{mod} D)$ *гомологично эквивалентна нулю*, если $\forall a \in \mathbb{C} \setminus D$ $J_{\gamma(a)} = 0$

Определение 20.2.4: Циклом Γ называется формальная линейная комбинация с целыми коэфициентами кусочно-гладких замкнутых кривых. Все определения и теоремы для кривых тривиально переносятся на циклы.

Определение 20.2.5: Пусть γ кусочно гладкая кривая, φ непрерывна на γ. Тогда инегралом Коши называется

$$F_{n(z,\varphi)} = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^n} d\xi$$

Утверждение 20.2.1: Свойства интеграла Коши
1. F_n голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \gamma$
2. $F_{n'}(z,\varphi) = nF_{n+1}(z,\varphi)$

Лемма 20.2.1: *Обшая теорема Коши*

Пусть D - область в $\mathbb{C}$, f - голоморфна в D Тогда
1. $g(\xi,z) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}, \xi \neq z \\ (f'(z)), z=\xi \end{cases}$

непрерывна в $D \times D$
2. Для любой кусочно гладкой $\gamma \in D$

$$h(z) = \int_\gamma g(\xi,z) d\xi$$

голоморфна в D

Теорема 20.2.1: *Лиувиля* Пусть f голоморфная в $\mathbb{C}$ и $\exists M, m, R$ $\forall z$ $|z| > R$: $|f(z)| < Mz^m$, тогда f полином степени m. В частности, если f ограничена, то она константа.

Теорема 20.2.2: *Интегральная теорема Коши* Пусть D - область в $\mathbb{C}$, f - голоморфна в D. Пусть Γ - цикл в D, причем $\Gamma \sim 0(\operatorname{mod} D)$, тогда
1. $\forall z D \setminus \Gamma : J_\Gamma(z) f(z) \frac{1}{2\pi i} = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$
2. $\int_\Gamma f(z)dz = 0$

Доказательство: Пусть $G = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid J_\Gamma(z) = 0\}$ оно открытое. Рассмотрим две функции

1. $2\pi i\ \tilde{h}(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$
   Она голоморфна в G как интеграл Коши.
2. $2\pi i\ h(z) = \int_\Gamma \left(\frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right) d\xi$
   Она голоморфна в D по 2 пункту общей теоремы Коши

Заметим, что $\forall z \in G \cap D :\ h(z) = \tilde{h}(z)$ так как

$$h(z) - \tilde{h}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi = J_{\Gamma(z)} f(z) = 0$$

Из того, что $\Gamma \sim 0(\operatorname{mod} D)$ следует $\mathbb{C} \setminus D \subset G$ Тогда рассмотрим новую функцию:

$$F(z) = \begin{cases} h(z), z \in D \\ \tilde{h}(z) \\ z \in \mathbb{C} \setminus D \subset G \end{cases}$$

Она голоморфна в каждой из компонент. А так как на границе h и $\tilde{h}$ равны, то голоморфна и в $\mathbb{C}$.

Заметим, что

$$|\tilde{h}(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{\max_\Gamma |f|\ |d\xi|}{dist(z, \Gamma)} \underset{dist(z,\Gamma) \to \infty}{\to} 0$$

А следовательно по теореме Лиувиля $F(z) \equiv 0$.

Следовательно в $D \setminus \Gamma$ $h(z) = 0$. То есть

$$\frac{f(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

$$f(z) J_{\Gamma(z)} = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

(1 => 2)

Применим 1 к $\tilde{f}(z) = (z - a)(f(z))$, где $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ (естественно в области определения f) Тогда

$$0 = J_{\Gamma(a)}(a - a) f(a) = J_{\Gamma(a)} \tilde{f}(a) = \int_\Gamma \frac{\tilde{f}(\xi)d\xi}{\xi - a} = \int_\Gamma f(\xi)d\xi$$

$\square$