Содержание

ГОС по матану

Disclaymer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности

1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Определение 1.1.1: Если $E \subset \mathbb{R}$ – ограниченное сверху (снизу) множество, то $M(m) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\forall x \in E : x \le M (x \ge m)$$

называется **верхней (нижней) гранью** множества E.

Определение 1.1.2: Наименьшая из верхних граней множества E называется **точной верхней гранью**: $\sup E$.

Наибольшая из нижних граней множества E называется **точной нижней гранью**: $\inf E$.

Теорема 1.1.1 (О существовании точной верхней (нижней) грани): Любое ограниченное сверху (снизу) непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство: Пусть B – множество верхних граней множества E. Введём обозначение $A \coloneqq \mathbb{R} \setminus B$.

Тогда если произвольное число a меньше какого-то $x \in E$, то оно точно не верхняя грань $E \Rightarrow a \in A$.

Заметим также свойство множества B:

$$\forall b \in B : \forall x > b : \ x \in B$$

Тогда по одной из аксиом действительных чисел

$$\exists c \in R : \forall a \in A : \forall b \in B : \ a \le c \le b$$

Пусть $\sup E \coloneqq c$. Проверим свойства точной верхней грани:

1. c является верхней гранью

   От противного. Пусть $c \notin B$, тогда $\exists x \in B : x > c$, причём $c < \frac{x+c}{2} < x$.

   Но тогда заметим, что $\frac{x+c}{2} \in A$, что противоречит выбору c как числа больше либо равного любого элемента A

2. c является наименьшей из верхних граней

   От противного. Пусть $\exists M \in B : M < c$. Но тогда $M < \frac{M+c}{2} < c$, причём $\frac{M+c}{2} \in B$, что противоречит выбору c как числа меньше либо равного любого элемента B.

$\square$

Теорема 1.1.2 (Вейерштрасса): Каждая ограниченная сверху (снизу) неубывающая (невозрастающая) последовательность сходится, причём её предел равен точной верхней (нижней) грани.

Доказательство: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху $\Rightarrow \exists \sup \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = l$

Отсюда:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq l < l + \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : l - \varepsilon < x_N$ (по определению супремума)

Заметим, что получилось в точности определение предела. □

Теорема 1.1.3 (Принцип Кантора вложенных отрезков): Всякая последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, то есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

имеет непустое пересечение, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Доказательство: Из вложенности очевидно следует

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n,\ b_{n+1} \leq b_n$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_1, b_n \geq a_1$$

Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a$$

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \inf \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = b$$

А значит отрезок $[a, b]$ (возможно вырожденный) включён в пересечение всех отрезков. □

Теорема 1.1.4 (Больцано-Вейерштрасса): Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – рассматриваемая ограниченная последовательность, то есть

$$\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} :\ a_1 \leq x_n \leq b_1$$

Заметим, что один из отрезков $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ содержит бесконечно много элементов последовательности.

Пусть $[a_2, b_2]$ – тот из отрезков, который содержит бесконечно много элементов.

Продолжая данный трюк счётное количество раз получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Также заметим, что данные отрезки стягиваются:

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$$

Тогда по принципу Кантора:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}$$

Осталось построить подпоследовательность, будем брать $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, причём так, чтобы $n_k > n_{k-1}$. Очевидно, $n_1 = 1$. Существование предела также очевидно:

$$0 \le \left|c - x_{n_k}\right| \le b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

□

1.2. Критерий Коши

Определение 1.2.1: Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

Теорема 1.2.1 (Критерий Коши сходимости числовой последовательности): Числовая последовательность сходится ⇔ она фундаментальна.

Доказательство: ⇒ По определению предела:

$$\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника в условиях предела:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|x_{n+p} - l + l - x_n\right| \le \left|x_{n+p} - l\right| + |x_n - l| < \varepsilon$$

⇐ Вначале докажем, что из фундаментальности следует ограниченность:

$$\varepsilon := 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < 1$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : \min(x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1) \le x_n \le \max(x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1)$$

Тогда из ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по теореме Больцано-Вейерштрасса достанем сходящуюся подпоследовательность:

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \exists l : \forall \varepsilon > 0 : \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) : \ \left|x_{n_k} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Также по определению фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

Объединим эти два условия и получим требуемое:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 = \max\left(N(\varepsilon), n_{K(\varepsilon)+1}\right) : \forall n > N_0 :$$

$$|x_n - l| = \left|x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}} + x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l\right| \le \left|x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}}\right| + \left|x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l\right| < \varepsilon$$

□