

Содержание

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности	3
1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса	3
1.2. Критерий Коши	5
2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней	6
2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке	6
2.2. Достижение точных верхних и нижних граней	6
3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции ...	7
4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.	7
4.1. Теорема Ролля	7
4.2. Теоремы Лагранжа и Коши	8
5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа	9
5.1. Член в форме Лагранжа	9
5.2. Член в форме Пеано	10
6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.	11
6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции	11
6.2. Достаточные условия локальных экстремумов	11
6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости	12
7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте	13
8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных	14
9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением	15
10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия.	17
10.1. Необходимые условия	17
10.2. Достаточные условия	18
11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница.	19
11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом	19
11.2. Формула Ньютона-Лейбница	20
12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда.	21
12.1. Непрерывность суммы функционального ряда	21
12.2. Интегрируемость суммы функционального ряда	23
12.3. Дифференцируемость суммы функционального ряда	24

13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора.	25
13.1. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда	25
13.2. Ряд Тейлора	26

ГОС по матану

Disclaimer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

Экзамен - это тропа

Коновалов Сергей Петрович

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности

1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Определение 1.1.1: Если $E \subset \mathbb{R}$ – ограниченное сверху (снизу) множество, то $M(m) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\forall x \in E : x \leq M(x \geq m)$$

называется **верхней (нижней) гранью** множества E .

Определение 1.1.2: Наименьшая из верхних граней множества E называется **точной верхней гранью**: $\sup E$.

Наибольшая из нижних граней множества E называется **точной нижней гранью**: $\inf E$.

Теорема 1.1.1 (О существовании точной верхней (нижней) грани): Любое ограниченное сверху (снизу) непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство: Пусть B – множество верхних граней множества E . Введём обозначение $A := \mathbb{R} \setminus B$.

Тогда если произвольное число a меньше какого-то $x \in E$, то оно точно не верхняя грань $E \Rightarrow a \in A$.

Заметим также свойство множества B :

$$\forall b \in B : \forall x > b : x \in B$$

Тогда по одной из аксиом действительных чисел

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A : \forall b \in B : a \leq c \leq b$$

Пусть $\sup E := c$. Проверим свойства точной верхней грани:

1. c является верхней гранью

От противного. Пусть $c \notin B$, тогда $\exists x \in B : x > c$, причём $c < \frac{x+c}{2} < x$.

Но тогда заметим, что $\frac{x+c}{2} \in A$, что противоречит выбору c как числа больше либо равного любого элемента A

2. c является наименьшей из верхних граней

От противного. Пусть $\exists M \in B : M < c$. Но тогда $M < \frac{M+c}{2} < c$, причём $\frac{M+c}{2} \in B$, что противоречит выбору c как числа меньше либо равного любого элемента B .

□

Теорема 1.1.2 (Вейерштрасса): Каждая ограниченная сверху (снизу) неубывающая (невозрастающая) последовательность сходится, причём её предел равен точной верхней (нижней) грани.

Доказательство: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху $\Rightarrow \exists \sup \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = l$

Отсюда:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq l < l + \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : l - \varepsilon < x_N$ (по определению супремума)

Заметим, что получилось в точности определение предела.

□

Теорема 1.1.3 (Принцип Кантора вложенных отрезков): Всякая последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, то есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

имеет непустое пересечение, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Доказательство: Из вложенности очевидно следует

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n, b_{n+1} \leq b_n$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_1, b_n \geq a_1$$

Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = b$$

А значит отрезок $[a, b]$ (возможно вырожденный) включён в пересечение всех отрезков.

□

Теорема 1.1.4 (Больцано-Вейерштрасса): Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – рассматриваемая ограниченная последовательность, то есть

$$\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_1 \leq x_n \leq b_1$$

Заметим, что один из отрезков $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ содержит бесконечно много элементов последовательности.

Пусть $[a_2, b_2]$ – тот из отрезков, который содержит бесконечно много элементов.

Продолжая данный трюк счётное количество раз получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Также заметим, что данные отрезки стягиваются:

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$$

Тогда по принципу Кантора:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

Осталось построить подпоследовательность, будем брать $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, причём так, чтобы $n_k > n_{k-1}$. Очевидно, $n_1 = 1$. Существование предела также очевидно:

$$0 \leq |c - x_{n_k}| \leq b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

□

1.2. Критерий Коши

Определение 1.2.1: Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

Теорема 1.2.1 (Критерий Коши сходимости числовой последовательности): Числовая последовательность сходится \Leftrightarrow она фундаментальна.

Доказательство: \Rightarrow По определению предела:

$$\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника в условиях предела:

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - l + l - x_n| \leq |x_{n+p} - l| + |x_n - l| < \varepsilon$$

\Leftarrow Вначале докажем, что из фундаментальности следует ограниченность:

$$\varepsilon := 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < 1$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : \min(x_1, \dots, x_N, x_{N+1} + 1) \leq x_n \leq \max(x_1, \dots, x_N, x_{N+1} + 1)$$

Тогда из ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по теореме Больцано-Вейерштрасса достанем сходящуюся подпоследовательность:

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \exists l : \forall \varepsilon > 0 : \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) : |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Также по определению фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

Объединим эти два условия и получим требуемое:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 = \max(N(\varepsilon), n_{K(\varepsilon)+1}) : \forall n > N_0 :$$

$$|x_n - l| = |x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}} + x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l| \leq |x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}}| + |x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l| < \varepsilon$$

□

2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней

2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Определение 2.1.1: Пусть f определена в некоторой окрестности $U_{\delta_0}(x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется **непрерывной в точке x_0** .

Определение 2.1.2: f называется **непрерывной на множестве $X \subset \mathbb{R}$** , если

$$\forall x_0 \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.1 (Первая теорема Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции): Если f непрерывна на $[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство: От противного, пусть f неограничена сверху. Тогда

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = +\infty$$

То есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$$

Причём $\forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n \leq b$, то есть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

Однако из $f(x_{n_k}) > n$ следует, что $f(x_0) = \infty$. Противоречие. \square

2.2. Достижение точных верхних и нижних граней

Теорема 2.2.1 (Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях): Если f непрерывна на $[a, b]$, то

$$\exists x', x'' \in [a, b] : f(x') = \sup_{x \in [a, b]} f(x); \quad f(x'') = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

Доказательство: Пусть $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$. Тогда по определению супремума

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in [a, b] : M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

В том числе для $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b] : \forall n \in \mathbb{N} : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = M$$

Последнее равенство было получено устремлением $k \rightarrow \infty$ в неравенстве $M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$.

Таким образом, M действительно достигим функцией f в точке x_0 . Для инфимума аналогично. \square

3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

Теорема 3.1 (Больцано-Коши о промежуточных значениях): Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : c := f(x_1) < d := f(x_2) : \forall e \in (c, d) : \exists \gamma \in [a, b] : f(\gamma) = e$$

Доказательство: Рассмотрим частный случай $c < e = 0 < d$.

Построим последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, где $[a_1, b_1] = [x_1, x_2]$ (мы не знаем в каком порядке идут иксы).

Заметим, что $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

Рассмотрим $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$. Какие могут быть случаи?

- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, то мы победили и останавливаемся.
- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$, то $a_2 := a_1, b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$, то $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 := b_1$.

Либо после конечного числа шагов мы найдём требуемую точку, либо построим последовательность стягивающихся отрезков:

$$b_n - a_n = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{n-1}}$$

Тогда по принципу Кантора $\{\gamma\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \gamma \in [a, b]$$

Тогда в силу непрерывности f :

$$f(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Заметим, что после каждой итерации алгоритма изначальное свойство сохраняется:

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

Совершив предельный переход в неравенстве, получим

$$f^2(\gamma) \leq 0$$

Из чего следует $f(\gamma) = 0$.

В общем случае рассматривается вспомогательная функция $F(x) = f(x) - e$. \square

4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

4.1. Теорема Ролля

Определение 4.1.1: Пусть f определена в некоторой δ_0 окрестности точки x_0 . Если

$$\exists \delta \in (0, \delta_0) : \forall x \in U_{\delta}(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$$

то x_0 – **точка локального максимума**.

Также аналогично вводятся определения локального минимума, а также строгие экстремумы, в которых неравенство строгое.

Теорема 4.1.1 (Ферма о необходимом условии локального экстремума): Если x_0 – точка локального экстремума функции $y = f(x)$, дифференцируемой в x_0 , то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: БОО x_0 – точка локального максимума.

Заметим, что тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

А при существовании производной оба этих предела совпадают, поэтому производной в x_0 остаётся лишь быть равной нулю. \square

Теорема 4.1.2 (Ролля): Если f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) , причём $f(a) = f(b)$, то

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Доказательство: Заметим, что если $f \equiv \text{const}$, то утверждение тривиально.

Иначе, f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists m < M : m = \min_{x \in [a, b]} f(x); \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

Заметим, что либо $m \neq f(a)$, либо $M \neq f(a)$.

Это значит, что существует локальный минимум или максимум в некоторой точке $c \in (a, b)$, а по теореме Ферма мы знаем, что $f'(c) = 0$. \square

4.2. Теоремы Лагранжа и Коши

Теорема 4.2.1 (Обобщённая теорема о среднем): Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) , то

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Доказательство: Рассмотрим

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

Заметим, что h всё ещё непрерывна на отрезке и дифференцируема на интервале, причём

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(a)$$

То есть h удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Требуемое доказано. \square

Теорема 4.2.2 (Лагранжа о среднем): Если f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) , то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Доказательство: В обобщённой теореме о среднем возьмём $g(x) = x$. \square

Теорема 4.2.3 (Коши о среднем): Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$, то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство: Очевидная интерпретация обобщённой теоремы о среднем.

Необходимо уточнить лишь, почему $g(b) - g(a) \neq 0$, чтобы мы смогли поделить на него.

Если бы $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля $\exists c : g'(c) = 0$, что противоречит с условием текущей теоремы. \square

5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа

5.1. Член в форме Лагранжа

Лемма 5.1.1: Если f n раз дифференцируема в точке x_0 , то $\exists!$ многочлен степени $\leq n$ такой, что

$$f(x_0) = P_n(f, x_0); f'(x_0) = P'_n(f, x_0); \dots; f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(f, x_0)$$

Этот многочлен имеет вид

$$P_{n(f,x)} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

и называется **многочленом Тейлора** степени n относительно точки x_0 .

Доказательство: Очевидно проверяем каждую производную \square

Лемма 5.1.2 (Об отношении): Если φ, ψ $(n+1)$ раз дифференцируемы в $U_\delta(x_0)$, причём

$$\forall k = \overline{0, n} : \varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) = 0$$

но

$$\forall k = \overline{0, n} : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \psi^{(k)}(x) \neq 0$$

то

$$\forall x \in U_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$$

Доказательство: Заметим, что φ, ψ удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем. Тогда

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x) : \frac{\varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_0}{\psi(x) - \underbrace{\psi(x_0)}_0} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \underbrace{\varphi'(x_0)}_0}{\psi'(\xi_1) - \underbrace{\psi'(x_0)}_0} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = \dots = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$

□

Теорема 5.1.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа): Если f $(n+1)$ раз дифференцируема в $U_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, то

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : f(x) - P_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Доказательство: Сведём к предыдущей лемме об отношении:

$$\varphi(x) := f(x) - P_n(f, x); \quad \psi(x) := (x - x_0)^{n+1}$$

Все требуемые свойства проверяются очевидно.

□

5.2. Член в форме Пеано

Теорема 5.2.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано): Если f n раз дифференцируема в точке x_0 , то

$$f(x) - P_n(f, x) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$$

где $P_{n(f, x)}$ — многочлен Тейлора степени n функции f относительно x_0 .

Доказательство: По определению, если f n раз дифференцируема в точке, то она $n-1$ раз дифференцируема в окрестности.

Снова используем лемму об отношении, но для случая $n-1$:

$$\varphi(x) := f(x) - P_{n(f, x)}; \quad \psi(x) = (x - x_0)^n$$

Получим, что

$$\exists \xi \in (x_0, x) : \frac{f(x) - P_{n(f, x)}}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n! (\xi - x_0)}$$

Заметим, что при $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \xi \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_{n(f, x)}}{(x - x_0)^n} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n! (\xi - x_0)} = \frac{1}{n!} (f(x_0) - P_n(f, x_0))^{(n)} = 0$$

□

6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.

6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции

Теорема 6.1.1: Пусть f дифференцируема на (a, b) . Тогда

1. $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ — неубывающая на (a, b)
2. $\forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ — невозрастающая на (a, b)
3. $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ — возрастающая на (a, b)
4. $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ — убывающая на (a, b)

Доказательство:

1. $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ По теореме Лагранжа:

$$\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b : \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$$

То есть для произвольных $x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.

Обратно, пусть $f(x)$ неубывающая. Тогда

$$\forall x_0 \in (a, b) : \forall \Delta x : \text{sign} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \text{sign} \Delta x$$

Ну и тогда при $|\Delta x| < \min(x_0 - a, b - x_0)$:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

Совершим предельный переход в неравенстве и получим требуемое.

2. Аналогично предыдущему пункту
3. Контрпримером для \Leftarrow является $f(x) = x^3$ в точке 0
4. Контрпримером для \Leftarrow является $f(x) = -x^3$ в точке 0

□

6.2. Достаточные условия локальных экстремумов

Теорема 6.2.1 (Первое достаточное условие экстремума функции): Пусть f непрерывна в $U_{\delta_0}(x_0)$ и дифференцируема в $\dot{U}_{\delta_0}(x_0)$, $\delta_0 > 0$:

1. Если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) > 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) < 0$, то x_0 — точка строгого локального максимума f
2. Если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) < 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) > 0$, то x_0 — точка строгого локального минимума f

Доказательство: По сути просто заменили в определении локального экстремума монотонность на достаточное условие знакопостоянности производной из предыдущей теоремы. \square

Теорема 6.2.2 (Второе достаточное условие локального экстремума): Если f n раз дифференцируема в точке x_0 , $f^{(n)}(x_0) \neq 0, \forall k = \overline{1, n-1} : f^{(k)}(x_0) = 0$, то

1. Если n чётно, то f имеет в точке x_0 локальный минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$ и локальный максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$.
2. Если n нечётное, то f не имеет локального экстремума в точке x_0 .

Доказательство:

1. Воспользуемся разложением в Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (учитывая факт нулевых производных):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$$

Так как n чётно, то $n = 2m$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2m}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1), x \rightarrow x_0$$

Левая часть в некоторой окрестности точки x_0 имеет тот же знак, что и правая. Тогда в силу чётной степени в знаменателе левой части получаем, что разность $f(x) - f(x_0)$ одного знака с n -ой производной.

2. Рассмотрим $f(x) = x^3$.

\square

6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости

Определение 6.3.1: f называется **выпуклой (вниз) (вогнутой вверх)** на (a, b) , если её график лежит не выше хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b) .

f называется **выпуклой (вверх) (вогнутой вниз)** на (a, b) , если её график лежит не ниже хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b) .

Теорема 6.3.1: Пусть f дважды дифференцируема на (a, b) :

1. f выпукла вниз на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$.
2. f выпукла вверх на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$.
3. f строго выпукла вниз на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$.
4. f строго выпукла вверх на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$.

Доказательство:

1. \Leftarrow Рассмотрим эквивалентное определение выпуклости:

$$\forall x_0, x_1 : a < x_0 < x_1 < b : \forall t \in [0, 1] :$$

$$x_t := tx_0 + (1-t)x_1 : f(x_t) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

Разложим f в формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке x_t :

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x_t) : f(x_0) = f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_0 - x_t)^2$$

$$\exists \xi_2 \in (x_1, x_t) : f(x_1) = f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_1 - x_t)^2$$

Из-за знакопостоянности второй производной из этих равенств следуют следующие неравенства:

$$f(x_0) \geq f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t)$$

$$f(x_1) \geq f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t)$$

Умножим первое на t , второе на $1-t$ и сложим их:

$$tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \geq f(x_t) + \underbrace{f'(x_t)(tx_0 + (1-t)x_1 - x_t)}_0$$

\Rightarrow Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и достаточно малую окрестность $\delta := \min(x_0 - a, b - x_0)$. Тогда

$$\forall u \in (-\delta, \delta) : x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - u) + \frac{1}{2}(x_0 + u) : f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u)$$

Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x_0 \pm u) = f(x_0) \pm f'(x_0)u + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \rightarrow 0$$

В прошлой строчке мы записали сразу два равенства благодаря \pm , давайте умножим каждое на $\frac{1}{2}$ и сложим их:

$$\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \rightarrow 0$$

Тогда при достаточно малых u $\frac{f''(x_0)}{2}u^2$ обязано будет стать такого же знака, как и $\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) - f(x_0) \geq 0$

2. Аналогично
3. \Leftarrow аналогично только со строгими неравенствами, а \Rightarrow вообще говоря не верно, например, для $f(x) = x^4$
4. \Leftarrow аналогично только со строгими неравенствами, а \Rightarrow вообще говоря не верно, например, для $f(x) = -x^4$

□

7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте

Определение 7.1: Компактным множеством в метрическом пространстве X называется такое множество K , что из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 7.2: Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, где X – метрическое пространство, называется равномерно непрерывной на множестве $X' \subset X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X' : \rho(x_1, x_2) < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Теорема 7.1 (Кантора о равномерной непрерывности): Если $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на K .

Доказательство: От противного, выпишем отрицание равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in K : \|x_1 - x_2\| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Выбирая $\delta := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}, \dots$ построим последовательность пар из отрицания непрерывности: $\{(x_{1,m}, x_{2,m})\}_{m=1}^{\infty} \subset K^2$.

Причём

$$\forall m \in \mathbb{N} : \|x_{1,m} - x_{2,m}\| < \frac{1}{m} : |f(x_{1,m}) - f(x_{2,m})| \geq \varepsilon$$

По одному из определений компактности выделим из последовательности пар подпоследовательность, у которой сходятся первые координаты:

$$\exists \{(x_{1,m_k}, x_{2,m_k})\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{1,m_k} = x_0 \in K$$

Причём заметим, что (комбинируем то, как мы строили последовательность пар и сходимости первых координат подпоследовательности):

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > 0 : \|x_{2,m_k} - x_0\| \leq$$

$$\|x_{1,m_k} - x_0\| + \|x_{1,m_k} - x_{2,m_k}\| < 2\varepsilon$$

То есть

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{1,m_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2,m_k} = x_0 \quad \xRightarrow{\text{непрерывность } f} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{1,m_k}) - f(x_{2,m_k})) &= 0 \end{aligned}$$

Противоречие! □

8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

Определение 8.1: Пусть f определена в некоторой окрестности $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Полным приращением f в точке x_0 называется

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n} + \Delta x_n) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$$

f называется **дифференцируемой** в x_0 , если

$$\Delta f(x_0) = (A, \Delta x) + o(\|\Delta x\|), \Delta x \rightarrow 0$$

где $A \in \mathbb{R}^n$ называется **градиентом**: $\text{grad } f(x_0) = A$

Определение 8.2: Дифференциалом дифференцируемой в x_0 функции f назовём выражение $(A, \Delta x)$ из определения дифференцируемости.

Определение 8.3: Частной производной в точке x_0 называется предел (если он существует):

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_{0,1}, \dots, x_{0,j} + \Delta x, \dots, x_{0,n}) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,j}, \dots, x_{0,n})}{\Delta x}$$

Теорема 8.1 (Необходимое условие дифференцируемости): Если f дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то существуют частные производные $\forall j = \overline{1, n}$, причём

$$\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

Доказательство: Сразу следует из определения - есть предел по всем многомерным приращениям, а значит и по однокоординатным в том числе. \square

Теорема 8.2 (Достаточное условие дифференцируемости): Если f определена в некоторой окрестности точки x_0 , вместе со своими частными производными, причём они непрерывны в x_0 , то f дифференцируема в x_0 .

Доказательство: Воспользуемся n раз «умным нулём», каждый из которых будет снимать приращение по одной из координат:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= \\ f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n} + \Delta x_n) - f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}) + \\ & f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}) - f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1}, x_{0,n}) \\ & + \dots + \\ & f(x_{0,1} + \Delta x_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) = \\ & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, \xi_n) \Delta x_n + \\ & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-2} + \Delta x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_{0,n}) \Delta x_{n-1} \\ & + \dots + \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \Delta x_1 = \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \Delta x_i + o(\|\Delta x\|), \Delta x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

\square

9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением

Определение 9.1: Кубом радиуса δ вокруг точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ назовём

$$K_{\delta, x_0} = \times_{k=1}^n (x_0^k - \delta, x_0^k + \delta)$$

где под \times подразумевается декартово произведение.

Теорема 9.1: Пусть $F(x, y) = F(x_1, \dots, x_n, y)$ дифференцируема в окрестности точки $(x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0)$.

Её производная $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в этой окрестности, причём $F(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$:

$$\forall x \in K_{\delta, x_0} : \exists! y = \varphi(x) : \forall (x, y) \in K_{\delta, x_0} \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) :$$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x) \wedge \exists \varphi'(x_0)$$

Доказательство: БОО будем считать, что $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.

По непрерывности частной производной, \exists окрестность точки (x_0, y_0) , в которой $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$.

Тогда из непрерывности F по y и знакоопределённости производной следует

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Расширяем территорию дальше, из непрерывности F по x следуют

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in K_{\delta, x_0} : F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции берём существование, а из знакоопределённости производной единственность:

$$\exists! \varphi(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Заметим, что φ непрерывна по построению в (x_0, y_0) : мы брали x из 2δ окрестности точки x_0 , а значение лежало в 2ε окрестности точки y_0 .

Теперь докажем дифференцируемость φ , для этого распишем дифференцируемость F :

$$F(x, y) - \underbrace{F(x_0, y_0)}_0 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) \cdot (x_k - x_0^k) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \alpha(x, y)$$

где $\alpha = o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|)$, $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Воспользуемся умножением на «умную единицу»:

$$\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(x, y) \cdot (x_i - x_0^i)^2}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2} + \frac{\alpha(x, y) \cdot (y - y_0)^2}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2}$$

Введём новые обозначения:

$$\alpha_i(x, y) := \frac{\alpha(x, y) \cdot (x_i - x_0^i)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2}; \quad \beta(x, y) := \frac{\alpha(x, y) \cdot (y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2}$$

Тогда

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) + \alpha_k(x, y) \right) (x_k - x_0^k) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(x, y) \right) (y - y_0)$$

Подставляя $y = \varphi(x)$ в выражение выше, будем использовать новые обозначения:

$$\tilde{\alpha}_k(x) := \alpha_k(x, \varphi(x)); \quad \tilde{\beta}(x) := \beta(x, \varphi(x))$$

Таким образом,

$$\underbrace{F(x, \varphi(x))}_0 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x) \right) (x_k - x_0^k) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x) \right) (\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

Выразим приращение φ :

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))} + \gamma_k(x) \right) (x_k - x_0^k)$$

где

$$\gamma_k(x) := - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x)}$$

Остаётся заметить, что $\tilde{\alpha}_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$; $\tilde{\beta}(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$, а это значит, что

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \sum_{k=1}^n A_k(x_k - x_0^k) + \gamma(x); \quad \gamma(x) = o(\|x - x_0\|), x \rightarrow x_0$$

Что и является требуемой дифференцируемостью φ в x_0 . \square

10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия.

10.1. Необходимые условия

Определение 10.1.1: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$$

Определение 10.1.2: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$$

Определение 10.1.3: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **строгого локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) < f(x_0)$$

Определение 10.1.4: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **строгого локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) > f(x_0)$$

Теорема 10.1.1 (Необходимые условия локального экстремума): Если x_0 — точка локального экстремума функции $f(x)$, дифференцируемой в окрестности точки x_0 , то $df(x) \equiv 0$.

Доказательство: Рассмотрим для каждого $k = \overline{1, n}$:

$$\psi(x_k) = f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n), \quad \text{где } x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$$

Тогда заметим, что ψ дифференцируема в окрестности x_0^k , применяя теорему о необходимом условии экстремума функции одного переменного, получим

$$\psi'(x_0^k) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0$$

В силу произвольности k и того, что дифференциал – это вектор частных производных, получим требуемое. \square

10.2. Достаточные условия

Определение 10.2.1: Если f дифференцируема в окрестности точки x_0 и $df(x_0) \equiv 0$, то x_0 называется **стационарной точкой** функции f .

Теорема 10.2.1 (Достаточные условия локального экстремума): Если x_0 – стационарная точка функции f , дважды дифференцируемой в точке x_0 , то

1. Если $d^2f(x_0)$ – положительно определённая квадратичная форма, то x_0 – точка строгого локального минимума функции f
2. Если $d^2f(x_0)$ – отрицательно определённая квадратичная форма, то x_0 – точка строгого локального максимума функции f
3. Если $d^2f(x_0)$ – неопределённая квадратичная форма, то x_0 не является точкой локального экстремума

Доказательство:

1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0) + o(\rho^2), \quad \rho \rightarrow 0$$

где

$$dx_k = x_k - x_0^k, k = \overline{1, n}; \quad \rho = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_0^k)^2} = \|dx\|_2$$

Тогда (в условиях $df(x_0) \equiv 0$ и $\xi_k := \frac{dx_k}{\|dx\|}$):

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2f(x_0) + o(\rho^2) =$$

$$\frac{1}{2}\rho^2 \left(\underbrace{\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \xi_i \xi_j}_{F(\xi_1, \dots, \xi_n)} + o(1) \right), \quad \rho \rightarrow 0$$

В следствие нормировки, очевидно, $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1$.

Таким образом, минимум введённого функционала F на сфере (компактной в \mathbb{R}^n) будет достигаться:

$$\min_{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1} F(\xi_1, \dots, \xi_n) =: C > 0$$

Таким образом, для достаточно маленьких ρ :

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{C}{4}\rho^2 > 0$$

2. Аналогично

3. Вводим $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$ аналогично предыдущим пунктам, из-за того что d^2f – неопределённая, то

$$\exists \xi_1(x_1), \xi_2(x_2) : F(\xi_1^1, \dots, \xi_1^n) > 0 \wedge F(\xi_2^1, \dots, \xi_2^n) < 0$$

Тогда при достаточно малых ρ :

$$\text{sign}(f(x_1) - f(x_0)) = \text{sign} F(\xi_1) > 0; \text{sign}(f(x_2) - f(x_0)) = \text{sign} F(\xi_2) < 0$$

Что и требовалось.

□

11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница.

11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом

Определение 11.1.1: Разбиением P отрезка $[a, b]$ называется конечное множество точек отрезка $[a, b]$:

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b; \quad \Delta x_k := x_k - x_{k-1}; k = \overline{1, n}$$

Определение 11.1.2: Диаметром разбиения P называется

$$\Delta(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

Определение 11.1.3: Верхней суммой Дарбу разбиения P функции f называется

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

Определение 11.1.4: Нижней суммой Дарбу разбиения P функции f называется

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

Определение 11.1.5: Функция f называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$ ($f \in \mathcal{R}[a, b]$), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists P : U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

Определение 11.1.6: Интегралом Римана интегрируемой по Риману на $[a, b]$ функции f называется

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_P U(P, f) = \sup_P L(P, f)$$

Теорема 11.1.1 (Основные свойства интеграла Римана):

1. (Линейность) Если $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$, то $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$, причём

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$
 Кроме того, $\forall c \in \mathbb{R}$ выполняется, что $cf_1 \in \mathcal{R}[a, b]$, причём

$$\int_a^b cf_1(x) dx = c \int_a^b f_1(x) dx$$
2. (Монотонность) Если $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] : f_1(x) \leq f_2(x)$, то

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$
3. (Аддитивность):

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \forall c \in (a, b) : f \in \mathcal{R}[a, c] \wedge f \in \mathcal{R}[c, b]$$
 Причём $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
4. (Оценка) Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a)$$

Определение 11.1.7: Пусть $\forall b' \in (a, b) : f \in \mathcal{R}[a, b']$. Тогда $F(b') = \int_a^{b'} f(x) dx$ называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

Будем считать, что $F(a) = 0$, а для $\alpha > \beta$:

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = - \int_\beta^\alpha f(x) dx$$

Теорема 11.1.2 (Основные свойства интеграла с переменным верхним пределом): Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $F(x)$ непрерывен на $[a, b]$.

Если, кроме того, f непрерывна в $x_0 \in [a, b]$, то $F(x)$ дифференцируема в x_0 , причём $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство: Непрерывность следует из комбинирования свойств аддитивности и оценки:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \wedge x_2 - x_1 < \frac{\varepsilon}{M} : |F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx \leq M(x_2 - x_1) < \varepsilon$$

В условиях непрерывности f , докажем, что производная интеграла действительно равна $f(x_0)$:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} |f(t) - f(x_0)|$$

Благодаря непрерывности f мы знаем, что при $x \rightarrow x_0$ сможем оценить итоговый супремум сверху ε . \square

11.2. Формула Ньютона-Лейбница

Определение 11.2.1: Первообразной функции f на $[a, b]$ называется такая дифференцируемая на $[a, b]$ функция F , что

$$\forall t \in [a, b] : F'(t) = f(t)$$

Определение 11.2.2: Интегральной суммой $S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$ называется

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

где $P : a = x_0 < \dots < x_n = b, \forall i = \overline{1, n} : t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Теорема 11.2.1 (Интеграл как предел интегральных сумм):

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \exists \lim_{\Delta(P) \rightarrow 0} S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$$

При этом $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta(P) \rightarrow 0} S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$

Теорема 11.2.2 (Основная теорема интегрального исчисления): Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ имеет первообразную F на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Доказательство: Для любого разбиения P :

$$F(b) - F(a) \stackrel{\text{телескопическая сумма}}{=} \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) \stackrel{\text{теорема Лагранжа}}{=} \sum_{k=1}^n F'(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Устремляя $\Delta(P) \rightarrow 0$ получим, что $F(b) - F(a)$ равно требуемому интегралу по эквивалентному определению. \square

12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда.

12.1. Непрерывность суммы функционального ряда

Определение 12.1.1: Функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится равномерно на E к функции $f(x)$ ($f_n \rightrightarrows f$), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Определение 12.1.2: Функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится поточечно** на E к функции $f(x)$, если

$$\forall x \in E : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Теорема 12.1.1 (Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности):

$$f_n \xrightarrow[E]{} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Определение 12.1.3: Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на E , если равномерно сходится на E функциональная последовательность $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$

Теорема 12.1.2 (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ равномерно сходится на } E \Leftrightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

Теорема 12.1.3 (Предельный переход в равномерно сходящихся последовательностях): Если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к f на множестве E метрического пространства, x_0 – предельная точка E , причём

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

То есть оба предела существуют и равны.

Доказательство: Воспользуемся критерием Коши равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Совершим предельный переход $x \rightarrow x_0$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+p} - a_n| \leq \varepsilon$$

То есть числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет какой-то предел a , теперь нужно установить, что он равен пределу предельной функции:

$$|f(x) - a| = |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|$$

Стоит упомянуть про кванторы:

- Берём номер N больший N_1 для равномерного предела функций и N_2 для числового предела $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$
- δ -окрестность x_0 меньшую требуемой для фиксированного $f_N(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_N$

□

Следствие 12.1.3.1: Если $f_n(x)$ непрерывна на E , $f_n \rightrightarrows f$ на E , то f непрерывна на E .

Теорема 12.1.4 (Предельный переход в функциональных рядах): Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E , x_0 – предельная точка E , $\forall n \in \mathbb{N}$: $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Доказательство: Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм. □

12.2. Интегрируемость суммы функционального ряда

Теорема 12.2.1 (Интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности): Если $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n интегрируема по Риману на $[a, b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$, то f интегрируема по Риману на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Доказательство: Воспользуемся тем, что каждый элемент функциональной последовательности интегрируем:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 : \exists P : U(P, f_n) - L(P, f_n) < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Далее определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Итак, оценим верхнюю сумму Дарбу предела:

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) \Delta x_k = U(P, f_n) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Аналогично для нижней:

$$L(P, f) \geq L(P, f_n) - \frac{\varepsilon}{3}$$

Таким образом,

$$U(P, f) - L(P, f) \leq U(P, f_n) - L(P, f_n) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Мы доказали интегрируемость f , осталось доказать, что интеграл равен тому, что надо:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b-a) < \varepsilon$$

□

Теорема 12.2.2 (Интегрирование функциональных рядов): Если $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Доказательство: Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм. \square

12.3. Дифференцируемость суммы функционального ряда

Теорема 12.3.1 (Дифференцирование функциональных последовательностей): Если

1. f_n дифференцируемы на (a, b)
2. $f'_n \rightrightarrows$ на (a, b)
3. $\exists x_0 \in (a, b) : f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$

То

1. $f_n \rightrightarrows f$ на (a, b)
2. f дифференцируема на (a, b)
3. $f'_n \rightarrow f'$ на (a, b)

Доказательство: Используем равномерную сходимость производных:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in (a, b) : |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

А также сходимость самих функций в точке x_0 :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Применим теорему Лагранжа для непрерывных f_n между произвольной точкой x и фиксированной x_0 :

$$\begin{aligned} \exists \xi \in \{x, x_0\} : |(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))| = \\ |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| |x - x_0| \end{aligned}$$

Тогда мы можем доказать фундаментальность самой последовательности:

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &\leq |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| + |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| |x - x_0| < \\ &\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| < \varepsilon \end{aligned}$$

Значит по критерию Коши $f_n \rightrightarrows f$ на (a, b) .

Остаётся доказать дифференцируемость f в произвольной точке $x \in (a, b)$, для этого введём вспомогательные функции:

$$\varphi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}; \quad \varphi(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Докажем фундаментальность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| &= \frac{|(f_{n+p}(t) - f_n(t)) - (f_{n+p}(x) - f_n(x))|}{t - x} \stackrel{\text{теорема Лагранжа}}{=} \\ &|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{aligned}$$

Получили, что $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на $A := (a, b) \setminus \{x\}$.

Заметим, что x – предельная точка A , тогда применим теорему о непрерывном поточечном пределе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x, t \in A} \varphi_n(t) = \lim_{t \rightarrow x, t \in A} \varphi(t) = f'(x)$$

Заметим, что этими равенствами мы доказываем как существование, так и равенство пределов. \square

13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора.

13.1. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда

Определение 13.1.1: Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, где $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ называется **степенным рядом** с центром в точке z_0 и коэффициентами $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Определение 13.1.2: Радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ называется

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}}; \quad 0 \leq R \leq +\infty$$

Теорема 13.1.1 (Коши-Адамара): Если $R \in [0, +\infty]$ – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, то

1. $\forall z, |z - z_0| < R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится, притом абсолютно
2. $\forall z, |z - z_0| > R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ расходится

Доказательство:

1. Пусть $|z - z_0| =: r < R$.

Возьмём произвольный $\rho \in (r, R) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$. По определению верхнего предела:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{\rho}$$

Тогда:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |c_n(z - z_0)^n| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n; \quad \frac{r}{\rho} < 1$$

По теореме Вейерштрасса мы можем ограничить рассматриваемый ряд сходящимся числовым (геометрическая прогрессия) и всё доказано.

2. Пусть $|z - z_0| > R$, то есть $\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{R}$. Значит по плотности действительных чисел:

$$\exists \varepsilon > 0 : \frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |z - z_0| \geq \frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}$$

По определению верхнего предела:

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \forall k \in \mathbb{N} : \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow$$

$$|a_{n_k} z^{n_k}| \geq \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^{n_k} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}\right)^{n_k} \geq 1$$

Получили, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

□

Теорема 13.1.2 (Равномерная сходимость степенного ряда): Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$, то он сходится равномерно в любом круге $|z - z_0| \leq R$, где $0 < r < R$

Доказательство: $|z - z_0| = r < R \Rightarrow$ по теореме Коши-Адамара $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится абсолютно, то есть $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$

Тогда для любого z из рассматриваемого круга справедлива оценка

$$|c_n(z - z_0)^n| \leq |c_n| r^n$$

А значит по теореме Вейерштрасса имеется равномерная сходимость. \square

Теорема 13.1.3 (Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов): Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, где $|x - x_0| < R, R > 0$. Тогда

1. $f(x)$ бесконечно дифференцируема $\forall x, |x - x_0| < R$, причём

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)(x - x_0)^{n-k}$$
2. $f(x)$ интегрируема по Риману $\forall x, |x - x_0| < R$ на отрезке с концами x_0, x , причём

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

3. Все степенные ряды, упомянутые в пунктах 1, 2 имеют радиус сходимости R .
4. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Доказательство: Если мы возьмём $x : |x - x_0| = r < R$, то на отрезке $[x_0, x]$ ряд для $f(x)$ сходится равномерно, а значит мы можем его почленно интегрировать по теореме об интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов.

Радиус сходимости дифференцированного (и, вообще говоря, интегрированного) ряда не меняется, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. А значит он также равномерно сходится на $[x_0, x]$, поэтому мы можем применить теорему о дифференцировании функционального ряда.

Заметим, что $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$, что и требовалось. \square

13.2. Ряд Тейлора

Определение 13.2.1: Если f бесконечно дифференцируема в точке x_0 , то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

называется её **рядом Тейлора** с центром в точке x_0 .

Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора называется **рядом Маклорена**.

Теорема 13.2.1 (Достаточное условие представимости функции рядом Тейлора): Если f бесконечно дифференцируема на $(x_0 - h, x_0 + h)$, причём

$$\exists M : \forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) : |f^{(n)}(x)| \leq M$$

То $f(x)$ представима своим рядом Тейлора в точке x_0 при всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$

Доказательство: По теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}; \quad \xi \in (x_0, x)$$

Следовательно

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Почему $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$? Заметим, что n -ый элемент разложения экспоненты (имеющий бесконечный радиус сходимости, поэтому для неё априори он существует) в ряд Маклорена – это $\frac{x^n}{n!}$, а по необходимому условию сходимости ряда, он стремится к 0 равномерно. \square