Содержание

ГОС по матану

Disclaymer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

`Экзамен - это тропа`

Коновалов Сергей Петрович

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности

1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Определение 1.1.1: Если $E \subset \mathbb{R}$ – ограниченное сверху (снизу) множество, то $M(m) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\forall x \in E : x \leq M(x \geq m)$$

называется **верхней (нижней) гранью** множества E.

Определение 1.1.2: Наименьшая из верхних граней множества E называется **точной верхней гранью**: $\sup E$.

Наибольшая из нижних граней множества E называется **точной нижней гранью**: $\inf E$.

Теорема 1.1.1 (О существовании точной верхней (нижней) грани): Любое ограниченное сверху (снизу) непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство: Пусть B – множество верхних граней множества E. Введём обозначение $A \coloneqq \mathbb{R} \setminus B$.

Тогда если произвольное число a меньше какого-то $x \in E$, то оно точно не верхняя грань $E \Rightarrow a \in A$.

Заметим также свойство множества B:

$$\forall b \in B : \forall x > b : \ x \in B$$

Тогда по одной из аксиом действительных чисел

$$\exists c \in R : \forall a \in A : \forall b \in B : \ a \leq c \leq b$$

Пусть $\sup E \coloneqq c$. Проверим свойства точной верхней грани:

1. c является верхней гранью

   От противного. Пусть $c \notin B$, тогда $\exists x \in B : x > c$, причём $c < \frac{x+c}{2} < x$.

   Но тогда заметим, что $\frac{x+c}{2} \in A$, что противоречит выбору c как числа больше либо равного любого элемента A
2. c является наименьшей из верхних граней

От противного. Пусть $\exists M \in B : M < c$. Но тогда $M < \frac{M+c}{2} < c$, причём $\frac{M+c}{2} \in B$, что противоречит выбору c как числа меньше либо равного любого элемента B.

$\square$

Теорема 1.1.2 (Вейерштрасса): Каждая ограниченная сверху (снизу) неубывающая (невозрастающая) последовательность сходится, причём её предел равен точной верхней (нижней) грани.

Доказательство: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху $\Rightarrow \exists \sup \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = l$

Отсюда:

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq l < l + \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : l - \varepsilon < x_N$ (по определению супремума)

Заметим, что получилось в точности определение предела. $\square$

Теорема 1.1.3 (Принцип Кантора вложенных отрезков): Всякая последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, то есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

имеет непустое пересечение, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Доказательство: Из вложенности очевидно следует

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n,\ b_{n+1} \leq b_n$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_1, b_n \geq a_1$$

Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = b$$

А значит отрезок $[a, b]$ (возможно вырожденный) включён в пересечение всех отрезков. $\square$

Теорема 1.1.4 (Больцано-Вейерштрасса): Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – рассматриваемая ограниченная последовательность, то есть

$$\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} :\ a_1 \leq x_n \leq b_1$$

Заметим, что один из отрезков $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ содержит бесконечно много элементов последовательности.

Пусть $[a_2, b_2]$ – тот из отрезков, который содержит бесконечно много элементов.

Продолжая данный трюк счётное количество раз получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Также заметим, что данные отрезки стягиваются:

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$$

Тогда по принципу Кантора:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

Осталось построить подпоследовательность, будем брать $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, причём так, чтобы $n_k > n_{k-1}$. Очевидно, $n_1 = 1$. Существование предела также очевидно:

$$0 \le \left|c - x_{n_k}\right| \le b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \underset{k \to \infty}{\to} 0$$

□

1.2. Критерий Коши

Определение 1.2.1: Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

Теорема 1.2.1 (Критерий Коши сходимости числовой последовательности): Числовая последовательность сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.

Доказательство: $\Rightarrow$ По определению предела:

$$\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника в условиях предела:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|x_{n+p} - l + l - x_n\right| \le \left|x_{n+p} - l\right| + |x_n - l| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ Вначале докажем, что из фундаментальности следует ограниченность:

$$\varepsilon := 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < 1$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : \min(x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1) \le x_n \le \max(x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1)$$

Тогда из ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по теореме Больцано-Вейерштрасса достанем сходящуюся подпоследовательность:

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \exists l : \forall \varepsilon > 0 : \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) : \ \left|x_{n_k} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Также по определению фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

Объединим эти два условия и получим требуемое:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 = \max\left(N(\varepsilon), n_{K(\varepsilon)+1}\right) : \forall n > N_0 :$$

$$|x_n - l| = \left|x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}} + x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l\right| \le \left|x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}}\right| + \left|x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l\right| < \varepsilon$$

□

2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней

2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Определение 2.1.1: Пусть f определена в некоторой окрестности $U_{\delta_0}(x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Если $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется **непрерывной в точке** x_0.

Определение 2.1.2: f называется **непрерывной на множестве** $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall x_0 \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x - x_0| < \delta : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.1 (Первая теорема Вейшерштрасса о непрерывной на отрезке функции): Если f непрерывна на $[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство: От противного, пусть f неограничена сверху. Тогда

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = +\infty$$

То есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : \ f(x_n) > n$$

Причём $\forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n \leq b$, то есть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \ \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0)$$

Однако из $f(x_n) > n$ следует, что $f(x_0) = \infty$. Противоречие. $\square$

2.2. Достижение точных верхних и нижних граней

Теорема 2.2.1 (Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях): Если f непрерывна на $[a, b]$, то

$$\exists x', x'' \in [a, b] : \ f(x') = \sup_{x \in [a,b]} f(x); \quad f(x'') = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

Доказательство: Пусть $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Тогда по определению супремума

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in [a, b] : \ M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

В том числе для $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b] : \forall n \in \mathbb{N} : \ M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \ \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0) = M$$

Последнее равенство было получено устремлением $k \to \infty$ в неравенстве $M - \frac{1}{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \leq M$.

Таким образом, M действительно достижим функцией f в точке x_0. Для инфимума аналогично. $\square$

3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

Теорема 3.1 (Больцано-Коши о промежуточных значениях): Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда
$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : c := f(x_1) < d := f(x_2) : \ \forall e \in (c, d) : \exists \gamma \in [a, b] : f(\gamma) = e$

Доказательство: Рассмотрим частный случай $c < e = 0 < d$.

Построим последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, где $[a_1, b_1] = \{x_1, x_2\}$ (мы не знаем в каком порядке идут иксы).

Заметим, что $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

Рассмотрим $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$. Какие могут быть случаи?

- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, то мы победили и останавливаемся.
- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$, то $a_2 := a_1, b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$, то $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 := b_1$.

Либо после конечного числа шагов мы найдём требуемую точку, либо построим последовательность стягивающихся отрезков:

$$b_n - a_n = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{n-1}}$$

Тогда по принципу Кантора $\{\gamma\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причём

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma \in [a, b]$$

Тогда в силу непрерывности f:

$$f(\gamma) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Заметим, что после кажой итерации алгоритма изначальное свойство сохраняется:

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

Совершив предельный переход в неравенстве, получим

$$f^2(\gamma) \leq 0$$

Из чего следует $f(\gamma) = 0$.

В общем случае рассматривается вспомогательная функция $F(x) = f(x) - e$. $\square$

4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

4.1. Теорема Ролля

Определение 4.1.1: Пусть f определена в некоторой δ_0 окрестности точки x_0. Если

$$\exists \delta \in (0, \delta_0) : \forall x \in U_{\delta(x_0)} : \; f(x) \leq f(x_0)$$

то x_0 – **точка локального максимума**.

Также аналогично вводятся определения локального минимума, а также строгие экстремумы, в которых неравенство строгое.

Теорема 4.1.1 (Ферма о необходимом условии локального экстремума): Если x_0 – точка локального экстремума функции $y = f(x)$, дифференцируемой в x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: БОО x_0 – точка локального максимума.

Заметим, что тогда

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq 0; \quad \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

А при существовании производной оба этих предела совпадают, поэтому производной в x_0 остаётся лишь быть равной нулю. □

Теорема 4.1.2 (Ролля): Если f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), причём $f(a) = f(b)$, то

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Доказательство: Заметим, что если $f \equiv \text{const}$, то утверждение тривиально.

Иначе, f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists m < M : \; m = \min_{x \in [a,b]} f(x); \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Заметим, что либо $m \neq f(a)$, либо $M \neq f(a)$.

Это значит, что существует локальный минимум или максимум в некоторой точке $c \in (a, b)$, а по теореме Ферма мы знаем, что $f'(c) = 0$. □

4.2. Теоремы Лагранжа и Коши

Теорема 4.2.1 (Обобщённая теорема о среднем): Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Доказательство: Рассмотрим

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

Заметим, что h всё ещё непрерывна на отрезке и дифференцируема на интервале, причём

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(a)$$

То есть h удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Требуемое доказано. $\square$

Теорема 4.2.2 (Лагранжа о среднем): Если f непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b), то

$$\exists c \in (a,b) : \ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Доказательство: В обобщённой теореме о среднем возьмём $g(x) = x$. $\square$

Теорема 4.2.3 (Коши о среднем): Если f, g непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b) и $\forall x \in (a,b) : g'(x) \neq 0$, то

$$\exists c \in (a,b) : \ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство: Очевидная интерпретация обобщённой теоремы о среднем.

Необходимо уточнить лишь, почему $g(b) - g(a) \neq 0$, чтобы мы смогли поделить на него.

Если бы $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля $\exists c : \ g'(c) = 0$, что противоречит с условием текущей теоремы. $\square$

5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа

5.1. Член в форме Лагранжа

Лемма 5.1.1: Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то $\exists!$ многочлен степени $\leq n$ такой, что

$$f(x_0) = P_n(f, x_0); f'(x_0) = P'(f, x_0); ...; f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(f, x_0)$$

Этот многочлен имеет вид

$P_{n(f,x)} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

и называется **многочленом Тейлора** степени n относительно точки x_0.

Доказательство: Очевидно проверяем каждую производную $\square$

Лемма 5.1.2 (Об отношении): Если φ, ψ $(n+1)$ раз дифференцируемы в $U_\delta(x_0)$, причём

$$\forall k = \overline{0,\text{ n}} : \ \varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) = 0$$

но

$$\forall k = \overline{0,\text{ n}} : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \ \psi^{(k)}(x) \neq 0$$

то

$$\forall x \in U_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : \ \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$$

Доказательство: Заметим, что φ, ψ удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем. Тогда

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x) : \ \frac{\varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_{0}}{\psi(x) - \underbrace{\psi(x_0)}_{0}} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \underbrace{\varphi'(x_0)}_{0}}{\psi'(\xi_1) - \underbrace{\psi'(x_0)}_{0}} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = \ldots = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$

□

Теорема 5.1.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа): Если f $(n+1)$ раз дифференцируема в $U_\delta(x_0), \delta > 0$, то

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : \ f(x) - P_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Доказательство: Сведём к предыдущей лемме об отношении:

$$\varphi(x) \coloneqq f(x) - P_n(f, x); \quad \psi(x) \coloneqq (x - x_0)^{n+1}$$

Все требуемые свойства проверяются очевидно. □

5.2. Член в форме Пеано

Теорема 5.2.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано): Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x) - P_n(f, x) = o\big((x - x_0)^n\big), x \to x_0$$

где $P_{n(f,x)}$ – многочлен Тейлора степени n функции f относительно x_0.

Доказательство: По определению, если f n раз дифференцируема в точке, то она $n - 1$ раз дифференцируема в окрестности.

Снова используем лемму об отношении, но для случая $n - 1$:

$$\varphi(x) \coloneqq f(x) - P_{n(f,x)}; \quad \psi(x) = (x - x_0)^n$$

Получим, что

$$\exists \xi \in (x_0, x) : \ \frac{f(x) - P_{n(f,x)}}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n!(\xi - x_0)}$$

Заметим, что при $x \to x_0 \Rightarrow \xi \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n(f,x)}}{(x - x_0)^n} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n!(\xi - x_0)} = \frac{1}{n!}\big(f(x_0) - P_n(f, x_0)\big)^{(n)} = 0$$

□

6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.

6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции

Теорема 6.1.1: Пусть f дифференцируема на (a, b). Тогда
1. $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ – неубывающая на (a, b)
2. $\forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ – невозрастающая на (a, b)
3. $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ – возрастающая на (a, b)
4. $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ – убывающая на (a, b)

Доказательство:

1. $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ По теореме Лагранжа:
   $\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b : \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$
   То есть для произвольных $x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.
   Обратно, пусть $f(x)$ неубывающая. Тогда
   $\forall x_0 \in (a, b) : \forall \Delta x : \text{sign } (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \text{sign } \Delta x$
   Ну и тогда при $|\Delta x| < \min(x_0 - a, b - x_0)$:
   $$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$
   Совершим предельный переход в неравенстве и получим требуемое.

2. Аналогично предыдущему пункту

3. Контрпримером для $\Leftarrow$ является $f(x) = x^3$ в точке 0

4. Контрпримером для $\Leftarrow$ является $f(x) = -x^3$ в точке 0

$\square$

6.2. Достаточные условия локальных экстремумов

Теорема 6.2.1 (Первое достаточное условие экстремума функции): Пусть f непрерывна в $U_{\delta_0}(x_0)$ и дифференцируема в $\dot{U}_{\delta_0}(x_0), \delta_0 > 0$:
1. Если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) > 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума f
2. Если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) < 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) > 0$, то x_0 – точка строгого локального минимума f

Доказательство: По сути просто заменили в определении локального экстремума монотонность на достаточное условие знакопостоянности производной из предыдущей теоремы. □

Теорема 6.2.2 (Второе достаточное условие локального экстремума): Если f n раз дифференцируема в точке x_0, $f^{(n)}(x_0) \neq 0, \forall k = \overline{1, \text{n-1}} : f^{(k)}(x_0) = 0$, то
1. Если n чётно, то f имеет в точке x_0 локальный минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$ и локальный максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$.
2. Если n нечётное, то f не имеет локального экстремума в точке x_0.

Доказательство:
1. Воспользуемся разложением в Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (учитывая факт нулевых производных):
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), x \to x_0$$
Так как n чётно, то $n = 2m$:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2m}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1), x \to x_0$$
Левая часть в некоторой окрестности точки x_0 имеет тот же знак, что и правая. Тогда в силу чётной степени в знаменателе левой части получаем, что разность $f(x) - f(x_0)$ одного знака с n-ой производной.
2. Рассмотрим $f(x) = x^3$.

□

6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости

Определение 6.3.1: f называется **выпуклой (вниз) (вогнутой вверх)** на (a, b), если её график лежит не выше хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b).

f называется **выпуклой (вверх) (вогнутой вниз)** на (a, b), если её график лежит не ниже хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b).

Теорема 6.3.1: Пусть f дважды дифференцируема на (a, b):
1. f выпукла вниз на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$.
2. f выпукла вверх на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$
3. f строго выпукла вниз на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$.
4. f строго выпукла вверх на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$

Доказательство:
1. $\Leftarrow$ Рассмотрим эквивалентное определение выпуклости:

$$\forall x_0, x_1 : a < x_0 < x_1 < b : \forall t \in [0, 1] :$$
$$x_t \coloneqq tx_0 + (1-t)x_1 : \ f(x_t) \le tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

Разложим f в формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке x_t:
$$\exists \xi_1 \in (x_0, x_t) : f(x_0) = f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t) + \tfrac{f''(\xi_1)}{2!}(x_0 - x_t)^2$$
$$\exists \xi_2 \in (x_1, x_t) : f(x_1) = f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t) + \tfrac{f''(\xi_2)}{2!}(x_1 - x_t)^2$$

Из-за знакопостоянности второй производной из этих равенств следуют следующие неравенства:
$$f(x_0) \ge f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t)$$
$$f(x_1) \ge f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t)$$

Умножим первое на t, второе на $1-t$ и сложим их:
$$tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \ge f(x_t) + \underbrace{f'(x_t)(tx_0 + (1-t)x_1 - x_t)}_{0}$$

$\Rightarrow$ Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и достаточно малую окрестность $\delta \coloneqq \min(x_0 - a, b - x_0)$. Тогда
$\forall u \in (-\delta, \delta) : x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - u) + \frac{1}{2}(x_0 + u) : \ f(x_0) \le \frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u)$

Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:
$$f(x_0 \pm u) = f(x_0) \pm f'(x_0)u + \tfrac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \to 0$$

В прошлой строчке мы записали сразу два равенства благодаря $\pm$, давайте умножим каждое на $\frac{1}{2}$ и сложим их:
$$\tfrac{1}{2}f(x_0 - u) + \tfrac{1}{2}f(x_0 + u) = f(x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \to 0$$

Тогда при достаточно малых u $\frac{f''(x_0)}{2}u^2$ обязано будет стать такого же знака, как и $\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) - f(x_0) \ge 0$

2. Аналогично
3. $\Leftarrow$ аналогично только со строгими неравенствами, а $\Rightarrow$ вообще говоря не верно, например, для $f(x) = x^4$
4. $\Leftarrow$ аналогично только со строгими неравенствами, а $\Rightarrow$ вообще говоря не верно, например, для $f(x) = -x^4$

$\square$

7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте

Определение 7.1: **Компактным** множеством в метрическом пространстве X называется такое множество K, что из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 7.2: Функция $f : X \to \mathbb{R}$, где X – метрическое пространство, называется равномерно непрерывной на множестве $X' \subset X$, если
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X' : \rho(x_1, x_2) < \delta : \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Теорема 7.1 (Кантора о равномерной непрерывности): Если $f : K \to \mathbb{R}$ непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на K.

Доказательство: От противного, выпишем отрицание равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in K : \|x_1 - x_2\| < \delta : \ |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Выбирая $\delta \coloneqq 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{m}, ...$ построим последовательность пар из отрицания непрерывности: $\left\{\left(x_{1,m}, x_{2,m}\right)\right\}_{m=1}^{\infty} \subset K^2$.

Причём

$$\forall m \in \mathbb{N} : \left\|x_{1,m} - x_{2,m}\right\| < \tfrac{1}{m} : \left|f\left(x_{1,m}\right) - f\left(x_{2,m}\right)\right| \geq \varepsilon$$

По одному из определений компактности выделим из последовательности пар подпоследовательность, у которой сходятся первые координаты:

$$\exists \left\{\left(x_{1,m_k}, x_{2,m_k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} x_{1,m_k} = x_0 \in K$$

Причём заметим, что (комбинируем то, как мы строили последовательность пар и сходимости первых координат подпоследовательности):

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > 0 : \left\|x_{2,m_k} - x_0\right\| \leq$$

$$\left\|x_{1,m_k} - x_0\right\| + \left\|x_{1,m_k} - x_{2,m_k}\right\| < 2\varepsilon$$

То есть

$$\lim_{k\to\infty} x_{1,m_k} = \lim_{k\to\infty} x_{2,m_k} = x_0 \overset{\text{непрерывность } f}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(f\left(x_{1,m_k}\right) - f\left(x_{2,m_k}\right)\right) = 0$$

Противоречие! □

8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

Определение 8.1: Пусть f определена в некоторой окрестности $x_0 \in \mathbb{R}^n$. **Полным приращением** f в точке x_0 называется

$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f\left(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n} + \Delta x_n\right) - f\left(x_{0,1}, ..., x_{0,n}\right)$

f называется **дифференцируемой** в x_0, если

$$\Delta f(x_0) = (A, \Delta x) + o(\|\Delta x\|), \Delta x \to 0$$

где $A \in \mathbb{R}^n$ называется **градиентом**: $\operatorname{grad} f(x_0) = A$

Определение 8.2: **Дифференциалом** дифференцируемой в x_0 функции f назовём выражение $(A, \Delta x)$ из определения дифференцируемости.

Определение 8.3: **Частной производной** в точке x_0 называется предел (если он существует):
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_{0,1},...,x_{0,j}+\Delta x,...,x_{0,n}) - f(x_{0,1},...,x_{0,j},...,x_{0,n})}{\Delta x}$$

Теорема 8.1 (Необходимое условие дифференцируемости): Если f дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то существуют частные производные $\forall j = \overline{1,\text{n}}$, причём
$$\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

Доказательство: Сразу следует из определения - есть предел по всем многомерным приращениям, а значит и по однокоординатным в том числе. □

Теорема 8.2 (Достаточное условие дифференцируемости): Если f определена в некоторой окрестности точки x_0, вместе со своими частными производными, причём они непрерывны в x_0, то f дифференцируема в x_0.

Доказательство: Воспользуемся n раз «умным нулём», каждый из которых будет снимать приращение по одной из координат:
$$\Delta f(x_0) =$$
$$f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n} + \Delta x_n\big) - f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}\big) +$$
$$f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}\big) - f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1}, x_{0,n}\big)$$
$$+ ... +$$
$$f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, x_{0,2}, ..., x_{0,n}\big) - f\big(x_{0,1}, ..., x_{0,n}\big) =$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n}\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, \xi_n\big)\Delta x_n +$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-2} + \Delta x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_{0,n}\big)\Delta x_{n-1}$$
$$+ ... +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\xi_1, x_{0,2}, ..., x_{0,n}\big)\Delta x_1 =$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i + o(\|\Delta x\|), \Delta x \to 0$$
□

9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением

Определение 9.1: **Кубом** радиуса δ вокруг точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ назовём

$$K_{\delta,\boldsymbol{x_0}} = \bigtimes_{k=1}^n \left(x_0^k - \delta, x_0^k + \delta\right)$$

где под $\times$ подразумевается декартово произведение.

Теорема 9.1: Пусть $F(\boldsymbol{x}, y) = F(x_1, ..., x_n, y)$ дифференцируема в окрестности точки $(\boldsymbol{x_0}, y_0) = \left(x_0^1, ..., x_0^n, y_0\right)$.

Её производная $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в этой окрестности, причём $F(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$:

$$\forall x \in K_{\delta,x_0} : \exists! y = \varphi(x) : \forall (x, y) \in K_{\delta,x_0} \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) :$$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x) \wedge \exists \varphi'(x_0)$$

Доказательство: БОО будем считать, что $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.

По непрерывности частной производной, $\exists$ окрестность точки (x_0, y_0), в которой $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$.

Тогда из непрерывности F по y и знакоопределённости производной следует

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \ F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Расширяем территорию дальше, из непрерывности F по x следут

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in K_{\delta,x_0} : F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции берём существование, а из знакоопределённости производной единственность:

$$\exists! \varphi(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Заметим, что φ непрерывна по построению в (x_0, y_0): мы брали x из 2δ окрестности точки x_0, а значение лежало в 2ε окрестности точки y_0.

Теперь докажем дифференцируемость φ, для этого распишем дифференцируемость F:

$$F(x, y) - \underbrace{F(x_0, y_0)}_{0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) \cdot \left(x_k - x_0^k\right) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) +$$

$$\alpha(x, y)$$

где $\alpha = o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|), (x, y) \to (x_0, y_0)$.

Воспользуемся умножением на «умную единицу»:

$$\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(x,y) \cdot \left(x_i - x_0^i\right)^2}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2^2} + \frac{\alpha(x,y) \cdot (y - y_0)^2}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2^2}$$

Введём новые обозначения:

$$\alpha_i(x, y) \coloneqq \frac{\alpha(x,y) \cdot \left(x_i - x_0^i\right)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2^2}; \quad \beta(x, y) \coloneqq \frac{\alpha(x,y) \cdot (y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2^2}$$

Тогда

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) + \alpha_k(x, y)\right)\left(x_k - x_0^k\right) +$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(x, y)\right)(y - y_0)$$

Подставляя $y = \varphi(x)$ в выражение выше, будем использовать новые обозначения:

$$\tilde{\alpha}_k(x) \coloneqq \alpha_k(x, \varphi(x)); \quad \tilde{\beta}(x) \coloneqq \beta(x, \varphi(x))$$

Таким образом,

$$\underbrace{F(x,\varphi(x))}_{0} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x)\right)(x_k - x_0^k) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x)\right)(\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

Выразим приращение φ:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = -\sum_{k=1}^n \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0))} + \gamma_k(x)\right)(x_k - x_0^k)$$

где

$$\gamma_k(x) := -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0))} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x)}$$

Остаётся заметить, что $\tilde{\alpha}_k(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0; \tilde{\beta}(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0$, а это значит, что

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \sum_{k=1}^n A_k(x_k - x_0^k) + \gamma(x); \quad \gamma(x) = o(\|x - x_0\|), x \to x_0$$

Что и является требуемой дифференцируемостью φ в x_0. □

10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия.

10.1. Необходимые условия

Определение 10.1.1: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \; f(x) \leq f(x_0)$$

Определение 10.1.2: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \; f(x) \geq f(x_0)$$

Определение 10.1.3: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **строгого локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \; f(x) < f(x_0)$$

Определение 10.1.4: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **строгого локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \; f(x) > f(x_0)$$

Теорема 10.1.1 (Необходимые условия локального экстремума): Если x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$, дифференцируемой в окрестности точки x_0, то $\mathrm{d}f(x) \equiv 0$.

Доказательство: Рассмотрим для каждого $k = \overline{1, \text{n}}$:

$$\psi(x_k) = f\left(x_0^1, ..., x_0^{k-1}, x_k, x_0^{k+1}, ..., x_0^n\right), \quad \text{где } x_0 = \left(x_0^1, ..., x_0^n\right)$$

Тогда заметим, что ψ дифференцируема в окрестности x_0^k, применяя теорему о необходимом условии экстремума функции одного переменного, получим

$$\psi'\left(x_0^k\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0$$

В силу произвольности k и того, что дифференциал – это вектор частных производных, получим требуемое. □

10.2. Достаточные условия

Определение 10.2.1: Если f дифференцируема в окрестности точки x_0 и $\mathrm{d}f(x_0) \equiv 0$, то x_0 называется **стационарной точкой** функции f.

Теорема 10.2.1 (Достаточные условия локального экстремума): Если x_0 – стационарная точка функции f, дважды дифференцируемой в точке x_0, то

1. Если $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ – положительно определённая квадратичная форма, то x_0 – точка строгого локального минимума функции f
2. Если $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ – отрицательно определённая квадратичная форма, то x_0 – точка строгого локального максимума функции f
3. Если $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ – неопределённая квадратичная форма, то x_0 не является точкой локального экстремума

Доказательство:

1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:
$$f(x) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) + \tfrac{1}{2} d^2 f(x_0) + o(\rho^2), \rho \to 0$$
где
$$\mathrm{d}x_k = x_k - x_0^k, k = \overline{1,\text{n}}; \quad \rho = \sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^n \left(x_k - x_0^k\right)^2} = \|\mathrm{d}x\|_2$$
Тогда (в условиях $\mathrm{d}f(x_0) \equiv 0$ и $\xi_k := \frac{\mathrm{d}x_k}{\|\mathrm{d}x\|}$) :
$$f(x) - f(x_0) = \tfrac{1}{2} d^2 f(x_0) + o(\rho^2) =$$
$$\tfrac{1}{2}\rho^2 \left(\underbrace{\textstyle\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\xi_i \xi_j}_{F(\xi_1, ..., \xi_n)} + o(1), \right) \rho \to 0$$
В следствие нормировки, очевидно, $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1$.
Таким образом, минимум введённого функционала F на сфере (компактной в $\mathbb{R}^n$) будет достигаться:
$$\min_{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2 = 1} F(\xi_1, ..., \xi_n) =: C > 0$$
Таким образом, для достаточно маленьких ρ:
$$f(x) - f(x_0) \geq \tfrac{C}{4}\rho^2 > 0$$
2. Аналогично
3. Вводим $F(\xi_1, ..., \xi_n)$ аналогично предыдущим пунктам, из-за того что $\mathrm{d}^2 f$ – неопределённая, то

$$\exists \xi_1(x_1), \xi_2(x_2): \; F(\xi_1^1, ..., \xi_1^n) > 0 \land F(\xi_2^1, ..., \xi_2^n) < 0$$

Тогда при достаточно малых ρ:

$$\text{sign } (f(x_1) - f(x_0)) = \text{sign } F(\xi_1) > 0; \text{sign } (f(x_2) - f(x_0)) = \text{sign } F(\xi_2) < 0$$

Что и требовалось.

□

11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница.

11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом

Определение 11.1.1: **Разбиением** P отрезка $[a, b]$ называется конечное множество точек отрезка $[a, b]$:

$$P : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b; \quad \Delta x_k := x_k - x_{k-1}; k = \overline{1, \text{n}}$$

Определение 11.1.2: **Диаметром разбиения** P называется

$$\Delta(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

Определение 11.1.3: **Верхней суммой Дарбу** разбиения P функции f называется

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

Определение 11.1.4: **Нижней суммой Дарбу** разбиения P функции f называется

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

Определение 11.1.5: Функция f называется **интегрируемой по Риману** на $[a, b]$ ($f \in \mathcal{R}[a, b]$), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists P : \; U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

Определение 11.1.6: **Интегралом Римана** интегрируемой по Риману на $[a, b]$ функции f называется

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \inf_P U(P, f) = \sup_P L(P, f)$$

Теорема 11.1.1 (Основные свойства интеграла Римана):
1. (Линейность) Если $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$, то $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$, причём
$$\int_a^b (f_1+f_2)(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$$
Кроме того, $\forall c \in \mathbb{R}$ выполняется, что $cf_1 \in \mathcal{R}[a,b]$, причём
$$\int_a^b cf_1(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$$
2. (Монотонность) Если $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]:\ f_1(x) \le f_2(x)$, то
$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$$
3. (Аддитивность):
$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow \forall c \in (a,b):\ f \in \mathcal{R}[a,c] \wedge f \in \mathcal{R}[c,b]$$
Причём $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
4. (Оценка) Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\forall x \in [a,b]:\ |f(x)| \le M$, то
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le M(b-a)$$

Определение 11.1.7: Пусть $\forall b' \in (a,b):\ f \in \mathcal{R}[a,b']$. Тогда $F(b') = \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x$ называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

Будем считать, что $F(a) = 0$, а для $\alpha > \beta$:
$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

Теорема 11.1.2 (Основные свойства интеграла с переменным верхним пределом): Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то интеграл с перменным верхним пределом $F(x)$ непрерывен на $[a,b]$.

Если, кроме того, f непрерывна в $x_0 \in [a,b]$, то $F(x)$ дифференцируема в x_0, причём $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство: Непрерывность следует из комбинирования свойств аддитивности и оценки:
$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \wedge x_2 - x_1 < \tfrac{\varepsilon}{M}:\ |F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x \le M(x_2 - x_1) < \varepsilon$$

В условиях непрерывности f, докажем, что производная интеграла действительно равна $f(x_0)$:
$$\left|\tfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\tfrac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \le \sup_{t\in[x_0,x]} |f(t) - f(x_0)|$$
Благодаря непрерывности f мы знаем, что при $x \to x_0$ сможем оценить итоговый супремум сверху ε. □

11.2. Формула Ньютона-Лейбница

Определение 11.2.1: **Первообразной** функции f на $[a,b]$ называется такая дифференцируемая на $[a,b]$ функция F, что

$$\forall t \in [a,b] : \ F'(t) = f(t)$$

Определение 11.2.2: **Интегральной суммой** $S\big(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n\big)$ называется

$$\textstyle\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$$

где $P : a = x_0 < ... < x_n = b, \forall i = \overline{1, \mathrm{n}} : t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Теорема 11.2.1 (Интеграл как предел интегральных сумм):

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow \exists \lim_{\Delta(P)\to 0} S\big(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n\big)$$

При этом $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta(P)\to 0} S\big(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n\big)$

Теорема 11.2.2 (Основная теорема интегрального исчисления): Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$ имеет первообразную F на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Доказательство: Для любого разбиения P:

$$F(b) - F(a) \overset{\text{телескопическая сумма}}{=} \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) \overset{\text{теорема Лагранжа}}{=}$$

$$\sum_{k=1}^n F'(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Устремляя $\Delta(P) \to 0$ получим, что $F(b) - F(a)$ равно требуемому интегралу по эквивалентному определению. □