

## Содержание

<b>1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности .....</b>	<b>3</b>
1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса .....	3
1.2. Критерий Коши .....	5
<b>2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней .....</b>	<b>6</b>
2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке .....	6
2.2. Достижение точных верхних и нижних граней .....	6
<b>3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции .....</b>	<b>7</b>
<b>4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций. ....</b>	<b>7</b>
4.1. Теорема Ролля .....	7
4.2. Теоремы Лагранжа и Коши .....	8
<b>5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа</b>	<b>9</b>
5.1. Член в форме Лагранжа .....	9
5.2. Член в форме Пеано .....	10
<b>6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия. ....</b>	<b>11</b>
6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции .....	11
6.2. Достаточные условия локальных экстремумов .....	11
6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости .....	12
<b>7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте .....</b>	<b>13</b>
<b>8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных .....</b>	<b>14</b>
<b>9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением .....</b>	<b>15</b>
<b>10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия. ....</b>	<b>17</b>
10.1. Необходимые условия .....	17
10.2. Достаточные условия .....	18
<b>11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница. ....</b>	<b>19</b>
11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом .....	19
11.2. Формула Ньютона-Лейбница .....	20
<b>12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда. ....</b>	<b>21</b>
12.1. Непрерывность суммы функционального ряда .....	21
12.2. Интегрируемость суммы функционального ряда .....	23
12.3. Дифференцируемость суммы функционального ряда .....	24

<b>13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора. ....</b>	<b>25</b>
13.1. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда .....	25
13.2. Ряд Тейлора .....	26
<b>14. Теорема об ограниченной сходимости для интеграла Лебега .....</b>	<b>27</b>
<b>15. Дифференциальные формы на открытых подмножествах евклидова пространства, оператор внешнего дифференцирования <math>d</math> и его независимость от криволинейной замены координат .....</b>	<b>28</b>
15.1. Дифференциальные формы, оператор внешнего дифференцирования .	28
15.2. Независимость внешнего дифференцирования от замены координат ...	32
<b>16. Интегрирование дифференциальной формы с компактным носителем. Зависимость интеграла от замены координат. ....</b>	<b>33</b>
<b>17. Общая формула Стокса .....</b>	<b>34</b>
<b>18. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке .....</b>	<b>34</b>
<b>19. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье .....</b>	<b>37</b>
<b>20. Нерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье. ....</b>	<b>38</b>
20.1. Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции .....	38
20.2. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье. ....	39
<b>21. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Интегральная теорема Коши. ....</b>	<b>40</b>
21.1. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана .....	40
21.2. Интегральная теорема Коши .....	41
<b>22. Интегральная формула Коши. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора. ....</b>	<b>44</b>
22.1. Интегральная формула Коши. ....	44
22.2. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора.	44
<b>23. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана. Изолированные особые точки однозначного характера. ....</b>	<b>44</b>
23.1. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана. ....	44
23.2. Изолированные особые точки однозначного характера. ....	45
<b>24. Вычеты. Вычисление интегралов по замкнутому контуру при помощи вычетов .....</b>	<b>47</b>

# ГОС по матану

**Disclaimer:** доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

Экзамен - это тропа

*Коновалов Сергей Петрович*

## 1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности

### 1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса

**Определение 1.1.1:** Если  $E \subset \mathbb{R}$  – ограниченное сверху (снизу) множество, то  $M(m) \in \mathbb{R}$  такое, что

$$\forall x \in E : x \leq M(x \geq m)$$

называется **верхней (нижней) гранью** множества  $E$ .

**Определение 1.1.2:** Наименьшая из верхних граней множества  $E$  называется **точной верхней гранью**:  $\sup E$ .

Наибольшая из нижних граней множества  $E$  называется **точной нижней гранью**:  $\inf E$ .

**Теорема 1.1.1** (О существовании точной верхней (нижней) грани): Любое ограниченное сверху (снизу) непустое множество  $E \subset \mathbb{R}$  имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

*Доказательство:* Пусть  $B$  – множество верхних граней множества  $E$ . Введём обозначение  $A := \mathbb{R} \setminus B$ .

Тогда если произвольное число  $a$  меньше какого-то  $x \in E$ , то оно точно не верхняя грань  $E \Rightarrow a \in A$ .

Заметим также свойство множества  $B$ :

$$\forall b \in B : \forall x > b : x \in B$$

Тогда по одной из аксиом действительных чисел

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A : \forall b \in B : a \leq c \leq b$$

Пусть  $\sup E := c$ . Проверим свойства точной верхней грани:

1.  $c$  является верхней гранью

От противного. Пусть  $c \notin B$ , тогда  $\exists x \in B : x > c$ , причём  $c < \frac{x+c}{2} < x$ .

Но тогда заметим, что  $\frac{x+c}{2} \in A$ , что противоречит выбору  $c$  как числа больше либо равного любого элемента  $A$

2.  $c$  является наименьшей из верхних граней

От противного. Пусть  $\exists M \in B : M < c$ . Но тогда  $M < \frac{M+c}{2} < c$ , причём  $\frac{M+c}{2} \in B$ , что противоречит выбору  $c$  как числа меньше либо равного любого элемента  $B$ .

□

**Теорема 1.1.2** (Вейерштрасса): Каждая ограниченная сверху (снизу) неубывающая (невозрастающая) последовательность сходится, причём её предел равен точной верхней (нижней) грани.

*Доказательство:*  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  ограничена сверху  $\Rightarrow \exists \sup \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = l$

Отсюда:

1.  $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq l < l + \varepsilon$
2.  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : l - \varepsilon < x_N$  (по определению супремума)

Заметим, что получилось в точности определение предела.

□

**Теорема 1.1.3** (Принцип Кантора вложенных отрезков): Всякая последовательность вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ , то есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

имеет непустое пересечение, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

*Доказательство:* Из вложенности очевидно следует

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n, b_{n+1} \leq b_n$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_1, b_n \geq a_1$$

Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = b$$

А значит отрезок  $[a, b]$  (возможно вырожденный) включён в пересечение всех отрезков.

□

**Теорема 1.1.4** (Больцано-Вейерштрасса): Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство:* Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  – рассматриваемая ограниченная последовательность, то есть

$$\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_1 \leq x_n \leq b_1$$

Заметим, что один из отрезков  $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$  содержит бесконечно много элементов последовательности.

Пусть  $[a_2, b_2]$  – тот из отрезков, который содержит бесконечно много элементов.

Продолжая данный трюк счётное количество раз получим последовательность вложенных отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ . Также заметим, что данные отрезки стягиваются:

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$$

Тогда по принципу Кантора:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

Осталось построить подпоследовательность, будем брать  $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ , причём так, чтобы  $n_k > n_{k-1}$ . Очевидно,  $n_1 = 1$ . Существование предела также очевидно:

$$0 \leq |c - x_{n_k}| \leq b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

□

## 1.2. Критерий Коши

**Определение 1.2.1:** Последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

**Теорема 1.2.1** (Критерий Коши сходимости числовой последовательности): Числовая последовательность сходится  $\Leftrightarrow$  она фундаментальна.

*Доказательство:*  $\Rightarrow$  По определению предела:

$$\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника в условиях предела:

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - l + l - x_n| \leq |x_{n+p} - l| + |x_n - l| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$  Вначале докажем, что из фундаментальности следует ограниченность:

$$\varepsilon := 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < 1$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : \min(x_1, \dots, x_N, x_{N+1} + 1) \leq x_n \leq \max(x_1, \dots, x_N, x_{N+1} + 1)$$

Тогда из ограниченной последовательности  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  по теореме Больцано-Вейерштрасса достанем сходящуюся подпоследовательность:

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \exists l : \forall \varepsilon > 0 : \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) : |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Также по определению фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

Объединим эти два условия и получим требуемое:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 = \max(N(\varepsilon), n_{K(\varepsilon)+1}) : \forall n > N_0 :$$

$$|x_n - l| = |x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}} + x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l| \leq |x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}}| + |x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l| < \varepsilon$$

□

## 2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней

### 2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

**Определение 2.1.1:** Пусть  $f$  определена в некоторой окрестности  $U_{\delta_0}(x_0)$ , где  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , то функция называется **непрерывной в точке  $x_0$** .

**Определение 2.1.2:**  $f$  называется **непрерывной на множестве  $X \subset \mathbb{R}$** , если

$$\forall x_0 \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

**Теорема 2.1.1** (Первая теорема Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции): Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то  $f$  ограничена на  $[a, b]$ .

*Доказательство:* От противного, пусть  $f$  неограничена сверху. Тогда

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = +\infty$$

То есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$$

Причём  $\forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n \leq b$ , то есть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  – ограниченная, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

Однако из  $f(x_n) > n$  следует, что  $f(x_0) = \infty$ . Противоречие.  $\square$

### 2.2. Достижение точных верхних и нижних граней

**Теорема 2.2.1** (Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях): Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$\exists x', x'' \in [a, b] : f(x') = \sup_{x \in [a, b]} f(x); \quad f(x'') = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

*Доказательство:* Пусть  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ . Тогда по определению супремума

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in [a, b] : M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

В том числе для  $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b] : \forall n \in \mathbb{N} : M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = M$$

Последнее равенство было получено устремлением  $k \rightarrow \infty$  в неравенстве  $M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$ .

Таким образом,  $M$  действительно достигим функцией  $f$  в точке  $x_0$ . Для инфимума аналогично.  $\square$

### 3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

**Теорема 3.1** (Больцано-Коши о промежуточных значениях): Пусть  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ . Тогда

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : c := f(x_1) < d := f(x_2) : \forall e \in (c, d) : \exists \gamma \in [a, b] : f(\gamma) = e$$

*Доказательство:* Рассмотрим частный случай  $c < e = 0 < d$ .

Построим последовательность отрезков  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $[a_1, b_1] = [x_1, x_2]$  (мы не знаем в каком порядке идут иксы).

Заметим, что  $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ .

Рассмотрим  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ . Какие могут быть случаи?

- Если  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ , то мы победили и останавливаемся.
- Если  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$ , то  $a_2 := a_1, b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ .
- Если  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$ , то  $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 := b_1$ .

Либо после конечного числа шагов мы найдём требуемую точку, либо построим последовательность стягивающихся отрезков:

$$b_n - a_n = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{n-1}}$$

Тогда по принципу Кантора  $\{\gamma\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ , причём

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \gamma \in [a, b]$$

Тогда в силу непрерывности  $f$ :

$$f(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$$

Заметим, что после каждой итерации алгоритма изначальное свойство сохраняется:

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

Совершив предельный переход в неравенстве, получим

$$f^2(\gamma) \leq 0$$

Из чего следует  $f(\gamma) = 0$ .

В общем случае рассматривается вспомогательная функция  $F(x) = f(x) - e$ .  $\square$

### 4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

#### 4.1. Теорема Ролля

**Определение 4.1.1:** Пусть  $f$  определена в некоторой  $\delta_0$  окрестности точки  $x_0$ . Если

$$\exists \delta \in (0, \delta_0) : \forall x \in U_{\delta}(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$$

то  $x_0$  – **точка локального максимума**.

Также аналогично вводятся определения локального минимума, а также строгие экстремумы, в которых неравенство строгое.

**Теорема 4.1.1** (Ферма о необходимом условии локального экстремума): Если  $x_0$  – точка локального экстремума функции  $y = f(x)$ , дифференцируемой в  $x_0$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство:* БОО  $x_0$  – точка локального максимума.

Заметим, что тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

А при существовании производной оба этих предела совпадают, поэтому производной в  $x_0$  остаётся лишь быть равной нулю.  $\square$

**Теорема 4.1.2** (Ролля): Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ , причём  $f(a) = f(b)$ , то

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

*Доказательство:* Заметим, что если  $f \equiv \text{const}$ , то утверждение тривиально.

Иначе,  $f$  непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists m < M : m = \min_{x \in [a, b]} f(x); \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

Заметим, что либо  $m \neq f(a)$ , либо  $M \neq f(a)$ .

Это значит, что существует локальный минимум или максимум в некоторой точке  $c \in (a, b)$ , а по теореме Ферма мы знаем, что  $f'(c) = 0$ .  $\square$

## 4.2. Теоремы Лагранжа и Коши

**Теорема 4.2.1** (Обобщённая теорема о среднем): Если  $f, g$  непрерывны на  $[a, b]$ , дифференцируемы на  $(a, b)$ , то

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

*Доказательство:* Рассмотрим

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

Заметим, что  $h$  всё ещё непрерывна на отрезке и дифференцируема на интервале, причём

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(a)$$



То есть  $h$  удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Требуемое доказано.  $\square$

**Теорема 4.2.2** (Лагранжа о среднем): Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , дифференцируема на  $(a, b)$ , то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

*Доказательство:* В обобщённой теореме о среднем возьмём  $g(x) = x$ .  $\square$

**Теорема 4.2.3** (Коши о среднем): Если  $f, g$  непрерывны на  $[a, b]$ , дифференцируемы на  $(a, b)$  и  $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$ , то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство:* Очевидная интерпретация обобщённой теоремы о среднем.

Необходимо уточнить лишь, почему  $g(b) - g(a) \neq 0$ , чтобы мы смогли поделить на него.

Если бы  $g(b) = g(a)$ , то по теореме Ролля  $\exists c : g'(c) = 0$ , что противоречит с условием текущей теоремы.  $\square$

## 5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа

### 5.1. Член в форме Лагранжа

**Лемма 5.1.1:** Если  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $\exists!$  многочлен степени  $\leq n$  такой, что

$$f(x_0) = P_n(f, x_0); f'(x_0) = P'_n(f, x_0); \dots; f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(f, x_0)$$

Этот многочлен имеет вид

$$P_{n(f,x)} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

и называется **многочленом Тейлора** степени  $n$  относительно точки  $x_0$ .

*Доказательство:* Очевидно проверяем каждую производную  $\square$

**Лемма 5.1.2** (Об отношении): Если  $\varphi, \psi$   $(n+1)$  раз дифференцируемы в  $U_\delta(x_0)$ , причём

$$\forall k = \overline{0, n} : \varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) = 0$$

но

$$\forall k = \overline{0, n} : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \psi^{(k)}(x) \neq 0$$

то

$$\forall x \in U_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$$

*Доказательство:* Заметим, что  $\varphi, \psi$  удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем. Тогда

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x) : \frac{\varphi(x) - \underbrace{\varphi(x_0)}_0}{\psi(x) - \underbrace{\psi(x_0)}_0} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \underbrace{\varphi'(x_0)}_0}{\psi'(\xi_1) - \underbrace{\psi'(x_0)}_0} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = \dots = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$

□

**Теорема 5.1.1** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа): Если  $f$   $(n+1)$  раз дифференцируема в  $U_\delta(x_0)$ ,  $\delta > 0$ , то

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) : \exists \xi \in (x_0, x) : f(x) - P_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

*Доказательство:* Сведём к предыдущей лемме об отношении:

$$\varphi(x) := f(x) - P_n(f, x); \quad \psi(x) := (x - x_0)^{n+1}$$

Все требуемые свойства проверяются очевидно.

□

## 5.2. Член в форме Пеано

**Теорема 5.2.1** (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано): Если  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ , то

$$f(x) - P_n(f, x) = o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$$

где  $P_{n(f, x)}$  — многочлен Тейлора степени  $n$  функции  $f$  относительно  $x_0$ .

*Доказательство:* По определению, если  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке, то она  $n-1$  раз дифференцируема в окрестности.

Снова используем лемму об отношении, но для случая  $n-1$ :

$$\varphi(x) := f(x) - P_n(f, x); \quad \psi(x) = (x - x_0)^n$$

Получим, что

$$\exists \xi \in (x_0, x) : \frac{f(x) - P_n(f, x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n!(\xi - x_0)}$$

Заметим, что при  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \xi \rightarrow x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(f, x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(\xi) - P_n^{(n-1)}(f, \xi)}{n!(\xi - x_0)} = \frac{1}{n!} (f(x_0) - P_n(f, x_0))^{(n)} = 0$$

□

## 6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.

### 6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции

**Теорема 6.1.1:** Пусть  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда

1.  $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$  — неубывающая на  $(a, b)$
2.  $\forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$  — невозрастающая на  $(a, b)$
3.  $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$  — возрастающая на  $(a, b)$
4.  $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$  — убывающая на  $(a, b)$

*Доказательство:*

1.  $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$  По теореме Лагранжа:

$$\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b : \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$$

То есть для произвольных  $x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Обратно, пусть  $f(x)$  неубывающая. Тогда

$$\forall x_0 \in (a, b) : \forall \Delta x : \text{sign} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \text{sign} \Delta x$$

Ну и тогда при  $|\Delta x| < \min(x_0 - a, b - x_0)$ :

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

Совершим предельный переход в неравенстве и получим требуемое.

2. Аналогично предыдущему пункту
3. Контрпримером для  $\Leftarrow$  является  $f(x) = x^3$  в точке 0
4. Контрпримером для  $\Leftarrow$  является  $f(x) = -x^3$  в точке 0

□

### 6.2. Достаточные условия локальных экстремумов

**Теорема 6.2.1** (Первое достаточное условие экстремума функции): Пусть  $f$  непрерывна в  $U_{\delta_0}(x_0)$  и дифференцируема в  $\dot{U}_{\delta_0}(x_0)$ ,  $\delta_0 > 0$ :

1. Если  $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) > 0$  и  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) < 0$ , то  $x_0$  — точка строгого локального максимума  $f$
2. Если  $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) < 0$  и  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) > 0$ , то  $x_0$  — точка строгого локального минимума  $f$

*Доказательство:* По сути просто заменили в определении локального экстремума монотонность на достаточное условие знакопостоянности производной из предыдущей теоремы.  $\square$

**Теорема 6.2.2** (Второе достаточное условие локального экстремума): Если  $f$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0, \forall k = \overline{1, n-1} : f^{(k)}(x_0) = 0$ , то

1. Если  $n$  чётно, то  $f$  имеет в точке  $x_0$  локальный минимум при  $f^{(n)}(x_0) > 0$  и локальный максимум при  $f^{(n)}(x_0) < 0$ .
2. Если  $n$  нечётное, то  $f$  не имеет локального экстремума в точке  $x_0$ .

*Доказательство:*

1. Воспользуемся разложением в Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (учитывая факт нулевых производных):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), x \rightarrow x_0$$

Так как  $n$  чётно, то  $n = 2m$ :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2m}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1), x \rightarrow x_0$$

Левая часть в некоторой окрестности точки  $x_0$  имеет тот же знак, что и правая. Тогда в силу чётной степени в знаменателе левой части получаем, что разность  $f(x) - f(x_0)$  одного знака с  $n$ -ой производной.

2. Рассмотрим  $f(x) = x^3$ .

$\square$

### 6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости

**Определение 6.3.1:**  $f$  называется **выпуклой (вниз) (вогнутой вверх)** на  $(a, b)$ , если её график лежит не выше хорды, стягивающей любые две точки этого графика над  $(a, b)$ .

$f$  называется **выпуклой (вверх) (вогнутой вниз)** на  $(a, b)$ , если её график лежит не ниже хорды, стягивающей любые две точки этого графика над  $(a, b)$ .

**Теорема 6.3.1:** Пусть  $f$  дважды дифференцируема на  $(a, b)$ :

1.  $f$  выпукла вниз на  $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$ .
2.  $f$  выпукла вверх на  $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$ .
3.  $f$  строго выпукла вниз на  $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$ .
4.  $f$  строго выпукла вверх на  $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$ .

*Доказательство:*

1.  $\Leftarrow$  Рассмотрим эквивалентное определение выпуклости:

$$\forall x_0, x_1 : a < x_0 < x_1 < b : \forall t \in [0, 1] :$$

$$x_t := tx_0 + (1-t)x_1 : f(x_t) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

Разложим  $f$  в формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке  $x_t$ :

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x_t) : f(x_0) = f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_0 - x_t)^2$$

$$\exists \xi_2 \in (x_1, x_t) : f(x_1) = f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_1 - x_t)^2$$

Из-за знакопостоянности второй производной из этих равенств следуют следующие неравенства:

$$f(x_0) \geq f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t)$$

$$f(x_1) \geq f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t)$$

Умножим первое на  $t$ , второе на  $1-t$  и сложим их:

$$tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \geq f(x_t) + \underbrace{f'(x_t)(tx_0 + (1-t)x_1 - x_t)}_0$$

$\Rightarrow$  Рассмотрим произвольную точку  $x_0 \in (a, b)$  и достаточно малую окрестность  $\delta := \min(x_0 - a, b - x_0)$ . Тогда

$$\forall u \in (-\delta, \delta) : x_0 = \frac{1}{2}(x_0 - u) + \frac{1}{2}(x_0 + u) : f(x_0) \leq \frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u)$$

Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x_0 \pm u) = f(x_0) \pm f'(x_0)u + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \rightarrow 0$$

В прошлой строчке мы записали сразу два равенства благодаря  $\pm$ , давайте умножим каждое на  $\frac{1}{2}$  и сложим их:

$$\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \rightarrow 0$$

Тогда при достаточно малых  $u$   $\frac{f''(x_0)}{2}u^2$  обязано будет стать такого же знака, как и  $\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) - f(x_0) \geq 0$

2. Аналогично
3.  $\Leftarrow$  аналогично только со строгими неравенствами, а  $\Rightarrow$  вообще говоря не верно, например, для  $f(x) = x^4$
4.  $\Leftarrow$  аналогично только со строгими неравенствами, а  $\Rightarrow$  вообще говоря не верно, например, для  $f(x) = -x^4$

□

## 7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте

**Определение 7.1:** Компактным множеством в метрическом пространстве  $X$  называется такое множество  $K$ , что из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

**Определение 7.2:** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $X$  – метрическое пространство, называется равномерно непрерывной на множестве  $X' \subset X$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X' : \rho(x_1, x_2) < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

**Теорема 7.1** (Кантора о равномерной непрерывности): Если  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна на компактном множестве  $K \subset \mathbb{R}^n$ , то она равномерно непрерывна на  $K$ .

*Доказательство:* От противного, выпишем отрицание равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in K : \|x_1 - x_2\| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Выбирая  $\delta := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}, \dots$  построим последовательность пар из отрицания непрерывности:  $\{(x_{1,m}, x_{2,m})\}_{m=1}^{\infty} \subset K^2$ .

Причём

$$\forall m \in \mathbb{N} : \|x_{1,m} - x_{2,m}\| < \frac{1}{m} : |f(x_{1,m}) - f(x_{2,m})| \geq \varepsilon$$

По одному из определений компактности выделим из последовательности пар подпоследовательность, у которой сходятся первые координаты:

$$\exists \{(x_{1,m_k}, x_{2,m_k})\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} x_{1,m_k} = x_0 \in K$$

Причём заметим, что (комбинируем то, как мы строили последовательность пар и сходимости первых координат подпоследовательности):

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > 0 : \|x_{2,m_k} - x_0\| \leq$$

$$\|x_{1,m_k} - x_0\| + \|x_{1,m_k} - x_{2,m_k}\| < 2\varepsilon$$

То есть

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{1,m_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2,m_k} = x_0 \quad \xRightarrow{\text{непрерывность } f} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{1,m_k}) - f(x_{2,m_k})) &= 0 \end{aligned}$$

Противоречие! □

## 8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

**Определение 8.1:** Пусть  $f$  определена в некоторой окрестности  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**Полным приращением**  $f$  в точке  $x_0$  называется

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n} + \Delta x_n) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$$

$f$  называется **дифференцируемой** в  $x_0$ , если

$$\Delta f(x_0) = (A, \Delta x) + o(\|\Delta x\|), \Delta x \rightarrow 0$$

где  $A \in \mathbb{R}^n$  называется **градиентом**:  $\text{grad } f(x_0) = A$

**Определение 8.2:** Дифференциалом дифференцируемой в  $x_0$  функции  $f$  назовём выражение  $(A, \Delta x)$  из определения дифференцируемости.

**Определение 8.3:** Частной производной в точке  $x_0$  называется предел (если он существует):

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_{0,1}, \dots, x_{0,j} + \Delta x, \dots, x_{0,n}) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,j}, \dots, x_{0,n})}{\Delta x}$$

**Теорема 8.1** (Необходимое условие дифференцируемости): Если  $f$  дифференцируема в точке  $x_0 \in \mathbb{R}$ , то существуют частные производные  $\forall j = \overline{1, n}$ , причём

$$\text{grad } f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

*Доказательство:* Сразу следует из определения - есть предел по всем многомерным приращениям, а значит и по однокоординатным в том числе.  $\square$

**Теорема 8.2** (Достаточное условие дифференцируемости): Если  $f$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , вместе со своими частными производными, причём они непрерывны в  $x_0$ , то  $f$  дифференцируема в  $x_0$ .

*Доказательство:* Воспользуемся  $n$  раз «умным нулём», каждый из которых будет снимать приращение по одной из координат:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= \\ f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n} + \Delta x_n) - f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}) + \\ & f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}) - f(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1}, x_{0,n}) \\ & + \dots + \\ & f(x_{0,1} + \Delta x_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) - f(x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) = \\ & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, \xi_n) \Delta x_n + \\ & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x_{0,1} + \Delta x_1, \dots, x_{0,n-2} + \Delta x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_{0,n}) \Delta x_{n-1} \\ & + \dots + \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \Delta x_1 = \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \Delta x_i + o(\|\Delta x\|), \Delta x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\square$

## 9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением

**Определение 9.1:** Кубом радиуса  $\delta$  вокруг точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  назовём

$$K_{\delta, x_0} = \times_{k=1}^n (x_0^k - \delta, x_0^k + \delta)$$

где под  $\times$  подразумевается декартово произведение.

**Теорема 9.1:** Пусть  $F(x, y) = F(x_1, \dots, x_n, y)$  дифференцируема в окрестности точки  $(x_0, y_0) = (x_0^1, \dots, x_0^n, y_0)$ .

Её производная  $\frac{\partial F}{\partial y}$  непрерывна в этой окрестности, причём  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда для любого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta > 0$ :

$$\forall x \in K_{\delta, x_0} : \exists! y = \varphi(x) : \forall (x, y) \in K_{\delta, x_0} \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) :$$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x) \wedge \exists \varphi'(x_0)$$

*Доказательство:* БОО будем считать, что  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$ .

По непрерывности частной производной,  $\exists$  окрестность точки  $(x_0, y_0)$ , в которой  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$ .

Тогда из непрерывности  $F$  по  $y$  и знакоопределённости производной следует

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Расширяем территорию дальше, из непрерывности  $F$  по  $x$  следуют

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in K_{\delta, x_0} : F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции берём существование, а из знакоопределённости производной единственность:

$$\exists! \varphi(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Заметим, что  $\varphi$  непрерывна по построению в  $(x_0, y_0)$ : мы брали  $x$  из  $2\delta$  окрестности точки  $x_0$ , а значение лежало в  $2\varepsilon$  окрестности точки  $y_0$ .

Теперь докажем дифференцируемость  $\varphi$ , для этого распишем дифференцируемость  $F$ :

$$F(x, y) - \underbrace{F(x_0, y_0)}_0 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) \cdot (x_k - x_0^k) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \alpha(x, y)$$

где  $\alpha = o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|)$ ,  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ .

Воспользуемся умножением на «умную единицу»:

$$\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(x, y) \cdot (x_i - x_0^i)^2}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2} + \frac{\alpha(x, y) \cdot (y - y_0)^2}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2}$$

Введём новые обозначения:

$$\alpha_i(x, y) := \frac{\alpha(x, y) \cdot (x_i - x_0^i)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2}; \quad \beta(x, y) := \frac{\alpha(x, y) \cdot (y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_2^2}$$

Тогда

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) + \alpha_k(x, y) \right) (x_k - x_0^k) + \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(x, y) \right) (y - y_0)$$

Подставляя  $y = \varphi(x)$  в выражение выше, будем использовать новые обозначения:

$$\tilde{\alpha}_k(x) := \alpha_k(x, \varphi(x)); \quad \tilde{\beta}(x) := \beta(x, \varphi(x))$$



Таким образом,

$$\underbrace{F(x, \varphi(x))}_0 = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x) \right) (x_k - x_0^k) + \\ \left( \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x) \right) (\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

Выразим приращение  $\varphi$ :

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))} + \gamma_k(x) \right) (x_k - x_0^k)$$

где

$$\gamma_k(x) := - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0))} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x)}$$

Остаётся заметить, что  $\tilde{\alpha}_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ ;  $\tilde{\beta}(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ , а это значит, что

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \sum_{k=1}^n A_k (x_k - x_0^k) + \gamma(x); \quad \gamma(x) = o(\|x - x_0\|), x \rightarrow x_0$$

Что и является требуемой дифференцируемостью  $\varphi$  в  $x_0$ .  $\square$

## 10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия.

### 10.1. Необходимые условия

**Определение 10.1.1:** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется точкой **локального максимума** функции  $f(x)$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$$

**Определение 10.1.2:** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется точкой **локального минимума** функции  $f(x)$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \geq f(x_0)$$

**Определение 10.1.3:** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется точкой **строгого локального максимума** функции  $f(x)$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) < f(x_0)$$

**Определение 10.1.4:** Точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  называется точкой **строгого локального минимума** функции  $f(x)$ , если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) > f(x_0)$$

**Теорема 10.1.1** (Необходимые условия локального экстремума): Если  $x_0$  — точка локального экстремума функции  $f(x)$ , дифференцируемой в окрестности точки  $x_0$ , то  $df(x) \equiv 0$ .

*Доказательство:* Рассмотрим для каждого  $k = \overline{1, n}$ :

$$\psi(x_k) = f(x_0^1, \dots, x_0^{k-1}, x_k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n), \quad \text{где } x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$$

Тогда заметим, что  $\psi$  дифференцируема в окрестности  $x_0^k$ , применяя теорему о необходимом условии экстремума функции одного переменного, получим

$$\psi'(x_0^k) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0$$

В силу произвольности  $k$  и того, что дифференциал – это вектор частных производных, получим требуемое.  $\square$

## 10.2. Достаточные условия

**Определение 10.2.1:** Если  $f$  дифференцируема в окрестности точки  $x_0$  и  $df(x_0) \equiv 0$ , то  $x_0$  называется **стационарной точкой** функции  $f$ .

**Теорема 10.2.1** (Достаточные условия локального экстремума): Если  $x_0$  – стационарная точка функции  $f$ , дважды дифференцируемой в точке  $x_0$ , то

1. Если  $d^2f(x_0)$  – положительно определённая квадратичная форма, то  $x_0$  – точка строгого локального минимума функции  $f$
2. Если  $d^2f(x_0)$  – отрицательно определённая квадратичная форма, то  $x_0$  – точка строгого локального максимума функции  $f$
3. Если  $d^2f(x_0)$  – неопределённая квадратичная форма, то  $x_0$  не является точкой локального экстремума

*Доказательство:*

1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0) + o(\rho^2), \quad \rho \rightarrow 0$$

где

$$dx_k = x_k - x_0^k, k = \overline{1, n}; \quad \rho = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - x_0^k)^2} = \|dx\|_2$$

Тогда (в условиях  $df(x_0) \equiv 0$  и  $\xi_k := \frac{dx_k}{\|dx\|}$ ):

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}d^2f(x_0) + o(\rho^2) =$$

$$\frac{1}{2}\rho^2 \left( \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \xi_i \xi_j}_{F(\xi_1, \dots, \xi_n)} + o(1) \right), \quad \rho \rightarrow 0$$

В следствие нормировки, очевидно,  $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1$ .

Таким образом, минимум введённого функционала  $F$  на сфере (компактной в  $\mathbb{R}^n$ ) будет достигаться:

$$\min_{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 1} F(\xi_1, \dots, \xi_n) =: C > 0$$

Таким образом, для достаточно маленьких  $\rho$ :

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{C}{4}\rho^2 > 0$$

2. Аналогично

3. Вводим  $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$  аналогично предыдущим пунктам, из-за того что  $d^2f$  – неопределённая, то

$$\exists \xi_1(x_1), \xi_2(x_2) : F(\xi_1^1, \dots, \xi_1^n) > 0 \wedge F(\xi_2^1, \dots, \xi_2^n) < 0$$

Тогда при достаточно малых  $\rho$ :

$$\text{sign}(f(x_1) - f(x_0)) = \text{sign} F(\xi_1) > 0; \text{sign}(f(x_2) - f(x_0)) = \text{sign} F(\xi_2) < 0$$

Что и требовалось.

□

## 11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница.

### 11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом

**Определение 11.1.1:** Разбиением  $P$  отрезка  $[a, b]$  называется конечное множество точек отрезка  $[a, b]$ :

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b; \quad \Delta x_k := x_k - x_{k-1}; k = \overline{1, n}$$

**Определение 11.1.2:** Диаметром разбиения  $P$  называется

$$\Delta(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

**Определение 11.1.3:** Верхней суммой Дарбу разбиения  $P$  функции  $f$  называется

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

**Определение 11.1.4:** Нижней суммой Дарбу разбиения  $P$  функции  $f$  называется

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

**Определение 11.1.5:** Функция  $f$  называется интегрируемой по Риману на  $[a, b]$  ( $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists P : U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

**Определение 11.1.6:** Интегралом Римана интегрируемой по Риману на  $[a, b]$  функции  $f$  называется

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_P U(P, f) = \sup_P L(P, f)$$

**Теорема 11.1.1** (Основные свойства интеграла Римана):

1. (Линейность) Если  $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ , то  $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$ , причём

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

Кроме того,  $\forall c \in \mathbb{R}$  выполняется, что  $cf_1 \in \mathcal{R}[a, b]$ , причём

$$\int_a^b cf_1(x) dx = c \int_a^b f_1(x) dx$$

2. (Монотонность) Если  $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $\forall x \in [a, b] : f_1(x) \leq f_2(x)$ , то

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

3. (Аддитивность):

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \forall c \in (a, b) : f \in \mathcal{R}[a, c] \wedge f \in \mathcal{R}[c, b]$$

$$\text{Причём } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. (Оценка) Если  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  и  $\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M$ , то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a)$$

**Определение 11.1.7:** Пусть  $\forall b' \in (a, b) : f \in \mathcal{R}[a, b']$ . Тогда  $F(b') = \int_a^{b'} f(x) dx$  называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

Будем считать, что  $F(a) = 0$ , а для  $\alpha > \beta$ :

$$\int_\alpha^\beta f(x) dx = - \int_\beta^\alpha f(x) dx$$

**Теорема 11.1.2** (Основные свойства интеграла с переменным верхним пределом): Если  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , то интеграл с переменным верхним пределом  $F(x)$  непрерывен на  $[a, b]$ .

Если, кроме того,  $f$  непрерывна в  $x_0 \in [a, b]$ , то  $F(x)$  дифференцируема в  $x_0$ , причём  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

*Доказательство:* Непрерывность следует из комбинирования свойств аддитивности и оценки:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \wedge x_2 - x_1 < \frac{\varepsilon}{M} : |F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| \leq$$

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx \leq M(x_2 - x_1) < \varepsilon$$

В условиях непрерывности  $f$ , докажем, что производная интеграла действительно равна  $f(x_0)$ :

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} |f(t) - f(x_0)|$$

Благодаря непрерывности  $f$  мы знаем, что при  $x \rightarrow x_0$  сможем оценить итоговый супремум сверху  $\varepsilon$ .  $\square$

## 11.2. Формула Ньютона-Лейбница

**Определение 11.2.1:** Первообразной функции  $f$  на  $[a, b]$  называется такая дифференцируемая на  $[a, b]$  функция  $F$ , что

$$\forall t \in [a, b] : F'(t) = f(t)$$

**Определение 11.2.2:** Интегральной суммой  $S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$  называется

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

где  $P : a = x_0 < \dots < x_n = b, \forall i = \overline{1, n} : t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

**Теорема 11.2.1** (Интеграл как предел интегральных сумм):

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \exists \lim_{\Delta(P) \rightarrow 0} S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$$

При этом  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta(P) \rightarrow 0} S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$

**Теорема 11.2.2** (Основная теорема интегрального исчисления): Если  $f \in \mathcal{R}[a, b]$  имеет первообразную  $F$  на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

*Доказательство:* Для любого разбиения  $P$ :

$$F(b) - F(a) \stackrel{\text{телескопическая сумма}}{=} \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) \stackrel{\text{теорема Лагранжа}}{=} \sum_{k=1}^n F'(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Устремляя  $\Delta(P) \rightarrow 0$  получим, что  $F(b) - F(a)$  равно требуемому интегралу по эквивалентному определению.  $\square$

## 12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда.

### 12.1. Непрерывность суммы функционального ряда

**Определение 12.1.1:** Функциональная последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  сходится равномерно на  $E$  к функции  $f(x)$  ( $f_n \rightrightarrows f$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Определение 12.1.2:** Функциональная последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  **сходится поточечно** на  $E$  к функции  $f(x)$ , если

$$\forall x \in E : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Теорема 12.1.1** (Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности):

$$f_n \xrightarrow[E]{} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

**Определение 12.1.3:** Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  равномерно сходится на  $E$ , если равномерно сходится на  $E$  функциональная последовательность  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$

**Теорема 12.1.2** (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ равномерно сходится на } E \Leftrightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon$$

**Теорема 12.1.3** (Предельный переход в равномерно сходящихся последовательностях): Если  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно сходится к  $f$  на множестве  $E$  метрического пространства,  $x_0$  – предельная точка  $E$ , причём

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

То есть оба предела существуют и равны.

*Доказательство:* Воспользуемся критерием Коши равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Совершим предельный переход  $x \rightarrow x_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |a_{n+p} - a_n| \leq \varepsilon$$

То есть числовая последовательность  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  имеет какой-то предел  $a$ , теперь нужно установить, что он равен пределу предельной функции:

$$|f(x) - a| = |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|$$

Стоит упомянуть про кванторы:

- Берём номер  $N$  больший  $N_1$  для равномерного предела функций и  $N_2$  для числового предела  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$
- $\delta$ -окрестность  $x_0$  меньшую требуемой для фиксированного  $f_N(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_N$

□

**Следствие 12.1.3.1:** Если  $f_n(x)$  непрерывна на  $E$ ,  $f_n \rightrightarrows f$  на  $E$ , то  $f$  непрерывна на  $E$ .

**Теорема 12.1.4** (Предельный переход в функциональных рядах): Если  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ ,  $x_0$  – предельная точка  $E$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  :  $\lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$ , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in E} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

*Доказательство:* Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм. □

## 12.2. Интегрируемость суммы функционального ряда

**Теорема 12.2.1** (Интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности): Если  $\forall n \in \mathbb{N}$  :  $f_n$  интегрируема по Риману на  $[a, b]$  и  $f_n \rightrightarrows f$  на  $[a, b]$ , то  $f$  интегрируема по Риману на  $[a, b]$  и

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

*Доказательство:* Воспользуемся тем, что каждый элемент функциональной последовательности интегрируем:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 : \exists P : U(P, f_n) - L(P, f_n) < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Далее определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Итак, оценим верхнюю сумму Дарбу предела:

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \left( \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_n(x) + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) \Delta x_k = U(P, f_n) + \frac{\varepsilon}{3}$$

Аналогично для нижней:

$$L(P, f) \geq L(P, f_n) - \frac{\varepsilon}{3}$$

Таким образом,

$$U(P, f) - L(P, f) \leq U(P, f_n) - L(P, f_n) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Мы доказали интегрируемость  $f$ , осталось доказать, что интеграл равен тому, что надо:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b-a) < \varepsilon$$

□

**Теорема 12.2.2** (Интегрирование функциональных рядов): Если  $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  равномерно сходится на  $[a, b]$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in \mathcal{R}[a, b]$  и

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

*Доказательство:* Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм.  $\square$

### 12.3. Дифференцируемость суммы функционального ряда

**Теорема 12.3.1** (Дифференцирование функциональных последовательностей): Если

1.  $f_n$  дифференцируемы на  $(a, b)$
2.  $f'_n \rightrightarrows$  на  $(a, b)$
3.  $\exists x_0 \in (a, b) : f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$

То

1.  $f_n \rightrightarrows f$  на  $(a, b)$
2.  $f$  дифференцируема на  $(a, b)$
3.  $f'_n \rightarrow f'$  на  $(a, b)$

*Доказательство:* Используем равномерную сходимость производных:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in (a, b) : |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

А также сходимость самих функций в точке  $x_0$ :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Применим теорему Лагранжа для непрерывных  $f_n$  между произвольной точкой  $x$  и фиксированной  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \exists \xi \in \{x, x_0\} : |(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))| = \\ |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| |x - x_0| \end{aligned}$$

Тогда мы можем доказать фундаментальность самой последовательности:

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &\leq |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| + |f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| |x - x_0| < \\ &\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |x - x_0| < \varepsilon \end{aligned}$$

Значит по критерию Коши  $f_n \rightrightarrows f$  на  $(a, b)$ .

Остаётся доказать дифференцируемость  $f$  в произвольной точке  $x \in (a, b)$ , для этого введём вспомогательные функции:

$$\varphi_n(t) := \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}; \quad \varphi(t) := \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Докажем фундаментальность  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)| &= \frac{|(f_{n+p}(t) - f_n(t)) - (f_{n+p}(x) - f_n(x))|}{t - x} \stackrel{\text{теорема Лагранжа}}{=} \\ &|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{aligned}$$

Получили, что  $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$  на  $A := (a, b) \setminus \{x\}$ .

Заметим, что  $x$  – предельная точка  $A$ , тогда применим теорему о непрерывном поточечном пределе:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x, t \in A} \varphi_n(t) = \lim_{t \rightarrow x, t \in A} \varphi(t) = f'(x)$$

Заметим, что этими равенствами мы доказываем как существование, так и равенство пределов.  $\square$



### 13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора.

#### 13.1. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда

**Определение 13.1.1:** Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ , где  $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$  называется **степенным рядом** с центром в точке  $z_0$  и коэффициентами  $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ .

**Определение 13.1.2:** Радиусом сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  называется

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}; \quad 0 \leq R \leq +\infty$$

**Теорема 13.1.1** (Коши-Адамара): Если  $R \in [0, +\infty]$  – радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ , то

1.  $\forall z, |z - z_0| < R$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  сходится, притом абсолютно
2.  $\forall z, |z - z_0| > R$  ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  расходится

*Доказательство:*

1. Пусть  $|z - z_0| =: r < R$ .

Возьмём произвольный  $\rho \in (r, R) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$ . По определению верхнего предела:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{\rho}$$

Тогда:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : |c_n(z - z_0)^n| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n; \quad \frac{r}{\rho} < 1$$

По теореме Вейерштрасса мы можем ограничить рассматриваемый ряд сходящимся числовым (геометрическая прогрессия) и всё доказано.

2. Пусть  $|z - z_0| > R$ , то есть  $\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{R}$ . Значит по плотности действительных чисел:

$$\exists \varepsilon > 0 : \frac{1}{|z - z_0|} \leq \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |z - z_0| \geq \frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}$$

По определению верхнего предела:

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \forall k \in \mathbb{N} : \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow$$

$$|a_{n_k} z^{n_k}| \geq \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^{n_k} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}\right)^{n_k} \geq 1$$

Получили, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

□

**Теорема 13.1.2** (Равномерная сходимость степенного ряда): Если ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  имеет радиус сходимости  $R > 0$ , то он сходится равномерно в любом круге  $|z - z_0| \leq R$ , где  $0 < r < R$

*Доказательство:*  $|z - z_0| = r < R \Rightarrow$  по теореме Коши-Адамара  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  сходится абсолютно, то есть  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$

Тогда для любого  $z$  из рассматриваемого круга справедлива оценка

$$|c_n(z - z_0)^n| \leq |c_n| r^n$$

А значит по теореме Вейерштрасса имеется равномерная сходимость.  $\square$

**Теорема 13.1.3** (Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов): Пусть  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ , где  $|x - x_0| < R, R > 0$ . Тогда

1.  $f(x)$  бесконечно дифференцируема  $\forall x, |x - x_0| < R$ , причём  

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)(x - x_0)^{n-k}$$
2.  $f(x)$  интегрируема по Риману  $\forall x, |x - x_0| < R$  на отрезке с концами  $x_0, x$ , причём

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}$$

3. Все степенные ряды, упомянутые в пунктах 1, 2 имеют радиус сходимости  $R$ .
4.  $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

*Доказательство:* Если мы возьмём  $x : |x - x_0| = r < R$ , то на отрезке  $[x_0, x]$  ряд для  $f(x)$  сходится равномерно, а значит мы можем его почленно интегрировать по теореме об интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов.

Радиус сходимости дифференцированного (и, вообще говоря, интегрированного) ряда не меняется, так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . А значит он также равномерно сходится на  $[x_0, x]$ , поэтому мы можем применить теорему о дифференцировании функционального ряда.

Заметим, что  $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$ , что и требовалось.  $\square$

## 13.2. Ряд Тейлора

**Определение 13.2.1:** Если  $f$  бесконечно дифференцируема в точке  $x_0$ , то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

называется её **рядом Тейлора** с центром в точке  $x_0$ .

Если  $x_0 = 0$ , то ряд Тейлора называется **рядом Маклорена**.

**Теорема 13.2.1** (Достаточное условие представимости функции рядом Тейлора): Если  $f$  бесконечно дифференцируема на  $(x_0 - h, x_0 + h)$ , причём

$$\exists M : \forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) : |f^{(n)}(x)| \leq M$$

То  $f(x)$  представима своим рядом Тейлора в точке  $x_0$  при всех  $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$

*Доказательство:* По теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}; \quad \xi \in (x_0, x)$$

Следовательно

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Почему  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ ? Заметим, что  $n$ -ый элемент разложения экспоненты (имеющий бесконечный радиус сходимости, поэтому для неё априори он существует) в ряд Маклорена – это  $\frac{x^n}{n!}$ , а по необходимому условию сходимости ряда, он стремится к 0 равномерно.  $\square$

## 14. Теорема об ограниченной сходимости для интеграла Лебега

**Определение 14.1:** Пусть  $f$  – ограниченная измеримая функция, определённая на измеримом по Лебегу множестве  $E$ . И  $Q$  – разбиение области значений функции  $f$ .

Тогда **интегральной суммой Лебега** назовём

$$S(Q, f, \{t_i\}_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \mu(E_i)$$

где  $E_i = \{x \in E \mid f(x) \in [y_{i-1}, y_i)\}$

**Теорема 14.1** (Критерий/определение интеграла Лебега для ограниченных функций): Если  $f$  – ограниченная измеримая на измеримом по Лебегу множестве  $E \subset \mathbb{R}^n$ , то она интегрируема по Лебегу на  $E$ , причём

$$\int_E f d\mu(x) = \lim_{\Delta(Q) \rightarrow 0} S(Q, f, \{t_i\}_{i=1}^n)$$

**Определение 14.2:** Назовём **срезкой** неотрицательной функции  $f$  для  $N \in \mathbb{N}$ :

$$f_{[N]}(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq N \\ N, & f(x) > N \end{cases}$$

**Теорема 14.2** (Критерий/определение интеграла Лебега для измеримых неотрицательных функций): Если  $f$  – измеримая неотрицательная функция, определённая на измеримом множестве  $E$  конечной меры, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_E f_{[N]} d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x)$$

**Теорема 14.3** (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла): Пусть

- $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  – измеримые на множестве  $E \subset \mathbb{R}^n$  конечной меры
- $f_n \xrightarrow{\text{п.н.}} f$  на  $E$
- $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leq F(x)$  при почти всех  $x \in E$ , где  $F$  – произвольная суммируемая функция на  $E$

Тогда  $f$  суммируема на  $E$ , причём

$$\int_E f d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu(x)$$

*Доказательство:* Совершив предельный переход  $n \rightarrow \infty$  мы можем утверждать, что  $|f(x)| \leq F(x)$  при почти всех  $x \in E$  – значит  $f$  суммируема на  $E$ .

Осталось доказать равенство интеграла и предела интегралов.

Как мы знаем, из сходимости почти всюду следует сходимость по мере:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n(\varepsilon)) := \{x \in E \mid \|f_n - f\| \geq \varepsilon\} = 0$$

Другими словами

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m > M : \mu(E_m(\varepsilon)) < \delta$$

Оценим разность интеграла и предела интегралов:

$$\left| \int_E (f - f_m) d\mu(x) \right| \leq \int_{E_m} |f_m - f| d\mu(x) + \int_{E \setminus E_m} |f_m - f| d\mu(x) \leq$$

$$2 \int_{E_m} F d\mu(x) + \varepsilon \mu(E \setminus E_m) < \varepsilon (\mu(E) + 2)$$

Что и требовалось. □

## 15. Дифференциальные формы на открытых подмножествах евклидова пространства, оператор внешнего дифференцирования $d$ и его независимость от криволинейной замены координат

### 15.1. Дифференциальные формы, оператор внешнего дифференцирования

В этом и других билетах, связанных с дифференциальными формами введём понятия  $E = \mathbb{R}^n$  – евклидово пространство.

$E^*$  – сопряжённое к нему, ака пространство линейных функционалов ака линейных форм ака ковекторов.

Если мы будем употреблять  $p \in \mathbb{N}$ , то мы имеем ввиду количество векторов

$$x_1, \dots, x_p \in E$$

Если мы будем употреблять  $q \in \mathbb{N}$ , то мы имеем ввиду количество ковекторов  $y^1, \dots, y^q \in E^*$

Обратите внимание на индексы, это важно.

**Определение 15.1.1:** Полилинейной формой валентности  $(p, q)$  называется функция  $U : E^p \times (E^*)^q \rightarrow \mathbb{R}$ , линейная по каждому из аргументов.

**Утверждение 15.1.1:** Полилинейная форма однозначно определяется значениями на базисных элементах  $E$  и  $E^*$ , то есть числами

$$\omega_i^j := \omega_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} = U(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q})$$

где  $\{e_i\}_{i=1}^n$  – базис  $E$ , а  $\{e^j\}_{j=1}^q$  – двойственный базис  $E^*$ .

*Доказательство:* Очевидно из линейности. □

**Определение 15.1.2:** Набор чисел  $\{\omega_i^j \mid i \in (\overline{1, n})^p, j \in (\overline{1, n})^q\}$  (то есть мы рассматриваем значения на всех комбинациях базисных векторов и ковекторов) называется **тензором**

**Утверждение 15.1.2:** Множество полилинейных форм валентности  $(p, q)$  образует **линейное пространство**  $\Omega_p^q$ .

**Определение 15.1.3:** Тензорным произведением форм  $U \in \Omega_{p_1}^{q_1}; V \in \Omega_{p_2}^{q_2}$  называется форма  $U \otimes V \in \Omega_{p_1+p_2}^{q_1+q_2}$ , задаваемая формулой.

$$\forall x \in E^{p_1+p_2} : \forall y \in E^{q_1+q_2} :$$

$$U \otimes V(x_1, \dots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}, y^1, \dots, y^{q_1}, y^{q_1+1}, \dots, y^{q_1+q_2}) = \\ U(x_1, \dots, x_{p_1}, y^1, \dots, y^{q_1}) \cdot V(x_{p_1+1}, \dots, x_{p_1+p_2}, y^{q_1+1}, \dots, y^{q_1+q_2})$$

**Определение 15.1.4:**  $W \in \Omega_p^0$  называется **симметрической**, если она не изменяется при любой перестановке её аргументов.

**Определение 15.1.5:**  $W \in \Omega_p^0$  называется **антисимметрической** (косо-симметрической), если при любой перестановке пары её аргументов она меняет знак.

Введём линейное пространство антисимметрических форм:

$$\Lambda_p := \{W \in \Omega_p^0 \mid W - \text{антисимметрическая}\}$$

**Определение 15.1.6:** Пусть  $\pi_p = (i_1, \dots, i_p)$  – перестановка индексов  $\{1, \dots, p\}$ . Тогда

$$\forall W \in \Omega_p^0 : \forall x \in E^p : (\pi_p W)(x_1, \dots, x_p) := W(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$$

**Определение 15.1.7:** Симметризацией формы  $W \in \Omega_p^0$  называется форма

$$\text{sym } W := \frac{1}{p!} \sum_{\pi_p \in S_p} \pi_p W$$

**Определение 15.1.8:** Антисимметризацией формы  $W \in \Omega_p^0$  называется форма

$$\text{asym } W := \frac{1}{p!} \sum_{\pi_p \in S_p} \text{sgn } \pi_p \cdot \pi_p W$$

**Определение 15.1.9:** Если  $U \in \Lambda_p, V \in \Lambda_q$ , то их **внешним произведением** называется

$$U \wedge V := \frac{(p+q)!}{p!q!} \text{asym } (U \otimes V)$$

**Теорема 15.1.1** (Основные свойства внешнего произведения):

1. Линейность
  - $(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2) \wedge V = \alpha_1 (U_1 \wedge V) + \alpha_2 (U_2 \wedge V)$
  - $U \wedge (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) = \alpha_1 (U \wedge V_1) + \alpha_2 (U \wedge V_2)$
2. Ассоциативность
  - $(U \wedge V) \wedge W = U \wedge (V \wedge W)$
3. Антикоммутативность
  - $\forall U \in \Lambda_p : \forall V \in \Lambda_q : U \wedge V = (-1)^{pq} (V \wedge U)$

**Утверждение 15.1.3:** Базисом в пространстве  $\Lambda_p$  является система

$$\{f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

где  $\{f_i\}_{i=1}^n$  – базис в  $E^* = \Lambda_1$ . (Принято брать базис проекторов)

**Определение 15.1.10:**  $p$ -формой (дифференциальной формой валентности (степени)  $p$ ) на множестве  $U \subset E$  называется отображение  $\Omega : U \rightarrow \Lambda_p$ .

В силу линейности пространства  $\Lambda_p$ , нам достаточно задать поведение получаемой формы лишь на базисе, поэтому

$$\forall x \in U : \Omega(x) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_p}(x) f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_p}$$

Таким образом, дифференциальная форма однозначно задаётся набором действительных функций

$$\{\omega_{i_1, \dots, i_p} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$$

**Определение 15.1.11:** Внешнее дифференцирование  $p$ -формы определяется как  $(p+1)$ -форма

$$d\Omega : U \rightarrow \Lambda_{p+1}$$

По правилу

$$\forall x \in U : d\Omega(x) := (p+1) \operatorname{asym}(\Omega'(x))$$

где под производной подразумевается производная по Фреше.

Стоит заметить, что, формально  $\Omega' : U \rightarrow U \rightarrow \Lambda_p$ , однако мы считаем, что  $U \rightarrow \Lambda_p \subset \Omega_{p+1}^0$  (Действительно, линейно по  $p+1$  вектору получаем число).

Также стоит упомянуть, что для любого базиса  $(e_1, \dots, e_n)$  из  $E$  и двойственного к нему базиса  $(e^1, \dots, e^n)$  существует соглашение, что

$$\forall i = \overline{1, n} : e^i = de_i$$

Которое не лишено смысла, ведь  $e_i$  – это 0-форма. А  $e^i$  – это функционал, то есть 1-форма.

**Теорема 15.1.2** (Основные свойства операции внешнего дифференцирования):

1.  $d(\Omega \wedge \Pi) = (d\Omega \wedge \Pi) + (-1)^p(\Omega \wedge d\Pi)$ , где  $\Omega$  –  $p$ -форма, а  $\Pi$  –  $q$ -форма.
2.  $d(d\Omega) = 0$

*Доказательство:*

1. Для простоты считаем, что форма – одночлен, по линейности всё очевидно доказывается для произвольной формы.

Фиксируем базис, в котором

$$\Omega(x) = \omega(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}; \quad \Pi(x) = \pi(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
d(\Omega \wedge \Pi) &= d(\omega(x)\pi(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}) = \\
&= d(\omega(x)\pi(x)) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \\
&= \pi(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} + \\
&+ \omega(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi}{\partial x_i}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} = \\
&= d\Omega \wedge \Pi(x) + (-1)^p (\Omega \wedge d\Pi)
\end{aligned}$$

В последнем переходе мы воспользовались свойством антикоммутативности внешнего произведения для перестановки всех  $dx^{j_1} \dots$  перед всеми  $dx^{i_1} \dots$ , остальное свернули по определению

2. Распишем двойной дифференциал:

$$\begin{aligned}
d(d\Omega) &= d\left(\sum_{j, \forall k: j \neq i_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\right) = \\
&= \sum_{l, l \neq j, \forall k: l \neq i_k} \sum_{j, \forall k: j \neq i_k} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_l \partial x_j} dx^l \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \\
&= \sum_{j, l, j < l, \forall k: j \neq i_k \wedge l \neq i_k} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_l}\right) dx^l \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = 0
\end{aligned}$$

□

## 15.2. Независимость внешнего дифференцирования от замены координат

**Определение 15.2.1:** Пусть

- $\Omega$  – дифференциальная  $p$ -форма в области  $U \subset \mathbb{R}^n$
- $\varphi : V \rightarrow U$  – диффеоморфизм области  $V \subset \mathbb{R}^n$  на  $U$

Тогда  $\varphi^*\Omega$  – дифференциальная  $p$ -форма в области  $V$ , определяемая как

$$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n : (\varphi^*\Omega)(y)(\mathbf{b}) := \Omega(\varphi(y))(\varphi'(y)b_1, \dots, \varphi'(y)b_p)$$

**Утверждение 15.2.1** (Правило подсчёта): Мы можем выразить форму после замены координат через упомянутое выше базисное представление:

$$(\varphi^*\Omega)(y) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_p}(\varphi(y)) d\varphi^{i_1}(y) \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}(y)$$

*Доказательство:* Заметим, что для произвольного вектора  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  верно

$$d\varphi^i(y)(\mathbf{b}) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^l}(y) df^l(\mathbf{b}) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^l}(y) b^l = (\varphi'(y)\mathbf{b})^i = df^i(\varphi'(y)\mathbf{b})$$

Не забывайте, что в качестве  $df^i$  мы берём проекцию на  $i$ -ую координату.

Что и требовалось. □

**Лемма 15.2.1** (Независимость внешнего дифференцирования от замены координат):

$$\varphi^*(d\Omega) = d(\varphi^*\Omega)$$



*Доказательство:* БОО считаем, что  $\Omega$  – это одночлен, для многочленов обобщается очевидно по линейности.

Зафиксируем  $\Omega = \omega(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$

Тогда по свойствам внешнего дифференцирования:

$$d\Omega = d\omega(x) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

Тогда по правилу подсчёта

$$\varphi^*(d\Omega) = d\omega(\varphi(y)) \wedge d\varphi^{i_1}(y) \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}(y)$$

С другой стороны, по определению замены координат

$$\varphi^*(\Omega) = \omega(\varphi(y)) d\varphi^{i_1}(y) \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}(y)$$

Применим оба свойства внешнего дифференцирования (двойной дифференциал нулевой и псевдодистрибутивность):

$$d(\varphi^*\Omega) = d\omega(\varphi(y)) \wedge d\varphi^{i_1}(y) \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_p}(y)$$

□

## 16. Интегрирование дифференциальной формы с компактным носителем. Зависимость интеграла от замены координат.

Из Утверждение 15.1.3 Пространство  $\Lambda_n$  одномерно. Иными словами, если  $(f^1, \dots, f^n)$  – базис  $E^*$ , то

$$\{cf^1 \wedge \dots \wedge f^n \mid c \in \mathbb{R}\} = \Lambda_n$$

Тогда если  $(e_0^1, \dots, e_0^n)$  – ортонормированный базис в  $E^*$  сопряжённый к  $(e_1^0, \dots, e_n^0)$  – ортонормированному базису в  $E$ .

Введём форму **ориентированного объёма**

$$V_{e_0} = e_0^1 \wedge \dots \wedge e_0^n \stackrel{\text{соглашение}}{=} de_1^0 \wedge \dots \wedge de_n^0$$

Возьмём произвольный базис  $(e_1^0, \dots, e_n^0)$  в  $E$ , связанный с исходным матрицей перехода  $T$ :

$$\forall j: e_j = t_j^i e_i^0$$

Рассмотрим действие:

$$V_{e_0}(e_1, \dots, e_n) = de_1^0 \wedge \dots \wedge de_n^0(e_1, \dots, e_n) = \det(de_i^0(e_j))_{i,j=1}^n = \det T$$

Причём  $\forall$  базиса форма ориентированного объёма на нём самом равна 1:

$$V_{e_0} = \det T \cdot V_e$$

В начале определим интеграл от форм из  $\Lambda_n$ .

**Определение 16.1:** Интегралом от формы  $\Omega(x) = \alpha(x)V_{e_0}$  по области  $D \subset E$  называется

$$\int_D \Omega = \int_D \alpha(x) d\mu(x)$$

**Определение 16.2:** Если  $\Omega$  – гладкая  $n - 1$  форма, заданная на замыкании куба  $K \subset \mathbb{R}$ , то

$$\int_{\partial K} \Omega := \int_K d\Omega$$

**Определение 16.3:** Клеткой называется диффеоморфный образ куба

**Определение 16.4:** Для формы  $\Omega$  и диффеоморфизма  $\varphi : U \rightarrow V$ ,  $M \subset U$  – клетки,  $K \subset V$  – куба:

$$\int_M \Omega = \int_K \varphi^* \Omega$$

## 17. Общая формула Стокса

**Определение 17.1:** Границей клетки  $M = \varphi(K)$  называется  
 $\partial M := \varphi(\partial K)$

**Теорема 17.1** (Теорема Стокса для клетки): Если  $\Omega$  – гладкая  $m - 1$  форма, заданная в окрестности  $m$ -мерной клетки, то

$$\int_{\partial M} \Omega = \int_M d\Omega$$

*Доказательство:* Используя Теорему Стокса для куба (aka определение интеграла по формам меньших размерностей) и свойство инвариантности внешнего дифференцирования от замены координат:

$$\int_{\partial M} \Omega = \int_{\partial K} \varphi^* \Omega = \int_K d(\varphi^* \Omega) = \int_K \varphi^*(d\Omega) = \int_M d\Omega$$

□

## 18. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке

В доказательствах некоторых теорем этого конспекта используется интересный трюк: если у нас есть цепочка равенств  $a = b$ , то мы с лёгкостью сможем продолжить её, написав  $a = b = \frac{a+b}{2}$ . Если вы понимаете, что в доказательстве теоремы с интегралами происходит какая-то дичь, то вспоминайте этот трюк!

**Определение 18.1:**

$$L_{2\pi} := \{f \in L_1[-\pi, \pi] \mid f - 2\pi \text{ периодическая}\}$$

**Определение 18.2:** Ядром Дирихле  $D_n(u)$  называется выражение

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{2\sin(\frac{u}{2})}$$

**Определение 18.3:** Пусть  $f \in L_{2\pi}$ , тогда **частичной суммой тригонометрического ряда Фурье** называется

$$S_n(f, x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

где

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) d\mu(t); \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) d\mu(t)$$

**Лемма 18.1** (О представлении частичной суммы): Если  $f \in L_{2\pi}$ , то  $n$ -я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье может быть представлена

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) d\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) d\mu(u)$$

**Теорема 18.1** (Теорема Римана об осцилляции): Если  $f \in L_1(I)$ , где  $I$  – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \cos(\lambda x) d\mu(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I f(x) \sin(\lambda x) d\mu(x) = 0$$

**Теорема 18.2** (Признак Дини): Если  $f \in L_{2\pi}$  и  $\varphi_{x_0} \in L_1(0, \delta)$ ,  $\delta > 0$ , где

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится к  $S(x_0)$

*Доказательство:* Рассмотрим разность  $S_n(f, x_0) - S(x_0)$ , пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f, x_0) - S(x_0) \stackrel{\text{трюк}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x_0+u) + f(x_0-u) - 2S(x_0)) D_n(u) d\mu(u)$$

В данном переходе мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно  $u$
- Интеграл по  $[-\pi, \pi]$  от ядра Дирихле равен  $\pi$
- Если заменить в представлении частичной суммы  $t$  на  $-t$ , то ничего не изменится.

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв в формуле ядра Дирихле

$$\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) = \sin(nt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

А также добавим и вычтем интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2S(x_0)}{t} \sin(nt) d\mu(t)$$

Итак, приступим

$$\begin{aligned}
S_n(f, x_0) - S(x_0) = & \\
& \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) + \\
& \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(nt)}{2} d\mu(t) + \\
& \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\sin(nt) \cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} d\mu(t) + \\
& \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \sin(nt) \left( \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) d\mu(t)
\end{aligned}$$

По условию  $\varphi_{x_0}$  суммируемая, значит по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)$  суммируема как сумма суммируемых и константы, значит по теореме Римана об осцилляции второе слагаемое стремится к нулю.

В третьем слагаемом  $(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} \in L_1[\delta, \pi]$ , так как мы отделились от нуля и по теореме Римана об осцилляции третье слагаемое стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{t^2}{8}}{2(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48})} - \frac{1}{t} = \frac{t - \frac{t^3}{8} - t + \frac{t^3}{24}}{t^2} = 0$$

Значит мы умножили суммируемую функцию  $f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)$  на другую, имеющую устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)) \left( \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{t} \right) \in L_1[0, \delta]$$

И опять применяем теоремы об осцилляции.  $\square$

**Определение 18.4:** Будем говорить, что функция  $f$  удовлетворяет **условию Гёльдера** порядка  $\alpha \in (0, 1]$  в точке  $x_0$ , если существуют конечные односторонние пределы  $f(x_0 \pm 0)$  и константы  $C > 0, \delta > 0$  такие, что

$$\forall t, 0 < t < \delta: |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| \leq Ct^\alpha \wedge |f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)| \leq Ct^\alpha$$

**Теорема 18.3** (Признак Липшица): Если  $f \in L_{2\pi}$  удовлетворяет условию Гёльдера порядка  $\alpha$  в точке  $x_0$ , то тригонометрический ряд Фурье функции  $f(x)$  сходится в точке  $x_0$  к  $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$

*Доказательство:* По условию теоремы, хотим

$$S(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

Значит функция  $\varphi_{x_0}$  из признака Дини будет иметь вид

$$\varphi_{x_0}(t) = \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0) + (f(x_0-t) - f(x_0-0))}{t}$$

То что  $\varphi$  измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) d\mu(t) \right| &\leq \int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) - f(x_0+0)|}{t} d\mu(t) + \int_0^\delta \frac{|f(x_0-t) - f(x_0-0)|}{t} d\mu(t) \leq \\
&2C \int_0^\delta t^{\alpha-1} d\mu(t) = 2C \frac{\delta^\alpha}{\alpha}
\end{aligned}$$

Значит мы можем применить признак Дини и всё доказано.  $\square$

## 19. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье

**Утверждение 19.1:** Анализ доказательства признака Дини (Теорема 18.2) показывает, что критерием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции  $f \in L_{2\pi}$  к  $S(x_0)$  в точке  $x_0$  является равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

**Лемма 19.1:** Пусть  $f \in L_{2\pi}$ ,  $g$  – измеримая,  $2\pi$ -периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции  $\chi(t) = f(x+t)g(t)$  стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $x$ .

**Теорема 19.1** (Признак Жордана): Если  $f \in L_{2\pi}$  и является функцией ограниченной вариации на  $[a, b]$ , то тригонометрический ряд Фурье  $f$  сходится к  $f(x_0)$  в каждой точке  $x_0 \in [a, b]$  непрерывности  $f(x)$  и к  $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$  в каждой точке разрыва  $x_0 \in [a, b]$ .

Если, кроме того,  $f \in C[a, b]$ , то тригонометрический ряд Фурье функции  $f$  сходится к ней равномерно на любом отрезке  $[a', b'] \subset (a, b)$ .

*Доказательство:* Так как  $f$  ограниченной вариации, то она представима в виде  $f = f_1 - f_2$ , где  $f_1, f_2$  – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждения для неубывающих функций.

По (Утверждение 19.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

Раскроем  $\varphi_{x_0}$  и  $S(x_0)$  и будем доказывать лишь для

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \sin(nt) d\mu(t) = 0$$

А для слагаемого с минусами аналогично.

По определению правостороннего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_1, 0 < \delta_1 < \delta : 0 \leq f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как  $f$  монотонна и используем теорему о среднем для него:

$$\exists \delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 : \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \sin(nt) dt =$$

$$(f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0)) \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sin(nt)}{t} dt$$

Но мы знаем, что  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$  сходится, поэтому интеграл с переменным верхним пределом ограничен:

$$\exists C > 0 : \left| \int_0^u \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq C$$

Но теперь рассмотрим:

$$\forall A > 0 : \left| \int_0^A \frac{\sin(nt)}{t} dt \right| \stackrel{nt=:u}{=} \left| \int_0^{nA} \frac{\sin(u)}{u} du \right| \leq C$$

Используя эту оценку, получим, что

$$\left| \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \sin(nt) dt \right| \leq 2\varepsilon C$$

Таким образом, разобьём исходный интеграл от 0 до  $\delta$  на сумму интегралов от 0 до  $\delta_1$  и от  $\delta_1$  до  $\delta$ .

Получим, что предел интеграла действительно равен нулю, применим признак Дини и получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости.

Вспомним, как мы расписывали разность  $S_n(f, x_0) - S(x_0)$  на четыре слагаемых в доказательстве признака Дини (Теорема 18.2).

Применим к каждому из трёх последних слагаемых вспомогательную лемму (Лемма 19.1) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела первого слагаемого (который мы уже рассматривали в текущем доказательстве).

Это сделать несложно, заметим, что если  $f$  непрерывна на  $[a', b']$ , то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы можем найти  $\delta_1$  из текущего доказательства независимо от  $x_0$ .

Также независимо от  $x_0$  мы ограничиваем интеграл от  $\frac{\sin(nx)}{x}$ , поэтому второе утверждение текущей теоремы доказано.  $\square$

## 20. Неревность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

### 20.1. Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции

**Определение 20.1.1:** Преобразование Фурье функции  $f \in L_1(\mathbb{R})$  называется

$$F[f] := \hat{f}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} d\mu(t)$$

**Теорема 20.1.1** (Непрерывность интеграла, зависящего от параметра):

Пусть

- $A \subset \mathbb{R}^n; E \subset \mathbb{R}^m; \alpha_0 \in A$
- Функция  $f(x, \alpha)$  суммируема при всех  $\alpha \in A$ , как функция от  $x \in E$ .
- Функция  $f(x, \alpha)$  при почти всех  $x \in E$  является непрерывной в  $\alpha_0$ .
- При почти всех  $x \in E$  и для всех  $\alpha \in A$  справедлива оценка  $|f(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  некоторая суммируемая на  $E$  функция.

Тогда

$$F(\alpha) = \int_E f(x, \alpha) d\mu(x)$$

является непрерывной в  $\alpha_0$ .

**Теорема 20.1.2** (Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра): Пусть

- $E \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^n$
- $f(x, \alpha)$  вместе с  $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$  суммируема на  $E$  при всех  $\alpha \in U(\alpha_0)$
- При всех  $\alpha \in U(\alpha_0)$ :  $|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$ , где  $\varphi$  суммируема на  $E$

Тогда

$$F'(\alpha_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0) d\mu(x)$$

**Теорема 20.1.3:** Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$ , то  $\hat{f}(\lambda)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  и  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$

*Доказательство:* Распишем комплексную экспоненту в сумму тригонометрических функций и сведём к теореме об осцилляции, утверждение о нулевом пределе доказано.

Почему преобразование Фурье непрерывно? Хотим применить теорему о непрерывности интеграла, зависящего от предела. Для этого оценим подынтегральную функцию:

$$|f(t, \lambda)| = |f(t)e^{-i\lambda t}| \leq |f(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

От  $\lambda$  рассматриваемая функция непрерывна из-за непрерывности экспоненты. Суммируемость следует из той же оценки сверху.

Значит применяем теорему о непрерывности интеграла, зависящего от параметра.  $\square$

## 20.2. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

**Теорема 20.2.1** (Преобразование Фурье производной): Если  $\forall [a, b] \subset \mathbb{R} : f \in L_1([a, b])$  и  $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$ , то

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \hat{f}'(\lambda) = (i\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

*Доказательство:* Перепишем  $f(x)$  через формулу Ньютона-Лейбница:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) d\mu(t), x > 0$$

Устремляя  $x \rightarrow +\infty$  увидим, что правая часть имеет предел, а значит и левая тоже:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow f(+\infty) = 0$$

Аналогично получим, что  $f(-\infty) = 0$ .

Тогда рассмотрим следующее преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(t) e^{-i\lambda t} d\mu(t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-i\lambda t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) (e^{-i\lambda t})'_t d\mu(t) = (i\lambda)\hat{f}(\lambda) \end{aligned}$$

□

**Теорема 20.2.2** (Производная преобразования Фурье): Если  $f(t), tf(t) \in L_1(\mathbb{R})$ , то преобразование Фурье  $\hat{f}(\lambda)$  дифференцируемо, причём

$$(\hat{f})'(\lambda) = -it\widehat{f(t)}(\lambda)$$

*Доказательство:* Нам нужно лишь доказать, что мы имеем право продифференцировать интеграл, зависящий от параметра:

$$(\hat{f})'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) (e^{-i\lambda t})'_\lambda d\mu(t) = -it\widehat{f(t)}(\lambda)$$

Для этого оценим выражение:

$$|f(t)(e^{-i\lambda t})'| = |-itf(t)e^{-i\lambda t}| \leq |tf(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

Значит мы имеем право применить теорему о дифференцировании интеграла с параметром. □

## 21. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Интегральная теорема Коши.

### 21.1. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана

**Замечание 21.1.1:** В ТФКП используются следующие стандартные обозначения  $z$  - комплексная переменная

$$z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}$$

$f(z)$  - исследуемая функция

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) : u, v \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



**Определение 21.1.1:** Функция  $f : B_{r(z_0)} \rightarrow \mathbb{C}$  называется *дифференцируемой* в  $z_0$  если

$$\exists A \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), |z - z_0| \rightarrow 0$$

**Теорема 21.1.1:**  $f : B_{r(z_0)} \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируема тогда и только тогда когда

1.  $u(x, y), v(x, y)$  дифференцируемы в  $(x_0, y_0)$

2. Выполняются условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{При этом } f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{i(\partial v)}{\partial x}(x_0, y_0)$$

*Доказательство:*

( $\Rightarrow$ )

Пусть  $f$  дифференцируема. Тогда  $\Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z) = A\Delta z + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$

Обозначим  $A = a + ib$  и распишем  $\Delta f$  по координатно.

$$\{\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) \Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\}$$

Из того, что  $\alpha(\Delta z) = o(\Delta z)$  следует  $\alpha_1, \alpha_2$  тоже  $o(\Delta x, \Delta y)$

Отсюда по определению  $u, v$  дифференцируемы. Причем  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = b$

( $\Leftarrow$ )

Пусть  $u, v$  дифференцируемы и выполняются УКР, тогда

$$\begin{aligned} \Delta f = \Delta u + i\Delta v &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \end{aligned}$$

Что и означает дифференцируемость. □

## 21.2. Интегральная теорема Коши

**Определение 21.2.1:** Пусть  $\gamma$  - кусочно гладкая кривая в  $D$  - области. Тогда приращением аргумента функции вдоль кривой  $\Delta_\gamma f$  называется  $Im \int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)}$

**Определение 21.2.2:** Пусть  $\gamma$  - кусочно гладкая замкнутая кривая в  $\mathbb{C}$ ,  $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ . Тогда индексом  $a$  относительно  $\gamma$  называется

$$J_\gamma(a) = \frac{\Delta_\gamma(z-a)}{2\pi}$$

**Определение 21.2.3:** Пусть  $\gamma$  - кусочно гладкая кривая лежит в области  $D$ . Тогда говорят что  $\gamma \sim 0 \pmod{D}$  гомологично эквивалентна нулю, если  $\forall a \in \mathbb{C} \setminus D \ J_{\gamma(a)} = 0$

**Определение 21.2.4:** Циклом  $\Gamma$  называется формальная линейная комбинация с целыми коэффициентами кусочно-гладких замкнутых кривых. Все определения и теоремы для кривых тривиально переносятся на циклы.

**Определение 21.2.5:** Пусть  $\gamma$  кусочно гладкая кривая,  $\varphi$  непрерывна на  $\gamma$ . Тогда интегралом Коши называется

$$F_{n(z,\varphi)} = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^n} d\xi$$

**Утверждение 21.2.1:** Свойства интеграла Коши

1.  $F_n$  голоморфна в  $\mathbb{C} \setminus \gamma$
2.  $F_{n'}(z, \varphi) = n F_{n+1}(z, \varphi)$

**Лемма 21.2.1:** *Общая теорема Коши*

Пусть  $D$  - область в  $\mathbb{C}$ ,  $f$  - голоморфна в  $D$  Тогда

$$1. \quad g(\xi, z) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}, \xi \neq z \\ (f'(z)), z=\xi \end{cases}$$

непрерывна в  $D \times D$

2. Для любой кусочно гладкой  $\gamma \in D$

$$h(z) = \int_\gamma g(\xi, z) d\xi$$

голоморфна в  $D$

**Теорема 21.2.1:** *Лиувилля* Пусть  $f$  голоморфная в  $\mathbb{C}$  и  $\exists M, m, R \ \forall z \ |z| > R : |f(z)| < Mz^m$ , тогда  $f$  полином степени  $m$ . В частности, если  $f$  ограничена, то она константа.

**Теорема 21.2.2:** *Интегральная теорема Коши* Пусть  $D$  - область в  $\mathbb{C}$ ,  $f$  - голоморфна в  $D$ . Пусть  $\Gamma$  - цикл в  $D$ , причем  $\Gamma \sim 0 \pmod{D}$ , тогда

1.  $\forall z \in D \setminus \Gamma : J_{\Gamma}(z)f(z)\frac{1}{2\pi i} = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$
2.  $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

*Доказательство:* Пусть  $G = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid J_{\Gamma}(z) = 0\}$  оно открытое. Рассмотрим две функции

1.  $2\pi i \tilde{h}(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$

Она голоморфна в  $G$  как интеграл Коши.

2.  $2\pi i h(z) = \int_{\Gamma} \left( \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z} \right) d\xi$

Она голоморфна в  $D$  по 2 пункту общей теоремы Коши

Заметим, что  $\forall z \in G \cap D : h(z) = \tilde{h}(z)$  так как

$$h(z) - \tilde{h}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{\xi-z} d\xi = J_{\Gamma(z)}f(z) = 0$$

Из того, что  $\Gamma \sim 0 \pmod{D}$  следует  $\mathbb{C} \setminus D \subset G$  Тогда рассмотрим новую функцию:

$$F(z) = \begin{cases} h(z), & z \in D \\ \tilde{h}(z) & \\ z \in \mathbb{C} \setminus D \subset G \end{cases}$$

Она голоморфна в каждой из компонент. А так как на границе  $h$  и  $\tilde{h}$  равны, то голоморфна и в  $\mathbb{C}$ .

Заметим, что

$$|\tilde{h}(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\max_{\Gamma}|f| |d\xi|}{\text{dist}(z, \Gamma)} \xrightarrow{\text{dist}(z, \Gamma) \rightarrow \infty} 0$$

А следовательно по теореме Лиувилля  $F(z) \equiv 0$ .

Следовательно в  $D \setminus \Gamma$   $h(z) = 0$ . То есть

$$\frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\xi}{\xi-z} = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$$

$$f(z)J_{\Gamma(z)} = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$$

(1  $\Rightarrow$  2)

Применим 1 к  $\tilde{f}(z) = (z-a)f(z)$ , где  $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$  (естественно в области определения  $f$ ) Тогда

$$0 = J_{\Gamma(a)}(a-a)f(a) = J_{\Gamma(a)}\tilde{f}(a) = \int_{\Gamma} \frac{\tilde{f}(\xi)d\xi}{\xi-a} = \int_{\Gamma} f(\xi)d\xi$$

□

## 22. Интегральная формула Коши. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора.

### 22.1. Интегральная формула Коши.

Пункт 1 в интегральной теореме Коши (???)

### 22.2. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора.

**Теорема 22.2.1:** Пусть  $f$  - голоморфная в  $D$ ,  $O_{R(a)} \subset D$ , тогда  

$$\forall z \in O_{R(a)} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = f^{(n)}(a) \frac{1}{n!}$$

*Доказательство:* Возьмем  $0 < r < R$ , тогда  $f$  голоморфна в  $\overline{O_{r(a)}}$ . Тогда по теореме Коши  $2\pi i f(z) = \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$ .

Распишем

$$\frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(\xi-a)-(z-a)} = \frac{1}{(\xi-a)} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} \stackrel{(|z-a| < |\xi-a|)}{=} \frac{1}{\xi-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$$

Полученный ряд сходится равномерно, а значит можно почленно интегрировать.

$$2\pi i f(z) = \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi i c_n (z-a)^n$$

Причем по следствию формулы Коши для круга,  $2\pi i \cdot c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Ну раз верно для любого  $r < R$ , то и для  $R$  верно. □

## 23. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана. Изолированные особые точки однозначного характера.

### 23.1. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана.

**Теорема 23.1.1:**

Пусть  $f$  голоморфна в кольце  $K = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$ . Тогда

$$\forall z \in K : f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}$$

где  $\gamma_\rho$  положительно определенная окружность радиуса  $\rho \in (r, R)$  с центром в  $a$ .

*Доказательство:* Для начала покажем независимость коэффициентов от выбора  $\rho$ . Возьмем две окружности радиусов  $\rho$  и  $\rho'$ . Применим для  $\Gamma = \rho - \rho'$  интегральную теорему Коши и получим требуемое.

Рассмотрим  $r < r' < R' < R$ . Тогда  $\forall z \in K'_{r', R'}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = (2\pi i) \left( \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right) =: f_1 + f_2$$

Заметим, что  $f_1 = \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$  голоморфна в  $O_{R'}(a)$ . А значит раскладывается в ряд Тейлора.  $f_1 = \sum_0^{+\infty} c_n (z - a)^n$

Вновь раскладываем  $\frac{1}{z - \xi} = \sum_0^{\infty} \frac{(\xi - a)^n}{(z - a)^{n+1}}$  при  $|\frac{\xi - a}{z - a}| < 1$

Значит

$$f_2(z) = \sum_0^{\infty} (z - a)^{-n-1} \cdot \left( c_{-n-1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} f(\xi) (\xi - a)^n d\xi \right)$$

Итого получили требуемое, не зависящее от  $r', R'$  □

**Определение 23.1.1:** Такое представление голоморфной функции называется *рядом Лорана*

**Лемма 23.1.1:** *Единственность ряда Лорана*

Если  $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z - a)^n$  в кольце  $K$ , то  $f$  голоморфна в этом кольце, причем ряд лорана совпадает с данным. То есть  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - a)^{n+1}}$

*Доказательство:*  $f$  голоморфна как предел сходящегося ряда.

Проверка равенства коэффициентов. Для  $n = -1$

$$\int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\rho} c_n (z - a)^n dz = c_{-1}$$

Для  $n \neq -1$  двигаем ряд так чтобы нужный коэффициент встал на  $-1$ . □

## 23.2. Изолированные особые точки однозначного характера.

Здесь пусть  $f(z)$  функция имеющая изолированную особую точку  $a$ , тогда:

**Определение 23.2.1:**  $a$  - устранимая особенная точка, если  $\exists A \in \mathbb{C} : \lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$

**Определение 23.2.2:**  $a$  - устранимая особенная точка, если  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$

**Определение 23.2.3:**  $a$  - существенная особенная точка, если

$$\nexists \lim_{z \rightarrow a} f(z)$$

**Теорема 23.2.1:**  $a$  - УОТ  $\Leftrightarrow f$  ограничена в какой-то  $\dot{O}_{\delta(a)}$

*Доказательство:*  $(\Rightarrow)$  очевидно из определения предела.

$(\Leftarrow)$  Положим  $M_\rho(f) = \max_{\gamma_\rho} |f|$  Тогда оценим

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \left( |f| \left| d\xi \frac{1}{\rho^{n+1}} \right| \right) \leq \frac{M_{\rho(f)}}{\rho^n}$$

Из ограниченности, можно оценить  $M_\rho$  как константу. А значит при  $n < 0, \rho \rightarrow 0$ :  $|c_n| \rightarrow 0$ . Следовательно  $|c_n|$ . А значит есть только регулярная часть ряда Лорана, а следовательно  $a$  - УОТ.  $\square$

**Теорема 23.2.2:**  $a$  - полюс  $\Leftrightarrow$  существует лишь конечное число ненулевых членов в главной части ряда Лорана.

*Доказательство:*

$(\Leftarrow)$  аккурано посчитаем предел и получим требуемое.  $(\Rightarrow)$  По условию  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0$ . Т.е функция  $\frac{1}{f(z)}$  имеет в  $a$  УОТ.

В силу изолированности  $a$ ,  $\frac{1}{f(z)}$  голоморфна в окрестности  $a$ , причем отлична от 0. А значит из предыдущего доказательства получим разложение в Тейлора.

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m h(z), h(a) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \cdot \frac{1}{h(z)}$$

$\frac{1}{h(z)}$  голоморфная в окрестности  $\Rightarrow$  раскладывается в Тейлора

$\square$

**Теорема 23.2.3:** *Сохотского*

Если  $a$  - СОТ, то  $\forall A \in \mathbb{C} \exists \{z_n\} \rightarrow a, f(z_n) \rightarrow A$

*Доказательство:* Для  $A = \infty$  очевидно. Если не существует, то ограничена  $\Rightarrow$  УОТ.

Если  $A \neq \infty$ , то рассмотрим  $g(z) := \frac{1}{f(z)-A}$ .

Если  $A$  не предельная, то  $f(z) - A$  отделена от нуля, а значит  $g(z)$  ограничена. Следовательно  $a$  - УОТ для  $g$ . Причем  $g(z) \neq 0$  в области определения.

Тогда заметим, что  $f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$ .

Если  $g(a) \neq 0$ , то  $a$  - УОТ для  $f$ .

Иначе полюс. Противоречие.  $\square$

## 24. Вычеты. Вычисление интегралов по замкнутому контуру при помощи вычетов

**Определение 24.1:** Пусть  $f$  голоморфна в  $\dot{O}_{r(a)}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ , то определим вычет как

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz$$

**Лемма 24.1:** Вычеты определены корректно (не зависят от  $\gamma$ )

*Доказательство:* Пусть  $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ ,  $z \in \dot{O}_{r(a)}$ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} (z-a)^n = c_{-1}$$

Не зависит от  $\gamma$   $\square$

**Теорема 24.1:** Коши о вычетах (а.к.а. Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов)

Пусть  $D$  ограничена циклом  $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 - \dots - \gamma_n$ . Пусть  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_N\} \subseteq D$ .  $f$  голоморфна в  $D' \setminus A$  где  $D' \supset D$ . Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum^N \operatorname{res}_{a_i} f$$

*Доказательство:* Окужаем каждую особую точку кругом радиуса  $R$ . Добавляем и вычитаем из  $\Gamma$  эти круги  $(\delta_i)$ . В части с минусами получаем новый цикл  $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \sum \delta_i$ , такой что в нем  $f$  голоморфна.

Проверяем что  $\tilde{\Gamma} \sim 0 \pmod{\tilde{D}}$

- В точках вне  $D$  он так и остался 0.
- В новых точках (внутри  $\delta_i$ )  $1 - 1 = 0$

Следовательно интеграл по  $\tilde{\Gamma}$  равен 0, а оставшая часть это  $\sum \int_{\delta_i} f dz = 2\pi i \sum \operatorname{res}_{a_i} f$ .  $\square$