Содержание

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности ... 3
1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса ... 3
1.2. Критерий Коши ... 4

2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней ... 5
2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке ... 5
2.2. Достижение точных верхних и нижних граней ... 7

3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции ... 8

4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций. ... 8
4.1. Теорема Ролля ... 8
4.2. Теоремы Лагранжа и Коши ... 10

5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа 11
5.1. Остаточный член в форме Лагранжа ... 11
5.2. Остаточный член в форме Пеано ... 12

6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия. ... 12
6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции ... 12
6.2. Достаточные условия локальных экстремумов ... 13
6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости ... 14

7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте ... 15

8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных ... 17

9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением ... 18

10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия. ... 20
10.1. Необходимые условия ... 20
10.2. Достаточные условия ... 21

11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница. ... 22
11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом ... 22
11.2. Формула Ньютона-Лейбница ... 24

12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда. ... 25
12.1. Непрерывность суммы функционального ряда ... 25
12.2. Интегрируемость суммы функционального ряда ... 26
12.3. Дифференцируемость суммы функционального ряда ... 27

13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора. 28
13.1. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда 28
13.2. Ряд Тейлора 30

14. Теорема об ограниченной сходимости для интеграла Лебега 31

15. Дифференциальные формы на открытых подмножествах евклидова пространства, оператор внешнего дифференцирования d и его независимость от криволинейной замены координат 32
15.1. Дифференциальные формы, оператор внешнего дифференцирования . 32
15.2. Независимость внешнего дифференцирования от замены координат 36

16. Интегрирование дифференциальной формы с компактным носителем. Зависимость интеграла от замены координат. 37

17. Общая формула Стокса 37

18. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке 38

19. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье 40

20. Непревность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье. 42
20.1. Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции 42
20.2. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье. 43

21. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Интегральная теорема Коши. 44
21.1. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана 44
21.2. Интегральная теорема Коши 45

22. Интегральная формула Коши. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора. 47
22.1. Интегральная формула Коши. 47
22.2. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора. 47

23. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана. Изолированные особые точки однозначного характера. 48
23.1. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана. 48
23.2. Изолированные особые точки однозначного характера. 49

24. Вычеты. Вычисление интегралов по замкнутому контуру при помощи вычетов 50

ГОС по матану

Disclaymer: доверять этому конспекту или нет выбирайте сами

`Экзамен - это тропа`

Коновалов Сергей Петрович

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши сходимости числовой последовательности

1.1. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Определение 1.1.1: Пусть имеется правило, которое каждому натуральному числу n ставит в соответствие некоторое x_n из множества G. Тогда **последовательностью** называется множество всевозможных упорядоченных пар $(n, x_n), n \in \mathbb{N}$.

Определение 1.1.2: Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если
$$\exists M(m) : x_n \leq M \ (x_n \geq M) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Определение 1.1.3: Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если она ограничена и сверху, и снизу.

Определение 1.1.4: Последовательность называется **строго возрастающей (убывающей)**, если
$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1} \ (x_n > x_{n+1}).$$

Определение 1.1.5: Последовательность $\{y_k\}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{x_n\}$, если
$$\forall k \in \mathbb{N} : \exists n = n_k : y_k = x_{n_k},$$
где последовательность $\{n_k\}$ - строго возрастающая. Эта последовательность обозначается $\left\{x_{n_k}\right\}$.

Определение 1.1.6: Последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}, n \in \mathbb{N}$ называется **последовательностью вложенных отрезков**, если
$$\forall n \in \mathbb{N} : [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}].$$

Теорема 1.1.1 (Принцип Кантора вложенных отрезков): Всякая последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ имеет непустое пересечение, то есть

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

Определение 1.1.7: Число x_0 называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon : |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Теорема 1.1.2 (Больцано-Вейерштрасса): Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство: Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – рассматриваемая ограниченная последовательность, то есть

$$\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : \ a_1 \leq x_n \leq b_1$$

Заметим, что один из отрезков $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ содержит бесконечно много элементов последовательности.

Пусть $[a_2, b_2]$ – тот из отрезков, который содержит бесконечно много элементов.

Продолжая данный трюк счётное количество раз получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Также заметим, что данные отрезки стягиваются:

$$0 < b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^n}$$

Тогда по принципу Кантора:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$$

Осталось построить подпоследовательность, будем брать $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, причём так, чтобы $n_k > n_{k-1}$. Очевидно, $n_1 = 1$. Существование предела также очевидно:

$$0 \leq \left|c - x_{n_k}\right| \leq b_k - a_k = \frac{b_1 - a_1}{2^k} \underset{k \to \infty}{\to} 0$$

□

1.2. Критерий Коши

Определение 1.2.1: Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

Теорема 1.2.1 (Критерий Коши сходимости числовой последовательности): Числовая последовательность сходится $\Leftrightarrow$ она фундаментальна.

Доказательство: $\Rightarrow$ По определению предела:

$$\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ |x_n - l| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Тогда по неравенству треугольника в условиях предела:

$$\left|x_{n+p} - x_n\right| = \left|x_{n+p} - l + l - x_n\right| \leq \left|x_{n+p} - l\right| + |x_n - l| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ Вначале докажем, что из фундаментальности следует ограниченность:

$$\varepsilon \coloneqq 1 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < 1$$

Тогда заметим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} : \min(x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1) \leq x_n \leq \max(x_1, ..., x_N, x_{N+1} + 1)$$

Тогда из ограниченной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по теореме Больцано-Вейерштрасса достанем сходящуюся подпоследовательность:

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \exists l : \forall \varepsilon > 0 : \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) : \ \left|x_{n_k} - l\right| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Также по определению фундаментальности:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$$

Объединим эти два условия и получим требуемое:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_0 = \max\left(N(\varepsilon), n_{K(\varepsilon)+1}\right) : \forall n > N_0 :$$

$$|x_n - l| = \left|x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}} + x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l\right| \leq \left|x_n - x_{n_{K(\varepsilon)+1}}\right| + \left|x_{n_{K(\varepsilon)+1}} - l\right| < \varepsilon$$

$\square$

2. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке, достижение точных верхней и нижней граней

2.1. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке

Определение 2.1.1: Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным сверху (снизу)**, если

$$\exists M(m) \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq M(x \geq m).$$

В таком случае $M(m)$ называется **верхней (нижней) гранью** множества E.

Определение 2.1.2: Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется **ограниченным**, если оно ограниченно и сверху, и снизу.

Определение 2.1.3: Число M называется **точной верхней гранью** множества E и обозначается $\sup E$, если

1. $\forall x \in E : x \leq M$;
2. $\forall M' < M : \exists x \in E : x > M'$.

Определение 2.1.4: Число m называется **точной нижней гранью** множества E и обозначается $\inf E$, если

1. $\forall x \in E : x \geq m;$
2. $\forall m' > m : \exists x \in E : x < m'.$

Теорема 2.1.1 (О существовании точной верхней (нижней) грани): Любое ограниченное сверху (снизу) непустое множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Теорема 2.1.2 (Вейерштрасса): Каждая ограниченная сверху (снизу) неубывающая (невозрастающая) последовательность сходится, причём её предел равен точной верхней (нижней) грани.

Определение 2.1.5: Пусть D и Y – два произвольных множества, и задано некоторое правило f, которое каждому элементу $x \in D$ ставит в соответствие один и только один некоторый элемент $y = f(x)$ из Y. Тогда множество всевозможных пар $(x, f(x)), x \in D$ называется функцией.

Определение 2.1.6: Пусть f - функция, а D_f – ее бласть определения. Тогда c называется **пределом по Коши** функции f в точке $x_0 \in D_f$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f : |x - x_0| < \delta : |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Определение 2.1.7: Последовательность $\{x_n\} \subset D_f$ называется Гейне функции f в точке x_0, если

1. $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in D_f \setminus \{x_0\};$
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$

Определение 2.1.8: Пусть f - функция, а D_f – ее бласть определения. Тогда c называется **пределом по Гейне** функции f в точке $x_0 \in D_f$, если

$$\forall \{x_n\} \text{ – последовательность Гейне } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = c.$$

Теорема 2.1.3: Определения функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Определение 2.1.9: Пусть f определена в некоторой окрестности $U_{\delta_0}(x_0)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Если $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется **непрерывной в точке** x_0.

Определение 2.1.10: f называется **непрерывной на множестве** $X \subset \mathbb{R}$, если

$$\forall x_0 \in X : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X, |x - x_0| < \delta : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.4 (Первая теорема Вейшерштрасса о непрерывной на отрезке функции): Если f непрерывна на $[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$.

Доказательство: От противного, пусть f неограничена сверху. Тогда

$$\sup_{x \in [a,b]} f(x) = +\infty$$

То есть

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a, b] : \ f(x_n) > n$$

Причём $\forall n \in \mathbb{N} : a \leq x_n \leq b$, то есть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \ \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0)$$

Однако из $f(x_n) > n$ следует, что $f(x_0) = \infty$. Противоречие. □

2.2. Достижение точных верхних и нижних граней

Теорема 2.2.1 (Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезке функциях): Если f непрерывна на $[a, b]$, то

$$\exists x', x'' \in [a, b] : \ f(x') = \sup_{x \in [a,b]} f(x); \quad f(x'') = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$$

Доказательство: Пусть $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Тогда по определению супремума

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in [a, b] : \ M - \varepsilon < f(x) \leq M$$

В том числе для $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b] : \forall n \in \mathbb{N} : \ M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса:

$$\exists \left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty} : \ \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0) = M$$

Последнее равенство было получено устремлением $k \to \infty$ в неравенстве $M - \frac{1}{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \leq M$.

Таким образом, M действительно достижим функцией f в точке x_0. Для инфимума аналогично. □

3. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции

Теорема 3.1 (Больцано-Коши о промежуточных значениях): Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда
$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : c := f(x_1) < d := f(x_2) : \ \forall e \in (c, d) : \exists \gamma \in [a, b] : f(\gamma) = e$$

Доказательство: Рассмотрим частный случай $c < e = 0 < d$.

Построим последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, где $[a_1, b_1] = \{x_1, x_2\}$ (мы не знаем в каком порядке идут иксы).

Заметим, что $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.

Рассмотрим $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$. Какие могут быть случаи?

- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, то мы победили и останавливаемся.
- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > 0$, то $a_2 := a_1, b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
- Если $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < 0$, то $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 := b_1$.

Либо после конечного числа шагов мы найдём требуемую точку, либо построим последовательность стягивающихся отрезков:
$$b_n - a_n = \frac{|x_2 - x_1|}{2^{n-1}}$$

Тогда по принципу Кантора $\{\gamma\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причём
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma \in [a, b]$$

Тогда в силу непрерывности f:
$$f(\gamma) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Заметим, что после кажой итерации алгоритма изначальное свойство сохраняется:
$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$$

Совершив предельный переход в неравенстве, получим
$$f^2(\gamma) \le 0$$

Из чего следует $f(\gamma) = 0$.

В общем случае рассматривается вспомогательная функция $F(x) = f(x) - e$. □

4. Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа и Коши для дифференцируемых функций.

4.1. Теорема Ролля

Определение 4.1.1: Пусть f определена в некоторой δ_0 окрестности точки x_0. Если
$$\exists \delta \in (0, \delta_0) : \forall x \in U_{\delta(x_0)} : \ f(x) \le f(x_0)$$

то x_0 – **точка локального максимума**.

Также аналогично вводятся определения локального минимума, а также строгие экстремумы, в которых неравенство строгое.

Определение 4.1.2: Пусть f – функция, D_f – ее область определения, $x_0 \in D_f$. Тогда **производной** f в точке x_0 называется

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Определение 4.1.3: Число A называется **правосторонним пределом** функции f в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 4.1.4: Число A называется **левосторонним пределом** функции f в точке a, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 4.1.5: **Правой производной** функции f в точке x_0 называется

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to +0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Определение 4.1.6: **Левой производной** функции f в точке x_0 называется

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to -0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Теорема 4.1.1: Функция f, определенная в некоторой окрестности точки x_0 имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет обе односторонние производные в этой точке, и эти производные равны.

Определение 4.1.7: Функция f называется **дифференцируемой** в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой точке имеет конечную производную.

Теорема 4.1.2 (Ферма о необходимом условии локального экстремума): Если x_0 – точка локального экстремума функции $y = f(x)$, дифференцируемой в x_0, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство: БОО x_0 – точка локального максимума.

Заметим, что тогда

$$\lim_{\Delta x\to +0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq 0; \quad \lim_{\Delta x\to -0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

А при существовании производной оба этих предела совпадают, поэтому производной в x_0 остаётся лишь быть равной нулю. □

Теорема 4.1.3 (Ролля): Если f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), причём $f(a) = f(b)$, то

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Доказательство: Заметим, что если $f \equiv \text{const}$, то утверждение тривиально.

Иначе, f непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$

$$\exists m < M : \ m = \min_{x\in[a,b]} f(x); \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

Заметим, что либо $m \neq f(a)$, либо $M \neq f(a)$.

Это значит, что существует локальный минимум или максимум в некоторой точке $c \in (a, b)$, а по теореме Ферма мы знаем, что $f'(c) = 0$. □

4.2. Теоремы Лагранжа и Коши

Теорема 4.2.1 (Обобщённая теорема о среднем): Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Доказательство: Рассмотрим

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

Заметим, что h всё ещё непрерывна на отрезке и дифференцируема на интервале, причём

$$h(b) = (f(b) - f(a))g(b) - (g(b) - g(a))f(b) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = h(a)$$

То есть h удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Требуемое доказано. □

Теорема 4.2.2 (Лагранжа о среднем): Если f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : \ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Доказательство: В обобщённой теореме о среднем возьмём $g(x) = x$. □

Теорема 4.2.3 (Коши о среднем): Если f, g непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$, то

$$\exists c \in (a, b) : \ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство: Очевидная интерпретация обобщённой теоремы о среднем.

Необходимо уточнить лишь, почему $g(b) - g(a) \neq 0$, чтобы мы смогли поделить на него.

Если бы $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля $\exists c: \ g'(c) = 0$, что противоречит с условием текущей теоремы. $\square$

5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано или Лагранжа

5.1. Остаточный член в форме Лагранжа

Лемма 5.1.1: Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то $\exists!$ многочлен $P_n(f, x)$ степени $\leq n$ такой, что

$$f(x_0) = P_n(f, x_0); f'(x_0) = P_n'(f, x_0); ...; f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(f, x_0)$$

Этот многочлен имеет вид

$$P_n(f, x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

и называется **многочленом Тейлора** степени n относительно точки x_0.

Доказательство: Проверяется банальной подстановкой. $\square$

Лемма 5.1.2 (Об отношении): Если φ, ψ $(n+1)$ раз дифференцируемы в $U_\delta(x_0)$, причём

$$\forall k = \overline{0, \text{n}}: \ \varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0) = 0$$

но

$$\forall k = \overline{0, \text{n}}: \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0): \ \psi^{(k)}(x) \neq 0$$

то

$$\forall x \in U_\delta(x_0): \exists \xi \in (x_0, x): \ \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$$

Доказательство: Заметим, что φ, ψ удовлетворяют условиям теоремы Коши о среднем. Тогда

$$\exists \xi_1 \in (x_0, x): \ \frac{\varphi(x) - \overbrace{\varphi(x_0)}^{0}}{\psi(x) - \underbrace{\psi(x_0)}_{0}} = \frac{\varphi'(\xi_1)}{\psi'(\xi_1)} = \frac{\varphi'(\xi_1) - \overbrace{\varphi'(x_0)}^{0}}{\psi'(\xi_1) - \underbrace{\psi'(x_0)}_{0}} = \frac{\varphi''(\xi_2)}{\psi''(\xi_2)} = ... = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(\xi_{n+1})}$$

$\square$

Теорема 5.1.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа): Если f $(n+1)$ раз дифференцируема в $U_\delta(x_0), \delta > 0$, то

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0): \exists \xi \in (x_0, x): \ f(x) - P_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Доказательство: Сведём к предыдущей лемме об отношении:

$$\varphi(x) \coloneqq f(x) - P_n(f, x); \quad \psi(x) \coloneqq (x - x_0)^{n+1}$$

Все требуемые свойства проверяются очевидно. $\square$

5.2. Остаточный член в форме Пеано

Определение 5.2.1: Пусть функции $f(x), g(x)$ определены на множестве X. Тогда $f(x)$ есть **о-малое** от $g(x)$ при $x \to x_0$, если существует окрестность $\dot{U}(x_0)$ такая, что

$$\forall x \in \dot{U}(x_0) : f(x) = g(x)\alpha(x),$$

где $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Теорема 5.2.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано): Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x) - P_n(f, x) = o\big((x - x_0)^n\big), x \to x_0$$

где $P_n(f, x)$ – многочлен Тейлора степени n функции f относительно x_0.

Доказательство: По определению, если f n раз дифференцируема в точке, то она $n-1$ раз дифференцируема в окрестности.

Снова используем лемму об отношении, но для случая $n-1$:

$$\varphi(x) := f(x) - P_{n(f,x)}; \quad \psi(x) = (x - x_0)^n$$

Получим, что

$$\exists \xi \in (x_0, x) : \frac{f(x)-P_{n(f,x)}}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n-1)}(\xi)-P_n^{(n-1)}(f,\xi)}{n!(\xi-x_0)}$$

Заметим, что при $x \to x_0 \Rightarrow \xi \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_{n(f,x)}}{(x-x_0)^n} = \lim_{\xi\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(\xi)-P_n^{(n-1)}(f,\xi)}{n!(\xi-x_0)} = \frac{1}{n!}\big(f(x_0) - P_n(f, x_0)\big)^{(n)} = 0$$

□

6. Исследование функций одной переменной при помощи первой и второй производных на монотонность, локальные экстремумы, выпуклость. Необходимые условия, достаточные условия.

6.1. Необходимые и достаточные условия монотонности функции

Теорема 6.1.1 (Предельный переход в неравенстве): Пусть заданы две последовательности $\{x_n\}, \{y_n\}$. Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого $N : \forall n > N : x_n \le y_n$, то $a \le b$.

Теорема 6.1.2: Пусть f дифференцируема на (a, b). Тогда
1. $\forall x \in (a, b) : f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f -$ неубывающая на (a, b)
2. $\forall x \in (a, b) : f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f -$ невозрастающая на (a, b)
3. $\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \Rightarrow f -$ возрастающая на (a, b)
4. $\forall x \in (a, b) : f'(x) < 0 \Rightarrow f -$ убывающая на (a, b)

Доказательство:

1. $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ По теореме Лагранжа:
   $\forall x_1, x_2 : a < x_1 < x_2 < b : \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$
   То есть для произвольных $x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.
   Обратно, пусть $f(x)$ неубывающая. Тогда
   $\forall x_0 \in (a, b) : \forall \Delta x : \text{sign } (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \text{sign } \Delta x$
   Ну и тогда при $|\Delta x| < \min(x_0 - a, b - x_0)$:
   $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$
   Совершим предельный переход в неравенстве и получим требуемое.

2. Аналогично предыдущему пункту

3. Контрпримером для $\Leftarrow$ является $f(x) = x^3$ в точке 0

4. Контрпримером для $\Leftarrow$ является $f(x) = -x^3$ в точке 0

$\square$

6.2. Достаточные условия локальных экстремумов

Теорема 6.2.1 (Первое достаточное условие экстремума функции): Пусть f непрерывна в $U_{\delta_0}(x_0)$ и дифференцируема в $\dot{U}_{\delta_0}(x_0), \delta_0 > 0$:
1. Если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) > 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) < 0$, то x_0 – точка строгого локального максимума f
2. Если $\exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) < 0$ и $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) > 0$, то x_0 – точка строгого локального минимума f

Доказательство: По сути просто заменили в определении локального экстремума монотонность на достаточное условие знакопостоянности производной из предыдущей теоремы. $\square$

Теорема 6.2.2 (Второе достаточное условие локального экстремума): Если f n раз дифференцируема в точке x_0, $f^{(k)}(x_0) \neq 0, \forall k = \overline{1, \text{n-1}} : f^{(n)}(x_0) = 0$, то

1. Если n чётно, то f имеет в точке x_0 локальный минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$ и локальный максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$.
2. Если n нечётное, то f не имеет локального экстремума в точке x_0.

Доказательство:

1. Воспользуемся разложением в Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (учитывая факт нулевых производных):
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big), x \to x_0$$
Так как n чётно, то $n = 2m$:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^{2m}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1), x \to x_0$$
Левая часть в некоторой окрестности точки x_0 имеет тот же знак, что и правая. Тогда в силу чётной степени в знаменателе левой части получаем, что разность $f(x) - f(x_0)$ одного знака с n-ой производной.
2. Рассмотрим $f(x) = x^3$.

□

6.3. Необходимые и достаточные условия выпуклости

Определение 6.3.1: f называется **выпуклой (вниз) (вогнутой вверх)** на (a, b), если её график лежит не выше хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b).

f называется **выпуклой (вверх) (вогнутой вниз)** на (a, b), если её график лежит не ниже хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b).

Определение 6.3.2: Для числовой функции выпуклость вверх (вниз) можно определить как выполнение неравенства Йенсена:
$$\forall x, y : \forall t \in [0, 1] : f(tx + (1 - t)y) \geq (\leq) tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Теорема 6.3.1: Пусть f дважды дифференцируема на (a, b):

1. f выпукла вниз на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \geq 0$.
2. f выпукла вверх на $(a, b) \Leftrightarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) \leq 0$
3. f строго выпукла вниз на $(a, b) \Leftarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) > 0$.
4. f строго выпукла вверх на $(a, b) \Leftarrow \forall x \in (a, b) : f''(x) < 0$

Доказательство:

1. $\Leftarrow$ Рассмотрим эквивалентное определение выпуклости:

$$\forall x_0, x_1 : a < x_0 < x_1 < b : \forall t \in [0,1] :$$
$$x_t := tx_0 + (1-t)x_1 : \; f(x_t) \le tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

Разложим f в формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа с центром в точке x_t:
$$\exists \xi_1 \in (x_0, x_t) : f(x_0) = f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t) + \tfrac{f''(\xi_1)}{2!}(x_0 - x_t)^2$$
$$\exists \xi_2 \in (x_1, x_t) : f(x_1) = f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t) + \tfrac{f''(\xi_2)}{2!}(x_1 - x_t)^2$$

Из-за знакопостоянности второй производной из этих равенств следуют следующие неравенства:
$$f(x_0) \ge f(x_t) + f'(x_t)(x_0 - x_t)$$
$$f(x_1) \ge f(x_t) + f'(x_t)(x_1 - x_t)$$

Умножим первое на t, второе на $1-t$ и сложим их:
$$tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \ge f(x_t) + \underbrace{f'(x_t)(tx_0 + (1-t)x_1 - x_t)}_{0}$$

$\Rightarrow$ Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in (a,b)$ и достаточно малую окрестность $\delta := \min(x_0 - a, b - x_0)$. Тогда
$$\forall u \in (-\delta, \delta) : x_0 = \tfrac{1}{2}(x_0 - u) + \tfrac{1}{2}(x_0 + u) : \; f(x_0) \le \tfrac{1}{2}f(x_0 - u) + \tfrac{1}{2}f(x_0 + u)$$

Применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:
$$f(x_0 \pm u) = f(x_0) \pm f'(x_0)u + \tfrac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \to 0$$

В прошлой строчке мы записали сразу два равенства благодаря $\pm$, давайте умножим каждое на $\frac{1}{2}$ и сложим их:
$$\tfrac{1}{2}f(x_0 - u) + \tfrac{1}{2}f(x_0 + u) = f(x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2}u^2 + o(u^2), u \to 0$$

Тогда при достаточно малых u $\frac{f''(x_0)}{2}u^2$ обязано будет стать такого же знака, как и $\frac{1}{2}f(x_0 - u) + \frac{1}{2}f(x_0 + u) - f(x_0) \ge 0$

2. Аналогично
3. $\Leftarrow$ аналогично только со строгими неравенствами, а $\Rightarrow$ вообще говоря не верно, например, для $f(x) = x^4$
4. $\Leftarrow$ аналогично только со строгими неравенствами, а $\Rightarrow$ вообще говоря не верно, например, для $f(x) = -x^4$

$\square$

7. Теорема о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте

Определение 7.1: **Компактным** множеством в метрическом пространстве X называется такое множество K, что из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 7.2: Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется **ограниченным**, если:
$$\exists r \ge 0 : \forall M \in E : |OM| \le r,$$
где $O = (0, 0, ..., 0)$.

Определение 7.3: Точка $x_0 \in E$ называется **изолированной**, если:
$$\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap E = \{x_0\}.$$

Определение 7.4: Точка $x_0 \in E$ называется **внутренней**, если:
$$\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subset= E.$$

Определение 7.5: Точка $x_0 \in E$ называется точкой **прикосновения**, если:
$$\forall \delta > 0 : U_\delta(x_0) \cap E \neq \emptyset.$$

Определение 7.6: Множество всез точек прикосновения E называется замыканием этого множества $\overline{E}$.

Определение 7.7: Множество E называется замкнутым, если $E = \overline{E}$.

Определение 7.8: Множество всез внутренних точек E называется внутренностью этого множества $\operatorname{int} E$.

Определение 7.9: Множество E называется открытым, если $E = \operatorname{int} E$.

Теорема 7.1: Дополнение замкнутого множества – открытое множество, и наоборот.

Теорема 7.2: В $\mathbb{R}^n$ верно следующее утверждение:
$$\text{множество } E \text{ - компактное} \Leftrightarrow \begin{cases} E- \text{ огр;} \\ E- \text{ замкнутое.} \end{cases}$$

Теорема 7.3: Множество E является компактным в $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset E :$ $\exists \left\{x_{n_k}\right\} : \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in E$

Определение 7.10: Функция $f : X \to \mathbb{R}$, где X – метрическое пространство, называется равномерно непрерывной на множестве $X' \subset X$, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X' : \rho(x_1, x_2) < \delta : \ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Теорема 7.4 (Кантора о равномерной непрерывности): Если $f : K \to \mathbb{R}$ непрерывна на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на K.

Доказательство: От противного, выпишем отрицание равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_1, x_2 \in K : \|x_1 - x_2\| < \delta : \ |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$$

Выбирая $\delta \coloneqq 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{m}, ...$ построим последовательность пар из отрицания непрерывности: $\left\{\left(x_{1,m}, x_{2,m}\right)\right\}_{m=1}^{\infty} \subset K^2$.

Причём

$$\forall m \in \mathbb{N} : \left\|x_{1,m} - x_{2,m}\right\| < \tfrac{1}{m} : \left|f\left(x_{1,m}\right) - f\left(x_{2,m}\right)\right| \geq \varepsilon$$

По одному из определений компактности выделим из последовательности пар подпоследовательность, у которой сходятся первые координаты:

$$\exists \left\{\left(x_{1,m_k}, x_{2,m_k}\right)\right\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} x_{1,m_k} = x_0 \in K$$

Причём заметим, что (комбинируем то, как мы строили последовательность пар и сходимости первых координат подпоследовательности):

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : \forall k > 0 : \left\|x_{2,m_k} - x_0\right\| \leq$$

$$\left\|x_{1,m_k} - x_0\right\| + \left\|x_{1,m_k} - x_{2,m_k}\right\| < 2\varepsilon$$

То есть

$$\lim_{k\to\infty} x_{1,m_k} = \lim_{k\to\infty} x_{2,m_k} = x_0 \overset{\text{непрерывность } f}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(f\left(x_{1,m_k}\right) - f\left(x_{2,m_k}\right)\right) = 0$$

Противоречие! □

8. Достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных

Определение 8.1: Пусть f определена в некоторой окрестности $x_0 \in \mathbb{R}^n$. **Полным приращением** f в точке x_0 называется

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f\left(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n} + \Delta x_n\right) - f\left(x_{0,1}, ..., x_{0,n}\right)$$

f называется **дифференцируемой** в x_0, если

$$\Delta f(x_0) = (A, \Delta x) + o(\|\Delta x\|), \Delta x \to 0$$

где $A \in \mathbb{R}^n$ называется **градиентом**: $\operatorname{grad} f(x_0) = A$

Определение 8.2: **Дифференциалом** дифференцируемой в x_0 функции f назовём выражение $(A, \Delta x)$ из определения дифференцируемости.

Определение 8.3: **Частной производной** в точке x_0 называется предел (если он существует):

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_{0,1}, ..., x_{0,j} + \Delta x, ..., x_{0,n}) - f(x_{0,1}, ..., x_{0,j}, ..., x_{0,n})}{\Delta x}$$

Теорема 8.1 (Необходимое условие дифференцируемости): Если f дифференцируема в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то существуют частные производные $\forall j = \overline{1,\text{n}}$, причём

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

Доказательство: Сразу следует из определения - есть предел по всем многомерным приращениям, а значит и по однокоординатным в том числе. □

Теорема 8.2 (Достаточное условие дифференцируемости): Если f определена в некоторой окрестности точки x_0, вместе со своими частными производными, причём они непрерывны в x_0, то f дифференцируема в x_0.

Доказательство: Воспользуемся n раз «умным нулём», каждый из которых будет снимать приращение по одной из координат:

$$\Delta f(x_0) =$$

$$f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n} + \Delta x_n\big) - f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}\big) +$$

$$f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, x_{0,n}\big) - f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1}, x_{0,n}\big)$$

$$+ ... +$$

$$f\big(x_{0,1} + \Delta x_1, x_{0,2}, ..., x_{0,n}\big) - f\big(x_{0,1}, ..., x_{0,n}\big) =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-1} + \Delta x_{n-1}, \xi_n\big)\Delta x_n +$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}\big(x_{0,1} + \Delta x_1, ..., x_{0,n-2} + \Delta x_{n-2}, \xi_{n-1}, x_{0,n}\big)\Delta x_{n-1}$$

$$+ ... +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\xi_1, x_{0,2}, ..., x_{0,n}\big)\Delta x_1 =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\Delta x_i + o(\|\Delta x\|), \Delta x \to 0$$

□

9. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением

Определение 9.1: **Кубом** радиуса δ вокруг точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ назовём

$$K_{\delta,\boldsymbol{x_0}} = \bigtimes_{k=1}^n \left(x_0^k - \delta, x_0^k + \delta\right)$$

где под $\times$ подразумевается декартово произведение.

Теорема 9.1: Пусть $F(\boldsymbol{x}, y) = F(x_1, ..., x_n, y)$ дифференцируема в окрестности точки $(\boldsymbol{x_0}, y_0) = \left(x_0^1, ..., x_0^n, y_0\right)$.

Её производная $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в этой окрестности, причём $F(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$:

$$\forall x \in K_{\delta,x_0} : \exists! y = \varphi(x) : \forall (x, y) \in K_{\delta,x_0} \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) :$$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x) \wedge \exists \varphi'(x_0)$$

Доказательство: БОО будем считать, что $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$.

По непрерывности частной производной, $\exists$ окрестность точки (x_0, y_0), в которой $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$.

Тогда из непрерывности F по y и знакоопределённости производной следует

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) : \; F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Расширяем территорию дальше, из непрерывности F по x следут

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in K_{\delta,x_0} : F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \wedge F(x, y_0 - \varepsilon) < 0$$

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции берём существование, а из знакоопределённости производной единственность:

$$\exists! \varphi(x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) : F(x, \varphi(x)) = 0$$

Заметим, что φ непрерывна по построению в (x_0, y_0): мы брали x из 2δ окрестности точки x_0, а значение лежало в 2ε окрестности точки y_0.

Теперь докажем дифференцируемость φ, для этого распишем дифференцируемость F:

$$F(x, y) - \underbrace{F(x_0, y_0)}_{0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) \cdot \left(x_k - x_0^k\right) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) +$$

$$\alpha(x, y)$$

где $\alpha = o(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|), (x, y) \to (x_0, y_0)$.

Воспользуемся умножением на «умную единицу»:

$$\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(x,y) \cdot \left(x_i - x_0^i\right)^2}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2^2} + \frac{\alpha(x,y) \cdot (y - y_0)^2}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2^2}$$

Введём новые обозначения:

$$\alpha_i(x, y) := \frac{\alpha(x,y) \cdot \left(x_i - x_0^i\right)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2^2}; \quad \beta(x, y) := \frac{\alpha(x,y) \cdot (y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2^2}$$

Тогда

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, y_0) + \alpha_k(x, y)\right)\left(x_k - x_0^k\right) +$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \beta(x, y)\right)(y - y_0)$$

Подставляя $y = \varphi(x)$ в выражение выше, будем использовать новые обозначения:

$$\tilde{\alpha}_k(x) := \alpha_k(x, \varphi(x)); \quad \tilde{\beta}(x) := \beta(x, \varphi(x))$$

Таким образом,

$$\underbrace{F(x,\varphi(x))}_{0} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x)\Big)(x_k - x_0^k) +$$

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x)\Big)(\varphi(x) - \varphi(x_0))$$

Выразим приращение φ:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0))} + \gamma_k(x)\right)(x_k - x_0^k)$$

где

$$\gamma_k(x) \coloneqq -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0))} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0,\varphi(x_0)) + \tilde{\alpha}_k(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0)) + \tilde{\beta}(x)}$$

Остаётся заметить, что $\tilde{\alpha}_k(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0; \tilde{\beta}(x) \underset{x\to x_0}{\to} 0$, а это значит, что

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \sum_{k=1}^{n} A_k(x_k - x_0^k) + \gamma(x); \quad \gamma(x) = o(\|x - x_0\|), x \to x_0$$

Что и является требуемой дифференцируемостью φ в x_0. □

10. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия, достаточные условия.

10.1. Необходимые условия

Определение 10.1.1: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \ f(x) \le f(x_0)$$

Определение 10.1.2: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \ f(x) \ge f(x_0)$$

Определение 10.1.3: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **строгого локального максимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \ f(x) < f(x_0)$$

Определение 10.1.4: Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой **строгого локального минимума** функции $f(x)$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : \ f(x) > f(x_0)$$

Теорема 10.1.1 (Необходимые условия локального экстремума): Если x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$, дифференцируемой в окрестности точки x_0, то $\mathrm{d}f(x) \equiv 0$.

Доказательство: Рассмотрим для каждого $k = \overline{1,\text{n}}$:

$$\psi(x_k) = f\left(x_0^1, ..., x_0^{k-1}, x_k, x_0^{k+1}, ..., x_0^n\right), \quad \text{где } x_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$$

Тогда заметим, что ψ дифференцируема в окрестности x_0^k, применяя теорему о необходимом условии экстремума функции одного переменного, получим

$$\psi'\left(x_0^k\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0$$

В силу произвольности k и того, что дифференциал – это вектор частных производных, получим требуемое. □

10.2. Достаточные условия

Определение 10.2.1: Если f дифференцируема в окрестности точки x_0 и $\mathrm{d}f(x_0) \equiv 0$, то x_0 называется **стационарной точкой** функции f.

Теорема 10.2.1 (Достаточные условия локального экстремума): Если x_0 – стационарная точка функции f, дважды дифференцируемой в точке x_0, то
1. Если $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ – положительно определённая квадратичная форма, то x_0 – точка строгого локального минимума функции f
2. Если $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ – отрицательно определённая квадратичная форма, то x_0 – точка строгого локального максимума функции f
3. Если $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ – неопределённая квадратичная форма, то x_0 не является точкой локального экстремума

Доказательство:
1. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:
$$f(x) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0) + \tfrac{1}{2}d^2 f(x_0) + o(\rho^2), \rho \to 0$$
где
$$\mathrm{d}x_k = x_k - x_0^k, k = \overline{1,\text{n}}; \quad \rho = \sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^n \left(x_k - x_0^k\right)^2} = \|\mathrm{d}x\|_2$$
Тогда (в условиях $\mathrm{d}f(x_0) \equiv 0$ и $\xi_k := \frac{\mathrm{d}x_k}{\|\mathrm{d}x\|}$) :
$$f(x) - f(x_0) = \tfrac{1}{2}d^2 f(x_0) + o(\rho^2) =$$
$$\tfrac{1}{2}\rho^2 \left(\underbrace{\textstyle\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\xi_i\xi_j}_{F(\xi_1, ..., \xi_n)} + o(1), \right) \rho \to 0$$
В следствие нормировки, очевидно, $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 = 1$.
Таким образом, минимум введённого функционала F на сфере (компактной в $\mathbb{R}^n$) будет достигаться:
$$\min_{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2 = 1} F(\xi_1, ..., \xi_n) =: C > 0$$
Таким образом, для достаточно маленьких ρ:
$$f(x) - f(x_0) \geq \tfrac{C}{4}\rho^2 > 0$$
2. Аналогично
3. Вводим $F(\xi_1, ..., \xi_n)$ аналогично предыдущим пунктам, из-за того что $\mathrm{d}^2 f$ – неопределённая, то

$$\exists \xi_1(x_1), \xi_2(x_2) : \; F(\xi_1^1, ..., \xi_1^n) > 0 \land F(\xi_2^1, ..., \xi_2^n) < 0$$

Тогда при достаточно малых ρ:

$$\text{sign } (f(x_1) - f(x_0)) = \text{sign } F(\xi_1) > 0; \text{sign } (f(x_2) - f(x_0)) = \text{sign } F(\xi_2) < 0$$

Что и требовалось.

□

11. Свойства интеграла с переменным верхним пределом (непрерывность, дифференцируемость). Формула Ньютона-Лейбница.

11.1. Свойства интеграла с переменным верхним пределом

Определение 11.1.1: **Разбиением** P отрезка $[a, b]$ называется конечное множество точек отрезка $[a, b]$:

$$P : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b; \quad \Delta x_k := x_k - x_{k-1}; k = \overline{1, \text{n}}$$

Определение 11.1.2: **Диаметром разбиения** P называется

$$\Delta(P) = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

Определение 11.1.3: **Верхней суммой Дарбу** разбиения P функции f называется

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

Определение 11.1.4: **Нижней суммой Дарбу** разбиения P функции f называется

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \cdot \Delta x_k$$

Определение 11.1.5: Функция f называется **интегрируемой по Риману** на $[a, b]$ ($f \in \mathcal{R}[a, b]$), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists P : \; U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

Определение 11.1.6: **Интегралом Римана** интегрируемой по Риману на $[a, b]$ функции f называется

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \inf_P U(P, f) = \sup_P L(P, f)$$

Теорема 11.1.1 (Основные свойства интеграла Римана):
1. (Линейность) Если $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$, то $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$, причём
$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x)\,\mathrm{d}x = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(x)\,\mathrm{d}x$$
Кроме того, $\forall c \in \mathbb{R}$ выполняется, что $cf_1 \in \mathcal{R}[a,b]$, причём
$$\int_a^b cf_1(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$$
2. (Монотонность) Если $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\forall x \in [a,b] :\ f_1(x) \le f_2(x)$, то
$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$$
3. (Аддитивность):
$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow \forall c \in (a,b) :\ f \in \mathcal{R}[a,c] \land f \in \mathcal{R}[c,b]$$
Причём $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
4. (Оценка) Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\forall x \in [a,b] :\ |f(x)| \le M$, то
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le M(b-a)$$

Теорема 11.1.2 (Критерий Лебега): Функция интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, тогда и только тогда, когда на этом отрезке она ограничена, и множество точек, где она разрывна, имеет нулевую меру Лебега.

Теорема 11.1.3 (Достаточные условия интегрируемтости по Риману):
1. Непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем;
2. Ограниченная на отрезке функция, разрывная в конечном числе его точек, интегрируема на этом отрезке;
3. Монотонная на отрезке функция, интегрируема на нем;
4. Произведение интегрируемой функции на число интегрируемо;
5. Сумма интегрируемых функций интегрируема;
6. Произведение интегрируемых функций интегрируемо;
7. Если отношение двух интегрируемых функций ограничено, то оно интегрируемо. Частный случай – если множество значений знаменателя не имеет 0 предельной точкой;
8. Модуль интегрируемой функции интегрируем.;

Определение 11.1.7: Пусть $\forall b' \in (a,b) :\ f \in \mathcal{R}[a,b']$. Тогда $F(b') = \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x$ называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

Будем считать, что $F(a) = 0$, а для $\alpha > \beta$:
$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\beta^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x$$

Теорема 11.1.4 (Основные свойства интеграла с переменным верхним пределом): Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то интеграл с перменным верхним пределом $F(x)$ непрерывен на $[a, b]$.

Если, кроме того, f непрерывна в $x_0 \in [a, b]$, то $F(x)$ дифференцируема в x_0, причём $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство: Непрерывность следует из комбинирования свойств аддитивности и оценки:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \wedge x_2 - x_1 < \frac{\varepsilon}{M} : \ |F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq$$

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leq M(x_2 - x_1) < \varepsilon$$

В условиях непрерывности f, докажем, что производная интеграла действительно равна $f(x_0)$:

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \leq \sup_{t \in [x_0, x]} |f(t) - f(x_0)|$$

Благодаря непрерывности f мы знаем, что при $x \to x_0$ сможем оценить итоговый супремум сверху ε. □

11.2. Формула Ньютона-Лейбница

Определение 11.2.1: **Первообразной** функции f на $[a, b]$ называется такая дифференцируемая на $[a, b]$ функция F, что

$$\forall t \in [a, b] : \ F'(t) = f(t)$$

Определение 11.2.2: **Интегральной суммой** $S\Big(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n\Big)$ называется

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i$$

где $P : a = x_0 < \ldots < x_n = b, \forall i = \overline{1, \mathrm{n}} : t_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Теорема 11.2.1 (Интеграл как предел интегральных сумм):

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow \exists \lim_{\Delta(P) \to 0} S\Big(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n\Big)$$

При этом $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta(P) \to 0} S\Big(P, f, \{t_i\}_{i=1}^n\Big)$

Теорема 11.2.2 (Основная теорема интегрального исчисления): Если $f \in \mathcal{R}[a, b]$ имеет первообразную F на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Доказательство: Для любого разбиения P:

$$F(b) - F(a) \overset{\text{телескопическая сумма}}{=} \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) \overset{\text{теорема Лагранжа}}{=}$$
$$\sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Устремляя $\Delta(P) \to 0$ получим, что $F(b) - F(a)$ равно требуемому интегралу по эквивалентному определению. $\square$

12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость суммы функционального ряда.

12.1. Непрерывность суммы функционального ряда

Определение 12.1.1: Функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится равномерно** на E к функции $f(x)$ ($f_n \rightrightarrows f$), если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall x \in E : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Определение 12.1.2: Функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится поточечно** на E к функции $f(x)$, если

$$\forall x \in E : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Теорема 12.1.1 (Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности):

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \ \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$$

Определение 12.1.3: Фукнциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на E, если равномерно сходится на E функциональная последовательность $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

Теорема 12.1.2 (Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов):

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ равномерно сходится на } E \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \ \left|\sum_{k=n}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

Теорема 12.1.3 (Предельный переход в равномерно сходящихся последовательностях): Если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к f на множестве E метрического пространства, x_0 – предельная точка E, причём

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \to x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0, x \in E} f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n$$

То есть оба предела существуют и равны.

Доказательство: Воспользуемся критерием Коши равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in E : \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$$

Совершим предельный переход $x \to x_0$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \left|a_{n+p} - a_n\right| \le \varepsilon$$

То есть числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет какой-то предел a, теперь нужно установить, что он равен пределу предельной функции:

$$|f(x) - a| = |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - a|$$

Стоит упомянуть про кванторы:

- Берём номер N больший N_1 для равномерного предела функций и N_2 для числового предела $a_n \underset{n \to \infty}{\to} a$
- δ-окрестность x_0 меньшую требуемой для фиксированного $f_N(x) \underset{x \to x_0}{\to} a_N$

□

Следствие 12.1.3.1: Если $f_n(x)$ непрерывна на E, $f_n \rightrightarrows f$ на E, то f непрерывна на E.

Теорема 12.1.4 (Предельный переход в функциональных рядах): Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E, x_0 – предельная точка E, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\lim_{x \to x_0, x \in E} f_n(x) = a_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x \to x_0, x \in E} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Доказательство: Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм. □

12.2. Интегрируемость суммы функционального ряда

Теорема 12.2.1 (Интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности): Если $\forall n \in \mathbb{N}$: f_n интегрируема по Риману на $[a, b]$ и $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$, то f интегрируема по Риману на $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Доказательство: Воспользуемся тем, что каждый элемент функциональной последовательности интегрируем:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0 : \exists P : \ U(P, f_n) - L(P, f_n) < \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Далее определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in [a, b] : \ |f_n(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

Итак, оценим верхнюю сумму Дарбу предела:

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Delta x_k \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f_n(x) + \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)} \right) \Delta x_k = U(P, f_n) + \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Аналогично для нижней:

$$L(P, f) \geq L(P, f_n) - \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Таким образом,

$$U(P, f) - L(P, f) \leq U(P, f_n) - L(P, f_n) + \tfrac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Мы доказали интегрируемость f, осталось доказать, что интеграл равен тому, что надо:

$$\left| \int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x - \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \leq \tfrac{\varepsilon}{3(b-a)} \cdot (b - a) < \varepsilon$$

□

Теорема 12.2.2 (Интегрирование функциональных рядов): Если $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) \, \mathrm{d}x$$

Доказательство: Доказывается очевидно применением предыдущей теоремы для последовательности частичных сумм. □

12.3. Дифференцируемость суммы функционального ряда

Теорема 12.3.1 (Дифференцирование функциональных последовательностей): Если

1. f_n дифференцируемы на (a, b)
2. $f'_n \rightrightarrows$ на (a, b)
3. $\exists x_0 \in (a, b) : \ f_n(x_0) \underset{n \to \infty}{\to}$

То

1. $f_n \rightrightarrows f$ на (a, b)
2. f дифференцируема на (a, b)
3. $f'_n \to f'$ на (a, b)

Доказательство: Используем равномерную сходимость производных:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \forall x \in (a, b) : \ \left| f'_{n+p}(x) - f'_n(x) \right| < \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

А также сходимость самих функций в точке x_0:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \forall p \in \mathbb{N} : \ \left| f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0) \right| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

Применим теорему Лагранжа для непрерывных f_n между произвольной точкой x и фиксированной x_0:

$$\exists \xi \in \{x, x_0\} : \ \left|\left(f_{n+p}(x) - f_n(x)\right) - \left(f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right)\right| = \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right||x - x_0|$$

Тогда мы можем доказать фундаментальность самой последовательнсоти:

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \le \left|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right| + \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right||x - x_0| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - x_0| < \varepsilon$$

Значит по критерию Коши $f_n \rightrightarrows f$ на (a, b).

Остаётся доказать дифференцируемость f в произвольной точке $x \in (a, b)$, для этого введём вспомогательные функции:

$$\varphi_n(t) := \tfrac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}; \quad \varphi(t) := \tfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

Докажем фундаментальность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\left|\varphi_{n+p}(t) - \varphi_n(t)\right| = \tfrac{\left|\left(f_{n+p}(t) - f_n(t)\right) - \left(f_{n+p}(x) - f_n(x)\right)\right|}{t - x} \overset{\text{теорема Лагранжа}}{=} \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right| < \tfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Получили, что $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на $A := (a, b) \setminus \{x\}$.

Заметим, что x – предельная точка A, тогда применим теорему о непрерывном поточечном пределе:

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{t\to x, t\in A} \varphi_n(t) = \lim_{t\to x, t\in A} \varphi(t) = f'(x)$$

Заметим, что этими равенствами мы доказываем как существование, так и равенство пределов. □

13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Ряд Тейлора.

13.1. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда

Определение 13.1.1: Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ называется **степенным рядом** с центром в точке z_0 и коэффициентами $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Определение 13.1.2: **Радиусом сходимости** степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ называется

$$R = \tfrac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}; \quad 0 \le R \le +\infty$$

Теорема 13.1.1 (Коши-Адамара): Если $R \in [0, +\infty]$ – радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, то
1. $\forall z, |z - z_0| < R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится, притом абсолютно
2. $\forall z, |z - z_0| > R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ расходится

Доказательство:
1. Пусть $|z - z_0| =: r < R$.

   Возьмём произвольный $\rho \in (r, R) \Rightarrow \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$. По определению верхнего предела:
   $$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{\rho}$$
   Тогда:
   $$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \ \left|c_n (z - z_0)^n\right| \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n; \quad \frac{r}{\rho} < 1$$
   По теореме Вейерштрасса мы можем ограничить рассматриваемый ряд сходящимя числовым (геометрическая прогрессия) и всё доказано.
2. Пусть $|z - z_0| > R$, то есть $\frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{R}$. Значит по плотности действительных чисел:
   $$\exists \varepsilon > 0 : \ \frac{1}{|z-z_0|} \leq \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow |z - z_0| \geq \frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}$$
   По определению верхнего предела:
   $$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \forall k \in \mathbb{N} : \ \sqrt[n_k]{\left|a_{n_k}\right|} > \frac{1}{R} - \varepsilon \Rightarrow$$
   $$\left|a_{n_k} z^{n_k}\right| \geq \left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)^{n_k} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{R} - \varepsilon}\right)^{n_k} \geq 1$$
   Получили, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

□

Теорема 13.1.2 (Равномерная сходимость степенного ряда): Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$, то он сходится равномерно в любом круге $|z - z_0| \leq R$, где $0 < r < R$

Доказательство: $|z - z_0| = r < R \Rightarrow$ по теореме Коши-Адамара $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится абсолютно, то есть $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$

Тогда для любого z из рассматриваемого круга справедлива оценка
$$\left|c_n (z - z_0)^n\right| \leq |c_n| r^n$$
А значит по теореме Вейерштрасса имеется равномерная сходимость. □

Теорема 13.1.3 (Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов): Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где $|x - x_0| < R, R > 0$. Тогда

1. $f(x)$ бесконечно дифференцируема $\forall x, |x - x_0| < R$, причём
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)...(n-k+1)(x - x_0)^{n-k}$$
2. $f(x)$ интегрируема по Риману $\forall x, |x - x_0| < R$ на отрезке с концами x_0, x, причём
$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$
3. Все степенные ряды, упомянутые в пунктах 1, 2 имеют радиус сходимости R.
4. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} :\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Доказательство: Если мы возьмём $x : |x - x_0| = r < R$, то на отрезке $[x_0, x]$ ряд для $f(x)$ сходится равеномерно, а значит мы можем его почленно интегрировать по теореме об интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов.

Радиус сходимости дифференцированного (и, вообще говоря, интегрированного) ряда не меняется, так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. А значит он также равномерно сходится на $[x_0, x]$, поэтому мы можем применить теорему о дифференцировании функционального ряда.

Заметим, что $f^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k$, что и требовалось. $\square$

13.2. Ряд Тейлора

Определение 13.2.1: Если f бесконечно дифференцируема в точке x_0, то ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$
называется её **рядом Тейлора** с центром в точке x_0.

Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора называется **рядом Маклорена**.

Теорема 13.2.1 (Достаточное условие представимости функции рядом Тейлора): Если f бесконечно дифференцируема на $(x_0 - h, x_0 + h)$, причём
$$\exists M : \forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h) :\ \left|f^{(n)}(x)\right| \le M$$
То $f(x)$ представима своим рядом Тейлора в точке x_0 при всех $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$

Доказательство: По теореме о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}; \quad \xi \in (x_0, x)$$
Следовательно
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \le M \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Почему $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$? Заметим, что n-ый элемент разложения экспоненты (имеющий бесконечный радиус сходимости, поэтому для неё априори он существует) в ряд Маклорена – это $\frac{x^n}{n!}$, а по необходимому условию сходимости ряда, он стремится к 0 равномерно. $\square$

14. Теорема об ограниченной сходимости для интеграла Лебега

Определение 14.1: Пусть f – ограниченная измеримая функция, определённая на измеримом по Лебегу множестве E. И Q – разбиение области значений функции f.

Тогда **интегральной суммой Лебега** назовём

$$S\left(Q, f, \{t_i\}_{i=1}^{n}\right) = \sum_{i=1}^{N} f(t_i)\mu(E_i)$$

где $E_i = \{x \in E \mid f(x) \in [y_{i-1}, y_i)\}$

Теорема 14.1 (Критерий/определение интеграла Лебега для ограниченных функций): Если f – ограниченная измеримая на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то она интегрируема по Лебегу на E, причём

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\Delta(Q)\to 0} S\left(Q, f, \{t_i\}_{i=1}^{n}\right)$$

Определение 14.2: Назовём **срезкой** неотрицательной функции f для $N \in \mathbb{N}$:

$$f_{[N]}(x) = \begin{cases} f(x), f(x) \le N \\ N, f(x) > N \end{cases}$$

Теорема 14.2 (Критерий/определение интеграла Лебега для измеримых неотрицательных функций): Если f – измеримая неотрицательная функция, определённая на измеримом множестве E конечной меры, то

$$\lim_{N\to\infty} \int_E f_{[N]} \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_E f(x) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

Теорема 14.3 (Лебега о предельном переходе под знаком интеграла): Пусть
- $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – измеримые на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры
- $f_m \xrightarrow{\text{п.н.}} f$ на E
- $\forall n \in \mathbb{N}: \ |f_n(x)| \le F(x)$ при почти всех $x \in E$, где F – произвольная суммируемая функция на E

Тогда f суммируема на E, причём

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu(x)$$

Доказательство: Совершив предельный переход $n \to \infty$ мы можем утверждать, что $|f(x)| \leq F(x)$ при почти всех $x \in E$ – значит f суммируемая на E.

Осталось доказать равенство интеграла и предела интегралов.

Как мы знаем, из сходимости почти всюду следует сходимость по мере:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mu(E_m(\varepsilon) := \{x \in E \mid \|f_m - f\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

Другими словами

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists M \in \mathbb{N} : \forall m > M : \ \mu(E_m(\varepsilon)) < \delta$$

Оценим разность интеграла и предела интегралов:

$$\left|\int_E (f - f_m)\,\mathrm{d}\mu(x)\right| \leq \int_{E_m} |f_m - f|\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{E\setminus E_m} |f_m - f|\,\mathrm{d}\mu(x) \leq$$

$$2\int_{E_m} F\,\mathrm{d}\mu(x) + \varepsilon\mu(E \setminus E_m) < \varepsilon(\mu(E) + 2)$$

Что и требовалось. □

15. Дифференциальные формы на открытых подмножествах евклидова пространства, оператор внешнего дифференцирования d и его независимость от криволинейной замены координат

15.1. Дифференциальные формы, оператор внешнего дифференцирования

В этом и других билетов, связанных с дифференциальными формами введём понятия $E = \mathbb{R}^n$ – евклидово пространство.

E^* – сопряжённое к нему, aka пространство линейных функционалов aka линейных форм aka ковекторов.

Если мы будем употреблять $p \in \mathbb{N}$, то мы имеем ввиду количество векторов

$$x_1, ..., x_p \in E$$

Если мы будем употреблять $q \in \mathbb{N}$, то мы имеем ввиду количество ковекторов

$$y^1, ..., y^q \in E^*$$

Обратите внимание на индексы, это важно.

Определение 15.1.1: **Полилинейной формой валентности** (p, q) называется функция $U : E^p \times (E^*)^q \to \mathbb{R}$, линейная по каждому из аргументов.

Утверждение 15.1.1: Полилинейная форма однозначно определяется значениями на базисных элементах E и E^*, то есть числами

$$\omega_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{j}} := \omega_{i_1,...,i_p}^{j_1,...,j_q} = U\left(e_{i_1}, ..., e_{i_p}, e^{j_1}, ..., e^{j_q}\right)$$

где $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис E, а $\left\{e^j\right\}_{j=1}^q$ – двойственный базис E^*.

Доказательство: Очевидно из линейности. □

Определение 15.1.2: Набор чисел $\left\{\omega_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{j}} \mid i \in \left(\overline{1,\,\mathrm{n}}\right)^p, j \in \left(\overline{1,\,\mathrm{n}}\right)^q\right\}$ (то есть мы рассматриваем значения на всех комбинациях базисных векторов и ковекторов) называется **тензором**

Утверждение 15.1.2: Множество полилинейных форм валентности (p, q) образует **линейное пространство** Ω_p^q.

Определение 15.1.3: **Тензорным произведением** форм $U \in \Omega_{p_1}^{q_1}; V \in \Omega_{p_2}^{q_2}$ называется форма $U \otimes V \in \Omega_{p_1+p_2}^{q_1+q_2}$, задаваемая формулой.

$$\forall \boldsymbol{x} \in E^{p_1+p_2} : \forall \boldsymbol{y} \in E^{q_1+q_2} :$$
$$U \otimes V\left(x_1, ..., x_{p_1}, x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}, y^1, ..., y^{q_1}, y^{q_1+1}, ..., y^{q_1+q_2}\right) =$$
$$U\left(x_1, ..., x_{p_1}, y^1, ..., y^{q_1}\right) \cdot V\left(x_{p_1+1}, ..., x_{p_1+p_2}, y^{q_1+1}, ..., y^{q_1+q_2}\right)$$

Определение 15.1.4: $W \in \Omega_p^0$ называется **симметрической**, если она не изменяется при любой перестановке её аргументов.

Определение 15.1.5: $W \in \Omega_p^0$ называется **антисимметрической (кососимметрической)**, если при любой перестановке пары её аргументов она меняет знак.

Введём линейное пространство антисимметрических форм:

$$\Lambda_p := \left\{W \in \Omega_p^0 \mid W - \text{антисимметрическая}\right\}$$

Определение 15.1.6: Пусть $\pi_p = \left(i_1, ..., i_p\right)$ – перестановка индексов $\{1, ..., p\}$. Тогда

$$\forall W \in \Omega_p^0 : \forall \boldsymbol{x} \in E^p : \ \left(\pi_p W\right)\left(x_1, ..., x_p\right) := W\left(x_{i_1}, ..., x_{i_p}\right)$$

Определение 15.1.7: **Симметризацией формы** $W \in \Omega_p^0$ называется форма

$$\operatorname{sym} W := \tfrac{1}{p!} \textstyle\sum_{\pi_p \in S_p} \pi_p W$$

Определение 15.1.8: **Антисимметризацией формы** $W \in \Omega_p^0$ называется форма

$$\operatorname{asym} W := \tfrac{1}{p!} \textstyle\sum_{\pi_p \in S_p} \operatorname{sgn} \pi_p \cdot \pi_p W$$

Определение 15.1.9: Если $U \in \Lambda_p, V \in \Lambda_q$, то их **внешним произведением** называется

$$U \wedge V := \tfrac{(p+q)!}{p!q!} \operatorname{asym}(U \otimes V)$$

Теорема 15.1.1 (Основные свойства внешнего произведения):
1. Линейность
   - $(\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2) \wedge V = \alpha_1 (U_1 \wedge V) + \alpha_2 (U_2 \wedge V)$
   - $U \wedge (\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) = \alpha_1 (U \wedge V_1) + \alpha_2 (U \wedge V_2)$
2. Ассоциативность
   - $(U \wedge V) \wedge W = U \wedge (V \wedge W)$
3. Антикоммутативность
   - $\forall U \in \Lambda_p : \forall V \in \Lambda_q : \ U \wedge V = (-1)^{pq} (V \wedge U)$

Утверждение 15.1.3: Базисом в пространстве Λ_p является система

$$\left\{ f^{i_1} \wedge ... \wedge f^{i_p} \mid 1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n \right\}$$

где $\{f_i\}_{i=1}^n$ – базис в $E^* = \Lambda_1$. (Принято брать базис проекторов)

Определение 15.1.10: p**-формой (дифференциальной формой валентности (степени)** p**)** на множестве $U \subset E$ называется отображение $\Omega : U \to \Lambda_p$.

В силу линейности пространства Λ_p, нам достаточно задать поведение получаемой формы лишь на базисе, поэтому

$$\forall x \in U : \ \Omega(x) := \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n} \omega_{i_1, ..., i_p}(x) f^{i_1} \wedge ... \wedge f^{i_p}$$

Таким образом, дифференциальная форма однозначно задаётся набором действительнозначных функций

$$\left\{ \omega_{i_1, ..., i_p} \mid 1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n \right\}$$

Определение 15.1.11: **Внешнее дифференцирование p-формы** определяется как $(p+1)$-форма

$$\mathrm{d}\Omega : U \to \Lambda_{p+1}$$

По правилу

$$\forall x \in U : \ \mathrm{d}\Omega(x) \coloneqq (p+1) \operatorname{asym}\left(\Omega'(x)\right)$$

где под производной подразумевается производная по Фреше.

Стоит заметить, что, формально $\Omega' : U \to U \to \Lambda_p$, однако мы считаем, что $U \to \Lambda_p \subset \Omega^0_{p+1}$ (Действительно, линейно по $p+1$ вектору получаем число).

Также стоит упомянуть, что для любого базиса $(e_1, ..., e_n)$ из E и двойственного к нему базиса $(e^1, ..., e^n)$ существует соглашение, что

$$\forall i = \overline{1, \mathrm{n}} : \ e^i = \mathrm{d} e_i$$

Которое не лишено смысла, ведь e_i – это 0-форма. А e^i – это функционал, то есть 1-форма.

Теорема 15.1.2 (Основные свойства операции внешнего дифференцирования):
1. $\mathrm{d}(\Omega \wedge \Pi) = (\mathrm{d}\Omega \wedge \Pi) + (-1)^p (\Omega \wedge \mathrm{d}\Pi)$, где Ω – p-форма, а Π – q-форма.
2. $d(d\Omega) = 0$

Доказательство:
1. Для простоты считаем, что форма – одночлен, по линейности всё очевидно доказывается для произвольной формы.

   Фиксируем базис, в котором
   $$\Omega(x) = \omega(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p}; \quad \Pi(x) = \pi(x)\,\mathrm{d}x^{j_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{j_q}$$
   Тогда
   $$\mathrm{d}(\Omega \wedge \Pi) = \mathrm{d}\big(\omega(x)\pi(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{j_q}\big) =$$
   $$\mathrm{d}(\omega(x)\pi(x)) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{j_q} =$$
   $$\pi(x) \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{j_q} +$$
   $$\omega(x) \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{j_q} =$$
   $$d\Omega \wedge \Pi(x) + (-1)^p (\Omega \wedge \mathrm{d}\Pi)$$

   В последнем переходе мы воспользовались свойством антикоммутативности внешнего произведения для перестановки всех $\mathrm{d}x^{j_{...}}$ перед всеми $\mathrm{d}x^{i_{...}}$, остальное свернули по определению
2. Распишем двойной дифференциал:
   $$\mathrm{d}(\mathrm{d}\Omega) = \mathrm{d}\Big(\textstyle\sum_{j, \forall k : j \neq i_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p}\Big) =$$
   $$\textstyle\sum_{l, l \neq j, \forall k : l \neq l_k} \sum_{j, \forall k : j \neq i_k} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_l \partial x_j}\,\mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p} =$$
   $$\textstyle\sum_{j, l, j < l, \forall k : j \neq i_k \wedge l \neq i_k} \Big(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_l \partial x_j} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_l}\Big)\,\mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p} = 0$$

□

15.2. Независимость внешнего дифференцирования от замены координат

Определение 15.2.1: Пусть
- Ω – дифференциальная p-форма в области $U \subset \mathbb{R}^n$
- $\varphi : V \to U$ – диффеоморфизм области $V \subset \mathbb{R}^n$ на U

Тогда $\varphi^*\Omega$ – дифференциальная p-форма в области V, определяемая как
$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n : \ (\varphi^*\Omega)(y)(\boldsymbol{b}) := \Omega(\varphi(y))\big(\varphi'(y)b_1, ..., \varphi'(y)b_p\big)$$

Утверждение 15.2.1 (Правило подсчёта): Мы можем выразить форму после замены координат через упомянутое выше базисное представление:
$$(\varphi^*\Omega)(y) = \sum\nolimits_{1 \le i_1 < ... < i_p \le n} \omega_{i_1,...,i_p}(\varphi(y))\,\mathrm{d}\varphi^{i_1}(y) \wedge ... \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_p}(y)$$

Доказательство: Заметим, что для произвольного вектора $b \in \mathbb{R}^n$ верно
$$\mathrm{d}\varphi^i(y)(b) = \sum\nolimits_{l=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^l}(y)\,\mathrm{d}f^l(b) = \sum\nolimits_{l=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial y^l}(y) b^l = (\varphi'(y)b)^i = \mathrm{d}f^i(\varphi'(y)b)$$
Не забывайте, что в качестве $\mathrm{d}f^i$ мы берём проекцию на i-ую координату.

Что и требовалось. □

Лемма 15.2.1 (Независимость внешнего дифференцирования от замены координат):
$$\varphi^*(\mathrm{d}\Omega) = \mathrm{d}(\varphi^*\Omega)$$

Доказательство: БОО считаем, что Ω – это одночлен, для многочленов обобщается очевидно по линейности.

Зафиксируем $\Omega = \omega(x) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$

Тогда по свойствам внешнего дифференцирования:
$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\omega(x) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$$
Тогда по правилу подсчёта
$$\varphi^*(\mathrm{d}\Omega) = \mathrm{d}\omega(\varphi(y)) \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_1}(y) \wedge ... \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_p}(y)$$
С другой стороны, по определению замены координат
$$\varphi^*(\Omega) = \omega(\varphi(y))\,\mathrm{d}\varphi^{i_1}(y) \wedge ... \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_p}(y)$$
Применим оба свойства внешнего дифференцирования (двойной дифференциал нулевой и псевдодистрибутивность):
$$\mathrm{d}(\varphi^*\Omega) = \mathrm{d}\omega(\varphi(y)) \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_1}(y) \wedge ... \wedge \mathrm{d}\varphi^{i_p}(y)$$
□

16. Интегрирование дифференциальной формы с компактным носителем. Зависимость интеграла от замены координат.

Из Утверждение 15.1.3 Пространство Λ_n одномерно. Иными словами, если $(f^1, ..., f^n)$ – базис E^*, то

$$\{cf^1 \wedge ... \wedge f^n \mid c \in \mathbb{R}\} = \Lambda_n$$

Тогда если $(e_0^1, ..., e_0^n)$ – ортонормированный базис в E^* сопряжённый к $(e_1^0, ..., e_n^0)$ – ортонормированному базису в E^*.

Введём форму **ориентированного объёма**

$$V_{e^0} = e_0^1 \wedge ... \wedge e_0^n \overset{\text{соглашение}}{=} \mathrm{d}e_1^0 \wedge ... \mathrm{d}e_n^0$$

Возьмём произвольный базис $(e_1^0, ..., e_n^*)$ в E, связанный с исходным матрицей перехода T:

$$\forall j: \ e_j = t_j^i e_i^0$$

Рассмотрим действие:

$$V_{e_0}(e_1, ..., e_n) = \mathrm{d}e_1^0 \wedge ... \mathrm{d}e_n^0(e_1, ..., e_n) = \det\left(\mathrm{d}e_i^0(e_j)\right)_{i,j=1}^n = \det T$$

Причём $\forall$ базиса форма ориентированного объёма на нём самом равна 1:

$$V_{e_0} = \det T \cdot V_e$$

В начале определим интеграл от форм из Λ_n.

Определение 16.1: Интегралом от формы $\Omega(x) = \alpha(x) V_{e_0}$ по области $D \subset E$ называется

$$\int_D \Omega = \int_D \alpha(x) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

Определение 16.2: Если Ω – гладкая $n-1$ форма, заданная на замыкании куба $K \subset \mathbb{R}$, то

$$\int_{\partial K} \Omega := \int_K \mathrm{d}\Omega$$

Определение 16.3: **Клеткой** называется диффеоморфный образ куба

Определение 16.4: Для формы Ω и диффеоморфизма $\varphi : U \to V$, $M \subset U$ – клетки, $K \subset V$ – куба:

$$\int_M \Omega = \int_K \varphi^* \Omega$$

17. Общая формула Стокса

Определение 17.1: **Границей клетки** $M = \varphi(K)$ называется

$$\partial M := \varphi(\partial K)$$

Теорема 17.1 (Теорема Стокса для клетки): Если Ω – гладкая $m-1$ форма, заданная в окрестности m-мерной клетки, то
$$\int_{\partial M} \Omega = \int_M \mathrm{d}\Omega$$

Доказательство: Используя Теорему Стокса для куба (aka определение интеграла по формам меньших размерностей) и свойство инвариантности внешнего дифференцирования от замены координат:
$$\int_{\partial M} \Omega = \int_{\partial K} \varphi^* \Omega = \int_K \mathrm{d}(\varphi^* \Omega) = \int_K \varphi^*(\mathrm{d}\Omega) = \int_M \mathrm{d}\Omega$$
□

18. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке

В доказательствах некоторых теорем этого конспекта используется интересный трюк: если у нас есть цепочка равенств $a = b$, то мы с лёгкостью сможем продолжить её, написав $a = b = \frac{a+b}{2}$. Если вы понимаете, что в доказательстве теоремы с интегралами происходит какая-то дичь, то вспоминайте этот трюк!

Определение 18.1:
$$L_{2\pi} := \{f \in L_1[-\pi, \pi] \mid f - 2\pi \text{ периодическая}\}$$

Определение 18.2: **Ядром Дирихле** $D_n(u)$ называется выражение
$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)}$$

Определение 18.3: Пусть $f \in L_{2\pi}$, тогда **частичной суммой тригонометрического ряда Фурье** называется
$$S_n(f, x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$
где
$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \,\mathrm{d}\mu(t); \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \,\mathrm{d}\mu(t)$$

Лемма 18.1 (О представлении частичной суммы): Если $f \in L_{2\pi}$, то n-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье может быть представлена
$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) \,\mathrm{d}\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) D_n(u) \,\mathrm{d}\mu(u)$$

Теорема 18.1 (Теорема Римана об осцилляции): Если $f \in L_1(I)$, где I – конечный или бесконечный промежуток, то

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_I f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}\mu(x) = 0$$

Теорема 18.2 (Признак Дини): Если $f \in L_{2\pi}$ и $\varphi_{x_0} \in L_1(0, \delta), \delta > 0$, где

$$\varphi_{x_0}(t) := \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S(x_0)}{t}$$

то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $S(x_0)$

Доказательство: Рассмотрим разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$, пользуясь леммой о представлении, можем записать её как

$$S_n(f, x_0) - S(x_0) \overset{\text{трюк}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+u) + f(x-u) - 2S(x_0))D_n(u)\,\mathrm{d}\mu(u)$$

В данном переходе мы воспользовались сразу несколькими фактами:

- Подынтегральная функция чётная относительно u
- Интеграл по $[-\pi, \pi]$ от ядра Дирихле равен π
- Если заменить в представлении частичной суммы t на $-t$, то ничего не изменится.

Продолжим цепочку преобразований, раскрыв в формуле ядра Дирихле

$$\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) = \sin(nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(nt)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

А также добавим и вычтем интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)}{t}\sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t)$$

Итак, приступим

$$S_n(f, x_0) - S(x_0) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)}{t}\sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t) +$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))\frac{\cos(nt)}{2}\,\mathrm{d}\mu(t) +$$

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))\frac{\sin(nt)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}\mu(t) +$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))\sin(nt)\left(\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}\mu(t)$$

По условию φ_{x_0} сумирумая, значит по теореме Римана об осцилляции первое слагаемое стремится к нулю.

$f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0)$ суммируема как сумма суммируемых и константы, значит по теореме Римана об осцилляции второе слагаемое стремится к нулю.

В третьем слагаемом $(f(x+t) + f(x-t) - 2S(x_0))\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \in L_1[\delta, \pi]$, так как мы отделились от нуля и по теореме Римана об осцилляции третье слагаемое стремится к нулю.

Для четвёртого слагаемого рассмотрим разность:

$$\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{t} \overset{t\to 0}{\sim} \frac{1-\frac{t^2}{8}}{2\left(\frac{t}{2}-\frac{t^3}{48}\right)}) - \frac{1}{t} = \frac{t-\frac{t^3}{8}-t+\frac{t^3}{24}}{t^2} = 0$$

Значит мы умножили суммируемую функцию $f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0)$ на другую, имеющую устранимый разрыв в нуле, а значит

$$(f(x+t)+f(x-t)-2S(x_0))\left(\frac{\cos(\frac{t}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}-\frac{1}{t}\right)\in L_1[0,\delta]$$

И опять применяем теоремы об осцилляции. □

Определение 18.4: Будем говорить, что функция f удовлетворяет **условию Гёльдера** порядка $\alpha\in(0,1]$ в точке x_0, если существуют конечные односторонние пределы $f(x_0\pm 0)$ и константы $C>0,\delta>0$ такие, что

$$\forall t, 0<t<\delta:\ |f(x_0+t)-f(x_0+0)|\le Ct^\alpha \wedge |f(x_0-t)-f(x_0-0)|\le Ct^\alpha$$

Теорема 18.3 (Признак Липшица): Если $f\in L_{2\pi}$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α в точке x_0, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

Доказательство: По условию теоремы, хотим

$$S(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

Значит функция φ_{x_0} из признака Дини будет иметь вид

$$\varphi_{x_0}(t)=\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+(f(x_0-t)-f(x_0-0))}{t}$$

То что φ измерима – очевидно. Осталось доказать ограниченность интеграла

$$\left|\int_0^\delta \varphi_{x_0}(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right|\le\int_0^\delta\frac{|f(x_0+t)-f(x_0+0)|}{t}\,\mathrm{d}\mu(t)+\int_0^\delta\frac{|f(x_0-t)-f(x_0-0)|}{t}\,\mathrm{d}\mu(t)\le$$

$$2C\int_0^\delta t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\mu(t)=2C\frac{\delta^\alpha}{\alpha}$$

Значит мы можем применить признак Дини и всё доказано. □

19. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье

Утверждение 19.1: Анализ доказательства признака Дини (Теорема 18.2) показывает, что критерием сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f\in L_{2\pi}$ к $S(x_0)$ в точке x_0 является равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta\varphi_{x_0}(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\mu(t)=0$$

Лемма 19.1: Пусть $f\in L_{2\pi}$, g – измеримая, 2π-периодическая, ограниченная функция. Тогда коэффициенты Фурье функции $\chi(t)=f(x+t)g(t)$ стремятся к нулю при $n\to\infty$ равномерно по x.

Теорема 19.1 (Признак Жордана): Если $f \in L_{2\pi}$ и является функцией ограниченной вариации на $[a, b]$, то тригонометрический ряд Фурье f сходится к $f(x_0)$ в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ непрерывности $f(x)$ и к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ в каждой точке разрыва $x_0 \in [a, b]$.

Если, кроме того, $f \in C[a, b]$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на любом отрезке $[a', b'] \subset (a, b)$.

Доказательство: Так как f ограниченной вариации, то она представима в виде $f = f_1 - f_2$, где f_1, f_2 – неубывающие. Значит нам достаточно доказать утверждения для неубывающих функций.

По (Утверждение 19.1) нам надо доказать лишь

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \varphi_{x_0}(t) \sin(nt) \,\mathrm{d}\mu(t) = 0$$

Раскроем φ_{x_0} и $S(x_0)$ и будем доказывать лишь для

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \sin(nt) \,\mathrm{d}\mu(t) = 0$$

А для слагаемого с минусами аналогично.

По определению правостороннего предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_1, 0 < \delta_1 < \delta : \; 0 \leq f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0) < \varepsilon$$

Перейдём к интегралу Римана, так как f монотонна и используем теорему о среднем для него:

$$\exists \delta_2, 0 < \delta_2 < \delta_1 : \; \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \sin(nt) \,\mathrm{d}t =$$

$$(f(x_0 + \delta_1) - f(x_0 + 0)) \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\sin(nt)}{t} \,\mathrm{d}t$$

Но мы знаем, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t$ сходится, поэтому интеграл с переменным верхним пределом ограничен:

$$\exists C > 0 : \; \left| \int_0^u \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t \right| \leq C$$

Но теперь рассмотрим:

$$\forall A > 0 : \; \left| \int_0^A \frac{\sin(nt)}{t} \,\mathrm{d}t \right| \overset{nt=:u}{=} \left| \int_0^{nA} \frac{\sin(u)}{u} \,\mathrm{d}u \right| \leq C$$

Используя эту оценку, получим, что

$$\left| \int_0^{\delta_1} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \sin(nt) \,\mathrm{d}t \right| \leq 2\varepsilon C$$

Таким образом, разобьём исходный интеграл от 0 до δ на сумму интегралов от 0 до δ_1 и от δ_1 до δ.

Получим, что предел интеграла действительно равен нулю, применим признак Дини и получим первую часть утверждения теоремы.

Перейдём к доказательству равномерной сходимости.

Вспомним, как мы расписывали разность $S_n(f, x_0) - S(x_0)$ на четыре слагаемых в доказательстве признака Дини (Теорема 18.2).

Применим к каждому из трёх последних слагаемых вспомогательную лемму (Лемма 19.1) и сведём доказательство к тому, чтобы доказать равномерность предела первого слагаемого (который мы уже рассматривали в текущем доказательстве).

Это сделать несложно, заметим, что если f непрерывна на $[a', b']$, то она равномерно непрерывна на нём, а значит мы можем найти δ_1 из текущего доказательства независимо от x_0.

Также независимо от x_0 мы ограничиваем интеграл от $\frac{\sin(nx)}{x}$, поэтому второе утвеждение текущец теоремы доказано. $\square$

20. Непревность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

20.1. Непрерывность преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции

Определение 20.1.1: **Преобразование Фурье** функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ называется

$$F[f] := \hat{f}(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\lambda t} \,\mathrm{d}\mu(t)$$

Теорема 20.1.1 (Непрерывность интеграла, зависящего от параметра): Пусть
- $A \subset \mathbb{R}^n; E \subset \mathbb{R}^m; \alpha_0 \in A$
- Функция $f(x, \alpha)$ сумируема при всех $\alpha \in A$, как функция от $x \in E$.
- Функция $f(x, \alpha)$ при почти всех $x \in E$ является непрерывной в α_0.
- При почти всех $x \in E$ и для всех $\alpha \in A$ справедлива оценка $|f(x, \alpha)| \leq \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ некоторая суммируемая на E функция.

Тогда

$$F(\alpha) = \int_E f(x, \alpha) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

является непрерывной в α_0.

Теорема 20.1.2 (Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра): Пусть
- $E \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^n$
- $f(x, \alpha)$ вместе с $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ суммируема на E при всех $\alpha \in U(\alpha_0)$
- При всех $\alpha \in (\alpha_0) : \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\right| \leq \varphi(x)$, где φ суммируема на E

Тогда

$$F'(\alpha_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha_0) \,\mathrm{d}\mu(x)$$

Теорема 20.1.3: Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $\hat{f}(\lambda)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\lim_{\lambda \to \infty} \hat{f}(\lambda) = 0$

Доказательство: Распишем комплексную экспоненту в сумму тригонометрических функций и сведём к теореме об осцилляции, утверждение о нулевом пределе доказано.

Почему преобразование Фурье непрерывно? Хотим применить теорему о непрерывности интеграла, зависящего от предела. Для этого оценим подынтегральную функцию:

$$|f(t,\lambda)| = \left|f(t)e^{-i\lambda t}\right| \leq |f(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

От λ рассматриваемая функция непрерывна из-за непрерывности экспоненты. Суммируемость следует из той же оценки сверху.

Значит применяем теорему о непрерывности интеграла, зависящего от параметра. □

20.2. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

Теорема 20.2.1 (Преобразование Фурье производной): Если $\forall [a,b] \subset \mathbb{R}$: $f \in L_1([a,b])$ и $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \hat{f}'(\lambda) = (i\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

Доказательство: Перепишем $f(x)$ через формулу Ньютона-Лейбница:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}\mu(t), x > 0$$

Устремляя $x \to +\infty$ увидим, что правая часть имеет предел, а значит и левая тоже:

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x), f \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow f(+\infty) = 0$$

Аналогично получим, что $f(-\infty) = 0$.

Тогда рассмотрим следующее преобразование Фурье:

$$\hat{f}'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i\lambda i}\,\mathrm{d}\mu(t) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t)e^{-i\lambda t}|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\left(e^{-i\lambda t}\right)'_t\,\mathrm{d}\mu(t) = (i\lambda)\hat{f}(\lambda)$$

□

Теорема 20.2.2 (Производная преобразования Фурье): Если $f(t), tf(t) \in L_1(\mathbb{R})$, то преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)$ дифференцируемо, причём

$$\left(\hat{f}\right)'(\lambda) = -\widehat{itf(t)}(\lambda)$$

Доказательство: Нам нужно лишь доказать, что мы имеем право продифференцировать интеграл, зависящий от параметра:

$$\left(\hat{f}\right)'(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)\left(e^{-i\lambda t}\right)'_\lambda\,\mathrm{d}\mu(t) = -\widehat{itf(t)}(\lambda)$$

Для этого оценим выражение:

$$\left|f(t)\left(e^{-i\lambda t}\right)\right| = \left|-itf(t)e^{-i\lambda t}\right| \leq |tf(t)| \in L_1(\mathbb{R})$$

Значит мы имеем право применить теорему о дифференцировании интеграла с параметром. □

21. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Интегральная теорема Коши.

21.1. Дифференцируемость функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана

Замечание 21.1.1: В ТФКП используются следующие станартные оборзначения z - комплексная переменная

$z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}$

$f(z)$ - исследуемая функция

$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) : u, v \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Определение 21.1.1: Функция $f : B_{r(z_0)} \to \mathbb{C}$ называется *дифференцируемой* в z_0 если

$$\exists A \in \mathbb{C} : f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0), |z - z_0| \to 0$$

Теорема 21.1.1: $f : B_{r(z_0)} \to \mathbb{C}$ дифференцируема тогда и только тогда когда

1. $u(x, y), v(x, y)$ дифференцируемы в (x_0, y_0)
2. Выполняются *условия Коши-Римана*:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

При этом $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{i(\partial v)}{\partial x}(x_0, y_0)$

Доказательство:

$(\Longrightarrow)$

Пусть f дифференцируема. Тогда $\Delta f = A\Delta z + \alpha(\Delta z) = A\Delta z + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$

Обозначим $A = a + ib$ и распишем Δf по координатно.

$$\{\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_0(\Delta x, \Delta y)\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)$$

Из того, что $\alpha(\Delta z) = o(\Delta z)$ следует α_1, α_2 тоже $o(\Delta x, \Delta y)$

Отсюда по определию u, v дифференцируемы. Причем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = a, -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = b$

$(\Longleftarrow)$

Пусть u, v дифференцируемы и выполняются УКР, тогда

$$
\begin{aligned}
\Delta f = \Delta u + i\Delta v &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\right) \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha_0(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_1(\Delta x, \Delta y)
\end{aligned}
$$

Что и означает дифференцируемость.

□

21.2. Интегральная теорема Коши

Определение 21.2.1: Пусть γ - кусочно гладкая кривая в D - области. Тогда *приращением аргумента функции вдоль кривой* $\Delta_\gamma f$ называется $Im \int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)}$

Определение 21.2.2: Пусть γ - кусочно гладкая замкнутая кривая в $\mathbb{C}$, $a \in C \setminus \gamma$. Тогда индксом a относительно γ называется

$$J_\gamma(a) = \frac{\Delta_\gamma(z-a)}{2\pi}$$

Определение 21.2.3: Пусть γ - кусочно гладкая кривая лежит в области D. Тогда говорят что $\gamma \sim 0 (\operatorname{mod} D)$ *гомологично эквивалентна нулю*, если $\forall a \in \mathbb{C} \setminus D$ $J_{\gamma(a)} = 0$

Определение 21.2.4: Циклом Γ называется формальная линейная комбинация с целыми коэфициентами кусочно-гладких замкнутых кривых. Все определения и теоремы для кривых тривиально переносятся на циклы.

Определение 21.2.5: Пусть γ кусочно гладкая кривая, φ непрерывна на γ. Тогда инегралом Коши называется

$$F_{n(z,\varphi)} = \int_\gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi$$

Утверждение 21.2.1: Свойства интеграла Коши
1. F_n голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \gamma$
2. $F_{n'}(z, \varphi) = nF_{n+1}(z, \varphi)$

Лемма 21.2.1: *Обшая теорема Коши*

Пусть D - область в $\mathbb{C}$, f - голоморфна в D Тогда

1. $g(\xi, z) = \begin{cases} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}, \xi \neq z \\ (f'(z)), z = \xi \end{cases}$

непрерывна в $D \times D$

2. Для любой кусочно гладкой $\gamma \in D$

$$h(z) = \int_\gamma g(\xi, z) d\xi$$

голоморфна в D

Теорема 21.2.1: *Лиувиля* Пусть f голоморфная в $\mathbb{C}$ и $\exists M, m, R\ \forall z\ |z| > R$: $|f(z)| < Mz^m$, тогда f полином степени m. В частности, если f ограничена, то она константа.

Теорема 21.2.2: *Интегральная теорема Коши* Пусть D - область в $\mathbb{C}$, f - голоморфна в D. Пусть Γ - цикл в D, причем $\Gamma \sim 0(\operatorname{mod} D)$, тогда

1. $\forall z D \setminus \Gamma : J_\Gamma(z) f(z) \frac{1}{2\pi i} = \int_\Gamma \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$
2. $\int_\Gamma f(z) dz = 0$

Доказательство: Пусть $G = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \mid J_\Gamma(z) = 0\}$ оно открытое. Рассмотрим две функции

1. $2\pi i\ \tilde{h}(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$

   Она голоморфна в G как интеграл Коши.

2. $2\pi i\ h(z) = \int_\Gamma \left(\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\right) d\xi$

   Она голоморфна в D по 2 пункту общей теоремы Коши

Заметим, что $\forall z \in G \cap D:\ h(z) = \tilde{h}(z)$ так как

$$h(z) - \tilde{h}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi = J_{\Gamma(z)} f(z) = 0$$

Из того, что $\Gamma \sim 0(\operatorname{mod} D)$ следует $\mathbb{C} \setminus D \subset G$ Тогда рассмотрим новую функцию:

$$F(z) = \begin{cases} h(z), z \in D \\ \tilde{h}(z) \\ z \in \mathbb{C} \setminus D \subset G \end{cases}$$

Она голоморфна в каждой из компонент. А так как на границе h и $\tilde{h}$ равны, то голоморфна и в $\mathbb{C}$.

Заметим, что

$$|\tilde{h}(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\max_\Gamma|f|\ |d\xi|}{dist(z,\Gamma)} \underset{dist(z,\Gamma)\to\infty}{\rightarrow} 0$$

А следовательно по теореме Лиувиля $F(z) \equiv 0$.

Следовательно в $D \setminus \Gamma$ $h(z) = 0$. То есть

$$\frac{f(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

$$f(z)J_{\Gamma(z)} = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$$

(1 => 2)

Применим 1 к $\tilde{f}(z) = (z-a)(f(z))$, где $a \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$ (естественно в области определения f) Тогда

$$0 = J_{\Gamma(a)}(a-a)f(a) = J_{\Gamma(a)}\tilde{f}(a) = \int_\Gamma \frac{\tilde{f}(\xi)d\xi}{\xi - a} = \int_\Gamma f(\xi)d\xi$$

□

22. Интегральная формула Коши. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора.

22.1. Интегральная формула Коши.

Пункт 1 в интегральной теореме Коши (???)

22.2. Разложение функции регулярной в окрестности точки в ряд Тейлора.

Теорема 22.2.1: Пусть f - голоморфная в D, $O_{R(a)} \subset D$, тогда
$\forall z \in O_{R(a)} : f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n,\ c_n = f^{(n)}\frac{a}{n!}$

Доказательство: Возьмем $0 < r < R$, тогда f голоморфна в $\overline{O_{r(a)}}$. Тогда по теореме Коши $2\pi i\ f(z) = \int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}$.

Распишем

$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi-a)-(z-a)} = \frac{1}{(\xi-a)}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} \overset{(|z-a|<|\xi-a|)}{=} \frac{1}{\xi-a}\sum^\infty\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n = \sum^\infty\frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}}$

Полученный ряд сходится равномерно, а значит можно почленно интегрировать.

$2\pi i\ f(z) = \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi} = \sum^{\infty} \int \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi i c_n (z-a)^n$
Причем по следтвию формулы Коши для круга, $2\pi i \cdot c_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$
Ну раз верно для любого $r < R$, то и для R верно. □

23. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана. Изолированные особые точки однозначного характера.

23.1. Разложение функции регулярной в кольце в ряд Лорана.

Теорема 23.1.1:
Пусть f голоморфна в кольце $K = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R\}$. Тогда

$$\forall z \in K: \ f(z) = \sum_{-\infty}(+\infty) c_n (z-a)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}$$

где γ_ρ положительно определеная окружность радиуса $\rho \in (r, R)$ с центром в a.

Доказательство: Для начала покажем независимость коэфициентов от выбора ρ. Возьмем две окружности радиусов ρ и ρ'. Применим для $\Gamma = \rho - \rho'$ интегральную теорему Коши и получим требуемое.

Рассмотрим $r < r' < R' < R$. Тогда $\forall z \in K'_{r', R'}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = (2\pi i) \left(\int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \right) =: f_1 + f_2$$

Заметим, что $f_1 = \int_{\gamma_{R'}} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}$ голоморфна в $O_{R'}(a)$. А значит раскладывается в ряд Тейлора. $f_1 = \sum_0^{+\infty} c_n (z-a)^n$

Вновь раскладываем $\frac{1}{z-\xi} = \sum^{\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$ при $|\frac{\xi-a}{z-a}| < 1$

Значит

$$f_2(z) = \sum_0^{\infty} (z-a)^{-n-1} \cdot \left(c_{-n-1} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} f(\xi)(\xi-a)^n d\xi \right)$$

Итого получили требуемое, не зависящее от r', R' □

Определение 23.1.1: Такое представление голоморфной функции называется *рядом Лорана*

Лемма 23.1.1: *Единсвенность ряда Лорана*

Если $f(z) = \sum_{-\infty}(+\infty)c_n(z-a)^n$ в кольце К, то f голоморфна в этом кольце, причем ряд лорана совпадает с данным. То есть $c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-a)^{n+1}}$

Доказательство: f голоморфна как предел сходящегося ряда.

Проверка равенства коэфициентов. Для $n = -1$

$$\int_{\gamma_\rho} f(z)dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{\gamma_\rho} c_n(z-a)^n dz = c_{-1}$$

Для $n \neq -1$ двигаем ряд так чтобы нужный коэфициент встал на -1. □

23.2. Изолированные особые точки однозначного характера.

Здесь пусть $f(z)$ функция имеющая изолированную особую точку a, тогда:

Определение 23.2.1: a - устранимая особенная точка, если $\exists A \in \mathbb{C}$: $\lim_{z\to a} f(z) = A$

Определение 23.2.2: a - устранимая особенная точка, если $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$

Определение 23.2.3: a - существенная особенная точка, если

$$\nexists \lim_{z\to a} f(z)$$

Теорема 23.2.1: a - УОТ $\Leftrightarrow$ f ограничена в какой-то $\dot{O}_{\delta(a)}$

Доказательство: ($\Rightarrow$) очевидно из определения предела.

($\Leftarrow$) Положим $M_\rho(f) = \max_{\gamma_\rho} |f|$ Тогда оценим

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \left(|f| \ |d\xi \frac{|}{\rho^{n+1}} \right) \leq \frac{M_{\rho(f)}}{\rho^n}$$

Из ограниченности, можно оценить M_ρ как константу. А значит при $n < 0, \rho \to 0: \quad |c_n| \to 0$. Следовательно |c_n|. А значит есть только регулярная часть ряда Лорана, а следовательно a - УОТ. □

Теорема 23.2.2: a - полюс $\Leftrightarrow$ существует лишь конечное число ненулевых членов в главной части ряда Лорана.

Доказательство:

($\Leftarrow$) аккурано посчитаем предел и получим требуемое. ($\Rightarrow$) По условию $\lim_{z\to a} f(z) = \infty \Rightarrow \lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$. Т.е функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет в a УОТ.

В силу изолированности a, $\frac{1}{f(z)}$ голоморфна в окрестности a, причем отлична от 0. А значит из предыдущего доказтельства получим разложение в Тейлора.

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m h(z), h(a) \neq 0 \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \cdot \frac{1}{h(z)}$$

$\frac{1}{h(z)}$ голоморфная в окрестности $\Rightarrow$ раскладывается в Тейлора

□

Теорема 23.2.3: *Сохоцкого*

Если a - СОТ, то $\forall A \in \overline{\mathbb{C}} \exists \{z_n\} \to a, f(z_n) \to A$

Доказательство: Для $A = \infty$ очевидно. Если не существует, то ограничена $\Rightarrow$ УОТ.

Если $A \neq \infty$, то рассмотрим $g(z) := \frac{1}{f(z)-A}$.

Если A не предельная, то $f(z) - A$ отделена от нуля, а значит g(z) ограничена. Следовательно a - УОТ для g. Причем $g(z) \neq 0$ в области определения.

Тогда заметим, что $f(z) = A + \frac{1}{g(z)}$.

Если $g(a) \neq 0$, то a - УОТ для f.

Иначе полюс. Противоречие. □

24. Вычеты. Вычисление интегралов по замкнутому контуру при помощи вычетов

Определение 24.1: Пусть f голоморфна в $\dot{O}_{r(a)}, a \in \mathbb{C}$, то определим вычет как

$$\text{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz$$

Лемма 24.1: Вычеты определены корректно (не завият от γ)

Доказательство: Пусть $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n,\ z \in \dot{O}_{r(a)}$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(z) dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} (z-a)^n = c_{-1}$$

Не зависит от γ □

Теорема 24.1: *Коши о вычетах* (a.k.a *Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов*)

Пусть D ограничена циклом $\Gamma = \gamma_0 - \gamma_1 - \gamma_2 - ... - \gamma_n$. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_N\} \subseteq D$. f голоморфна в $D' \setminus A$ где $D' \supset D$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)dz = \sum^N \operatorname{res}_{a_i} f$$

Доказательство: Окужаем каждую особую точку кругом радиуса R. Добавляем и вычитаем из Γ эти круги (δ_i). В части с минусами получаем новый цикл $\tilde{\Gamma} = \Gamma - \sum \delta_i$, такой что в нем f голоморфна.

Проверяем что $\tilde{\Gamma} \sim 0 \big(\operatorname{mod} \tilde{D}\big)$

- В точках вне D он так и остался 0.
- В новых точках (внутри δ_i) $1 - 1 = 0$

Следовательно интеграл по $\tilde{\Gamma}$ равен 0, а оставшая часть это $\sum \int_{\delta_i} f dz = 2\pi i \sum \operatorname{res}_{a_i} f$. □