

Illustrations numériques de la LGN et du TCL

Abdoulaye GASSAMA

Yassine EL JARJINI

15 mai 2025

Résumé

In this report, we will aim to numerically illustrate two theorems : the Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem. We will use Python (with the help of the libraries ~~Numpy~~ and ~~Matplotlib~~) to visualize the convergence of the ~~theoretical means~~ *empirical* *to the theoretical ones.*

Table des matières

1	Introduction	2
2	Rappels théoriques	2
3	Loi des Grands Nombres (LGN)	3
4	Théorème Central Limite	5
5	Illustrations numériques	6
5.1	Illustrations de la loi des Grands Nombres (LGN)	6
5.2	Illustrations du théorème central limite (TCL)	7
5.3	Interprétation des résultats	9
6	Application : Monte Carlo en finance	9
6.1	Principe général	9
7	Conclusion	10

1 Introduction

The Law of Large Numbers (LLN) and the Central Limit Theorem (CLT) are two fundamental results in probability theory that play a crucial role in understanding the asymptotic behavior of sequences of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables. These theorems are central to many statistical methods, particularly those related to estimation and simulation.

The objective of this project is to provide a numerical illustration of these two theorems through simulations carried out in Python. By generating sequences of i.i.d. random variables following various probability distributions, we will study the convergence of the empirical mean toward the expected value (LLN), as well as the asymptotic distribution of the centered and scaled mean (CLT). The analysis will be supported by graphical visualizations to highlight the convergence behavior and the fluctuations around the mean.

The Python programming language will be used to implement the simulations, with the help of scientific libraries such as NumPy for random number generation, Matplotlib for data visualization, and SciPy for distribution comparison.

2 Rappels théoriques

Dans cette section, nous présentons les fondements mathématiques sur lesquels repose notre étude.

Définition 1. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ est dite *i.i.d.* (indépendantes et identiquement distribuées) si :

- chaque X_n suit la même loi de probabilité que X_1 ,
- et les variables X_1, X_2, \dots, X_n sont indépendantes pour tout n .

Définition 2. Soit X une variable aléatoire réelle. L'*espérance mathématique* de X , notée $\mathbb{E}[X]$, est la moyenne théorique des réalisations de X .

- Si X est **discrète** avec valeurs x_i et $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$, alors :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_i x_i p_i$$

- Si X est **continue** avec densité de probabilité f_X , alors :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

Dans les deux cas, la *variance* de X , notée $\text{Var}(X)$, est donnée par :

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Définition 3 (Fonction caractéristique).

Soit X une variable aléatoire réelle. La fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ de X est définie par :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

Cette fonction caractéristique permet de caractériser complètement la distribution de X . En particulier, si deux variables aléatoires X et Y ont la même fonction caractéristique, elles ont la même loi de probabilité.

Définition 4 (Convergence p.s.).

On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers X , noté $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, si

qu'une suite

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Définition 5 (Converge^{se} en probabilité).

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On dit que X_n converge en probabilité vers X , et on note :

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Cela signifie que la probabilité que X_n s'éloigne de X de plus de ε devient arbitrairement petite lorsque $n \rightarrow \infty$.

Définition 6 (Convergence en loi).

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisable, et X une variable aléatoire. On dit que X_n converge en loi vers X , et on note :

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$$

si, pour toute fonction continue bornée $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)].$$

Une autre caractérisation équivalente : la fonction de répartition $F_{X_n}(x)$ converge vers $F_X(x)$ en tout point x où F_X est continue.

Ajouter le lien entre les 3 modes de convergence.

Théorème 1 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\text{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

Démo?

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Théorème 2 (Inégalité de Kolmogorov).

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, et soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ leur somme. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

les
De plus, si X_i ont une espérance $\mathbb{E}[X_i] = 0$ et une variance $\text{Var}(X_i) = \sigma_i^2$, la variance de S_n est donnée par :

$$\text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2,$$

Ce qui donne l'inégalité de Kolmogorov :

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{\varepsilon^2}.$$

3 Loi des Grands Nombres (LGN)

Théorème 3 (Loi faible des Grands Nombres).

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et i.i.d. On suppose que $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $\text{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Soit

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Alors \bar{X}_n converge en probabilité vers μ .

vraiment utile?
Il suffit que les X_i soient indépendantes, de même espérance et même variance (voir démonstration).

Démonstration. On a : $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$ par linéarité de l'espérance. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}.$$

Or,

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ce qui conclut la preuve. \square

Théorème 4. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de moyenne μ . Alors la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ converge presque sûrement vers μ :

$$\bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \mu.$$

Il manque l'hypothèse d'intégrabilité :

Démonstration. Posons $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, alors $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$.

Nous allons utiliser l'inégalité de Kolmogorov :

$$\forall k \geq 1, \mathbb{E}[|X_k|] < +\infty$$

Soit (X_k) une suite de v.a. indépendantes, centrées et de variance finie. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 1} \left| \sum_{k=1}^n X_k \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} \text{Var}(X_k)$$

vous avez une autre version du théorème 2. Unifier ce qui est utile (c'est cette version)

Appliquons cette inégalité à la suite $X_k - \mu$, qui est i.i.d., centrée, de variance σ^2 . Alors :

$$\sum_{k=1}^n (X_k - \mu) = S_n - n\mu, \quad \text{donc} \quad \frac{S_n}{n} - \mu = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu).$$

On pose :

$$Y_k := X_k - \mu, \quad \mathbb{E}[Y_k] = 0, \quad \text{Var}(Y_k) = \sigma^2 = \text{Var}(X_k).$$

La somme partielle $\sum_{k=1}^n Y_k$ vérifie :

$$\text{Var}\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right) = n\sigma^2.$$

⚠ vous supposez dans la démonstration que

Par l'inégalité de Kolmogorov :

$$\sigma^2 = \text{Var}(X_k) < +\infty \quad \forall k \geq 1.$$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n \geq 1} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2}{n^2} < \infty.$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc, par le **lemme de Borel-Cantelli** :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu) \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{X}_n \xrightarrow{p.s.} \mu.$$

le rappeler dans les rappels théoriques

\square

4 Théorème Central Limite

Théorème Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. de moyenne μ et de variance $\sigma^2 < \infty$. Alors la variable centrée et normalisée $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \underline{\sigma^2})$$

de variance σ^2

Démonstration. Posons :

$$Z_n := \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{X_k - \mu}{\sigma}$$

Définissons $Y_k := \frac{X_k - \mu}{\sigma}$. Alors, Y_k sont i.i.d., de moyenne 0 et de variance 1, et :

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Y_k$$

Énoncer le critère de Lévy dans les rappels théoriques.

On cherche à montrer que $Z_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$, en utilisant le **critère de Lévy** :

Si la fonction caractéristique $\phi_{Z_n}(t)$ converge simplement vers une fonction continue en 0, qui est la fonction caractéristique d'une loi, alors Z_n converge en loi vers cette loi.

La fonction caractéristique de Z_n est :

$$\phi_{Z_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itZ_n}] = \left(\phi_Y \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n$$

où $\phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY_1}]$ est la fonction caractéristique de Y_1 . Comme Y_1 est centrée réduite, on a le développement limité autour de 0 :

$$\phi_Y(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2) \quad \text{quand } u \rightarrow 0$$

Donc :

$$\phi_Y \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right)$$

Ainsi :

$$\phi_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-t^2/2}$$

Or, $e^{-t^2/2}$ est la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, qui est continue en 0. Par le critère de Lévy, on obtient :

$$Z_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

On en déduit :

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

□

5 Illustrations numériques

Dans cette section, nous présentons les simulations numériques réalisées afin d'illustrer les résultats théoriques précédemment énoncés. Nous nous concentrerons principalement sur l'application de la loi des grands nombres et du théorème central limite à travers des simulations de variables aléatoires i.i.d. et la vérification de la convergence des moyennes empiriques vers l'espérance. Nous discuterons également des performances des simulations en fonction de la taille de l'échantillon.

5.1 Illustrations de la loi des Grands Nombres (LGN)

Les illustrations ci-dessous ont été effectuées en générant des suites de variables aléatoires i.i.d. suivant différentes lois de probabilité (loi uniforme, loi normale, loi exponentielle et loi de poisson). Pour chaque distribution, nous avons calculé la moyenne empirique \bar{X}_n à partir d'un échantillon de taille n et nous avons observé la convergence de \bar{X}_n vers l'espérance μ en fonction de la taille de l'échantillon.

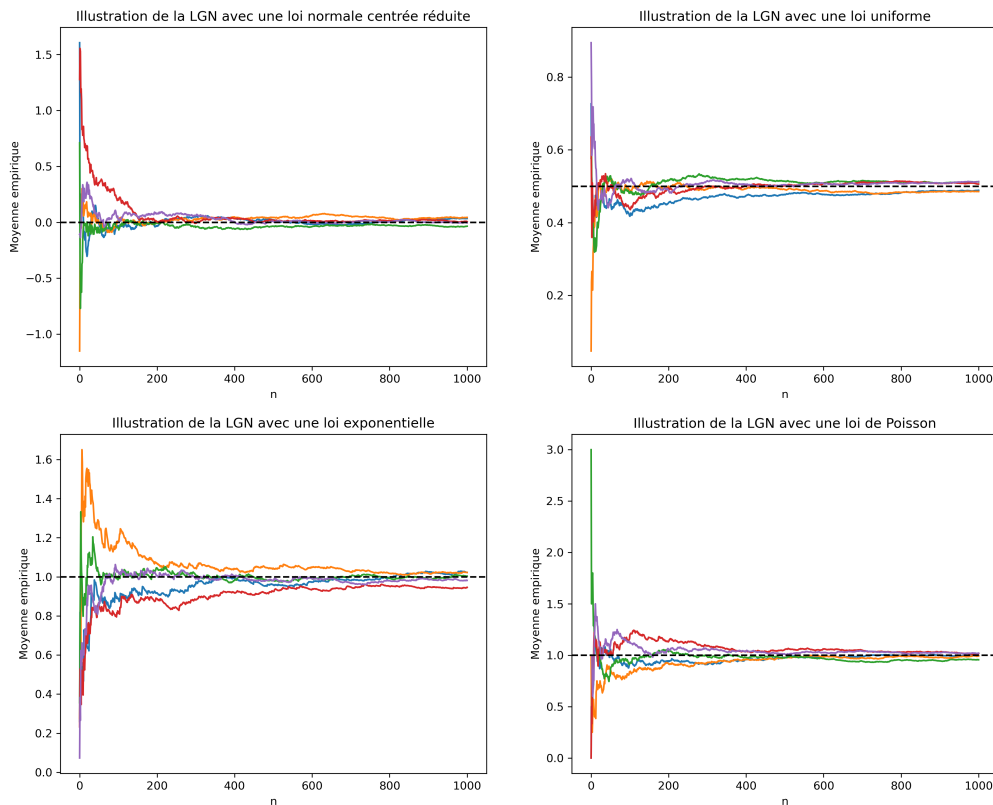


FIGURE 1 – Illustrations de la Loi des Grands Nombres

La figure ci-dessous représente l'évolution de la moyenne empirique d'une suite de variables de Bernoulli de paramètre $p = 0,5$, ainsi que les intervalles de confiance à 95% construits autour de cette moyenne, en fonction de la taille de l'échantillon. On observe que la moyenne empirique varie fortement au début (lorsque l'échantillon est petit), elle tend progressivement vers la moyenne théorique p . Les intervalles de confiance, représentés en zone grisée, se resserrent au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente, traduisant une incertitude décroissante sur l'estimation.

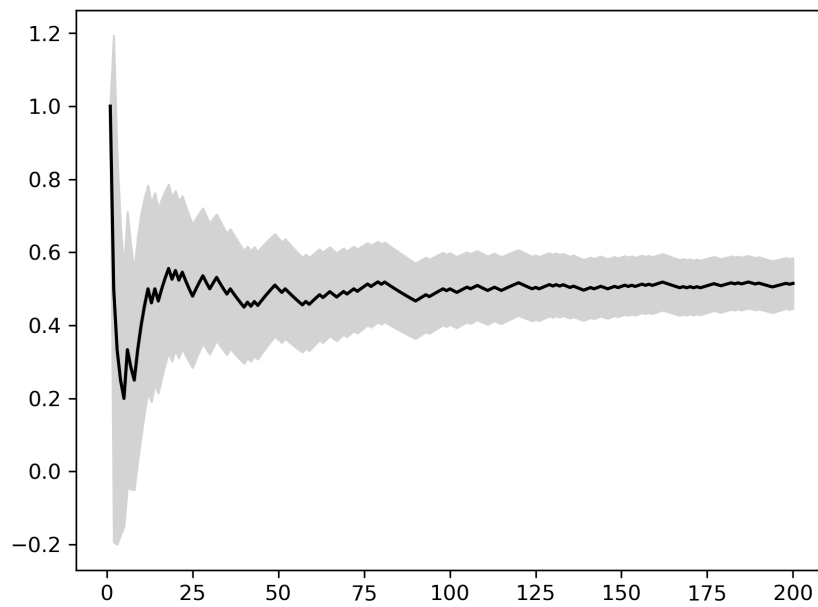


FIGURE 2 – Intervalle de confiance de la moyenne empirique

5.2 Illustrations du théorème central limite (TCL)

Dans cette expérience, nous avons simulé des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant deux lois différentes :

- une loi de **Bernoulli** $\mathcal{B}(p)$,
- une loi **Exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$.

Pour chaque cas, nous avons considéré la somme normalisée des variables aléatoires :

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \quad \text{où} \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

et nous avons observé la distribution de Z_n pour différentes tailles d'échantillon n .

Illustration du TCL avec des variables de Bernoulli

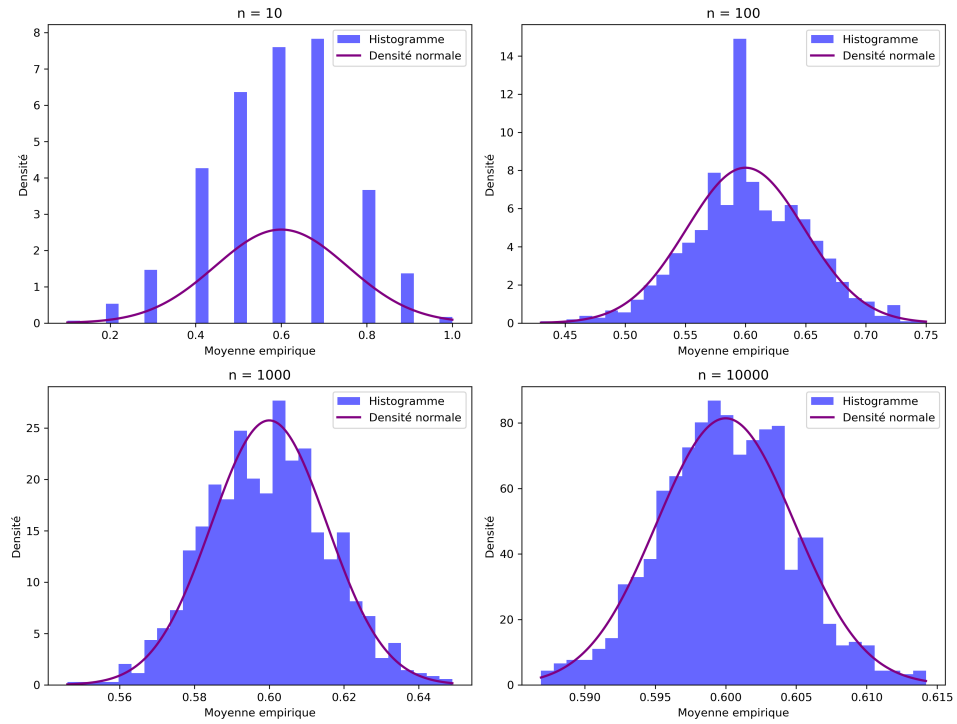


FIGURE 3 – Illustration du TCL pour des variables de Bernoulli

Illustration du TCL avec des variables de loi exponentielle

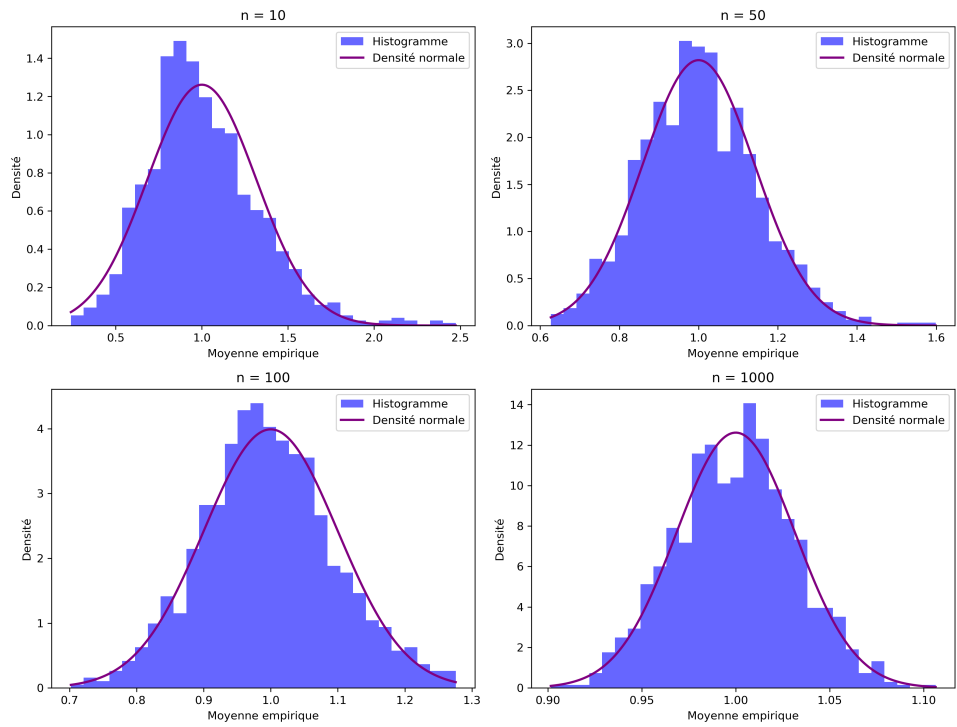


FIGURE 4 – Illustration du TCL pour des variables de loi exponentielle

Les histogrammes issus des simulations montrent que, quelle que soit la loi de départ (discrète ou continue), la **distribution des sommes normalisées tend vers une loi normale** lorsque n devient grand.

Cela confirme expérimentalement le **théorème central limite**, qui affirme que :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1),$$

où $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ et $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$.

Ces résultats illustrent la puissance du TCL, même lorsque la variable initiale suit une loi non gaussienne, non symétrique, ou même discrète.

5.3 Interprétation des résultats

Les résultats des simulations confirment la validité des théorèmes étudiés. Pour de petites tailles d'échantillon, la moyenne empirique présente des fluctuations importantes autour de l'espérance théorique, mais à mesure que la taille de l'échantillon augmente, ces fluctuations diminuent et la moyenne empirique converge vers l'espérance.

Nous observons également que la convergence est plus rapide pour les variables suivant une loi normale comparée à celles suivant une loi uniforme. Ce phénomène peut être expliqué par la variance plus faible de la loi normale, ce qui entraîne une plus grande stabilité des moyennes empiriques dès que la taille de l'échantillon devient suffisamment grande.

6 Application : Monte Carlo en finance

La méthode de Monte Carlo est une approche numérique puissante, basée sur l'utilisation de simulations aléatoires pour approximer des quantités déterministes. Cette méthode trouve des applications dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées, de la physique à la finance, en passant par les statistiques et l'analyse numérique.

6.1 Principe général

La méthode de Monte Carlo est une technique numérique qui permet d'estimer des quantités mathématiques par des simulations aléatoires. Elle est particulièrement utile lorsque le calcul exact d'une espérance ou d'une intégrale est difficile, voire impossible.

Le principe fondamental repose sur la loi des grands nombres. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telle que $\mathbb{E}[X]$ existe. Si X_1, X_2, \dots, X_n sont des variables indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de X , alors :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} \mathbb{E}[X].$$

Vous avez déjà rencontré les 2 LGN !!

Ainsi, l'estimateur \bar{X}_n converge presque sûrement vers l'espérance mathématique $\mathbb{E}[X]$ lorsque n devient grand.

on cherche à approcher $\mathbb{E}[f(X)]$ à partir de $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k)$ où les X_k sont i.i.d.

Dans la pratique, la méthode de Monte Carlo consiste à :

1. Générer n réalisations X_1, \dots, X_n de la variable aléatoire X (ou d'une fonction $f(X)$ dans le cas d'une espérance $\mathbb{E}[f(X)]$);
2. Calculer la moyenne empirique \bar{X}_n ; *$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k)$*
3. Utiliser \bar{X}_n comme approximation de $\mathbb{E}[X]$.

Cette méthode est simple à mettre en œuvre et particulièrement puissante pour des problèmes de haute dimension ou pour des distributions complexes, à condition de disposer d'un générateur de nombres aléatoires adéquat.

Ex: $X \sim \mathcal{UP}(0, 1)$; $f(x) = e^x$, $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[e^X] = e^{\frac{1}{2}}$ (transformée de Laplace en 1)

7 Conclusion

Ce projet nous a permis d'illustrer numériquement deux ^{théorèmes} piliers fondamentaux des probabilités : la Loi des Grands Nombres (LGN) et le Théorème Central Limite (TCL). À travers des simulations de suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, nous avons observé la convergence presque sûre des moyennes empiriques vers l'espérance dans le cadre de la LGN, et la convergence en loi vers la distribution normale dans le cadre du TCL.

Les expériences menées ont confirmé les prédictions théoriques : plus la taille de l'échantillon augmente, plus la moyenne empirique se stabilise autour de la moyenne réelle, et plus la distribution centrée-réduite des moyennes tend vers une loi normale. Ces résultats, bien qu'abstraits dans leur énoncé mathématique, prennent ici une forme concrète grâce aux visualisations numériques.

Enfin, la construction d'intervalles de confiance a illustré une application statistique directe de ces théorèmes, notamment dans l'estimation de paramètres inconnus. Ce travail met en lumière l'importance des théorèmes asymptotiques non seulement sur le plan théorique, mais aussi pour la compréhension et la modélisation de phénomènes aléatoires dans les domaines scientifiques, techniques et économiques. ✕

Références

- [1] Gilles Pagès, *Numerical Probability : An Introduction with Applications to Finance*, Springer, 2018.
- [2] Julian Tugaut, *Les bases indispensables des Probabilités et des Statistiques — Cours et exercices corrigés*, Ellipses, 2025.