Illustrations numériques de la LGN et du TCL

Abdoulaye GASSAMA
Yassine EL JARJINI

9 mai 2025

Résumé

In this report, we will aim to numerically illustrate two theorems : the Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem. We will use Python (with the help of the libraries numpy and matplotlib) to visualize the convergence of the theoretical average.

Table des matières

1 Introduction

introduction

2 Convergence de variables aléatoires

Définition 1. On dit que X_n converge presque sûrement vers X, noté $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, si

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Définition 2. On dit que X_n converge vers X dans L^p, noté $X_n \xrightarrow{L^p} X$, si

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Définition 3. On dit que X_n converge vers X en probabilité, noté $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

3 Loi des Grands Nombres

Théorème 1 (Loi faible des Grands Nombres)**.** *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et i.i.d. On suppose que $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ et $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Soit*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors $\bar{X}_n$ converge en probabilité vers μ.

Démonstration. On a : $\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$ par linéarité de l'espérance. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}.$$

Or,

$$\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Donc,

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ce qui conclut la preuve. $\square$

Théorème 2 (Loi forte des Grands Nombres)**.** *Sous les mêmes hypothèses, $\bar{X}_n$ converge presque sûrement vers μ.*

4 Théorème Central Limite

Théorème 3 (Théorème Central Limite)**.** *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, dans L^2. Soit $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Alors,*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(X_1 + \cdots + X_n - n\mathbb{E}[X_1]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

où $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ désigne la loi normale centrée de variance σ^2.

5 Illustrations numériques

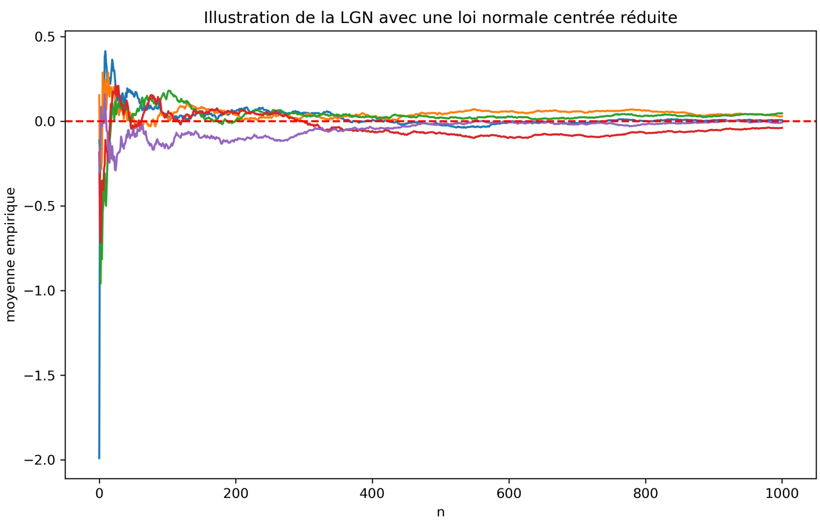

Figure 1 – Illustration de la LGN pour la loi normale

6 Conclusion

...

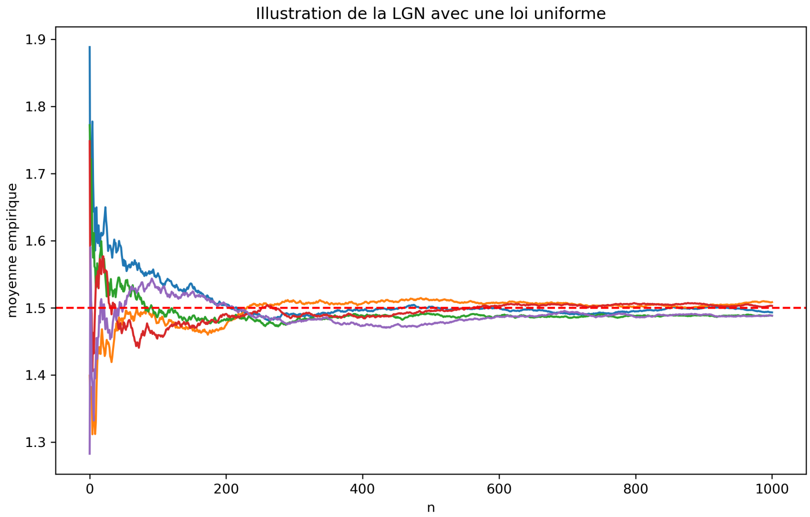

FIGURE 2 – Illustration de la LGN pour la loi uniforme

Références

[1] Gilles Pagès, *Numerical Probability : An Introduction with Applications to Finance*, Springer, 2018.

[2] Julian Tugaut, *Les bases indispensables des Probabilités et des Statistiques — Cours et exercices corrigés*, Ellipses, 2020.

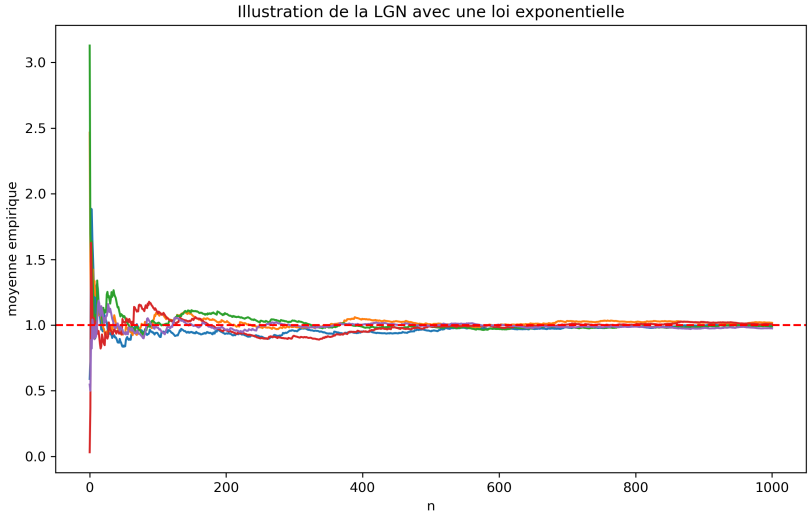

Figure 3 – Illustration de la LGN pour la loi exponentielle

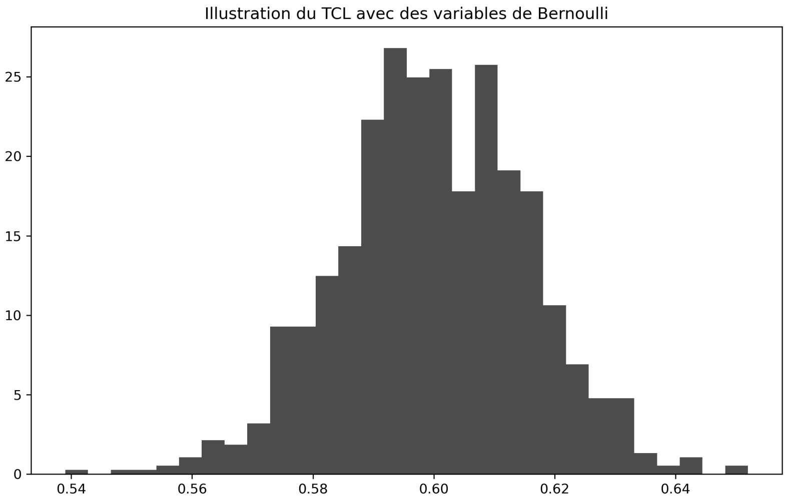

Figure 4 – Illustration du TCL pour des variables de Bernoulli