LISTE DES SUJETS DE TER 2025-2026

Sujet 1. *Sujet au choix*

Encadrant: Faustin Adiceam `faustin.adiceam@u-pec.fr`

Sujet 1.a *Comment bien approcher des nombres réels par des rationnels ?*

L'approximation dite diophantienne vise à quantifier la densité des nombres rationnels dans la droite réelle en répondant à un problème qui se formule simplement: comment obtenir une très bonne approximation d'un réel par un rationnel dont les numérateur et dénominateur sont aussi petits que possibles ?

La théorie remonte l'antiquité grecque lorsqu'il est très vite apparu nécessaire de disposer de très bonnes approximations du nombre π par des rationnels de petite taille pour prédire efficacement la position des planètes et des étoiles. De nos jours, l'approximation diophantienne est très troitement liée à de très nombreux domaines mathématiques tels que la géomtrie, la théorie des probabilités, l'analyse ou encore l'algèbre. Elle continue également de jouer un rôle fondamental dans des domaines plus appliqués tels que la science informatique ou la théorie de l'information.

Il s'avère que le principe des tiroirs (si quatre objets sont disposés dans trois boîtes, au moins une des trois boîtes contient deux objets) permet déjà d'obtenir des résultats d'approximation très puissants. Partant de là, le projet proposé se développera dans un des domaines d'interaction et d'application ci-dessus cités en fonction des intérêts et des connaissances préalables des élèves. Il se basera sur le livre *Introduction to Diophantine Approximation* de Cassels.

Sujet 1.b *Jeux topologiques*

Alice et Bob s'adonnent au jeu suivant: Bob choisit une boule B_1 en dimension n et Alice une boule A_1 à l'intrieur de celle de Bob. Bob choisit ensuite une boule B_2 à l'intrieur de celle d'Alice. La partie se poursuit en imposant à chaque étape des contraintes sur les rayons des boules choisies par Alice et par Bob. Il en résulte une suite infinie de boules décroissantes pour l'inclusion: $B_1 \supseteq A_1 \supseteq B_2 \supseteq A_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$

Étant donné un ensemble S en dimension n, Alice remporte le jeu si elle peut s'assurer que l'intersection de toutes ses boules se situe dans S peu importe la manière dont Bob joue. L'ensemble S est alors dit gagnant.

Les ensembles gagnants jouissent de très riches propriétés: par exemple, ils sont "grands" (plus précisément: leur dimension dite fractale est aussi grande que possible) et ils sont stables sous diverses transformations.

Le projet consistera à comprendre en quoi peut consister une stratégie gagnante pour Alice et à étudier des exemples concrets d'ensembles gagnants. De tels ensembles apparaissent naturellement en théorie des nombres, en analyse, en théorie de la mesure ou encore en géométrie. Les élèves étudieront un exemple proposé par l'encadrant dans leur propre domaine de prédilection pour illustrer la puissance de la théorie.

Une référence bibliographique à partir de laquelle entamer le projet est le livre de Schmidt intitulé *Diophantine Approximation*.

Sujet 1.c *Propriétés de divisibilité des entiers*

Il est bien connu que les entiers naturels admettent une décomposition unique en produit de puissances de nombres premiers. L'analyse fine de la structure des diviseurs d'un entier recèle de très nombreuses questions, parfois ouvertes, liées la théorie des probabilités et à la théorie analytique des nombres. Elle est connue sous le nom évocateur de l'étude de l' "anatomie des entiers ". Un prototype de problème abondamment étudié est de déterminer la répartition statistique des entiers naturels admettant un grand nombre de diviseurs, un diviseur de “grande taille ” ou encore uniquement des diviseurs premiers “ petits ” (en un sens quantifié). Ces questions délicates, souvent liées à la compréhension de la répartition des nombres premiers, font appel à un large éventail de techniques analytiques et/ou de méthodes relevant de la théorie de la mesure. Le projet consistera à explorer quelques-uns des grands théorèmes de cette théorie. Le choix spécifique des thèmes d'étude se fera en concertation avec les élèves en fonction de leur(s) penchant(s) pour les problèmes gravitant autour de l'analyse, de la probabilité et/ou de l'arithmétique.

Sujet 2. *Théorèmes de Minkowski*

Encadrant: Antoine Marnat `antoine.marnat@u-pec.fr`

Le but du TER est de montrer quelques résultats concernant les réseaux et notamment les théorèmes de Minkowski.

Références principales :
- Bugeaud, *Approximation by algebraic numbers.*
- Cassels, An introduction to Diophantine Approximation.
- Cox, *Primes of the forme* $x^2 + ny^2$, Wiley.
- Falconer, *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications.*
- Gruber et Lekkerkerker, *Geometry of Numbers.*
- Scharlau-Opolka, *From Fermat to Minkowski.*
- W. M. Schmidt, *Diophantine Approximation.*
- Stewart-Tall, *Algebraic number theory.*
- Tauvel, *Mathématiques générales pour l'agrégation.*

Et plus généralement les livres de théorie des nombres.

Sujet 3. *Représentations du groupe $SU(2)$ et applications aux fonctions propres sur la sphère $\mathbb{S}^3$*

Encadrant: Chenmin Sun `chenmin.sun@cnrs.fr`

La sphère $\mathbb{S}^3$ est munie d'une structure de groupe de Lie

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}\,, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Le difféomorphisme entre $SU(2)$ et $\mathbb{S}^3$ est évident par la définition ci-dessus. De plus, la mesure de Haar normalisée sur $SU(2)$ correspond exactement à la mesure de probabilité uniforme sur la sphère $\mathbb{S}^3$. Par conséquent, l'analyse sur la sphère $\mathbb{S}^3$, en particulier l'etude des fonctions propres du Laplacien, se ramène è l'analyse harmonique sur le groupe $SU(2)$. L'objectif de ce stage est de comprendre l'analyse harmonique sur le groupe $SU(2)$ et ses applications : représentations de $SU(2)$ et lien avec les fonctions propres du Laplacien sur $\mathbb{S}^3$. Nous étudierons également, selon le temps disponible, l'une des deux applications suivantes :
- Applications à la mécanique quantique ;
- Estimations Lp des fonctions propres sur $\mathbb{S}^3$.

Sujet 4. *Le Lemme de Sard*

Encadrant: Etienne Sandier `sandier@u-pec.fr`

Le Lemme de Sard affirme que presque tous les ensembles de niveaux d'une application suffisamment différentiable d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Le TER consistera à étudier la preuve de ce Lemme donnée par Milnor puis d'explorer des points un peu subtils de ce résultat ou certaines de ses applications.

Références.
- J.Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint.*

• M. Hirsch. *Differential Topology.*
• H.Whitney. *A function not constant on a connected set of critical points.*

Sujet 5. *Marches aléatoires réversibles et réseaux électriques*

Encadrant: Julien Brémont `bremont@u-pec.fr`

Nous suivrons le petit livre (disponible sur le web en pdf, en anglais) de Doyle et Snell sur le sujet. Nous étudierons une interprétation des chaînes de Markov réversibles en termes de réseaux électriques. Nous montrerons le théorème de Polya sur la récurrence/transience de la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$.

Sujet 6. *Graphes et marches aléatoires*

Encadrant: Josue Corujo Rodríguez `josue.corujo-rodriguez@u-pec.fr`

Un graphe est une collection d'éléments appelés sommets reliés par des arêtes. L'ensemble des sommes est typiquement not V (cela vient du mot anglais vertices) et l'ensemble des arêtes E (cela vient du mot anglais edges), qui est un sous-ensemble de $V \times V$. Un graphe est aléatoire si l'on introduit une loi de probabilité pour déterminer quelles arêtes, voire quels sommets, sont présents. Une marche aléatoire est une suite (S_n) telle que $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, où (X_n) (appelés les incréments) est en général une suite de variables aléatoires indépendantes. Ces deux objets, les graphes et les marches aléatoires, sont très étudiés en probabilités. De plus, certaines questions sur les graphes peuvent être tudiées à l'aide des marches aléatoires. Dans ce projet, les étudiant.e.s vont travailler la thématique décrite ci-dessous dans laquelle on explorera la relation entre les graphes et les marches aléatoires.

Sujet 7. *Arbres de Décision et Forêts Aléatoires pour la Classification*

Encadrant: Jacques Printems `printems@u-pec.fr`

Les arbres de décision sont des algorithmes d'apprentissage automatique polyvalents qui peuvent effectuer à la fois des tâches de classification et de régression, et même des tâches à sorties multiples. Ce sont aussi les composants fondamentaux des forêts aléatoires qui figurent parmi les plus puissants des algorithmes d'apprentissage automatique disponibles actuellement.

Dans ce TER, il faudra d'abord étudier l'algorithme d'entraînement CART (Classification And Regression Trees) utilisé pour construire les arbres de décision binaires, puis la combinaison de leurs sorties pour construire les forêts aléatoires dans le cas d'une classification. Enfin, un cas concret d'implémentation sur la base de donnes MNIST des chiffres manuscrits devra être mis en oeuvre.

Références :

- Hastie T. J., Tibshirani R. J., Friedman J. H., *The elements of statistical learning : data mining, inference, and prediction*, Springer, 757 pages, 2009.
- Gron A. Bohy A., *Machine learning avec Scikit-Learn : mise en oeuvre et cas concrets*, Malakoff : Dunod, 336 pages, 2023.

Sujet 8. *C^*-algèbres et Indice des opérateurs de Toeplitz*

Encadrant: Jean-Marie Lescure `jean-marie.lescure@u-pec.fr`

But: découvrir quelques points fondamentaux du domaine des algàbres d'opérateurs.
Partie I : Introduction aux C^*-algèbres.
Partie II : Opérateurs compacts, opérateurs de Fredholm (alternative de Fredholm, indice).

Partie III : Opérateurs et C^*-algèbre de Toeplitz. Démonstration du résultat : *Si $f \in C(T)$, alors l'opérateur de Toeplitz Tf est de Fredholm si et seulement si f ne s'annule pas et dans ce cas* $\dim \mathrm{Ker} Tf - \dim \mathrm{coKer} Tf = -\mathrm{wind}(f)$ *o* $\mathrm{wind}(f)$ *est le nombre de tours de la courbe orientée $f(T)$ autour de* 0.

Prérequis : Topologie, opérateurs linaires continus, espaces de Hilbert.

Sujet 9. *Sujet au choix*

Encadrant: Antonin Monteil `antonin.monteil@u-pec.fr`

Sujet 9.a *Théorème de l'application conforme*

Il n'est pas très surprenant d'apprendre qu'un ouvert non vide et simplement connexe du plan (c'est-à-dire constitué d'un seul bloc, sans trous) est homéomorphe è un disque. Un fait plus étonnant est qu'un tel homéomorphisme peut être choisi conforme – c'est-à-dire tel qu'il préserve les angles – à condition toutefois que l'ouvert ne soit pas égal au plan tout entier. Ce résultat est le théorème de l'application conforme de Riemann.

Objectifs du sujet :

• Montrer qu'une fonction holomorphe et de dérivée non nulle définit une application conforme.

• Donner des exemples d'applications conformes entre ouverts du plan.

• Donner l'idée de la preuve du théorème d'invariance conforme.

Sujet 9.b *Théorème du point fixe de Brouwer et invariance du domaine*

On propose d'étudier le théorème de point fixe suivant :

Théorème du point fixe de Brouwer. *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet au moins un point fixe.*

Ce théorème a notamment pour conséquence le théorème d'invariance du domaine: *si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue et injective sur un ouvert U alors $f(U)$ est ouvert et f est un homéomorphisme entre U et $f(U)$.* Comme application immédiate, on en déduit que $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne peuvent être homéomorphes que si $n = m$.

Objectifs du sujet :

• Comprendre l'énoncé du théorème de Brouwer, s'en convaincre en dimension $n = 1$.

• Présenter une preuve du cas $n = 2$ à l'aide d'un résultat combinatoire élégant et à la preuve amusante : le lemme de Sperner.

• Déduire le théorème d'invariance du domaine à partir du théorème de point fixe de Brouwer.

• Généraliser en toute dimension.

Sujet 10. *Géométrie: Sujet au choix*

Encadrant: Thomas Richard `thomas.richard@u-pec.fr`

Sujet A) *Isopérimétrie et raccourcissement des courbes*

Sujet B) *Théorème de rigidité de Cauchy pour les polyhèdres convexes*

Sujet 11. *Le problème de Steiner*

Encadrant: Vincent Millot `vincent.millot@u-pec.fr`

Etant donné un ensemble fini de points distincts, le problème de Steiner consiste à trouver un ensemble (compact) connexe de longueur minimale contenant tous ces points. A titre d'exemple, nous pouvons chercher le réseau routier le plus court possible connectant des villes données. Lorsque les points à connecter sont au nombre de deux, une solution du problème de Steiner n'est rien d'autre que le chemin le plus court entre ces deux points. Ce sujet de TER consiste à montrer l'existence de solutions au problème de Steiner dans des espaces métriques assez généraux. Pour cela, nous serons amenés à étudier dans ce contexte la méthode directe du calcul des variations ainsi que les notions de longueur de courbe, mesures et dimensions de Hausdorff, distance de Hausdorff etc ... On se basera sur le livre *Topics on analysis in metric spaces* de L. Ambrosio et P. Tilli.

Sujet 12. *Courbes remplissant l'espace*

Encadrant: Stéphane Jaffard `stephane.jaffard@u-pec.fr`

Le premier exemple de "courbe remplissant l'espace" (en fait une surface du plan) a été construit par Peano en 1890. Il répondait à la question de savoir s'il existe une fonction continue et surjective d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans un carré (l'existence d'une bijection entre l'intervalle et le carré avait été découvert par Peano). Depuis, de nombreux exemples de telles fonctions ont été construits, par Hilbert, Pólya, Lebesgue, Sierpinski, ...

Le but du TER est d'étudier quelques unes de ces constructions, et de comprendre certaines de leurs propriétés. Celles-ci peuvent être de nature topologique (existence de points doubles, triples, ...), ou analytique (une telle fonction ne peut pas être partout régulière); on verra comment préciser cette irrégularité à partir de ces exemples historiques, et enfin comment des résultats généraux quantifiant l'irrégularité de de telles fonctions peuvent être obtenus. L'utilisation de telles fonctions en informatique pourra aussi être abordée.

Une référence sur ces questions est le petit livre (très abordable) de Hans Sagan: *Space-filling curves*. Les questions liées à la régularité nécessiteront la lecture ponctuelle d'articles de recherche récents (mais également abordables).