Nama	:	Dhanar Agastya Rakalangi
NRP	:	5002221075

1. Misal $A := [0, \infty)$, perhatikan barisan fungsi $(f_n(x))$ yang didefinisikan dengan

$$f_n(x) := nx/(1 + nx^2)$$

untuk $x \in A$

   (a) Tunjukkan bahwa (f_n) terbatas pada A untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

   Jawab:

   Perhatikan $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$ dengan $x \in A$, maka $x > 0$, $nx \geq 0$ dan $1 + nx^2 \geq 1$. Selanjutnya dengan definisi, terdapat $M > 0$ sedemikian hingga $|f_n| \leq M$, maka $f_n(x) \leq \dfrac{nx}{1}$. Dengan demikian, $f_n(x)$ terbatas pada A untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Tunjukkan bahwa (f_n) konvergen titik-demi-titik ke suatu fungsi f, tetapi tidak terbatas.

   Jawab:

   - Untuk $x = 0$, kita punya $f_n(0) = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga $f_n(x)$ konvergen ke 0.
   - Untuk $x > 0$, kita punya $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2} = \dfrac{1}{1/nx + x} \implies \dfrac{1}{x}$. Sehingga $f_n(x)$ konvergen ke $1/x$.

   Jadi, dapat disimpulkan (f_n) konvergen titik-demi-titik ke suatu fungsi f yaitu

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = 0 \\ 1/x & \text{jika } x > 0 \end{cases}$$

   .

   Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f tidak terbatas, kita gunakan kontradiksi. Asumsikan f terbatas, maka ada $M > 0$ sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A$. Kita ambil $x = \dfrac{1}{(3M)}$, maka $f\left(\dfrac{1}{(3M)}\right) = 3M$, jelas ini kontradiksi dengan asumsi bahwa f terbatas.

   $\therefore f$ tidak terbatas.

(c) Apakah (f_n) konvergen seragam pada A? Jelaskan!

Jawab:

Recall **Teorema** : Misalkan $f_n(x)$ adalah sebuah barisan fungsi kontinu pada suatu himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$. Jika (f_n) konvergen seragam pada A ke fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, maka f kontinu pada A.

Jelas bahwa $f_n(x)$ kontinu untuk $n \in \mathbb{N}$, hal ini diperoleh dari $g_n(x) = nx$ dan $h_n(x) = 1 + nx^2 \neq 0$ dimana kedua fungsi tersebut adalah fungsi polinom yang jelas kontinu pada $A \subseteq \mathbb{R}$, sehingga $f_n(x) = g_n(x)/h_n(x)$ kontinu pada A juga.

2. Diberikan deret fungsi $\sum f_n$ dengan $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n^2})$. Apakah deret tersebut konvergen seragam pada $[0, \pi]$? Jelaskan! (Petunjuk: Gunakan Weierstrass M-Test)

Jawab:

Recall **Teorema** (Weierstrass M-Test) : Misalkan $f_n : A \to \mathbb{R}$ adalah fungsi pada himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$. Jika ada barisan bilangan real positif M_n sehingga $|f_n(x)| \leq M_n$ untuk setiap $x \in A$ dan $n \in \mathbb{N}$, dan deret $\sum M_n$ konvergen, maka deret $\sum f_n$ konvergen seragam pada A.

Perhatikan ketaksamaan $\sin(\frac{x}{n^2}) \leq \frac{x}{n^2}$ untuk $x \in [0, \pi] \subseteq \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$.
Jika kita definisikan $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)$ dan $M_n(x) = \frac{x}{n^2}$, maka

$$|f_n(x)| \leq M_n(x) \quad \text{untuk } x \in [0, \pi] \text{ dan } n \in \mathbb{N}.$$

Selanjutnya perhatikan deret $\sum M_n = \sum \frac{x}{n^2}$. Dengan menggunakan sifat notasi sigma kita dapatkan $\sum \frac{x}{n^2} = x \sum \frac{1}{n^2}$. Karena deret $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergen dengan nilai konvergennya adalah $\frac{\pi^2}{6}$ (Deret Basel), maka deret $\sum M_n$ konvergen pada $[0, \pi]$. Sehingga, dari teorema kita peroleh bahwa deret $\sum f_n$ konvergen seragam pada $[0, \pi]$.

3. Tunjukkan bahwa $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ bukan himpunan tertutup.

Jawab:

Recall **Teorema** : Himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ adalah tertutup jika dan hanya jika A mengandung semua titik klusternya.

Recall **Definisi titik klaster** : Misalkan $A \in \mathbb{R}$. Titik $c \in \mathbb{R}$ dikatakan sebagai titik klaster dari A apabila untuk semua $\varepsilon > 0$ berlaku $(V_\varepsilon(c) \setminus \{c\}) \cap A \neq \emptyset$

Recall **Sifat Archimedean** : Jika $t > 0$, maka ada $n_t \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $0 < \frac{1}{n_t} < t$.

Pilih sebarang titik dan cek apakah merupakan titik kluster dari A. Untuk titik 0 , Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Perhatikan bahwa $V_\varepsilon(0)\backslash\{0\} = (-\varepsilon, 0)\cup(0, \varepsilon)$. **Sifat Archimedean** memastikan bahwa sebarang $\varepsilon > 0$ ada $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $0 < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Dengan demikian , $(V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}) \cap A \neq \emptyset$. Jadi , 0 adalah titik klaster dari A.
Namun $0 \notin A$, sehingga A tidak mengandung semua titik klusternya. Jadi, A bukan himpunan tertutup.

4. Tunjukkan bahwa $(-2, 1)$ tidak kompak di $\mathbb{R}$.
   Jawab:
   Recall **Teorema** (Heine-Borel) : Himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ adalah kompak jika dan hanya jika A tertutup dan terbatas.

   Recall **Teorema** : Himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ adalah tertutup jika dan hanya jika A mengandung semua titik klusternya.

   Akan ditunjukkan $(-2, 1)$ tidak tertutup, dengan membuktikan ada titik klaster yang di luar $(-2, 1)$. Ambil $x = 1 \notin (-2, 1)$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ berapapun mengakibatkan $V_\varepsilon(1) \cap (-2, 1) \neq \emptyset$. Jadi $(-2, 1)$ tidak tertutup. Sehingga dengan Teorema (Heine-Borel) didapat $(-2, 1)$ tidak kompak di $\mathbb{R}$

5. Diberikan fungsi $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$d\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \quad \text{untuk } x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

   Buktikan bahwa pasangan $(\mathbb{R}^2, d)$ adalah ruang metrik.
   Jawab:
   Misalkan $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   (a) $d(v_1, v_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Karena nilai mutlak selalu positif, maka $|x_1 - x_2| \geq 0$ dan $|y_1 - y_2| \geq 0$. Sehingga $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$. (**kepositifan**)

(b) Dari kiri

$\implies d(v_1, v_2) = 0 \iff |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0 \iff |x_1 - x_2| = 0$ dan $|y_1 - y_2| = 0 \iff x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2 \iff v_1 = v_2$.

Dari kanan

$\impliedby v_1 = v_2 \iff x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2 \implies d(v_1, v_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_1 - x_1| + |y_1 - y_1| = 0$. (**definit**)

(c) $d(v_1, v_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = d(v_2, v_1)$. (**simetri**)

(d) Misalkan $v_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} d(v_1, v_2) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= |(x_1 - x_3) + (x_3 - x_2)| + |(y_1 - y_3) + (y_3 - y_2)| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ &= d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2) \quad (\textbf{ketaksamaan segitiga}) \end{aligned}$$

Karena terpenuhi semua sifat, Maka $(\mathbb{R}^2, d)$ adalah ruang metrik.