Nama	:	Dhanar Agastya Rakalangi
NRP	:	5002221075

1. Perhatikan barisan fungsi (f_n) yang didefinisikan dengan $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$ untuk $x \in A := [0, \infty)$.

   (a) Tunjukkan bahwa (f_n) terbatas pada A untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

   Jawab:

   Perhatikan $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$ dengan $x \in A$, maka $x > 0$, $nx \geq 0$ dan $1 + nx^2 \geq 1$. Selanjutnya dengan definisi, terdapat $M > 0$ sedemikian hingga $|f_n| \leq M$, maka $f_n(x) \leq \dfrac{nx}{1}$. Dengan demikian, $f_n(x)$ terbatas pada A untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Tunjukkan bahwa (f_n) konvergen titik-demi-titik ke suatu fungsi f, tetapi tidak terbatas.

   Jawab:

   - Untuk $x = 0$, kita punya $f_n(0) = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga $f_n(x)$ konvergen ke 0.
   - Untuk $x > 0$, kita punya $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2} = \dfrac{1}{1/nx + x} \implies \dfrac{1}{x}$. Sehingga $f_n(x)$ konvergen ke $1/x$.

   Jadi, dapat disimpulkan (f_n) konvergen titik-demi-titik ke suatu fungsi f yaitu

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = 0 \\ 1/x & \text{jika } x > 0 \end{cases}$$

   .

   Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f tidak terbatas, kita gunakan kontradiksi. Asumsikan f terbatas, maka ada $M > 0$ sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A$. Kita ambil $x = \dfrac{1}{(3M)}$, maka $f\left(\dfrac{1}{(3M)}\right) = 3M$, jelas ini kontradiksi dengan asumsi bahwa f terbatas.

   $\therefore f$ tidak terbatas.

   (c) Apakah (f_n) konvergen seragam pada A? Jelaskan!

   Jawab:

   Tidak konvergen seragam, karena f tidak kontinu pada A, padahal (f_n) kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

2. Jika $\sum a_n$ konvergen mutlak dan (b_n) barisan terbatas, tunjukkan bahwa $\sum a_n b_n$ konvergen mutlak.
   Jawab:
   Karena $\sum a_n$ konvergen mutlak, maka $\sum |a_n|$ konvergen. Karena (b_n) terbatas, maka ada $M > 0$ sehingga $|b_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian, kita punya $|a_n b_n| \leq M|a_n|$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\sum |a_n|$ konvergen, maka $\sum M|a_n|$ juga konvergen. Dengan demikian, $\sum a_n b_n$ konvergen mutlak.

3. Tunjukkan bahwa deret $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots$ adalah konvergen,tetapi uji rasio dan uji akar gagal

   diterapkan untuk memeriksa konvergensi deret tersebut.

   Jawab:
   Kita perhatikan bahwa deret tersebut dapat ditulis sebagai berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3}$$

   - Uji Rasio :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n)^2}}{\frac{1}{(2n-1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2}{2n^2} = 1 \text{ (Tidak dapat ditentukan)} \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(2n+1)^3}}{{\frac{1}{2n}}^{3}} = 1 \text{ (Tidak dapat ditentukan)}
\end{aligned}$$

- Uji Akar :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} |x_n|^{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(2n-1)^{\frac{2}{n}}} \right| = e^{(\frac{2}{n})\ln(2n-1)} = e^0 = 1 \text{ (Tidak dapat ditentukan)}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} = \lim_{n\to\infty} |x_n|^{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(2n)^{\frac{3}{n}}} \right| = e^{(\frac{3}{n})\ln(2n)} = e^0 = 1 \text{ (Tidak dapat ditentukan)}$$

Kita perhatikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ adalah deret p-harmonik dengan $p = 2 > 1$ yang konvergen. Demikian pula dengan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3}$ adalah deret p-harmonik dengan $p = 3 > 1$ yang konvergen juga. Sehingga deret tersebut konvergen.

4. Diberikan $\sum a_n$ deret yang konvergen mutlak. Tunjukkan bahwa $\sum a_n \sin(nx)$ adalah deret yang konvergen mutlak dan seragam.

   Jawab:

   Karena $\sum a_n$ konvergen mutlak, maka $\sum |a_n|$ konvergen. Karena $\sin(nx)$ terbatas sehingga $|\sin(nx)| \leq 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian, kita punya $|a_n \sin(nx)| \leq |a_n|$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga didapatkan $\sum |a_n \sin(nx)| \leq \sum |a_n|$. Dengan kriteria uji banding, maka $\sum a_n \sin(nx)$ konvergen mutlak.

   Untuk menunjukkan bahwa $\sum a_n \sin(nx)$ konvergen seragam terutama pada interval $[0, 2\pi]$, kita gunakan kriteria Weierstrass M. Dalam kasus ini, kita dapat mengambil $f_n(x) = a_n \sin(nx)$ dan $M_n = |a_n|$. Kita sudah tahu bahwa $\sum |a_n|$ konvergen, maka sesuai Kriteria Weierstrass M, $\sum a_n \sin(nx)$ konvergen seragam pada interval $x \in [0, 2\pi]$.