



IF1709 - Analisis Numerik



Metode Secara Umum

MATERI KULIAH

Dani Pradana, M.T.
Dosen STMIK Bandung

Bandung, 2 Juni 2020



STMIK BANDUNG 1993



Pendahuluan



Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan (bidang fisika, kimia, Teknik Sipil, Teknik Mesin, Elektro dsb)

Sering model matematika tersebut rumit dan tidak dapat diselesaikan dengan **metode analitik**

Metode Analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah lazim.

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan (bidang fisika, kimia, Teknik Sipil, Teknik Mesin, Elektro dsb)

Sering model matematika tersebut rumit dan tidak dapat diselesaikan dengan **metode analitik**

Metode Analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah lazim.



Mengapa Metode Numerik?



Tidak semua permasalahan matematis atau perhitungan dapat diselesaikan dengan mudah.

Bahkan dalam prinsip matematik, dalam memandang permasalahan yang terlebih dahulu diperhatikan adalah apakah permasalahan tersebut mempunyai penyelesaian atau tidak.

Hal ini menjelaskan bahwa tidak semua permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan perhitungan biasa.



Persoalan Matematika



Bagaimana cara menyelesaikannya ?

1. Tentukan akar-akar persamaan polinom

$$23.4x^7 - 1.25x^6 + 120x^4 + 15x^3 - 120x^2 - x + 100 = 0$$

2. Selesaikan sistem persamaan linier

$$1.2a - 3b - 12c + 12d + 4.8e - 5.5f + 100g = 18$$

$$0.9a + 3b - c + 16d + 8e - 5f - 10g = 17$$

$$4.6a + 3b - 6c - 2d + 4e + 6.5f - 13g = 19$$

$$3.7a - 3b + 8c - 7d + 14e + 8.4f + 16g = 6$$

$$2.2a + 3b + 17c + 6d + 12e - 7.5f + 18g = 9$$

$$5.9a + 3b + 11c + 9d - 5e - 25f + 10g = 0$$

$$1.6a + 3b + 1.8c + 12d - 7e + 2.5f + g = -5$$

Soal 1, biasanya untuk polinom derajat 2 masih dapat dicari akar-akar polinom dengan rumus abc. Sedangkan untuk polinom dg derajat > 2 tidak terdapat rumus aljabar untuk menghitung akar polinom. Dengan cara pemfaktoran, semakin tinggi derajat polinom, jelas semakin sukar pemfaktorkannya.

Soal 2, juga tidak ada rumus yang baku untuk menemukan solusi sistem pers linier. Apabila sistem pers linier hanya mempunyai 2 peubah, kita dapat menemukan solusinya dengan grafik, aturan Cramer



Contoh

$$L = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Integral tsb. sangat sulit dan memerlukan pengetahuan matematis yang tinggi dan waktu yang cukup lama, padahal integral di atas adalah bentuk yang banyak digunakan di bidang teknik, khususnya pada analisa sinyal yang melibatkan sinyal frekwensi, filtering dan optimasi pola radiasi.

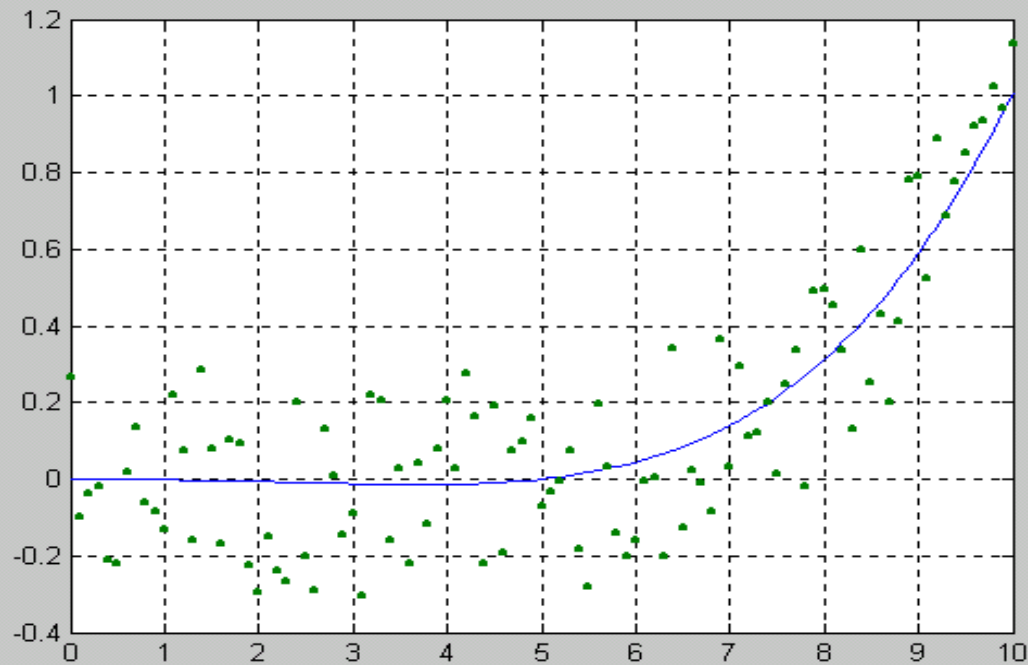
Diperlukan metode tertentu yang dapat digunakan untuk menghitung integral tersebut.

Meskipun metode tersebut tidak dapat menghasilkan nilai yang *exact* (tepat), setidaknya sudah mendekati nilai yang diharapkan.

Contoh Soal



Persoalan lain adalah bagaimana menentukan fungsi polynomial yang terbaik yang dapat mewakili suatu data seperti berikut:





Pendekatan Permasalahan



Secara analitik, untuk memperoleh fungsi polynomial dari jumlah data yang kecil (<20) masih bisa dilakukan, tetapi untuk jumlah data yang besar sulit sekali dilakukan karena akan membutuhkan waktu yang sangat lama.

Untuk itulah digunakan perhitungan komputer, dan pemakaian metode numerik menjadi penting untuk menyelesaikan permasalahan ini.

Bila persoalan merupakan persoalan yang sederhana atau ada teorema analisa matematika yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan tersebut, maka penyelesaian matematis (**metode analitik**) adalah penyelesaian *exact* yang harus digunakan.

Penyelesaian ini menjadi acuan bagi pemakaian metode pendekatan.

Bila persoalan sudah sangat sulit atau tidak mungkin diselesaikan secara matematis (analitik) karena tidak ada teorema analisa matematik yang dapat digunakan, maka dapat digunakan **metode numerik**.

Bila persoalan sudah merupakan persoalan yang mempunyai kompleksitas tinggi, sehingga metode numerikpun tidak dapat menyajikan penyelesaian dengan baik, maka dapat digunakan metode-metode **simulasi**.



Metode Analitik vs Numerik



Kebanyakan persoalan matematika tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik.

Metode analitik disebut juga metode *exact* yang menghasilkan solusi *exact* (solusi sejati).

Metode analitik ini unggul untuk sejumlah persoalan yang terbatas.

Padahal kenyataan persoalan matematis banyak yang rumit, sehingga tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik.

Kalau metode analitik tidak dapat diterapkan, maka solusi dapat dicari dengan metode numerik.

Metode Numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan biasa (+, -, / , *)



Selesaikan integral di bawah ini

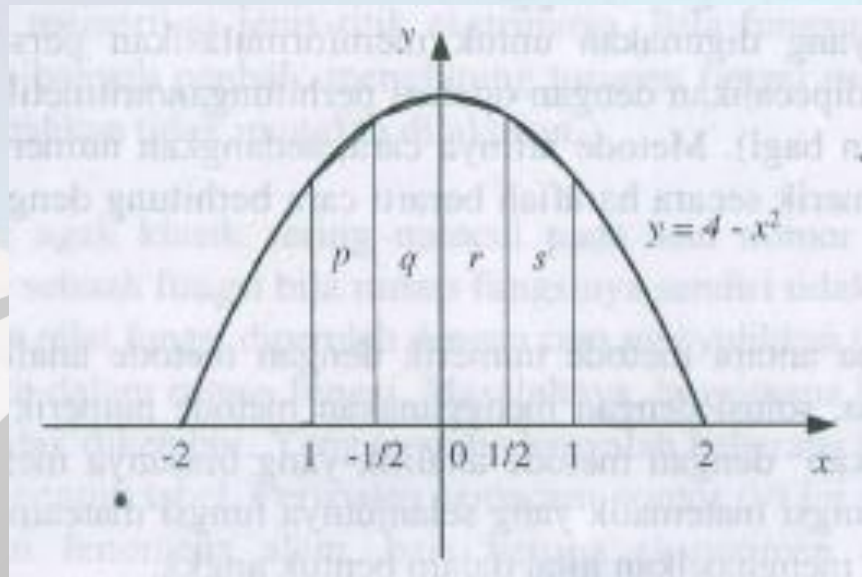
$$I = \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx$$

Metode Analitik

$$I = \int_{-1}^1 (4 - x^2) dx = [4x - x^3/3]_{x=-1}^{x=1} = \{4(1) - (1)/3\} - \{4(-1) - (-1)/3\} = 22/3$$



Metode Numerik



$$\begin{aligned}
 I &\approx p + q + r + s \\
 &= \{[f(-1) + f(-1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(-1/2) + f(0)] \times 0.5/2\} + \\
 &\quad \{[f(0) + f(1/2)] \times 0.5/2\} + \{[f(1/2) + f(1)] \times 0.5/2\} \\
 &\approx 0.5/2 \{f(-1) + 2f(-1/2) + 2f(0) + 2f(1/2) + f(1)\} \\
 &= 0.5/2 \{3 + 7.5 + 8 + 7.5 + 3\} \\
 &= 7.25
 \end{aligned}$$



Prinsip Metode Numerik



Digunakan untuk menyelesaikan persoalan di mana perhitungan secara analitik tidak dapat digunakan

Berangkat dari pemikiran bahwa permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan-pendekatan yang dapat dipertanggungjawabkan secara analitik.

Disajikan dalam bentuk algoritma-algoritma yang dapat dihitung secara cepat dan mudah.

Pendekatan yang digunakan merupakan pendekatan analisis matematis. Sehingga dasar pemikirannya tidak keluar jauh dari dasar pemikiran analitis, hanya saja pemakaian grafis dan teknik perhitungan yang mudah merupakan pertimbangan dalam pemakaian metode numerik.

Karena algoritma yang digunakan adl algoritma pendekatan maka dalam algoritma tersebut akan muncul istilah *iterasi* yaitu pengulangan proses perhitungan.

Perhitungan yang dilakukan secara berulang-ulang untuk terus-menerus diperoleh hasil yang mendekati nilai penyelesaian *exact*.

Dengan menggunakan metode pendekatan semacam ini, setiap nilai hasil perhitungan akan mempunyai *nilai error* (nilai kesalahan).

Pendekatan metode analitik selalu membahas tingkat kesalahan dan tingkat kecepatan proses yang akan terjadi.



Metode Analitik vs Numerik



Metode Numerik

Solusi selalu berbentuk angka

Solusi yang dihasilkan solusi pendekatan sehingga terdapat error

Metode Analitik

Solusi dapat berupa fungsi matematik

Solusi yang dihasilkan solusi exact

STMIK BANDUNG 1993



Kesalahan numerik adalah kesalahan yang timbul karena adanya proses pendekatan.

Hubungan kesalahan dan penyelesaian adalah :

$$\hat{x} = x + e$$

\hat{x} = nilai yang sebenarnya (nilai eksak)

x = nilai pendekatan yang dihasilkan dari metode numerik

e = kesalahan numerik.

Kesalahan fraksional adalah prosentase antara kesalahan dan nilai sebenarnya.

$$\epsilon = \left(\frac{e}{\hat{x}} \right) \times 100\%$$



Pada banyak permasalahan kesalahan fraksional di atas sulit atau tidak bisa dihitung, karena nilai eksaknya tidak diketahui.

Sehingga kesalahan fraksional dihitung berdasarkan nilai pendekatan yang diperoleh:

$$\epsilon = \left(\frac{e}{x} \right) \times 100\%$$

Di mana **e** pada waktu ke n adalah selisih nilai pendekatan ke n dan ke n-1

Perhitungan kesalahan semacam ini dilakukan untuk mencapai keadaan konvergensi pada suatu proses iterasi.



Peranan Komputer dalam Metode Numerik



Perhitungan dalam metode numerik berupa operasi aritmatika dan dilakukan berulang kali, sehingga komputer untuk mempercepat proses perhitungan tanpa membuat kesalahan

Dengan komputer kita dapat mencoba berbagai kemungkinan solusi yang terjadi akibat perubahan beberapa parameter. Solusi yang diperoleh juga dapat ditingkatkan ketelitiannya dengan mengubah nilai parameter

Metode Numerik merupakan alat bantu pemecahan masalah matematika yang sangat ampuh. Metode numerik mampu menangani sistem persamaan linier yang besar dan persamaan-persamaan yang rumit

Merupakan penyederhanaan matematika yang lebih tinggi menjadi operasi matematika yang mendasar.



Persoalan yang Diselesaikan dengan Metode Numerik



Menyelesaikan persamaan non-linier
Metode Tertutup : Tabel, Biseksi, Regula Falsi,
Metode Terbuka : Secant, Newton Raphson, Iterasi Sederhana

Menyelesaikan pers linier
Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss Jordan, Gauss Seidel

Differensiasi Numerik
Selisih Maju, Selisih Tengahan, Selisih Mundur

Integrasi Numerik
Integral Reimann, Integrasi Trapezoida, Simpson, Gauss

Interpolasi
Interpolasi Linier, Kuadrat, Kubik, Polinom Lagrange, Polinom Newton

Regresi
Regresi Linier dan Non Linier

Penyelesaian Persamaan Differensial
Euler, Taylor