

Sprawozdanie Agata Domasik 193577

Wstęp

W niniejszym sprawozdaniu przedstawię analizę metod aproksymacji profilu wysokościowego, zrealizowanych za pomocą interpolacji. Pierwsza z nich to interpolacja Lagrange'a, która do obliczeń wykorzystuje wielomian interpolacyjny Lagrange'a. Baza Lagrange do interpolacji składa się z funkcji określonych wzorem:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

for $i = 1, 2 \dots n + 1$.

Następna analizowana metoda to interpolacja funkcjami sklejanymi. Od metod wielomianowych odróżnia ją to, że interpolacja odbywa się "lokalnie", między poszczególnymi węzłami, bez uwzględniania ogółu. Metoda ta dla $n+1$ węzłów, działa według następujących wzorów:

$$S_j(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n - 1$$

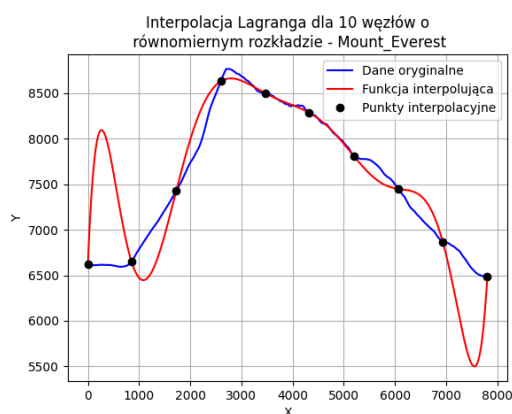
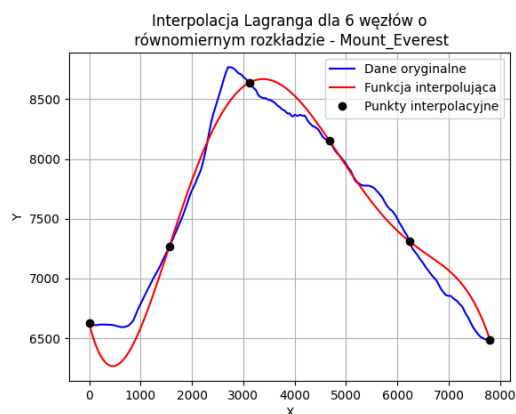
$$S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, n - 1$$

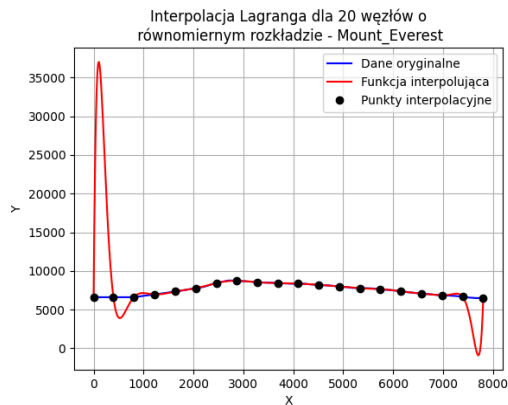
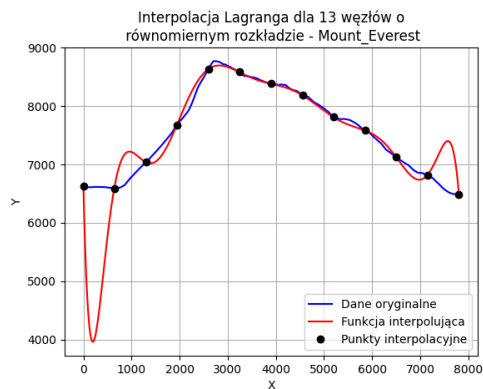
$$\text{Dla węzłów wewnętrznych } x_j: S'_{j-1}(x_j) = S'_j(x_j), \quad j = 1, \dots, n - 1$$

$$\text{Dla węzłów wewnętrznych } x_j: S''_{j-1}(x_j) = S''_j(x_j), \quad j = 1, \dots, n - 1$$

$$\text{Na krawędziach: } S''_0(x_0) = 0 \text{ i } S''_{n-1}(x_n) = 0$$

Analiza interpolacji Lagrange'a dla trasy Mount Everest





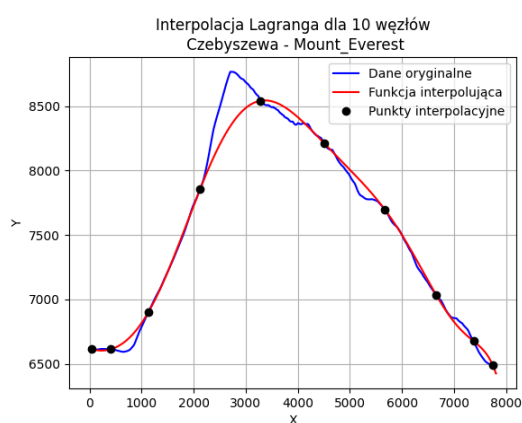
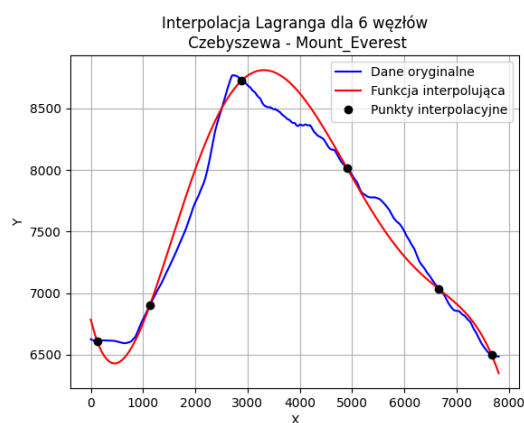
Powyższe wykresy przedstawiają efekty interpolacji Lagrange'a dla różnych ilości węzłów rozmieszczonych równomiernie w podobnych odległościach.

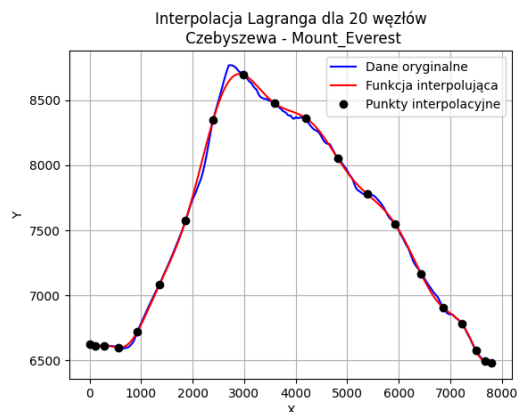
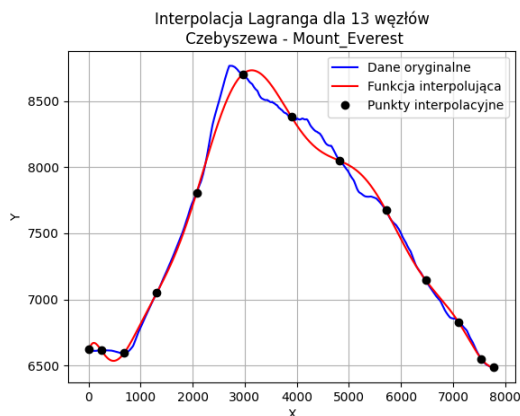
Jak widać na pierwszym wykresie, dla 6 węzłów metoda poradziła sobie z aproksymacją dość dobrze, jednak dla celów wymagających dużej dokładności, uzyskany efekt może nie być wystarczający.

Aby potencjalnie zwiększyć dokładność metoda została następnie przetestowana dla 10 węzłów, jednak wyniki przedstawione na drugim wykresie, zdecydowanie nie są zadowalające. Funkcja $f(x)$ jest dobrze interpolowana w środku przedziału, ale na krawędziach pojawiają się oscylacje.

Na kolejnym wykresie prezentującym interpolację dla 13 węzłów oscylacje również znacznie zaburzają poprawność odwzorowania funkcji, a dla 20 osiągnęły taką wielkość, że poprawna aproksymacja części środkowej, jest już niewidoczna.

Problem ten pojawia się, kiedy wykorzystuje się wielomiany wysokiego stopnia do interpolacji węzłów w równo-odległych punktach. Jest to efekt Rungego. Zatem analizowana metoda okazała się w tym przypadku nieskuteczna - zbyt dużo węzłów powoduje efekt Rungego, zbyt mało - niedokładną interpolację.



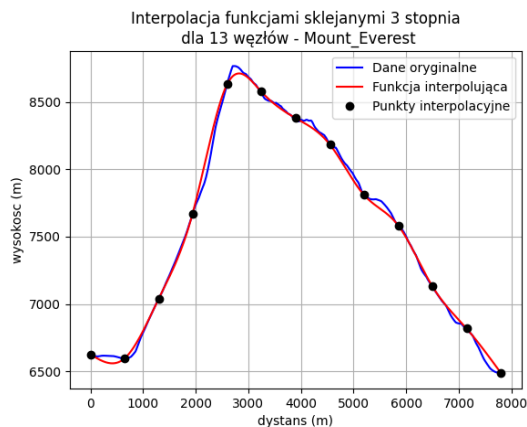
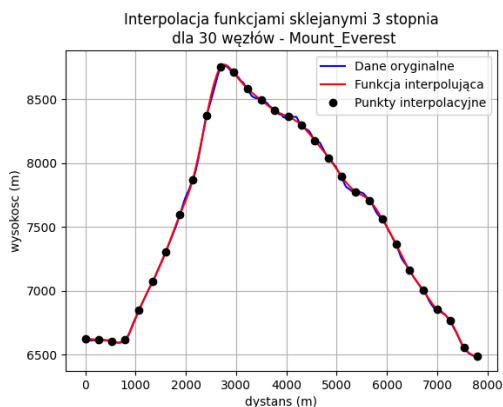
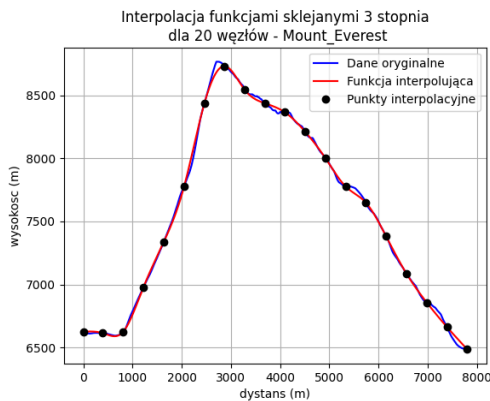
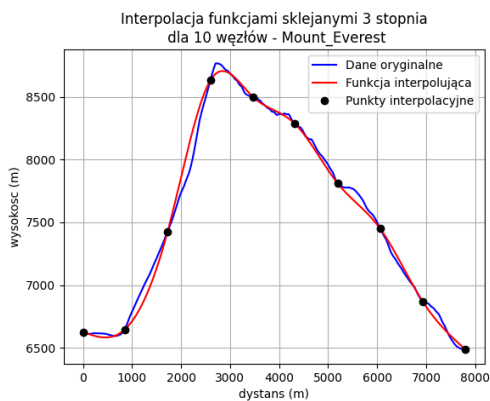


Następnie, aby ocenić wpływ rozmieszczenia węzłów na wyniki, zamiast rozkładu równomiernego, zastosowane zostały tzw węzły Chebysheva 2 stopnia.

Jak widać na pierwszym wykresie, dla 6 węzłów wyniki nie różnią się od tych uzyskanych z rozkładem równomiernym

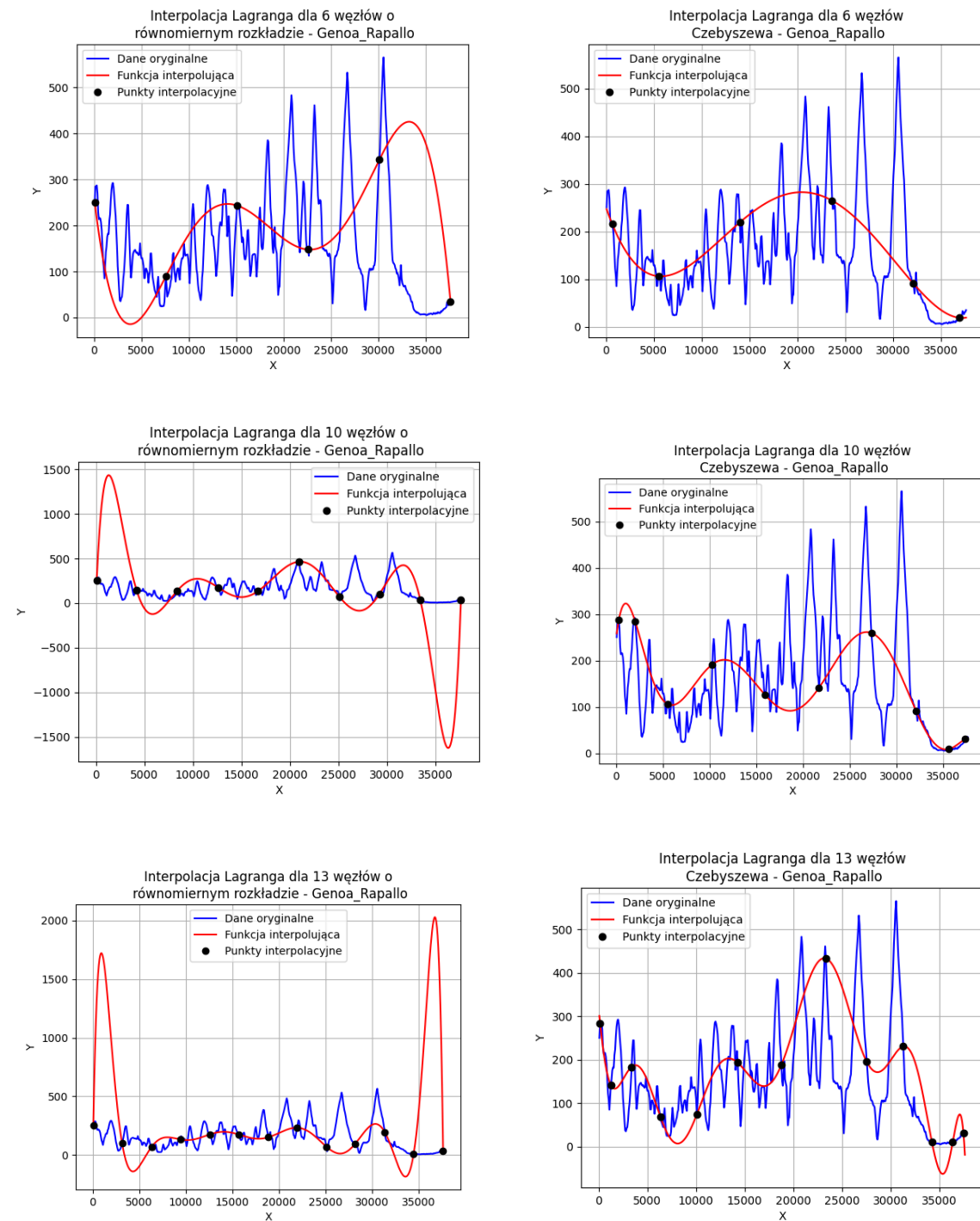
Na drugim wykresie można jednak zauważyć, że oscylacje występujące na krańcach przedziału zostały wyeliminowane, a uzyskane wyniki są dokładniejsze, niż w przypadku użycia 3 węzłów

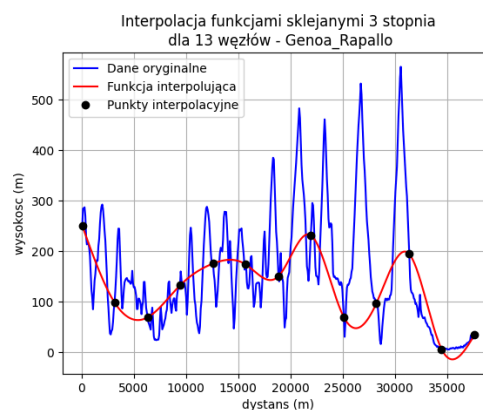
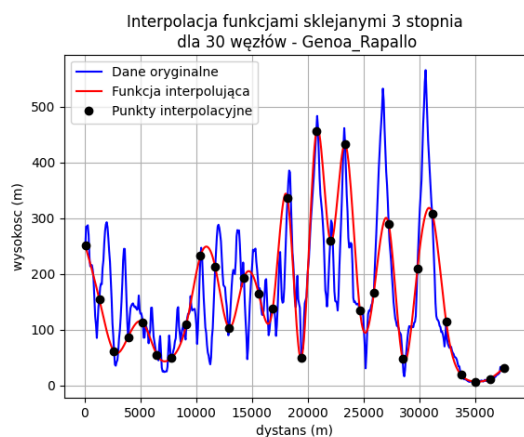
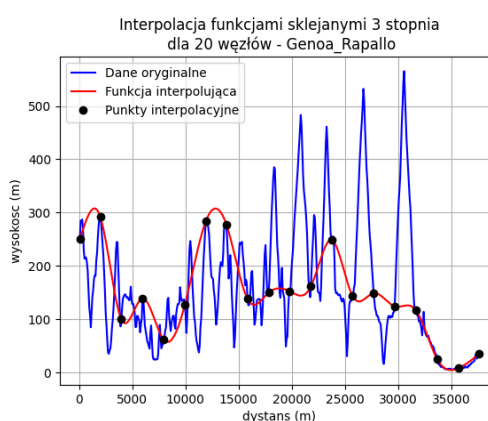
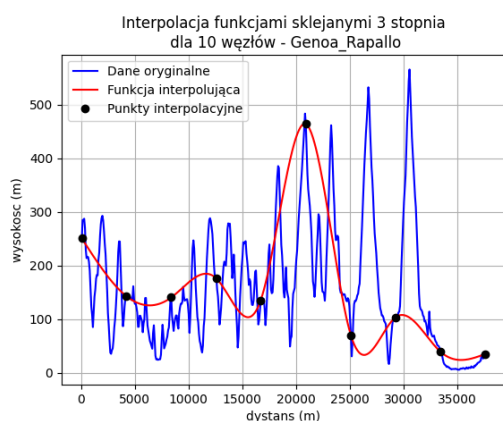
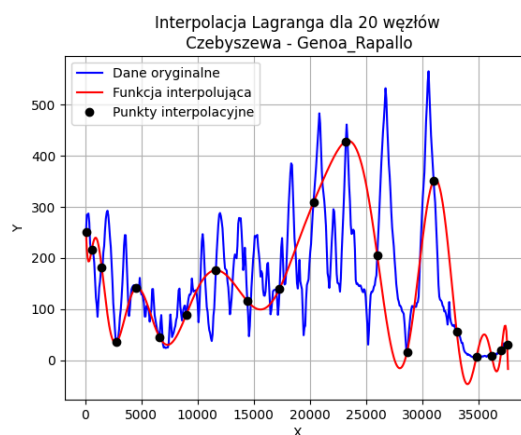
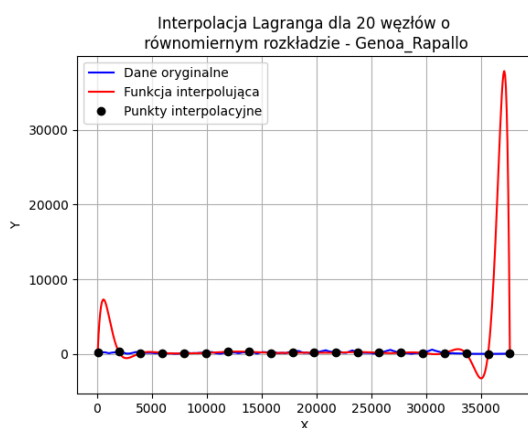
Wyniki uzyskane dla 13 i 20 węzłów również nie zostały zakłócone oscylacjami, a więc węzły Chebysheva pozwoliły na całkowite rozwiązanie tego problemu. Stało się tak dlatego, że są one gęściej rozmieszczone bliżej krańców przedziału. W tym przypadku interpolacja Lagrange'a okazała się stabilna i dokładna.



Funkcje sklepane 3 stopnia, które działają lokalnie między węzłami, wykazały większą stabilność, a wraz ze wzrostem ilości punktów węzłowych rosła również jej dokładność.

Analiza interpolacji Lagrange'a dla trasy Genoa-Rapallo





Warunki wysokościowe tej trasy, w przeciwieństwie do poprzedniej są znacznie bardziej zróżnicowane. Zawiera ona wiele nagłych, trudnych do przewidzenia wzrostów i spadków.

Jak widać na pierwszych dwóch wykresach przedstawiających interpolacje dla 6 węzłów (równomiernych i Czebyszewa) funkcja oryginalna nie została dobrze odwzorowana. W obydwu pojawiły się oscylacje, które w rzeczywistości nie powinny się w tych miejscach znaleźć. Ciężko również stwierdzić, który rozkład węzłów zadziałał lepiej.

Wyniki uzyskane dla 10 węzłów również nie wyglądają zadowalająco, ponadto dla rozkładu równomiernego wystąpił efekt Rungego.

Dla 13 i 20 węzłów rozłożonych równomiernie oscylacje nasiliły się, natomiast dla 20 węzłów Czebyszewa, można zaobserwować poprawę w dokładności interpolacji. Uzyskany wynik nie jest idealny, jednak prezentuje się znacznie lepiej niż poprzednie.

W porównaniu do trasy Mount Everest, której profil wysokościowy mniej zróżnicowany, w tym przypadku potrzebna była znacznie większa ilość węzłów aby osiągnąć względną dokładność. Efekty oscylacyjne są więc bardziej wyraźne w przypadku funkcji z wieloma lokalnymi ekstremami. W takich przypadkach, możliwe, że wielomian interpolacyjny stara się zbyt dokładnie dopasować do każdego punktu węzłowego, co prowadzi do nadmiernych oscylacji i niestabilności.

Podsumowanie

Interpolacja Lagrange'a okazała się nieefektywna przy większej liczbie węzłów równomiernie rozmieszczonych z powodu efektu Rungego, który prowadzi do znacznych oscylacji na krańcach przedziałów. Funkcje sklepane, które działają lokalnie między węzłami, wykazały większą stabilność, a wraz ze wzrostem ilości punktów węzłowych rosła również jej dokładność. Innym rozwiązaniem tego problemu jest Wykorzystanie węzłów Chebysheva, które pozwala na znaczne zredukowanie oscylacji i poprawienie dokładności interpolacji, co szczególnie zauważalne jest przy większej liczbie węzłów. Rozmieszczenie tych węzłów gęściej na krańcach przedziału stabilizuje interpolację. Warto również zauważyć, iż trasy o bardziej zróżnicowanym profilu wysokościowym, takie jak trasa Genoa-Rapallo, wymagają większej liczby węzłów do uzyskania dokładnej interpolacji. W przypadku takich tras, efekt oscylacyjny jest bardziej wyraźny, co utrudnia uzyskanie precyzyjnego odwzorowania funkcji.