Sprawozdanie Agata Domasik 193577

Metody rozwiązywania równań liniowych

Wstęp

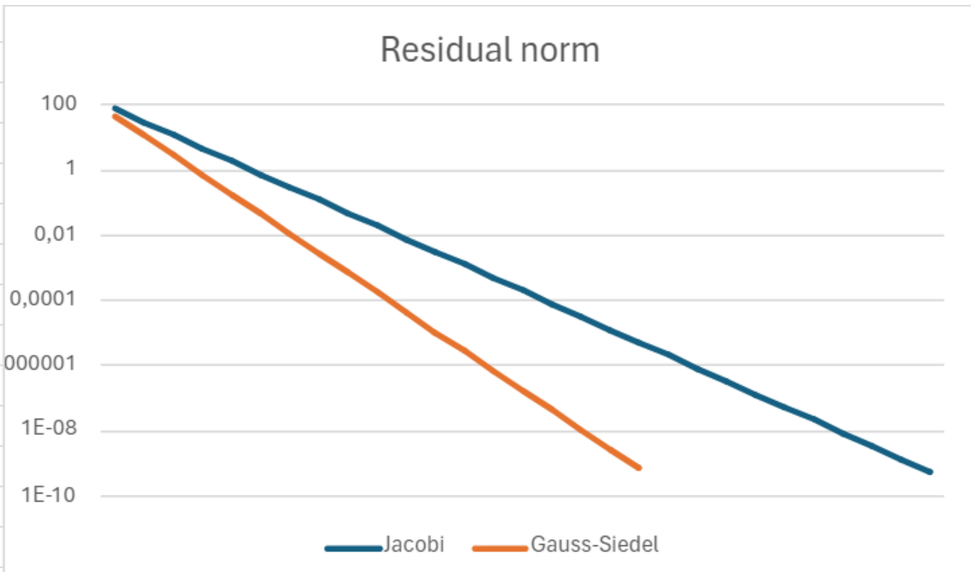
W niniejszym sprawozdaniu przedstawię analizę i porównanie różnych metod rozwiązywania układów równań liniowych. Implementacja projektu została wykonana w języku c++.

Zadanie A

W ramach pierwszego zadania utworzony został układ równań Ax = b, gdzie A jest macierzą pasmową o rozmiarze NxN, zawierającą 5 diagonali o wartościach kolejno a1 = 10, a2 = a3 = -1, oraz b jest wektorem o długości N, którego n−ty element ma wartość sin(n · 4). Macierz A zaimplementowana została jako klasa Matrix o parametrach *size*, jako rozmiar macierzy i *A,* jako tablica dynamiczna zawierająca wartości macierzy.

Zadanie B

W ramach drugiego zadania zaimplementowane zostały metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych: Jacobiego i Gaussa–Seidla, jako metody publiczne klasy Matrix. W obydwu metodach zainicjalizowany został wektor rezydualny postaci res(k) = Ax(k) − b. Dla każdej iteracji przeprowadzana jest normalizacja euklidesowa residuum, aby określić, w którym momencie uzyskane rozwiązanie jest odpowiednio dokładne. Jako próg dokładności zastosowano 10^{-9}.

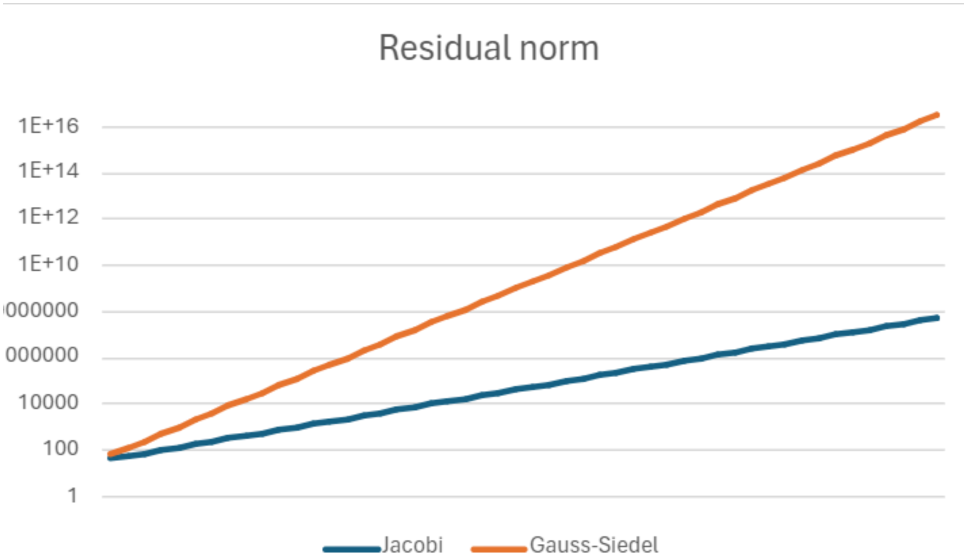


Na powyższym wykresie przedstawiono jak zmienia się norma residuum w kolejnych iteracjach wykonywanych w celu wyznaczenia rozwiązania (oś y w skali logarytmicznej). Jak widać metoda Gaussa-Seidla okazała się bardziej efektywna - zakończyła się po 19 iteracjach, natomiast metoda Jacobiego potrzebowała ok 30% iteracji więcej (29). Znaczna różnica widoczna jest również w całkowitym czasie wykonywania funkcji. Dla metody Gaussa-Seidla wyniósł on 1,13 s, a dla metody Jacobiego 2,41 co jest wynikiem ponad 2 razy słabszym.

Metoda Gaussa-Seidla wykazuje szybszą zbieżność, ponieważ aktualizuje wartości przybliżone iteracyjnie, korzystając z najbardziej aktualnych wartości, które są już obliczone w tej samej iteracji. W przypadku metody Jacobiego, korzysta się z wartości obliczonych w poprzednich iteracjach, co może prowadzić do wolniejszej zbieżności.

Zadanie C

W ramach zadania trzeciego macierz A została zmodyfikowana, jej diagonale wyniosły odpowiednio a1 = 3, a2 = a3 = -1. Dla powstałego układu równań Ax = b zastosowane zostały utworzone na potrzeby poprzedniego zadania metody.



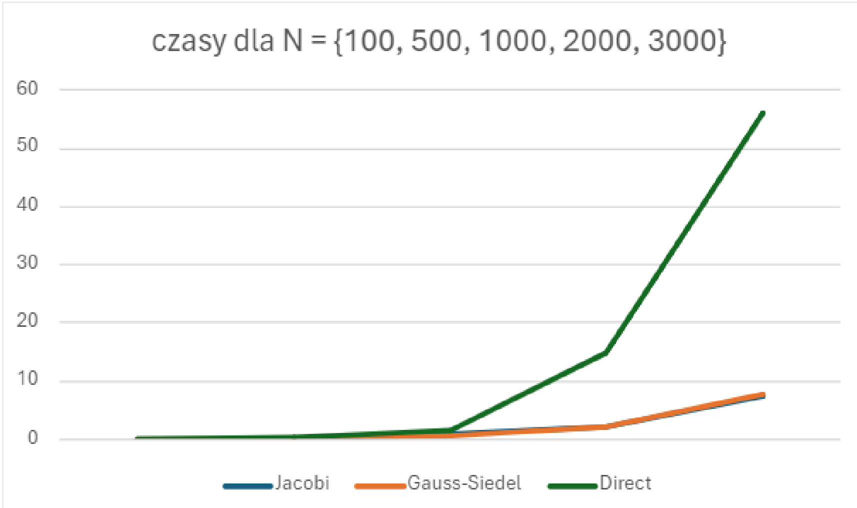
Jak widać na powyższym wykresie dla takich wartości elementów macierzy A, metody nie zbiegły się. Rosnąca norma rezydualna świadczy o tym, że otrzymywany wynik przybliżony był coraz bardziej odległy od rzeczywistego wyniku. Różnica w wartościach na głównej przekątnej i sumie wartości bezwzględnych pozostałych elementów w wierszach nie wystarczająco duża, by macierz była diagonalnie dominująca, a co za tym idzie, by gwarantować zbieżność metod.

Zadanie D

W ramach tego zadania zaimplementowana została metoda bezpośredniego rozwiązania układów równań liniowych, wykorzystująca faktoryzację LU. Została ona użyta do rozwiązania równania badanego w p. C. W tym przypadku obliczona norma residuum wyniosła ok 10^{-13}, co oznacza, że uzyskany wynik jest bardzo dokładny. Metoda bezpośrednia, mimo większej złożoności obliczeniowej, sprawdziła się dla tego zestawu danych lepiej niż metody iteracyjne.

Zadanie E

W ramach ostatniego zadania zbadane zostały zależności czasu wyznaczenia rozwiązania dla trzech metod rozwiązywania w zależności od liczby niewiadomych N = {100, 500, 1000, 2000, 3000} dla macierzy opisanej w zadaniu A.



Łatwo zauważyć, że dla równań o stosunkowo małej ilości niewiadomych, czas działania metody iteracyjnych oraz metody bezpośredniej był podobny. Jednak dla dwóch ostatnich macierzy o rozmiarze 2000 i 3000 różnica była znacząca. Dla największej macierzy 3000x3000 rozwiązanie bezpośrednie potrzebowało ok minuty na dostarczenie wyniku, podczas gdy metodom iteracyjnym wystarczyło ok 10s. Niemal 6-krotna różnica wynika z wyższej złożoności obliczeniowej metody bezpośredniej $O(n^3)$, która dla dużych rozmiarów danych znacznie wpływa na szybkość wykonywania algorytmu.

Podsumowanie

Wyniki wskazują, że metoda Gaussa-Seidla jest efektywniejsza od metody Jacobiego, osiągając szybszą zbieżność i krótszy czas wykonania. Jednakże dla niektórych przypadków, zwłaszcza gdy wartości na przekątnej macierzy nie są odpowiednio różniące się od sumy wartości bezwzględnych pozostałych elementów w wierszach, metody iteracyjne mogą nie osiągnąć zbieżności. Metoda bezpośrednia, mimo większej złożoności obliczeniowej, sprawdza się lepiej dla takich przypadków, zapewniając bardzo dokładne wyniki. Analiza czasu wykonania dla różnych rozmiarów danych wykazuje, że dla dużych macierzy metoda bezpośrednia staje się znacznie bardziej czasochłonna niż metody iteracyjne, co wynika z jej złożoności obliczeniowej O(n^3).