Complexité et Calculabilité - 21/22

Rapport Épisode II

SAT contre-attaque

Étudiants:

Sylvain Lascostes

Kalvin Andrade

Aguibou Barry

Responsables:

Anca Muscholl

Alexandre Blanché

Groupe: Projet 4-I

Réduction du problème vers SAT

1 Nombre de variables au pire des cas:

- Premièrement en ce qui concerne la variable $x_{e,i}$, sachant que l'indice e correspond à chaque arête du graphe et i chaque convertisseur alors on aura $|E| * N$. N étant le nombre minimal de convertisseur pour la communication de toute paire de sommets et ce nombre peut être au pire des cas égal au nombre d'arête du graphe dans le cas ou chaque sommet du graphe est relié à un autre sommet de type différent. C'est ce qui ramenera au pire des cas à $|E| * |E| = |E|^2$.

- Pour ce qui concerne la variable $p_{j,j'}$, vue que cette variable est crée pour chaque couple de composantes homogènes $X_j, X_{j'}$. si chaque sommet du graphe n'a que des voisins de type différent alors au pire des cas le nombre de composantes homogènes égal au nombre de sommets du graphe alors on aura $|V| * (|V| - 1) = |V|^2 - |V|$.

- Et en fin pour la variable $l_{j,h}$, en attribuant un niveau h à chaque composante connexe, on obtient au pire des cas $|V| * h$ puisque le nombre de composante connexe au pire des cas est égal au nombre de sommets du graphe.

  En supposant que $n = |V|$ et $m = |E|$, on obtient: $m^2 + (n^2 - n) + (n * h)$

2

Au plus 1 arête pour chaque convertisseur:

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,N} \bigwedge_{\substack{uv,u'v' \in E \\ uv \neq u'v'}} (\neg x_{uv,i} \vee \neg x_{u'v',i})$$

Au plus 1 convertisseur pour chaque arête:

$$\bigwedge_{i,j=1,\ldots,N} \bigwedge_{uv \in E} (\neg x_{uv,i} \vee \neg x_{uv,j})$$

$$\varphi_1 = \bigwedge_{i,j=1,\ldots,N} \bigwedge_{\substack{uv,u'v' \in E \\ uv \neq u'v'}} ((\neg x_{uv,i} \vee \neg x_{u'v',i}) \wedge (\neg x_{uv,i} \vee \neg x_{uv,j}))$$

- Pour que l'ensemble des convertisseurs soit exactement de taille N, il faut aussi rajouter la condition : chaque convertisseur est associé à au moins une arête.

- Il n'est pas nécessaire de l'inclure car si un convertisseur n'est associé à aucune arête, alors il n'appartient pas à C.

3

$(n = 1, .., h)$ signifie qu'on exclue la racine car elle n'a pas de parent

Au moins 1:

$$\bigwedge_{\substack{i,j=1,\dots,C_H \\ i\neq j}} \bigwedge_{n=1,\dots,h} (p_{i,j} \wedge l_{i,n} \wedge l_{j,n-1})$$

Au plus 1:

$$\bigwedge_{i,j,j'=1,\dots,C_H} (\neg p_{i,j} \vee \neg p_{i,j'})$$

$$\varphi_2 = \bigwedge_{i,j,j'=1,\dots,C_H} \bigwedge_{n=1,\dots,h} ((\neg p_{i,j} \vee \neg p_{i,j'}) \wedge (p_{i,j} \wedge l_{i,n} \wedge l_{j,n-1}))$$

4

$$\varphi_3 = \bigwedge_{\substack{m,n=0,\dots,h \\ m\neq n}} \bigwedge_{i=1,\dots,C_H} ((\neg l_{i,m} \vee \neg l_{i,n}) \wedge (l_{i,m} \vee l_{i,n}))$$

5

Ici il faut qu'il y ait au moins une composante du graphe qui n'est pas parmi les k premier niveau pour que l'arbre soit de profondeur strictement supérieur à k.
Et pour trouver cette formule on applique la règle d'implication qui dit que si $a \to b$ alors $\neg a \vee b$

$$\varphi_4 = \bigwedge_{j,=1,\dots,C_H} \bigwedge_{n=1,\dots,k} \neg l_{j,k} \to \bigvee_{m=k+1,\dots,h} l_{j,m}$$

$$\varphi_4 = \neg(\bigwedge_{j,=1,\dots,C_H} \bigwedge_{n=1,\dots,k} \neg l_{j,k}) \vee \bigvee_{m=k+1,\dots,h} l_{j,m}$$

6

$$\varphi_5 = \bigwedge_{j,j'=1,\dots,C_H} (p_{j,j'}) \wedge \bigvee_{\substack{u\in X_j \\ v\in X_{j'} \\ uv\in E}} (\bigvee_{i=1,\dots,N} x_{uv,i})$$

7

$$\varphi_6 = \bigwedge_{j,j'=1,\dots,C_H} (p_{j,j'}) \wedge \bigvee_{\substack{m=0,\dots,h-1 \\ n=m+1}} (l_{j',m} \wedge l_{j,n})$$

8

$$\varphi_7 = \neg(\bigwedge_{j,j'=1,\ldots,C_H} (p_{j,j'})) \vee (\bigvee_{\substack{u\in X_j\\ v\in X_{j'}\\ uv\in E\\ i=1,\ldots,N}} x_{uv,i} \wedge \bigvee_{\substack{m=0,\ldots,h-1\\ n=m+1}} (l_{j',m} \wedge l_{j,n}))$$

9

$$\phi_{G,k} = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_7$$

Taille de $\varphi_1 = 4(m^2N^2) = 4m^4$
Taille de $\varphi_2 = 5(n^3h) = 5(n^3(n-1))$
Taille de $\varphi_3 = 4((n-1)^2n) = 4(n^3-2n^2+n)$
Taille de $\varphi_4 = nk$
Taille de $\varphi_7 = 4n^2$

Donc la taille de la formule est: $5n^4 + 4(m^4 - n^2 + n) - n^3 + nk$

10

11

On a réduit notre problème d'optimisation à SAT en un temps polynomial.

On prend en entrée un graphe G(V,E) et un entier k qui correspond au coût.
On encode cette entrée en CNF.
On appelle SAT-solver sur notre instance.
Si l'entrée est négative : renvoyer C
Sinon : renvoyer l'ensemble vide