

1 Definições Elementares

Definição 1.1. Sejam $f : X \rightarrow X$ uma função, $p \in X$ e $n \geq 1$. Dizemos que p é um *ponto periódico com período n* , se $f^n(p) = p$. Se $f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então n é chamado de *período principal*. Em particular, se $n = 1$, dizemos que p é um *ponto fixo*.

Definição 1.2. Sejam $f : X \rightarrow X$ uma função, $p \in X$ e $n \geq 1$. Dizemos que p é um *ponto eventualmente periódico com período n* , se existe $m > 1$ tal que $f^k(p) = f^{k+n}(p)$ para todo $k \geq m$. Em particular, se $n = 1$, dizemos que p é um *ponto eventualmente fixo*.

Definição 1.3. Sejam $f : X \rightarrow X$ uma função e $x \in X$. O conjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$$

é a *órbita* de x .

Definição 1.4. Sejam $f : X \rightarrow X$ uma função, p um ponto periódico período n e $x \in X$. Dizemos que x *tende assintoticamente para p* se $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$. O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para p , denotado por $W^s(p)$, é chamado de *conjunto estável de p* . Dizemos que x *tende assintoticamente para infinito* se $\lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(x)| = \infty$. O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para infinito, denotado por $W^s(\infty)$, é chamado de *conjunto estável do infinito*.

Proposição 1.5. Sejam $f : X \rightarrow X$ uma função e p_1, p_2 pontos periódicos distintos. Então $W^s(p_1) \cap W^s(p_2) = \emptyset$.

Demonstração. Sejam n_1, n_2 os períodos de p_1, p_2 , respectivamente. Suponha que exista $x \in W^s(p_1) \cap W^s(p_2)$. Sabemos que $|f^{kn_1}(x) - p_1| \rightarrow 0$ e $|f^{kn_2}(x) - p_2| \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$. Desse modo, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que $|f^{kn_1}(x) - p_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|f^{kn_2}(x) - p_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k > N$. Portanto, $|p_1 - p_2| = |p_1 - f^{kn_1 n_2}(x) + f^{kn_1 n_2}(x) - p_2| \leq |f^{kn_2 n_1}(x) - p_1| + |f^{kn_1 n_2}(x) - p_2| < \varepsilon$. Temos então que $p = q$, pois ε é arbitrário. Absurdo. \square

2 Implicações da Diferenciabilidade

Proposição 2.1. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(I) \subset I$ ou $f(I) \supset I$, então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Seja $I = [a, b]$. Suponha que $f(I) \subset I$. Considere a função contínua $g(x) = f(x) - x$ definida em I . Como $f(a), f(b) \in I$, temos que $g(a) = f(a) - a \geq 0$ e $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $p \in I$ tal que $g(p) = f(p) - p = 0$. Desse modo, p é ponto fixo de f .

Suponha que $f(I) \supset I$. Por definição, existem $c, d \in I$ tais que $f(c) = a$ e $f(d) = b$. Considere a função contínua $g(x) = f(x) - x$ definida em I . Temos que $g(c) = a - c \leq 0$ e $g(d) = b - d \geq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $p \in I$ tal que $g(p) = f(p) - p = 0$. Desse modo, p é ponto fixo de f . \square

Teorema 2.2. *Seja $f : I \rightarrow I$ uma função diferenciável. Se $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in I$, então f admite um único ponto fixo e $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todo $x, y \in I$ distintos.*

Demonstração. Sejam $x, y \in I$, $x < y$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [x, y]$ tal que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Portanto, $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| < |x - y|$.

Pela Proposição 2.1, f admite um ponto fixo p . Suponha que exista um ponto fixo q diferente de p . Então, pela primeira parte da demonstração, $|p - q| = |f(p) - f(q)| < |p - q|$. Absurdo. \square

Definição 2.3. Sejam $f : I \rightarrow I$ uma função diferenciável e p um ponto periódico com período principal n . Dizemos que p é um *ponto hiperbólico* se $|(f^n)'(p)| \neq 1$. Se $|(f^n)'(p)| > 1$, dizemos que p é um *ponto atrator* e se $|(f^n)'(p)| < 1$, dizemos que p é um *ponto repulsor*. Dizemos que p é um *ponto não hiperbólico* se $|(f^n)'(p)| = 1$.

Teorema 2.4. *Sejam $f : I \rightarrow I$ uma função C^1 e p um ponto periódico com período principal n . Se p é um ponto hiperbólico atrator, existe uma vizinhança de p contida em $W^s(p)$. Se p é um ponto hiperbólico repulsor, existe uma vizinhança U de p tal que, se $x \in U$ e $x \neq p$, $f^{kn}(x) \notin U$ para algum $k \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que p é um ponto hiperbólico atrator. Como f' é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Pelo Teorema do Valor Médio, se $x \in U$ então $|f^n(x) - p| = |f^n(x) - f^n(p)| \leq \lambda|x - p|$. Por indução, $|f^{kn}(x) - p| \leq \lambda^k|x - p|$. Desse modo, $f^{kn}(x) \rightarrow p$ quando $k \rightarrow \infty$.

Suponha que p é ponto hiperbólico repulsor. De maneira análoga, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| \geq \lambda > 1$ para todo $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Fixado $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, $x \neq p$, suponha que $f^{kn}(x) \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ para todo $k \geq 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, $|f^{kn}(x) - p| \geq \lambda^k|x - p|$ para todo $k \geq 1$. Absurdo, pois $\lambda^k|x - p| \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. \square

Observação. A segunda parte do teorema afirma que existe uma vizinhança de p tal que todo ponto diferente de p nessa vizinhança é movida para fora dela após um número de iterações da f . Observe o ponto pode voltar para vizinhança após mais um número finito de iterações da f , pois sabemos que o valor absoluto da derivada é maior que 1 apenas nessa vizinhança.

3 Função Logística I: Estudo Inicial

Durante essa seção e as próximas, estudaremos a dinâmica da função logística, que é dada por $F(x) = \mu x(1 - x)$ para $\mu > 0$.

Proposição 3.1. *Se $\mu > 1$, então*

1. $F(1) = F(0) = 0$ e $F(\frac{1}{\mu}) = F(p_\mu) = p_\mu$, onde $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.
2. $0 < p_\mu < 1$.
3. o vértice da parábola de F é o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4})$.

Demonstração. Aplicação direta das definições. □

Proposição 3.2. *Se $\mu > 1$, então $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$.*

Demonstração. Se $x < 0$, a sequência $(x, F(x), F^2(x), \dots)$ é estritamente decrescente pois $F(x) < x$. Se $(F^n(x))_n \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow \infty$, a continuidade de F implica que $(F^{n+1}(x))_n \rightarrow F(x_0) < x_0$. Absurdo. Portanto, $(F^n(x))_n \rightarrow -\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $F(x) < 0$ para todo $x > 1$, concluímos que $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$. □

Proposição 3.3. *Se $1 < \mu < 3$, então*

1. 0 é um ponto repulsor e p_μ é um ponto atrator.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p_\mu$ para todo $x \in (0, 1)$.

Demonstração. A primeira parte é verdadeira pois $|F'(0)| = \mu > 1$ e $|F'(p_\mu)| = |2 - \mu| < 1$, quando $1 < \mu < 3$.

Falta provar o item 2. □

Desse modo, conhecemos completamente a dinâmica de F quando $1 < \mu < 3$:

$$W^s(0) = \{0, 1\}, W^s(p_\mu) = (0, 1) \text{ e } W^s(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

4 Função Logística II: Conjuntos de Cantor

Se $\mu > 4$, então $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} > 1$, ou seja, existem pontos em $[0, 1]$ que não permanecem em $[0, 1]$ após uma iteração de F . Em vista da Proposição 3.2, a dinâmica de F em tais pontos é determinada, pois pertencem ao conjunto $W^s(\infty)$. De modo mais geral, se um ponto de $[0, 1]$ não permanece $[0, 1]$ após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto $W^s(\infty)$.

Desse modo, considere o conjunto $\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1]\}$, que é formado pelos pontos que permanecem em $[0, 1]$ após n iterações de F , e considere o conjunto $\Lambda = \cap \Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1] \text{ para todo } n \geq 1\}$, que é formado pelos pontos que permanecem para sempre em $[0, 1]$ por iterações de F . Observe que $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, pois se $F^{n+1}(x) = F(F^n(x)) \in [0, 1]$, então $F^n(x) \in [0, 1]$.

Proposição 4.1. *Se $\mu > 4$, então*

1. $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, onde $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ e $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$.
2. Λ_n é a união de 2^n intervalos fechados disjuntos.
3. $F^n : I \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde I é qualquer um dos 2^n intervalos fechados disjuntos que formam Λ_n .

Demonstração. Analisando F' observamos que F é estritamente crescente no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ e estritamente decrescente no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Como $F(0) = F(1) = 0$ e $F(\frac{1}{2}) > 1$, o Teorema do Valor Intermediário garante que existem $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$ e $x_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ tais que $F(x_1) = F(x_2) = 1$. Os valores de x_1 e x_2 são encontrados resolvendo a equação de segundo grau $\mu x(1 - x) = 1$. Logo, $F([0, x_1]) = F([x_2, 1]) = [0, 1]$ e $F(x) > 1$ para todo $x \in (x_1, x_2)$. Portanto, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e o item 1 está demonstrado.

A demonstração dos itens 2 e 3 será feita por indução. De acordo com a primeira parte, Λ_1 é a união de $2^1 = 2$ intervalos fechados disjuntos e F restrita a cada um desses intervalos é uma bijeção com o intervalo $[0, 1]$.

Suponha que Λ_{k-1} é a união de 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos de modo que $F^{k-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora para todo intervalo $[a, b]$ que forma Λ_{k-1} . Sendo F^{k-1} bijetora, $(F^{k-1})'(x) > 0$ ou $(F^{k-1})'(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$. Como as demonstrações para os dois casos são análogas, podemos supor que $(F^{k-1})'(x) > 0$.

Como F^{k-1} é estritamente crescente, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existem únicos $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in (a, b)$ tais que

- (a) $a < \overline{x}_1 < \overline{x}_2 < b$,
- (b) $F^{k-1}([a, \overline{x}_1]) = [0, x_1]$,
- (c) $F^{k-1}((\overline{x}_1, \overline{x}_2)) = (x_1, x_2)$ e

$$(d) \ F^{k-1}([\overline{x_2}, 1]) = [x_2, 1].$$

As condições acima garantem que os intervalos $[a, \overline{x_1}]$, $[\overline{x_2}, b]$ são disjuntos e que $F^k(x) = F(F^{k-1}(x)) > 1$ para todo $x \in (\overline{x_1}, \overline{x_2})$. Também, temos que $F^k([a, \overline{x_1}]) = F([0, x_1]) = [0, 1]$ e, analogamente, $F^k([\overline{x_2}, 1]) = [0, 1]$. Além disso,

$$(F^k)'([a, \overline{x_1}]) = F'(F^{k-1}([a, \overline{x_1}]))(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) = F'([0, x_1])(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) > 0$$

e, analogamente,

$$(F^k)'([\overline{x_2}, 1]) = F'([x_2, 1])(F^{k-1})'([\overline{x_2}, 1]) < 0.$$

Logo, F^k é uma bijeção entre $[a, \overline{x_1}]$ e $[0, 1]$ e entre $[\overline{x_2}, 1]$ e $[0, 1]$.

Portanto, a partir de cada intervalo fechado de Λ_{k-1} , construímos dois novos intervalos fechados disjuntos tais que F^k restrita em cada um desses intervalos é um bijeção com $[0, 1]$ e, dessa maneira, esses intervalos estão contidos em Λ_k . Desse modo, se Λ_{k-1} é formado por 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos, então Λ_k é formado por $2 \times 2^{k-1} = 2^k$ intervalos fechados disjuntos. Assim, o resultado está provado. \square

Definição 4.2 (Conjunto de Cantor). Um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}$ não vazio é um *conjunto de Cantor* se

1. Γ é fechado e limitado,
2. Γ não possui intervalos e
3. Todo ponto de Γ é um ponto de acumulação de Γ .

Lema 4.3. Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então

1. existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.
2. o tamanho de cada intervalo fechado em Λ_n é menor que $\frac{1}{\lambda^n}$.
3. dados $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$, existe um intervalo fechado $I \subset \Lambda_n$, para algum $n \geq 1$, que contém x e cujo tamanho é menor que ε tal que $F^n : I \rightarrow [0, 1]$ é bijetora.

Demonstração. 1. Inicialmente, observamos que $\mu^2 - 4\mu > 1$ quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Desse modo, $F'(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$ e $F'(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$, onde x_1 e x_2 são como na Proposição 4.1. Observamos também que F' é estritamente decrescente, pois $F''(x) = -2\mu < 0$. Portanto, $F'(x) \geq F'(x_1) > 1$ para todo $x \in [0, x_1]$ e $F'(x) \leq F'(x_2) < -1$ para todo $x \in [x_2, 1]$. De acordo com a Proposição 4.1, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e, desse modo, $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in \Lambda_1$. Sendo F' contínua e Λ_1 compacto, existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.

2. De acordo com a Proposição 4.1, Λ_n é formado pela união de 2^n intervalos disjuntos. Seja $[a, b]$ um desses intervalos. Se $x \in [a, b]$, em particular $F^k(x) \in \Lambda_1$ para todo $0 \leq k < n$. Desse modo, de acordo com o item anterior, temos que $(F^n)'(x) = F'(F^{n-1}(x)) \times F'(F^{n-2}(x)) \times \cdots \times F'(x) > \lambda^n$.

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$|F^n(b) - F^n(a)| = |(F^n)'(c)| |b - a| > \lambda^n |b - a|$$

Como $F^n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é contínua e bijetora, temos que $|F^n(b) - F^n(a)| = 1$. Desse modo, $|b - a| < \frac{1}{\lambda^n}$ e a afirmação está provada.

3. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^n} < \varepsilon$, onde $\lambda > 1$ é como no primeiro item. Em particular, $x \in \Lambda_n$. Seja I um dos intervalos que formam Λ_n e que contém x . Pelo item anterior, o tamanho de I é menor que ε . Além disso, pela Proposição 4.1, $F^n : I \rightarrow [0, 1]$ é bijetora e, portanto, a afirmação está provada.

□

Teorema 4.4. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. Λ é não vazio pois $0 \in \Lambda$, é limitado pois $\Lambda_1 \in [0, 1]$ e é fechado pois é intersecção de conjuntos fechados.

Agora, suponha que Λ contém algum intervalo. Então, existem $x, y \in I$, $x < y$, tais que $[x, y] \subset \Lambda$. Seja k tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |x - y|$. Em particular, $[x, y] \subset \Lambda_k$. Mas, de acordo com o Lema 4.3, os intervalos de Λ_k possuem tamanho menor que $\frac{1}{\lambda^k}$. Absurdo e, portanto, Λ não possui intervalos.

Por fim, observe que, se x é um ponto extremo de algum intervalo de Λ_n , então $x \in \Lambda$ pois $F^{n+1}(x) = 0$. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Em particular, $x \in \Lambda_k$ e, portanto, x é elemento de algum intervalo cujo tamanho é menor que ε , de acordo com o Lema 4.3. Portanto, existe $y \in \Lambda$ ponto extremo do intervalo que contém x tal que $|x - y| < \varepsilon$. Como ε é arbitrário, concluímos que x é um ponto de acumulação de Λ . □

Observação. O Teorema 4.4 é válido para $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais difícil.

5 Função Logística III: Caos

Proposição 5.1. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então o conjunto de pontos periódicos de $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é denso em Λ .*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 4.3, o intervalo fechado $I \subset \Lambda_k$ que contém x possui tamanho menor que ε . Pela Proposição 4.1, $F^k : I \rightarrow [0, 1]$ é bijetora. Como $F^k(I) \supset I$, a Proposição 2.1 afirma que existe $y \in I$ tal que $F^k(y) = y$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \varepsilon$, o resultado está provado. \square

Definição 5.2. Seja $f : D \rightarrow D$ uma função. Dizemos que f é *topologicamente transitiva* se dados $x, y \in D$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in D$ e $k \geq 1$ tais que $|z - x| < \varepsilon$ e $|f^k(z) - y| < \varepsilon$.

Proposição 5.3. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Existe $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 4.3, o tamanho de cada intervalo fechado em Λ_k é menor que $\frac{1}{\lambda^k}$ e, portanto, menor que ε . Como $x \in \Lambda_k$, existe um intervalo $[a, b] \subset \Lambda_k$ que contém x . Pela Proposição 4.1, $F^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $z \in [a, b]$ tal que $F^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$, concluímos que F é topologicamente transitiva. \square

Definição 5.4. Seja $f : D \rightarrow D$ uma função. Dizemos que f *depende sensivelmente das condições iniciais* se para algum $\delta > 0$, dados $x \in D$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in D$ e $k \geq 1$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Proposição 5.5. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Como na demonstração da Proposição anterior, seja I o intervalo fechado contido em Λ_k que contém x e cujo tamanho é menor que ε . Como $F^k : I \rightarrow [0, 1]$ é um bijeção, então $F^k(a) = 0$ e $F^k(b) = 1$, onde a e b são pontos extremos de I . Como $F(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, segue que $F^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Se $F^k(x) \in [0, \frac{1}{2})$, então $|F^k(x) - F^k(b)| = |F^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $F^k(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$, então $|F^k(x) - F^k(a)| = |F^k(x)| > \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, temos o resultado para $\delta = \frac{1}{2}$. \square

Definição 5.6. Seja $f : D \rightarrow D$ uma função. Dizemos que f é *caótica* se

1. O conjunto de pontos periódicos de f é denso em D .
2. f é topologicamente transitiva.
3. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema 5.7. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$ é caótica.*

Demonstração. O resultado segue das Proposições 5.1, 5.3 e 5.5. □

Observação. O Teorema 5.7 é válido para $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais difícil.

Teorema 5.8. *Se D é um subconjunto infinito de \mathbb{R} e $f : D \rightarrow D$ é uma função topologicamente transitiva cujo conjunto de pontos periódicos é denso, então f é caótica.*

Demonstração. Por demonstrar. □

6 Função Logística IV: Conjugação Topológica

Definição 6.1. Sejam $f : A \rightarrow A$, $g : B \rightarrow B$ e $\tau : A \rightarrow B$ funções. Dizemos que f e g são *topologicamente conjugadas por τ* , se τ é um homeomorfismo tal que $\tau \circ f = g \circ \tau$.

Proposição 6.2. Sejam $f : A \rightarrow A$, $g : B \rightarrow B$ e $\tau : A \rightarrow B$ funções. Se f e g são *topologicamente conjugadas por τ* , então

1. g e f são *topologicamente conjugadas por τ^{-1}* .
2. $\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$ para todo $n \geq 1$.
3. p é ponto periódico de f se e somente se $\tau(p)$ é ponto periódico de g . Além disso, os períodos principais de p e $\tau(p)$ são iguais.
4. $W^s(\tau(p)) = \tau(W^s(p))$, se p é um ponto periódico de f .
5. o conjunto de pontos periódicos de f é denso se e somente se o conjunto de pontos periódicos de g é denso.
6. f é *topologicamente transitiva* se e somente se g é *topologicamente transitiva*.

Demonstração. 1. Como τ é um homeomorfismo, a função inversa τ^{-1} existe e também é um homeomorfismo. Além disso, $\tau \circ f = g \circ \tau$ implica que $f \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ g$. Portanto, τ^{-1} é conjugação topológica de g e f .

2. Por definição, a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $\tau \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ \tau$. Desse modo, $\tau \circ f^n = \tau \circ f^{n-1} \circ f = g^{n-1} \circ \tau \circ f = g^{n-1} \circ g \circ \tau = g^n \circ \tau$. Portanto, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

3. Suponha que p é um ponto periódico de f com período principal n . Desse modo, $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) = \tau(p)$. Se $k = 1, \dots, n-1$, então $g^k(\tau(p)) = \tau(f^k(p)) \neq \tau(p)$, pois $f^k(p) \neq p$ e τ é injetora. Portanto, $\tau(p)$ é um ponto periódico de g com período principal n . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

4. Suponha que p é um ponto periódico com período n . Se $x \in W^s(\tau(p))$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{kn}(x) = \tau(p)$. Como τ^{-1} é contínua, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(\tau^{-1}(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau^{-1}(g^{kn}(x)) = p$. Então, $x \in \tau(W^s(p))$ pois $\tau^{-1}(x) \in W^s(p)$.

Por outro lado, se $\tau(x) \in \tau(W^s(p))$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$. Como τ é contínua, temos $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{kn}(\tau(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau(f^{kn}(x)) = \tau(p)$ e, portanto, $\tau(x) \in W^s(\tau(p))$.

5. Se o conjunto $Per(f)$ dos pontos periódicos de f é denso em A , então $\tau(Per(f))$ é denso em B pois τ é um homeomorfismo. Como $\tau(Per(f)) = Per(g)$, temos que $Per(g)$ é denso em B . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

6. Inicialmente, sendo τ é contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que, se $z \in A$, $|x - z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$, então $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$, onde $n \geq 1$ é fixado.

Se $x', y' \in B$, existem $x, y \in A$ tais que $\tau(x) = x'$ e $\tau(y) = y'$. Como f é topologicamente transitiva, existe $z \in A$ tal que $|x - z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$ para algum $n \geq 1$. Portanto, $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$. Se $\tau(z) = z'$, então $|x' - z'| < \varepsilon$ e $|y' - g^n(z')| < \varepsilon$ e, portanto, g é topologicamente transitiva. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga. \square

Lema 6.3. A função $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é caótica.

Demonstração. Inicialmente, provaremos por indução que $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^n$. Pela definição de T , a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $T^{n-1} : [\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] \rightarrow [0, 1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^{n-1}$. Fixado k , podemos supor que $T^{n-1}(\frac{k}{2^{n-1}}) = 0$ e $T^{n-1}(\frac{k+1}{2^{n-1}}) = 1$. O caso em que $T^{n-1}(\frac{k}{2^{n-1}}) = 1$ e $T^{n-1}(\frac{k+1}{2^{n-1}}) = 0$ é tratado de maneira análoga. Temos que $T^{n-1}(\bar{x}) = \frac{1}{2}$, onde $\bar{x} = \frac{2k+1}{2^n}$ é o ponto médio do intervalo $[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}]$. Portanto, $T^n(\bar{x}) = T(T^{n-1}(\bar{x})) = T(\frac{1}{2}) = 1$, $T^n(\frac{k}{2^{n-1}}) = T(0) = 0$ e $T^n(\frac{k+1}{2^{n-1}}) = T(1) = 0$. Desse modo, $T^n : [\frac{k}{2^{n-1}}, \bar{x}] \rightarrow [0, 1]$ e $T^n : [\bar{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] \rightarrow [0, 1]$ são funções lineares (pois são composições de funções lineares) e bijetoras para todo $0 \leq k < 2^{n-1}$. Observando que $[\frac{k}{2^{n-1}}, \bar{x}] = [\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}]$ e $[\bar{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] = [\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}]$, concluímos que $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^n$ e, portanto, a afirmação está provada.

Para provar que T é caótica, seja $\varepsilon > 0$. Pelo afirmação do parágrafo anterior, existem $n \geq 1$ e $I = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ tais que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $x \in I$ e $T^n : I \rightarrow [0, 1]$ é bijetora.

Seja $x \in [0, 1]$. Como $T(I) \supset I$, a Proposição 2.1 afirma que existe $p \in I$ tal que $T^n(p) = p$. Observando que $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que o conjunto de pontos periódicos de T é denso em $[0, 1]$.

Sejam $x, y \in [0, 1]$. Como $T^n : I \rightarrow [0, 1]$ é sobrejetora, existe $z \in I$ tal que $T^n(z) = y$. Observando que $|z - x| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $|T^n(z) - y| = 0 < \varepsilon$, concluímos que T é topologicamente transitiva.

Seja $x \in [0, 1]$. Como $T^n : I \rightarrow [0, 1]$ é sobrejetora, existem $a, b \in I$ tais que $T^n(a) = 0$ e $T^n(b) = 1$. Se $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, então $|T^n(x) - T^n(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$ e se $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, então $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $|x - b| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que T depende sensivelmente das condições iniciais. \square

Teorema 6.4. *Se $\mu = 4$, então F é caótica.*

Demonstração. Seja $\tau(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ definida no intervalo $[0, 1]$. τ é homeomorfismo pois τ' existe em $[0, 1]$ e $\tau' > 0$ em $(0, 1)$.

Se $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, então

$$\tau \circ T(x) = \tau(2x) = \sin^2(\pi x)$$

e se $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, então

$$\tau \circ T(x) = \tau(2 - 2x) = \sin^2(\pi - \pi x) = (\sin(\pi) \cos(\pi x) - \sin(\pi x) \cos(\pi))^2 = \sin^2(\pi x)$$

Por outro lado,

$$F \circ \tau(x) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin^2(\pi x)$$

Desse modo, $\tau \circ T = F \circ \tau$. Portanto, de acordo com o Teorema 5.7, a Proposição 6.2 e o Lema 6.3, F é caótica. \square

7 Função Logística V: Dinâmica Simbólica

Definição 7.1. $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) : s_k = 0 \text{ ou } s_k = 1 \text{ para todo } k \geq 0\}$ é o espaço das sequências de 0 e 1.

Proposição 7.2. A função $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}$$

é uma distância em Σ_2 .

Demonstração. Inicialmente, observamos que a função d é bem definida pois

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

Além disso, é fácil verificar que as propriedades de uma distância são válidas em d , isto é,

- (a) $d(s, t) \geq 0$
- (b) $d(s, t) = 0$ se e somente se $s = t$
- (c) $d(s, t) = d(t, s)$
- (d) $d(s, t) \leq d(s, r) + d(r, t)$

para todo $r, s, t \in \Sigma_2$. Portanto, d é uma distância e a afirmação está provada. \square

Proposição 7.3. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots), t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$. Se $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, então $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$. Por outro lado, se $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$, então $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$.

Demonstração. Suponha que $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$. Desse modo,

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

Por outro lado, se $s_i \neq t_i$ para algum $0 \leq i \leq n$, então

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n}$$

Portanto, se $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, concluímos que $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$. \square

Definição 7.4. A função $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$, dada por $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$, é chamada de função *shift*.

Proposição 7.5. σ é contínua.

Demonstração. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Se $t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$ e $d(s, t) < \frac{1}{2^{n+1}}$, então $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n+1$, de acordo com a Proposição 7.3. Como $\sigma(s) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ e $\sigma(t) = (t_1 t_2 t_3 \dots)$, temos que as primeiras $n+1$ entradas de $\sigma(s)$ e $\sigma(t)$ são iguais. Novamente, utilizando a Proposição 7.3, temos que $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Como s é um ponto arbitrário em Σ_2 , concluímos que σ é contínua. \square

Proposição 7.6. Se σ é a função shift, então

1. existem 2^n pontos periódicos com período n .
2. existe um ponto cuja órbita é densa.
3. o conjunto dos pontos periódicos é denso.
4. o conjunto dos pontos não periódicos que são eventualmente periódicos é denso.
5. o conjunto dos pontos que não são periódicos e nem eventualmente periódicos é denso.

Demonstração. 1. Se $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ é um ponto periódico com período n , então

$$\sigma^k(\sigma^n(s)) = (s_{n+k} s_{n+k+1} s_{n+k+2} \dots) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots) = \sigma^k(s)$$

para todo $k \geq 0$. Desse modo, s é formado pela repetição das entradas $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem 2^n sequências distintas para $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ e, portanto, a afirmação está provada.

2. Considere o ponto $s^* = (0 1 00 01 10 11 000 001 \dots)$ formado por todos os blocos de tamanho 1, depois por todos os blocos de tamanho 2, e assim sucessivamente.

Sejam $s \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. É fácil ver que existe $k \geq 0$ de modo que $\sigma^k(s^*)$ e s são iguais nas primeiras $n+1$ entradas. De acordo com a Proposição 7.3, $d(s, \sigma^k(s^*)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, a afirmação está provada.

3. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Considere o ponto periódico t com período $n+1$ formado pela repetição da sequência $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$. De acordo com a Proposição 7.3, $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, a afirmação está provada. \square

8 Teorema de Sharkovsky

Ao longo dessa seção, f denotará uma função contínua de um intervalo em \mathbb{R} , onde o intervalo não precisa ser fechado ou limitado.

Definição 8.1. Se I_0, I_1, \dots, I_{n-1} são intervalos fechados, $n > 1$,

1. dizemos que I_0 cobre I_1 , e denotamos por $I_0 \longrightarrow I_1$, se $f(I_0) \supset I_1$.
2. dizemos que I_0, I_1, \dots, I_{n-1} é um caminho entre I_0 e I_{n-1} , e denotamos por $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1}$, se $f(I_i) \supset I_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-2$.
3. dizemos que I_0, I_1, \dots, I_{n-1} é um ciclo entre I_0 e I_{n-1} , e denotamos por $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$, se $f(I_i) \supset I_{i+1}$, $i = 0, \dots, n-2$, e $f(I_{n-1}) \supset I_0$.

Lema 8.2. Se $I_0 \longrightarrow I_1$, então $f(I'_0) = I_1$ para algum intervalo fechado $I'_0 \subset I_0$.

Demonstração. Se $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [c, d]$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existem $p, q \in I_0$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$. Suponha que $p \leq q$ e defina $I'_0 = [a', b']$, onde

$$b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\} \text{ e } a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$$

Sendo f contínua temos que $f(a') = c$ e $f(b') = d$ e, desse modo, $f(I'_0) \supset I_1$. Se $f(x) < c$ para algum $x \in I'_0$, existe $y \in [x, b']$ tal que $f(y) = c$, o que é um absurdo pois nesse caso $y > a'$. Absurdo análogo ocorre se $f(x) > d$ para algum $x \in I'_0$. Portanto, $f(I'_0) = I_1$. \square

Lema 8.3. Se $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow J_0$, então existe $p \in J_0$ tal que $f^k(p) \in J_k$, para todo $k = 1, \dots, n-1$, e $f^n(p) = p$.

Demonstração. De acordo com as hipóteses e com a Proposição anterior, temos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} J_0 \longrightarrow J_1 &\Rightarrow \text{ existe } J'_0 \subset J_0 \text{ tal que } f(J'_0) = J_1 \\ J_1 \longrightarrow J_2 &\Rightarrow \text{ existe } J'_1 \subset J'_0 \text{ tal que } f^2(J'_1) = J_2 \\ &\vdots \\ J_{n-2} \longrightarrow J_{n-1} &\Rightarrow \text{ existe } J'_{n-2} \subset J'_{n-3} \text{ tal que } f^{n-1}(J'_{n-2}) = J_{n-1} \\ J_{n-1} \longrightarrow J_0 &\Rightarrow \text{ existe } J'_{n-1} \subset J'_{n-2} \text{ tal que } f^n(J'_{n-1}) = J_0 \end{aligned}$$

Construímos então uma sequência de n intervalos fechados $J_0 \supset J'_0 \supset J'_1 \supset \dots \supset J'_{n-1}$ tal que $f^k(J'_{k-1}) = J_k$, para todo $k = 1, \dots, n-1$, e $f^n(J'_{n-1}) = J_0$. Como $J_0 \supset J'_{n-1}$, existe $p \in J'_{n-1}$ tal que $f^n(p) = p$. Em particular, $p \in J_0$ e $f^k(p) \in J_k$, para todo $k = 1, \dots, n-1$. \square

Teorema 8.4. *Se f admite ponto periódico de período principal 3, então f admite ponto periódico de período principal n , para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Sejam p um ponto periódico de período principal 3 e $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de p e suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$. O outro caso possível, em que $f(p_1) = p_3$ e $f(p_3) = p_2$, é demonstrado de maneira análoga. Definindo $I_1 = [p_1, p_2]$ e $I_2 = [p_2, p_3]$, temos que $I_1 \longrightarrow I_2$, $I_2 \longrightarrow I_1$ e $I_2 \longrightarrow I_2$.

- (a) $n = 1$: Como $I_2 \longrightarrow I_2$, existe $p \in I_2$ tal que $f(p) = p$.
- (b) $n = 2$: Como $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1$, existe $p \in I_1$ tal que $f(p) \in I_2$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, o que é um absurdo pois p_2 possui período principal 3. Desse modo, o período principal de p é 2.
- (c) $n > 3$: Se $I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2$ é um ciclo de tamanho n , existe $p \in I_2$ tal que $f^k(p) \in I_2$, para todo $k = 1, \dots, n-2$, $f^{n-1}(p) \in I_1$ e $f^n(p) = p$. Se $f^{n-1}(p) = p$, então $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, o que é um absurdo pois implica que $f(p) = p_3 \in I_1$. Se $f^k(p) = p$ para algum $k = 1, \dots, n-2$ implica que $f^k(p) \in I_2$, para todo $k \geq 1$. Em particular, $f^{n-1}(p) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ e, portanto, $p = f^n(p) = p_3$, o que é um absurdo pois implica que $f(p) = p_1 \in I_2$.

Desse modo, o resultado está provado. \square

Para demonstrar os seguintes Lemas, supomos que f admite um ponto periódico p de período principal $n > 1$. Seja $\mathcal{O}(p) = \{p_1 < p_2 < \dots < p_n\}$ a órbita de p . Vamos definir $n-1$ intervalos fechados da forma $[p_i, p_{i+1}]$, que serão denotados por I_1, I_2, \dots, I_{n-1} , com propriedades que permitam demonstrar o Teorema de Shakovsky.

Lema 8.5. *Existe $k = 1, \dots, n-1$ tal que $[p_k, p_{k+1}] \longrightarrow [p_k, p_{k+1}]$.*

Demonstração. Seja $p_k = \max\{p_i \in \mathcal{O}(p) : f(p_i) > p_i\}$. Observe que $p_k < p_n$. Pela definição de p_k e por $f(p_{k+1}) \neq p_{k+1}$, temos que $f(p_k) > p_k$ e $f(p_{k+1}) < p_{k+1}$. Portanto, $[p_k, p_{k+1}] \longrightarrow [p_k, p_{k+1}]$. \square

O intervalo encontrado no Lema anterior será denotado por I_1 . Portanto, $I_1 \longrightarrow I_1$.

Lema 8.6. *Existe um caminho entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$, para todo $i = 1, \dots, n-1$.*

Demonstração. Para cada $n \geq 1$, defina \mathcal{U}_n como a união dos intervalos da forma $[p_i, p_{i+1}]$ tal que existe um caminho de tamanho n entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$.

Se $[p_i, p_{i+1}]$ é um intervalo de \mathcal{U}_n , então existe um caminho de tamanho n entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$. Adicionando $I_1 \longrightarrow I_1$ ao início do caminho formamos um caminho de tamanho $n+1$ entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$. Portanto, $[p_i, p_{i+1}]$ é um intervalo de \mathcal{U}_{n+1} e, desse modo, $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1}$. Observe que se $\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}_{n+1}$, existe um intervalo $[p_i, p_{i+1}]$ de \mathcal{U}_n tal que $f([p_i, p_{i+1}] \cap \mathcal{O}(p)) \not\subset \mathcal{U}_n$.

Como $\mathcal{O}(p)$ é finita e $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \dots$, existe $k \geq 1$ tal que $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_{k+1}$. De acordo com a observação anterior, $f([p_i, p_{i+1}] \cap \mathcal{O}(p)) \subset \mathcal{U}_k$ para todo intervalo $[p_i, p_{i+1}]$ de \mathcal{U}_k , ou seja, $f(\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)) \subset \mathcal{U}_k$. Desse modo, $f(\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)) = \mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)$. Como o único subconjunto de $\mathcal{O}(p)$ estável por f é ele próprio, segue que $\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(p)$. Assim, $\mathcal{U}_k = [p_1, p_n]$ e o resultado está provado. \square

Lema 8.7. *Se não existe $[p_i, p_{i+1}] \neq I_1$ tal que $[p_i, p_{i+1}] \longrightarrow I_1$, então*

1. *f é uma bijeção entre os pontos de $\mathcal{O}(p)$ à esquerda e à direita de I_1*
2. *n é par*
3. *f admite um ponto de período 2*

Demonstração. Seja $I_1 = [p_k, p_{k+1}]$ e considere os conjuntos $\mathcal{O}_1 = \{p_1, \dots, p_k\}$ e $\mathcal{O}_2 = \{p_{k+1}, \dots, p_n\}$.

1. Se f calculada em algum ponto de \mathcal{O}_1 permanece em \mathcal{O}_1 , considere $p_j = \max\{p_i \in \mathcal{O}_1 : f(p_i) \in \mathcal{O}_1\}$. Por definição de p_j , temos $f(p_j) \leq p_k$ e $f(p_{j+1}) \geq p_{k+1}$. Além disso, $p_j < p_k$. Desse modo, $[p_j, p_{j+1}] \neq I_1$ e $[p_j, p_{j+1}] \longrightarrow I_1$, o que é um absurdo.

Logo, todo ponto de \mathcal{O}_1 é levado em \mathcal{O}_2 por f . Analogamente, mostra-se que todo ponto de \mathcal{O}_2 é levado em \mathcal{O}_1 por f . Assim, existe uma bijeção entre \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 .

2. Em particular, o tamanho de \mathcal{O}_1 e \mathcal{O}_2 são iguais. Desse modo, n é par.
3. Como $[p_1, p_k] \longrightarrow [p_{k+1}, p_n]$ e $[p_{k+1}, p_n] \longrightarrow [p_1, p_k]$, existe $p \in [p_1, p_k]$ tal que $f^2(p) = p$. Como os intervalos são disjuntos, segue que o período principal de p é 2.

Desse modo, as afirmações estão provadas. \square

Lema 8.8. *Se $n > 1$ é ímpar e f não admite ponto de período ímpar menor que n , então existe um ciclo $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1$ tal que*

1. *se $I_i \longrightarrow I_{i+j}$ então $j = 1$*
2. *$I_{n-1} \longrightarrow I_j$, para todo $j < n - 1$ ímpar*

Demonstração. Inicialmente, vamos provar a existência do ciclo de tamanho $n - 1$. De acordo com os dois Lemas anteriores, existe um intervalo da forma $[p_i, p_{i+1}]$ diferente de I_1 tal que $[p_i, p_{i+1}] \longrightarrow I_1$ (se esse intervalo não existe, então n é par) e existe um caminho entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$. Portanto, existe um ciclo começando em I_1 diferente de $I_1 \longrightarrow I_1$. Observe que o tamanho desse ciclo pode ser arbitrariamente grande já que $I_1 \longrightarrow I_1$. Suponha que o menor ciclo dessa forma possui tamanho k e o denote por $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1$.

Suponha que $k < n - 1$. Então $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ ou $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$ é um ciclo de tamanho ímpar m menor que n . Desse modo, $f^m(p) = p$ para algum $p \in I_1$, o que é um absurdo pois f não admite ponto periódico de período ímpar menor que n .

Pela minimalidade do ciclo, a propriedade 1. é verdadeira. Para provar a propriedade 2., seja $I_1 = [p_k, p_{k+1}]$. Pela definição de I_1 , temos que $f(p_k) \geq p_{k+1}$ e $f(p_{k+1}) \leq p_k$. Como o período de p é maior que 2, então $f(p_k) > f(p_{k+1})$ ou $f(p_{k+1}) < p_k$. Suponha que $f(p_k) > f(p_{k+1})$. O outro caso é demonstrado de maneira análoga.

Pela propriedade 1., sabemos que I_1 cobre somente ele mesmo e I_2 . Desse modo, $f(p_k) = p_{k+2}$ e $f(p_{k+1}) = p_k$, e portanto $I_2 = [p_{k+1}, p_{k+2}]$. Como I_2 cobre somente I_3 , e já sabendo que $f(p_{k+1}) = p_k$, temos que $f(p_{k+2}) = p_{k-1}$ e portanto $I_3 = [p_{k-1}, p_k]$. Prosseguindo desse modo, observamos que os intervalos estão distribuídos de maneira simétrica em relação à I_1 . Em particular, $I_{n-1} = [p_{n-1}, p_n]$ com $f(p_{n-1}) = p_1$ e $f(p_n) = p_{k+1}$. Desse modo, $f(I_{n-1}) \supset [p_1, p_{k+1}]$ e a afirmação está provada. \square

Definição 8.9. O Ordenação de Sharkovsky é definida por

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

ou seja, é formada inicialmente pelos ímpares maiores que 1 em ordem crescente; depois pelos ímpares maiores que 1, multiplicados por 2, em ordem crescente; depois pelos ímpares maiores que 1, multiplicados por 2^2 , em ordem crescente; e assim sucessivamente. Por fim, a ordem é formada por todas as potências de 2 em ordem decrescente.

Teorema 8.10 (Sharkovsky). *Se f admite ponto de período principal n , então f admite ponto de período principal m , para todo $m \triangleleft n$.*

Demonstração. Suponha que f admite ponto de período principal n . Vamos provar o teorema nos seguintes casos:

- (a) se $n > 1$ ímpar e f não admite ponto periódico de período ímpar menor que n

Pelo Lema anterior, podemos construir o ciclo

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_1$$

de tamanho m , para todo $m > n$. Desse modo, existe $p \in I_1$ tal que $f^k(p) \in I_{k+1}$ se $k = 1, \dots, n - 2$, $f^k(p) \in I_1$ se $k = n - 1, \dots, m - 1$ e $f^m(p) = p$.

Se $f^k(p) = p$ para algum $k = 1, \dots, n - 2$, então $p \in I_1 \cap I_{k+1}$ e, portanto, p não existe ou possui período principal $n > k$, o que é um absurdo. Analogamente, $f^k(p) \neq p$ para $k = n - 1, \dots, m - 1$. Portanto, o período principal de p é m .

Ainda de acordo com o Lema anterior, podemos construir ciclos da forma

$$\begin{aligned} I_{n-1} &\longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1} \\ I_{n-1} &\longrightarrow I_{n-4} \longrightarrow I_{n-3} \longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

que permitem mostrar a existência de ponto de período principal $m < n$, m par.

(b) se $n = 2^m$, com $m \geq 1$

Seja $k = 2^l$ com $l < m$ e considere $g = f^{\frac{k}{2}}$. Temos que g admite um ponto de período principal 2^{m-l+1} . Como g admite um ponto de período principal par ≥ 2 , segue que g admite ponto de período principal 2. Portanto, f admite um ponto de período principal 2^l .

(c) se $n = p2^m$, com $m \geq 1$ e p ímpar

Seja $g = f^{2^m}$. Vamos mostrar inicialmente que f admite ponto de período principal $q2^m$, q par. Temos que g admite ponto de período principal p ímpar. Pelo item (a), g admite ponto de período principal q par. Logo, f admite ponto de período principal $q2^m$, q par.

Agora, vamos mostrar que f admite ponto de período principal $q2^m$, $q > p$ ímpar. Pelo item (a), g admite ponto de período principal $q > p$ ímpar. Desse modo, f admite ponto de período principal $q2^{m-i}$ para algum $i = 0, \dots, m$. Se $i = 0$, está mostrado. Se $i > 0$, pelo parágrafo anterior, f admite ponto de período principal $2^i(q2^{m-i}) = q2^m$ e, portanto, a afirmação está provada.

Por fim, vamos mostrar que f admite ponto de período principal 2^l , com $l < k$. Sabemos que f admite ponto de período principal $q2^k$, q par. Em particular, tomando $q = 2$, concluímos que f admite ponto de período principal 2^l , com $l < k$.

Observando que as afirmações anteriores esgotam as possibilidades na ordenação de Sharkovsky, concluímos a demonstração do teorema. \square

Teorema 8.11. *Para todo $n \geq 1$ existe uma função f que admite ponto periódico de período principal n e que não admite ponto de período principal m se $m \triangleright n$.*

Demonstração. Seja $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a função dada por $T(x) = 1 - |2x - 1|$ e considere a família de funções $T_h(x) = \min\{h, T(x)\}$ definidas em $[0, 1]$, com o parâmetro h variando em $[0, 1]$. Observe que $T_1 = T$, pois $T(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Além disso, observando o gráfico de T_1 concluímos que a função possui 2^k pontos periódicos de período k e assim podemos definir, para cada $k \geq 1$,

$$h(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } n \text{ de } T_1\}\}$$

A ideia principal da prova consiste no fato de que $h(k)$ desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de $T_{h(k)}$. As seguintes afirmações tornarão preciso esse fato.

(a) Se $\mathcal{O} \subset [0, h]$ é uma órbita de T_h , então \mathcal{O} é uma órbita de T_1 .

Se $p \in \mathcal{O}$ então $T_h(p) \in [0, h]$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$, ou seja, T_h e T_1 coincidem em \mathcal{O} e, portanto, \mathcal{O} é uma órbita de T_1 .

(b) Se $\mathcal{O} \subset [0, h]$ é uma órbita de T_1 , então \mathcal{O} é uma órbita de T_h .

Se $p \in \mathcal{O}$ então $T_1(p) \in [0, h]$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = \min\{h, T_1(p)\} = T_1(p)$, ou seja, T_h e T_1 coincidem em \mathcal{O} e, portanto, \mathcal{O} é uma órbita de T_h .

(c) $T_{h(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \in [0, h(k))$ de tamanho l se e somente se $h(k) > h(l)$.

Se $T_{h(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \in [0, h(k))$ de tamanho l , então \mathcal{O} é uma órbita de T_1 por (a) e, pela definição de $h(l)$, concluímos que $h(l) < h(k)$.

Por outro lado, se $h(l) < h(k)$, então T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(l)] \subset [0, h(k)]$ de tamanho l e, desse modo, \mathcal{O} é uma órbita de $T_{h(k)}$ por (b).

(d) A órbita de T_1 que contém $h(k)$ é uma órbita de tamanho k de $T_{h(k)}$. Além disso, todas as outras órbitas de $T_{h(k)}$ estão em $[0, h(k))$.

Pela definição de $h(k)$, T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(k)]$ de tamanho k e, portanto, \mathcal{O} é uma órbita de $T_{h(k)}$ por (b).

Para demonstrar a segunda parte, basta observar que $h(k)$ é o valor máximo de $T_{h(k)}$ e, desse modo, toda órbita de $T_{h(k)}$ está contida em $[0, h(k)]$. Em particular, se a órbita não contém $h(k)$, então ela está contida em $[0, h(k))$.

(e) $k \triangleright l$ se e somente se $h(k) > h(l)$.

Suponha que $k \triangleright l$. Por (d), $T_{h(k)}$ possui uma órbita de tamanho k . De acordo com o Teorema de Sharkovsky e com (d), $T_{h(k)}$ admite uma órbita de tamanho l contida em $[0, h(k))$. Desse modo, $h(k) > h(l)$ por (c).

Por outro lado, suponha que $h(k) > h(l)$. Caso $l \triangleright k$, a demonstração no parágrafo anterior implicaria que $h(k) < h(l)$, contrariando a hipótese. Desse modo, $k \triangleright l$.

Assim, para cada $n \geq 1$, $T_{h(n)}$ possui órbita de tamanho n . Além disso, se $m \triangleright n$ então $h(m) > h(n)$ por (e) e, portanto, $T_{h(n)}$ não possui órbita de tamanho m por (c). \square

9 Derivada de Schwarz

Definição 9.1. Sejam $I = [a, b]$ e $f : I \rightarrow I$ uma função de classe \mathcal{C}^3 em (a, b) . A *derivada de Schwarz de f* é a função $\mathcal{S}f$ definida por

$$(\mathcal{S}f)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

para todo $x \in (a, b)$ tal que $f'(x) \neq 0$.

Se $(\mathcal{S}f)(x) < 0$ para todo x no domínio de $\mathcal{S}f$, dizemos que a derivada de Schwarz de f é *negativa* e escrevemos $\mathcal{S}f < 0$.

Lema 9.2. Se $\mathcal{S}f < 0$ e f' possui mínimo local em (a, b) , então $f'(x_0) \leq 0$.

Demonstração. Seja $x_0 \in (a, b)$ ponto de mínimo local de f' . Como x_0 é ponto crítico de f' , temos que $f''(x_0) = 0$. Portanto, se $f'(x_0) \neq 0$, então

$$(\mathcal{S}f)(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} < 0$$

Sendo x_0 ponto de mínimo local, $f'''(x_0) \geq 0$ pelo Teste da Segunda Derivada. Desse modo, $f'(x_0) < 0$. □

Lema 9.3. Se $\mathcal{S}f < 0$, $p_1 < p_2 < p_3$ são pontos fixos de f e $f'(p_2) \leq 1$, então f possui um ponto crítico em (p_1, p_3) .

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, existem $r \in (p_1, p_2)$ e $s \in (p_2, p_3)$ tais que $f'(r) = f'(s) = 1$. Observe que f' possui mínimo global em $[r, s]$, pois é contínua. Mas $p_2 \in (r, s)$ e $f'(p_2) \leq 1$. Portanto, f' possui mínimo global em (r, s) . Em particular, f' possui mínimo local em (a, b) . Utilizando Lema anterior e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída. □

Lema 9.4. Se $\mathcal{S}f < 0$ e $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ são pontos fixos de f , então f possui ponto crítico em (p_1, p_4) .

Demonstração. Se $f'(p_2) \leq 1$ ou $f'(p_3) \leq 1$, o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se $f'(p_2) > 1$ e $f'(p_3) > 1$, existem $r, t \in (p_2, p_3)$ tais que $r < t$, $f(r) > r$ e $f(t) < t$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $s \in (r, t)$ tal que $f'(s) < 1$. Portanto, f' possui um mínimo global (r, t) . Em particular, f' possui mínimo local em (a, b) . Utilizando Lema 9.2 e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída. □

Lema 9.5. Se $\mathcal{S}f < 0$ e $\mathcal{S}g < 0$, então $\mathcal{S}f \circ g < 0$.

Demonstração. A derivada de Schwarz de $f \circ g$ é dada por

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}f \circ g)(x) &= \frac{(f \circ g)'''(x)}{(f \circ g)'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{(f \circ g)''(x)}{(f \circ g)'(x)} \right)^2 \\ &= (\mathcal{S}f)(g(x))(g'(x))^2 + (\mathcal{S}g)(x) < 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in (a, b)$ tal que $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \neq 0$. \square

Corolário 9.6. *Se $\mathcal{S}f < 0$, então $\mathcal{S}f^n < 0$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. A demonstração é imediata por indução. \square

Lema 9.7. *Se f possui um número finito de pontos críticos, então f^n possui um número finito de pontos críticos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos provar por indução que $f^{-n}(c) = \{x \in [a, b] : f^n(x) = c\}$ é finito para todo $n \geq 1$.

A afirmação é verdadeira para $n = 1$ pois, de acordo com o Teorema do Valor Médio, existe um ponto crítico de f entre dois elementos de $f^{-1}(c)$ e, por hipótese, f possui um número finito de pontos críticos.

Se a afirmação é verdadeira para $n = k$, então $f^{-(k+1)}(c) = \{x \in [a, b] : f^{k+1}(x) = c\} = \{x \in [a, b] : f(f^k(x)) = c\}$ é finito, pois existem finitos elementos em $f^{-1}(c)$ e, por hipótese de indução, existem finitos elementos em $f^{-k}(c_i)$ para cada $c_i \in f^{-1}(c)$. Portanto, $f^{-n}(c)$ é finito para todo $n \geq 1$.

Desse modo, se $(f^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x)) = 0$, então $f^k(x)$ é ponto crítico de f para algum $k = 1, \dots, n-1$. Assim, o conjunto de pontos críticos de f^n é finito pois é dado por $\cup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(c_i)$, onde c_i é um ponto crítico de f . \square

Lema 9.8. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e f possui um número finito de pontos críticos, então f^n possui um número finito de pontos fixos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Seja $g = f^n$, $n \geq 1$. Se g possui uma quantidade infinito de pontos fixos, existe uma sequência $(p_n)_n$ estritamente crescente de pontos fixos de g . Pelo Lema 9.4, existe ponto crítico de g em $(p_1, p_4), (p_5, p_8), \dots$, ou seja, g possui infinitos pontos críticos e isso contradiz o Lema anterior. Desse modo, f^n possui um número finito de pontos fixos e o resultado está provado. \square

Teorema 9.9 (Singer). *Se $\mathcal{S}f < 0$ e f possui n pontos críticos, então f possui no máximo $n + 2$ órbitas periódicas não repulsoras.*

Demonstração. Sejam p um ponto periódico não repulsor de período m e $g = f^m$. Desse modo, p é um ponto fixo não repulsor de g , ou seja, $|g'(p)| \leq 1$. Defina K o maior intervalo de $\{x \in \mathbb{R} : \lim_{k \rightarrow \infty} g^k(x) \rightarrow p\}$ que contém p .

Vamos supor inicialmente que K é limitado e $|g'(p)| < 1$. Desse modo, $K = (l, r)$ é aberto, $g(K) \subset K$ e ocorre um dos três casos abaixo:

- (a) $g(l) = l$ e $g(r) = r$
- (b) $g(l) = r$ e $g(r) = l$
- (c) $g(l) = g(r)$

Vamos mostrar que K contém um ponto crítico de g em cada um dos casos possíveis.

- (a) O resultado é imediato utilizando o Lema 9.3.
- (b) Considerando $h = g^2$ e utilizando novamente o Lema 9.3, h possui um ponto crítico $x_0 \in K$, ou seja, $h'(x_0) = g'(g(x_0))g'(x_0) = 0$. Como $g(x_0) \in K$, g possui um ponto crítico em K .
- (c) Uma aplicação direta do Teorema do Valor Médio mostra que g possui um ponto crítico em K .

Portanto, g possui ponto crítico $x_0 \in K$. Pela Regra da Cadeia,

$$g'(x_0) = (f^m)'(x_0) = \prod_{k=0}^{m-1} f'(f^k(x_0)) = 0$$

e, desse modo, $f^i(x_0)$ é ponto crítico de f para algum $i = 0, \dots, m-1$.

Vamos supor que K é limitado e $|g'(p)| = 1$.

Observando que existem no máximo dois intervalos K que não são limitados, concluímos a demonstração. □

Corolário 9.10. $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.