1 Definições Elementares

Começamos nosso estudo definindo o que são pontos periódicos e pontos eventualmente periódicos. Esses pontos desempenham um papel central no estudos de Sistemas Dinâmicos.

Definição 1.1. Sejam $f : X \to X$ uma função, $p \in X$ e $n \geq 1$. Dizemos que p é um *ponto periódico com período* n, se $f^n(p) = p$. Se $f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então n é chamado de *período principal*. Em particular, se $n = 1$, dizemos que p é um *ponto fixo*.

Definição 1.2. Sejam $f : X \to X$ uma função, $p \in X$ e $n \geq 1$. Dizemos que p é um *ponto eventualmente periódico com período* n, se existe $m > 1$ tal que $f^k(p) = f^{k+n}(p)$ para todo $k \geq m$. Em particular, se $n = 1$, dizemos que p é um *ponto eventualmente fixo*.

Definição 1.3. Sejam $f : X \to X$ uma função e $x \in X$. A *órbita de* x é o conjunto $O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$.

Definição 1.4. Sejam $f : X \to X$ uma função, p um ponto periódico período n e $x \in X$. Dizemos que x *tende assintoticamente para* p se $lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$. O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para p, denotado por $W^s(p)$, é chamado chamado de *conjunto estável de* p. Dizemos que x *tende assintoticamente para infinito* se $lim_{k\to\infty}|f^k(x)| = \infty$. O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para infinito, denotado por $W^s(\infty)$, é chamado de *conjunto estável do infinito*.

A Proposição abaixo nos mostra que os conjuntos estáveis de dois pontos periódicos distintos possuem intersecção vazia

Proposição 1.5. *Sejam* $f : X \to X$ *uma função e* p_1, p_2 *pontos periódicos distintos. Então* $W^s(p_1) \cap W^s(p_2) = \emptyset$.

Demonstração. Sejam n_1, n_2 os períodos de p_1, p_2, respectivamente. Suponha que exista $x \in W^s(p_1) \cap W^s(p_2)$. Sabemos que $|f^{kn_1}(x) - p_1| \longrightarrow 0$ e $|f^{kn_2}(x) - p_2| \longrightarrow 0$, quando $k \longrightarrow \infty$. Desse modo, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que $|f^{kn_1}(x) - p_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|f^{kn_2}(x) - p_2| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $k > N$. Portanto, $|p_1 - p_2| = |p_1 - f^{kn_1n_2}(x) + f^{kn_1n_2}(x) - p_2| \leq |f^{kn_2n_1}(x) - p_1| + |f^{kn_1n_2}(x) - p_2| < \varepsilon$. Temos então que $p = q$, pois ε é arbitrário. Absurdo. □

O objetivo do estudo de Sistemas Dinâmicos é entender a natureza das órbitas, identificando pontos periódicos, eventualmente periódicos, que tendem assintoticamente, etc.

2 Implicações da Diferenciabilidade

Nessa seção, estudaremos as implicações da diferenciabilidade na dinâmica de uma função real. Caso não seja dito o contrário, I representará um intervalo fechado de $\mathbb{R}$.

Proposição 2.1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(I) \subset I$ ou $f(I) \supset I$, então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Seja $I = [a, b]$. Suponha que $f(I) \subset I$. Considere a função contínua $g(x) = f(x) - x$ definida em I. Como $f(a), f(b) \in I$, temos que $g(a) = f(a) - a \geq 0$ e $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $p \in I$ tal que $g(p) = f(p) - p = 0$. Desse modo, p é ponto fixo de f.

Suponha que $f(I) \supset I$. Por definição, existem $c, d \in I$ tais que $f(c) = a$ e$f(d) = b$. Considere a função contínua $g(x) = f(x) - x$ definida em I. Temos que $g(c) = a - c \leq 0$ e $g(d) = b - d \geq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $p \in I$ tal que $g(p) = f(p) - p = 0$. Desse modo, p é ponto fixo de f. □

Teorema 2.2. *Seja $f : I \to I$ uma função diferenciável. Se $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in I$, então f admite um único ponto fixo e $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todo $x, y \in I$ distintos.*

Demonstração. Sejam $x, y \in I$, $x < y$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [x, y]$ tal que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Portanto, $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| < |x - y|$.

Pela Proposição 2.1, f admite um ponto fixo p. Suponha que exista um ponto fixo q diferente de p. Então, pela primeira parte da demonstração, $|p-q| = |f(p)-f(q)| < |p-q|$. Absurdo. □

Introduziremos agora a noção de ponto hiperbólico para uma função diferenciável e logo após provaremos um resultado que ajuda a compreender a dinâmica da função em uma vizinhança desses pontos.

Definição 2.3. Sejam $f : I \to I$ uma função diferenciável e p um ponto periódico com período principal n. Dizemos que p é um *ponto hiperbólico* se $|(f^n)'(p)| \neq 1$. Se $|(f^n)'(p)| > 1$, dizemos que p é um *ponto atrator* e se $|(f^n)'(p)| < 1$, dizemos que p é um *ponto repulsor*. Dizemos que p é um *ponto não hiperbólico* se $|(f^n)'(p)| = 1$.

O Teorema abaixo ajuda a compreender o porquê dos nomes *atrator* e *repulsor* para um ponto hiperbólico.

Teorema 2.4. *Sejam $f : I \to I$ uma função C^1 e p um ponto periódico com período principal n. Se p é um ponto hiperbólico atrator, existe uma vizinhança de p contida em $W^s(p)$. Se p é um ponto hiperbólico repulsor, existe uma vizinhança U de p tal que, se $x \in U$ e $x \neq p$, $f^{kn}(x) \notin U$ para algum $k \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que p é um ponto hiperbólico atrator. Como f' é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Pelo Teorema do Valor Médio, se $x \in U$ então $|f^n(x) - p| = |f^n(x) - f^n(p)| \leq \lambda|x - p|$. Por indução, $|f^{kn}(x) - p| \leq \lambda^k|x - p|$. Desse modo, $f^{kn}(x) \longrightarrow p$ quando $k \longrightarrow \infty$.

Suponha que p é ponto hiperbólico repulsor. De maneira análoga, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| \geq \lambda > 1$ para todo $x \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$. Fixado $x \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$, $x \neq p$, suponha que $f^{kn}(x) \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ para todo $k \geq 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, $|f^{kn}(x) - p| \geq \lambda^k |x-p|$ para todo $k \geq 1$. Absurdo, pois $\lambda^k|x-p| \longrightarrow \infty$ quando $k \longrightarrow \infty$. □

Observação. A segunda parte do teorema afirma que existe uma vizinhança de p tal que todo ponto diferente de p nessa vizinhança é movida para fora dela após um número de iterações da f. Observe o ponto pode voltar para vizinhança após mais iterações da f, justamente por sabermos que o valor da derivada é maior que um apenas nessa vizinhança.

3 Família Quadrática I: Estudo Inicial

Nosso objetivo será estudar, durante essa seção e as próximas, é estudar a dinâmica da família de funções $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, onde $\mu > 0$. Tal família é chamada de família quadrática. Quando não houver ambiguidade, escreveremos F ao invés de F_μ. Nessa seção estudaremos a dinâmica de F quando $1 < \mu < 3$.

Proposição 3.1. *Se $\mu > 1$, então*

1. $F(1) = F(0) = 0$ *e* $F(\frac{1}{\mu}) = F(p_\mu) = p_\mu$, *onde* $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.
2. $0 < p_\mu < 1$.
3. *O vértice da parábola é o ponto* $(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4})$.

Demonstração. Aplicação direta das definições. □

Proposição 3.2. *Se $\mu > 1$, então $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$.*

Demonstração. Se $x < 0$, a sequência $x, F(x), F^2(x), \ldots$ é estritamente decrescente pois $F(x) < x$. Se $(F^n(x))_n \longrightarrow x_0$ quando $n \longrightarrow \infty$, a continuidade de F implica que $(F^{n+1}(x))_n \longrightarrow F(x_0) < x_0$. Absurdo. Portanto, $(F^n(x))_n \longrightarrow -\infty$ quando $n \longrightarrow \infty$. Como $F(x) < 0$ para todo $x > 1$, concluímos que $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$. □

Pelo Proposição anterior, conhecemos a dinâmica da F, quando $\mu > 1$, nos pontos menores que zero e maiores que um. Portanto, nos resta estudar a dinâmica de F restrita ao intervalo $[0, 1]$.

Proposição 3.3. *Se $1 < \mu < 3$, então*

1. 0 *é um ponto repulsor e* p_μ *é um ponto atrator.*
2. $lim_{n\to\infty} F^n(x) = p_\mu$ *para todo* $x \in (0, 1)$.

Demonstração. A primeira parte é verdadeira pois $|F'(0)| = \mu > 1$ e $|F'(p_\mu)| = |2-\mu| < 1$, quando $1 < \mu < 3$.

Falta provar o item 2. $\square$

Desse modo, pelas Proposições anteriores, conhecemos completamente a dinâmica de F quando $1 < \mu < 3$: $W^s(0) = \{0, 1\}$, $W^s(p_\mu) = (0, 1)$ e $W^s(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

4 Família Quadrática II: Conjuntos de Cantor e Caos

Analisaremos nessa seção a dinâmica de F quando $\mu > 4$. Para entendê-la, estudaremos o que são conjuntos de Cantor e o conceito de caos.

Observamos inicialmente que $F(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} > 1$ quando $\mu > 4$, ou seja, existem pontos em $[0, 1]$ que não permanecem em $[0, 1]$ após uma iteração de F. Em vista da Proposição 3.2, a dinâmica de F em tais pontos é determinada, pois pertencem ao conjunto $W^s(\infty)$. De modo mais geral, se um ponto de $[0, 1]$ não permanece $[0, 1]$ após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto $W^s(\infty)$.

Desse modo, considere o conjunto $\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1]\}$, que é formado pelos pontos que permanecem em $[0, 1]$ após n iterações de F, e considere o conjunto $\Lambda = \cap \Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1] \text{ para todo } n \geq 1\}$, que é formado pelos pontos que permanecem para sempre em $[0, 1]$ por iterações de F. Observe que, por definição, $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.

Nos resta, portanto, estudar a dinâmica de F restrita ao conjunto Λ. A Proposição a seguir nos ajuda a começar compreender a natureza de Λ.

Proposição 4.1. *Se $\mu > 4$, então*

1. $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, *onde* $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ *e* $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$.

2. Λ_n *é a união de* 2^n *intervalos fechados disjuntos.*

3. $F^n : I \to [0, 1]$ *é bijetora, onde* I *é qualquer um dos* 2^n *intervalos fechados disjuntos que formam* Λ_n.

Demonstração. Analisando F' observamos que F é estritamente crescente no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ e estritamente decrescente no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Como $F(0) = F(1) = 0$ e $F(\frac{1}{2}) > 1$, o Teorema do Valor Intermediário garante que existem x_1 e x_2 tais que $F(x_1) = F(x_2) = 1$. Os valores de x_1 e x_2 são encontrados resolvendo a equação de segundo grau $\mu x(1-x) = 1$. Logo, $F([0, x_1]) = F([x_2, 1]) = [0, 1]$ e $F(x) > 1$ para todo $x \in (x_1, x_2)$. Portanto, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e o item 1 está demonstrado.

A demonstração dos itens 2 e 3 será feita por indução. Pela primeira parte dessa demonstração, Λ_1 é a união de $2^1 = 2$ intervalos fechados disjuntos e F restrita é cada um desses intervalos é uma bijeção com o intervalo $[0, 1]$.

Suponha que Λ_{k-1} é a união de 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos de modo que $F^{k-1} : [a,b] \to [0,1]$ é bijetora para todo intervalo $[a,b]$ que forma Λ_{k-1}. Sendo F^{k-1} bijetora, $(F^{k-1})'(x) > 0$ ou $(F^{k-1})'(x) < 0$ para todo $x \in [a,b]$. Como as demonstrações para os dois casos são análogas, supomos que $(F^{k-1})'(x) > 0$.

Como F^{k-1} é estritamente crescente, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existem únicos $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in [a,b]$ tais que

(a) $a < \overline{x_1} < \overline{x_2} < b$,

(b) $F^{k-1}([a,\overline{x_1}]) = [0,x_1]$,

(c) $F^{k-1}((\overline{x_1},\overline{x_2})) = (x_1,x_2)$ e

(d) $F^{k-1}([\overline{x_2},1]) = [x_2,1]$.

Desse modo, $F^k([a,\overline{x_1}]) = F([0,x_1]) = [0,1]$ e, analogamente, $F^k([\overline{x_2},1]) = [0,1]$. Além disso, $(F^k)'([a,\overline{x_1}]) = F'(F^{k-1}([a,\overline{x_1}]))(F^{k-1})'([a,\overline{x_1}]) = F'([0,x_1])(F^{k-1})'([a,\overline{x_1}]) > 0$ e, analogamente, $(F^k)'([\overline{x_2},1]) = F'([x_2,1])(F^{k-1})'([\overline{x_2},1]) < 0$. Logo, F^k é uma bijeção entre $[a,\overline{x_1}]$ e $[0,1]$ e entre $[\overline{x_2},1]$ e $[0,1]$.

Portanto, a partir de cada intervalo fechado de Λ_{k-1}, construímos dois novos intervalos fechados disjuntos tais que F^k restrita em cada um desses intervalos é um bijeção com $[0,1]$ e, dessa maneira, esses intervalos estão contidos em Λ_k. Desse modo, se Λ_{k-1} é formado por 2^{k-1} intervalos, então Λ_k é formado por $2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$ intervalos fechados disjuntos. Assim, o resultado está provado. $\square$

Vamos agora definir o que é um conjunto de Cantor para prosseguir entendendo a natureza de Λ.

Definição 4.2 (Conjunto de Cantor)**.** Um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}$ não vazio é um *conjunto de Cantor* se

1. Γ é fechado e limitado,

2. Γ não possui intervalos e

3. Todo ponto de Γ é um ponto de acumulação de Γ.

No restante dessa seção, restringiremos nossa atenção para o caso $\mu > 2 + \sqrt{5}$, para facilitar as demonstrações.

Lema 4.3. *Se $\mu > 2+\sqrt{5}$, então existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$. Além disso, o tamanho de cada intervalo fechado em Λ_n é menor que $\frac{1}{\lambda^n}$.*

Demonstração. Para provar a primeira parte, observamos inicialmente que $\mu^2 - 4\mu > 1$ quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Desse modo, $F'(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$ e $F'(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$, onde $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}$ e $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}$.

Observamos também que F' é estritamente decrescente, pois $F''(x) = -2\mu < 0$. Portanto, $F'(x) \geq F'(x_1) > 1$ para todo $x \in [0, x_1]$ e $F'(x) \leq F'(x_2) < -1$ para todo $x \in [x_2, 1]$. De acordo com a Proposição 4.1, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e, desse modo, $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in \Lambda_1$. Sendo F' contínua e Λ_1 compacto, existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.

Ainda de acordo com a Proposição 4.1, Λ_n é formado pela união de 2^n intervalos disjuntos. Seja $[a, b]$ um desses intervalos. Se $c \in [a, b]$, em particular $c \in \Lambda_1$ e, portanto, $(F^n)'(c) = F'(F^{n-1}(c))F'(F^{n-2}(c)) \ldots F'(c) > \lambda^n$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a, b]$ tal que $|F^n(b) - F^n(a)| = |(F^n)'(c)||b - a| > \lambda^n|b - a|$. Como $F^n : [a, b] \to [0, 1]$ é um bijeção, temos que $|F^n(b) - F^n(a)| = 1$. Desse modo, $|b - a| < \frac{1}{\lambda^n}$ e a segunda parte está provada. □

Teorema 4.4. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. Λ é não vazio pois $0 \in \Lambda$, é limitado pois $\Lambda_1 \in [0, 1]$ e é fechado pois é intersecção de conjuntos fechados.

Agora, suponha que Λ contém algum intervalo. Então, existem $x, y \in I$, $x < y$, tais que $[x, y] \subset \Lambda$. Seja k tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |x-y|$. Em particular, $[x, y] \subset \Lambda_k$. Mas, de acordo com o Lema 4.3, os intervalos de Λ_k possuem tamanho menor que $\frac{1}{\lambda^k}$. Absurdo e, portanto, Λ não possui intervalos.

Por fim, observe que, se x é um ponto extremo de algum intervalo de Λ_n, então $x \in \Lambda$ pois $F^{n+1}(x) = 0$. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Em particular, $x \in \Lambda_k$ e, portanto, x é elemento de algum intervalo cujo tamanho é menor que ε, de acordo com o Lema 4.3. Portanto, existe $y \in \Lambda$ ponto extremo do intervalo que contém x tal que $|x - y| < \varepsilon$. Como ε é arbitrário, concluímos que x é um ponto de acumulação de Λ. □

Com o Lema 4.3, também podemos mostrar que o conjunto de pontos periódicos de F é denso quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Proposição 4.5. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então o conjunto de pontos periódicos de $F : \Lambda \to \Lambda$ é denso em Λ.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 4.3, o intervalo fechado $I \subset \Lambda_k$ que contém x possui tamanho menor que ε. Pela Proposição 4.1, $F^k : I \to [0, 1]$ é bijetora. Como $F^k(I) \supset I$, a Proposição 2.1 afirma que existe $y \in I$ tal que $F^k(y) = y$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \varepsilon$, o resultado está provado. □

No restante da seção, definiremos o que é uma função topologicamente transitiva, o que é uma função que depende sensivelmente das condições iniciais e, por fim, o que é uma função caótica. Vamos também mostrar F possui cada uma dessas propriedades quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Definição 4.6. Seja $f : D \to D$ uma função. Dizemos que f é *topologicamente transitiva* se dados $x, y \in D$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in D$ e $k \geq 1$ tais que $|z - x| < \varepsilon$ e $|f^k(z) - y| < \varepsilon$.

Intuitivamente, f é uma função topologicamente transitiva se para todo par de conjuntos abertos existe um ponto de um dos conjuntos que é levado para o outro conjunto após um número finito de iterações da f.

Proposição 4.7. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Existe $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 4.3, o tamanho de cada intervalo fechado em Λ_k é menor que $\frac{1}{\lambda^k}$ e, portanto, menor que ε. Como $x \in \Lambda_k$, existe um intervalo $[a, b] \subset \Lambda_k$ que contém x. Pela Proposição 4.1, $F^k : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $z \in [a, b]$ tal que $F^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$, concluímos que F é topologicamente transitiva. □

Definição 4.8. Seja $f : D \to D$ uma função. Dizemos que f *depende sensivelmente das condições iniciais* se para algum $\delta > 0$, dados $x \in D$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in D$ e $k \geq 1$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Proposição 4.9. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Existe $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k}$. Como na demonstração da Proposição anterior, seja I o intervalo fechado contido em Λ_k que contém x e cujo tamanho é menor que ε. Como $F^k : I \to [0, 1]$ é um bijeção, então $F^k(a) = 0$ e $F^k(b) = 1$, onde a e b são pontos extremos de I. Como $F(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, segue que $F^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Se $F^k(x) \in [0, \frac{1}{2})$, então $|F^k(x) - F^k(b)| = |F^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $F^k(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$, então $|F^k(x) - F^k(a)| = |F^k(x)| > \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, temos o resultado para $\delta = \frac{1}{2}$. □

Definição 4.10. Seja $f : D \to D$ uma função. Dizemos que f *é caótica* se

1. O conjunto de pontos periódicos de f é denso em D.

2. f é topologicamente transitiva.

3. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema 4.11. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ é caótica.*

Demonstração. O resultado segue das Proposições 4.5, 4.7 e 4.9. □

Observação. Os Teoremas 4.4 e 4.11 são válidos para $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais complicada.

Teorema 4.12. *Se D é um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ e $f : D \to D$ é uma função topologicamente transitiva cujo conjunto de pontos periódicos é denso, então f é caótica.*

Demonstração. Por demonstrar. □

5 Família Quadrática III: Conjugação Topológica

Nesse seção estudaremos a dinâmica de F quando $\mu = 4$. Para esse estudo, definiremos o que significa duas funções serem conjugadas topologicamente e, a partir daí, mostraremos que é F é caótica com base em outra função cuja dinâmica é mais fácil de ser entendida.

Definição 5.1. Sejam $f : A \to A$, $g : B \to B$ e $\tau : A \to B$ funções. Dizemos que *f e g são conjugadas topologicamente por τ*, se τ é um homeomorfismo tal que $\tau \circ f = g \circ \tau$.

Do ponto de vista da dinâmica, duas funções conjugadas são idênticas. A Proposição abaixo torna precisa essa afirmação.

Proposição 5.2. *Sejam $f : A \to A$, $g : B \to B$ e $\tau : A \to B$ funções. Se f e g são conjugadas topologicamente por τ, então*

1. *g e f são conjugadas topologicamente por τ^{-1}.*
2. *$\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$ para todo $n \geq 1$.*
3. *p é ponto periódico de f se e somente se $\tau(p)$ é ponto periódico de g. Além disso, os períodos principais de p e $\tau(p)$ são iguais.*
4. *$W^s(\tau(p)) = \tau(W^s(p))$, se p é um ponto periódico de f.*
5. *o conjunto de pontos periódicos de f é denso em A se e somente se o conjunto de pontos periódicos de g é denso em B.*
6. *f é transitiva topologicamente em A se e somente se g é transitiva topologicamente B.*

Demonstração.

1. Como τ é um homeomorfismo, a função inversa τ^{-1} existe e também é um homeomorfismo. Além disso, $\tau \circ f = g \circ \tau$ implica que $f \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ g$. Portanto, τ^{-1} é conjugação topológica de g e f.
2. Por definição, a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $\tau \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ \tau$. Desse modo, $\tau \circ f^n = \tau \circ f^{n-1} \circ f = g^{n-1} \circ \tau \circ f = g^{n-1} \circ g \circ \tau = g^n \circ \tau$. Portanto, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

3. Suponha que p é um ponto periódico de f com período principal n. Desse modo, $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) = \tau(p)$. Se $k = 1, \ldots, n-1$, então $g^k(\tau(p)) = \tau(f^k(p)) \neq \tau(p)$, pois $f^k(p) \neq p$ e τ é injetora. Portanto, $\tau(p)$ é um ponto periódico de g com período principal n. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

4. Suponha que p é um ponto periódico com período n. Se $x \in W^s(\tau(p))$, então $lim_{k\to\infty} g^{kn}(x) = \tau(p)$. Como τ^{-1} é contínua, temos $lim_{k\to\infty} f^{kn}(\tau^{-1}(x)) = lim_{k\to\infty}$ $\tau^{-1}(g^{kn}(x)) = p$. Então, $x \in \tau(W^s(p))$ pois $\tau^{-1}(x) \in W^s(p)$.

   Por outro lado, se $\tau(x) \in \tau(W^s(p))$, então $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$. Como τ é contínua, temos $\lim_{k\to\infty} g^{kn}(\tau(x)) = \lim_{k\to\infty} \tau(f^{kn}(x)) = \tau(p)$ e, portanto, $\tau(x) \in W^s(\tau(p))$.

5. Se o conjunto $Per(f)$ dos pontos periódicos de f é denso em A, então $\tau(Per(f))$ é denso em B pois τ é um homeomorfismo. Como $\tau(Per(f)) = Per(g)$, temos que $Per(g)$ é denso em B. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

6. Inicialmente, sendo τ é contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que, se $z \in A$, $|x - z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$, então $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))|$, onde $n \geq 1$ é fixado.

   Se $x', y' \in B$, existem $x, y \in A$ tais que $\tau(x) = x'$ e $\tau(y) = y'$. Como f é transitiva topologicamente, existe $z \in A$ tal que $|x - z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$ para algum $n \geq 1$. Portanto, $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$. Se $\tau(z) = z'$, então $|x' - z'| < \varepsilon$ e $|y' - g^n(z')| < \varepsilon$ e, portanto, g é transitiva topologicamente. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

$\square$

Com a Proposição acima, temos agora condições de entender a dinâmica de F quando $\mu = 4$.

Lema 5.3. *A função* $T : [0,1] \to [0,1]$*, dada por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é caótica.

Demonstração. $\square$

Teorema 5.4. *Se* $\mu = 4$*, então* F *é caótica.*

Demonstração. Seja $\tau(x) = sin^2(\frac{\pi x}{2})$, $x \in [0,1]$. Temos que τ é homeomorfismo por τ' existe em $[0,1]$ e $\tau'(x) > 0$ para todo $x \in (0,1)$.

Se $x \in [0, \frac{1}{2}]$, então $\tau \circ T(x) = \tau(2x) = sin^2(\pi x)$ e se $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, então $\tau \circ T(x) = \tau(2 - 2x) = sin^2(\pi - \pi x) = (sin(\pi)cos(\pi x) - sin(\pi x)cos(\pi))^2 = sin^2(px)$. Por outro lado, $F \circ \tau(x) = 4sin^2(\frac{\pi x}{2})(1 - sin^2(\frac{\pi x}{2})) = 4sin^2(\frac{\pi x}{2})cos^2(\frac{\pi x}{2}) = sin^2(\pi x)$. Portanto, $\tau \circ T = F \circ \tau$.

Portanto, de acordo com o Teorema 4.12 Proposição 5.2 e o Lema 5.3, F é caótica. $\square$