

1 Subshift

Seja $N \geq 2$. Definimos o conjunto Σ_N formado pelas seqüências de números naturais limitados entre 1 e N . Precisamente,

$$\Sigma_N = \{(x_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : 1 \leq x_n \leq N\}.$$

Definimos também a função $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \rightarrow \mathbb{R}$ que é dada por

$$d_N(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i},$$

onde $x = (x_n)_{n=0}^\infty$ e $y = (y_n)_{n=0}^\infty$. Como $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} < \infty$, d_N está bem definida.

Proposição 1.1. (Σ_N, d_N) é um espaço métrico.

Demonstração. Se $x = (x_n)_{n=0}^\infty, y = (y_n)_{n=0}^\infty, z = (z_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$, então

1. $d_N(x, y) \geq 0$, pois $|x_i - y_i| \geq 0$ para todo $i \geq 0$.
2. $d_N(x, y) = d_N(y, x)$, pois $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ para todo $i \geq 0$.
3. $d_N(x, z) \leq d_N(x, y) + d_N(y, z)$, pois $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ para todo $i \geq 0$.

Desse modo, d_N é uma distância em Σ_N e (Σ_N, d_N) é um espaço métrico. \square

Proposição 1.2. Sejam $x = (x_n)_{n=0}^\infty, y = (y_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$.

1. Se $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, então $d_N(x, y) \leq \frac{1}{N^k}$.
2. Se $d_N(x, y) < \frac{1}{N^k}$, então $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$.

Demonstração. 1. Se $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, então

$$d_N(x, y) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N^{k+1}} \frac{N}{N-1} \leq \frac{1}{N^k}.$$

2. Se $x_j \neq y_j$ para algum $0 \leq j \leq k$, então

$$d_N(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i} \geq \frac{1}{N^j} \geq \frac{1}{N^k}.$$

\square

Definimos a função shift $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ que é dada por

$$\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$$

para todo $x \in \Sigma_N$, isto é, $\sigma(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

Proposição 1.3. σ é contínua.

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$. Seja $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$ e defina $\delta = \frac{1}{N^{k+1}}$.

Pela Proposição anterior, se $y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$ e $d_N(x, y) < \delta$, então $x_i = y_i$ para todo $i = 0, \dots, k+1$. Desse modo, $\sigma(x)$ e $\sigma(y)$ coincidem nas k primeiras entradas. Utilizando a Proposição anterior novamente, concluímos que $d_N(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$. \square

Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ uma matriz quadrada de ordem N tal que $a_{ij} \in \{0, 1\}$ para todo $1 \leq i, j \leq N$. Dizemos que A é uma matriz de transição de ordem N . Definimos o conjunto Σ_A como

$$\Sigma_A = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N : a_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \geq 0\}.$$

Seja $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$. Observando que $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 0$, temos que $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_A$. Desse modo, podemos definir a função $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ como sendo a restrição de σ em Σ_A . Dizemos que σ_A é o subshift definido por A .

Proposição 1.4. Σ_A é um subconjunto fechado de Σ_N .

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de elementos em Σ_A convergente para $x = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$. Observe que a sequência $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de sequências, pois cada x_n é elemento de Σ_N .

Suponha que $x \notin \Sigma_A$. Então, existe $j \geq 0$ tal que $a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Por outro lado, pela definição de convergência, existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{j+1}}$ e, portanto, as $j+1$ primeiras entradas de x e x_{n_0} são iguais. Escrevendo $x_{n_0} = (\eta_n)_{n=0}^{\infty}$, concluímos que $a_{\eta_j \eta_{j+1}} = a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Absurdo, pois $x_{n_0} \in \Sigma_A$. \square

No restante dessa seção vamos estudar a dinâmica da função quadrática $F_{\mu}(x) = \mu x(1-x)$, onde o parâmetro $\mu = 3.839$ está fixado. Será omitido μ na notação da função e escreveremos apenas F .

Existe uma vizinhança V de 0.149888 tal que $F^3(V) \subset V$ e $|(F^3)'(V)| < 1$ e, portanto, existe um ponto periódico atrator $a_1 \in V$ de período 3. Se a_1, a_2 e a_3 são os elementos da órbita de a_1 em ordem crescente, então

$$a_1 \simeq 0.149888,$$

$$a_2 \simeq 0.489149,$$

$$a_3 \simeq 0.959299.$$

Portanto, de acordo com o Teorema de Sharkovsky, F possui infinitos pontos periódicos. Além disso, de acordo com o Teorema de Singer, essa é a única órbita atratora de F .

De modo análogo, concluímos que F possui outra órbita de tamanho 3. Se b_1 , b_2 e b_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040,$$

$$b_2 \simeq 0.539247,$$

$$b_3 \simeq 0.953837.$$

Observando o gráfico de F^3 , concluímos que para cada b_i , existe b'_i no lado oposto de b_i em relação ao ponto a_i tal que $F^3(b'_i) = b_i$. Defina $A_1 = (b'_1, b_1)$, $A_2 = (b'_2, b_2)$ e $A_3 = (b_3, b'_3)$. Cada A_i é exatamente o intervalo maximal contendo a_i utilizado na demonstração do Teorema de Singer.

Sendo F^3 simétrica em relação ao ponto $\frac{1}{2}$, temos que $F(b'_2) = F(b_2) = b_3$. Além disso, $F(b'_1) = b'_2$ e $F(b'_3) = b'_1$.

★ *Essa última afirmação eu acho que é verdade, mas não consegui provar. Ao menos é consistente, pois implica que $b'_3 \rightarrow b'_1 \rightarrow b'_2 \rightarrow b_3 \rightarrow b_1 \rightarrow b_2$ e, portanto, $F^3(b'_i) = b_i$. Tentei mostrar utilizando imagens inversas, mas cada imagem inversa possui dois elementos e eu não consigo construir uma regra sobre qual escolher.* ★

Desse modo, F mapeia, de forma monótona, A_1 em A_2 e A_3 em A_1 . Observando que o máximo de F em A_2 é $F(\frac{1}{2}) = 0.95975 < b'_3$, concluímos que $F(A_2) \subset A_3$.

Sabemos que se $x \notin [0, 1]$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = -\infty$. Além disso, o único ponto periódico de A_i é a_i e todos os pontos em A_i tendem para a órbita de a_i . Desse modo, todos os outros infinitos pontos periódicos residem no complemento de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ em $[0, 1]$, que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam $I_0 = [0, b'_1]$, $I_1 = [b_1, b'_2]$, $I_2 = [b_2, b_3]$, $I_3 = [b'_3, 1]$ tais intervalos. A Proposição a seguir nos permite dizer mais.

Proposição 1.5. *Se $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$ é um ponto periódico de F , então $x \in I_1 \cup I_2$.*

Demonstração. Observando que F é monótona em cada I_k , temos que $F(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$, $F(I_1) = I_2$, $F(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$ e $F(I_3) = I_0$. Desse modo, se $x \in I_1 \cup I_2$ é periódico, então órbita de x permanece em $I_1 \cup I_2$.

Por outro lado, se $x \in I_0 - \{0\}$, existe um menor $n \geq 1$ tal que $F^n(x) \notin I_0$. Se $F^n(x) \in A_1$, então x não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de A_1 é a_1 . Se $F^n(x) \in I_1$, então x não pode ser periódico, pois caso contrário a órbita de x estaria contida em $I_1 \cup I_2$ e nunca retornaria para I_0 .

Finalmente, se $x \in I_3$, então $F(x) \in I_0$ e a análise segue como no parágrafo anterior. \square

Defina o conjunto Λ como

$$\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2 : F^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de F estão em Λ , com exceção dos pontos 0 , a_1 , a_2 e a_3 .

Lema 1.6. *Existe $N \geq 1$ tal que $|(F^n)'(\Lambda)| > 1$ para todo $n \geq N$.*

Demonstração. Como $F'' < 0$, temos que F' é estritamente decrescente. Como $F'(\frac{1}{2}) = 0$, concluímos que A_2 é uma vizinhança da única raiz de F' . Além disso, $|(F^3)'(b_2)| = |(F^3)'(b'_2)| \simeq 0.3$. Desse modo, $|F'(I_1 \cup I_2)| \geq \nu$ para algum $\nu \in (0, 1)$.

Observando o gráfico de F^3 , concluímos que o subconjunto de $I_1 \cup I_2$ no qual $|F'| \leq 1$ é formado por três intervalos fechados. Sejam B_1 , B_2 e B_3 tais intervalos, numerados da esquerda para direita. Utilizando a simetria do gráfico de F^3 e o fato de que $(F^3)'(b_1) > 1$, temos que $F^3(B_3) \subset A_1$ e, portanto, $B_3 \cap \Lambda = \emptyset$.

Por outro lado, $B_2 \subset [0.661, 0.683]$, já que $(F^3)'(0.661) > 1$ e $(F^3)'(0.683) < -1$. Desse modo, $F(B_2) \subset A_3$. Utilizando novamente a simetria do gráfico de F^3 , concluímos que $F(B_1) \subset A_3$. Portanto, $B_1 \cap \Lambda = \emptyset$ e $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$. Assim, $|(F^3)'(\Lambda)| > \lambda$ para algum $\lambda > 1$. Observe que se $L \geq 1$ e $x \in \Lambda$, então

$$\left| (F^{3L})'(x) \right| = \left| (F^3)'(F^{3(L-1)}(x)) \right| \left| (F^3)'(F^{3(L-2)}(x)) \right| \dots \left| (F^3)'(F^3(x)) \right| \left| (F^3)'(x) \right| \geq \lambda^L.$$

Finalmente, sejam $x \in \Lambda$ e $K \geq 1$ tal que $\nu^2 \lambda^K > 1$. Se $N = 3K$ e $n \geq N$, podemos escrever $n = 3L + \alpha$, onde $L \geq K$ e $\alpha \in \{0, 1, 2\}$. Desse modo,

i. se $\alpha = 0$, então

$$\left| (F^n)'(x) \right| = \left| (F^{3L})'(x) \right| \geq \lambda^L \geq \lambda^K > 1.$$

ii. se $\alpha = 1$, então

$$\left| (F^n)'(x) \right| = \left| F'(F^{3L}(x)) (F^{3L})'(x) \right| \geq \nu \lambda^L > \nu^2 \lambda^K > 1.$$

iii. se $\alpha = 2$, então

$$\left| (F^n)'(x) \right| = \left| F'(F^{3L+1}(x)) F'(F^{3L}(x)) (F^{3L})'(x) \right| \geq \nu^2 \lambda^L \geq \nu^2 \lambda^K > 1.$$

\square

Para as demonstrações dos próximos resultados, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos definir a função $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_A$ por $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$, onde $x_i = 1$ se $F^i(x) \in I_1$ e $x_i = 2$ se $F^i(x) \in I_2$ para todo $i \geq 0$. Observe que está S bem definida, pois $F(I_1) = I_2$ e $F(I_2) \subset I_1 \cup I_2$ e, portanto, $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 0$.

Lema 1.7. Λ não contém intervalos.

Demonstração. Suponha que Λ contém algum intervalo e sejam $a, b \in \Lambda$, com $a < b$, tais que $[a, b] \subset \Lambda$. Pelo Lema anterior, existe $N \geq 1$ tal que $|(F^n)'(\Lambda)| > \lambda$ para algum $\lambda > 1$ e para todo $n \geq N$. Utilizando a notação do Lema anterior, seja $k \geq N$ tal que $(b - a)\nu^N \lambda^{k-N} > 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\begin{aligned} |F^k(b) - F^k(a)| &= |(F^k)'(c)|(b - a) \\ &= \left| \prod_{i=0}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| (b - a) \\ &= \left| \prod_{i=0}^{N-1} F'(F^i(c)) \right| \left| \prod_{i=N}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| (b - a) \\ &\geq \nu^N \lambda^{k-N} (b - a) > 1 \end{aligned}$$

e, portanto, $F^k(a)$ ou $F^k(b)$ não é elemento de $[0, 1]$, o que é um absurdo. \square

Proposição 1.8. S é um homeomorfismo.

Demonstração. i. S é injetora:

Sejam $x, y \in \Lambda$, com $x < y$, e suponha que $S(x) = S(y)$. Desse modo, $F^n(x)$ e $F^n(y)$ está no mesmo lado em relação ao ponto crítico $\frac{1}{2}$ e, portanto, F é monótona no intervalo J_n , cujos pontos extremos são $F^n(x)$ e $F^n(y)$, para todo $n \geq 0$. Desse modo, se $z \in [x, y]$, então $F^n(z) \in J_n \subset I_1 \cup I_2$ para todo $n \geq 0$ e, portanto, $z \in \Lambda$, o que é um absurdo.

ii. S é sobrejetora:

Seja $(x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_A$. Vamos provar que existe $x \in \Lambda$ tal que $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$.

Inicialmente, para cada $n \geq 0$, considere

$$I_{x_0 \dots x_n} = \{x \in [0, 1] : x \in I_{x_0}, \dots, F^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

Observe que $x \in I_{x_0 \dots x_n}$ se, e somente se, $x \in I_{x_0}$ e $F(x) \in \{y \in [0, 1] : y \in I_{x_1}, \dots, F^{n-1}(y) \in I_{x_n}\}$. Desse modo, $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1 \dots x_n})$.

Assim, por indução, vemos que $I_{x_0 \dots x_n}$ é um intervalo fechado não vazio. Além disso, $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0 \dots x_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{x_n}) \subset I_{x_0 \dots x_{n-1}}$.

Desse modo, $(I_{x_0}, I_{x_0 x_1}, I_{x_0 x_1 x_2}, \dots)$ é uma sequência de intervalos encaixantes fechados e não vazios e, portanto, existe $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n}$. Como $F^i(x) \in I_{x_i}$, concluímos que $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Observe que $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n}$ é único, pois S é injetora.

iii. S é contínua:

Seja $x \in \Lambda$, com $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Sejam também $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$.

Como $I_{x_0 \dots x_k}$ um intervalo fechado e $x \in I_{x_0 \dots x_k}$, tome $\delta > 0$ tal que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \delta$ implica que $y \in I_{x_0 \dots x_k}$. Desse modo, $S(x)$ e $S(y)$ são iguais nas primeiras $k + 1$ entradas e, portanto, $d_N(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{N^{k+1}} < \varepsilon$. □

Teorema 1.9. $S \circ F|_{\Lambda} = \sigma_A \circ S$.

Demonstração. Seja $x \in \Lambda$. Utilizando a notação da Proposição anterior, se $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, então x é o único elemento de $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n}$.

Podemos escrever $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1}) \cap \dots \cap F^{-n}(I_{x_n})$. Se $x_0 = 1$, então $x_1 = 2$ e, portanto, $F(I_{x_0}) = I_{x_1}$. Se $x_0 = 2$, então $F(I_{x_0}) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$. Em ambos os casos, $F(I_{x_0}) \supset I_{x_1}$ e, desse modo,

$$F(I_{x_0 \dots x_n}) = I_{x_1} \cap \dots \cap F^{-n+1}(I_{x_n}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S \circ F|_{\Lambda}(x) &= S(F(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n})) \\ &= S(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{x_1 \dots x_n}) \\ &= (x_n)_{n=1}^{\infty} = \sigma \circ S(x) \end{aligned}$$
□

Proposição 1.10. *Seja A uma matriz de transição de ordem N . Então σ_A possui $Tr(A^k)$ pontos periódicos de período k .*

Demonstração. Observe que $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$ é um ponto periódico de período k de σ se, e somente se, $x_i = x_{i+k}$ para todo $i \geq 0$, ou seja,

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \dots).$$

Desse modo, $x \in \Sigma_A$ se, e somente se, $a_{x_0x_1} = a_{x_1x_2} = \dots = a_{x_{k-1}x_0} = 1$ e, portanto,

$$\begin{cases} a_{x_0x_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}x_0} = 1 & \text{se } x \in \Sigma_A \\ a_{x_0x_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}x_0} = 0 & \text{se } x \notin \Sigma_A \end{cases}$$

Assim, a quantidade de pontos periódicos de período k de σ_A é dada por

$$\sum_{1 \leq x_0, \dots, x_{k-1} \leq N} a_{x_0x_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}x_0}.$$

Por outro lado, utilizando a definição de multiplicação de matrizes podemos mostrar por indução que $A^k = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$, onde

$$c_{ij} = \sum_{1 \leq x_1, \dots, x_{k-1} \leq N} a_{ix_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}j}$$

e, portanto,

$$\text{Tr}(A^k) = \sum_{x_0=1}^N c_{x_0x_0} = \sum_{1 \leq x_0, \dots, x_{k-1} \leq N} a_{x_0x_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}x_0}.$$

□