Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos

Agenor Gonçalves Neto [a]

São Paulo, 2020

[a]Orientado pelo Prof. Salvador Addas Zanata (IME-USP).

Sumário

Sumário

Definição

Um sistema dinâmico é função $f : X \to X$, onde X é um espaço métrico.

Dado $x \in X$, nosso objetivo é estudar as propriedades da sequência definida recursivamente por

$$f^0(x) = x \quad \text{e} \quad f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

para todo $k \geq 1$.

Definição

Seja $p \in X$.

1. Se $f(p) = p$, então p é um ponto fixo de f.
2. Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$, então p é um ponto periódico de f de período n.
   O conjunto dos pontos periódicos de f será denotado por $\mathrm{Per}(f)$.
3. Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$ e $f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então p é um ponto periódico f de período primo n.
   O conjunto dos pontos periódicos de f de período primo n será denotado por $\mathrm{Per}_n(f)$.

Conceitos Elementares

Definição

Se $x \in X$, então $\mathcal{O}(x) = \{f^k(x) : k \geq 0\}$ é a órbita de x.

Definição

Se $p \in \mathrm{Per}_n(f)$, então

$$\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k \to \infty} f^{kn}(x) = p\}$$

é o conjunto estável de p. Além disso, dizemos que

$$\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k \to \infty} |f^k(x)| = \infty\}$$

é o conjunto estável do infinito.

Proposição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $f([a, b]) \subset [a, b]$ *ou* $f([a, b]) \supset [a, b]$, *então* f *possui ponto fixo.*

Demonstração.

Basta considerar a função contínua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$ e observar, pelo TVI, que em ambos os casos existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$. $\square$

Definição

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $p \in \mathrm{Per}_n(f)$.

i. Se $|Df^n(p)| < 1$, então p é um ponto atrator.

ii. Se $|Df^n(p)| > 1$, então p é um ponto repulsor.

Essa definição pode ser estendida para órbitas de pontos periódicos. De fato, se um ponto é atrator, então todos os pontos de sua órbita também são atratores e, nesse caso, dizemos que a órbita é atratora.

Teorema

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $\mathcal{C}^1$ *e* $p \in \mathrm{Per}_n(f)$.

1. *Se* $|Df^n(p)| < 1$, *então existe uma vizinhança de* p *contida no conjunto estável de* p.
2. *Se* $|Df^n(p)| > 1$, *então existe uma vizinhança* V *de* p *com a seguinte propriedade: se* $x \in V \backslash \{p\}$, *então a órbita de* x *não está contida em* V.

Sumário

Família Quadrática

Nessa seção, vamos considerar a família de funções $h : [0,1] \to [0,1]$ dadas por

$$h(x) = \mu x(1-x),$$

onde $\mu > 1$ é um parâmetro real. Essa família de funções é conhecia como família quadrática.

Sumário

Família Quadrática: Estudo Inicial

Proposição

Se $\mu > 1$*, então* $h(0) = 0$ *e* $h(p_\mu) = p_\mu$*, onde* $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Proposição

Se $\mu > 1$*, então* $\lim_{k\to\infty} h^k(x) = -\infty$ *para todo* $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

Proposição

Se $1 < \mu < 3$, *então*

1. 0 *é um ponto repulsor e* p_μ *é um ponto atrator.*
2. $\lim_{k\to\infty} h^k(x) = p_\mu$ *para todo* $0 < x < 1$.

Desse modo, a dinâmica de h está completamente determinada quando $1 < \mu < 3$. De fato,

$$\mathcal{B}(0) = \{0, 1\}, \quad \mathcal{B}(p_\mu) = (0, 1) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Sumário

Suponha $\mu > 4$. Considere o conjunto

$$\Lambda_n = \{x \in [0,1] : h^n(x) \in [0,1]\}$$

formado pelos pontos de $[0,1]$ que permanecem em $[0,1]$ após n iterações de h e o conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$$

formado pelos pontos de $[0,1]$ cuja órbita está contida em $[0,1]$. Desse modo, podemos restringir o estudo da dinâmica de h em Λ.

Família Quadrática: Conjuntos de Cantor

Proposição

Se $\mu > 4$, então

1. Λ_n *é a união de* 2^n *intervalos fechados disjuntos.*
2. $h^n : [a, b] \to [0, 1]$ *é bijetora, onde* $[a, b]$ *é um dos intervalos que formam* Λ_n*.*

Lema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$*, então*

1. $|Dh(\Lambda_1)| > \lambda > 1$.
2. $b - a < \frac{1}{\lambda^n}$*, onde* $[a, b]$ *é um dos intervalos que formam* Λ_n*.*

Família Quadrática: Conjuntos de Cantor

Teorema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor [a]*.*

Demonstração.

a) *Λ é totalmente desconexo.*
Se existe $[a, b] \subset \Lambda$, seja k tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |a - b|$. Em particular, $[a, b] \subset \Lambda_k$, o que é um absurdo pois os intervalos que formam Λ_k possuem tamanho menor que $\frac{1}{\lambda^k}$.

b) *Λ é perfeito.*
Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Se $x \in [a, b]$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k, então $a \in \Lambda$ e $|x - a| < \varepsilon$ e, portanto, x é ponto de acumulação de Λ. $\square$

Observação

Esse teorema é válido para $4 < \mu < 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais complicada.

[a] Um subconjunto de $\mathbb{R}$ não vazio, limitado, totalmente desconexo e perfeito.

Sumário

Família Quadrática: Caos

Definição

Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f é topologicamente transitiva se dados $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ e $k \geq 0$ tais que $|x - z| < \varepsilon$ e $|y - f^k(z)| < \varepsilon$.

Proposição

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, *então* $h|_\Lambda$ *é topologicamente transitiva.*

Demonstração.

Sejam $x, y \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k. Pelo TVI, existe $z \in [a, b]$ tal que $h^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$ e $|x - z| < \varepsilon$, concluímos que $h|_\Lambda$ é topologicamente transitiva. $\square$

Definição

Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f depende sensivelmente das condições iniciais se existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $k \geq 0$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Proposição

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.

Demonstração.

Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k. Suponha que $h^k(a) = 0$ e $h^k(b) = 1$; se $h^k(a) = 1$ e $h^k(b) = 0$, a demonstração é análoga.

Como $h(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, temos que $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Se $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2})$, então $|h^k(x) - h^k(b)| = |h^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $h^k(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$, então $|h^k(x) - h^k(a)| = |h^k(x)| > \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, concluímos que $h|_\Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais. $\square$

Família Quadrática: Caos

Definição

Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f é caótica se as seguintes condições são válidas:

i. $\mathrm{Per}(f)$ é denso em X.

ii. f é topologicamente transitiva.

iii. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ é caótica.

Demonstração.

Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k. Como $h^k([a, b]) \supset [a, b]$, existe $y \in [a, b]$ tal que $h^k(y) = y$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \varepsilon$, concluímos que $\mathrm{Per}(h|_\Lambda)$ é denso em Λ. $\square$

Observação

Esse teorema é válido para $4 < \mu < 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais complicada.

Família Quadrática: Caos

Teorema

Seja $f : X \to X$ *é uma função contínua, onde* X *é um conjunto infinito. Se* $\mathrm{Per}(f)$ *é denso em* X *e* f *é topologicamente transitiva, então* f *é caótica.*

Demonstração.

Ver [Holmgren, 1996]. $\square$

Sumário

Definição

Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\tau : X \to Y$ funções. Dizemos que f e g são topologicamente conjugadas por τ se as seguintes condições são válidas:

i. τ é um homeomorfismo.

ii. $\tau \circ f = g \circ \tau$.

Proposição

Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ *e* $\tau : X \to Y$ *funções. Se* f *e* g *são topologicamente conjugadas por* τ, *então*

1. $\mathrm{Per}(f)$ *é denso em* X *se, e somente se,* $\mathrm{Per}(g)$ *é denso em* Y.
2. f *é topologicamente transitiva se, e somente se,* g *é topologicamente transitiva.*

Lema

A função $T : [0,1] \to [0,1]$ *dada por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

é caótica.

Família Quadrática: Conjugação Topológica

Teorema

Se $\mu = 4$, então h é caótica.

Demonstração.

Basta observar que $\tau \circ T = h \circ \tau$, onde $\tau : [0,1] \to [0,1]$ é o homeomorfismo dado por $\tau(x) = \text{sen}^2(\frac{\pi x}{2})$. $\square$

Sumário

Família Quadrática: Dinâmica Simbólica

Seja

$$\Sigma = \{(x_0\, x_1\, x_2\, \dots) : x_n = 1 \text{ ou } x_n = 2 \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Seja $d : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k},$$

onde $x = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$ e $y = (y_0\, y_1\, y_2\, \dots)$.

Família Quadrática: Dinâmica Simbólica

Seja $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ a função dada por $\sigma(x_0\, x_1\, x_2\, \dots) = (x_1\, x_2\, x_3\, \dots)$.
Se $\Lambda_1 = I_1 \cup I_2$, podemos definir a função $S : \Lambda \to \Sigma$ dada por

$$S(x) = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots),$$

onde $x_k = 1$ se $h^k(x) \in I_1$ e $x_k = 2$ se $h^k(x) \in I_2$ para todo $k \geq 0$.

Teorema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ e σ são topologicamente conjugadas por S.

Corolário

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ possui 2^n pontos periódicos de período n para todo $n \geq 1$.

Demonstração.

Basta observar que os pontos periódicos de σ de período n são determinados pelas primeiras n entradas e, portanto, σ possui 2^n pontos periódicos de período n para todo $n \geq 1$. $\square$

Sumário

Família Quadrática: Bifurcação

Seja f_λ uma família parametrizada de funções no parâmetro λ de modo que a função

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x),$$

definida num aberto de $\mathbb{R}^2$, seja de classe $\mathcal{C}^\infty$ nas variáveis x e λ.

Definição

Dizemos que a família f_λ sofre uma bifurcação em λ_0 se existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: se $\lambda_1 \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ e $\lambda_2 \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$, então f_{λ_1} e f_{λ_2} não são topologicamente conjugadas.

Família Quadrática: Bifurcação

Exemplo

A família E_λ de funções dadas por $E_\lambda(x) = e^{x+\lambda}$ sofre uma bifurcação em $\lambda_0 = -1$.

Família Quadrática: Bifurcação

Exemplo

A família quadrática sofre uma bifurcação em $\mu_0 = 3$.

Família Quadrática: Bifurcação

Observe, nos exemplos, que as bifurcações ocorreram quando a derivada em módulo no ponto fixo se tornou igual à 1. O teorema a seguir mostra que isso não é coincidência.

Teorema

Seja f_λ uma família parametrizada de funções. Suponha que

1. $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$,
2. $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$.

Então existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0, respectivamente, e uma função $p : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

1. $p(\lambda_0) = x_0$,
2. $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ *para todo* $\lambda \in I$.

Além disso, f_λ não possui outros pontos fixos em J.

Inicialmente, observe que se $\mu > 2$, então existe $p'_\mu < p_\mu$ tal que $h(p'_\mu) = p_\mu$. Na Figura **??**, observe o gráfico de h^2 para alguns valores de μ, juntamente com um quadrado de vértices (p'_μ, p_μ), (p_μ, p_μ), (p_μ, p'_μ) e (p'_μ, p'_μ).

Família Quadrática: Bifurcação

Restringindo o gráfico de h^2 ao quadrado e rotacionando em π radianos, vemos que ele se assemelha ao gráfico da própria h no intervalo $[0,1]$ para um valor de μ diferente.

Se $\mu > 2$, considere a função $L : [p'_\mu, p_\mu] \to [0,1]$ linear tal que $L(p'_\mu) = 1$ e $L(p_\mu) = 0$.

Desse modo, definimos a renormalização de h como a função $Rh : [0,1] \to [0,1]$ dada por $Rh(x) = L \circ h^2 \circ L^{-1}(x)$.

Família Quadrática: Bifurcação

Observe que cada ponto fixo de Rh está relacionado com um ponto periódico de h de período 2. Além disso, o gráfico de Rh não está contido em $[0, 1]$ para algum $\mu < 4$.

Desse modo, esperamos que Rh sofra uma bifurcação com duplicação de período conforme o parâmetro cresce e, de maneira análoga, que h^2 sofra uma bifurcação com duplicação de período. Continuando esse processo, temos uma sucessão de bifurcações com duplicação de período na família quadrática.

O computador nos permite observar esse fato experimentalmente. Para isso, vamos computar o digrama de órbita do ponto crítico da família quadrática para $\mu > 2$.

Sumário

Nessa seção, vamos considerar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Além disso, escreveremos $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_n$ quando $I_0, I_1, \ldots, I_n$ são intervalos compactos e $f(I_k) \supset I_{k+1}$ para todo $0 \leq k < n$.

Proposição

Se $I_0 \longrightarrow I_1$, então existe um intervalo fechado $I_0' \subset I_0$ tal que $f(I_0') = I_1$.

Demonstração.

Se $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [c, d]$, sejam p, $q \in [a, b]$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$. Suponha que $p \leq q$; se $q \leq p$, a demostração é análoga.

Definindo $b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\}$ e $a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$ e observando que f é contínua, podemos concluir que $f(I_0') = I_1$, onde $I_0' = [a', b']$. $\square$

Lema

Se $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$, *então existe* $p \in I_0$ *tal que as seguintes condições são válidas:*

1. $f^k(p) \in I_k$ *para todo* $1 \leq k < n$.
2. $f^n(p) = p$.

Demonstração.

Basta observar que podemos construir uma sequência de intervalos fechados $I'_0, I'_1, \ldots, I'_{n-1}$ com as seguintes propriedades:

a) $I_0 \supset I'_0 \supset I'_1 \supset \cdots \supset I'_{n-1}$.

b) $f^k(I'_{k-1}) = I_k$ *para todo* $1 \leq k < n$.

c) $f^n(I'_{n-1}) = I_0$. $\square$

Teorema de Sharkovsky

Teorema

Se $\mathrm{Per}_3(f) \neq \emptyset$*, então* $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$ *para todo* $n \geq 1$*.*

Demonstração.

Sejam $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de um elemento de $\mathrm{Per}_3(f)$. Suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$; se $f(p_1) = p_3$ e $f(p_3) = p_2$, a demonstração é análoga. Definindo $I_0 = [p_1, p_2]$ e $I_1 = [p_2, p_3]$, temos que $I_0 \longrightarrow I_1$, $I_1 \longrightarrow I_0$ e $I_1 \longrightarrow I_1$. Desse modo, podemos demonstrar as seguintes afirmações:

a) $\mathrm{Per}_1(f) \neq \emptyset$.
   De fato, $I_1 \longrightarrow I_1$ implica que existe $p \in I_1$ tal que $f(p) = p$.

b) $\mathrm{Per}_2(f) \neq \emptyset$.
   De fato, $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0$ implica que existe $p \in I_0$ tal que $f(p) \in I_1$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in I_0 \cap I_1$, o que é um absurdo pois $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e $p_2 \in \mathrm{Per}_3(f)$.

c) $\mathrm{Per}_4(f) \neq \emptyset$.

Definição (Ordenação de Sharkovsky)

$$3 \rhd 5 \rhd \cdots \rhd 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^k \cdot 3 \rhd 2^k \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$$

Teorema (Sharkovsky)

Se $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$, *então* $\mathrm{Per}_m(f) \neq \emptyset$ *para todo* $n \rhd m$.

Demonstração.

Ver [Burns e Hasselblatt, 2011]. $\square$

Teorema de Sharkovsky

O Teorema de Sharkovsky pode ser usado para provar que órbitas periódicas de certos tamanhos não existem. Por exemplo, observando os gráficos de h, h^2 e h^4 para $\mu = 3.2$ vemos que $\mathrm{Per}_4(h) = \emptyset$ e, portanto, $\mathrm{Per}_n(h) = \emptyset$ para todo $n \geq 3$.

Teorema de Sharkovsky

Teorema

Se $n \geq 1$, então existe uma função f com as seguintes propriedades:

1. $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$.
2. $\mathrm{Per}_m(f) = \emptyset$ *para todo* $m \triangleright n$.

Demonstração.

Ver [Burns e Hasselblatt, 2011]. $\square$

Referências

Burns, K. e Hasselblatt, B. (2011).
The Sharkovsky Theorem: a Natural Direct Proof.
The American Mathematical Monthly, 118(3):229–244.

Devaney, R. L. (1989).
An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.
Perseus Books.

Holmgren, R. A. (1996).
A First Course in Discrete Dynamical Systems.
Springer-Verlag New York.