

# 1 Definições Elementares

**Definição 1.1.** Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma função,  $p \in X$  e  $n \geq 1$ . Dizemos que  $p$  é um *ponto periódico com período  $n$* , se  $f^n(p) = p$ . Se  $f^k(p) \neq p$  para todo  $1 \leq k < n$ , então  $n$  é chamado de *período principal*. Em particular, se  $n = 1$ , dizemos que  $p$  é um *ponto fixo*.

**Definição 1.2.** Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma função,  $p \in X$  e  $n \geq 1$ . Dizemos que  $p$  é um *ponto eventualmente periódico com período  $n$* , se existe  $m > 1$  tal que  $f^k(p) = f^{k+n}(p)$  para todo  $k \geq m$ . Em particular, se  $n = 1$ , dizemos que  $p$  é um *ponto eventualmente fixo*.

**Definição 1.3.** Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma função e  $x \in X$ . A *órbita de  $x$*  é o conjunto  $O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ .

**Definição 1.4.** Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma função,  $p$  um ponto periódico período  $n$  e  $x \in X$ . Dizemos que  $x$  *tende assintoticamente para  $p$*  se  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$ . O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para  $p$ , denotado por  $W^s(p)$ , é chamado de *conjunto estável de  $p$* . Dizemos que  $x$  *tende assintoticamente para infinito* se  $\lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(x)| = \infty$ . O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para infinito, denotado por  $W^s(\infty)$ , é chamado de *conjunto estável do infinito*.

**Proposição 1.5.** Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma função e  $p_1, p_2$  pontos periódicos distintos. Então  $W^s(p_1) \cap W^s(p_2) = \emptyset$ .

*Demonstração.* Sejam  $n_1, n_2$  os períodos de  $p_1, p_2$ , respectivamente. Suponha que exista  $x \in W^s(p_1) \cap W^s(p_2)$ . Sabemos que  $|f^{kn_1}(x) - p_1| \rightarrow 0$  e  $|f^{kn_2}(x) - p_2| \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Desse modo, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N \geq 1$  tal que  $|f^{kn_1}(x) - p_1| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $|f^{kn_2}(x) - p_2| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $k > N$ . Portanto,  $|p_1 - p_2| = |p_1 - f^{kn_1 n_2}(x) + f^{kn_1 n_2}(x) - p_2| \leq |f^{kn_2 n_1}(x) - p_1| + |f^{kn_1 n_2}(x) - p_2| < \varepsilon$ . Temos então que  $p = q$ , pois  $\varepsilon$  é arbitrário. Absurdo.  $\square$

## 2 Teorema de Sharkovsky

Ao longo dessa seção,  $f$  denotará uma função contínua de um intervalo em  $\mathbb{R}$ , onde o intervalo não precisa ser fechado ou limitado.

**Definição 2.1.** Se  $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$  são intervalos fechados,  $n > 1$ ,

1. dizemos que  $I_0$  cobre  $I_1$ , e denotamos por  $I_0 \longrightarrow I_1$ , se  $f(I_0) \supset I_1$ .
2. dizemos que  $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$  é um caminho entre  $I_0$  e  $I_{n-1}$ , e denotamos por  $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1}$ , se  $f(I_i) \supset I_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n-2$ .
3. dizemos que  $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$  é um ciclo entre  $I_0$  e  $I_{n-1}$ , e denotamos por  $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$ , se  $f(I_i) \supset I_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n-2$ , e  $f(I_{n-1}) \supset I_0$ .

**Lema 2.2.** Se  $I_0 \longrightarrow I_1$ , então  $f(I'_0) = I_1$  para algum intervalo fechado  $I'_0 \subset I_0$ .

*Demonstração.* Se  $I_0 = [a, b]$  e  $I_1 = [c, d]$ , pelo Teorema do Valor Intermediário, existem  $p, q \in I_0$  tais que  $f(p) = c$  e  $f(q) = d$ . Suponha que  $p \leq q$  e defina  $I'_0 = [a', b']$ , onde

$$b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\} \text{ e } a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$$

Sendo  $f$  contínua temos que  $f(a') = c$  e  $f(b') = d$  e, desse modo,  $f(I'_0) \supset I_1$ . Se  $f(x) < c$  para algum  $x \in I'_0$ , existe  $y \in [x, b']$  tal que  $f(y) = c$ , o que é um absurdo pois nesse caso  $y > a'$ . Absurdo análogo ocorre se  $f(x) > d$  para algum  $x \in I'_0$ . Portanto,  $f(I'_0) = I_1$ .  $\square$

**Lema 2.3.** Se  $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow J_0$ , então existe  $p \in J_0$  tal que  $f^k(p) \in J_k$ , para todo  $k = 1, \dots, n-1$ , e  $f^n(p) = p$ .

*Demonstração.* De acordo com as hipóteses e com a Proposição anterior, temos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} J_0 \longrightarrow J_1 &\Rightarrow \text{ existe } J'_0 \subset J_0 \text{ tal que } f(J'_0) = J_1 \\ J_1 \longrightarrow J_2 &\Rightarrow \text{ existe } J'_1 \subset J'_0 \text{ tal que } f^2(J'_1) = J_2 \\ &\vdots \\ J_{n-2} \longrightarrow J_{n-1} &\Rightarrow \text{ existe } J'_{n-2} \subset J'_{n-3} \text{ tal que } f^{n-1}(J'_{n-2}) = J_{n-1} \\ J_{n-1} \longrightarrow J_0 &\Rightarrow \text{ existe } J'_{n-1} \subset J'_{n-2} \text{ tal que } f^n(J'_{n-1}) = J_0 \end{aligned}$$

Construímos então uma sequência de  $n$  intervalos fechados  $J_0 \supset J'_0 \supset J'_1 \supset \dots \supset J'_{n-1}$  tal que  $f^k(J'_{k-1}) = J_k$ , para todo  $k = 1, \dots, n-1$ , e  $f^n(J'_{n-1}) = J_0$ . Como  $J_0 \supset J'_{n-1}$ , existe  $p \in J'_{n-1}$  tal que  $f^n(p) = p$ . Em particular,  $p \in J_0$  e  $f^k(p) \in J_k$ , para todo  $k = 1, \dots, n-1$ .  $\square$

**Teorema 2.4.** *Se  $f$  admite ponto periódico de período principal 3, então  $f$  admite ponto periódico de período principal  $n$ , para todo  $n \geq 1$ .*

*Demonstração.* Sejam  $p$  um ponto periódico de período principal 3 e  $p_1 < p_2 < p_3$  os pontos da órbita de  $p$  e suponha que  $f(p_1) = p_2$  e  $f(p_2) = p_3$ . O outro caso possível, em que  $f(p_1) = p_3$  e  $f(p_3) = p_2$ , é demonstrado de maneira análoga. Definindo  $I_1 = [p_1, p_2]$  e  $I_2 = [p_2, p_3]$ , temos que  $I_1 \longrightarrow I_2$ ,  $I_2 \longrightarrow I_1$  e  $I_2 \longrightarrow I_2$ .

- (a)  $n = 1$ : Como  $I_2 \longrightarrow I_2$ , existe  $p \in I_2$  tal que  $f(p) = p$ .
- (b)  $n = 2$ : Como  $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1$ , existe  $p \in I_1$  tal que  $f(p) \in I_2$  e  $f^2(p) = p$ . Se  $f(p) = p$ , então  $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ , o que é um absurdo pois  $p_2$  possui período principal 3. Desse modo, o período principal de  $p$  é 2.
- (c)  $n > 3$ : Se  $I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2$  é um ciclo de tamanho  $n$ , existe  $p \in I_2$  tal que  $f^k(p) \in I_2$ , para todo  $k = 1, \dots, n-2$ ,  $f^{n-1}(p) \in I_1$  e  $f^n(p) = p$ . Se  $f^{n-1}(p) = p$ , então  $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ , o que é um absurdo pois implica que  $f(p) = p_3 \in I_1$ . Se  $f^k(p) = p$  para algum  $k = 1, \dots, n-2$  implica que  $f^k(p) \in I_2$ , para todo  $k \geq 1$ . Em particular,  $f^{n-1}(p) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$  e, portanto,  $p = f^n(p) = p_3$ , o que é um absurdo pois implica que  $f(p) = p_1 \in I_2$ .

Desse modo, o resultado está provado.  $\square$

Para demonstrar os seguintes Lemas, supomos que  $f$  admite um ponto periódico  $p$  de período principal  $n > 1$ . Seja  $\mathcal{O}(p) = \{p_1 < p_2 < \dots < p_n\}$  a órbita de  $p$ . Vamos definir  $n-1$  intervalos fechados da forma  $[p_i, p_{i+1}]$ , que serão denotados por  $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$ , com propriedades que permitam demonstrar o Teorema de Shakovsky.

**Lema 2.5.** *Existe  $k = 1, \dots, n-1$  tal que  $[p_k, p_{k+1}] \longrightarrow [p_k, p_{k+1}]$ .*

*Demonstração.* Seja  $p_k = \max\{p_i \in \mathcal{O}(p) : f(p_i) > p_i\}$ . Observe que  $p_k < p_n$ . Pela definição de  $p_k$  e por  $f(p_{k+1}) \neq p_{k+1}$ , temos que  $f(p_k) > p_k$  e  $f(p_{k+1}) < p_{k+1}$ . Portanto,  $[p_k, p_{k+1}] \longrightarrow [p_k, p_{k+1}]$ .  $\square$

O intervalo encontrado no Lema anterior será denotado por  $I_1$ . Portanto,  $I_1 \longrightarrow I_1$ .

**Lema 2.6.** *Existe um caminho entre  $I_1$  e  $[p_i, p_{i+1}]$ , para todo  $i = 1, \dots, n-1$ .*

*Demonstração.* Para cada  $n \geq 1$ , defina  $\mathcal{U}_n$  como a união dos intervalos da forma  $[p_i, p_{i+1}]$  tal que existe um caminho de tamanho  $n$  entre  $I_1$  e  $[p_i, p_{i+1}]$ .

Se  $[p_i, p_{i+1}]$  é um intervalo de  $\mathcal{U}_n$ , então existe um caminho de tamanho  $n$  entre  $I_1$  e  $[p_i, p_{i+1}]$ . Adicionando  $I_1 \longrightarrow I_1$  ao início do caminho formamos um caminho de tamanho  $n+1$  entre  $I_1$  e  $[p_i, p_{i+1}]$ . Portanto,  $[p_i, p_{i+1}]$  é um intervalo de  $\mathcal{U}_{n+1}$  e, desse modo,  $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1}$ . Observe que se  $\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}_{n+1}$ , existe um intervalo  $[p_i, p_{i+1}]$  de  $\mathcal{U}_n$  tal que  $f([p_i, p_{i+1}] \cap \mathcal{O}(p)) \not\subset \mathcal{U}_n$ .

Como  $\mathcal{O}(p)$  é finita e  $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \dots$ , existe  $k \geq 1$  tal que  $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_{k+1}$ . De acordo com a observação anterior,  $f([p_i, p_{i+1}] \cap \mathcal{O}(p)) \subset \mathcal{U}_k$  para todo intervalo  $[p_i, p_{i+1}]$  de  $\mathcal{U}_k$ , ou seja,  $f(\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)) \subset \mathcal{U}_k$ . Desse modo,  $f(\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)) = \mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)$ . Como o único subconjunto de  $\mathcal{O}(p)$  estável por  $f$  é ele próprio, segue que  $\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(p)$ . Assim,  $\mathcal{U}_k = [p_1, p_n]$  e o resultado está provado.  $\square$

**Lema 2.7.** *Se não existe  $[p_i, p_{i+1}] \neq I_1$  tal que  $[p_i, p_{i+1}] \longrightarrow I_1$ , então*

1.  *$f$  é uma bijeção entre os pontos de  $\mathcal{O}(p)$  à esquerda e à direita de  $I_1$*
2.  *$n$  é par*
3.  *$f$  admite um ponto de período 2*

*Demonstração.* Seja  $I_1 = [p_k, p_{k+1}]$  e considere os conjuntos  $\mathcal{O}_1 = \{p_1, \dots, p_k\}$  e  $\mathcal{O}_2 = \{p_{k+1}, \dots, p_n\}$ .

1. Se  $f$  calculada em algum ponto de  $\mathcal{O}_1$  permanece em  $\mathcal{O}_1$ , considere  $p_j = \max\{p_i \in \mathcal{O}_1 : f(p_i) \in \mathcal{O}_1\}$ . Por definição de  $p_j$ , temos  $f(p_j) \leq p_k$  e  $f(p_{j+1}) \geq p_{k+1}$ . Além disso,  $p_j < p_k$ . Desse modo,  $[p_j, p_{j+1}] \neq I_1$  e  $[p_j, p_{j+1}] \longrightarrow I_1$ , o que é um absurdo.

Logo, todo ponto de  $\mathcal{O}_1$  é levado em  $\mathcal{O}_2$  por  $f$ . Analogamente, mostra-se que todo ponto de  $\mathcal{O}_2$  é levado em  $\mathcal{O}_1$  por  $f$ . Assim, existe uma bijeção entre  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$ .

2. Em particular, o tamanho de  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$  são iguais. Desse modo,  $n$  é par.
3. Como  $[p_1, p_k] \longrightarrow [p_{k+1}, p_n]$  e  $[p_{k+1}, p_n] \longrightarrow [p_1, p_k]$ , existe  $p \in [p_1, p_k]$  tal que  $f^2(p) = p$ . Como os intervalos são disjuntos, segue que o período principal de  $p$  é 2.

Desse modo, as afirmações estão provadas.  $\square$

**Lema 2.8.** *Se  $n > 1$  é ímpar e  $f$  não admite ponto de período ímpar menor que  $n$ , então existe um ciclo  $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1$  tal que*

1. *se  $I_i \longrightarrow I_{i+j}$  então  $j = 1$*
2.  *$I_{n-1} \longrightarrow I_j$ , para todo  $j < n - 1$  ímpar*

*Demonstração.* Inicialmente, vamos provar a existência do ciclo de tamanho  $n - 1$ . De acordo com os dois Lemas anteriores, existe um intervalo da forma  $[p_i, p_{i+1}]$  diferente de  $I_1$  tal que  $[p_i, p_{i+1}] \longrightarrow I_1$  (se esse intervalo não existe, então  $n$  é par) e existe um caminho entre  $I_1$  e  $[p_i, p_{i+1}]$ . Portanto, existe um ciclo começando em  $I_1$  diferente de  $I_1 \longrightarrow I_1$ . Observe que o tamanho desse ciclo pode ser arbitrariamente grande já que  $I_1 \longrightarrow I_1$ . Suponha que o menor ciclo dessa forma possui tamanho  $k$  e o denote por  $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1$ .

Suponha que  $k < n - 1$ . Então  $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1$  ou  $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_1$  é um ciclo de tamanho ímpar  $m$  menor que  $n$ . Desse modo,  $f^m(p) = p$  para algum  $p \in I_1$ , o que é um absurdo pois  $f$  não admite ponto periódico de período ímpar menor que  $n$ .

Pela minimalidade do ciclo, a propriedade 1. é verdadeira. Para provar a propriedade 2., seja  $I_1 = [p_k, p_{k+1}]$ . Pela definição de  $I_1$ , temos que  $f(p_k) \geq p_{k+1}$  e  $f(p_{k+1}) \leq p_k$ . Como o período de  $p$  é maior que 2, então  $f(p_k) > f(p_{k+1})$  ou  $f(p_{k+1}) < p_k$ . Suponha que  $f(p_k) > f(p_{k+1})$ . O outro caso é demonstrado de maneira análoga.

Pela propriedade 1., sabemos que  $I_1$  cobre somente ele mesmo e  $I_2$ . Desse modo,  $f(p_k) = p_{k+2}$  e  $f(p_{k+1}) = p_k$ , e portanto  $I_2 = [p_{k+1}, p_{k+2}]$ . Como  $I_2$  cobre somente  $I_3$ , e já sabendo que  $f(p_{k+1}) = p_k$ , temos que  $f(p_{k+2}) = p_{k-1}$  e portanto  $I_3 = [p_{k-1}, p_k]$ . Prosseguindo desse modo, observamos que os intervalos estão distribuídos de maneira simétrica em relação à  $I_1$ . Em particular,  $I_{n-1} = [p_{n-1}, p_n]$  com  $f(p_{n-1}) = p_1$  e  $f(p_n) = p_{k+1}$ . Desse modo,  $f(I_{n-1}) \supset [p_1, p_{k+1}]$  e a afirmação está provada.  $\square$

**Definição 2.9.** O Ordenação de Sharkovsky é definida por

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

ou seja, é formada inicialmente pelos ímpares maiores que 1 em ordem crescente; depois pelos ímpares maiores que 1, multiplicados por 2, em ordem crescente; depois pelos ímpares maiores que 1, multiplicados por  $2^2$ , em ordem crescente; e assim sucessivamente. Por fim, a ordem é formada por todas as potências de 2 em ordem decrescente.

**Teorema 2.10.** *Se  $f$  admite ponto de período principal  $n$ , então  $f$  admite ponto de período principal  $m$ , para todo  $m \triangleleft n$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $f$  admite ponto de período principal  $n$ . Vamos provar o teorema nos seguintes casos:

- (a) se  $n > 1$  ímpar e  $f$  não admite ponto periódico de período ímpar menor que  $n$

Pelo Lema anterior, podemos construir o ciclo

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_1$$

de tamanho  $m$ , para todo  $m > n$ . Desse modo, existe  $p \in I_1$  tal que  $f^k(p) \in I_{k+1}$  se  $k = 1, \dots, n-2$ ,  $f^k(p) \in I_1$  se  $k = n-1, \dots, m-1$  e  $f^m(p) = p$ .

Se  $f^k(p) = p$  para algum  $k = 1, \dots, n-2$ , então  $p \in I_1 \cap I_{k+1}$  e, portanto,  $p$  não existe ou possui período principal  $n > k$ , o que é um absurdo. Analogamente,  $f^k(p) \neq p$  para  $k = n-1, \dots, m-1$ . Portanto, o período principal de  $p$  é  $m$ .

Ainda de acordo com o Lema anterior, podemos construir ciclos da forma

$$\begin{aligned} I_{n-1} &\longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1} \\ I_{n-1} &\longrightarrow I_{n-4} \longrightarrow I_{n-3} \longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

que permitem mostrar a existência de ponto de período principal  $m < n$ ,  $m$  par.

(b) se  $n = 2^m$ , com  $m \geq 1$

Seja  $k = 2^l$  com  $l < m$  e considere  $g = f^{\frac{k}{2}}$ . Temos que  $g$  admite um ponto de período principal  $2^{m-l+1}$ . Como  $g$  admite um ponto de período principal par  $\geq 2$ , segue que  $g$  admite ponto de período principal 2. Portanto,  $f$  admite um ponto de período principal  $2^l$ .

(c) se  $n = p2^m$ , com  $m \geq 1$  e  $p$  ímpar

Seja  $g = f^{2^m}$ . Vamos mostrar inicialmente que  $f$  admite ponto de período principal  $q2^m$ ,  $q$  par. Temos que  $g$  admite ponto de período principal  $p$  ímpar. Pelo item (a),  $g$  admite ponto de período principal  $q$  par. Logo,  $f$  admite ponto de período principal  $q2^m$ ,  $q$  par.

Agora, vamos mostrar que  $f$  admite ponto de período principal  $q2^m$ ,  $q > p$  ímpar. Pelo item (a),  $g$  admite ponto de período principal  $q > p$  ímpar. Desse modo,  $f$  admite ponto de período principal  $q2^{m-i}$  para algum  $i = 0, \dots, m$ . Se  $i = 0$ , está mostrado. Se  $i > 0$ , pelo parágrafo anterior,  $f$  admite ponto de período principal  $2^i(q2^{m-i}) = q2^m$  e, portanto, a afirmação está provada.

Por fim, vamos mostrar que  $f$  admite ponto de período principal  $2^l$ , com  $l < k$ . Sabemos que  $f$  admite ponto de período principal  $q2^k$ ,  $q$  par. Em particular, tomando  $q = 2$ , concluímos que  $f$  admite ponto de período principal  $2^l$ , com  $l < k$ .

Observando que as afirmações anteriores esgotam as possibilidades na ordenação de Sharkovsky, concluímos a demonstração do teorema.  $\square$

**Teorema 2.11.** *Para todo  $n \geq 1$  existe uma função  $f$  que admite ponto periódico de período principal  $n$  e que não admite ponto de período principal  $m$  se  $m \triangleright n$ .*

*Demonstração.* Seja  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a função dada por  $T(x) = 1 - |2x - 1|$  e considere a família de funções  $T_h(x) = \min\{h, T(x)\}$  definidas em  $[0, 1]$ , com o parâmetro  $h$  variando em  $[0, 1]$ . Observe que  $T_1 = T$ , pois  $T(x) \leq 1$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Além disso, observando o gráfico de  $T_1$  concluímos que a função possui  $2^k$  pontos periódicos de período  $k$  e assim podemos definir, para cada  $k \geq 1$ ,

$$h(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } n \text{ de } T_1\}\}$$

A ideia principal da prova consiste no fato de que  $h(k)$  desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de  $T_{h(k)}$ . As seguintes afirmações tornarão preciso esse fato.

(a) Se  $\mathcal{O} \subset [0, h]$  é uma órbita de  $T_h$ , então  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_1$

Se  $p \in \mathcal{O}$  então  $T_h(p) \in [0, h]$ . Desse modo,  $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$ , ou seja,  $T_h$  e  $T_1$  coincidem em  $\mathcal{O}$  e, portanto,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_1$ .

(b) Se  $\mathcal{O} \subset [0, h]$  é uma órbita de  $T_1$ , então  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_h$ .

Se  $p \in \mathcal{O}$  então  $T_1(p) \in [0, h]$ . Desse modo,  $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = \min\{h, T_1(p)\} = T_1(p)$ , ou seja,  $T_h$  e  $T_1$  coincidem em  $\mathcal{O}$  e, portanto,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_h$ .

(c)  $T_{h(k)}$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \in [0, h(k))$  de tamanho  $l$  se e somente se  $h(k) > h(l)$ .

Se  $T_{h(k)}$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \in [0, h(k))$  de tamanho  $l$ , então  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_1$  por (a) e, pela definição de  $h(l)$ , concluímos que  $h(l) < h(k)$ .

Por outro lado, se  $h(l) < h(k)$ , então  $T_1$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \subset [0, h(l)] \subset [0, h(k)]$  de tamanho  $l$  e, desse modo,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_{h(k)}$  por (b).

(d) A órbita de  $T_1$  que contém  $h(k)$  é uma órbita de tamanho  $k$  de  $T_{h(k)}$ . Além disso, todas as outras órbitas de  $T_{h(k)}$  estão em  $[0, h(k))$ .

Pela definição de  $h(k)$ ,  $T_1$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \subset [0, h(k)]$  de tamanho  $k$  e, portanto,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_{h(k)}$  por (b).

Para demonstrar a segunda parte, basta observar que  $h(k)$  é o valor máximo de  $T_{h(k)}$  e, desse modo, toda órbita de  $T_{h(k)}$  está contida em  $[0, h(k)]$ . Em particular, se a órbita não contém  $h(k)$ , então ela está contida em  $[0, h(k))$ .

(e)  $k \triangleright l$  se e somente se  $h(k) > h(l)$ .

Suponha que  $k \triangleright l$ . Por (d),  $T_{h(k)}$  possui uma órbita de tamanho  $k$ . De acordo com o Teorema de Sharkovsky e com (d),  $T_{h(k)}$  admite uma órbita de tamanho  $l$  contida em  $[0, h(k))$ . Desse modo,  $h(k) > h(l)$  por (c).

Por outro lado, suponha que  $h(k) > h(l)$ . Caso  $l \triangleright k$ , a demonstração no parágrafo anterior implicaria que  $h(k) < h(l)$ , contrariando a hipótese. Desse modo,  $k \triangleright l$ .

Assim, para cada  $n \geq 1$ ,  $T_{h(n)}$  possui órbita de tamanho  $n$ . Além disso, se  $m \triangleright n$  então  $h(m) > h(n)$  por (e) e, portanto,  $T_{h(n)}$  não possui órbita de tamanho  $m$  por (c).  $\square$

### 3 Implicações da Diferenciabilidade

**Proposição 3.1.** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $f(I) \subset I$  ou  $f(I) \supset I$ , então  $f$  possui ponto fixo.*

*Demonstração.* Seja  $I = [a, b]$ . Suponha que  $f(I) \subset I$ . Considere a função contínua  $g(x) = f(x) - x$  definida em  $I$ . Como  $f(a), f(b) \in I$ , temos que  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  e  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $p \in I$  tal que  $g(p) = f(p) - p = 0$ . Desse modo,  $p$  é ponto fixo de  $f$ .

Suponha que  $f(I) \supset I$ . Por definição, existem  $c, d \in I$  tais que  $f(c) = a$  e  $f(d) = b$ . Considere a função contínua  $g(x) = f(x) - x$  definida em  $I$ . Temos que  $g(c) = a - c \leq 0$  e  $g(d) = b - d \geq 0$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $p \in I$  tal que  $g(p) = f(p) - p = 0$ . Desse modo,  $p$  é ponto fixo de  $f$ .  $\square$

**Teorema 3.2.** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma função diferenciável. Se  $|f'(x)| < 1$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  admite um único ponto fixo e  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  para todo  $x, y \in I$  distintos.*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in I$ ,  $x < y$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c \in [x, y]$  tal que  $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ . Portanto,  $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| < |x - y|$ .

Pela Proposição 3.1,  $f$  admite um ponto fixo  $p$ . Suponha que exista um ponto fixo  $q$  diferente de  $p$ . Então, pela primeira parte da demonstração,  $|p - q| = |f(p) - f(q)| < |p - q|$ . Absurdo.  $\square$

**Definição 3.3.** Sejam  $f : I \rightarrow I$  uma função diferenciável e  $p$  um ponto periódico com período principal  $n$ . Dizemos que  $p$  é um *ponto hiperbólico* se  $|(f^n)'(p)| \neq 1$ . Se  $|(f^n)'(p)| > 1$ , dizemos que  $p$  é um *ponto atrator* e se  $|(f^n)'(p)| < 1$ , dizemos que  $p$  é um *ponto repulsor*. Dizemos que  $p$  é um *ponto não hiperbólico* se  $|(f^n)'(p)| = 1$ .

**Teorema 3.4.** *Sejam  $f : I \rightarrow I$  uma função  $C^1$  e  $p$  um ponto periódico com período principal  $n$ . Se  $p$  é um ponto hiperbólico atrator, existe uma vizinhança de  $p$  contida em  $W^s(p)$ . Se  $p$  é um ponto hiperbólico repulsor, existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que, se  $x \in U$  e  $x \neq p$ ,  $f^{kn}(x) \notin U$  para algum  $k \geq 1$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $p$  é um ponto hiperbólico atrator. Como  $f'$  é contínua, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $|(f^n)'(x)| \leq \lambda < 1$  para todo  $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ . Pelo Teorema do Valor Médio, se  $x \in U$  então  $|f^n(x) - p| = |f^n(x) - f^n(p)| \leq \lambda|x - p|$ . Por indução,  $|f^{kn}(x) - p| \leq \lambda^k|x - p|$ . Desse modo,  $f^{kn}(x) \rightarrow p$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Suponha que  $p$  é ponto hiperbólico repulsor. De maneira análoga, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $|(f^n)'(x)| \geq \lambda > 1$  para todo  $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ . Fixado  $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ ,  $x \neq p$ , suponha que  $f^{kn}(x) \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$  para todo  $k \geq 1$ . Pelo Teorema do Valor Médio,  $|f^{kn}(x) - p| \geq \lambda^k|x - p|$  para todo  $k \geq 1$ . Absurdo, pois  $\lambda^k|x - p| \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$



*Observação.* A segunda parte do teorema afirma que existe uma vizinhança de  $p$  tal que todo ponto diferente de  $p$  nessa vizinhança é movida para fora dela após um número de iterações da  $f$ . Observe o ponto pode voltar para vizinhança após mais um número finito de iterações da  $f$ , pois sabemos que o valor absoluto da derivada é maior que 1 apenas nessa vizinhança.

## 4 Função Logística I: Estudo Inicial

Durante essa seção e as próximas, estudaremos a dinâmica da função logística, que é dada por  $F(x) = \mu x(1 - x)$  para  $\mu > 0$ .

**Proposição 4.1.** *Se  $\mu > 1$ , então*

1.  $F(1) = F(0) = 0$  e  $F(\frac{1}{\mu}) = F(p_\mu) = p_\mu$ , onde  $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ .
2.  $0 < p_\mu < 1$ .
3. o vértice da parábola de  $F$  é o ponto  $(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4})$ .

*Demonstração.* Aplicação direta das definições. □

**Proposição 4.2.** *Se  $\mu > 1$ , então  $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$ .*

*Demonstração.* Se  $x < 0$ , a sequência  $(x, F(x), F^2(x), \dots)$  é estritamente decrescente pois  $F(x) < x$ . Se  $(F^n(x))_n \rightarrow x_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , a continuidade de  $F$  implica que  $(F^{n+1}(x))_n \rightarrow F(x_0) < x_0$ . Absurdo. Portanto,  $(F^n(x))_n \rightarrow -\infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $F(x) < 0$  para todo  $x > 1$ , concluímos que  $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$ . □

**Proposição 4.3.** *Se  $1 < \mu < 3$ , então*

1.  $0$  é um ponto repulsor e  $p_\mu$  é um ponto atrator.
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p_\mu$  para todo  $x \in (0, 1)$ .

*Demonstração.* A primeira parte é verdadeira pois  $|F'(0)| = \mu > 1$  e  $|F'(p_\mu)| = |2 - \mu| < 1$ , quando  $1 < \mu < 3$ .

Falta provar o item 2. □

Desse modo, conhecemos completamente a dinâmica de  $F$  quando  $1 < \mu < 3$ :

$$W^s(0) = \{0, 1\}, W^s(p_\mu) = (0, 1) \text{ e } W^s(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

## 5 Função Logística II: Conjuntos de Cantor

Se  $\mu > 4$ , então  $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} > 1$ , ou seja, existem pontos em  $[0, 1]$  que não permanecem em  $[0, 1]$  após uma iteração de  $F$ . Em vista da Proposição 4.2, a dinâmica de  $F$  em tais pontos é determinada, pois pertencem ao conjunto  $W^s(\infty)$ . De modo mais geral, se um ponto de  $[0, 1]$  não permanece  $[0, 1]$  após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto  $W^s(\infty)$ .

Desse modo, considere o conjunto  $\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1]\}$ , que é formado pelos pontos que permanecem em  $[0, 1]$  após  $n$  iterações de  $F$ , e considere o conjunto  $\Lambda = \cap \Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1] \text{ para todo } n \geq 1\}$ , que é formado pelos pontos que permanecem para sempre em  $[0, 1]$  por iterações de  $F$ . Observe que  $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$ , para todo  $n \geq 1$ , pois se  $F^{n+1}(x) = F(F^n(x)) \in [0, 1]$ , então  $F^n(x) \in [0, 1]$ .

**Proposição 5.1.** *Se  $\mu > 4$ , então*

1.  $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ , onde  $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$  e  $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ .
2.  $\Lambda_n$  é a união de  $2^n$  intervalos fechados disjuntos.
3.  $F^n : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora, onde  $I$  é qualquer um dos  $2^n$  intervalos fechados disjuntos que formam  $\Lambda_n$ .

*Demonstração.* Analisando  $F'$  observamos que  $F$  é estritamente crescente no intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$  e estritamente decrescente no intervalo  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Como  $F(0) = F(1) = 0$  e  $F(\frac{1}{2}) > 1$ , o Teorema do Valor Intermediário garante que existem  $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$  e  $x_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$  tais que  $F(x_1) = F(x_2) = 1$ . Os valores de  $x_1$  e  $x_2$  são encontrados resolvendo a equação de segundo grau  $\mu x(1 - x) = 1$ . Logo,  $F([0, x_1]) = F([x_2, 1]) = [0, 1]$  e  $F(x) > 1$  para todo  $x \in (x_1, x_2)$ . Portanto,  $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$  e o item 1 está demonstrado.

A demonstração dos itens 2 e 3 será feita por indução. De acordo com a primeira parte,  $\Lambda_1$  é a união de  $2^1 = 2$  intervalos fechados disjuntos e  $F$  restrita a cada um desses intervalos é uma bijeção com o intervalo  $[0, 1]$ .

Suponha que  $\Lambda_{k-1}$  é a união de  $2^{k-1}$  intervalos fechados disjuntos de modo que  $F^{k-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora para todo intervalo  $[a, b]$  que forma  $\Lambda_{k-1}$ . Sendo  $F^{k-1}$  bijetora,  $(F^{k-1})'(x) > 0$  ou  $(F^{k-1})'(x) < 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Como as demonstrações para os dois casos são análogas, podemos supor que  $(F^{k-1})'(x) > 0$ .

Como  $F^{k-1}$  é estritamente crescente, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existem únicos  $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in (a, b)$  tais que

- (a)  $a < \overline{x}_1 < \overline{x}_2 < b$ ,
- (b)  $F^{k-1}([a, \overline{x}_1]) = [0, x_1]$ ,
- (c)  $F^{k-1}((\overline{x}_1, \overline{x}_2)) = (x_1, x_2)$  e

$$(d) \ F^{k-1}([\overline{x_2}, 1]) = [x_2, 1].$$

As condições acima garantem que os intervalos  $[a, \overline{x_1}]$ ,  $[\overline{x_2}, b]$  são disjuntos e que  $F^k(x) = F(F^{k-1}(x)) > 1$  para todo  $x \in (\overline{x_1}, \overline{x_2})$ . Também, temos que  $F^k([a, \overline{x_1}]) = F([0, x_1]) = [0, 1]$  e, analogamente,  $F^k([\overline{x_2}, 1]) = [0, 1]$ . Além disso,

$$(F^k)'([a, \overline{x_1}]) = F'(F^{k-1}([a, \overline{x_1}]))(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) = F'([0, x_1])(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) > 0$$

e, analogamente,

$$(F^k)'([\overline{x_2}, 1]) = F'([x_2, 1])(F^{k-1})'([\overline{x_2}, 1]) < 0.$$

Logo,  $F^k$  é uma bijeção entre  $[a, \overline{x_1}]$  e  $[0, 1]$  e entre  $[\overline{x_2}, 1]$  e  $[0, 1]$ .

Portanto, a partir de cada intervalo fechado de  $\Lambda_{k-1}$ , construímos dois novos intervalos fechados disjuntos tais que  $F^k$  restrita em cada um desses intervalos é um bijeção com  $[0, 1]$  e, dessa maneira, esses intervalos estão contidos em  $\Lambda_k$ . Desse modo, se  $\Lambda_{k-1}$  é formado por  $2^{k-1}$  intervalos fechados disjuntos, então  $\Lambda_k$  é formado por  $2 \times 2^{k-1} = 2^k$  intervalos fechados disjuntos. Assim, o resultado está provado.  $\square$

**Definição 5.2** (Conjunto de Cantor). Um conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  não vazio é um *conjunto de Cantor* se

1.  $\Gamma$  é fechado e limitado,
2.  $\Gamma$  não possui intervalos e
3. Todo ponto de  $\Gamma$  é um ponto de acumulação de  $\Gamma$ .

**Lema 5.3.** Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então

1. existe  $\lambda > 1$  tal que  $|F'(x)| > \lambda$  para todo  $x \in \Lambda_1$ .
2. o tamanho de cada intervalo fechado em  $\Lambda_n$  é menor que  $\frac{1}{\lambda^n}$ .
3. dados  $x \in \Lambda$  e  $\varepsilon > 0$ , existe um intervalo fechado  $I \subset \Lambda_n$ , para algum  $n \geq 1$ , que contém  $x$  e cujo tamanho é menor que  $\varepsilon$  tal que  $F^n : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora.

*Demonstração.* 1. Inicialmente, observamos que  $\mu^2 - 4\mu > 1$  quando  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ . Desse modo,  $F'(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$  e  $F'(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são como na Proposição 5.1. Observamos também que  $F'$  é estritamente decrescente, pois  $F''(x) = -2\mu < 0$ . Portanto,  $F'(x) \geq F'(x_1) > 1$  para todo  $x \in [0, x_1]$  e  $F'(x) \leq F'(x_2) < -1$  para todo  $x \in [x_2, 1]$ . De acordo com a Proposição 5.1,  $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$  e, desse modo,  $|F'(x)| > 1$  para todo  $x \in \Lambda_1$ . Sendo  $F'$  contínua e  $\Lambda_1$  compacto, existe  $\lambda > 1$  tal que  $|F'(x)| > \lambda$  para todo  $x \in \Lambda_1$ .

2. De acordo com a Proposição 5.1,  $\Lambda_n$  é formado pela união de  $2^n$  intervalos disjuntos. Seja  $[a, b]$  um desses intervalos. Se  $x \in [a, b]$ , em particular  $F^k(x) \in \Lambda_1$  para todo  $0 \leq k < n$ . Desse modo, de acordo com o item anterior, temos que  $(F^n)'(x) = F'(F^{n-1}(x)) \times F'(F^{n-2}(x)) \times \cdots \times F'(x) > \lambda^n$ .

Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$|F^n(b) - F^n(a)| = |(F^n)'(c)| |b - a| > \lambda^n |b - a|$$

Como  $F^n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é contínua e bijetora, temos que  $|F^n(b) - F^n(a)| = 1$ . Desse modo,  $|b - a| < \frac{1}{\lambda^n}$  e a afirmação está provada.

3. Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^n} < \varepsilon$ , onde  $\lambda > 1$  é como no primeiro item. Em particular,  $x \in \Lambda_n$ . Seja  $I$  um dos intervalos que formam  $\Lambda_n$  e que contém  $x$ . Pelo item anterior, o tamanho de  $I$  é menor que  $\varepsilon$ . Além disso, pela Proposição 5.1,  $F^n : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora e, portanto, a afirmação está provada.

□

**Teorema 5.4.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor.*

*Demonstração.*  $\Lambda$  é não vazio pois  $0 \in \Lambda$ , é limitado pois  $\Lambda_1 \in [0, 1]$  e é fechado pois é intersecção de conjuntos fechados.

Agora, suponha que  $\Lambda$  contém algum intervalo. Então, existem  $x, y \in I$ ,  $x < y$ , tais que  $[x, y] \subset \Lambda$ . Seja  $k$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < |x - y|$ . Em particular,  $[x, y] \subset \Lambda_k$ . Mas, de acordo com o Lema 5.3, os intervalos de  $\Lambda_k$  possuem tamanho menor que  $\frac{1}{\lambda^k}$ . Absurdo e, portanto,  $\Lambda$  não possui intervalos.

Por fim, observe que, se  $x$  é um ponto extremo de algum intervalo de  $\Lambda_n$ , então  $x \in \Lambda$  pois  $F^{n+1}(x) = 0$ . Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . Em particular,  $x \in \Lambda_k$  e, portanto,  $x$  é elemento de algum intervalo cujo tamanho é menor que  $\varepsilon$ , de acordo com o Lema 5.3. Portanto, existe  $y \in \Lambda$  ponto extremo do intervalo que contém  $x$  tal que  $|x - y| < \varepsilon$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, concluímos que  $x$  é um ponto de acumulação de  $\Lambda$ . □

*Observação.* O Teorema 5.4 é válido para  $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$ , porém a demonstração é mais difícil.

## 6 Função Logística III: Caos

**Proposição 6.1.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então o conjunto de pontos periódicos de  $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é denso em  $\Lambda$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . De acordo com o Lema 5.3, o intervalo fechado  $I \subset \Lambda_k$  que contém  $x$  possui tamanho menor que  $\varepsilon$ . Pela Proposição 5.1,  $F^k : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora. Como  $F^k(I) \supset I$ , a Proposição 3.1 afirma que existe  $y \in I$  tal que  $F^k(y) = y$ . Observando que  $y \in \Lambda$  e  $|x - y| < \varepsilon$ , o resultado está provado.  $\square$

**Definição 6.2.** Seja  $f : D \rightarrow D$  uma função. Dizemos que  $f$  é *topologicamente transitiva* se dados  $x, y \in D$  e  $\varepsilon > 0$ , existem  $z \in D$  e  $k \geq 1$  tais que  $|z - x| < \varepsilon$  e  $|f^k(z) - y| < \varepsilon$ .

**Proposição 6.3.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é topologicamente transitiva.*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in \Lambda$  e  $\varepsilon > 0$ . Existe  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . De acordo com o Lema 5.3, o tamanho de cada intervalo fechado em  $\Lambda_k$  é menor que  $\frac{1}{\lambda^k}$  e, portanto, menor que  $\varepsilon$ . Como  $x \in \Lambda_k$ , existe um intervalo  $[a, b] \subset \Lambda_k$  que contém  $x$ . Pela Proposição 5.1,  $F^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $z \in [a, b]$  tal que  $F^k(z) = y$ . Observando que  $z \in \Lambda$ , concluímos que  $F$  é topologicamente transitiva.  $\square$

**Definição 6.4.** Seja  $f : D \rightarrow D$  uma função. Dizemos que  $f$  *depende sensivelmente das condições iniciais* se para algum  $\delta > 0$ , dados  $x \in D$  e  $\varepsilon > 0$ , existem  $y \in D$  e  $k \geq 1$  tais que  $|x - y| < \varepsilon$  e  $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$ .

**Proposição 6.5.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$  depende sensivelmente das condições iniciais.*

*Demonstração.* Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . Como na demonstração da Proposição anterior, seja  $I$  o intervalo fechado contido em  $\Lambda_k$  que contém  $x$  e cujo tamanho é menor que  $\varepsilon$ . Como  $F^k : I \rightarrow [0, 1]$  é um bijeção, então  $F^k(a) = 0$  e  $F^k(b) = 1$ , onde  $a$  e  $b$  são pontos extremos de  $I$ . Como  $F(\frac{1}{2}) > 1$  e  $x \in \Lambda$ , segue que  $F^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ . Se  $F^k(x) \in [0, \frac{1}{2})$ , então  $|F^k(x) - F^k(b)| = |F^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$  e se  $F^k(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$ , então  $|F^k(x) - F^k(a)| = |F^k(x)| > \frac{1}{2}$ . Observando que  $|x - a| < \varepsilon$  e  $|x - b| < \varepsilon$ , temos o resultado para  $\delta = \frac{1}{2}$ .  $\square$

**Definição 6.6.** Seja  $f : D \rightarrow D$  uma função. Dizemos que  $f$  é *caótica* se

1. O conjunto de pontos periódicos de  $f$  é denso em  $D$ .
2.  $f$  é topologicamente transitiva.
3.  $f$  depende sensivelmente das condições iniciais.

**Teorema 6.7.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é caótica.*

*Demonstração.* O resultado segue das Proposições 6.1, 6.3 e 6.5. □

*Observação.* O Teorema 6.7 é válido para  $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$ , porém a demonstração é mais difícil.

**Teorema 6.8.** *Se  $D$  é um subconjunto infinito de  $\mathbb{R}$  e  $f : D \rightarrow D$  é uma função topologicamente transitiva cujo conjunto de pontos periódicos é denso, então  $f$  é caótica.*

*Demonstração.* Por demonstrar. □

## 7 Função Logística IV: Conjugação Topológica

**Definição 7.1.** Sejam  $f : A \rightarrow A$ ,  $g : B \rightarrow B$  e  $\tau : A \rightarrow B$  funções. Dizemos que  $f$  e  $g$  são *topologicamente conjugadas por  $\tau$* , se  $\tau$  é um homeomorfismo tal que  $\tau \circ f = g \circ \tau$ .

**Proposição 7.2.** Sejam  $f : A \rightarrow A$ ,  $g : B \rightarrow B$  e  $\tau : A \rightarrow B$  funções. Se  $f$  e  $g$  são *topologicamente conjugadas por  $\tau$* , então

1.  $g$  e  $f$  são *topologicamente conjugadas por  $\tau^{-1}$* .
2.  $\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$  para todo  $n \geq 1$ .
3.  $p$  é ponto periódico de  $f$  se e somente se  $\tau(p)$  é ponto periódico de  $g$ . Além disso, os períodos principais de  $p$  e  $\tau(p)$  são iguais.
4.  $W^s(\tau(p)) = \tau(W^s(p))$ , se  $p$  é um ponto periódico de  $f$ .
5. o conjunto de pontos periódicos de  $f$  é denso se e somente se o conjunto de pontos periódicos de  $g$  é denso.
6.  $f$  é *topologicamente transitiva* se e somente se  $g$  é *topologicamente transitiva*.

*Demonstração.* 1. Como  $\tau$  é um homeomorfismo, a função inversa  $\tau^{-1}$  existe e também é um homeomorfismo. Além disso,  $\tau \circ f = g \circ \tau$  implica que  $f \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ g$ . Portanto,  $\tau^{-1}$  é conjugação topológica de  $g$  e  $f$ .

2. Por definição, a afirmação é verdadeira quando  $n = 1$ . Suponha que  $\tau \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ \tau$ . Desse modo,  $\tau \circ f^n = \tau \circ f^{n-1} \circ f = g^{n-1} \circ \tau \circ f = g^{n-1} \circ g \circ \tau = g^n \circ \tau$ . Portanto, a afirmação é verdadeira para todo  $n \geq 1$ .

3. Suponha que  $p$  é um ponto periódico de  $f$  com período principal  $n$ . Desse modo,  $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) = \tau(p)$ . Se  $k = 1, \dots, n-1$ , então  $g^k(\tau(p)) = \tau(f^k(p)) \neq \tau(p)$ , pois  $f^k(p) \neq p$  e  $\tau$  é injetora. Portanto,  $\tau(p)$  é um ponto periódico de  $g$  com período principal  $n$ . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

4. Suponha que  $p$  é um ponto periódico com período  $n$ . Se  $x \in W^s(\tau(p))$ , então  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{kn}(x) = \tau(p)$ . Como  $\tau^{-1}$  é contínua, temos  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(\tau^{-1}(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau^{-1}(g^{kn}(x)) = p$ . Então,  $x \in \tau(W^s(p))$  pois  $\tau^{-1}(x) \in W^s(p)$ .

Por outro lado, se  $\tau(x) \in \tau(W^s(p))$ , então  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$ . Como  $\tau$  é contínua, temos  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{kn}(\tau(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau(f^{kn}(x)) = \tau(p)$  e, portanto,  $\tau(x) \in W^s(\tau(p))$ .

5. Se o conjunto  $Per(f)$  dos pontos periódicos de  $f$  é denso em  $A$ , então  $\tau(Per(f))$  é denso em  $B$  pois  $\tau$  é um homeomorfismo. Como  $\tau(Per(f)) = Per(g)$ , temos que  $Per(g)$  é denso em  $B$ . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.



6. Inicialmente, sendo  $\tau$  é contínua, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  de modo que, se  $z \in A$ ,  $|x - z| < \delta$  e  $|y - f^n(z)| < \delta$ , então  $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$  e  $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$ , onde  $n \geq 1$  é fixado.

Se  $x', y' \in B$ , existem  $x, y \in A$  tais que  $\tau(x) = x'$  e  $\tau(y) = y'$ . Como  $f$  é topologicamente transitiva, existe  $z \in A$  tal que  $|x - z| < \delta$  e  $|y - f^n(z)| < \delta$  para algum  $n \geq 1$ . Portanto,  $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$  e  $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$ . Se  $\tau(z) = z'$ , então  $|x' - z'| < \varepsilon$  e  $|y' - g^n(z')| < \varepsilon$  e, portanto,  $g$  é topologicamente transitiva. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.  $\square$

**Lema 7.3.** A função  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é caótica.

*Demonstração.* Inicialmente, provaremos por indução que  $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$  é uma função linear bijetora para todo  $0 \leq k < 2^n$ . Pela definição de  $T$ , a afirmação é verdadeira quando  $n = 1$ . Suponha que  $T^{n-1} : [\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] \rightarrow [0, 1]$  é uma função linear bijetora para todo  $0 \leq k < 2^{n-1}$ . Fixado  $k$ , podemos supor que  $T^{n-1}(\frac{k}{2^{n-1}}) = 0$  e  $T^{n-1}(\frac{k+1}{2^{n-1}}) = 1$ . O caso em que  $T^{n-1}(\frac{k}{2^{n-1}}) = 1$  e  $T^{n-1}(\frac{k+1}{2^{n-1}}) = 0$  é tratado de maneira análoga. Temos que  $T^{n-1}(\bar{x}) = \frac{1}{2}$ , onde  $\bar{x} = \frac{2k+1}{2^n}$  é o ponto médio do intervalo  $[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}]$ . Portanto,  $T^n(\bar{x}) = T(T^{n-1}(\bar{x})) = T(\frac{1}{2}) = 1$ ,  $T^n(\frac{k}{2^{n-1}}) = T(0) = 0$  e  $T^n(\frac{k+1}{2^{n-1}}) = T(1) = 0$ . Desse modo,  $T^n : [\frac{k}{2^{n-1}}, \bar{x}] \rightarrow [0, 1]$  e  $T^n : [\bar{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] \rightarrow [0, 1]$  são funções lineares (pois são composições de funções lineares) e bijetoras para todo  $0 \leq k < 2^{n-1}$ . Observando que  $[\frac{k}{2^{n-1}}, \bar{x}] = [\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}]$  e  $[\bar{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] = [\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}]$ , concluímos que  $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$  é uma função linear bijetora para todo  $0 \leq k < 2^n$  e, portanto, a afirmação está provada.

Para provar que  $T$  é caótica, seja  $\varepsilon > 0$ . Pelo afirmação do parágrafo anterior, existem  $n \geq 1$  e  $I = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$  tais que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ,  $x \in I$  e  $T^n : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora.

Seja  $x \in [0, 1]$ . Como  $T(I) \supset I$ , a Proposição 3.1 afirma que existe  $p \in I$  tal que  $T^n(p) = p$ . Observando que  $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , concluímos que o conjunto de pontos periódicos de  $T$  é denso em  $[0, 1]$ .

Sejam  $x, y \in [0, 1]$ . Como  $T^n : I \rightarrow [0, 1]$  é sobrejetora, existe  $z \in I$  tal que  $T^n(z) = y$ . Observando que  $|z - x| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e  $|T^n(z) - y| = 0 < \varepsilon$ , concluímos que  $T$  é topologicamente transitiva.

Seja  $x \in [0, 1]$ . Como  $T^n : I \rightarrow [0, 1]$  é sobrejetora, existem  $a, b \in I$  tais que  $T^n(a) = 0$  e  $T^n(b) = 1$ . Se  $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ , então  $|T^n(x) - T^n(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$  e se  $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ , então  $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$ . Observando que  $|x - a| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e  $|x - b| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , concluímos que  $T$  depende sensivelmente das condições iniciais.  $\square$

**Teorema 7.4.** *Se  $\mu = 4$ , então  $F$  é caótica.*

*Demonstração.* Seja  $\tau(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$  definida no intervalo  $[0, 1]$ .  $\tau$  é homeomorfismo pois  $\tau'$  existe em  $[0, 1]$  e  $\tau' > 0$  em  $(0, 1)$ .

Se  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , então

$$\tau \circ T(x) = \tau(2x) = \sin^2(\pi x)$$

e se  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , então

$$\tau \circ T(x) = \tau(2 - 2x) = \sin^2(\pi - \pi x) = (\sin(\pi) \cos(\pi x) - \sin(\pi x) \cos(\pi))^2 = \sin^2(\pi x)$$

Por outro lado,

$$F \circ \tau(x) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin^2(\pi x)$$

Desse modo,  $\tau \circ T = F \circ \tau$ . Portanto, de acordo com o Teorema 6.7, a Proposição 7.2 e o Lema 7.3,  $F$  é caótica.  $\square$

## 8 Função Logística V: Dinâmica Simbólica

**Definição 8.1.**  $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) : s_k = 0 \text{ ou } s_k = 1 \text{ para todo } k \geq 0\}$  é o espaço das sequências de 0 e 1.

**Proposição 8.2.** A função  $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}$$

é uma distância em  $\Sigma_2$ .

*Demonstração.* Inicialmente, observamos que a função  $d$  é bem definida pois

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

Além disso, é fácil verificar que as propriedades de uma distância são válidas em  $d$ , isto é,

- (a)  $d(s, t) \geq 0$
- (b)  $d(s, t) = 0$  se e somente se  $s = t$
- (c)  $d(s, t) = d(t, s)$
- (d)  $d(s, t) \leq d(s, r) + d(r, t)$

para todo  $r, s, t \in \Sigma_2$ . Portanto,  $d$  é uma distância e a afirmação está provada.  $\square$

**Proposição 8.3.** Sejam  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots), t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$ . Se  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ , então  $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$ . Por outro lado, se  $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$ , então  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ .

*Demonstração.* Suponha que  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ . Desse modo,

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

Por outro lado, se  $s_i \neq t_i$  para algum  $0 \leq i \leq n$ , então

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n}$$

Portanto, se  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ , concluímos que  $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$ .  $\square$

**Definição 8.4.** A função  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , dada por  $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ , é chamada de função *shift*.

**Proposição 8.5.**  $\sigma$  é contínua.

*Demonstração.* Sejam  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Se  $t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$  e  $d(s, t) < \frac{1}{2^{n+1}}$ , então  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n+1$ , de acordo com a Proposição 8.3. Como  $\sigma(s) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$  e  $\sigma(t) = (t_1 t_2 t_3 \dots)$ , temos que as primeiras  $n+1$  entradas de  $\sigma(s)$  e  $\sigma(t)$  são iguais. Novamente, utilizando a Proposição 8.3, temos que  $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Como  $s$  é um ponto arbitrário em  $\Sigma_2$ , concluímos que  $\sigma$  é contínua.  $\square$

**Proposição 8.6.** Se  $\sigma$  é a função shift, então

1. existem  $2^n$  pontos periódicos com período  $n$ .
2. existe um ponto cuja órbita é densa.
3. o conjunto dos pontos periódicos é denso.
4. o conjunto dos pontos não periódicos que são eventualmente periódicos é denso.
5. o conjunto dos pontos que não são periódicos e nem eventualmente periódicos é denso.

*Demonstração.* 1. Se  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  é um ponto periódico com período  $n$ , então

$$\sigma^k(\sigma^n(s)) = (s_{n+k} s_{n+k+1} s_{n+k+2} \dots) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots) = \sigma^k(s)$$

para todo  $k \geq 0$ . Desse modo,  $s$  é formado pela repetição das entradas  $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ . Pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem  $2^n$  sequências distintas para  $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$  e, portanto, a afirmação está provada.

2. Considere o ponto  $s^* = (0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ \dots)$  formado por todos os blocos de tamanho 1, depois por todos os blocos de tamanho 2, e assim sucessivamente.

Sejam  $s \in \Sigma_2$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . É fácil ver que existe  $k \geq 0$  de modo que  $\sigma^k(s^*)$  e  $s$  são iguais nas primeiras  $n+1$  entradas. De acordo com a Proposição 8.3,  $d(s, \sigma^k(s^*)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e, portanto, a afirmação está provada.

3. Sejam  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Considere o ponto periódico  $t$  com período  $n+1$  formado pela repetição da sequência  $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$ . De acordo com a Proposição 8.3,  $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e, portanto, a afirmação está provada.  $\square$

## 9 Derivada de Schwarz

**Definição 9.1.** Se  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow [a, b]$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^3([a, b])$  dizemos que  $f$  possui derivada de Schwarz negativa, e escrevemos  $S_f < 0$ , quando

$$S_f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 < 0$$

para todo  $x \in [a, b]$  tal que  $f'(x) \neq 0$ .

**Lema 9.2.** Se  $S_f < 0$  e  $x_0 \in (a, b)$  é mínimo local de  $f'$ , então  $f'(x_0) \leq 0$ .

*Demonstração.* Como  $x_0$  é ponto crítico de  $f'$ , temos que  $f''(x_0) = 0$ . Se  $f'(x_0) \neq 0$ , então

$$S_f(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} < 0$$

Como  $x_0$  é mínimo local,  $f'''(x_0) \geq 0$  pelo teste da segunda derivada. Desse modo,  $f'(x_0) < 0$ .  $\square$

**Lema 9.3.** Se  $S_f < 0$  e  $a, b, c$  são pontos fixos de  $f$ , com  $a < b < c$ , então  $f$  possui um ponto crítico em  $(a, c)$  se  $f'(b) \leq 1$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema do Valor Médio, existem  $r \in (a, b)$  e  $s \in (b, c)$  tais que  $f'(r) = f'(s) = 1$ . Observe que  $f'$  admite um mínimo global em  $[r, s]$ , pois é contínua. Como  $b \in (r, s)$  e  $f'(b) \leq 1$ ,  $f'$  admite um mínimo local  $x_0 \in (r, s)$ . Pelo Lema anterior,  $f'(x_0) \leq 0$ . Segue o resultado pelo Teorema do Valor Intermediário.  $\square$

**Lema 9.4.** Se  $S_f < 0$  e  $a, b, c, d$  são pontos fixos de  $f$ , com  $a < b < c < d$ , então  $f$  possui um ponto crítico em  $(a, d)$ .

*Demonstração.* Se  $f'(b) \leq 1$  ou  $f'(c) \leq 1$ , segue o resultado pelo Lema anterior. Se  $f'(b) > 1$  e  $f'(c) > 1$ , então a inclinação local de  $f$  é maior que a inclinação da função identidade. Desse modo, existem  $r, t \in (b, c)$ , com  $r < t$ , tais que  $f(r) > r$  e  $f(t) < t$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $s \in (r, t)$  tal que  $f'(s) < 1$ . Logo,  $f'$  possui um mínimo local em  $(r, t)$ . O resultado segue utilizando o Lema 9.2 e o Teorema do Valor Intermediário.  $\square$

**Corolário 9.5.** Se  $S_f < 0$ , então  $S_{f^n} < 0$  para todo  $n \geq 1$ .

**Lema 9.6.** Se  $f$  possui um número finito de pontos críticos, então  $f^n$  também possui um número finito de pontos críticos para todo  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Inicialmente, observe que  $f^{-1}(c) = \{x \in [a, b] : f(x) = c\}$  é finito para todo  $c$ . De fato, pelo Teorema do Valor Médio existe um ponto crítico de  $f$  entre dois elementos de  $f^{-1}(c)$ .  $\square$

**Lema 9.7.** *Se  $Sf < 0$  e  $f$  possui um número finito de pontos críticos, então  $f^n$  possui um número finito de pontos críticos.*

*Demonstração.*

□