Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Caóticos

Agenor Gonçalves Neto

São Paulo, 2020

Sumário

1 Conceitos Elementares

Seja $f : X \to X$ uma função, onde X é um espaço métrico. Dado $x \in X$ e denotando por f^n a n-ésima composição de f com ela mesma, queremos estudar as propriedades da sequência $(x, f(x), f^2(x), \dots)$.

Definição 1.1.

a. Se $x \in X$, então $\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ é a órbita de x.

b. Se $p \in X$ e $f^n(p) = p$ para algum $n > 0$, então p é um ponto periódico de período n. Em particular, se $n = 1$, então p é um ponto fixo. Denotaremos por $\mathrm{Per}(f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos.

c. Se p é um ponto periódico de período n e $f^k(p) \neq p$ para todo $0 < k < n$, então n é o período principal de p. Denotaremos por $\mathrm{Per}_n(f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos de período principal n.

d. Se p um ponto periódico de período n, então $\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p\}$ é a bacia de atração de p. Além disso, $\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k\to\infty} |f^k(x)| = \infty\}$ é a bacia de atração do ∞.

Proposição 1.2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f([a, b]) \subset [a, b]$ ou $f([a, b]) \supset [a, b]$, então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Suponha que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Considere a função $g(x) = f(x) - x$ definida em $[a, b]$. Observando que $g(a) \geq 0$ e $g(b) \leq 0$ e utilizando o TVI, existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$.

Suponha que $f([a, b]) \supset [a, b]$ e sejam $c, d \in [a, b]$ tais que $f(c) = a$ e $f(d) = b$. Considere a função $g(x) = f(x) - x$ definida em $[a, b]$. Observando que $g(c) \leq 0$ e $g(d) \geq 0$ e utilizando o TVI, existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$. □

Definição 1.3. Sejam $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $p \in \mathrm{Per}_n(f)$.

a. Se $|\partial f^n(p)| \neq 1$, então p é um ponto hiperbólico.

b. Se $|\partial f^n(p)| < 1$, então p é um ponto atrator.

c. Se $|\partial f^n(p)| > 1$, então p é um ponto repulsor.

Teorema 1.4. *Sejam $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $p \in \mathrm{Per}_n(f)$.*

1. *Se p é um ponto atrator, então existe uma vizinhança de p contida em $\mathcal{B}(p)$.*
2. *Se p é um ponto repulsor, então existe uma vizinhança V de p com a seguinte propriedade: se $x \in V$ e $x \neq p$, então $f^{kn}(x) \notin V$ para algum $k \geq 1$.*

Demonstração.

1. Sendo ∂f contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\partial f^n(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in (p-\varepsilon,\, p+\varepsilon)$. Pelo TVM, se $x \in (p-\varepsilon,\, p+\varepsilon)$, então $|f^n(x)-p| \leq \lambda|x-p|$. Por indução, $|f^{kn}(x)-p| \leq \lambda^k|x-p|$ para todo $k \geq 1$. Desse modo, $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$.
2. Demonstração análoga.

□

2 Família Quadrática

2.1 Estudo Inicial

Proposição 2.1. *Se $\mu > 1$, então*

1. $F(1) = F(0) = 0$.
2. $F(\frac{1}{\mu}) = F(p_\mu) = p_\mu$, *onde* $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.
3. $0 < p_\mu < 1$.

Proposição 2.2. *Se $\mu > 1$, então $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset \mathcal{B}(\infty)$.*

Demonstração. Inicialmente, se $x \in (1, \infty)$, então $F(x) \in (-\infty, 0)$. Por fim, observamos que a sequência $(x,\, F(x),\, F^2(x),\, \dots)$ é estritamente decrescente e ilimitada quando $x \in (-\infty, 0)$.

□

Proposição 2.3. *Se $1 < \mu < 3$, então*

1. *0 é um ponto repulsor e p_μ é um ponto atrator.*
2. $(0, 1) \subset \mathcal{B}(p_\mu)$.

2.2 Conjuntos de Cantor

Se $\mu > 4$, então $F(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} > 1$, ou seja, existem pontos em $[0,1]$ que não permanecem em $[0,1]$ após uma iteração de F. Em vista da Proposição 2.2, tais pontos pertencem ao conjunto $\mathcal{B}(\infty)$. De modo mais geral, se um ponto de $[0,1]$ não permanece em $[0,1]$ após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto $\mathcal{B}(\infty)$.

Desse modo, considere o conjunto $\Lambda_n = \{x \in [0,1] : F^n(x) \in [0,1]\}$ formado pelos pontos que permanecem em $[0,1]$ após n iterações de F e o conjunto $\Lambda = \{x \in [0,1] : F^n(x) \in [0,1] \text{ para todo } n \geq 1\}$ formado pelos pontos de $[0,1]$ que sempre permanecem em $[0,1]$ por iterações de F.

Podemos verificar que $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, onde $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}$ e $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}$. De modo mais geral, temos o resultado a seguir.

Proposição 2.4. *Se $\mu > 4$, então Λ_n é a união de 2^n intervalos fechados disjuntos e $F^n : [a,b] \to [0,1]$ é bijetora, onde $[a,b]$ é um desses intervalos.*

Demonstração. Suponha que Λ_{k-1} é a união de 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos e que $F^{k-1} : [a,b] \to [0,1]$ é bijetora, onde $[a,b]$ é um desses intervalos. Suponha que F^{k-1} é estritamente crescente em $[a,b]$; se F^{k-1} é estritamente decrescente em $[a,b]$, a demonstração é análoga.

Inicialmente, observamos que existem $x_1' < x_2'$ tais que $F^{k-1}([a,x_1']) = [0,x_1]$, $F^{k-1}((x_1',x_2')) = (x_1,x_2)$ e $F^{k-1}([x_2',1]) = [x_2,1]$. Desse modo, os intervalos $[a,x_1']$ e $[x_2',b]$ são disjuntos. Além disso, temos que $F^k([a,x_1']) = [0,1]$, $F^k((x_1',x_2')) > 1$ e $F^k([x_2',1]) = [0,1]$. Pela Regra da Cadeia, temos também que $(F^k)'([a,x_1']) = F'([0,x_1])(F^{k-1})'([a,x_1']) > 0$ e $(F^k)'([x_2',1]) = F'([x_2,1])(F^{k-1})'([x_2',1]) < 0$.

Portanto, é imediato concluir que Λ_k é a união de 2^k intervalos fechados disjuntos e que $F^k : [a,b] \to [0,1]$ é bijetora, onde $[a,b]$ é um desses intervalos. $\square$

Definição 2.5. Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Dizemos que Γ é um conjunto de Cantor se as seguintes condições são válidas:

i. Γ é compacto.

ii. Γ não possui intervalos.

iii. Todo ponto de Γ é um ponto de acumulação de Γ.

Lema 2.6. *Se $\mu > 2+\sqrt{5}$, então*

1. *existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(\Lambda_1)| > \lambda$.*

2. *$b - a < \frac{1}{\lambda^n}$, onde $[a,b]$ é um dos intervalos que formam Λ_n.*

Demonstração.

1. Se $\mu > 2+\sqrt{5}$, então $F'(x_1) = \sqrt{\mu^2-4\mu} > 1$ e $F'(x_2) = -\sqrt{\mu^2-4\mu} < -1$. Desse modo, podemos concluir que existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(\Lambda_1)| > \lambda$.

2. Se $x \in [a,b]$, então $F^k(x) \in \Lambda_1$ para todo $0 \leq k < n$. Desse modo, $(F^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} F'(F^k(x)) > \lambda^n$ e, pelo TVM, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$1 = |F^n(b) - F^n(a)| = |(F^n)'(c)||b-a| > \lambda^n |b-a|.$$

□

Sejam $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Pelo Lema anterior, existe um intervalo $[a,b] \subset \Lambda_n$ para algum $n \geq 1$ tal que $x \in [a,b]$, $b - a < \varepsilon$ e $F^n : [a,b] \to [0,1]$ é bijetora.

Teorema 2.7. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. Obviamente, Λ é não vazio e compacto.

Se Λ contém algum intervalo, então existem $x < y$ tais que $[x,y] \subset \Lambda$. Seja k tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |x-y|$. Em particular, $[x,y] \subset \Lambda_k$, o que é um absurdo pois os intervalos de Λ_k possuem tamanho menor que $\frac{1}{\lambda^k}$.

Sejam $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Como $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ para algum $k \geq 0$, os intervalos que formam Λ_k possuem tamanho menor que ε. Se $x \in [a,b]$, onde $[a,b]$ é um desses intervalos, então $a \in \Lambda$ e $|x - a| < \varepsilon$. □

2.3 Caos

Proposição 2.8. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então* $\mathrm{Per}(F|_\Lambda)$ *é denso em Λ.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $F^k : [a,b] \to [0,1]$ é bijetora, onde $x \in [a,b]$ e $[a,b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k. Como $F^k([a,b]) \supset [a,b]$, existe $y \in [a,b]$ tal que $F^k(y) = y$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x-y| < \varepsilon$, concluímos que $\mathrm{Per}(F|_\Lambda)$ é denso em Λ. □

Definição 2.9. Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f é topologicamente transitiva se dados $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ e $k \geq 1$ tais que $|x - z| < \varepsilon$ e $|y - f^k(z)| < \varepsilon$.

Proposição 2.10. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F|_\Lambda$ é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $F^k : [a,b] \to [0,1]$ é bijetora, onde $x \in [a,b]$ e $[a,b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k. Pelo TVI, existe $z \in [a,b]$ tal que $F^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$, concluímos que $F|_\Lambda$ é topologicamente transitiva. □

Definição 2.11. Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f depende sensivelmente das condições iniciais se existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $k \geq 1$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Proposição 2.12. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F|_\Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $F^k : [a,b] \to [0,1]$ é bijetora, onde $x \in [a,b]$ e $[a,b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k. Suponha que $F^k(a) = 0$ e $F^k(b) = 1$; se $F^k(a) = 1$ e $F^k(b) = 0$, a demonstração é análoga.

Como $F(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, temos que $F^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Se $F^k(x) \in [0, \frac{1}{2})$, então $|F^k(x) - F^k(b)| = |F^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $F^k(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$, então $|F^k(x) - F^k(a)| = |F^k(x)| > \frac{1}{2}$.

Observando que $|x-a| < \varepsilon$ e $|x-b| < \varepsilon$, concluímos que $F|_\Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais. $\square$

Definição 2.13. Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f é caótica se as seguintes condições são válidas:

i. $\mathrm{Per}(f)$ é denso em X.

ii. f é topologicamente transitiva.

iii. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema 2.14. *Se $\mu > 2+\sqrt{5}$, então $F|_\Lambda$ é caótica.*

Teorema 2.15. *Seja $f : X \to X$ é uma função, onde $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto infinito. Se $\mathrm{Per}(f)$ é denso em X e f é topologicamente transitiva, então f é caótica.*

2.4 Conjugação Topológica

Definição 2.16. Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\tau : X \to Y$ funções. Dizemos que f e g são topologicamente conjugadas por τ se as seguintes condições são válidas:

i. τ é um homeomorfismo.

ii. $\tau \circ f = g \circ \tau$.

Proposição 2.17. *Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\tau : X \to Y$ funções. Se f e g são topologicamente conjugadas por τ, então*

1. $\mathrm{Per}(f)$ *é denso em X se, e somente se,* $\mathrm{Per}(g)$ *é denso em Y.*

2. f é topologicamente transitiva se, e somente se, g é topologicamente transitiva.

Demonstração.

1. Se $\mathrm{Per}(f)$ denso em X, então $\tau(\mathrm{Per}(f))$ é denso em Y pois τ é contínua. Observando que $\tau(\mathrm{Per}(f)) = \mathrm{Per}(g)$, concluímos que $\mathrm{Per}(g)$ é denso em Y. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

2. Sendo τ contínua, dados $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in X$, $|x-z| < \delta$ e $|y - f^k(z)| < \delta$, então $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(k^n(z))| < \varepsilon$.

   Se $x', y' \in Y$, existem $x, y \in X$ tais que $\tau(x) = x'$ e $\tau(y) = y'$. Sendo f topologicamente transitiva, existem $z \in X$ e $k \geq 1$ tais que $|x-z| < \delta$ e $|y - f^k(z)| < \delta$. Desse modo, $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^k(z))| < \varepsilon$. Se $\tau(z) = z'$, então $|x' - z'| < \varepsilon$ e $|y' - g^k(z')| < \varepsilon$. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

$\square$

Lema 2.18. *A função $T : [0,1] \to [0,1]$ dada por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2-2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é caótica.

Demonstração. Inicialmente, é possível provar por indução que $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \to [0,1]$ é uma função bijetora afim para todo $0 \leq k < 2^n$ e para todo $n \geq 1$. Desse modo, dados $x \in [0,1]$ e $\varepsilon > 0$, seja $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $x \in J$ e $T^n : J \to [0,1]$ é bijetora, onde $J = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$.

a) $\mathrm{Per}(T)$ é denso em $[0,1]$.

   Como $T(J) \supset J$, existe $p \in J$ tal que $T^n(p) = p$. Observando que $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que $\mathrm{Per}(T)$ é denso em $[0,1]$.

b) T é topologicamente transitiva.

   Sendo $T^n : J \to [0,1]$ bijetora, se $y \in [0,1]$, então existe $z \in J$ tal que $T^n(z) = y$. Observando que $|x - z| \leq \frac{1}{2^n}$ e $|y - T^n(z)| = 0$, concluímos que T é topologicamente transitiva.

c) T depende sensivelmente das condições iniciais.

   Sendo $T^n : J \to [0,1]$ bijetora, existem $a, b \in J$ tais que $T^n(a) = 0$ e $T^n(b) = 1$. Se $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, então $|T^n(x) - T^n(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$ e se $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, então $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| \leq \frac{1}{2^n}$ e $|x - b| \leq \frac{1}{2^n}$, concluímos que T depende sensivelmente das condições iniciais.

□

Teorema 2.19. *Se $\mu = 4$, então F é caótica.*

Demonstração. Basta observar que $F \circ \tau = \tau \circ T$, onde $\tau : [0,1] \to [0,1]$ é o homeomorfismo dado por $\tau(x) = \mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. □

2.5 Dinâmica Simbólica

Dado $N \geq 2$, seja Σ_N o conjunto das sequências de números naturais limitados entre 1 e N, isto é, $\Sigma_N = \{(x_0\, x_1\, x_2\, \dots) : 1 \leq x_n \leq N \text{ para todo } n \geq 0\}$. Seja também $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$d_N(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{N^k},$$

onde $x = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$ e $y = (y_0\, y_1\, y_2\, \dots)$. Observe que (Σ_N, d_N) é um espaço métrico. Por fim, seja $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ a função é dada por $\sigma(x_0\, x_1\, x_2\, \dots) = (x_1\, x_2\, x_3\, \dots)$.

Proposição 2.20. *Sejam $x = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$ e $y = (y_0\, y_1\, y_2\, \dots)$ elementos de Σ_N.*

1. *Se $x_k = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, então $d_N(x,y) \leq \frac{1}{N^n}$.*

2. *Se $d_N(x,y) < \frac{1}{N^n}$, então $x_k = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n$.*

Proposição 2.21. *σ é contínua.*

Demonstração. Sejam $x = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots) \in \Sigma_N$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Se $d(x, y) < \frac{1}{2^{n+1}}$, onde $y = (y_0\, y_1\, y_2\, \dots) \in \Sigma_N$, então $x_k = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n+1$. Como $\sigma(x) = (x_1\, x_2\, x_3\, \dots)$ e $\sigma(y) = (y_1\, y_2\, y_3\, \dots)$, temos que as primeiras $n + 1$ entradas de $\sigma(s)$ e $\sigma(t)$ são iguais. Desse modo, $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, σ é contínua. □

Para a demonstração do próximo resultado, vamos considerar $N = 2$. Se $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, sejam $I_1 = [0, x_1]$ e $I_2 = [x_2, 1]$. Como $\Lambda \subset I_1 \cup I_2$, podemos definir a função $S : \Lambda \to \Sigma_2$ dada por $S(x) = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$, onde $x_k = 1$ se $F^k(x) \in I_1$ e $x_k = 2$ se $F^k(x) \in I_2$ para todo $k \geq 0$.

Proposição 2.22. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F|_\Lambda$ e σ são topologicamente conjugadas por S.*

Demonstração.

a) S é injetora.

   Sejam $x, y \in \Lambda$, $x < y$. Se $S(x) = S(y)$, então $F^k(x)$ e $F^k(y)$ está no mesmo lado em relação ao ponto crítico para todo $k \geq 0$ e, portanto, F é monótona em cada intervalo J_k cujos extremos são $F^k(x)$ e $F^k(y)$. Desse modo, se $z \in [x, y]$, então $F^k(z) \in J_k \subset I_1 \cup I_2$ para todo $k \geq 0$ e, portanto, $z \in \Lambda$, o que é um absurdo pois Λ não contém intervalos.

b) S é sobrejetora.

   Seja $(x_0\, x_1\, x_2\, \dots) \in \Sigma_A$. Inicialmente, para cada $n \geq 0$, considere

$$I_{x_0 \dots x_n} = \{x \in [0, 1] : x \in I_{x_0}, \dots, F^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

   Observe $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1 \dots x_n})$ e, portanto, é possível concluir por indução que $I_{x_0 \dots x_n}$ é um intervalo fechado não vazio. Além disso, $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0 \dots x_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{x_n}) \subset I_{x_0 \dots x_{n-1}}$.

   Desse modo, $(I_{x_0 \dots x_n})_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de intervalos encaixantes fechados e não vazios e, portanto, existe $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n}$. Como $F^k(x) \in I_{x_k}$ para todo $k \geq 0$, concluímos que $S(x) = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$. Observe que x é único, pois S é injetora.

c) S é contínua.

   Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 0$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$. Se $S(x) = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$, então $x \in I_{x_0 \dots x_k}$. Sendo $I_{x_0 \dots x_k}$ um intervalo fechado, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \delta$, então $y \in I_{x_0 \dots x_k}$. Desse modo, $S(x)$ e $S(y)$ são iguais nas primeiras $k + 1$ entradas e, portanto, $d_N(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$.

d) $S \circ F|_\Lambda = \sigma_A \circ S$.

   Se $x \in \Lambda$ e $S(x) = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$, então $\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n} = \{x\}$. Desse modo, é imediato que

$$S \circ F|_\Lambda(x) = S(F(\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n})) = S(\cap_{n=1}^{\infty} I_{x_1 \dots x_n}) = (x_1\, x_2\, x_3\, \dots) = \sigma_A \circ S(x).$$

□

3 Teorema de Sharkovsky

Ao longo dessa seção, consideraremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Além disso, escreveremos $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_n$ quando J_0, J_1, ..., J_n são intervalos fechados e $f(J_k) \supset J_{k+1}$ para todo $0 \leq k < n$.

Lema 3.1. *Se $J_0 \longrightarrow J_1$, então existe um intervalo fechado $J_0' \subset J_0$ tal que $f(J_0') = J_1$.*

Demonstração. Sejam p, $q \in [a, b]$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$, onde $J_0 = [a, b]$ e $J_1 = [c, d]$. Se $p \leq q$, definimos $b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\}$ e $a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$ e, pela continuidade de f, podemos concluir que $f(J_0') = J_1$, onde $J_0' = [a', b']$. Se $q \leq p$, a demonstração é análoga. □

Lema 3.2. *Se $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow J_0$, então existe $p \in J_0$ tal que as seguintes condições são válidas:*

1. *$f^k(p) \in J_k$ para todo $1 \leq k < n$.*
2. *$f^n(p) = p$.*

Demonstração. Pelo Lema anterior, podemos construir uma sequência de intervalos fechados J_0', J_1', ..., J_{n-1}' com as seguintes propriedades:

a. $J_0 \supset J_0' \supset J_1' \supset \cdots \supset J_{n-1}'$.

b. $f^k(J_{k-1}') = J_k$ para todo $1 \leq k < n$.

c. $f^n(J_{n-1}') = J_0$.

Desse modo, existe $p \in J_{n-1}'$ tal que $f^n(p) = p$. Em particular, $p \in J_0$ e $f^k(p) \in J_k$ para todo $1 \leq k < n$. □

Teorema 3.3. *Se $\mathrm{Per}_3(f) \neq \emptyset$ e $n \geq 1$, então $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Sejam $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de um elemento de $\mathrm{Per}_3(f)$ e suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$. Se $f(p_1) = p_3$ e $f(p_3) = p_2$, a demonstração é análoga. Definindo $J_0 = [p_1, p_2]$ e $J_1 = [p_2, p_3]$, temos que $J_0 \longrightarrow J_1$, $J_1 \longrightarrow J_0$ e $J_1 \longrightarrow J_1$. Com isso, podemos demonstrar as seguintes afirmações:

a) $\mathrm{Per}_1(f) \neq \emptyset$.

De fato, $J_1 \longrightarrow J_1$ implica que existe $p \in J_1$ tal que $f(p) = p$.

b) $\mathrm{Per}_2(f) \neq \emptyset$.

De fato, $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_0$ implica que existe $p \in J_0$ tal que $f(p) \in J_1$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in J_0 \cap J_1$, o que é um absurdo pois $J_0 \cap J_1 = \{p_2\}$ e $p_2 \in \mathrm{Per}_3(f)$.

c) $\mathrm{Per}_4(f) \neq \emptyset$.

De fato, $J_1 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_0 \longrightarrow J_1$ implica que existe $p \in J_1$ tal que $f^k(p) \in J_1$ para todo $1 \leq k < 3$, $f^3(p) \in J_0$ e $f^4(p) = p$. Se $f^3(p) = p$, então $p \in J_0 \cap J_1$, o que é um absurdo pois $J_0 \cap J_1 = \{p_2\}$ e $f^2(p_2) = p_1 \notin J_1$. Se $f^k(p) = p$ para algum $1 \leq k < 3$, então $f^k(p) \in J_1$ para todo $k \geq 1$. Em particular, $f^3(p) \in J_0 \cap J_1 = \{p_2\}$ e, portanto, $f^4(p) = p = p_3$, o que é um absurdo pois $f(p_3) = p_1 \notin J_1$.

Por fim, podemos demonstrar de maneira análoga à última afirmação que $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 4$. □

Definição 3.4 (Ordenação de Sharkovsky)**.**

$$3 \rhd 5 \rhd \cdots \rhd 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^k \cdot 3 \rhd 2^k \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.$$

Teorema 3.5 (Sharkovsky)**.** *Se* $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$ *e* $n \rhd m$*, então* $\mathrm{Per}_m(f) \neq \emptyset$*.*

Teorema 3.6. *Se* $n \geq 1$*, então existe uma função* f *com as seguintes propriedades:*

1. $\mathrm{Per}_n f \neq \emptyset$.

2. $\mathrm{Per}_m f = \emptyset$ *para todo* $m \rhd n$*.*

Demonstração. Seja $T : [0,1] \to [0,1]$ a função dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

e considere a família de funções $T_h(x) = \min\{h, T(x)\}$ definidas em $[0,1]$, onde o parâmetro h varia em $[0,1]$.

Inicialmente, observe que $T(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$ implica que que $T_1 = T$. Além disso, é possível provar por indução que T_1 possui 2^k pontos periódicos de período k para todo $k \geq 1$. Desse modo, podemos definir

$$h(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } k \text{ de } T_1\}\}$$

para todo $k \geq 1$. A ideia principal da prova consiste no fato de que $h(k)$ desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de $T_{h(k)}$. As seguintes afirmações tornarão preciso esse fato:

a) Se $\mathcal{O} \subset [0,h)$ é uma órbita de T_h, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1.

   Se $p \in \mathcal{O}$, então $T_h(p) \in [0,h)$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$. Assim, T_h e T_1 coincidem em $\mathcal{O}$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1.

b) Se $\mathcal{O} \subset [0,h]$ é uma órbita de T_1, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_h.

   Se $p \in \mathcal{O}$, então $T_1(p) \in [0,h]$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T_1(p)\} = T_1(p)$. Assim, T_h e T_1 coincidem em $\mathcal{O}$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_h.

c) $T_{h(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(k))$ de tamanho j se, e somente, se $h(k) > h(j)$.

   Se $T_{h(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(k))$ de tamanho j, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1 e, pela definição de $h(j)$, concluímos que $h(k) > h(j)$. Por outro lado, se $h(k) > h(j)$, então T_1

possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(j)] \subset [0, h(k)]$ de tamanho j e, desse modo, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_{h(k)}$.

d) A órbita de T_1 que contém $h(k)$ é uma órbita de tamanho k de $T_{h(k)}$. Além disso, todas as outras órbitas de $T_{h(k)}$ estão em $[0, h(k))$.

   Pela definição de $h(k)$, T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(k)]$ de tamanho k e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_{h(k)}$.

   Na segunda parte, basta observar que $h(k)$ é o valor máximo de $T_{h(k)}$ e, desse modo, toda órbita de $T_{h(k)}$ está contida em $[0, h(k)]$. Em particular, se a órbita não contém $h(k)$, então ela está contida em $[0, h(k))$.

e) $k \triangleright j$ se, e somente se, $h(k) > h(j)$.

   Suponha que $k \triangleright j$. Sabemos que $T_{h(k)}$ possui uma órbita de tamanho k e, pelo Teorema de Sharkovsky, $T_{h(k)}$ admite uma órbita de tamanho j. Em particular, essa órbita está contida em $[0, h(k))$ e, portanto, $h(k) > h(j)$.

   Suponha que $h(k) > h(j)$. Se $j \triangleright k$, então $h(k) < h(j)$ pela demonstração no parágrafo anterior e, portanto, $k \triangleright j$.

Desse modo, $T_{h(n)}$ possui órbita de tamanho n para cada $n \geq 1$. Além disso, se $m \triangleright n$ então $h(m) > h(n)$ e, portanto, $T_{h(n)}$ não possui órbita de tamanho m. □

4 Teorema de Singer

Definição 4.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^3$. A derivada de Schwarz de f é função $\mathcal{S}f$ dada por

$$(\mathcal{S}f)(x) = \frac{D^3 f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{D^2 f(x)}{Df(x)}\right)^2$$

para todo x tal que $\partial f(x) \neq 0$.

Proposição 4.2. *Se $\mathcal{S}f < 0$, então $\mathcal{S}f^n < 0$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pela Regra da Cadeia, podemos concluir que

$$(\mathcal{S}f^2)(x) = (\mathcal{S}f)(f(x))[\partial f(x)]^2 + (\mathcal{S}f)(x) < 0$$

para todo x tal que $\partial f^2(x) \neq 0$. Desse modo, $\mathcal{S}f^n < 0$ para todo $n \geq 1$ por indução. □

Lema 4.3. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e x_0 é um ponto de mínimo local de ∂f, então $\partial f(x_0) \leq 0$.*

Demonstração. Se $\partial f(x_0) \neq 0$, então

$$(\mathcal{S}f)(x_0) = \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial f(x_0)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial f(x_0)}\right)^2 < 0.$$

Sendo x_0 ponto de mínimo local de ∂f, temos que $\partial^2 f(x_0) = 0$ e $\partial^3 f(x_0) \geq 0$ e, portanto, $\partial f(x_0) < 0$. □

Lema 4.4. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c$ são pontos fixos de f com $\partial f(b) \leq 1$, então f possui ponto crítico em (a, c).*

Demonstração. Pelo TVM, existem $r \in (a, b)$ e $s \in (b, c)$ tais que $\partial f(r) = \partial f(s) = 1$. Sendo ∂f contínua, ∂f restrita ao intervalo $[r, s]$ possui mínimo global. Como $b \in (r, s)$ e $\partial f(b) \leq 1$, temos que ∂f possui mínimo local em (r, s). Utilizando Lema anterior e o TVI, a demonstração está concluída. □

Lema 4.5. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c < d$ são pontos fixos de f, então f possui ponto crítico em (a, d).*

Demonstração. Se $\partial f(b) \leq 1$ ou $\partial f(c) \leq 1$, o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se $\partial f(b) > 1$ e $\partial f(c) > 1$, existem $r, t \in (b, c)$ tais que $r < t$, $f(r) > r$ e $f(t) < t$. Pelo TVM, existe $s \in (r, t)$ tal que $\partial f(s) < 1$. Portanto, ∂f possui mínimo local em (b, c). Utilizando Lema 4.3 e o TVI, a demonstração está concluída. □

Lema 4.6. *Se f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos críticos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo TVM, se $c \in \mathbb{R}$, então f possui ponto crítico entre dois elementos de $f^{-1}(c)$ e, portanto, $f^{-1}(c)$ é finito. De modo mais geral, é possível provar por indução que $f^{-n}(c)$ é finito para todo $n \geq 1$.

Se $n \geq 1$, então $\partial f^n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \partial f(f^k(x)) = 0$ se, e somente se, $f^k(x)$ é ponto crítico de f para algum $1 \leq k < n$. Portanto, o conjunto de pontos críticos de f^n é finito. □

Lema 4.7. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos fixos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.5, se f^n possui infinitos pontos fixos para algum $n \geq 1$, então f^n possui infinitos pontos críticos, o que é um absurdo pelo Lema anterior. □

Teorema 4.8 (Singer)**.** *Se $\mathcal{S}f < 0$ e f possui n pontos críticos, então f possui no máximo $n+2$ órbitas periódicas não repulsoras.*

Demonstração. Seja p um ponto periódico não repulsor de f de período m. Se $g = f^m$, então $g(p) = p$ e $|\partial g(p)| \leq 1$. Seja K a componente conexa de $\mathcal{B}(p) = \{x : \lim_{k\to\infty} g^k(x) = p\}$ que contém p. Inicialmente, suponha que K é limitado.

Se $|\partial g(p)| < 1$, então é possível mostrar que K é aberto, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K.

Escrevendo $K = (a, b)$, se $g(a) = a$ e $g(b) = b$, então g possui ponto crítico em K pelo Lema 4.4; se $g(a) = b$ e $g(b) = a$, então g^2 possui ponto crítico em K pelo Lema 4.4; se $g(a) = g(b)$, então g possui ponto crítico em K pelo TVM.

Se $|\partial g(p)| = 1$, então os pontos fixos de g são isolados pelo Lema anterior e, portanto, existe uma vizinhança de p que não contém outros pontos fixos de g.

Suponha que $\partial g(p) = 1$. Se $\partial g(p) = -1$, a demonstração é análoga considerando g^2. Se p possui o comportamento de um ponto repulsor, então, para x numa vizinhança de p, $g(x) > x$ quando $x > p$ e $g(x) < x$ quando $x < p$. Desse modo, 1 é um mínimo local de ∂g, o que é um absurdo pelo Lema 4.3 e, portanto, p é atrator em pelo menos um dos lados. Desse modo, K é um intervalo, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K. Assim, é possível concluir de maneira análoga que g possui ponto crítico em K.

Assim, cada intervalo K limitado está associado à algum ponto crítico de f e, portanto, existem no máximo n desses intervalos. Não é possível obter a mesma conclusão se K não é limitado, mas observando que existem no máximo dois intervalos desse tipo, a demonstração está concluída. $\square$

Corolário 4.9. *Se $\mu > 0$, então $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.*

5 Matriz de Transição

Dizemos que A é uma matriz de transição, se $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ uma matriz quadrada de ordem N tal que $a_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $1 \leq i,j \leq N$. Se A é uma matriz de transição, definimos o conjunto Σ_A por

$$\Sigma_A = \{(x_0\, x_1\, x_2\, \dots) \in \Sigma_N : a_{x_k x_{k+1}} = 1 \text{ para todo } k \geq 0\}.$$

Observe que se $x \in \Sigma_A$, então $\sigma(x) \in \Sigma_A$. Desse modo, podemos definir a função $\sigma_A : \Sigma_A \to \Sigma_A$ como sendo a restrição de σ em Σ_A.

Proposição 5.1. *Σ_A é um subconjunto fechado de Σ_N.*

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de elementos em Σ_A convergente para $x \in \Sigma_N$. Vamos mostrar que $x \in \Sigma_A$.

Se $x = (\xi_0\, \xi_1\, \xi_2\, \dots)$ e $x \notin \Sigma_A$, então existe $k \geq 0$ tal que $a_{\xi_k \xi_{k+1}} = 0$. Por outro lado, pela definição de convergência, existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{k+1}}$ e, portanto, as $k+2$ primeiras entradas de x e x_{n_0} são iguais. Escrevendo $x_{n_0} = (\eta_0\, \eta_1\, \eta_2\, \dots)$, concluímos que $a_{\eta_k \eta_{k+1}} = a_{\xi_k \xi_{k+1}} = 0$, o que é um absurdo pois $x_{n_0} \in \Sigma_A$. $\square$

No restante dessa seção vamos estudar a dinâmica da função quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, onde o parâmetro $\mu = 3.839$ está fixado. Será omitido μ na notação da função e escreveremos apenas F.

Se $a = 0.149888$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $I = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, então é possível mostrar que $F^3(I) \subset I$ e $|(F^3)'(I)| < 1$ e, portanto, o intervalo I possui um ponto periódico atrator de F de período principal 3. Se a_1, a_2 e a_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$a_1 \simeq 0.149888, \;\; a_2 \simeq 0.489149 \;\text{ e }\; a_3 \simeq 0.959299.$$

Pelo Teorema de Sharkovsky, F possui infinitos pontos periódicos. Além disso, pelo Teorema de Singer, essa é a única órbita atratora de F.

De modo análogo, concluímos que F possui outra órbita de tamanho 3. Se b_1, b_2 e b_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040, \;\; b_2 \simeq 0.539247 \;\text{ e }\; b_3 \simeq 0.953837.$$

Observando o gráfico de F^3, concluímos que para cada b_i, existe b_i' no lado oposto de b_i em relação ao ponto a_i tal que $F^3(b_i') = b_i$. Defina $A_1 = (b_1', b_1)$, $A_2 = (b_2', b_2)$ e $A_3 = (b_3, b_3')$. Cada A_i é exatamente o intervalo maximal contendo a_i utilizado na demonstração do Teorema de Singer.

Figura: Gráfico de F^3 com os pontos a_1, a_2 e a_3 assinalados.

Sendo F^3 simétrica em relação ao ponto $\frac{1}{2}$, temos que $F(b_2') = F(b_2) = b_3$. Além disso, podemos observar que $F(b_1') = b_2'$ e $F(b_3') = b_1'$ e, portanto, F mapeia de forma monótona A_1 em A_2 e A_3 em A_1. Observando que o máximo de F em A_2 é $F(\frac{1}{2}) = 0.95975 < b_3'$, concluímos que $F(A_2) \subset A_3$.

Sabemos que se $x \notin [0,1]$, então $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = -\infty$. Além disso, o único ponto periódico em A_i é a_i e todos os pontos em A_i tendem para a órbita de a_i. Desse modo, todos os outros pontos periódicos de F residem no complemento de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ em $[0,1]$, que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam $I_0 = [0, b_1']$, $I_1 = [b_1, b_2']$, $I_2 = [b_2, b_3]$ e $I_3 = [b_3', 1]$ tais intervalos. A Proposição a seguir nos permite dizer mais.

Proposição 5.2. *Se $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$ é um ponto periódico de F, então $x \in I_1 \cup I_2$.*

Demonstração. Observando que F é monótona em cada I_k, temos que $F(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$, $F(I_1) = I_2$, $F(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$ e $F(I_3) = I_0$. Desse modo, se $x \in I_1 \cup I_2$ é periódico, então órbita de x permanece em $I_1 \cup I_2$.

Por outro lado, se $x \in I_0 - \{0\}$, existe um menor $n \geq 1$ tal que $F^n(x) \notin I_0$. Se $F^n(x) \in A_1$, então x não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de A_1 é a_1. Se $F^n(x) \in I_1$, então x não pode ser periódico, pois caso contrário a órbita de x estaria contida em $I_1 \cup I_2$ e nunca retornaria para I_0. Finalmente, se $x \in I_3$, então $F(x) \in I_0$ e a análise segue de maneira análoga. $\square$

Seja Λ o conjunto dado por

$$\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2 : F^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de F estão em Λ, com exceção dos pontos 0, a_1, a_2 e a_3.

Lema 5.3. *Existe $n_0 \geq 1$ tal que $|(F^n)'(\Lambda)| > 1$ para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Inicialmente, podemos observar graficamente que $|F'(I_1 \cup I_2)| \geq \nu$ para algum $\nu \in (0,1)$. Podemos observar também que o subconjunto de $I_1 \cup I_2$ no qual $|(F^3)'|$ é menor que ou igual à 1 é formado por três intervalos fechados e que cada um desses intervalos possui intersecção vazia com Λ e, portanto, $|(F^3)'(\Lambda)| \geq \lambda$ para algum $\lambda > 1$.

Por fim, sejam $x \in \Lambda$ e $K \geq 1$ tal que $\nu^2 \lambda^K > 1$. Se $n_0 = 3K$ e $n \geq n_0$, podemos escrever $n = 3L + \alpha$, onde $L \geq K$ e $0 \leq \alpha \leq 2$. Desse modo, se $\alpha = 0$, então $|(F^n)'(x)| = \left|(F^{3L})'(x)\right| \geq \lambda^L > 1$; se $\alpha = 1$, então $|(F^n)'(x)| = \left|F'(F^{3L}(x))\right| \left|(F^{3L})'(x)\right| \geq \nu\lambda^L > 1$; e se $\alpha = 2$, então $|(F^n)'(x)| = \left|F'(F^{3L+1}(x))\right| \left|F'(F^{3L}(x))\right| \left|(F^{3L})'(x)\right| \geq \nu^2\lambda^L > 1$. $\square$

Lema 5.4. *Λ não contém intervalos.*

Demonstração. Suponha que exista $[a,b] \subset \Lambda$. Utilizando notação do Lema anterior, seja $n \geq n_0$ tal que $\nu^{n_0}\lambda^{n-n_0}(b-a) > 1$. Pelo TVM, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\begin{aligned}|F^n(b) - F^n(a)| &= |(F^n)'(c)|(b-a) \\ &= \prod_{k=0}^{n_0-1} |F'(F^k(c))| \prod_{k=n_0}^{n-1} |F'(F^k(c))|(b-a) \\ &\geq \nu^{n_0}\lambda^{n-n_0}(b-a) > 1\end{aligned}$$

e, portanto, $F^n(a)$ ou $F^n(b)$ não é elemento de $[0,1]$, o que é um absurdo. □

Para as demonstrações dos próximos resultados, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja $S : \Lambda \to \Sigma_A$ a função dada por $S(x) = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$, onde $x_k = 1$ se $F^k(x) \in I_1$ e $x_k = 2$ se $F^k(x) \in I_2$ para todo $k \geq 0$. Observe que S está bem definida, pois $F(I_1) = I_2$ e $F(I_2) \subset I_1 \cup I_2$ e, portanto, $a_{x_k x_{k+1}} = 1$ para todo $k \geq 0$.

Proposição 5.5. *$F|_\Lambda$ e σ_A são topologicamente conjugadas por S.*

Demonstração.

a) S é injetora.

Sejam $x, y \in \Lambda$, $x < y$, e suponha que $S(x) = S(y)$. Desse modo, $F^n(x)$ e $F^n(y)$ está no mesmo lado em relação ao ponto crítico para todo $n \geq 0$ e, portanto, F é monótona em cada intervalo J_n cujos extremos são $F^n(x)$ e $F^n(y)$. Desse modo, se $z \in [x,y]$, então $F^n(z) \in J_n \subset I_1 \cup I_2$ para todo $n \geq 0$ e, portanto, $z \in \Lambda$, o que é um absurdo pois Λ não contém intervalos.

b) S é sobrejetora.

Seja $(x_0\, x_1\, x_2\, \dots) \in \Sigma_A$. Inicialmente, para cada $n \geq 0$, considere

$$I_{x_0 \dots x_n} = \{x \in [0,1] : x \in I_{x_0}, \dots, F^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

Observe $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1 \dots x_n})$ e, portanto, é possível concluir por indução que $I_{x_0 \dots x_n}$ é um intervalo fechado não vazio. Além disso, $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0 \dots x_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{x_n}) \subset I_{x_0 \dots x_{n-1}}$.

Desse modo, $(I_{x_0 \dots x_n})_{n=0}^\infty$ é uma sequência de intervalos encaixantes fechados e não vazios e, portanto, existe $x \in \cap_{n=0}^\infty I_{x_0 \dots x_n}$. Como $F^k(x) \in I_{x_k}$ para todo $k \geq 0$, concluímos que $S(x) = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$. Observe que x é único, pois S é injetora.

c) S é contínua.

Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 0$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$. Se $S(x) = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$, então $x \in I_{x_0 \dots x_k}$. Sendo $I_{x_0 \dots x_k}$ um intervalo fechado, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \delta$, então $y \in I_{x_0 \dots x_k}$. Desse modo, $S(x)$ e $S(y)$ são iguais nas primeiras $k+1$ entradas e, portanto, $d_N(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$.

d) $S \circ F|_\Lambda = \sigma_A \circ S$.

Se $x \in \Lambda$ e $S(x) = (x_0\, x_1\, x_2\, \dots)$, então $\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n} = \{x\}$. Desse modo, é imediato que

$$S \circ F|_\Lambda(x) = S(F(\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n})) = S(\cap_{n=1}^{\infty} I_{x_1 \dots x_n}) = (x_1\, x_2\, x_3\, \dots) = \sigma_A \circ S(x).$$

$\square$