1 Definições Elementares

Definição 1.1. Sejam $f : X \to X$ uma função, $p \in X$ e $n \geq 1$. Dizemos que p é um *ponto periódico com período* n, se $f^n(p) = p$. Se $f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então n é chamado de *período principal*. Em particular, se $n = 1$, dizemos que p é um *ponto fixo*.

Definição 1.2. Sejam $f : X \to X$ uma função, $p \in X$ e $n \geq 1$. Dizemos que p é um *ponto eventualmente periódico com período* n, se existe $m > 1$ tal que $f^k(p) = f^{k+n}(p)$ para todo $k \geq m$. Em particular, se $n = 1$, dizemos que p é um *ponto eventualmente fixo*.

Definição 1.3. Sejam $f : X \to X$ uma função e $x \in X$. A *órbita de* x é o conjunto $O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$.

Definição 1.4. Sejam $f : X \to X$ uma função, p um ponto periódico período n e $x \in X$. Dizemos que x *tende assintoticamente para* p se $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$. O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para p, denotado por $W^s(p)$, é chamado chamado de *conjunto estável de* p. Dizemos que x *tende assintoticamente para infinito* se $\lim_{k\to\infty} |f^k(x)| = \infty$. O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para infinito, denotado por $W^s(\infty)$, é chamado de *conjunto estável do infinito*.

Proposição 1.5. *Sejam* $f : X \to X$ *uma função e* p_1, p_2 *pontos periódicos distintos. Então* $W^s(p_1) \cap W^s(p_2) = \emptyset$.

Demonstração. Sejam n_1, n_2 os períodos de p_1, p_2, respectivamente. Suponha que exista $x \in W^s(p_1) \cap W^s(p_2)$. Sabemos que $|f^{kn_1}(x) - p_1| \to 0$ e $|f^{kn_2}(x) - p_2| \to 0$, quando $k \to \infty$. Desse modo, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que $|f^{kn_1}(x) - p_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|f^{kn_2}(x) - p_2| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $k > N$. Portanto, $|p_1 - p_2| = |p_1 - f^{kn_1n_2}(x) + f^{kn_1n_2}(x) - p_2| \leq |f^{kn_2n_1}(x) - p_1| + |f^{kn_1n_2}(x) - p_2| < \varepsilon$. Temos então que $p = q$, pois ε é arbitrário. Absurdo. $\square$

2 Teorema de Sharkovsky

Ao longo dessa seção, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ denotará uma função contínua.

Definição 2.1. Sejam $J_1, J_2, \ldots, J_n$ intervalos fechados.

1. Dizemos $J_1, J_2, \ldots, J_n$ é um *caminho de tamanho n entre J_1 e J_n* se $f(J_i) \supset J_{i+1}$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$, e denotamos por $J_1 \longrightarrow J_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_n$.

2. Dizemos $J_1, J_2, \ldots, J_n$ é um *ciclo de tamanho n entre J_1 e J_n* se $f(J_i) \supset J_{i+1}$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$, e $f(J_n) \supset J_1$, e denotamos por $J_1 \longrightarrow J_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_n \longrightarrow J_1$.

Proposição 2.2. *Se $J_1 \longrightarrow J_2$, então $f(J_1') = J_2$ para algum intervalo fechado $J_1' \subset J_1$.*

Demonstração. Se $J_1 = [a, b]$ e $J_2 = [c, d]$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existem $p, q \in J_1$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$. Suponha que $p < q$. O caso em que $p > q$ é tratado de maneira análoga.

Defina $J_1' = [a', b']$, onde $b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\}$ e $a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$. Sendo f contínua temos que $f(a') = c$ e $f(b') = d$. Desse modo, $f(J_1') \supset J_2$. Suponha que $f(x) \notin J_2$ para algum $x \in J_1'$, ou seja, $f(x) < c$ ou $f(x) > d$. Se $f(x) < c$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $y \in [x, b']$ tal que $f(y) = c$, o que é um absurdo pois nesse caso $y > a'$, que é o sup do conjunto. Absurdo análogo ocorre supondo que $f(x) > d$. Desse modo, $f(J_1') = J_2$. $\square$

Lema 2.3. *Se $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow J_0$, então existe $p \in J_0$ tal que $f^k(p) \in J_k$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$, e $f^n(p) = p$.*

Demonstração. De acordo com as hipóteses e com a Proposição anterior, temos as seguinte implicações:

$$J_0 \longrightarrow J_1 \Rightarrow \text{ existe } J_0' \subset J_0 \text{ tal que } f(J_0') = J_1$$

$$J_1 \longrightarrow J_2 \Rightarrow \text{ existe } J_1' \subset J_0' \text{ tal que } f^2(J_1') = J_2$$

$$\vdots$$

$$J_{n-2} \longrightarrow J_{n-1} \Rightarrow \text{ existe } J_{n-2}' \subset J_{n-3}' \text{ tal que } f^{n-1}(J_{n-2}') = J_{n-1}$$

$$J_{n-1} \longrightarrow J_0 \Rightarrow \text{ existe } J_{n-1}' \subset J_{n-2}' \text{ tal que } f^n(J_{n-1}') = J_0$$

Construímos então uma sequência de n intervalos fechados $J_0 \supset J_0' \supset J_1' \supset \cdots \supset J_{n-1}'$ tal que $f^k(J_{k-1}') = J_k$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$, e $f^n(J_{n-1}') = J_0$. Como $J_0 \supset J_{n-1}'$, existe $p \in J_{n-1}'$ tal que $f^n(p) = p$. Em particular, $p \in J_0$ e $f^k(p) \in J_k$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$. $\square$

Teorema 2.4. *Se f admite ponto periódico de período principal 3, então f admite ponto periódico de período principal n, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Sejam p um ponto periódico de período principal 3 e $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de p e suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$. O outro caso possível, em que $f(p_1) = p_3$ e $f(p_3) = p_2$, é demonstrado de maneira análoga. Definindo $I_1 = [p_1, p_2]$ e $I_2 = [p_2, p_3]$, temos que $I_1 \longrightarrow I_2$, $I_2 \longrightarrow I_1$ e $I_2 \longrightarrow I_2$.

(a) $n = 1$: Como $I_2 \longrightarrow I_2$, existe $p \in I_2$ tal que $f(p) = p$.

(b) $n = 2$: Como $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1$, existe $p \in I_1$ tal que $f(p) \in I_2$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, o que é um absurdo pois p_2 possui período principal 3. Desse modo, o período principal de p é 2.

(c) $n > 3$: Se $I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2$ é um ciclo de tamanho n, existe $p \in I_2$ tal que $f^k(p) \in I_2$, para todo $k = 1, \ldots, n-2$, $f^{n-1}(p) \in I_1$ e $f^n(p) = p$. Se $f^{n-1}(p) = p$, então $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, o que é um absurdo pois implica que $f(p) = p_3 \in I_1$. Se $f^k(p) = p$ para algum $k = 1, \ldots, n-2$ implica que $f^k(p) \in I_2$, para todo $k \geq 1$. Em particular, $f^{n-1}(p) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ e, portanto, $p = f^n(p) = p_3$, o que é um absurdo pois implica que $f(p) = p_1 \in I_2$.

Desse modo, o resultado está provado. $\square$

Para demonstrar os seguintes Lemas, supomos que f admite um ponto periódico p de período principal $n > 1$. Seja $\mathcal{O}(p) = \{p_1 < p_2 < \cdots < p_n\}$ a órbita de p. Vamos definir $n-1$ intervalos fechados da forma $[p_i, p_{i+1}]$, que serão denotados por $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$, com propriedades que permitam demonstrar o Teorema de Shakovsky.

Lema 2.5. *Existe $k = 1, \ldots, n-1$ tal que $[p_k, p_{k+1}] \longrightarrow [p_k, p_{k+1}]$.*

Demonstração. Seja $p_k = \max\{p_i \in \mathcal{O}(p) : f(p_i) > p_i\}$. Observe que $p_k < p_n$. Pela definição de p_k e por $f(p_{k+1}) \neq p_{k+1}$, temos que $f(p_k) > p_k$ e $f(p_{k+1}) < p_{k+1}$. Portanto, $[p_k, p_{k+1}] \longrightarrow [p_k, p_{k+1}]$. $\square$

O intervalo encontrado no Lema anterior será denotado por I_1. Portanto, $I_1 \longrightarrow I_1$.

Lema 2.6. *Existe um caminho entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$.*

Demonstração. Para cada $n \geq 1$, defina $\mathcal{U}_n$ como a união dos intervalos da forma $[p_i, p_{i+1}]$ tal que existe um caminho de tamanho n entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$.

Se $[p_i, p_{i+1}]$ é um intervalo de $\mathcal{U}_n$, então existe um caminho de tamanho n entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$. Adicionando $I_1 \longrightarrow I_1$ ao início do caminho formamos um caminho de tamanho $n+1$ entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$. Portanto, $[p_i, p_{i+1}]$ é um intervalo de $\mathcal{U}_{n+1}$ e, desse modo, $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1}$. Observe que se $\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}_{n+1}$, existe um intervalo $[p_i, p_{i+1}]$ de $\mathcal{U}_n$ tal que $f([p_i, p_{i+1}] \cap \mathcal{O}(p)) \not\subseteq \mathcal{U}_n$.

Como $\mathcal{O}(p)$ é finita e $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \cdots$, existe $k \geq 1$ tal que $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_{k+1}$. De acordo com a observação anterior, $f([p_i, p_{i+1}] \cap \mathcal{O}(p)) \subset \mathcal{U}_k$ para todo intervalo $[p_i, p_{i+1}]$ de $\mathcal{U}_k$, ou seja,

$f(\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)) \subset \mathcal{U}_k$. Desse modo, $f(\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)) = \mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)$. Como o único subconjunto de $\mathcal{O}(p)$ estável por f é ele próprio, segue que $\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(p)$. Assim, $\mathcal{U}_k = [p_1, p_n]$ e o resultado está provado. □

Lema 2.7. *Se não existe $[p_i, p_{i+1}] \neq I_1$ tal que $[p_i, p_{i+1}] \longrightarrow I_1$, então*

1. *f é uma bijeção entre os pontos de $\mathcal{O}(p)$ à esquerda e à direita de I_1*

2. *n é par*

3. *f admite um ponto de período 2*

Demonstração. Seja $I_1 = [p_k, p_{k+1}]$ e considere os conjuntos $\mathcal{O}_1 = \{p_1, \ldots, p_k\}$ e $\mathcal{O}_2 = \{p_{k+1}, \ldots, p_n\}$.

1. Se f calculada em algum ponto de $\mathcal{O}_1$ permanece em $\mathcal{O}_1$, considere $p_j = \max\{p_i \in \mathcal{O}_1 : f(p_i) \in \mathcal{O}_1\}$. Por definição de p_j, temos $f(p_j) \leq p_k$ e $f(p_{j+1}) \geq p_{k+1}$. Além disso, $p_j < p_k$. Desse modo, $[p_j, p_{j+1}] \neq I_1$ e $[p_j, p_{j+1}] \longrightarrow I_1$, o que é um absurdo.

   Logo, todo ponto de $\mathcal{O}_1$ é levado em $\mathcal{O}_2$ por f. Analogamente, mostra-se que todo ponto de $\mathcal{O}_2$ é levado em $\mathcal{O}_1$ por f. Assim, existe uma bijeção entre $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$.

2. Em particular, o tamanho de $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ são iguais. Desse modo, n é par.

3. Como $[p_1, p_k] \longrightarrow [p_{k+1}, p_n]$ e $[p_{k+1}, p_n] \longrightarrow [p_1, p_k]$, existe $p \in [p_1, p_k]$ tal que $f^2(p) = p$. Como os intervalos são disjuntos, segue que o período principal de p é 2.

Desse modo, as afirmações estão provadas. □

Lema 2.8. *Se $n > 1$ é ímpar e f não admite ponto de período ímpar menor que n, então existe um ciclo $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1$ tal que*

1. *se $I_i \longrightarrow I_{i+j}$ então $j = 1$*

2. *$I_{n-1} \longrightarrow I_j$, para todo $j < n-1$ ímpar*

Demonstração. Inicialmente, vamos provar a existência do ciclo de tamanho $n-1$. De acordo com os dois Lemas anteriores, existe um intervalo da forma $[p_i, p_{i+1}]$ diferente de I_1 tal que $[p_i, p_{i+1}] \longrightarrow I_1$(se esse intervalo não existe, então n é par) e existe um caminho entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$. Portanto, existe um ciclo começando em I_1 diferente de $I_1 \longrightarrow I_1$. Observe que o tamanho desse ciclo pode ser arbitrariamente grande já que $I_1 \longrightarrow I_1$. Suponha que o menor ciclo dessa forma possui tamanho k e o denote por $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1$.

Suponha que $k < n-1$. Então $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1$ ou $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_1$ é um ciclo de tamanho ímpar m menor que n. Desse modo,

$f^m(p) = p$ para algum $p \in I_1$, o que é um absurdo pois f não admite ponto periódico de período ímpar menor que n.

Pela minimalidade do ciclo, a propriedade 1. é verdadeira. Para provar a propriedade 2., seja $I_1 = [p_k, p_{k+1}]$. Pela definição de I_1, temos que $f(p_k) \geq p_{k+1}$ e $f(p_{k+1}) \leq p_k$. Como o período de p é maior que 2, então $f(p_k) > f(p_{k+1})$ ou $f(p_{k+1}) < p_k$. Suponha que $f(p_k) > f(p_{k+1})$. O outro caso é demonstrado de maneira análoga.

Pela propriedade 1., sabemos que I_1 cobre somente ele mesmo e I_2. Desse modo, $f(p_k) = p_{k+2}$ e $f(p_{k+1}) = p_k$, e portanto $I_2 = [p_{k+1}, p_{k+2}]$. Como I_2 cobre somente I_3, e já sabendo que $f(p_{k+1}) = p_k$, temos que $f(p_{k+2}) = p_{k-1}$ e portanto $I_3 = [p_{k-1}, p_k]$. Prosseguindo desse modo, observamos que os intervalos estão distribuídos de maneira simétrica em relação à I_1. Em particular, $I_{n-1} = [p_{n-1}, p_n]$ com $f(p_{n-1}) = p_1$ e $f(p_n) = p_{k+1}$. Desse modo, $f(I_{n-1}) \supset [p_1, p_{k+1}]$ e a afirmação está provada. $\square$

Definição 2.9. O Ordenação de Sharkovsky é definida por

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

ou seja, é formada inicialmente pelos ímpares maiores que 1 em ordem crescente; depois pelos ímpares maiores que 1, multiplicados por 2, em ordem crescente; depois pelos ímpares maiores que 1, multiplicados por 2^2, em ordem crescente; e assim sucessivamente. Por fim, a ordem é formada por todas as potências de 2 em ordem decrescente.

Teorema 2.10. *Se f admite ponto de período principal n, então f admite ponto de período principal m, para todo $m \triangleleft n$.*

Demonstração. Vamos provar em casos separados:

(a) n ímpar e menor possível

Pelo Lema anterior, podemos construir o ciclo $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_1$ de tamanho m, para todo $m > n$. Desse modo, existe $p \in I_1$ tal que $f^m(p) = p$.

(b) n par

$\square$

Teorema 2.11. *Para todo n existe uma função f que admite ponto periódico de período principal n e que não admite ponto de período principal m se $m \triangleright n$.*

Demonstração. Seja $T : [0,1] \to [0,1]$ a função dada por $T(x) = 1 - |2x - 1|$ e considere a família de funções $T_h(x) = \min\{h, T(x)\}$ definidas em $[0,1]$, com o parâmetro h variando em $[0,1]$. Observe que $T_1 = T$, pois $T(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Além disso, observando o gráfico de T_1 concluímos que a função possui 2^n pontos periódicos de período n e assim podemos definir, para cada $n \geq 1$,

$$h(n) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } n \text{ de } T_1\}\}$$

A ideia principal da prova consiste no fato de que $h(n)$ desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de $T_{h(n)}$. As seguintes afirmações tornarão preciso esse fato.

(a) Se $\mathcal{O} \subset [0, h)$ é uma órbita de T_h, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1

Se $p \in \mathcal{O}$ então $T_h(p) \in [0, h)$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$, ou seja, T_h e T_1 coincidem em $\mathcal{O}$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1.

(b) Se $\mathcal{O} \subset [0, h]$ é uma órbita de T_1, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_h.

Se $p \in \mathcal{O}$ então $T_1(p) \in [0, h]$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = \min\{h, T_1(p)\} = T_1(p)$, ou seja, T_h e T_1 coincidem em $\mathcal{O}$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_h.

(c) $T_{h(n)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \in [0, h(n))$ de tamanho m se e somente se $h(n) > h(m)$.

Se $T_{h(n)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \in [0, h(n))$ de tamanho m, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1 por (a) e, pela definição de $h(m)$, concluímos que $h(m) < h(n)$.

Por outro lado, se $h(m) < h(n)$, então T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(m)] \subset [0, h(n)]$ de tamanho m e, desse modo, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_{h(n)}$ por (b).

(d) A órbita de T_1 que contém $h(n)$ é uma órbita de tamanho n de $T_{h(n)}$. Além disso, todas as outras órbitas de $T_{h(n)}$ estão em $[0, h(n))$.

Pela definição de $h(n)$, T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(n)]$ de tamanho n e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_{h(n)}$ por (b).

Para demonstrar a segunda parte, basta observar que $h(n)$ é o valor máximo de $T_{h(n)}$ e, desse modo, toda órbita de $T_{h(n)}$ está contida em $[0, h(n)]$. Em particular, se a órbita não contém $h(n)$, então ela está contida em $[0, h(n))$.

(e) $n \triangleright m$ se o somente se $h(n) > h(m)$.

Suponha que $n \triangleright m$. Por (d), $T_{h(n)}$ possui uma órbita de tamanho n. De acordo com o Teorema de Sharkovsky e com (d), $T_{h(n)}$ admite uma órbita de tamanho m contida em $[0, h(n))$. Desse modo, $h(n) > h(m)$ por (c).

Por outro lado, suponha que $h(n) > h(m)$. Caso $m \triangleright n$, a demonstração no parágrafo anterior implicaria que $h(n) < h(m)$, contrariando a hipótese. Desse modo, $n \triangleright m$.

Assim, para cada $n \geq 1$, $T_{h(n)}$ possui órbita de tamanho n. Além disso, se $m \triangleright n$, então $h(m) > h(n)$ por (e) e, portanto, $T_{h(n)}$ não possui órbita de tamanho m por (c). $\square$

3 Implicações da Diferenciabilidade

Proposição 3.1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(I) \subset I$ ou $f(I) \supset I$, então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Seja $I = [a, b]$. Suponha que $f(I) \subset I$. Considere a função contínua $g(x) = f(x) - x$ definida em I. Como $f(a), f(b) \in I$, temos que $g(a) = f(a) - a \geq 0$ e $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $p \in I$ tal que $g(p) = f(p) - p = 0$. Desse modo, p é ponto fixo de f.

Suponha que $f(I) \supset I$. Por definição, existem $c, d \in I$ tais que $f(c) = a$ e$f(d) = b$. Considere a função contínua $g(x) = f(x) - x$ definida em I. Temos que $g(c) = a - c \leq 0$ e $g(d) = b - d \geq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $p \in I$ tal que $g(p) = f(p) - p = 0$. Desse modo, p é ponto fixo de f. $\square$

Teorema 3.2. *Seja $f : I \to I$ uma função diferenciável. Se $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in I$, então f admite um único ponto fixo e $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todo $x, y \in I$ distintos.*

Demonstração. Sejam $x, y \in I$, $x < y$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [x, y]$ tal que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Portanto, $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| < |x - y|$.

Pela Proposição 3.1, f admite um ponto fixo p. Suponha que exista um ponto fixo q diferente de p. Então, pela primeira parte da demonstração, $|p-q| = |f(p)-f(q)| < |p-q|$. Absurdo. $\square$

Definição 3.3. Sejam $f : I \to I$ uma função diferenciável e p um ponto periódico com período principal n. Dizemos que p é um *ponto hiperbólico* se $|(f^n)'(p)| \neq 1$. Se $|(f^n)'(p)| > 1$, dizemos que p é um *ponto atrator* e se $|(f^n)'(p)| < 1$, dizemos que p é um *ponto repulsor*. Dizemos que p é um *ponto não hiperbólico* se $|(f^n)'(p)| = 1$.

Teorema 3.4. *Sejam $f : I \to I$ uma função C^1 e p um ponto periódico com período principal n. Se p é um ponto hiperbólico atrator, existe uma vizinhança de p contida em $W^s(p)$. Se p é um ponto hiperbólico repulsor, existe uma vizinhança U de p tal que, se $x \in U$ e $x \neq p$, $f^{kn}(x) \notin U$ para algum $k \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que p é um ponto hiperbólico atrator. Como f' é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Pelo Teorema do Valor Médio, se $x \in U$ então $|f^n(x) - p| = |f^n(x) - f^n(p)| \leq \lambda|x - p|$. Por indução, $|f^{kn}(x) - p| \leq \lambda^k|x - p|$. Desse modo, $f^{kn}(x) \to p$ quando $k \to \infty$.

Suponha que p é ponto hiperbólico repulsor. De maneira análoga, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| \geq \lambda > 1$ para todo $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Fixado $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, $x \neq p$, suponha que $f^{kn}(x) \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ para todo $k \geq 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, $|f^{kn}(x) - p| \geq \lambda^k|x - p|$ para todo $k \geq 1$. Absurdo, pois $\lambda^k|x - p| \to \infty$ quando $k \to \infty$. $\square$

Observação. A segunda parte do teorema afirma que existe uma vizinhança de p tal que todo ponto diferente de p nessa vizinhança é movida para fora dela após um número de iterações da f. Observe o ponto pode voltar para vizinhança após mais um número finito de iterações da f, pois sabermos que o valor absoluto da derivada é maior que 1 apenas nessa vizinhança.

4 Função Logística I: Estudo Inicial

Durante essa seção e as próximas, estudaremos a dinâmica da função logística, que é dada por $F(x) = \mu x(1-x)$ para $\mu > 0$.

Proposição 4.1. *Se $\mu > 1$, então*

1. $F(1) = F(0) = 0$ *e* $F(\frac{1}{\mu}) = F(p_\mu) = p_\mu$, *onde* $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.
2. $0 < p_\mu < 1$.
3. *o vértice da parábola de F é o ponto* $(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4})$.

Demonstração. Aplicação direta das definições. □

Proposição 4.2. *Se $\mu > 1$, então $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$.*

Demonstração. Se $x < 0$, a sequência $(x, F(x), F^2(x), \dots)$ é estritamente decrescente pois $F(x) < x$. Se $(F^n(x))_n \to x_0$ quando $n \to \infty$, a continuidade de F implica que $(F^{n+1}(x))_n \to F(x_0) < x_0$. Absurdo. Portanto, $(F^n(x))_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$. Como $F(x) < 0$ para todo $x > 1$, concluímos que $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$. □

Proposição 4.3. *Se $1 < \mu < 3$, então*

1. *0 é um ponto repulsor e p_μ é um ponto atrator.*
2. $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = p_\mu$ *para todo $x \in (0, 1)$.*

Demonstração. A primeira parte é verdadeira pois $|F'(0)| = \mu > 1$ e $|F'(p_\mu)| = |2-\mu| < 1$, quando $1 < \mu < 3$.

Falta provar o item 2. □

Desse modo, conhecemos completamente a dinâmica de F quando $1 < \mu < 3$:

$$W^s(0) = \{0, 1\},\ W^s(p_\mu) = (0, 1) \text{ e } W^s(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

5 Função Logística II: Conjuntos de Cantor

Se $\mu > 4$, então $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} > 1$, ou seja, existem pontos em $[0,1]$ que não permanecem em $[0,1]$ após uma iteração de F. Em vista da Proposição 4.2, a dinâmica de F em tais pontos é determinada, pois pertencem ao conjunto $W^s(\infty)$. De modo mais geral, se um ponto de $[0,1]$ não permanece $[0,1]$ após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto $W^s(\infty)$.

Desse modo, considere o conjunto $\Lambda_n = \{x \in [0,1] : F^n(x) \in [0,1]\}$, que é formado pelos pontos que permanecem em $[0,1]$ após n iterações de F, e considere o conjunto $\Lambda = \cap \Lambda_n = \{x \in [0,1] : F^n(x) \in [0,1] \text{ para todo } n \geq 1\}$, que é formado pelos pontos que permanecem para sempre em $[0,1]$ por iterações de F. Observe que $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, pois se $F^{n+1}(x) = F(F^n(x)) \in [0,1]$, então $F^n(x) \in [0,1]$.

Proposição 5.1. *Se $\mu > 4$, então*

1. $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, *onde* $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ *e* $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$.
2. Λ_n *é a união de 2^n intervalos fechados disjuntos.*
3. $F^n : I \to [0,1]$ *é bijetora, onde I é qualquer um dos 2^n intervalos fechados disjuntos que formam Λ_n.*

Demonstração. Analisando F' observamos que F é estritamente crescente no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e estritamente decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Como $F(0) = F(1) = 0$ e $F\left(\frac{1}{2}\right) > 1$, o Teorema do Valor Intermediário garante que existem $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tais que $F(x_1) = F(x_2) = 1$. Os valores de x_1 e x_2 são encontrados resolvendo a equação de segundo grau $\mu x(1-x) = 1$. Logo, $F([0, x_1]) = F([x_2, 1]) = [0,1]$ e $F(x) > 1$ para todo $x \in (x_1, x_2)$. Portanto, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e o item 1 está demonstrado.

A demonstração dos itens 2 e 3 será feita por indução. De acordo com a primeira parte, Λ_1 é a união de $2^1 = 2$ intervalos fechados disjuntos e F restrita é cada um desses intervalos é uma bijeção com o intervalo $[0,1]$.

Suponha que Λ_{k-1} é a união de 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos de modo que $F^{k-1} : [a,b] \to [0,1]$ é bijetora para todo intervalo $[a,b]$ que forma Λ_{k-1}. Sendo F^{k-1} bijetora, $(F^{k-1})'(x) > 0$ ou $(F^{k-1})'(x) < 0$ para todo $x \in [a,b]$. Como as demonstrações para os dois casos são análogas, podemos supor que $(F^{k-1})'(x) > 0$.

Como F^{k-1} é estritamente crescente, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existem únicos $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in (a,b)$ tais que

(a) $a < \overline{x_1} < \overline{x_2} < b$,

(b) $F^{k-1}([a, \overline{x_1}]) = [0, x_1]$,

(c) $F^{k-1}((\overline{x_1}, \overline{x_2})) = (x_1, x_2)$ e

(d) $F^{k-1}([\overline{x_2}, 1]) = [x_2, 1]$.

As condições acima garantem que os intervalos $[a, \overline{x_1}]$, $[\overline{x_2}, b]$ são disjuntos e que $F^k(x) = F(F^{k-1}(x)) > 1$ para todo $x \in (\overline{x_1}, \overline{x_2})$. Também, temos que $F^k([a, \overline{x_1}]) = F([0, x_1]) = [0, 1]$ e, analogamente, $F^k([\overline{x_2}, 1]) = [0, 1]$. Além disso,

$$(F^k)'([a, \overline{x_1}]) = F'(F^{k-1}([a, \overline{x_1}]))(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) = F'([0, x_1])(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) > 0$$

e, analogamente,

$$(F^k)'([\overline{x_2}, 1]) = F'([x_2, 1])(F^{k-1})'([\overline{x_2}, 1]) < 0.$$

Logo, F^k é uma bijeção entre $[a, \overline{x_1}]$ e $[0, 1]$ e entre $[\overline{x_2}, 1]$ e $[0, 1]$.

Portanto, a partir de cada intervalo fechado de Λ_{k-1}, construímos dois novos intervalos fechados disjuntos tais que F^k restrita em cada um desses intervalos é um bijeção com $[0, 1]$ e, dessa maneira, esses intervalos estão contidos em Λ_k. Desse modo, se Λ_{k-1} é formado por 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos, então Λ_k é formado por $2 \times 2^{k-1} = 2^k$ intervalos fechados disjuntos. Assim, o resultado está provado. □

Definição 5.2 (Conjunto de Cantor)**.** Um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}$ não vazio é um *conjunto de Cantor* se

1. Γ é fechado e limitado,

2. Γ não possui intervalos e

3. Todo ponto de Γ é um ponto de acumulação de Γ.

Lema 5.3. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então*

1. existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.

2. o tamanho de cada intervalo fechado em Λ_n é menor que $\frac{1}{\lambda^n}$.

3. dados $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$, existe um intervalo fechado $I \subset \Lambda_n$, para algum $n \geq 1$, que contém x e cujo tamanho é menor que ε tal que $F^n : I \to [0, 1]$ é bijetora.

Demonstração. 1. Inicialmente, observamos que $\mu^2 - 4\mu > 1$ quando $\mu > 2+\sqrt{5}$. Desse modo, $F'(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$ e $F'(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$, onde x_1 e x_2 são como na Proposição 5.1. Observamos também que F' é estritamente decrescente, pois $F''(x) = -2\mu < 0$. Portanto, $F'(x) \geq F'(x_1) > 1$ para todo $x \in [0, x_1]$ e $F'(x) \leq F'(x_2) < -1$ para todo $x \in [x_2, 1]$. De acordo com a Proposição 5.1, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e, desse modo, $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in \Lambda_1$. Sendo F' contínua e Λ_1 compacto, existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.

2. De acordo com a Proposição 5.1, Λ_n é formado pela união de 2^n intervalos disjuntos. Seja $[a,b]$ um desses intervalos. Se $x \in [a,b]$, em particular $F^k(x) \in \Lambda_1$ para todo $0 \leq k < n$. Desse modo, de acordo com o item anterior, temos que $(F^n)'(x) = F'(F^{n-1}(x)) \times F'(F^{n-2}(x)) \times \cdots \times F'(x) > \lambda^n$.

   Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a,b]$ tal que

   $$|F^n(b) - F^n(a)| = |(F^n)'(c)||b-a| > \lambda^n |b-a|$$

   Como $F^n : [a,b] \to [0,1]$ é contínua e bijetora, temos que $|F^n(b) - F^n(a)| = 1$. Desse modo, $|b-a| < \frac{1}{\lambda^n}$ e a afirmação está provada.

3. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^n} < \varepsilon$, onde $\lambda > 1$ é como no primeiro item. Em particular, $x \in \Lambda_n$. Seja I um dos intervalos que formam Λ_n e que contém x. Pelo item anterior, o tamanho de I é menor que ε. Além disso, pela Proposição 5.1, $F^n : I \to [0,1]$ é bijetora e, portanto, a afirmação está provada.

$\square$

Teorema 5.4. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. Λ é não vazio pois $0 \in \Lambda$, é limitado pois $\Lambda_1 \in [0,1]$ e é fechado pois é intersecção de conjuntos fechados.

Agora, suponha que Λ contém algum intervalo. Então, existem $x, y \in I$, $x < y$, tais que $[x,y] \subset \Lambda$. Seja k tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |x-y|$. Em particular, $[x,y] \subset \Lambda_k$. Mas, de acordo com o Lema 5.3, os intervalos de Λ_k possuem tamanho menor que $\frac{1}{\lambda^k}$. Absurdo e, portanto, Λ não possui intervalos.

Por fim, observe que, se x é um ponto extremo de algum intervalo de Λ_n, então $x \in \Lambda$ pois $F^{n+1}(x) = 0$. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Em particular, $x \in \Lambda_k$ e, portanto, x é elemento de algum intervalo cujo tamanho é menor que ε, de acordo com o Lema 5.3. Portanto, existe $y \in \Lambda$ ponto extremo do intervalo que contém x tal que $|x-y| < \varepsilon$. Como ε é arbitrário, concluímos que x é um ponto de acumulação de Λ. $\square$

Observação. O Teorema 5.4 é válido para $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais difícil.

6 Função Logística III: Caos

Proposição 6.1. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então o conjunto de pontos periódicos de $F : \Lambda \to \Lambda$ é denso em Λ.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 5.3, o intervalo fechado $I \subset \Lambda_k$ que contém x possui tamanho menor que ε. Pela Proposição 5.1, $F^k : I \to [0, 1]$ é bijetora. Como $F^k(I) \supset I$, a Proposição 3.1 afirma que existe $y \in I$ tal que $F^k(y) = y$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \varepsilon$, o resultado está provado. $\square$

Definição 6.2. Seja $f : D \to D$ uma função. Dizemos que f é *topologicamente transitiva* se dados $x, y \in D$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in D$ e $k \geq 1$ tais que $|z - x| < \varepsilon$ e $|f^k(z) - y| < \varepsilon$.

Proposição 6.3. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Existe $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 5.3, o tamanho de cada intervalo fechado em Λ_k é menor que $\frac{1}{\lambda^k}$ e, portanto, menor que ε. Como $x \in \Lambda_k$, existe um intervalo $[a, b] \subset \Lambda_k$ que contém x. Pela Proposição 5.1, $F^k : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $z \in [a, b]$ tal que $F^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$, concluímos que F é topologicamente transitiva. $\square$

Definição 6.4. Seja $f : D \to D$ uma função. Dizemos que f *depende sensivelmente das condições iniciais* se para algum $\delta > 0$, dados $x \in D$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in D$ e $k \geq 1$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Proposição 6.5. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Como na demonstração da Proposição anterior, seja I o intervalo fechado contido em Λ_k que contém x e cujo tamanho é menor que ε. Como $F^k : I \to [0, 1]$ é um bijeção, então $F^k(a) = 0$ e $F^k(b) = 1$, onde a e b são pontos extremos de I. Como $F(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, segue que $F^k(x) \in \big[0, \frac{1}{2}\big) \cup \big(\frac{1}{2}, 1\big]$. Se $F^k(x) \in \big[0, \frac{1}{2}\big)$, então $|F^k(x) - F^k(b)| = |F^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $F^k(x) \in \big(\frac{1}{2}, 1\big]$, então $|F^k(x) - F^k(a)| = |F^k(x)| > \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, temos o resultado para $\delta = \frac{1}{2}$. $\square$

Definição 6.6. Seja $f : D \to D$ uma função. Dizemos que f *é caótica* se

1. O conjunto de pontos periódicos de f é denso em D.

2. f é topologicamente transitiva.

3. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema 6.7. *Se* $\mu > 2 + \sqrt{5}$*, então* $F : \Lambda \to \Lambda$ *é caótica.*

Demonstração. O resultado segue das Proposições 6.1, 6.3 e 6.5. $\square$

Observação. O Teorema 6.7 é válido para $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais difícil.

Teorema 6.8. *Se* D *é um subconjunto infinito de* $\mathbb{R}$ *e* $f : D \to D$ *é uma função topologicamente transitiva cujo conjunto de pontos periódicos é denso, então* f *é caótica.*

Demonstração. Por demonstrar. $\square$

7 Função Logística IV: Conjugação Topológica

Definição 7.1. Sejam $f : A \to A$, $g : B \to B$ e $\tau : A \to B$ funções. Dizemos que *f e g são topologicamente conjugadas por τ*, se τ é um homeomorfismo tal que $\tau \circ f = g \circ \tau$.

Proposição 7.2. *Sejam $f : A \to A$, $g : B \to B$ e $\tau : A \to B$ funções. Se f e g são topologicamente conjugadas por τ, então*

1. *g e f são topologicamente conjugadas por τ^{-1}.*

2. *$\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$ para todo $n \geq 1$.*

3. *p é ponto periódico de f se e somente se $\tau(p)$ é ponto periódico de g. Além disso, os períodos principais de p e $\tau(p)$ são iguais.*

4. *$W^s(\tau(p)) = \tau(W^s(p))$, se p é um ponto periódico de f.*

5. *o conjunto de pontos periódicos de f é denso se e somente se o conjunto de pontos periódicos de g é denso.*

6. *f é topologicamente transitiva se e somente se g é topologicamente transitiva.*

Demonstração.

1. Como τ é um homeomorfismo, a função inversa τ^{-1} existe e também é um homeomorfismo. Além disso, $\tau \circ f = g \circ \tau$ implica que $f \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ g$. Portanto, τ^{-1} é conjugação topológica de g e f.

2. Por definição, a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $\tau \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ \tau$. Desse modo, $\tau \circ f^n = \tau \circ f^{n-1} \circ f = g^{n-1} \circ \tau \circ f = g^{n-1} \circ g \circ \tau = g^n \circ \tau$. Portanto, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

3. Suponha que p é um ponto periódico de f com período principal n. Desse modo, $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) = \tau(p)$. Se $k = 1, \ldots, n-1$, então $g^k(\tau(p)) = \tau(f^k(p)) \neq \tau(p)$, pois $f^k(p) \neq p$ e τ é injetora. Portanto, $\tau(p)$ é um ponto periódico de g com período principal n. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

4. Suponha que p é um ponto periódico com período n. Se $x \in W^s(\tau(p))$, então $\lim_{k\to\infty} g^{kn}(x) = \tau(p)$. Como τ^{-1} é contínua, temos $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(\tau^{-1}(x)) = \lim_{k\to\infty} \tau^{-1}(g^{kn}(x)) = p$. Então, $x \in \tau(W^s(p))$ pois $\tau^{-1}(x) \in W^s(p)$.

   Por outro lado, se $\tau(x) \in \tau(W^s(p))$, então $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$. Como τ é contínua, temos $\lim_{k\to\infty} g^{kn}(\tau(x)) = \lim_{k\to\infty} \tau(f^{kn}(x)) = \tau(p)$ e, portanto, $\tau(x) \in W^s(\tau(p))$.

5. Se o conjunto $Per(f)$ dos pontos periódicos de f é denso em A, então $\tau(Per(f))$ é denso em B pois τ é um homeomorfismo. Como $\tau(Per(f)) = Per(g)$, temos que $Per(g)$ é denso em B. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

6. Inicialmente, sendo τ é contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que, se $z \in A$, $|x - z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$, então $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))|$, onde $n \geq 1$ é fixado.

   Se $x', y' \in B$, existem $x, y \in A$ tais que $\tau(x) = x'$ e $\tau(y) = y'$. Como f é topologicamente transitiva, existe $z \in A$ tal que $|x - z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$ para algum $n \geq 1$. Portanto, $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$. Se $\tau(z) = z'$, então $|x' - z'| < \varepsilon$ e $|y' - g^n(z')| < \varepsilon$ e, portanto, g é topologicamente transitiva. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

□

Lema 7.3. *A função $T : [0,1] \to [0,1]$, dada por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

é caótica.

Demonstração. Inicialmente, provaremos por indução que $T^n : \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^n$. Pela definição de T, a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $T^{n-1} : \left[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^{n-1}$. Fixado k, podemos supor que $T^{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 0$ e $T^{n-1}\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = 1$. O caso em que $T^{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 1$ e $T^{n-1}\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = 0$ é tratado de maneira análoga. Temos que $T^{n-1}(\overline{x}) = \frac{1}{2}$, onde $\overline{x} = \frac{2k+1}{2^n}$ é o ponto médio do intervalo $\left[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right]$. Portanto, $T^n(\overline{x}) = T(T^{n-1}(\overline{x})) = T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $T^n\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = T(0) = 0$ e $T^n\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = T(1) = 0$. Desse modo, $T^n : \left[\frac{k}{2^{n-1}}, \overline{x}\right] \to [0,1]$ e $T^n : \left[\overline{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] \to [0,1]$ são funções lineares(pois são composições de funções lineares) e bijetoras para todo $0 \leq k < 2^{n-1}$. Observando que $\left[\frac{k}{2^{n-1}}, \overline{x}\right] = \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right]$ e $\left[\overline{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] = \left[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\right]$, concluímos que que $T^n : \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^n$ e, portanto, a afirmação está provada.

Para provar que T é caótica, seja $\varepsilon > 0$. Pelo afirmação do parágrafo anterior, existem $n \geq 1$ e $I = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ tais que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $x \in I$ e $T^n : I \to [0,1]$ é bijetora.

Seja $x \in [0,1]$. Como $T(I) \supset I$, a Proposição 3.1 afirma que existe $p \in I$ tal que $T^n(p) = p$. Observando que $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que o conjunto de pontos periódicos de T é denso em $[0,1]$.

Sejam $x, y \in [0,1]$. Como $T^n : I \to [0,1]$ é sobrejetora, existe $z \in I$ tal que $T^n(z) = y$. Observando que $|z - x| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $|T^n(z) - y| = 0 < \varepsilon$, concluímos que T é topologicamente transitiva.

Seja $x \in [0,1]$. Como $T^n : I \to [0,1]$ é sobrejetora, existem $a, b \in I$ tais que $T^n(a) = 0$ e $T^n(b) = 1$. Se $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, então $|T^n(x) - T^(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$ e se $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, então $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $|x - b| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que T depende sensivelmente das condições iniciais. □

Teorema 7.4. *Se $\mu = 4$, então F é caótica.*

Demonstração. Seja $\tau(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ definida no intervalo $[0,1]$. τ é homeomorfismo pois τ' existe em $[0,1]$ e $\tau' > 0$ em $(0,1)$.

Se $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, então

$$\tau \circ T(x) = \tau(2x) = \operatorname{sen}^2(\pi x)$$

e se $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, então

$$\tau \circ T(x) = \tau(2-2x) = \operatorname{sen}^2(\pi - \pi x) = (\operatorname{sen}(\pi)\cos(\pi x) - \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi))^2 = \operatorname{sen}^2(\pi x)$$

Por outro lado,

$$F \circ \tau(x) = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)) = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \operatorname{sen}^2(\pi x)$$

Desse modo, $\tau \circ T = F \circ \tau$. Portanto, de acordo com o Teorema 6.7, a Proposição 7.2 e o Lema 7.3, F é caótica. $\square$

8 Função Logística V: Dinâmica Simbólica

Definição 8.1. $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) : s_k = 0 \text{ ou } s_k = 1 \text{ para todo } k \geq 0\}$ é o *espaço das sequências de* 0 *e* 1.

Proposição 8.2. *A função $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$, dada por*

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}$$

é uma distância em Σ_2.

Demonstração. Inicialmente, observamos que a função d é bem definida pois

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

Além disso, é fácil verificar que as propriedades de uma distância são válidas em d, isto é,

(a) $d(s,t) \geq 0$

(b) $d(s,t) = 0$ se e somente se $s = t$

(c) $d(s,t) = d(t,s)$

(d) $d(s,t) \leq d(s,r) + d(r,t)$

para todo $r, s, t \in \Sigma_2$. Portando, d é uma distância e a afirmação está provada. □

Proposição 8.3. *Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots), t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$. Se $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, então $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$. Por outro lado, se $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$, então $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$.*

Demonstração. Suponha que $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$. Desse modo,

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

Por outro lado, se $s_i \neq t_i$ para algum $0 \leq i \leq n$, então

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n}$$

Portanto, se $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, concluímos que $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$. □

Definição 8.4. A função $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, dada por $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$, é chamada de *função shift*.

Proposição 8.5. *σ é contínua.*

Demonstração. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Se $t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$ e $d(s,t) < \frac{1}{2^{n+1}}$, então $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n+1$, de acordo com a Proposição 8.3. Como $\sigma(s) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ e $\sigma(t) = (t_1 t_2 t_3 \dots)$, temos que as primeiras $n+1$ entradas de $\sigma(s)$ e $\sigma(t)$ são iguais. Novamente, utilizando a Proposição 8.3, temos que $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Como s é um ponto arbitrário em Σ_2, concluímos que σ é contínua. $\square$

Proposição 8.6. *Se σ é a função shift, então*

1. *existem 2^n pontos periódicos com período n.*

2. *existe um ponto cuja órbita é densa.*

3. *o conjunto dos pontos periódicos é denso.*

4. *o conjunto dos pontos não periódicos que são eventualmente periódicos é denso.*

5. *o conjunto dos pontos que não são periódicos e nem eventualmente periódicos é denso.*

Demonstração.

1. Se $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ é um ponto periódico com período n, então

$$\sigma^k(\sigma^n(s)) = (s_{n+k} s_{n+k+1} s_{n+k+2} \dots) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots) = \sigma^k(s)$$

   para todo $k \geq 0$. Desse modo, s é formado pela repetição das entradas $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem 2^n sequências distintas para $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ e, portanto, a afirmação está provada.

2. Considere o ponto $s^* = (0\,1\,00\,01\,10\,11\,000\,001 \dots)$ formado por todos os blocos de tamanho 1, depois por todos os blocos de tamanho 2, e assim sucessivamente.

   Sejam $s \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. É fácil ver que existe $k \geq 0$ de modo que $\sigma^k(s^*)$ e s são iguais nas primeiras $n+1$ entradas. De acordo com a Proposição 8.3, $d(s, \sigma^k(s^*)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, a afirmação está provada.

3. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Considere o ponto periódico t com período $n+1$ formado pela repetição da sequência $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$. De acordo com a Proposição 8.3, $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, a afirmação está provada.

$\square$