# Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos

Agenor Gonçalves Neto

São Paulo, 2020

## Sumário



## 1 Conceitos Iniciais

Seja $f : X \to X$ uma função, onde $X$ é um espaço métrico. Dado $x \in X$ e denotando por $f^n$ a $n$-ésima composição de $f$ com ela mesma, queremos estudar as propriedades da sequência $(x, f(x), f^2(x), \dots)$.

**Definição 1.1.**

a. Se $x \in X$, então $\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ é a órbita de $x$.

b. Se $p \in X$ e $f^n(p) = p$ para algum $n > 0$, então $p$ é um ponto periódico de período $n$. Em particular, se $n = 1$, então $p$ é um ponto fixo. Denotaremos por $\mathrm{Per}(f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos.

c. Se $p$ é um ponto periódico de período $n$ e $f^k(p) \neq p$ para todo $0 < k < n$, então $n$ é o período principal de $p$. Denotaremos por $\mathrm{Per}_n(f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos de período principal $n$.

d. Se $p$ um ponto periódico de período $n$, então $\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p\}$ é a bacia de atração de $p$. Além disso, $\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k\to\infty} |f^k(x)| = \infty\}$ é a bacia de atração do $\infty$.

**Proposição 1.2.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f([a, b]) \subset [a, b]$ ou $f([a, b]) \supset [a, b]$, então $f$ possui ponto fixo.*

*Demonstração.* Suponha que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Considere a função $g(x) = f(x) - x$ definida em $[a, b]$. Observando que $g(a) \geq 0$ e $g(b) \leq 0$ e utilizando o TVI, existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$.

Suponha que $f([a, b]) \supset [a, b]$ e sejam $c, d \in [a, b]$ tais que $f(c) = a$ e $f(d) = b$. Considere a função $g(x) = f(x) - x$ definida em $[a, b]$. Observando que $g(c) \leq 0$ e $g(d) \geq 0$ e utilizando o TVI, existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$. □

**Definição 1.3.** Sejam $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $p \in \mathrm{Per}_n(f)$.

a. Se $|\partial f^n(p)| \neq 1$, então $p$ é um ponto hiperbólico.

b. Se $|\partial f^n(p)| < 1$, então $p$ é um ponto atrator.

c. Se $|\partial f^n(p)| > 1$, então $p$ é um ponto repulsor.

**Teorema 1.4.** *Sejam $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $p \in \mathrm{Per}_n(f)$.*

*1. Se $p$ é um ponto atrator, então existe uma vizinhança de $p$ contida em $\mathcal{B}(p)$.*

*2. Se $p$ é um ponto repulsor, então existe uma vizinhança $V$ de $p$ com a seguinte propriedade: se $x \in V$ e $x \neq p$, então $f^{kn}(x) \notin V$ para algum $k \geq 1$.*

*Demonstração.*

1. Sendo $\partial f$ contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\partial f^n(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in (p-\varepsilon,\, p+\varepsilon)$. Pelo TVM, se $x \in (p-\varepsilon,\, p+\varepsilon)$, então $|f^n(x)-p| \leq \lambda|x-p|$. Por indução, $|f^{kn}(x)-p| \leq \lambda^k|x-p|$ para todo $k \geq 1$. Desse modo, $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$.

2. Demonstração análoga.

□

# 2 Função Logística

## 2.1 Estudo Inicial

**Proposição 2.1.** *Se $\mu > 1$, então*

*1. $F(1) = F(0) = 0$.*

*2. $F(\frac{1}{\mu}) = F(p_\mu) = p_\mu$, onde $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.*

*3. $0 < p_\mu < 1$.*

**Proposição 2.2.** *Se $\mu > 1$, então $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset \mathcal{B}(\infty)$.*

*Demonstração.* Inicialmente, se $x \in (1, \infty)$, então $F(x) \in (-\infty, 0)$. Por fim, observamos que a sequência $(x,\ F(x),\ F^2(x),\ \dots)$ é estritamente decrescente e ilimitada quando $x \in (-\infty, 0)$. □

**Proposição 2.3.** *Se $1 < \mu < 3$, então*

1. *$0$ é um ponto repulsor e $p_\mu$ é um ponto atrator.*
2. *$(0, 1) \subset \mathcal{B}(p_\mu)$.*

## 2.2 Conjuntos de Cantor

Se $\mu > 4$, então $F(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} > 1$, ou seja, existem pontos em $[0, 1]$ que não permanecem em $[0, 1]$ após uma iteração de $F$. Em vista da Proposição 2.2, tais pontos pertencem ao conjunto $\mathcal{B}(\infty)$. De modo mais geral, se um ponto de $[0, 1]$ não permanece em $[0, 1]$ após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto $\mathcal{B}(\infty)$.

Desse modo, considere o conjunto $\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1]\}$ formado pelos pontos que permanecem em $[0, 1]$ após $n$ iterações de $F$ e considere o conjunto $\Lambda = \cap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1] \text{ para todo } n \geq 1\}$, que é formado pelos pontos de $[0, 1]$ que sempre permanecem em $[0, 1]$ por iterações de $F$. Observe que $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, pois se $F^{n+1}(x) = F(F^n(x)) \in [0, 1]$, então $F^n(x) \in [0, 1]$.

**Proposição 2.4.** *Se $\mu > 4$, então*

1. *$\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, onde $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ e $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$.*
2. *$\Lambda_n$ é a união de $2^n$ intervalos fechados disjuntos e $F^n : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora, onde $[a, b]$ é um desses intervalos.*

*Demonstração.*

1. Basta resolver a equação de segundo grau $\mu x(1 - x) = 1$.

Analisando $F'$ observamos que $F$ é estritamente crescente no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e estritamente decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Como $F(0) = F(1) = 0$ e $F\left(\frac{1}{2}\right) > 1$, o Teorema do Valor Intermediário garante que existem $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tais que $F(x_1) = F(x_2) = 1$. Os valores de $x_1$ e $x_2$ são encontrados resolvendo a equação de segundo grau $\mu x(1 - x) = 1$. Logo, $F([0, x_1]) = F([x_2, 1]) = [0, 1]$ e $F(x) > 1$ para todo $x \in (x_1, x_2)$. Portanto, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e o item 1 está demonstrado.

A demonstração dos itens 2 e 3 será feita por indução. De acordo com a primeira parte, $\Lambda_1$ é a união de $2^1 = 2$ intervalos fechados disjuntos e $F$ restrita é cada um desses intervalos é uma bijeção com o intervalo $[0, 1]$.

Suponha que $\Lambda_{k-1}$ é a união de $2^{k-1}$ intervalos fechados disjuntos de modo que $F^{k-1} : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora para todo intervalo $[a, b]$ que forma $\Lambda_{k-1}$. Sendo $F^{k-1}$ bijetora, $(F^{k-1})'(x) > 0$ ou $(F^{k-1})'(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$. Como as demonstrações para os dois casos são análogas, podemos supor que $(F^{k-1})'(x) > 0$.

Como $F^{k-1}$ é estritamente crescente, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existem únicos $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in (a, b)$ tais que

(a) $a < \overline{x_1} < \overline{x_2} < b$,

(b) $F^{k-1}([a, \overline{x_1}]) = [0, x_1]$,

(c) $F^{k-1}((\overline{x_1}, \overline{x_2})) = (x_1, x_2)$ e

(d) $F^{k-1}([\overline{x_2}, 1]) = [x_2, 1]$.

As condições acima garantem que os intervalos $[a, \overline{x_1}]$, $[\overline{x_2}, b]$ são disjuntos e que $F^k(x) = F(F^{k-1}(x)) > 1$ para todo $x \in (\overline{x_1}, \overline{x_2})$. Também, temos que $F^k([a, \overline{x_1}]) = F([0, x_1]) = [0, 1]$ e, analogamente, $F^k([\overline{x_2}, 1]) = [0, 1]$. Além disso,

$$(F^k)'([a, \overline{x_1}]) = F'(F^{k-1}([a, \overline{x_1}]))(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) = F'([0, x_1])(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) > 0$$

e, analogamente,

$$(F^k)'([\overline{x_2}, 1]) = F'([x_2, 1])(F^{k-1})'([\overline{x_2}, 1]) < 0.$$

Logo, $F^k$ é uma bijeção entre $[a, \overline{x_1}]$ e $[0, 1]$ e entre $[\overline{x_2}, 1]$ e $[0, 1]$.

Portanto, a partir de cada intervalo fechado de $\Lambda_{k-1}$, construímos dois novos intervalos fechados disjuntos tais que $F^k$ restrita em cada um desses intervalos é um bijeção com $[0, 1]$ e, dessa maneira, esses intervalos estão contidos em $\Lambda_k$. Desse modo, se $\Lambda_{k-1}$ é formado por $2^{k-1}$ intervalos fechados disjuntos, então $\Lambda_k$ é formado por $2 \times 2^{k-1} = 2^k$ intervalos fechados disjuntos. Assim, o resultado está provado. $\square$

**Definição 2.5.** Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Dizemos que $\Gamma$ é um conjunto de Cantor se as seguintes condições são válidas:

i. $\Gamma$ é compacto.

ii. $\Gamma$ não possui intervalos.

iii. Todo ponto de $\Gamma$ é um ponto de acumulação de $\Gamma$.

**Lema 2.6.** *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então*

*1. existe $\lambda > 1$ tal que $|\partial F(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.*

*2. $b - a < \frac{1}{\lambda^n}$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam $\Lambda_n$.*

*3. dados $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$, existe um intervalo $[a, b] \subset \Lambda_n$ para algum $n \geq 1$ tal que $x \in [a, b]$, $b - a < \varepsilon$ e $F^n : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora.*

*Demonstração.* 1. Inicialmente, observamos que $\mu^2 - 4\mu > 1$ quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Desse modo, $F'(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$ e $F'(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$, onde $x_1$ e $x_2$ são como na Proposição 2.4. Observamos também que $F'$ é estritamente decrescente, pois $F''(x) = -2\mu < 0$. Portanto, $F'(x) \geq F'(x_1) > 1$ para todo $x \in [0, x_1]$ e $F'(x) \leq F'(x_2) < -1$ para todo $x \in [x_2, 1]$. De acordo com a Proposição 2.4, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e, desse modo, $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in \Lambda_1$. Sendo $F'$ contínua e $\Lambda_1$ compacto, existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.

2. De acordo com a Proposição 2.4, $\Lambda_n$ é formado pela união de $2^n$ intervalos disjuntos. Seja $[a, b]$ um desses intervalos. Se $x \in [a, b]$, em particular $F^k(x) \in \Lambda_1$ para todo $0 \leq k < n$. Desse modo, de acordo com o item anterior, temos que $(F^n)'(x) = F'(F^{n-1}(x)) \times F'(F^{n-2}(x)) \times \cdots \times F'(x) > \lambda^n$.

   Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$|F^n(b) - F^n(a)| = |(F^n)'(c)||b - a| > \lambda^n |b - a|$$

   Como $F^n : [a, b] \to [0, 1]$ é contínua e bijetora, temos que $|F^n(b) - F^n(a)| = 1$. Desse modo, $|b - a| < \frac{1}{\lambda^n}$ e a afirmação está provada.

3. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^n} < \varepsilon$, onde $\lambda > 1$ é como no primeiro item. Em particular, $x \in \Lambda_n$. Seja $I$ um dos intervalos que formam $\Lambda_n$ e que contém $x$. Pelo item anterior, o tamanho de $I$ é menor que $\varepsilon$. Além disso, pela Proposição 2.4, $F^n : I \to [0, 1]$ é bijetora e, portanto, a afirmação está provada.

□

**Teorema 2.7.** *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $\Lambda$ é um conjunto de Cantor.*

*Demonstração.* $\Lambda$ é não vazio pois $0 \in \Lambda$, é limitado pois $\Lambda_1 \subset [0, 1]$ e é fechado pois é intersecção de conjuntos fechados.

Agora, suponha que $\Lambda$ contém algum intervalo. Então, existem $x, y \in I$, $x < y$, tais que $[x, y] \subset \Lambda$. Seja $k$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |x - y|$. Em particular, $[x, y] \subset \Lambda_k$. Mas, de acordo com o Lema 2.6, os intervalos de $\Lambda_k$ possuem tamanho menor que $\frac{1}{\lambda^k}$. Absurdo e, portanto, $\Lambda$ não possui intervalos.

Por fim, observe que, se $x$ é um ponto extremo de algum intervalo de $\Lambda_n$, então $x \in \Lambda$ pois $F^{n+1}(x) = 0$. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Em particular, $x \in \Lambda_k$ e, portanto, $x$ é elemento de algum intervalo cujo tamanho é menor que $\varepsilon$, de acordo com o Lema 2.6. Portanto, existe $y \in \Lambda$ ponto extremo do intervalo que contém $x$ tal que $|x - y| < \varepsilon$. Como $\varepsilon$ é arbitrário, concluímos que $x$ é um ponto de acumulação de $\Lambda$. □

## 2.3 Caos

**Proposição 2.8.** *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então o conjunto de pontos periódicos de $F : \Lambda \to \Lambda$ é denso em $\Lambda$.*

*Demonstração.* Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 2.6, o intervalo fechado $I \subset \Lambda_k$ que contém $x$ possui tamanho menor que $\varepsilon$. Pela Proposição 2.4, $F^k : I \to [0, 1]$ é bijetora. Como $F^k(I) \supset I$, a Proposição **??** afirma que existe $y \in I$ tal que $F^k(y) = y$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \varepsilon$, o resultado está provado. □

**Definição 2.9.** Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que $f$ é transitiva topologicamente se dados $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ e $j \geq 1$ tais que $|z - x| < \varepsilon$ e $|f^j(z) - y| < \varepsilon$.

**Proposição 2.10.** *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ é transitiva topologicamente.*

*Demonstração.* Sejam $x, y \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Existe $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 2.6, o tamanho de cada intervalo fechado em $\Lambda_k$ é menor que $\frac{1}{\lambda^k}$ e, portanto, menor que $\varepsilon$. Como $x \in \Lambda_k$, existe um intervalo $[a, b] \subset \Lambda_k$ que contém $x$. Pela Proposição 2.4, $F^k : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $z \in [a, b]$ tal que $F^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$, concluímos que $F$ é transitiva topologicamente. □

**Definição 2.11.** Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que $f$ depende sensivelmente das condições iniciais se existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $j \geq 1$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^j(x) - f^j(y)| > \delta$.

**Proposição 2.12.** *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.*

*Demonstração.* Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Como na demonstração da Proposição anterior, seja $I$ o intervalo fechado contido em $\Lambda_k$ que contém $x$ e cujo tamanho é menor que $\varepsilon$. Como $F^k : I \to [0, 1]$ é um bijeção, então $F^k(a) = 0$ e $F^k(b) = 1$, onde $a$ e $b$ são pontos extremos de $I$. Como $F(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, segue que $F^k(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Se $F^k(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, então $|F^k(x) - F^k(b)| = |F^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $F^k(x) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, então $|F^k(x) - F^k(a)| = |F^k(x)| > \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, temos o resultado para $\delta = \frac{1}{2}$. □

**Definição 2.13.** Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que $f$ é caótica se as seguintes condições são válidas:

i. O conjunto de pontos periódicos de $f$ é denso em $X$.

ii. $f$ é transitiva topologicamente.

iii. $f$ depende sensivelmente das condições iniciais.

**Teorema 2.14.** *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ é caótica.*

**Teorema 2.15.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto infinito e $f : X \to X$ é uma função. Se o conjunto de pontos periódicos de $f$ é denso em $X$ e $f$ é transitiva topologicamente, então $f$ é caótica.*

## 2.4 Conjugação Topológica

**Definição 2.16.** Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\tau : X \to Y$ funções. Dizemos que $f$ e $g$ são conjugadas topologicamente por $\tau$ se $\tau$ se as seguintes condições são válidas:

i. $\tau$ é um homeomorfismo.

ii. $\tau \circ f = g \circ \tau$.

**Proposição 2.17.** *Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\tau : X \to Y$ funções. Se $f$ e $g$ são conjugadas topologicamente por $\tau$, então*

1. *$g$ e $f$ são conjugadas topologicamente por $\tau^{-1}$.*

2. *$\tau \circ f^j = g^j \circ \tau$ para todo $j \geq 1$.*

*3. $p$ é ponto periódico de $f$ se e somente se $\tau(p)$ é ponto periódico de $g$.*

*4. $\mathcal{B}(\tau(p)) = \tau(\mathcal{B}(p))$, onde $p$ é um ponto periódico de $f$.*

*5. o conjunto de pontos periódicos de $f$ é denso em $X$ se e somente se o conjunto de pontos periódicos de $g$ é denso em $Y$.*

*6. $f$ é transitiva topologicamente se e somente se $g$ é transitiva topologicamente.*

*Demonstração.*

1. Como $\tau$ é um homeomorfismo, a função inversa $\tau^{-1}$ existe e também é um homeomorfismo. Além disso, $\tau \circ f = g \circ \tau$ implica que $f \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ g$. Portanto, $\tau^{-1}$ é conjugação topológica de $g$ e $f$.

2. Por definição, a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $\tau \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ \tau$. Desse modo, $\tau \circ f^n = \tau \circ f^{n-1} \circ f = g^{n-1} \circ \tau \circ f = g^{n-1} \circ g \circ \tau = g^n \circ \tau$. Portanto, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

3. Suponha que $p$ é um ponto periódico de $f$ com período principal $n$. Desse modo, $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) = \tau(p)$. Se $k = 1, \ldots, n-1$, então $g^k(\tau(p)) = \tau(f^k(p)) \neq \tau(p)$, pois $f^k(p) \neq p$ e $\tau$ é injetora. Portanto, $\tau(p)$ é um ponto periódico de $g$ com período principal $n$. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

4. Suponha que $p$ é um ponto periódico com período $n$. Se $x \in W^s(\tau(p))$, então $\lim_{k\to\infty} g^{kn}(x) = \tau(p)$. Como $\tau^{-1}$ é contínua, temos $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(\tau^{-1}(x)) = \lim_{k\to\infty} \tau^{-1}(g^{kn}(x)) = p$. Então, $x \in \tau(W^s(p))$ pois $\tau^{-1}(x) \in W^s(p)$.

   Por outro lado, se $\tau(x) \in \tau(W^s(p))$, então $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$. Como $\tau$ é contínua, temos $\lim_{k\to\infty} g^{kn}(\tau(x)) = \lim_{k\to\infty} \tau(f^{kn}(x)) = \tau(p)$ e, portanto, $\tau(x) \in W^s(\tau(p))$.

5. Se o conjunto $Per(f)$ dos pontos periódicos de $f$ é denso em $A$, então $\tau(Per(f))$ é denso em $B$ pois $\tau$ é um homeomorfismo. Como $\tau(Per(f)) = Per(g)$, temos que $Per(g)$ é denso em $B$. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

6. Inicialmente, sendo $\tau$ é contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que, se $z \in A$, $|x-z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$, então $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))|$, onde $n \geq 1$ é fixado.

   Se $x', y' \in B$, existem $x, y \in A$ tais que $\tau(x) = x'$ e $\tau(y) = y'$. Como $f$ é transitiva topologicamente, existe $z \in A$ tal que $|x - z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$ para algum $n \geq 1$. Portanto, $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$. Se $\tau(z) = z'$, então $|x' - z'| < \varepsilon$ e $|y' - g^n(z')| < \varepsilon$ e, portanto, $g$ é transitiva topologicamente. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

□

**Lema 2.18.** *A função $T : [0,1] \to [0,1]$, dada por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

*é caótica.*

*Demonstração.* Inicialmente, provaremos por indução que $T^n : \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^n$. Pela definição de $T$, a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $T^{n-1} : \left[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^{n-1}$. Fixado $k$, podemos supor que $T^{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 0$ e $T^{n-1}\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = 1$. O caso em que $T^{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 1$ e $T^{n-1}\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = 0$ é tratado de maneira análoga. Temos que $T^{n-1}(\overline{x}) = \frac{1}{2}$, onde $\overline{x} = \frac{2k+1}{2^n}$ é o ponto médio do intervalo $\left[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right]$. Portanto, $T^n(\overline{x}) = T(T^{n-1}(\overline{x})) = T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $T^n\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = T(0) = 0$ e $T^n\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = T(1) = 0$. Desse modo, $T^n : \left[\frac{k}{2^{n-1}}, \overline{x}\right] \to [0,1]$ e $T^n : \left[\overline{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] \to [0,1]$ são funções lineares(pois são composições de funções lineares) e bijetoras para todo $0 \leq k < 2^{n-1}$. Observando que $\left[\frac{k}{2^{n-1}}, \overline{x}\right] = \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right]$ e $\left[\overline{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] = \left[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\right]$, concluímos que que $T^n : \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^n$ e, portanto, a afirmação está provada.

Para provar que $T$ é caótica, seja $\varepsilon > 0$. Pelo afirmação do parágrafo anterior, existem $n \geq 1$ e $I = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ tais que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $x \in I$ e $T^n : I \to [0,1]$ é bijetora.

Seja $x \in [0,1]$. Como $T(I) \supset I$, a Proposição **??** afirma que existe $p \in I$ tal que $T^n(p) = p$. Observando que $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que o conjunto de pontos periódicos de $T$ é denso em $[0,1]$.

Sejam $x, y \in [0,1]$. Como $T^n : I \to [0,1]$ é sobrejetora, existe $z \in I$ tal que $T^n(z) = y$. Observando que $|z - x| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $|T^n(z) - y| = 0 < \varepsilon$, concluímos que $T$ é transitiva topologicamente.

Seja $x \in [0,1]$. Como $T^n : I \to [0,1]$ é sobrejetora, existem $a, b \in I$ tais que $T^n(a) = 0$ e $T^n(b) = 1$. Se $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, então $|T^n(x) - T^(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$ e se $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, então $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $|x - b| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que $T$ depende sensivelmente das condições iniciais. □

**Teorema 2.19.** *Se $\mu = 4$, então $F$ é caótica.*

*Demonstração.* Basta observar que $F \circ \tau = \tau \circ T$, onde $\tau : [0,1] \to [0,1]$ é o homeomorfismo dado por $\tau(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. □

## 2.5 Dinâmica Simbólica

**Definição 2.20.** $\Sigma_2 = \{(s_0\, s_1\, s_2\, \dots) : s_j \in \{0,1\}$ para todo $j \geq 0\}$ é o espaço das sequências de 0 e 1.

**Proposição 2.21.** *A função $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$, dada por*

$$d(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j},$$

*é uma distância em $\Sigma_2$.*

**Proposição 2.22.** *Sejam $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \dots)$ e $t = (t_0\, t_1\, t_2\, \dots)$ elementos de $\Sigma_2$.*

1. *Se $s_j = t_j$ para todo $0 \leq j \leq n$, então $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$.*

2. *Se $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$, então $s_j = t_j$ para todo $0 \leq j \leq n$.*

*Demonstração.* Suponha que $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$. Desse modo,

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

Por outro lado, se $s_i \neq t_i$ para algum $0 \leq i \leq n$, então

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n}$$

Portanto, se $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, concluímos que $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$. ☐

**Definição 2.23.** A função $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, dada por $\sigma(s_0\, s_1\, s_2\, \dots) = (s_1\, s_2\, s_3\, \dots)$, é chamada de *função shift.*

**Proposição 2.24.** *$\sigma$ é contínua.*

*Demonstração.* Sejam $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \dots) \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Se $t = (t_0\, t_1\, t_2\, \dots) \in \Sigma_2$ e $d(s,t) < \frac{1}{2^{n+1}}$, então $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n+1$, de acordo com a Proposição 2.22. Como $\sigma(s) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ e $\sigma(t) = (t_1 t_2 t_3 \dots)$, temos que as primeiras $n+1$ entradas de $\sigma(s)$ e $\sigma(t)$ são iguais. Novamente, utilizando a Proposição 2.22, temos que $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Como $s$ é um ponto arbitrário em $\Sigma_2$, concluímos que $\sigma$ é contínua. ☐

**Proposição 2.25.** *1. existem $2^n$ pontos periódicos de período $n$.*

*2. existe um ponto cuja órbita é densa.*

*3. o conjunto dos pontos periódicos é denso.*

*Demonstração.* 1. Se $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \dots)$ é um ponto periódico com período $n$, então

$$\sigma^k(\sigma^n(s)) = (s_{n+k} s_{n+k+1} s_{n+k+2} \dots) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots) = \sigma^k(s)$$

para todo $k \geq 0$. Desse modo, $s$ é formado pela repetição das entradas $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem $2^n$ sequências distintas para $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ e, portanto, a afirmação está provada.

2. Considere o ponto $s^* = (0\,1\,00\,01\,10\,11\,000\,001 \dots)$ formado por todos os blocos de tamanho 1, depois por todos os blocos de tamanho 2, e assim sucessivamente.

   Sejam $s \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. É fácil ver que existe $k \geq 0$ de modo que $\sigma^k(s^*)$ e $s$ são iguais nas primeiras $n+1$ entradas. De acordo com a Proposição 2.22, $d(s, \sigma^k(s^*)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, a afirmação está provada.

3. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Considere o ponto periódico $t$ com período $n+1$ formado pela repetição da sequência $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$. De acordo com a Proposição 2.22, $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, a afirmação está provada.

☐

# 3 Teorema de Sharkovsky

**Definição 3.1.** Se $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ são intervalos fechados, $n > 1$,

1. dizemos que $I_0$ *cobre* $I_1$, e denotamos por $I_0 \longrightarrow I_1$, se $f(I_0) \supset I_1$.

2. dizemos que $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ *é um caminho entre* $I_0$ *e* $I_{n-1}$, e denotamos por $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1}$, se $f(I_i) \supset I_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-2$.

3. dizemos que $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ *é um ciclo entre* $I_0$ *e* $I_{n-1}$, e denotamos por $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$, se $f(I_i) \supset I_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-2$, e $f(I_{n-1}) \supset I_0$.

**Lema 3.2.** *Se* $I_0 \longrightarrow I_1$*, então* $f(I_0') = I_1$ *para algum intervalo fechado* $I_0' \subset I_1$*.*

*Demonstração.* Se $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [c, d]$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existem $p, q \in I_0$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$. Suponha que $p \leq q$ e defina $I_0' = [a', b']$, onde

$$b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\} \text{ e } a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$$

Sendo $f$ contínua temos que $f(a') = c$ e $f(b') = d$ e, desse modo, $f(I_0') \supset I_1$. Se $f(x) < c$ para algum $x \in I_0'$, existe $y \in [x, b']$ tal que $f(y) = c$, o que é um absurdo pois nesse caso $y > a'$. Absurdo análogo ocorre se $f(x) > d$ para algum $x \in I_0'$. Portanto, $f(I_0') = I_1$. □

**Lema 3.3.** *Se* $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow J_0$*, então existe* $p \in J_0$ *tal que* $f^k(p) \in J_k$*, para todo* $k = 1, \ldots, n-1$*, e* $f^n(p) = p$*.*

*Demonstração.* De acordo com as hipóteses e com a Proposição anterior, temos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned}
J_0 \longrightarrow J_1 \Rightarrow &\text{ existe } J_0' \subset J_0 \text{ tal que } f(J_0') = J_1 \\
J_1 \longrightarrow J_2 \Rightarrow &\text{ existe } J_1' \subset J_0' \text{ tal que } f^2(J_1') = J_2 \\
&\vdots \\
J_{n-2} \longrightarrow J_{n-1} \Rightarrow &\text{ existe } J_{n-2}' \subset J_{n-3}' \text{ tal que } f^{n-1}(J_{n-2}') = J_{n-1} \\
J_{n-1} \longrightarrow J_0 \Rightarrow &\text{ existe } J_{n-1}' \subset J_{n-2}' \text{ tal que } f^n(J_{n-1}') = J_0
\end{aligned}$$

Construímos então uma sequência de $n$ intervalos fechados $J_0 \supset J_0' \supset J_1' \supset \cdots \supset J_{n-1}'$ tal que $f^k(J_{k-1}') = J_k$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$, e $f^n(J_{n-1}') = J_0$. Como $J_0 \supset J_{n-1}'$, existe $p \in J_{n-1}'$ tal que $f^n(p) = p$. Em particular, $p \in J_0$ e $f^k(p) \in J_k$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$. □

**Teorema 3.4.** *Se $f$ admite ponto periódico de período principal* 3*, então $f$ admite ponto periódico de período principal $n$, para todo $n \geq 1$.*

*Demonstração.* Sejam $p$ um ponto periódico de período principal 3 e $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de $p$ e suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$. O outro caso possível, em que $f(p_1) = p_3$ e $f(p_3) = p_2$, é demonstrado de maneira análoga. Definindo $I_1 = [p_1, p_2]$ e $I_2 = [p_2, p_3]$, temos que $I_1 \longrightarrow I_2$, $I_2 \longrightarrow I_1$ e $I_2 \longrightarrow I_2$.

(a) $n = 1$: Como $I_2 \longrightarrow I_2$, existe $p \in I_2$ tal que $f(p) = p$.

(b) $n = 2$: Como $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1$, existe $p \in I_1$ tal que $f(p) \in I_2$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, o que é um absurdo pois $p_2$ possui período principal 3. Desse modo, o período principal de $p$ é 2.

(c) $n > 3$: Se $I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2$ é um ciclo de tamanho $n$, existe $p \in I_2$ tal que $f^k(p) \in I_2$, para todo $k = 1, \ldots, n-2$, $f^{n-1}(p) \in I_1$ e $f^n(p) = p$. Se $f^{n-1}(p) = p$, então $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, o que é um absurdo pois implica que $f(p) = p_3 \in I_1$. Se $f^k(p) = p$ para algum $k = 1, \ldots, n-2$ implica que $f^k(p) \in I_2$, para todo $k \geq 1$. Em particular, $f^{n-1}(p) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ e, portanto, $p = f^n(p) = p_3$, o que é um absurdo pois implica que $f(p) = p_1 \in I_2$.

Desse modo, o resultado está provado. □

**Definição 3.5** (Ordenação de Sharkovsky)**.**

$$3 \rhd 5 \rhd \cdots \rhd 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^k \cdot 3 \rhd 2^k \cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.$$

**Teorema 3.6** (Sharkovsky)**.** *Se $f$ admite ponto de período principal $n$, então $f$ admite ponto de período principal $m$, para todo $m \lhd n$.*

**Teorema 3.7.** *Para todo $n \geq 1$ existe uma função $f$ que admite ponto periódico de período principal $n$ e que não admite ponto de período principal $m$ se $m \rhd n$.*

*Demonstração.* Seja $T : [0,1] \to [0,1]$ a função dada por $T(x) = 1 - |2x - 1|$ e considere a família de funções $T_h(x) = \min\{h, T(x)\}$ definidas em $[0,1]$, com o parâmetro $h$ variando em $[0,1]$. Observe que $T_1 = T$, pois $T(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Além disso, observando o gráfico de $T_1$ concluímos que a função possui $2^k$ pontos periódicos de período $k$ e assim podemos definir, para cada $k \geq 1$,

$$h(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } n \text{ de } T_1\}\}$$

A ideia principal da prova consiste no fato de que $h(k)$ desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de $T_{h(k)}$. As seguintes afirmações tornarão preciso esse fato.

(a) Se $\mathcal{O} \subset [0, h)$ é uma órbita de $T_h$, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_1$.

Se $p \in \mathcal{O}$ então $T_h(p) \in [0, h)$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$, ou seja, $T_h$ e $T_1$ coincidem em $\mathcal{O}$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_1$.

(b) Se $\mathcal{O} \subset [0, h]$ é uma órbita de $T_1$, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_h$.

Se $p \in \mathcal{O}$ então $T_1(p) \in [0, h]$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = \min\{h, T_1(p)\} = T_1(p)$, ou seja, $T_h$ e $T_1$ coincidem em $\mathcal{O}$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_h$.

(c) $T_{h(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \in [0, h(k))$ de tamanho $l$ se e somente se $h(k) > h(l)$.

Se $T_{h(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \in [0, h(k))$ de tamanho $l$, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_1$ por (a) e, pela definição de $h(l)$, concluímos que $h(l) < h(k)$.

Por outro lado, se $h(l) < h(k)$, então $T_1$ possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(l)] \subset [0, h(k)]$ de tamanho $l$ e, desse modo, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_{h(k)}$ por (b).

(d) A órbita de $T_1$ que contém $h(k)$ é uma órbita de tamanho $k$ de $T_{h(k)}$. Além disso, todas as outras órbitas de $T_{h(k)}$ estão em $[0, h(k))$.

Pela definição de $h(k)$, $T_1$ possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(k)]$ de tamanho $k$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_{h(k)}$ por (b).

Para demonstrar a segunda parte, basta observar que $h(k)$ é o valor máximo de $T_{h(k)}$ e, desse modo, toda órbita de $T_{h(k)}$ está contida em $[0, h(k)]$. Em particular, se a órbita não contém $h(k)$, então ela está contida em $[0, h(k))$.

(e) $k \rhd l$ se o somente se $h(k) > h(l)$.

Suponha que $k \rhd l$. Por (d), $T_{h(k)}$ possui uma órbita de tamanho $k$. De acordo com o Teorema de Sharkovsky e com (d), $T_{h(k)}$ admite uma órbita de tamanho $l$ contida em $[0, h(k))$. Desse modo, $h(k) > h(l)$ por (c).

Por outro lado, suponha que $h(k) > h(l)$. Caso $l \rhd k$, a demonstração no parágrafo anterior implicaria que $h(k) < h(l)$, contrariando a hipótese. Desse modo, $k \rhd l$.

Assim, para cada $n \geq 1$, $T_{h(n)}$ possui órbita de tamanho $n$. Além disso, se $m \rhd n$ então $h(m) > h(n)$ por (e) e, portanto, $T_{h(n)}$ não possui órbita de tamanho $m$ por (c). $\square$

# 4 Derivada de Schwarz

**Definição 4.1.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^3$. A função $\mathcal{S}f$ dada por

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial f(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial f(x)}\right)^2$$

para todo $x$ tal que $\partial f(x) \neq 0$ é a derivada de Schwarz de $f$.

**Lema 4.2.** *Se $\mathcal{S}f < 0$, então $\mathcal{S}f^k < 0$ para todo $k \geq 1$.*

*Demonstração.* Pela Regra da Cadeia, podemos concluir que $\mathcal{S}f^2(x) < 0$ para todo $x$ tal que $\partial f^2(x) \neq 0$. Por indução, $\mathcal{S}f^k < 0$ para todo $k \geq 1$. $\square$

**Lema 4.3.** *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $x_0$ é um ponto de mínimo local de $\partial f$, então $\partial f(x_0) \leq 0$.*

*Demonstração.* Se $\partial f(x_0) \neq 0$, então $\mathcal{S}f(x_0) = \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial f(x_0)} - \frac{3}{2}\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial f(x_0)} < 0$. Sendo $x_0$ ponto de mínimo local de $\partial f$, temos que $\partial^2 f(x_0) = 0$ e $\partial^3 f(x_0) \geq 0$. Portanto, $\partial f(x_0) < 0$. $\square$

**Lema 4.4.** *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c$ são pontos fixos de $f$, com $\partial f(b) \leq 1$, então $f$ possui ponto crítico em $(a, c)$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema do Valor Médio, existem $r \in (a, b)$ e $s \in (b, c)$ tais que $\partial f(r) = \partial f(s) = 1$. Sendo $\partial f$ contínua, $\partial f$ restrita ao intervalo $[r, s]$ possui mínimo global. Como $b \in (r, s)$ e $\partial f(b) \leq 1$, temos que $\partial f$ possui mínimo local em $(r, s)$. Utilizando Lema anterior e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída. $\square$

**Lema 4.5.** *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c < d$ são pontos fixos de $f$, então $f$ possui ponto crítico em $(a, d)$.*

*Demonstração.* Se $\partial f(b) \leq 1$ ou $\partial f(c) \leq 1$, o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se $\partial f(b) > 1$ e $\partial f(c) > 1$, existem $r, t \in (b, c)$ tais que $r < t$, $f(r) > r$ e $f(t) < t$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $s \in (r, t)$ tal que $\partial f(s) < 1$. Portanto, $\partial f$ possui mínimo local em $(b, c)$. Utilizando Lema 4.3 e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída. $\square$

**Lema 4.6.** *Se $f$ possui finitos pontos críticos, então $f^n$ possui finitos pontos críticos para todo $n \geq 1$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema do Valor Médio, $f$ possui ponto crítico entre dois elementos de $f^{-1}(c)$. Como $f$ possui finitos pontos críticos, $f^{-1}(c)$ é finito. Além disso, se $f^{-k}(c)$ é finito, então $f^{-(k+1)}(c) = \{x \in \mathbb{R} : f(f^k(x)) = c\}$ é finito pois $f^{-1}(c)$ é finito e, por hipótese de indução, $f^{-k}(c_i)$ é finito para cada $c_i \in f^{-1}(c)$. Portanto, $f^{-n}(c)$ é finito para todo $n \geq 1$.

Temos que $(f^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \partial f(f^k(x)) = 0$ se e somente se $f^k(x)$ é ponto crítico de $f$ para algum $k = 1, \ldots, n-1$. Assim, o conjunto de pontos críticos de $f^n$ é finito pois é dado pela união dos conjuntos $\cup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(c_i)$, onde $c_i$ é ponto crítico de $f$. $\square$

Observe que o Lema anterior, ao contrário dos outros, não exige que $\mathcal{S}f < 0$.

**Teorema 4.7** (Singer). *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $f$ possui $n$ pontos críticos, então $f$ possui no máximo $n+2$ órbitas periódicas não repulsoras.*

*Demonstração.* Sejam $p$ um ponto periódico não repulsor de $f$ de período $m$ e $g = f^m$. Desse modo, $p$ é um ponto fixo não repulsor de $g$, ou seja, $g(p) = p$ e $|g'(p)| \leq 1$. Seja $K$ a componente conexa de $B(p) = \{x : \lim_{k\to\infty} g^k(x) = p\}$ que contém $p$.

Suponha que $K$ é limitado e $|g'(p)| < 1$. Vamos mostrar que $K$ é aberto, $g(K) \subset K$ e $g$ preserva os pontos extremos de $K$.

Como $|g'(p)| < 1$, $p$ é um ponto atrator e, portanto, existe uma vizinhança $V$ de $p$ contida em $B(p)$. Além disso, $g(\bar{V}) \subset V$. Sendo $g$ contínua, $g^{-n}(V)$ é um aberto que contém $p$ para todo $n \geq 1$. Como $g^n(p) = p \in V$, considere $g^{-n}(V)^*$ a componente conexa de $g^{-n}(V)$ que contém $p$.

Observe que, se $x \in K$, existe $n \geq 1$ tal que $g^n(x) \in V$. Desse modo, podemos escrever $K = \cup_{n=0}^{\infty} g^{-n}(V)^*$. Portanto, $K$ é aberto e, por construção, $g(K) \subset K$.

Seja $a$ um ponto extremo de $K$ e suponha que $g(a) \in K$. Desse modo, existe uma vizinhança $V$ de $g(a)$ contida em $K$. Sendo $g$ contínua, $g^{-1}(V)$ é uma vizinhança de $a$ contida $B(p)$, o que contraria o fato de $K$ ser a componente conexa de $B(p)$ que contém $p$. Como $g(K) \subset K$ e $g$ é contínua, concluímos que $g$ preserva os pontos extremos de $K$.

Desse modo, escrevendo $K = (a, b)$, ocorre um dos três casos abaixo. Vamos mostrar que em cada caso, $g$ possui ponto crítico em $K$. Observe que $\mathcal{S}g < 0$.

a) Se $g(a) = a$ e $g(b) = b$, $g$ possui ponto crítico em $K$ pelo Lema 4.4.

b) Se $g(a) = b$ e $g(b) = a$, considerando $h = g^2$ e utilizando novamente o Lema 4.4, $h$ possui ponto crítico em $K$. Como $g(K) \subset K$, $g$ possui ponto crítico em $K$.

c) Se $g(a) = g(b)$, $g$ possui ponto crítico em $K$ pelo Teorema do Valor Médio.

Suponha que $K$ é limitado e $|g'(p)| = 1$. Pelo Lema anterior, $g$ possui finitos pontos fixos e, portanto, são isolados.

Se $g'(p) = 1$ e, para $x$ numa vizinhança de $p$, $g(x) > x$ quando $x > p$ e $g(x) < x$ quando $x < p$, então $g'(x^*) > 0$, para $x^*$ próximo de $p$, é um mínimo local de $g'$ maior que zero, o que contradiz o Lema 4.3. Se $g'(p) = -1$, basta considerar $h = g^2$ e obter o mesmo resultado. Portanto, $p$ é atrator em pelo menos um dos lados. Desse modo, $K$ é um intervalo não trivial, $g(K) \subset K$ e $g$ preserva os pontos extremos de $K$. Assim, é possível concluir de maneira análoga que $g$ possui ponto crítico em $K$.

Pela Regra da Cadeia, se $g$ possui ponto crítico $x_0 \in K$, então $f^i(x_0)$ é ponto crítico de $f$ para algum $i = 0, \ldots, m-1$. Desse modo, se $p$ é um ponto periódico não repulsor de $f$ cujo intervalo associado $K$ é limitado, então $K$ possui pelo menos um ponto crítico e, como existem $n$ pontos críticos, existem no máximo $n$ intervalos $K$ limitados. Não é possível obter a mesma conclusão se $K$ não é limitado, mas observando que existem no máximo dois intervalos desse tipo, a demonstração está concluída. $\square$

**Corolário 4.8.** *$F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $\mu > 0$, possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.*

*Demonstração.* Observe que $F_\mu$ possui um único ponto crítico em $\frac{1}{2}$. Pelo Teorema de Singer, $F_\mu$ possui no máximo 3 órbitas periódicas não repulsoras. Se $p$ é ponto fixo de $F_\mu$ e observando que $\lim_{n\to\infty} |F_\mu^n(x)| = \infty$ quando $|x|$ é suficientemente grande, concluímos que $B(p)$ é limitado. Portanto, $F_\mu$ possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora. $\square$

# 5 Bifurcação

Ao longo de seção, $f_\lambda$ representará uma família parametrizada de funções no parâmetro $\lambda$ de modo que a função

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x),$$

definida num aberto de $\mathbb{R}^2$, seja de classe $\mathcal{C}^\infty$ nas variáveis $x$ e $\lambda$.

**Teorema 5.1.** *Seja $f_\lambda$ uma família parametrizada de funções. Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$
2. $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$

*Então existem vizinhanças $I$ e $J$ de $\lambda_0$ e $x_0$, respectivamente, e uma função $p : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que*

1. $p(\lambda_0) = x_0$
2. $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ *para todo* $\lambda \in I$

*Além disso, $f_\lambda$ não possui outros pontos fixos em $J$.*

*Demonstração.* Seja $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Observe que $x$ é ponto fixo de $f_\lambda$ se e somente se $G(x, \lambda) = 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, como $G(x_0, \lambda_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0,$$

existem vizinhanças $I$ e $J$ de $\lambda_0$ e $x_0$, respectivamente, e uma função $p : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $p(\lambda_0) = x_0$ e $G(p(\lambda), \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in I$.

Além disso, para cada $\lambda \in I$ está associado um único $x \in J$ e, portanto, $x \in J$ e $G(x, \lambda) = 0$ se e somente se $x = p(\lambda)$. □

De acordo com o Teorema anterior, se $x_0$ é um ponto fixo hiperbólico de $f_{\lambda_0}$, então $f_\lambda$ possui um único ponto fixo numa vizinhança de $x_0$ para cada $\lambda$ numa vizinhança de $\lambda_0$.

Utilizando a notação do Teorema anterior, considere a função $g_\lambda(x) = f_\lambda(x + p(\lambda)) - p(\lambda)$. Observe que $g_\lambda(0) = f(p(\lambda)) - p(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in I$, ou seja, 0 é ponto fixo de $g_\lambda$ para todo $\lambda \in I$. Além disso, $f_\lambda$ e $g_\lambda$ são topologicamente conjugadas por $h_\lambda(x) = x - p(\lambda)$.

**Teorema 5.2** (Bifurcação Tangente)**.** *Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(0) = 0$
2. $f'_{\lambda_0}(0) = 1$
3. $f''_{\lambda_0}(0) \neq 0$
4. $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

*Então existem uma vizinhança $I$ de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que*

1. $p(0) = \lambda_0$
2. $f_{p(x)}(x) = x$

*Além disso, $p'(0) = 0$ e $p''(0) \neq 0$.*

*Demonstração.* Considere a função $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Observe que $x$ é um ponto fixo de $f_\lambda$ se e somente se $G(x, \lambda) = 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, como $G(0, \lambda_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0,$$

existem uma vizinhança $I$ de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ tais que $p(0) = \lambda_0$ e $G(x, p(x)) = 0$ para todo $x \in I$.

Além disso, pela Regra da Cadeia, é válido que

$$p'(0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = -\frac{f'_{\lambda_0}(0) - 1}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)} = 0$$

e

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) - \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \lambda}(0, \lambda_0)}{\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)\right)^2} = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \lambda_0)}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)} \neq 0$$

□

No Teorema anterior, se $p''(0) > 0$, então a concavidade de $p$ é para cima. Esboçando o gráfico de $p$, podemos observar que $f$ não possui pontos fixos para $\lambda < \lambda_0$, possui um único ponto fixo para $\lambda = \lambda_0$ e possui dois pontos fixos para $\lambda > \lambda_0$. Se $p''(0) < 0$, a concavidade de $p$ é para baixo e a conclusão é análoga, invertendo os sentidos.

**Teorema 5.3** (Bifurcação com Duplicação de Período)**.** *Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(0) = 0$ *para todo* $\lambda$ *numa vizinhança de* $\lambda_0$
2. $f'_{\lambda_0}(0) = -1$
3. $\frac{\partial (f_\lambda^2)'}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$
4. $S_{f_{\lambda_0}}(0) \neq 0$

*Então existem uma vizinhança* $I$ *de* 0 *e uma função* $p : I \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *tais que*

1. $p(0) = \lambda_0$
2. $f_{p(x)}(x) \neq x$ *para todo* $x \in I$
3. $f^2_{p(x)}(x) = x$ *para todo* $x \in I$

*Além disso,* $p'(0) = 0$ *e* $p''(0) \neq 0$.

*Demonstração.* Seja $G(x, \lambda) = f_\lambda^2(x) - x$. Sendo $G(0, \lambda) = 0$ para todo $\lambda$ numa vizinhança de $\lambda_0$, temos que

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = 0$$

e, portanto, não podemos utilizar o Teorema da Função Implícita diretamente. Seja

$$H(x, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{G(x, \lambda)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Desse modo, $H$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e são válidas as igualdades

(I) $H(0, \lambda_0) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0) = (f_{\lambda_0}^2)'(0) - 1 = f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(0))f'_{\lambda_0}(0) - 1 = 0$

(II) $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda)\right)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial}{\partial \lambda}((f_\lambda^2)'(0) - 1)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial (f_\lambda^2)'}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

(III) $\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)$

(IV) $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) = \frac{1}{3}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0)$

Para provar as igualdades $(III)$ e $(IV)$, observe que podemos escrever

$$G(x, \lambda) = G(0, \lambda) + x\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda) + \frac{x^3}{6}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda) + \cdots$$

para todo $x$ numa vizinhança de 0 e para $\lambda$ fixado numa vizinhança de $\lambda_0$, utilizando a Série de Taylor. Sendo $G(0,\lambda) = 0$, podemos escrever

$$H(x,\lambda) = \frac{\partial G}{\partial x}(0,\lambda) + \frac{x}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda) + \frac{x^2}{6}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda) + \cdots$$

para $x \neq 0$ nessa vizinhança. Portanto, $H$ é de classe $\mathcal{C}^\infty$. Escrevendo a Série de Taylor de $H$ numa vizinhança de 0 e igualando os termos correspondentes, concluímos que $\frac{\partial H}{\partial x}(0,\lambda_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda_0)$ e $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,\lambda_0) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda_0)$.

Pelas igualdades (I) e (II), e pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança $I$ de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que $p(0) = \lambda_0$ e $H(x, p(x)) = 0$ para todo $x \in I$. Em particular, se $x \neq 0$,

$$0 = \frac{G(x,p(x))}{x} = \frac{f^2_{p(x)}(x) - x}{x}$$

ou seja, $f^2_{p(x)}(x) = x$ para todo $x \in I$. Além disso, pelo Teorema 5.1, $f_\lambda$ possui um único ponto fixo numa vizinhança de 0 e, portanto, podemos considerar que $f_{p(x)}(x) \neq x$ para todo $x \in I$, $x \neq 0$.

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda_0) &= (f_{\lambda_0})''(x)|_{x=0} \\
&= [f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x)) f'_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\
&= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x)) f''_{\lambda_0}(x)]|_{x=0} \\
&= f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(0)) - f''_{\lambda_0}(0) = 0
\end{aligned}$$

temos que

$$p'(0) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = 0$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda_0) &= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x)) f''_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\
&= [f'''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^3 + 2f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x)) f''_{\lambda_0}(x) f'_{\lambda_0}(x) + f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x)) f'_{\lambda_0}(x) f''_{\lambda_0}(x) \\
&\quad + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x)) f'''_{\lambda_0}(x)]|_{x=0} \\
&= f'''_{\lambda_0}(0)(f'_{\lambda_0}(0))^3 + 2(f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + (f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + f'_{\lambda_0}(0) f'''_{\lambda_0}(0) \\
&= -2f'''_{\lambda_0}(0) - 3(f''_{\lambda_0}(0))^2 \\
&= 2\frac{f'''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)} - 3\left(\frac{f''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)}\right)^2 = 2S_{f_{\lambda_0}}(0)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,\lambda_0)\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)}{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)\right)^2} = -\frac{1}{3}\frac{\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = -\frac{2}{3}\frac{S_{f_{\lambda_0}}(0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} \neq 0.$$

□

## 6 Subshift

Seja $N \geq 2$. Definimos o conjunto $\Sigma_N$ formado pelas sequências de números naturais limitados entre 1 e $N$. Precisamente,

$$\Sigma_N = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : 1 \leq x_n \leq N \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Definimos também a função $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \to \mathbb{R}$ que é dada por

$$d_N(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i},$$

onde $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ e $y = (y_n)_{n=0}^{\infty}$. Como $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} < \infty$, temos que $d_N$ está bem definida.

**Proposição 6.1.** *$(\Sigma_N, d_N)$ é um espaço métrico.*

*Demonstração.* Se $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}, y = (y_n)_{n=0}^{\infty}, z = (z_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$, então

1. $d_N(x,y) \geq 0$, pois $|x_i - y_i| \geq 0$ para todo $i \geq 0$.
2. $d_N(x,y) = d_N(y,x)$, pois $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ para todo $i \geq 0$.
3. $d_N(x,z) \leq d_N(x,y) + d_N(y,z)$, pois $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ para todo $i \geq 0$.

Desse modo, $d_N$ é uma distância em $\Sigma_N$ e $(\Sigma_N, d_N)$ é um espaço métrico. □

**Proposição 6.2.** *Sejam $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}, y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$.*

1. *Se $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, então $d_N(x,y) \leq \frac{1}{N^k}$.*
2. *Se $d_N(x,y) < \frac{1}{N^k}$, então $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$.*

*Demonstração.* 1. Se $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, então

$$d_N(x,y) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} = \frac{N-1}{N^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{N-1}{N^{k+1}} \frac{N}{N-1} = \frac{1}{N^k}.$$

2. Se $x_j \neq y_j$ para algum $0 \leq j \leq k$, então

$$d_N(x,y) \geq \frac{1}{N^j} \geq \frac{1}{N^k}.$$

□

Definimos a função shift $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ que é dada por $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ para todo $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$, isto é, $\sigma(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

**Proposição 6.3.** *$\sigma$ é contínua.*

*Demonstração.* Sejam $\varepsilon > 0$ e $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$. Seja $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$ e defina $\delta = \frac{1}{N^{k+1}}$.

Pela Proposição anterior, se $y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$ e $d_N(x,y) < \delta$, então $x_i = y_i$ para todo $i = 0, \ldots, k+1$. Desse modo, $\sigma(x)$ e $\sigma(y)$ coincidem nas $k$ primeiras entradas. Utilizando a Proposição anterior novamente, concluímos que $d_N(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$. $\square$

Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ uma matriz quadrada de ordem $N$ tal que $a_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $1 \leq i, j \leq N$. Dizemos que $A$ é uma matriz de transição. Definimos o conjunto $\Sigma_A$ como

$$\Sigma_A = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N : a_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \geq 0\}.$$

Seja $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$. Observando que $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 1$, temos que $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_A$. Desse modo, podemos definir a função $\sigma_A : \Sigma_A \to \Sigma_A$ como sendo a restrição de $\sigma$ em $\Sigma_A$. Dizemos que $\sigma_A$ é o subshift definido por $A$.

**Proposição 6.4.** *$\Sigma_A$ é um subconjunto fechado de $\Sigma_N$.*

*Demonstração.* Seja $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de elementos em $\Sigma_A$ convergente para $x = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$. Observe que a sequência $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de sequências, pois cada $x_n$ é elemento de $\Sigma_N$.

Suponha que $x \notin \Sigma_A$. Então, existe $j \geq 0$ tal que $a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Por outro lado, pela definição de convergência, existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{j+1}}$ e, portanto, as $j+2$ primeiras entradas de $x$ e $x_{n_0}$ são iguais. Escrevendo $x_{n_0} = (\eta_n)_{n=0}^{\infty}$, concluímos que $a_{\eta_j \eta_{j+1}} = a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Absurdo, pois $x_{n_0} \in \Sigma_A$. $\square$

No restante dessa seção vamos estudar a dinâmica da função quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, onde o parâmetro $\mu = 3.839$ está fixado. Será omitido $\mu$ na notação da função e escreveremos apenas $F$.

Sejam $a = 0.149888$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Através de cálculos é possível mostrar que $F^3(I) \subset I$ e $|(F^3)'(I)| \leq |(F^3)'(a-\varepsilon)| < 1$ e, portanto, o intervalo $I$ possui um ponto periódico atrator de $F$ de período 3. Se $a_1$, $a_2$ e $a_3$ são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$a_1 \simeq 0.149888, \; a_2 \simeq 0.489149 \text{ e } a_3 \simeq 0.959299.$$

De acordo com o Teorema de Sharkovsky, $F$ possui infinitos pontos periódicos. Além disso, de acordo com o Teorema de Singer, essa é a única órbita atratora de $F$.

De modo análogo, concluímos que $F$ possui outra órbita de tamanho 3. Se $b_1$, $b_2$ e $b_3$ são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040, \; b_2 \simeq 0.539247 \text{ e } b_3 \simeq 0.953837.$$

Observando o gráfico de $F^3$, concluímos que para cada $b_i$, existe $b_i'$ no lado oposto de $b_i$ em relação ao ponto $a_i$ tal que $F^3(b_i') = b_i$. Defina $A_1 = (b_1', b_1)$, $A_2 = (b_2', b_2)$ e $A_3 = (b_3, b_3')$. Cada $A_i$ é exatamente o intervalo maximal contendo $a_i$ utilizado na demonstração do Teorema de Singer.

**Figura:** Gráfico de $F^3$ com os pontos $a_1$, $a_2$ e $a_3$ assinalados.

Sendo $F^3$ simétrica em relação ao ponto $\frac{1}{2}$, temos que $F(b_2') = F(b_2) = b_3$. Além disso, $F(b_1') = b_2'$ e $F(b_3') = b_1'$.

Desse modo, $F$ mapeia, de forma monótona, $A_1$ em $A_2$ e $A_3$ em $A_1$. Observando que o máximo de $F$ em $A_2$ é $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0.95975 < b_3'$, concluímos que $F(A_2) \subset A_3$.

Sabemos que se $x \notin [0,1]$, então $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = -\infty$. Além disso, o único ponto periódico de $A_i$ é $a_i$ e todos os pontos em $A_i$ tendem para a órbita de $a_i$. Desse modo, todos os outros pontos periódicos de $F$ residem no complemento de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ em $[0,1]$, que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam $I_0 = [0, b_1']$, $I_1 = [b_1, b_2']$, $I_2 = [b_2, b_3]$ e $I_3 = [b_3', 1]$ tais intervalos. A Proposição a seguir nos permite dizer mais.

**Proposição 6.5.** *Se $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$ é um ponto periódico de $F$, então $x \in I_1 \cup I_2$.*

*Demonstração.* Observando que $F$ é monótona em cada $I_k$, temos que $F(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$, $F(I_1) = I_2$, $F(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$ e $F(I_3) = I_0$. Desse modo, se $x \in I_1 \cup I_2$ é periódico, então órbita de $x$ permanece em $I_1 \cup I_2$.

Por outro lado, se $x \in I_0 - \{0\}$, existe um menor $n \geq 1$ tal que $F^n(x) \notin I_0$. Se $F^n(x) \in A_1$, então $x$ não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de $A_1$ é $a_1$. Se $F^n(x) \in I_1$, então $x$ não pode ser periódico, pois caso contrário a órbita de $x$ estaria contida em $I_1 \cup I_2$ e nunca retornaria para $I_0$.

Finalmente, se $x \in I_3$, então $F(x) \in I_0$ e a análise segue como no parágrafo anterior. □

Defina o conjunto $\Lambda$ como

$$\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2 : F^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de $F$ estão em $\Lambda$, com exceção dos pontos $0$, $a_1$, $a_2$ e $a_3$.

**Lema 6.6.** *Existe $N \geq 1$ tal que $|(F^n)'(\Lambda)| > 1$ para todo $n \geq N$.*

*Demonstração.* Como $F'' < 0$, temos que $F'$ é estritamente decrescente. Sendo $F'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, concluímos que $A_2$ é uma vizinhança da única raiz de $F'$. Além disso, $|(F^3)'(b_2)| = |(F^3)'(b_2')| \simeq 0.3$. Desse modo, $|F'(I_1 \cup I_2)| \geq \nu$ para algum $\nu \in (0,1)$.

Observando o gráfico de $F^3$, concluímos que o subconjunto de $I_1 \cup I_2$ no qual $|F'| \leq 1$ é formado por três intervalos fechados. Sejam $B_1$, $B_2$ e $B_3$ tais intervalos, numerados da esquerda para direita. Utilizando a simetria do gráfico de $F^3$ e o fato de que $(F^3)'(b_1) > 1$, temos que $F^3(B_3) \subset A_1$ e, portanto, $B_3 \cap \Lambda = \emptyset$.

Por outro lado, $B_2 \subset [0.661, 0.683]$, já que $(F^3)'(0.661) > 1$ e $(F^3)'(0.683) < -1$. Desse modo, $F(B_2) \subset A_3$. Utilizando novamente a simetria do gráfico de $F^3$, concluímos que $F(B_1) \subset A_3$. Portanto, $B_1 \cap \Lambda = \emptyset$ e $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$. Assim, $|(F^3)'(\Lambda)| \geq \lambda$ para algum $\lambda > 1$. Observe que se $x \in \Lambda$ e $L \geq 1$, então

$$\left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| = \prod_{i=0}^{L-1} \left|\left(F^3\right)'\left(F^{3i}(x)\right)\right| \geq \lambda^L.$$

Finalmente, sejam $x \in \Lambda$ e $K \geq 1$ tal que $\nu^2\lambda^K > 1$. Se $N = 3K$ e $n \geq N$, podemos escrever $n = 3L + \alpha$, onde $L \geq K$ e $\alpha \in \{0, 1, 2\}$. Desse modo,

i. se $\alpha = 0$, então

$$\left|(F^n)'(x)\right| = \left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| \geq \lambda^L \geq \lambda^K > 1.$$

ii. se $\alpha = 1$, então

$$\left|(F^n)'(x)\right| = \left|F'\left(F^{3L}(x)\right)\right| \left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| \geq \nu\lambda^L > \nu^2\lambda^K > 1.$$

iii. se $\alpha = 2$, então

$$\left|(F^n)'(x)\right| = \left|F'\left(F^{3L+1}(x)\right)\right| \left|F'\left(F^{3L}(x)\right)\right| \left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| \geq \nu^2\lambda^L \geq \nu^2\lambda^K > 1.$$

□

Para as demonstrações dos próximos resultados, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos definir a função $S : \Lambda \to \Sigma_A$ por $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, onde $x_i = 1$ se $F^i(x) \in I_1$ e $x_i = 2$ se $F^i(x) \in I_2$ para todo $i \geq 0$. Observe que está $S$ bem definida, pois $F(I_1) = I_2$ e $F(I_2) \subset I_1 \cup I_2$ e, portanto, $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 0$.

**Lema 6.7.** *$\Lambda$ não contém intervalos.*

*Demonstração.* Suponha que $\Lambda$ contém algum intervalo e sejam $a, b \in \Lambda$, com $a < b$, tais que $[a, b] \subset \Lambda$. Utilizando a notação do Lema anterior, seja $k \geq N$ tal que $(b - a)\nu^N \lambda^{k-N} > 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\begin{aligned} |F^k(b) - F^k(a)| &= |(F^k)'(c)|(b - a) \\ &= \left|\prod_{i=0}^{k-1} F'(F^i(c))\right| (b - a) \\ &= \left|\prod_{i=0}^{N-1} F'(F^i(c))\right| \left|\prod_{i=N}^{k-1} F'(F^i(c))\right| (b - a) \\ &\geq \nu^N \lambda^{k-N}(b - a) > 1 \end{aligned}$$

e, portanto, $F^k(a)$ ou $F^k(b)$ não é elemento de $[0, 1]$, o que é um absurdo. □

**Proposição 6.8.** *$S$ é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* i. $S$ é injetora:

Sejam $x, y \in \Lambda$, com $x < y$, e suponha que $S(x) = S(y)$. Desse modo, $F^n(x)$ e $F^n(y)$ está no mesmo lado em relação ao ponto crítico $\frac{1}{2}$ e, portanto, $F$ é monótona no intervalo $J_n$, cujos pontos extremos são $F^n(x)$ e $F^n(y)$, para todo $n \geq 0$. Desse modo, se $z \in [x, y]$, então $F^n(z) \in J_n \subset I_1 \cup I_2$ para todo $n \geq 0$ e, portanto, $z \in \Lambda$. Mas isso implica que $[x, y] \subset \Lambda$, o que é um absurdo.

ii. $S$ é sobrejetora:

Seja $(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$. Vamos provar que existe $x \in \Lambda$ tal que $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Inicialmente, para cada $n \geq 0$, considere

$$I_{x_0 \cdots x_n} = \{x \in [0,1] : x \in I_{x_0}, \dots, F^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

Observe que $x \in I_{x_0 \cdots x_n}$ se, e somente se, $x \in I_{x_0}$ e $F(x) \in \{y \in [0,1] : y \in I_{x_1}, \dots, F^{n-1}(y) \in I_{x_n}\}$. Desse modo, $I_{x_0 \cdots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1 \cdots x_n})$.

Assim, por indução, é possível concluir que $I_{x_0 \cdots x_n}$ é um intervalo fechado não vazio. Além disso, $I_{x_0 \cdots x_n} = I_{x_0 \cdots x_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{x_n}) \subset I_{x_0 \cdots x_{n-1}}$.

Desse modo, $(I_{x_0 \cdots x_n})_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de intervalos encaixantes fechados e não vazios e, portanto, existe $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$. Como $F^i(x) \in I_{x_i}$ para todo $i \geq 0$, concluímos que $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Observe que $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$ é único, pois $S$ é injetora.

iii. $S$ é contínua:

Seja $x \in \Lambda$, com $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Sejam também $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$.

Como $I_{x_0 \dots x_k}$ um intervalo fechado e $x \in I_{x_0 \dots x_k}$, tome $\delta > 0$ tal que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \delta$ implica que $y \in I_{x_0 \dots x_k}$. Desse modo, $S(x)$ e $S(y)$ são iguais nas primeiras $k+1$ entradas e, portanto, $d_N(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$.

$\square$

**Teorema 6.9.** $S \circ F|_{\Lambda} = \sigma_A \circ S$.

*Demonstração.* Seja $x \in \Lambda$. Utilizando a notação da Proposição anterior, se $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, então $x$ é o único elemento de $\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$.

Podemos escrever $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1}) \cap \cdots \cap F^{-n}(I_{x_n})$. Se $x_0 = 1$, então $x_1 = 2$ e, portanto, $F(I_{x_0}) = I_{x_1}$. Se $x_0 = 2$, então $F(I_{x_0}) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$. Em ambos os casos, $F(I_{x_0}) \supset I_{x_1}$ e, desse modo,

$$F(I_{x_0 \dots x_n}) = I_{x_1} \cap \cdots \cap F^{-n+1}(I_{x_n}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S \circ F|_{\Lambda}(x) &= S(F(\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n})) \\ &= S(\cap_{n=1}^{\infty} I_{x_1 \cdots x_n}) \\ &= (x_n)_{n=1}^{\infty} = \sigma \circ S(x) \end{aligned}$$

$\square$

**Proposição 6.10.** *Seja $A$ uma matriz de transição de ordem $N$. Então $\sigma_A$ possui $Tr(A^k)$ pontos periódicos de período $k$.*

*Demonstração.* Observe que $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$ é um ponto periódico de período $k$ de $\sigma$ se, e somente se, $x_i = x_{i+k}$ para todo $i \geq 0$, ou seja,

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \dots).$$

Desse modo, $x \in \Sigma_A$ se, e somente se, $a_{x_0x_1} = a_{x_1x_2} = \cdots = a_{x_{k-1}x_0} = 1$ e, portanto,

$$\begin{cases} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\dots a_{x_{k-1}x_0} = 1, & \text{se } x \in \Sigma_A \\ a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\dots a_{x_{k-1}x_0} = 0, & \text{se } x \notin \Sigma_A \end{cases}$$

Assim, a quantidade de pontos periódicos de período $k$ de $\sigma_A$ é dada por

$$\sum_{1 \le x_0, \dots, x_{k-1} \le N} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\dots a_{x_{k-1}x_0}.$$

Por outro lado, utilizando a definição de multiplicação de matrizes podemos mostrar por indução que $A^k = (c_{ij})_{1 \le i,j \le N}$, onde

$$c_{ij} = \sum_{1 \le x_1, \dots, x_{k-1} \le N} a_{ix_1}a_{x_1x_2}\dots a_{x_{k-1}j}$$

e, portanto,

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{x_0=1}^{N} c_{x_0x_0} = \sum_{1 \le x_0, \dots, x_{k-1} \le N} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\dots a_{x_{k-1}x_0}.$$

$\square$