1 Subshift

Seja $N \geq 2$. Definimos o conjunto Σ_N formado sequências de números naturais limitados entre 1 e N. Precisamente,

$$\Sigma_N = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : 1 \leq x_n \leq N\}.$$

Definimos também a função $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_N(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i},$$

onde $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ e $y = (y_n)_{n=0}^{\infty}$. Como $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} < \infty$, d_N está bem definida.

Proposição 1.1. (Σ_N, d_N) *é um espaço métrico.*

Demonstração. Se $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}, y = (y_n)_{n=0}^{\infty}, z = (z_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$, então

1. $d_N(x, y) \geq 0$, pois $|x_i - y_i| \geq 0$ para todo $i \geq 0$.
2. $d_N(x, y) = d_N(y, x)$, pois $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ para todo $i \geq 0$.
3. $d_N(x, z) \leq d_N(x, y) + d_N(y, z)$, pois $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ para todo $i \geq 0$.

Desse modo, d_N é uma distância em Σ_N e (Σ_N, d_N) é um espaço métrico. □

Proposição 1.2. *Sejam* $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}, y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$.

1. *Se* $x_i = y_i$ *para todo* $0 \leq i \leq k$, *então* $d_N(x, y) \leq \frac{1}{N^k}$.
2. *Se* $d_N(x, y) < \frac{1}{N^k}$, *então* $x_i = y_i$ *para todo* $0 \leq i \leq k$.

Demonstração. 1. Se $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, então

$$d_N(x, y) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N^{k+1}} \frac{N}{N-1} < \frac{1}{N^k}$$

2. Se $x_j \neq y_j$ para algum $0 \leq j \leq k$, então

$$d_N(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i} \geq \frac{1}{N^j} \geq \frac{1}{N^k}$$

□

Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ uma matriz quadrada de ordem N tal que $a_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $1 \leq i,j \leq N$. Definimos o conjunto Σ_A como

$$\Sigma_A = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N : a_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \geq 0\}.$$

Seja $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$. Observando que $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 1$, temos que $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_A$. Desse modo, podemos definir a função $\sigma_A : \Sigma_A \to \Sigma_A$ como sendo a restrição de σ em Σ_A. Dizemos que σ_A é o subshift definido pela matriz de transição A.

Proposição 1.3. *Σ_A é um subconjunto fechado de Σ_N.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de elementos em Σ_A convergente para $x = (\xi_n)_{n=0}^{\infty}$.

Suponha que $x \notin \Sigma_A$. Então, existe $j \geq 0$ tal que $a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Por outro lado, pela definição de convergência, existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{j+1}}$ e, portanto, as $j+1$ primeiras entradas de x e x_{n_0} são iguais. Absurdo, pois $x_{n_0} \in \Sigma_A$. □

No restante dessa seção vamos estudar a dinâmica da função quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, onde o parâmetro $\mu = 3.839$ está fixado. Será omitido μ na notação da função e escreveremos apenas F.

Existe uma vizinhança V de 0.149888 tal que $F^3(V) \subset V$ e $|(F^3)'(V)| < 1$. Desse modo, existe um ponto periódico $a_1 \in V$ de período 3. Chamando a_1, a_2, a_3 os elementos dessa órbita, temos que

$$a_1 \simeq 0.149888,$$

$$a_2 \simeq 0.489149,$$

$$a_3 \simeq 0.959299.$$

Além disso, de acordo com o Teorema de Singer, essa é a única órbita atratora de F.

Observando o gráfico de F^3, existe outra órbita de tamanho 3. Chamando b_1, b_2, b_3 os elementos dessa órbita, temos que

$$b_1 \simeq 0.169040,$$

$$b_2 \simeq 0.539247,$$

$$b_3 \simeq 0.953837.$$

Para cada b_i, existe $\bar{b}_i$ do lado oposto de b_i em relação à a_i tal que $F^3(\bar{b}_i) = b_i$. Defina $A_1 = (\bar{b}_1, b_1)$, $A_2 = (\bar{b}_2, b_2)$ e $A_3 = (b_3, \bar{b}_3)$. Observe que A_i é o intervalo maximal contendo a_i utilizado na demonstração do Teorema de Singer.

Sendo F^3 simétrica em relação à $\frac{1}{2}$, temos que $F(\bar{b}_2) = F(b_2) = b_3$. Além disso, $F(\bar{b}_1) = \bar{b}_2$ e $F(\bar{b}_3) = \bar{b}_1$.

Desse modo, F mapeia, de forma monótona, A_1 em A_2 e A_3 em A_1. Além disso, o máximo de F é $0.95975 < \bar{b}_3$ e, portanto, $F(A_2) \subset A_3$. (???)

Sabemos que se $x \notin [0,1]$, então $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = -\infty$. Além disso, o único ponto periódico de A_i é a_i e todos os pontos de A_i tendem para a órbita de a_i. Portanto, todos os outros infinitos pontos periódicos residem no complemento dos A_i's em $[0,1]$, que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam $I_0 = [0, \bar{b}_1], I_1 = [b_1, \bar{b}_2], I_2 = [b_2, b_3], I_3 = [\bar{b}_3, 1]$ tais intervalos. Podemos dizer mais,

Proposição 1.4. *Se $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$ é um ponto periódico de F, então $x \in I_1 \cup I_2$.*

Demonstração. Observando que F é monótona nos I_k's, temos que $F(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$, $F(I_1) = I_2$, $F(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$ e $F(I_3) = I_0$. Desse modo, se $x \in I_1 \cup I_2$ é periódico, então órbita de x permanece em $I_1 \cup I_2$.

Por outro lado, se $x \in I_0 - \{0\}$, existe um menor $n \geq 1$ tal que $F^n(x) \notin I_0$. Se $F^n(x) \in A_1$, então x não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de A_1 é a_1. Se $F^n(x) \in I_1$, então x não pode ser periódico, pois senão a órbita de x estaria contida em $I_1 \cup I_2$ e nunca retornaria para I_0.

Finalmente, se $x \in I_3$, então $F(x) \in I_0$ e a análise segue como no parágrafo anterior. □

Defina o conjunto Λ como

$$\Lambda\{x \in I_1 \cup I_2 : F^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de F estão em Λ, com exceção dos pontos 0, a_1, a_2 e a_3.

Considere a matriz de transição

$$A = (0, 1//1, 1)$$

Podemos definir a função $S : \Lambda \to \Sigma_A$ por $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, onde $x_i = 1$ quando $F^i(x) \in I_1$ e $x_i = 2$ quando $F^i(x) \in I_2$. Observe que está bem definida. De fato, $F(I_1) = I_2$ e $F(I_2) \subset I_1 \cup I_2$ e, portanto, $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 0$.

Lema 1.5. *Λ é um conjunto hiperbólico.*

Demonstração. □

Lema 1.6. *S é um homeomorfismo.*

Demonstração. □

Teorema 1.7. *$S \circ F|_\Lambda$ e $\sigma_A \circ S$.*

Demonstração. □

Proposição 1.8. *Seja A uma matriz de transição de ordem N. Então σ_A possui $Tr(A^k)$ pontos periódicos de período k.*

Demonstração. Temos que $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$ é um ponto periódico de período k se, e somente se, $x_i = x_{i+k}$ para todo $i \geq 0$, ou seja,

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, \ldots).$$

Além disso, se $x \in \Sigma_A$ implica que $a_{x_0x_1} = a_{x_1x_2} = \cdots = a_{x_{k-1}x_0} = 1$ e, portanto $a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\cdots a_{x_{k-1}x_0} = 1$. Desse modo, a quantidade de pontos periódicos de período k é dada por

$$\sum_{x_0=1}^{N} \cdots \sum_{x_{k-1}=1}^{N} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\cdots a_{x_{k-1}x_0}.$$

Por outro lado, utilizando a definição de multiplicação de matrizes podemos mostrar por indução que $A^k = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$, onde

$$c_{ij} = \sum_{x_1=1}^{N} \cdots \sum_{x_{k-1}=1}^{N} a_{ix_1}a_{x_1x_2}\cdots a_{x_{k-1}j}$$

e, portanto,

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{x_0=1}^{N} c_{x_0x_0} = c_{ij} = \sum_{x_0=1}^{N} \cdots \sum_{x_{k-1}=1}^{N} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\cdots a_{x_{k-1}x_0}$$

. □