Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos

Agenor Gonçalves Neto

São Paulo, 2020

Sumário

1 Conceitos Iniciais **1**

2 Função Logística **3**

2.1 Conjuntos de Cantor . . . 3

2.2 Caos . . . 6

2.3 Conjugação Topológica . . . 7

2.4 Dinâmica Simbólica . . . 9

3 Teorema de Sharkovsky **11**

4 Derivada de Schwarz **13**

5 Bifurcação **16**

6 Subshift **19**

7 Teoria Kneading **25**

1 Conceitos Iniciais

Definição 1.1. Sejam $f : X \to X$ uma função e $p \in X$. Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$, dizemos que p é um ponto periódico de período n.

Definição 1.2. Sejam $f : X \to X$ uma função e $x \in X$. Dizemos que $\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ é a órbita de x.

Definição 1.3. Sejam $f : X \to X$ uma função e p um ponto periódico de período n. Dizemos que $\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{j\to\infty} f^{jn}(x) = p\}$ é a bacia de atração de p e que $\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{j\to\infty} |f^j(x)| = \infty\}$ é a bacia de atração de ∞.

Proposição 1.4. *Seja $f : X \to X$ uma função. Se p e q são pontos periódicos distintos, então $\mathcal{B}(p) \cap \mathcal{B}(q) = \emptyset$.*

Demonstração. Sejam n_1, n_2 os períodos de p_1, p_2, respectivamente. Suponha que exista $x \in W^s(p_1) \cap W^s(p_2)$. Sabemos que $|f^{kn_1}(x) - p_1| \to 0$ e $|f^{kn_2}(x) - p_2| \to 0$, quando $k \to \infty$. Desse modo, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que $|f^{kn_1}(x) - p_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|f^{kn_2}(x) - p_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k > N$. Portanto, $|p_1 - p_2| = |p_1 - f^{kn_1n_2}(x) + f^{kn_1n_2}(x) - p_2| \leq |f^{kn_2n_1}(x) - p_1| + |f^{kn_1n_2}(x) - p_2| < \varepsilon$. Temos então que $p = q$, pois ε é arbitrário. Absurdo. $\square$

Proposição 1.5. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f([a, b]) \subset [a, b]$ ou $f([a, b]) \supset [a, b]$, então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Seja $I = [a, b]$. Suponha que $f(I) \subset I$. Considere a função contínua $g(x) = f(x) - x$ definida em I. Como $f(a), f(b) \in I$, temos que $g(a) = f(a) - a \geq 0$ e $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $p \in I$ tal que $g(p) = f(p) - p = 0$. Desse modo, p é ponto fixo de f.

Suponha que $f(I) \supset I$. Por definição, existem $c, d \in I$ tais que $f(c) = a$ e$f(d) = b$. Considere a função contínua $g(x) = f(x) - x$ definida em I. Temos que $g(c) = a - c \leq 0$ e $g(d) = b - d \geq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $p \in I$ tal que $g(p) = f(p) - p = 0$. Desse modo, p é ponto fixo de f. $\square$

Teorema 1.6. *Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função derivável. Se $|Df(x)| < 1$ para todo $x \in [a, b]$, então f admite um único ponto fixo. Além disso, $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todo $x, y \in [a, b]$ distintos.*

Demonstração. Sejam $x, y \in I$, $x < y$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [x, y]$ tal que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Portanto, $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| < |x - y|$.

Pela Proposição 1.5, f admite um ponto fixo p. Suponha que exista um ponto fixo q diferente de p. Então, pela primeira parte da demonstração, $|p - q| = |f(p) - f(q)| < |p - q|$. Absurdo. $\square$

Definição 1.7. Sejam $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função derivável e p um ponto periódico de período principal n. Dizemos que p é um ponto hiperbólico se $|Df^n(p)| \neq 1$. Dizemos que p é um ponto atrator se $|Df^n(p)| < 1$ e que é um ponto repulsor se $|Df^n(p)| > 1$.

Teorema 1.8. *Sejam $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e p um ponto periódico de período principal n.*

1. *Se p é um ponto atrator, então existe uma vizinhança de p contida em $\mathcal{B}(p)$.*

2. *Se p é um ponto repulsor, então existe uma vizinhança V de p tal que, se $x \in V$ e $x \neq p$, então $f^{jn}(x) \notin V$ para algum $j \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que p é um ponto hiperbólico atrator. Como f' é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Pelo Teorema do Valor Médio, se $x \in U$ então $|f^n(x) - p| = |f^n(x) - f^n(p)| \leq \lambda |x - p|$. Por indução, $|f^{kn}(x) - p| \leq \lambda^k |x - p|$. Desse modo, $f^{kn}(x) \to p$ quando $k \to \infty$.

Suponha que p é ponto hiperbólico repulsor. De maneira análoga, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| \geq \lambda > 1$ para todo $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Fixado $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, $x \neq p$, suponha que $f^{kn}(x) \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ para todo $k \geq 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, $|f^{kn}(x) - p| \geq \lambda^k |x - p|$ para todo $k \geq 1$. Absurdo, pois $\lambda^k |x - p| \to \infty$ quando $k \to \infty$. $\square$

2 Função Logística

Proposição 2.1. *Se* $\mu > 1$, *então*

1. $F(1) = F(0) = 0$.
2. $F\left(\frac{1}{\mu}\right) = F(p_\mu) = p_\mu$, *onde* $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.
3. $0 < p_\mu < 1$.

Demonstração. Aplicação direta das definições. □

Proposição 2.2. *Se* $\mu > 1$, *então* $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset \mathcal{B}(\infty)$.

Demonstração. Se $x < 0$, a sequência $(x, F(x), F^2(x), \dots)$ é estritamente decrescente pois $F(x) < x$. Se $(F^n(x))_n \to x_0$ quando $n \to \infty$, a continuidade de F implica que $(F^{n+1}(x))_n \to F(x_0) < x_0$. Absurdo. Portanto, $(F^n(x))_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$. Como $F(x) < 0$ para todo $x > 1$, concluímos que $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$. □

Proposição 2.3. *Se* $1 < \mu < 3$, *então*

1. 0 *é um ponto repulsor e* p_μ *é um ponto atrator.*
2. $(0, 1) \subset \mathcal{B}(p_\mu)$.

Demonstração. A primeira parte é verdadeira pois $|F'(0)| = \mu > 1$ e $|F'(p_\mu)| = |2 - \mu| < 1$, quando $1 < \mu < 3$. □

Desse modo, conhecemos completamente a dinâmica de F quando $1 < \mu < 3$:

$$\mathcal{B}(0) = \{0, 1\},\ \mathcal{B}(p_\mu) = (0, 1) \text{ e } \mathcal{B}(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

2.1 Conjuntos de Cantor

Se $\mu > 4$, então $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} > 1$, ou seja, existem pontos em $[0, 1]$ que não permanecem em $[0, 1]$ após uma iteração de F. Em vista da Proposição 2.2, tais pontos pertencem ao conjunto $\mathcal{B}(\infty)$. De modo mais geral, se um ponto de $[0, 1]$ não permanece em $[0, 1]$ após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto $\mathcal{B}(\infty)$.

Desse modo, considere o conjunto $\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1]\}$ formado pelos pontos que permanecem em $[0, 1]$ após n iterações de F e considere o conjunto $\Lambda = \cap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1] \text{ para todo } n \geq 1\}$, que é formado pelos pontos de $[0, 1]$ que sempre permanecem em $[0, 1]$ por iterações de F. Observe que $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, pois se $F^{n+1}(x) = F(F^n(x)) \in [0, 1]$, então $F^n(x) \in [0, 1]$.

Proposição 2.4. *Se* $\mu > 4$, *então*

1. $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, *onde* $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ *e* $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$.
2. Λ_n *é a união de* 2^n *intervalos fechados disjuntos.*

3. $F^n : [a,b] \to [0,1]$ *é bijetora, onde* $[a,b]$ *é um dos intervalos que formam* Λ_n*.*

Demonstração. Analisando F' observamos que F é estritamente crescente no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e estritamente decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Como $F(0) = F(1) = 0$ e $F\left(\frac{1}{2}\right) > 1$, o Teorema do Valor Intermediário garante que existem $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tais que $F(x_1) = F(x_2) = 1$. Os valores de x_1 e x_2 são encontrados resolvendo a equação de segundo grau $\mu x(1-x) = 1$. Logo, $F([0, x_1]) = F([x_2, 1]) = [0, 1]$ e $F(x) > 1$ para todo $x \in (x_1, x_2)$. Portanto, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e o item 1 está demonstrado.

A demonstração dos itens 2 e 3 será feita por indução. De acordo com a primeira parte, Λ_1 é a união de $2^1 = 2$ intervalos fechados disjuntos e F restrita é cada um desses intervalos é uma bijeção com o intervalo $[0, 1]$.

Suponha que Λ_{k-1} é a união de 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos de modo que $F^{k-1} : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora para todo intervalo $[a, b]$ que forma Λ_{k-1}. Sendo F^{k-1} bijetora, $(F^{k-1})'(x) > 0$ ou $(F^{k-1})'(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$. Como as demonstrações para os dois casos são análogas, podemos supor que $(F^{k-1})'(x) > 0$.

Como F^{k-1} é estritamente crescente, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existem únicos $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in (a, b)$ tais que

(a) $a < \overline{x_1} < \overline{x_2} < b$,

(b) $F^{k-1}([a, \overline{x_1}]) = [0, x_1]$,

(c) $F^{k-1}((\overline{x_1}, \overline{x_2})) = (x_1, x_2)$ e

(d) $F^{k-1}([\overline{x_2}, 1]) = [x_2, 1]$.

As condições acima garantem que os intervalos $[a, \overline{x_1}]$, $[\overline{x_2}, b]$ são disjuntos e que $F^k(x) = F(F^{k-1}(x)) > 1$ para todo $x \in (\overline{x_1}, \overline{x_2})$. Também, temos que $F^k([a, \overline{x_1}]) = F([0, x_1]) = [0, 1]$ e, analogamente, $F^k([\overline{x_2}, 1]) = [0, 1]$. Além disso,

$$(F^k)'([a, \overline{x_1}]) = F'(F^{k-1}([a, \overline{x_1}]))(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) = F'([0, x_1])(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) > 0$$

e, analogamente,

$$(F^k)'([\overline{x_2}, 1]) = F'([x_2, 1])(F^{k-1})'([\overline{x_2}, 1]) < 0.$$

Logo, F^k é uma bijeção entre $[a, \overline{x_1}]$ e $[0, 1]$ e entre $[\overline{x_2}, 1]$ e $[0, 1]$.

Portanto, a partir de cada intervalo fechado de Λ_{k-1}, construímos dois novos intervalos fechados disjuntos tais que F^k restrita em cada um desses intervalos é um bijeção com $[0, 1]$ e, dessa maneira, esses intervalos estão contidos em Λ_k. Desse modo, se Λ_{k-1} é formado por 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos, então Λ_k é formado por $2 \times 2^{k-1} = 2^k$ intervalos fechados disjuntos. Assim, o resultado está provado. $\square$

Definição 2.5. Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Dizemos que Γ é um conjunto de Cantor se as seguintes condições são válidas:

i. Γ é compacto.

ii. Γ não possui intervalos.

iii. Todo ponto de Γ é um ponto de acumulação de Γ.

Lema 2.6. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então*

1. *existe $\lambda > 1$ tal que $|\partial F(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.*

2. *$b - a < \frac{1}{\lambda^n}$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_n.*

3. *dados $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$, existe um intervalo $[a, b] \subset \Lambda_n$ para algum $n \geq 1$ tal que $x \in [a, b]$, $b - a < \varepsilon$ e $F^n : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora.*

Demonstração. 1. Inicialmente, observamos que $\mu^2 - 4\mu > 1$ quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Desse modo, $F'(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$ e $F'(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$, onde x_1 e x_2 são como na Proposição 2.4. Observamos também que F' é estritamente decrescente, pois $F''(x) = -2\mu < 0$. Portanto, $F'(x) \geq F'(x_1) > 1$ para todo $x \in [0, x_1]$ e $F'(x) \leq F'(x_2) < -1$ para todo $x \in [x_2, 1]$. De acordo com a Proposição 2.4, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e, desse modo, $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in \Lambda_1$. Sendo F' contínua e Λ_1 compacto, existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.

2. De acordo com a Proposição 2.4, Λ_n é formado pela união de 2^n intervalos disjuntos. Seja $[a, b]$ um desses intervalos. Se $x \in [a, b]$, em particular $F^k(x) \in \Lambda_1$ para todo $0 \leq k < n$. Desse modo, de acordo com o item anterior, temos que $(F^n)'(x) = F'(F^{n-1}(x)) \times F'(F^{n-2}(x)) \times \cdots \times F'(x) > \lambda^n$.

   Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a, b]$ tal que

   $$|F^n(b) - F^n(a)| = |(F^n)'(c)||b - a| > \lambda^n |b - a|$$

   Como $F^n : [a, b] \to [0, 1]$ é contínua e bijetora, temos que $|F^n(b) - F^n(a)| = 1$. Desse modo, $|b - a| < \frac{1}{\lambda^n}$ e a afirmação está provada.

3. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^n} < \varepsilon$, onde $\lambda > 1$ é como no primeiro item. Em particular, $x \in \Lambda_n$. Seja I um dos intervalos que formam Λ_n e que contém x. Pelo item anterior, o tamanho de I é menor que ε. Além disso, pela Proposição 2.4, $F^n : I \to [0, 1]$ é bijetora e, portanto, a afirmação está provada.

$\square$

Teorema 2.7. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. Λ é não vazio pois $0 \in \Lambda$, é limitado pois $\Lambda_1 \subset [0, 1]$ e é fechado pois é intersecção de conjuntos fechados.

Agora, suponha que Λ contém algum intervalo. Então, existem $x, y \in I$, $x < y$, tais que $[x, y] \subset \Lambda$. Seja k tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |x - y|$. Em particular, $[x, y] \subset \Lambda_k$. Mas, de acordo com o Lema 2.6, os intervalos de Λ_k possuem tamanho menor que $\frac{1}{\lambda^k}$. Absurdo e, portanto, Λ não possui intervalos.

Por fim, observe que, se x é um ponto extremo de algum intervalo de Λ_n, então $x \in \Lambda$ pois $F^{n+1}(x) = 0$. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Em particular, $x \in \Lambda_k$ e, portanto, x é elemento de algum intervalo cujo tamanho é menor que ε, de acordo com o Lema 2.6. Portanto, existe $y \in \Lambda$ ponto extremo do intervalo que contém x tal que $|x - y| < \varepsilon$. Como ε é arbitrário, concluímos que x é um ponto de acumulação de Λ. □

2.2 Caos

Proposição 2.8. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então o conjunto de pontos periódicos de $F : \Lambda \to \Lambda$ é denso em Λ.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 2.6, o intervalo fechado $I \subset \Lambda_k$ que contém x possui tamanho menor que ε. Pela Proposição 2.4, $F^k : I \to [0, 1]$ é bijetora. Como $F^k(I) \supset I$, a Proposição **??** afirma que existe $y \in I$ tal que $F^k(y) = y$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \varepsilon$, o resultado está provado. □

Definição 2.9. Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f é transitiva topologicamente se dados $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ e $j \geq 1$ tais que $|z - x| < \varepsilon$ e $|f^j(z) - y| < \varepsilon$.

Proposição 2.10. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ é transitiva topologicamente.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Existe $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 2.6, o tamanho de cada intervalo fechado em Λ_k é menor que $\frac{1}{\lambda^k}$ e, portanto, menor que ε. Como $x \in \Lambda_k$, existe um intervalo $[a, b] \subset \Lambda_k$ que contém x. Pela Proposição 2.4, $F^k : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $z \in [a, b]$ tal que $F^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$, concluímos que F é transitiva topologicamente. □

Definição 2.11. Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f depende sensivelmente das condições iniciais se existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $j \geq 1$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^j(x) - f^j(y)| > \delta$.

Proposição 2.12. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Como na demonstração da Proposição anterior, seja I o intervalo fechado contido em Λ_k que contém x e cujo tamanho é menor que ε. Como $F^k : I \to [0, 1]$ é um bijeção, então $F^k(a) = 0$ e $F^k(b) = 1$, onde a e b são pontos extremos de I. Como $F(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, segue que $F^k(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Se $F^k(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, então $|F^k(x) - F^k(b)| = |F^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $F^k(x) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, então $|F^k(x) - F^k(a)| = |F^k(x)| > \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, temos o resultado para $\delta = \frac{1}{2}$. □

Definição 2.13. Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f é caótica se as seguintes condições são válidas:

i. O conjunto de pontos periódicos de f é denso em X.

ii. f é transitiva topologicamente.

iii. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema 2.14. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ é caótica.*

Teorema 2.15. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto infinito e $f : X \to X$ é uma função. Se o conjunto de pontos periódicos de f é denso em X e f é transitiva topologicamente, então f é caótica.*

2.3 Conjugação Topológica

Definição 2.16. Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\tau : X \to Y$ funções. Dizemos que f e g são conjugadas topologicamente por τ se τ se as seguintes condições são válidas:

i. τ é um homeomorfismo.

ii. $\tau \circ f = g \circ \tau$.

Proposição 2.17. *Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\tau : X \to Y$ funções. Se f e g são conjugadas topologicamente por τ, então*

1. *g e f são conjugadas topologicamente por τ^{-1}.*

2. *$\tau \circ f^j = g^j \circ \tau$ para todo $j \geq 1$.*

3. *p é ponto periódico de f se e somente se $\tau(p)$ é ponto periódico de g.*

4. *$\mathcal{B}(\tau(p)) = \tau(\mathcal{B}(p))$, onde p é um ponto periódico de f.*

5. *o conjunto de pontos periódicos de f é denso em X se e somente se o conjunto de pontos periódicos de g é denso em Y.*

6. *f é transitiva topologicamente se e somente se g é transitiva topologicamente.*

Demonstração.

1. Como τ é um homeomorfismo, a função inversa τ^{-1} existe e também é um homeomorfismo. Além disso, $\tau \circ f = g \circ \tau$ implica que $f \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ g$. Portanto, τ^{-1} é conjugação topológica de g e f.

2. Por definição, a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $\tau \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ \tau$. Desse modo, $\tau \circ f^n = \tau \circ f^{n-1} \circ f = g^{n-1} \circ \tau \circ f = g^{n-1} \circ g \circ \tau = g^n \circ \tau$. Portanto, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

3. Suponha que p é um ponto periódico de f com período principal n. Desse modo, $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) = \tau(p)$. Se $k = 1, \ldots, n-1$, então $g^k(\tau(p)) = \tau(f^k(p)) \neq \tau(p)$, pois $f^k(p) \neq p$ e τ é injetora. Portanto, $\tau(p)$ é um ponto periódico de g com período principal n. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

4. Suponha que p é um ponto periódico com período n. Se $x \in W^s(\tau(p))$, então $\lim_{k\to\infty} g^{kn}(x) = \tau(p)$. Como τ^{-1} é contínua, temos $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(\tau^{-1}(x)) = \lim_{k\to\infty} \tau^{-1}(g^{kn}(x)) = p$. Então, $x \in \tau(W^s(p))$ pois $\tau^{-1}(x) \in W^s(p)$.

   Por outro lado, se $\tau(x) \in \tau(W^s(p))$, então $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$. Como τ é contínua, temos $\lim_{k\to\infty} g^{kn}(\tau(x)) = \lim_{k\to\infty} \tau(f^{kn}(x)) = \tau(p)$ e, portanto, $\tau(x) \in W^s(\tau(p))$.

5. Se o conjunto $Per(f)$ dos pontos periódicos de f é denso em A, então $\tau(Per(f))$ é denso em B pois τ é um homeomorfismo. Como $\tau(Per(f)) = Per(g)$, temos que $Per(g)$ é denso em B. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

6. Inicialmente, sendo τ é contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que, se $z \in A$, $|x-z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$, então $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))|$, onde $n \geq 1$ é fixado.

   Se $x', y' \in B$, existem $x, y \in A$ tais que $\tau(x) = x'$ e $\tau(y) = y'$. Como f é transitiva topologicamente, existe $z \in A$ tal que $|x - z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$ para algum $n \geq 1$. Portanto, $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$. Se $\tau(z) = z'$, então $|x' - z'| < \varepsilon$ e $|y' - g^n(z')| < \varepsilon$ e, portanto, g é transitiva topologicamente. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

□

Lema 2.18. *A função* $T : [0,1] \to [0,1]$*, dada por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

é caótica.

Demonstração. Inicialmente, provaremos por indução que $T^n : \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^n$. Pela definição de T, a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $T^{n-1} : \left[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^{n-1}$. Fixado k, podemos supor que $T^{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 0$ e $T^{n-1}\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = 1$. O caso em que $T^{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 1$ e $T^{n-1}\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = 0$ é tratado de maneira análoga. Temos que $T^{n-1}(\overline{x}) = \frac{1}{2}$, onde $\overline{x} = \frac{2k+1}{2^n}$ é o ponto médio do intervalo $\left[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right]$. Portanto, $T^n(\overline{x}) = T(T^{n-1}(\overline{x})) = T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $T^n\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = T(0) = 0$ e $T^n\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = T(1) = 0$. Desse modo, $T^n : \left[\frac{k}{2^{n-1}}, \overline{x}\right] \to [0,1]$ e $T^n : \left[\overline{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] \to [0,1]$ são funções lineares(pois são composições de funções lineares) e bijetoras para todo $0 \leq k < 2^{n-1}$. Observando que $\left[\frac{k}{2^{n-1}}, \overline{x}\right] = \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right]$ e $\left[\overline{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] = \left[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\right]$, concluímos que que $T^n : \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^n$ e, portanto, a afirmação está provada.

Para provar que T é caótica, seja $\varepsilon > 0$. Pelo afirmação do parágrafo anterior, existem $n \geq 1$ e $I = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ tais que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $x \in I$ e $T^n : I \to [0,1]$ é bijetora.

Seja $x \in [0,1]$. Como $T(I) \supset I$, a Proposição **??** afirma que existe $p \in I$ tal que $T^n(p) = p$. Observando que $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que o conjunto de pontos periódicos de T é denso em $[0,1]$.

Sejam $x, y \in [0,1]$. Como $T^n : I \to [0,1]$ é sobrejetora, existe $z \in I$ tal que $T^n(z) = y$. Observando que $|z - x| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $|T^n(z) - y| = 0 < \varepsilon$, concluímos que T é transitiva topologicamente.

Seja $x \in [0,1]$. Como $T^n : I \to [0,1]$ é sobrejetora, existem $a, b \in I$ tais que $T^n(a) = 0$ e $T^n(b) = 1$. Se $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, então $|T^n(x) - T^(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$ e se $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, então $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $|x - b| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que T depende sensivelmente das condições iniciais. □

Teorema 2.19. *Se* $\mu = 4$*, então* F *é caótica.*

Demonstração. Seja $\tau(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ definida no intervalo $[0,1]$. τ é homeomorfismo pois τ' existe em $[0,1]$ e $\tau' > 0$ em $(0,1)$.

Se $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, então

$$\tau \circ T(x) = \tau(2x) = \text{sen}^2(\pi x)$$

e se $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, então

$$\tau \circ T(x) = \tau(2-2x) = \text{sen}^2(\pi - \pi x) = (\text{sen}(\pi)\cos(\pi x) - \text{sen}(\pi x)\cos(\pi))^2 = \text{sen}^2(\pi x)$$

Por outro lado,

$$F \circ \tau(x) = 4\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)(1 - \text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)) = 4\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \text{sen}^2(\pi x)$$

Desse modo, $\tau \circ T = F \circ \tau$. Portanto, de acordo com o Teorema 2.14, a Proposição 2.17 e o Lema 2.18, F é caótica. □

2.4 Dinâmica Simbólica

Definição 2.20. $\Sigma_2 = \{(s_0\, s_1\, s_2\, \dots) : s_j \in \{0, 1\}$ para todo $j \geq 0\}$ é o espaço das sequências de 0 e 1.

Proposição 2.21. *A função $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$, dada por*

$$d(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j},$$

é uma distância em Σ_2.

Demonstração. Inicialmente, observamos que a função d é bem definida pois

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

Além disso, é fácil verificar que as propriedades de uma distância são válidas em d, isto é,

(a) $d(s,t) \geq 0$

(b) $d(s,t) = 0$ se e somente se $s = t$

(c) $d(s,t) = d(t,s)$

(d) $d(s,t) \leq d(s,r) + d(r,t)$

para todo $r, s, t \in \Sigma_2$. Portando, d é uma distância e a afirmação está provada. □

Proposição 2.22. *Sejam $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \dots)$ e $t = (t_0\, t_1\, t_2\, \dots)$ elementos de Σ_2.*

1. *Se $s_j = t_j$ para todo $0 \leq j \leq n$, então $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$.*

2. *Se $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$, então $s_j = t_j$ para todo $0 \leq j \leq n$.*

Demonstração. Suponha que $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$. Desse modo,

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

Por outro lado, se $s_i \neq t_i$ para algum $0 \leq i \leq n$, então

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n}$$

Portanto, se $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, concluímos que $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$. □

Definição 2.23. A função $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, dada por $\sigma(s_0\, s_1\, s_2\, \dots) = (s_1\, s_2\, s_3\, \dots)$, é chamada de *função shift.*

Proposição 2.24. *σ é contínua.*

Demonstração. Sejam $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \dots) \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Se $t = (t_0\, t_1\, t_2\, \dots) \in \Sigma_2$ e $d(s,t) < \frac{1}{2^{n+1}}$, então $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n+1$, de acordo com a Proposição 2.22. Como $\sigma(s) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ e $\sigma(t) = (t_1 t_2 t_3 \dots)$, temos que as primeiras $n+1$ entradas de $\sigma(s)$ e $\sigma(t)$ são iguais. Novamente, utilizando a Proposição 2.22, temos que $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Como s é um ponto arbitrário em Σ_2, concluímos que σ é contínua. □

Proposição 2.25. *1. existem 2^n pontos periódicos de período n.*

2. existe um ponto cuja órbita é densa.

3. o conjunto dos pontos periódicos é denso.

Demonstração. 1. Se $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \dots)$ é um ponto periódico com período n, então

$$\sigma^k(\sigma^n(s)) = (s_{n+k} s_{n+k+1} s_{n+k+2} \dots) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots) = \sigma^k(s)$$

para todo $k \geq 0$. Desse modo, s é formado pela repetição das entradas $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem 2^n sequências distintas para $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ e, portanto, a afirmação está provada.

2. Considere o ponto $s^* = (0\,1\,00\,01\,10\,11\,000\,001 \dots)$ formado por todos os blocos de tamanho 1, depois por todos os blocos de tamanho 2, e assim sucessivamente.

   Sejam $s \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. É fácil ver que existe $k \geq 0$ de modo que $\sigma^k(s^*)$ e s são iguais nas primeiras $n+1$ entradas. De acordo com a Proposição 2.22, $d(s, \sigma^k(s^*)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, a afirmação está provada.

3. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Considere o ponto periódico t com período $n+1$ formado pela repetição da sequência $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$. De acordo com a Proposição 2.22, $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, a afirmação está provada.

□

3 Teorema de Sharkovsky

Definição 3.1. Se $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ são intervalos fechados, $n > 1$,

1. dizemos que I_0 *cobre* I_1, e denotamos por $I_0 \longrightarrow I_1$, se $f(I_0) \supset I_1$.

2. dizemos que $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ *é um caminho entre* I_0 *e* I_{n-1}, e denotamos por $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1}$, se $f(I_i) \supset I_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-2$.

3. dizemos que $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ *é um ciclo entre* I_0 *e* I_{n-1}, e denotamos por $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$, se $f(I_i) \supset I_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-2$, e $f(I_{n-1}) \supset I_0$.

Lema 3.2. *Se $I_0 \longrightarrow I_1$, então $f(I_0') = I_1$ para algum intervalo fechado $I_0' \subset I_1$.*

Demonstração. Se $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [c, d]$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existem $p, q \in I_0$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$. Suponha que $p \leq q$ e defina $I_0' = [a', b']$, onde

$$b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\} \text{ e } a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$$

Sendo f contínua temos que $f(a') = c$ e $f(b') = d$ e, desse modo, $f(I_0') \supset I_1$. Se $f(x) < c$ para algum $x \in I_0'$, existe $y \in [x, b']$ tal que $f(y) = c$, o que é um absurdo pois nesse caso $y > a'$. Absurdo análogo ocorre se $f(x) > d$ para algum $x \in I_0'$. Portanto, $f(I_0') = I_1$. □

Lema 3.3. *Se $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow J_0$, então existe $p \in J_0$ tal que $f^k(p) \in J_k$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$, e $f^n(p) = p$.*

Demonstração. De acordo com as hipóteses e com a Proposição anterior, temos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned}
J_0 \longrightarrow J_1 \Rightarrow &\text{ existe } J_0' \subset J_0 \text{ tal que } f(J_0') = J_1 \\
J_1 \longrightarrow J_2 \Rightarrow &\text{ existe } J_1' \subset J_0' \text{ tal que } f^2(J_1') = J_2 \\
&\vdots \\
J_{n-2} \longrightarrow J_{n-1} \Rightarrow &\text{ existe } J_{n-2}' \subset J_{n-3}' \text{ tal que } f^{n-1}(J_{n-2}') = J_{n-1} \\
J_{n-1} \longrightarrow J_0 \Rightarrow &\text{ existe } J_{n-1}' \subset J_{n-2}' \text{ tal que } f^n(J_{n-1}') = J_0
\end{aligned}$$

Construímos então uma sequência de n intervalos fechados $J_0 \supset J_0' \supset J_1' \supset \cdots \supset J_{n-1}'$ tal que $f^k(J_{k-1}') = J_k$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$, e $f^n(J_{n-1}') = J_0$. Como $J_0 \supset J_{n-1}'$, existe $p \in J_{n-1}'$ tal que $f^n(p) = p$. Em particular, $p \in J_0$ e $f^k(p) \in J_k$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$. □

Teorema 3.4. *Se f admite ponto periódico de período principal 3, então f admite ponto periódico de período principal n, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Sejam p um ponto periódico de período principal 3 e $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de p e suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$. O outro caso possível, em que $f(p_1) = p_3$ e $f(p_3) = p_2$, é demonstrado de maneira análoga. Definindo $I_1 = [p_1, p_2]$ e $I_2 = [p_2, p_3]$, temos que $I_1 \longrightarrow I_2$, $I_2 \longrightarrow I_1$ e $I_2 \longrightarrow I_2$.

(a) $n = 1$: Como $I_2 \longrightarrow I_2$, existe $p \in I_2$ tal que $f(p) = p$.

(b) $n = 2$: Como $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1$, existe $p \in I_1$ tal que $f(p) \in I_2$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, o que é um absurdo pois p_2 possui período principal 3. Desse modo, o período principal de p é 2.

(c) $n > 3$: Se $I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2$ é um ciclo de tamanho n, existe $p \in I_2$ tal que $f^k(p) \in I_2$, para todo $k = 1, \ldots, n-2$, $f^{n-1}(p) \in I_1$ e $f^n(p) = p$. Se $f^{n-1}(p) = p$, então $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, o que é um absurdo pois implica que $f(p) = p_3 \in I_1$. Se $f^k(p) = p$ para algum $k = 1, \ldots, n-2$ implica que $f^k(p) \in I_2$, para todo $k \geq 1$. Em particular, $f^{n-1}(p) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ e, portanto, $p = f^n(p) = p_3$, o que é um absurdo pois implica que $f(p) = p_1 \in I_2$.

Desse modo, o resultado está provado. $\square$

Definição 3.5. O Ordenação de Sharkovsky é definida por

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots \rhd 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd 2 \cdot 7 \rhd \cdots \rhd 2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd 2^2 \cdot 7 \rhd \cdots \rhd 2^n \cdot 3 \rhd 2^n \cdot 5 \rhd 2^n \cdot 7 \rhd \cdots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$$

ou seja, é formada inicialmente pelos ímpares maiores que 1 em ordem crescente; depois pelos ímpares maiores que 1, multiplicados por 2, em ordem crescente; depois pelos ímpares maiores que 1, multiplicados por 2^2, em ordem crescente; e assim sucessivamente. Por fim, a ordem é formada por todas as potências de 2 em ordem decrescente.

Teorema 3.6 (Sharkovsky)**.** *Se f admite ponto de período principal n, então f admite ponto de período principal m, para todo $m \lhd n$.*

Teorema 3.7. *Para todo $n \geq 1$ existe uma função f que admite ponto periódico de período principal n e que não admite ponto de período principal m se $m \rhd n$.*

Demonstração. Seja $T : [0,1] \to [0,1]$ a função dada por $T(x) = 1 - |2x - 1|$ e considere a família de funções $T_h(x) = \min\{h, T(x)\}$ definidas em $[0,1]$, com o parâmetro h variando em $[0,1]$. Observe que $T_1 = T$, pois $T(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Além disso, observando o gráfico de T_1 concluímos que a função possui 2^k pontos periódicos de período k e assim podemos definir, para cada $k \geq 1$,

$$h(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } n \text{ de } T_1\}\}$$

A ideia principal da prova consiste no fato de que $h(k)$ desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de $T_{h(k)}$. As seguintes afirmações tornarão preciso esse fato.

(a) Se $\mathcal{O} \subset [0, h)$ é uma órbita de T_h, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1.

Se $p \in \mathcal{O}$ então $T_h(p) \in [0, h)$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$, ou seja, T_h e T_1 coincidem em $\mathcal{O}$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1.

(b) Se $\mathcal{O} \subset [0, h]$ é uma órbita de T_1, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_h.

Se $p \in \mathcal{O}$ então $T_1(p) \in [0, h]$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = \min\{h, T_1(p)\} = T_1(p)$, ou seja, T_h e T_1 coincidem em $\mathcal{O}$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_h.

(c) $T_{h(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \in [0, h(k))$ de tamanho l se e somente se $h(k) > h(l)$.

Se $T_{h(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \in [0, h(k))$ de tamanho l, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1 por (a) e, pela definição de $h(l)$, concluímos que $h(l) < h(k)$.

Por outro lado, se $h(l) < h(k)$, então T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(l)] \subset [0, h(k)]$ de tamanho l e, desse modo, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_{h(k)}$ por (b).

(d) A órbita de T_1 que contém $h(k)$ é uma órbita de tamanho k de $T_{h(k)}$. Além disso, todas as outras órbitas de $T_{h(k)}$ estão em $[0, h(k))$.

Pela definição de $h(k)$, T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(k)]$ de tamanho k e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_{h(k)}$ por (b).

Para demonstrar a segunda parte, basta observar que $h(k)$ é o valor máximo de $T_{h(k)}$ e, desse modo, toda órbita de $T_{h(k)}$ está contida em $[0, h(k)]$. Em particular, se a órbita não contém $h(k)$, então ela está contida em $[0, h(k))$.

(e) $k \triangleright l$ se o somente se $h(k) > h(l)$.

Suponha que $k \triangleright l$. Por (d), $T_{h(k)}$ possui uma órbita de tamanho k. De acordo com o Teorema de Sharkovsky e com (d), $T_{h(k)}$ admite uma órbita de tamanho l contida em $[0, h(k))$. Desse modo, $h(k) > h(l)$ por (c).

Por outro lado, suponha que $h(k) > h(l)$. Caso $l \triangleright k$, a demonstração no parágrafo anterior implicaria que $h(k) < h(l)$, contrariando a hipótese. Desse modo, $k \triangleright l$.

Assim, para cada $n \geq 1$, $T_{h(n)}$ possui órbita de tamanho n. Além disso, se $m \triangleright n$ então $h(m) > h(n)$ por (e) e, portanto, $T_{h(n)}$ não possui órbita de tamanho m por (c). $\square$

4 Derivada de Schwarz

Definição 4.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$. A derivada de Schwarz de f é a função $\mathcal{S}f$ definida por

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial f(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial f(x)}\right)^2$$

para todo x tal que $\partial f(x) \neq 0$.

Lema 4.2. *Se $\mathcal{S}f < 0$, então $\mathcal{S}f^j < 0$ para todo $j \geq 1$.*

Demonstração. Se $\mathcal{S}f < 0$ e $\mathcal{S}g < 0$, vamos provar que $\mathcal{S}(f \circ g) < 0$. Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\
(f \circ g)''(x) &= f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) \\
(f \circ g)'''(x) &= f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g'''(x)
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(f\circ g)(x) &= \frac{(f\circ g)'''(x)}{(f\circ g)'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{(f\circ g)''(x)}{(f\circ g)'(x)}\right)^2 \\ &= \frac{f'''(g(x))(g'(x))^2}{f'(g(x))} + 3\frac{f''(g(x))g''(x)}{f'(g(x))} + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(g(x))g'(x)}{f'(g(x))} + \frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2 \\ &= \mathcal{S}f(g(x))(g'(x))^2 + \mathcal{S}g(x) < 0\end{aligned}$$

para todo x tal que $(f\circ g)'(x) \neq 0$. Por indução, $S_{f^n} < 0$ para todo $n \geq 1$. $\square$

Lema 4.3. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e x_0 é ponto de mínimo local de f', então $f'(x_0) \leq 0$.*

Demonstração. Se $f'(x_0) \neq 0$, então $\mathcal{S}f(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{3}{2}\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} < 0$. Sendo x_0 ponto de mínimo local de f', temos que $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \geq 0$. Portanto, $f'(x_0) < 0$. $\square$

Lema 4.4. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c$ são pontos fixos de f, com $f'(b) \leq 1$, então f possui ponto crítico em (a, c).*

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, existem $r \in (a, b)$ e $s \in (b, c)$ tais que $f'(r) = f'(s) = 1$. Sendo f' contínua, f' restrita ao intervalo $[r, s]$ possui mínimo global. Como $b \in (r, s)$ e $f'(b) \leq 1$, temos que f' possui mínimo local em (r, s). Utilizando Lema anterior e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída. $\square$

Lema 4.5. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c < d$ são pontos fixos de f, então f possui ponto crítico em (a, d).*

Demonstração. Se $f'(b) \leq 1$ ou $f'(c) \leq 1$, o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se $f'(b) > 1$ e $f'(c) > 1$, existem $r, t \in (b, c)$ tais que $r < t$, $f(r) > r$ e $f(t) < t$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $s \in (r, t)$ tal que $f'(s) < 1$. Portanto, f' possui mínimo local em (b, c). Utilizando Lema 4.3 e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída. $\square$

Lema 4.6. *Se f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos críticos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, f possui ponto crítico entre dois elementos de $f^{-1}(c)$. Como f possui finitos pontos críticos, $f^{-1}(c)$ é finito. Além disso, se $f^{-k}(c)$ é finito, então $f^{-(k+1)}(c) = \{x \in \mathbb{R} : f(f^k(x)) = c\}$ é finito pois $f^{-1}(c)$ é finito e, por hipótese de indução, $f^{-k}(c_i)$ é finito para cada $c_i \in f^{-1}(c)$. Portanto, $f^{-n}(c)$ é finito para todo $n \geq 1$.

Temos que $(f^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x)) = 0$ se e somente se $f^k(x)$ é ponto crítico de f para algum $k = 1, \ldots, n-1$. Assim, o conjunto de pontos críticos de f^n é finito pois é dado pela união dos conjuntos $\cup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(c_i)$, onde c_i é ponto crítico de f. $\square$

Observe que o Lema anterior, ao contrário dos outros, não exige que $\mathcal{S}f < 0$.

Teorema 4.7 (Singer). *Se $\mathcal{S}f < 0$ e f possui n pontos críticos, então f possui no máximo $n+2$ órbitas periódicas não repulsoras.*

Demonstração. Sejam p um ponto periódico não repulsor de f de período m e $g = f^m$. Desse modo, p é um ponto fixo não repulsor de g, ou seja, $g(p) = p$ e $|g'(p)| \leq 1$. Seja K a componente conexa de $B(p) = \{x : \lim_{k\to\infty} g^k(x) = p\}$ que contém p.

Suponha que K é limitado e $|g'(p)| < 1$. Vamos mostrar que K é aberto, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K.

Como $|g'(p)| < 1$, p é um ponto atrator e, portanto, existe uma vizinhança V de p contida em $B(p)$. Além disso, $g(\bar{V}) \subset V$. Sendo g contínua, $g^{-n}(V)$ é um aberto que contém p para todo $n \geq 1$. Como $g^n(p) = p \in V$, considere $g^{-n}(V)^*$ a componente conexa de $g^{-n}(V)$ que contém p.

Observe que, se $x \in K$, existe $n \geq 1$ tal que $g^n(x) \in V$. Desse modo, podemos escrever $K = \cup_{n=0}^{\infty} g^{-n}(V)^*$. Portanto, K é aberto e, por construção, $g(K) \subset K$.

Seja a um ponto extremo de K e suponha que $g(a) \in K$. Desse modo, existe uma vizinhança V de $g(a)$ contida em K. Sendo g contínua, $g^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a contida $B(p)$, o que contraria o fato de K ser a componente conexa de $B(p)$ que contém p. Como $g(K) \subset K$ e g é contínua, concluímos que g preserva os pontos extremos de K.

Desse modo, escrevendo $K = (a, b)$, ocorre um dos três casos abaixo. Vamos mostrar que em cada caso, g possui ponto crítico em K. Observe que $\mathcal{S}g < 0$.

a) Se $g(a) = a$ e $g(b) = b$, g possui ponto crítico em K pelo Lema 4.4.

b) Se $g(a) = b$ e $g(b) = a$, considerando $h = g^2$ e utilizando novamente o Lema 4.4, h possui ponto crítico em K. Como $g(K) \subset K$, g possui ponto crítico em K.

c) Se $g(a) = g(b)$, g possui ponto crítico em K pelo Teorema do Valor Médio.

Suponha que K é limitado e $|g'(p)| = 1$. Pelo Lema anterior, g possui finitos pontos fixos e, portanto, são isolados.

Se $g'(p) = 1$ e, para x numa vizinhança de p, $g(x) > x$ quando $x > p$ e $g(x) < x$ quando $x < p$, então $g'(x^*) > 0$, para x^* próximo de p, é um mínimo local de g' maior que zero, o que contradiz o Lema 4.3. Se $g'(p) = -1$, basta considerar $h = g^2$ e obter o mesmo resultado. Portanto, p é atrator em pelo menos um dos lados. Desse modo, K é um intervalo não trivial, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K. Assim, é possível concluir de maneira análoga que g possui ponto crítico em K.

Pela Regra da Cadeia, se g possui ponto crítico $x_0 \in K$, então $f^i(x_0)$ é ponto crítico de f para algum $i = 0, \ldots, m-1$. Desse modo, se p é um ponto periódico não repulsor de f cujo intervalo associado K é limitado, então K possui pelo menos um ponto crítico e, como existem n pontos críticos, existem no máximo n intervalos K limitados. Não é possível obter a mesma conclusão se K não é limitado, mas observando que existem no máximo dois intervalos desse tipo, a demonstração está concluída. □

Corolário 4.8. $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $\mu > 0$, *possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.*

Demonstração. Observe que F_μ possui um único ponto crítico em $\frac{1}{2}$. Pelo Teorema de Singer, F_μ possui no máximo 3 órbitas periódicas não repulsoras. Se p é ponto fixo de F_μ e observando que $\lim_{n\to\infty} |F_\mu^n(x)| = \infty$ quando $|x|$ é suficientemente grande, concluímos que $B(p)$ é limitado. Portanto, F_μ possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora. □

5 Bifurcação

Ao longo de seção, f_λ representará uma família parametrizada de funções no parâmetro λ de modo que a função

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x),$$

definida num aberto de $\mathbb{R}^2$, seja de classe $\mathcal{C}^\infty$ nas variáveis x e λ.

Teorema 5.1. *Seja f_λ uma família parametrizada de funções. Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$
2. $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$

Então existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0, respectivamente, e uma função $p : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

1. $p(\lambda_0) = x_0$
2. $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ *para todo* $\lambda \in I$

Além disso, f_λ não possui outros pontos fixos em J.

Demonstração. Seja $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Observe que x é ponto fixo de f_λ se e somente se $G(x, \lambda) = 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, como $G(x_0, \lambda_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0,$$

existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0, respectivamente, e uma função $p : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $p(\lambda_0) = x_0$ e $G(p(\lambda), \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in I$.

Além disso, para cada $\lambda \in I$ está associado um único $x \in J$ e, portanto, $x \in J$ e $G(x, \lambda) = 0$ se e somente se $x = p(\lambda)$. □

De acordo com o Teorema anterior, se x_0 é um ponto fixo hiperbólico de f_{λ_0}, então f_λ possui um único ponto fixo numa vizinhança de x_0 para cada λ numa vizinhança de λ_0.

Utilizando a notação do Teorema anterior, considere a função $g_\lambda(x) = f_\lambda(x + p(\lambda)) - p(\lambda)$. Observe que $g_\lambda(0) = f(p(\lambda)) - p(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in I$, ou seja, 0 é ponto fixo de g_λ para todo $\lambda \in I$. Além disso, f_λ e g_λ são topologicamente conjugadas por $h_\lambda(x) = x - p(\lambda)$.

Teorema 5.2 (Bifurcação Tangente)**.** *Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(0) = 0$
2. $f'_{\lambda_0}(0) = 1$
3. $f''_{\lambda_0}(0) \neq 0$
4. $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

Então existem uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

1. $p(0) = \lambda_0$

2. $f_{p(x)}(x) = x$

Além disso, $p'(0) = 0$ *e* $p''(0) \neq 0$.

Demonstração. Considere a função $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Observe que x é um ponto fixo de f_λ se e somente se $G(x, \lambda) = 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, como $G(0, \lambda_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0,$$

existem uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ tais que $p(0) = \lambda_0$ e $G(x, p(x)) = 0$ para todo $x \in I$.

Além disso, pela Regra da Cadeia, é válido que

$$p'(0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = -\frac{f'_{\lambda_0}(0) - 1}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)} = 0$$

e

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) - \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \lambda}(0, \lambda_0)}{\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)\right)^2} = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \lambda_0)}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)} \neq 0$$

□

No Teorema anterior, se $p''(0) > 0$, então a concavidade de p é para cima. Esboçando o gráfico de p, podemos observar que f não possui pontos fixos para $\lambda < \lambda_0$, possui um único ponto fixo para $\lambda = \lambda_0$ e possui dois pontos fixos para $\lambda > \lambda_0$. Se $p''(0) < 0$, a concavidade de p é para baixo e a conclusão é análoga, invertendo os sentidos.

Teorema 5.3 (Bifurcação com Duplicação de Período)**.** *Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(0) = 0$ *para todo* λ *numa vizinhança de* λ_0

2. $f'_{\lambda_0}(0) = -1$

3. $\frac{\partial (f_\lambda^2)'}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

4. $S_{f_{\lambda_0}}(0) \neq 0$

Então existem uma vizinhança I *de* 0 *e uma função* $p : I \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *tais que*

1. $p(0) = \lambda_0$

2. $f_{p(x)}(x) \neq x$ *para todo* $x \in I$

3. $f^2_{p(x)}(x) = x$ *para todo* $x \in I$

Além disso, $p'(0) = 0$ *e* $p''(0) \neq 0$.

Demonstração. Seja $G(x, \lambda) = f_\lambda^2(x) - x$. Sendo $G(0, \lambda) = 0$ para todo λ numa vizinhança de λ_0, temos que

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = 0$$

e, portanto, não podemos utilizar o Teorema da Função Implícita diretamente. Seja

$$H(x, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{G(x, \lambda)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Desse modo, H é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e são válidas as igualdades

(I) $H(0, \lambda_0) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0) = (f_{\lambda_0}^2)'(0) - 1 = f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(0)) f'_{\lambda_0}(0) - 1 = 0$

(II) $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda)\right)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial}{\partial \lambda}((f_\lambda^2)'(0) - 1)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial (f_\lambda^2)'}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

(III) $\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)$

(IV) $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) = \frac{1}{3}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0)$

Para provar as igualdades (III) e (IV), observe que podemos escrever

$$G(x, \lambda) = G(0, \lambda) + x\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda) + \frac{x^3}{6}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda) + \cdots$$

para todo x numa vizinhança de 0 e para λ fixado numa vizinhança de λ_0, utilizando a Série de Taylor. Sendo $G(0, \lambda) = 0$, podemos escrever

$$H(x, \lambda) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) + \frac{x}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda) + \frac{x^2}{6}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda) + \cdots$$

para $x \neq 0$ nessa vizinhança. Portanto, H é de classe $\mathcal{C}^\infty$. Escrevendo a Série de Taylor de H numa vizinhança de 0 e igualando os termos correspondentes, concluímos que $\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)$ e $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0)$.

Pelas igualdades (I) e (II), e pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que $p(0) = \lambda_0$ e $H(x, p(x)) = 0$ para todo $x \in I$. Em particular, se $x \neq 0$,

$$0 = \frac{G(x, p(x))}{x} = \frac{f_{p(x)}^2(x) - x}{x}$$

ou seja, $f_{p(x)}^2(x) = x$ para todo $x \in I$. Além disso, pelo Teorema 5.2, f_λ possui um único ponto fixo numa vizinhança de 0 e, portanto, podemos considerar que $f_{p(x)}(x) \neq x$ para todo $x \in I$, $x \neq 0$.

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda_0) &= (f_{\lambda_0})''(x)|_{x=0} \\
&= [f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\
&= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)]|_{x=0} \\
&= f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(0)) - f''_{\lambda_0}(0) = 0
\end{aligned}$$

temos que

$$p'(0) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = 0$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda_0) &= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\
&= [f'''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^3 + 2f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)f'_{\lambda_0}(x) + f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)f''_{\lambda_0}(x) \\
&\quad + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'''_{\lambda_0}(x)]|_{x=0} \\
&= f'''_{\lambda_0}(0)(f'_{\lambda_0}(0))^3 + 2(f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + (f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + f'_{\lambda_0}(0)f'''_{\lambda_0}(0) \\
&= -2f'''_{\lambda_0}(0) - 3(f''_{\lambda_0}(0))^2 \\
&= 2\frac{f'''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)} - 3\left(\frac{f''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)}\right)^2 = 2S_{f_{\lambda_0}}(0)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,\lambda_0)\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)}{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)\right)^2} = -\frac{1}{3}\frac{\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = -\frac{2}{3}\frac{S_{f_{\lambda_0}}(0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} \neq 0.$$

□

6 Subshift

Seja $N \geq 2$. Definimos o conjunto Σ_N formado pelas sequências de números naturais limitados entre 1 e N. Precisamente,

$$\Sigma_N = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : 1 \leq x_n \leq N \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Definimos também a função $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \to \mathbb{R}$ que é dada por

$$d_N(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i},$$

onde $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ e $y = (y_n)_{n=0}^{\infty}$. Como $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} < \infty$, temos que d_N está bem definida.

Proposição 6.1. *(Σ_N, d_N) é um espaço métrico.*

Demonstração. Se $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}, y = (y_n)_{n=0}^{\infty}, z = (z_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$, então

1. $d_N(x,y) \geq 0$, pois $|x_i - y_i| \geq 0$ para todo $i \geq 0$.

2. $d_N(x,y) = d_N(y,x)$, pois $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ para todo $i \geq 0$.

3. $d_N(x,z) \leq d_N(x,y) + d_N(y,z)$, pois $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ para todo $i \geq 0$.

Desse modo, d_N é uma distância em Σ_N e (Σ_N, d_N) é um espaço métrico. □

Proposição 6.2. *Sejam $x = (x_n)_{n=0}^\infty, y = (y_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$.*

1. Se $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, então $d_N(x,y) \leq \frac{1}{N^k}$.

2. Se $d_N(x,y) < \frac{1}{N^k}$, então $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$.

Demonstração. 1. Se $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, então

$$d_N(x,y) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} = \frac{N-1}{N^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{N-1}{N^{k+1}} \frac{N}{N-1} = \frac{1}{N^k}.$$

2. Se $x_j \neq y_j$ para algum $0 \leq j \leq k$, então

$$d_N(x,y) \geq \frac{1}{N^j} \geq \frac{1}{N^k}.$$

□

Definimos a função shift $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ que é dada por $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^\infty$ para todo $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$, isto é, $\sigma(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

Proposição 6.3. *σ é contínua.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$. Seja $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$ e defina $\delta = \frac{1}{N^{k+1}}$.

Pela Proposição anterior, se $y = (y_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ e $d_N(x,y) < \delta$, então $x_i = y_i$ para todo $i = 0, \dots, k+1$. Desse modo, $\sigma(x)$ e $\sigma(y)$ coincidem nas k primeiras entradas. Utilizando a Proposição anterior novamente, concluímos que $d_N(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$. □

Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ uma matriz quadrada de ordem N tal que $a_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $1 \leq i,j \leq N$. Dizemos que A é uma matriz de transição. Definimos o conjunto Σ_A como

$$\Sigma_A = \{(x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N : a_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \geq 0\}.$$

Seja $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_A$. Observando que $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 1$, temos que $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^\infty \in \Sigma_A$. Desse modo, podemos definir a função $\sigma_A : \Sigma_A \to \Sigma_A$ como sendo a restrição de σ em Σ_A. Dizemos que σ_A é o subshift definido por A.

Proposição 6.4. *Σ_A é um subconjunto fechado de Σ_N.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=0}^\infty$ uma sequência de elementos em Σ_A convergente para $x = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$. Observe que a sequência $(x_n)_{n=0}^\infty$ é uma sequência de sequências, pois cada x_n é elemento de Σ_N.

Suponha que $x \notin \Sigma_A$. Então, existe $j \geq 0$ tal que $a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Por outro lado, pela definição de convergência, existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{j+1}}$ e, portanto, as $j+2$ primeiras entradas de x e x_{n_0} são iguais. Escrevendo $x_{n_0} = (\eta_n)_{n=0}^{\infty}$, concluímos que $a_{\eta_j \eta_{j+1}} = a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Absurdo, pois $x_{n_0} \in \Sigma_A$. □

No restante dessa seção vamos estudar a dinâmica da função quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, onde o parâmetro $\mu = 3.839$ está fixado. Será omitido μ na notação da função e escreveremos apenas F.

Sejam $a = 0.149888$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $I = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Através de cálculos é possível mostrar que $F^3(I) \subset I$ e $|(F^3)'(I)| \leq |(F^3)'(a-\varepsilon)| < 1$ e, portanto, o intervalo I possui um ponto periódico atrator de F de período 3. Se a_1, a_2 e a_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$a_1 \simeq 0.149888,\ a_2 \simeq 0.489149 \text{ e } a_3 \simeq 0.959299.$$

De acordo com o Teorema de Sharkovsky, F possui infinitos pontos periódicos. Além disso, de acordo com o Teorema de Singer, essa é a única órbita atratora de F.

De modo análogo, concluímos que F possui outra órbita de tamanho 3. Se b_1, b_2 e b_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040,\ b_2 \simeq 0.539247 \text{ e } b_3 \simeq 0.953837.$$

Observando o gráfico de F^3, concluímos que para cada b_i, existe b_i' no lado oposto de b_i em relação ao ponto a_i tal que $F^3(b_i') = b_i$. Defina $A_1 = (b_1', b_1)$, $A_2 = (b_2', b_2)$ e $A_3 = (b_3, b_3')$. Cada A_i é exatamente o intervalo maximal contendo a_i utilizado na demonstração do Teorema de Singer.

Figura: Gráfico de F^3 com os pontos a_1, a_2 e a_3 assinalados.

Sendo F^3 simétrica em relação ao ponto $\frac{1}{2}$, temos que $F(b_2') = F(b_2) = b_3$. Além disso, $F(b_1') = b_2'$ e $F(b_3') = b_1'$.

Desse modo, F mapeia, de forma monótona, A_1 em A_2 e A_3 em A_1. Observando que o máximo de F em A_2 é $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0.95975 < b_3'$, concluímos que $F(A_2) \subset A_3$.

Sabemos que se $x \notin [0,1]$, então $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = -\infty$. Além disso, o único ponto periódico de A_i é a_i e todos os pontos em A_i tendem para a órbita de a_i. Desse modo, todos os outros pontos periódicos de F residem no complemento de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ em $[0,1]$, que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam $I_0 = [0, b_1']$, $I_1 = [b_1, b_2']$, $I_2 = [b_2, b_3]$ e $I_3 = [b_3', 1]$ tais intervalos. A Proposição a seguir nos permite dizer mais.

Proposição 6.5. *Se $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$ é um ponto periódico de F, então $x \in I_1 \cup I_2$.*

Demonstração. Observando que F é monótona em cada I_k, temos que $F(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$, $F(I_1) = I_2$, $F(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$ e $F(I_3) = I_0$. Desse modo, se $x \in I_1 \cup I_2$ é periódico, então órbita de x permanece em $I_1 \cup I_2$.

Por outro lado, se $x \in I_0 - \{0\}$, existe um menor $n \geq 1$ tal que $F^n(x) \notin I_0$. Se $F^n(x) \in A_1$, então x não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de A_1 é a_1. Se $F^n(x) \in I_1$, então

x não pode ser periódico, pois caso contrário a órbita de x estaria contida em $I_1 \cup I_2$ e nunca retornaria para I_0.

Finalmente, se $x \in I_3$, então $F(x) \in I_0$ e a análise segue como no parágrafo anterior. $\square$

Defina o conjunto Λ como

$$\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2 : F^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de F estão em Λ, com exceção dos pontos 0, a_1, a_2 e a_3.

Lema 6.6. *Existe $N \geq 1$ tal que $|(F^n)'(\Lambda)| > 1$ para todo $n \geq N$.*

Demonstração. Como $F'' < 0$, temos que F' é estritamente decrescente. Sendo $F'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, concluímos que A_2 é uma vizinhança da única raiz de F'. Além disso, $|(F^3)'(b_2)| = |(F^3)'(b_2')| \simeq 0.3$. Desse modo, $|F'(I_1 \cup I_2)| \geq \nu$ para algum $\nu \in (0, 1)$.

Observando o gráfico de F^3, concluímos que o subconjunto de $I_1 \cup I_2$ no qual $|F'| \leq 1$ é formado por três intervalos fechados. Sejam B_1, B_2 e B_3 tais intervalos, numerados da esquerda para direita. Utilizando a simetria do gráfico de F^3 e o fato de que $(F^3)'(b_1) > 1$, temos que $F^3(B_3) \subset A_1$ e, portanto, $B_3 \cap \Lambda = \emptyset$.

Por outro lado, $B_2 \subset [0.661, 0.683]$, já que $(F^3)'(0.661) > 1$ e $(F^3)'(0.683) < -1$. Desse modo, $F(B_2) \subset A_3$. Utilizando novamente a simetria do gráfico de F^3, concluímos que $F(B_1) \subset A_3$. Portanto, $B_1 \cap \Lambda = \emptyset$ e $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$. Assim, $|(F^3)'(\Lambda)| \geq \lambda$ para algum $\lambda > 1$. Observe que se $x \in \Lambda$ e $L \geq 1$, então

$$\left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| = \prod_{i=0}^{L-1} \left|\left(F^3\right)'\left(F^{3i}(x)\right)\right| \geq \lambda^L.$$

Finalmente, sejam $x \in \Lambda$ e $K \geq 1$ tal que $\nu^2 \lambda^K > 1$. Se $N = 3K$ e $n \geq N$, podemos escrever $n = 3L + \alpha$, onde $L \geq K$ e $\alpha \in \{0, 1, 2\}$. Desse modo,

i. se $\alpha = 0$, então
$$\left|\left(F^n\right)'(x)\right| = \left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| \geq \lambda^L \geq \lambda^K > 1.$$

ii. se $\alpha = 1$, então
$$\left|\left(F^n\right)'(x)\right| = \left|F'\left(F^{3L}(x)\right)\right| \left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| \geq \nu\lambda^L > \nu^2\lambda^K > 1.$$

iii. se $\alpha = 2$, então
$$\left|\left(F^n\right)'(x)\right| = \left|F'\left(F^{3L+1}(x)\right)\right| \left|F'\left(F^{3L}(x)\right)\right| \left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| \geq \nu^2\lambda^L \geq \nu^2\lambda^K > 1.$$

$\square$

Para as demonstrações dos próximos resultados, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos definir a função $S : \Lambda \to \Sigma_A$ por $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, onde $x_i = 1$ se $F^i(x) \in I_1$ e $x_i = 2$ se $F^i(x) \in I_2$ para todo $i \geq 0$. Observe que está S bem definida, pois $F(I_1) = I_2$ e $F(I_2) \subset I_1 \cup I_2$ e, portanto, $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 0$.

Lema 6.7. *Λ não contém intervalos.*

Demonstração. Suponha que Λ contém algum intervalo e sejam $a, b \in \Lambda$, com $a < b$, tais que $[a, b] \subset \Lambda$. Utilizando a notação do Lema anterior, seja $k \geq N$ tal que $(b-a)\nu^N \lambda^{k-N} > 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\begin{aligned}
|F^k(b) - F^k(a)| &= |(F^k)'(c)|(b-a) \\
&= \left| \prod_{i=0}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| (b-a) \\
&= \left| \prod_{i=0}^{N-1} F'(F^i(c)) \right| \left| \prod_{i=N}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| (b-a) \\
&\geq \nu^N \lambda^{k-N}(b-a) > 1
\end{aligned}$$

e, portanto, $F^k(a)$ ou $F^k(b)$ não é elemento de $[0, 1]$, o que é um absurdo. □

Proposição 6.8. *S é um homeomorfismo.*

Demonstração. i. S é injetora:

Sejam $x, y \in \Lambda$, com $x < y$, e suponha que $S(x) = S(y)$. Desse modo, $F^n(x)$ e $F^n(y)$ está no mesmo lado em relação ao ponto crítico $\frac{1}{2}$ e, portanto, F é monótona no intervalo J_n, cujos pontos extremos são $F^n(x)$ e $F^n(y)$, para todo $n \geq 0$. Desse modo, se $z \in [x, y]$, então $F^n(z) \in J_n \subset I_1 \cup I_2$ para todo $n \geq 0$ e, portanto, $z \in \Lambda$. Mas isso implica que $[x, y] \subset \Lambda$, o que é um absurdo.

ii. S é sobrejetora:

Seja $(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$. Vamos provar que existe $x \in \Lambda$ tal que $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Inicialmente, para cada $n \geq 0$, considere

$$I_{x_0 \cdots x_n} = \{x \in [0, 1] : x \in I_{x_0}, \ldots, F^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

Observe que $x \in I_{x_0 \cdots x_n}$ se, e somente se, $x \in I_{x_0}$ e $F(x) \in \{y \in [0, 1] : y \in I_{x_1}, \ldots, F^{n-1}(y) \in I_{x_n}\}$. Desse modo, $I_{x_0 \cdots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1 \cdots x_n})$.

Assim, por indução, é possível concluir que $I_{x_0 \cdots x_n}$ é um intervalo fechado não vazio. Além disso, $I_{x_0 \cdots x_n} = I_{x_0 \cdots x_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{x_n}) \subset I_{x_0 \cdots x_{n-1}}$.

Desse modo, $(I_{x_0 \cdots x_n})_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de intervalos encaixantes fechados e não vazios e, portanto, existe $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$. Como $F^i(x) \in I_{x_i}$ para todo $i \geq 0$, concluímos que $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Observe que $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$ é único, pois S é injetora.

iii. S é contínua:

Seja $x \in \Lambda$, com $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Sejam também $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$.

Como $I_{x_0\ldots x_k}$ um intervalo fechado e $x \in I_{x_0\ldots x_k}$, tome $\delta > 0$ tal que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \delta$ implica que $y \in I_{x_0\ldots x_k}$. Desse modo, $S(x)$ e $S(y)$ são iguais nas primeiras $k + 1$ entradas e, portanto, $d_N(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$.

□

Teorema 6.9. *$S \circ F|_\Lambda = \sigma_A \circ S$.*

Demonstração. Seja $x \in \Lambda$. Utilizando a notação da Proposição anterior, se $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, então x é o único elemento de $\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0\cdots x_n}$.

Podemos escrever $I_{x_0\ldots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1}) \cap \cdots \cap F^{-n}(I_{x_n})$. Se $x_0 = 1$, então $x_1 = 2$ e, portanto, $F(I_{x_0}) = I_{x_1}$. Se $x_0 = 2$, então $F(I_{x_0}) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$. Em ambos os casos, $F(I_{x_0}) \supset I_{x_1}$ e, desse modo,

$$F(I_{x_0\ldots x_n}) = I_{x_1} \cap \cdots \cap F^{-n+1}(I_{x_n}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S \circ F|_\Lambda(x) &= S(F(\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0\cdots x_n})) \\ &= S(\cap_{n=1}^{\infty} I_{x_1\cdots x_n}) \\ &= (x_n)_{n=1}^{\infty} = \sigma \circ S(x) \end{aligned}$$

□

Proposição 6.10. *Seja A uma matriz de transição de ordem N. Então σ_A possui $Tr(A^k)$ pontos periódicos de período k.*

Demonstração. Observe que $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$ é um ponto periódico de período k de σ se, e somente se, $x_i = x_{i+k}$ para todo $i \geq 0$, ou seja,

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, \ldots).$$

Desse modo, $x \in \Sigma_A$ se, e somente se, $a_{x_0x_1} = a_{x_1x_2} = \cdots = a_{x_{k-1}x_0} = 1$ e, portanto,

$$\begin{cases} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\ldots a_{x_{k-1}x_0} = 1, & \text{se } x \in \Sigma_A \\ a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\ldots a_{x_{k-1}x_0} = 0, & \text{se } x \notin \Sigma_A \end{cases}$$

Assim, a quantidade de pontos periódicos de período k de σ_A é dada por

$$\sum_{1 \leq x_0, \ldots, x_{k-1} \leq N} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\ldots a_{x_{k-1}x_0}.$$

Por outro lado, utilizando a definição de multiplicação de matrizes podemos mostrar por indução que $A^k = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$, onde

$$c_{ij} = \sum_{1 \leq x_1, \ldots, x_{k-1} \leq N} a_{ix_1}a_{x_1x_2}\ldots a_{x_{k-1}j}$$

e, portanto,

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{x_0=1}^{N} c_{x_0x_0} = \sum_{1\le x_0,\ldots,x_{k-1}\le N} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\ldots a_{x_{k-1}x_0}.$$

□

7 Teoria Kneading

Definição 7.1. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função de classe $\mathcal{C}^1([0,1])$. f é unimodal se as seguintes condições são válidas:

i. $f(0) = f(1) = 0$.

ii. f possui um único ponto crítico em $(0,1)$.

No restante dessa seção, fixaremos uma função f unimodal cujo único ponto crítico em $(0,1)$ será denotado por c. Além disso, fixaremos um símbolo C de modo que o conjunto $\{0, C, 1\}$ seja ordenado pelas relações $0 < C$, $C < 1$ e $0 < 1$.

Definição 7.2. Seja $x \in [0,1]$. O itinerário de x por f é a sequência infinita $S(x) = (s_0\, s_1\, s_2\, \ldots)$, onde

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{se } f^i(x) < c \\ C & \text{se } f^i(x) = c \\ 1 & \text{se } f^i(x) > c. \end{cases}$$

Definição 7.3. A sequência kneading de f é a sequência $K(f) = S(f(c))$, ou seja, é o itinerário de $f(c)$.

Seja

$$\Sigma = \{(s_0\, s_1\, s_2\, \ldots) : s_n \in \{0, C, 1\} \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Se $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \ldots)$ e $t = (t_0\, t_1\, t_2\, \ldots)$ são elementos de Σ, dizemos que s e t possuem discrepância n quando $s_i = t_i$ para todo $0 \le i < n$ e $s_n \neq t_n$. Além disso, definimos $\tau_n(s)$ como a cardinalidade do conjunto $\{s_j : 0 \le j < n \text{ e } s_j = 1\}$. Com isso, podemos definir uma ordem em Σ.

Definição 7.4. Sejam $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \ldots)$ e $t = (t_0\, t_1\, t_2\, \ldots)$ elementos de Σ. Suponha que s e t possuem discrepância n. Dizemos que $s \prec t$ se alguma das seguintes condições é válida:

i. $\tau_{n-1}(s)$ é par e $s_n < t_n$.

ii. $\tau_{n-1}(s)$ é ímpar e $s_n > t_n$.

O seguinte teorema nos mostra as semelhanças da ordem $\prec$ em Σ com a ordem usual na reta real.

Teorema 7.5. *Sejam $x, y \in [0,1]$.*

1. Se $S(x) \prec S(y)$, então $x < y$.

2. Se $x < y$, então $S(x) \preceq S(y)$.

Demonstração. O primeiro item será provado por indução em n, onde $S(x)$ e $S(y)$ são possuem discrepância n e, por contrapositiva, o segundo item segue imediatamente do primeiro.

Sejam $S(x) = (s_0\, s_1\, s_2\, \dots)$ e $S(y) = (t_0\, t_1\, t_2\, \dots)$ tais que $S(x) \prec S(y)$. Se $S(x)$ e $S(y)$ possuem discrepância 0, então $s_0 < t_0$ e, portanto, $x < y$. Suponha que essa propriedade é válida quando as sequências possuem discrepância $n - 1$.

Se $S(x)$ e $S(y)$ possuem discrepância $n \geq 1$, então $s_0 = t_0$ e as sequências

$$S(f(x)) = (s_1\, s_2\, s_3\, \dots) \;\text{ e }\; S(f(y)) = (t_1\, t_2\, t_3\, \dots)$$

possuem discrepância $n-1$. Se $s_0 = 0$, então $S(f(x)) \prec S(f(y))$ pois a quantidade de elementos iguais à 1 antes da discrepância permanece inalterada e, portanto, $f(x) < f(y)$ por hipótese de indução. Como $f(x), f(y) \in [0, c)$ e f é estritamente crescente em $[0, c)$, concluímos que $x < y$. Se $s_0 = 1$, então $S(f(y)) \prec S(f(x))$ pois a quantidade de elementos iguais à 1 antes da discrepância é diminuída em uma unidade e, portanto, $f(y) < f(x)$ por hipótese de indução. Como $f(x), f(y) \in (c, 1]$ e f é estritamente decrescente em $(c, 1]$, concluímos que $x < y$. Por fim, se $s_0 = C$, então $x = y = c$ e contraria a hipótese de que os itinerários de x e y são diferentes. □

Utilizaremos, nos resultados a seguir, o conceito de abertos em $[0, 1]$. Encarando $[0, 1]$ como um subespaço topológico de $\mathbb{R}$, os conjuntos da forma $A \cap [0, 1]$ são abertos em $[0, 1]$ quando A é aberto em $\mathbb{R}$. Desse modo, $[0, c)$ e $(c, 1]$ são abertos em $[0, 1]$, por exemplo.

Lema 7.6. *Seja $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \dots)$ um elemento de Σ. Suponha que $s_i \neq C$ para todo $0 \leq i \leq n$. Então, o conjunto*

$$\{x \in [0, 1] : s_i = t_i \textit{ para todo } 0 \leq i \leq n, \textit{ onde } S(x) = (t_0\, t_1\, t_2\, \dots)\}$$

é aberto em $[0, 1]$.

Demonstração. Seja $x \in [0, 1]$ tal que $s_i = t_i$ para todo $0 \leq i \leq n$, onde $S(x) = (t_0\, t_1\, t_2\, \dots)$. Assim, $f^i(x) \neq c$ para todo $0 \leq i \leq n$ e, portanto, podemos definir

$$V_i = \begin{cases} [0, c) & \text{se } f^i(x) < c \\ (c, 1] & \text{se } f^i(x) > c. \end{cases}$$

Sendo cada V_i é aberto em $[0, 1]$, a continuidade de f^i implica que $(f^i)^{-1}(V_i)$ é aberto em $[0, 1]$. Definindo $V = \cap_{i=0}^{n} (f^i)^{-1}(V_i)$, temos que V é um aberto em $[0, 1]$ que contém x e se $y \in V$, então $s_i = t_i$ para todo $0 \leq i \leq n$, onde $S(y) = (t_0\, t_1\, t_2\, \dots)$. □

Seja $x \in I$ tal que $S(x) = (s_0\, s_1\, s_2\, \dots)$. Se σ é a função shift em Σ, então $S(f^k(x)) = (s_k\, s_{k+1}\, s_{k+2}\, \dots) = \sigma^k(S(x))$ para todo $k \geq 0$.

Para prosseguir os estudos, é interessante restringir a atenção aos elementos de Σ que são itinerários de algum $x \in [0, 1]$. Desse modo, definimos

$$\Sigma_f = \{s \in \Sigma : S(x) = s \text{ para algum } x \in [0, 1]\}$$

e dizemos que os elementos de Σ_f são admissíveis por f.

Suponha que $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \ldots)$ é admissível por f e seja $x \in [0,1]$ tal que $S(x) = s$. Sendo f estritamente crescente em $[0,c)$ e estritamente decrescente em $(c,1]$, temos que c é ponto de máximo global de f em $[0,1]$ e, desse modo, $f^n(x) \leq f(c)$ para todo $n \geq 1$. Pelo Teorema 7.5, temos que $S(f^n(x)) \preceq S(f(c))$ e, portanto, $\sigma^n(s) \preceq K(f)$, para todo $n \geq 1$. Desse modo, temos uma condição necessária para que uma sequência seja admissível por f. O exemplo a seguir nos mostra que essa condição não é suficiente.

Exemplo 7.7. Seja $f(x) = F_4(x) = 4x(1-x)$ definida em $[0,1]$. Inicialmente, note que $F_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ e $F_4(1) = 0$, ou seja, $K(f) = (1\,0\,0\, \ldots)$. Além disso, a única pré-imagem de 1 por f é c e, portanto, $(C\,1\,0\,0\, \ldots)$ é a única sequência admissível por f que é pré-imagem de $(1\,0\,0\, \ldots)$ por σ. Desse modo, uma sequência da forma $t = (0\, \ldots\, 0\,1\,0\,0\, \ldots)$, que possui somente zeros nas primeiras n posições, $n > 0$, não é admissível por f. Por outro lado, $\sigma^i(t) \prec K(f)$ para todo $i \geq 0$, $i \neq n$, e $\sigma^n(t) = K(f)$.

Teorema 7.8. *Suponha que c não é periódico. Se t é um elemento de Σ tal que $\sigma^n(t) \prec K(f)$ para todo $n \geq 1$, então t é admissível por f.*

Demonstração. Se $t = (0\,0\,0\, \ldots)$ ou $t = (1\,0\,0\, \ldots)$, então t é admissível por f, pois nesse caso $S(0) = t$ ou $S(1) = t$. Para mostrar os outros casos, denote $t = (t_0\, t_1\, t_2\, \ldots)$ e considere os conjuntos

$$L = \{x \in [0,1] : S(x) \prec t\} \text{ e } R = \{x \in [0,1] : S(x) \succ t\}.$$

Vamos mostrar que L é aberto em $[0,1]$. Uma prova análoga pode ser feita para mostrar que R é aberto em $[0,1]$.

Seja $z \in L$ e denote $S(z) = s = (s_0\, s_1\, s_2\, \ldots)$. Como $s \prec t$, temos que $s \neq t$ e, portanto, s e t possuem discrepância n para algum $n \geq 0$. Se $t_n = C$, então $\sigma^{n+1}(t) = K(f)$, contrariando a hipótese sobre t. Portanto, temos que $t_n = 0$ ou $t_n = 1$. Vamos supor que $t_n = 1$. Uma prova análoga segue quando $t_n = 0$. Como $s_n \neq t_n$, temos que $s_n = 0$ ou $s_n = C$.

Se $s_n = 0$, então $s_i \neq C$ para todo $0 \leq i \leq n$ e, pelo Lema anterior, existe uma vizinhança aberta de z em L. Se $s_n = C$, então $K(f) = (s_{n+1}\, s_{n+2}\, s_{n+3}\, \ldots)$. Observe que existe $\alpha > 0$ tal que $s_{n+\alpha} \neq t_{n+\alpha}$ pois, caso contrário, $\sigma^{n+1}(t) = (t_{n+1}\, t_{n+2}\, t_{n+3}\, \ldots) = (s_{n+1}\, s_{n+2}\, s_{n+3}\, \ldots) = K(f)$. Além disso, $s_{n+i} \neq C$ para todo $i > 0$ pois c não é periódico. Seja W o conjunto de todos os pontos $x \in [0,1]$ cujo itinerário é da forma

$$S(x) = (s_0\, \ldots\, s_{n-1} \, * \, s_{n+1}\, \ldots\, s_{n+\alpha}\, \ldots),$$

onde $*$ é 0, C ou 1. Vamos mostrar que W é uma vizinhança aberta de z em L.

Obviamente, $z \in W$. Além disso, tomando V_i como na demostração do Lema anterior para todo $0 \leq i \leq n+\alpha$, $i \neq n$, e $V_n = [0,1]$, concluímos de modo análogo que W é aberto em $[0,1]$. Resta mostrar que $W \subset L$. Se $x \in W$ e o elemento $*$ de $S(x)$ é 0 ou C, então $S(x)$ e t possuem discrepância n e, nesse caso, $S(x) \prec t$ pois $s \prec t$ e o elemento $*$ de $S(x)$ é menor que $t_n = 1$. Se $x \in W$ e o elemento $*$ de $S(x)$ é 1, então $S(x)$ e t possuem discrepância $n + \alpha$.

Assim, L e R são abertos em $[0,1]$. Lembrando que $t \neq (0\,0\,0\, \ldots)$ e $t \neq (1\,0\,0\, \ldots)$, temos também que L e R não são vazios. Por fim, observando que $[0,1]$ conexo e utilizando as definições de L e R, concluímos que existe um fechado não vazio em $[0,1]$ cujos elementos possuem itinerário exatamente igual à t e, desse modo, t é admissível por f. $\square$