1 Definições elementares

Ao longo do texto, f representará uma função $f : I \to J$, onde I e J são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Além disso, a função f^n representará a n-ésima iterada de f e $f^{(n)}$ representará n-ésima derivada de f.

Definição 1.1. Sejam $f : I \to J$ uma função, $p \in I$ e $n \geq 1$. Dizemos que p é um ponto periódico de f com período n se $f^n(p) = x$. Se $f^k(p) \neq x$ para todo $1 \leq k < n$, então n é chamado de período principal. Em particular, se $n = 1$, dizemos que p é um ponto fixo de f.

Definição 1.2. Sejam $f : I \to J$ uma função, $p \in I$ e $n \geq 1$. Dizemos que p é um ponto eventualmente periódico de f, com período n, se existe $m > 1$ tal que $f^k(p) = f^{k+n}(p)$ para todo $k \geq m$. Em particular, se $n = 1$, dizemos que p é um ponto eventualmente fixo de f.

Definição 1.3. Sejam $f : I \to J$ uma função e $x \in I$. A órbita de x é o conjunto $O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \cdots\}$.

Definição 1.4. Sejam $f : I \to J$ uma função, p um ponto periódico de período n e $x \in I$. Dizemos que x tende assintoticamente para p se $lim_{k \to \infty} f^{kn}(x) = p$. O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para p, denotado por $W^s(p)$, é chamado chamado de conjunto estável de p. Dizemos que x tende assintoticamente para infinito se $lim_{k \to \infty} |f^k(x)| = \infty$. O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para infinito, denotado por $W^s(\infty)$, é chamado de conjunto estável do infinito.

Proposição 1.5. *Os conjuntos estáveis de dois pontos periódicos distintos possuem intersecção vazia.*

Demonstração. Suponha que existam pontos periódicos distintos p e q de uma função f, de períodos m e n respectivamente, tais que $W^s(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$. Seja $x \in W^s(p) \cap W^s(q)$. Temos que $|f^{km}(x) - p| \to 0$ e $|f^{kn}(x) - q| \to 0$ quando $k \to \infty$.

Desse modo, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f^{km}(x) - p| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|f^{kn}(x) - q| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $k > N$. Portanto, $|p - q| = |p - f^{kmn}(x) + f^{kmn}(x) - q| \leq |f^{(kn)m}(x) - p| + |f^{(km)n}(x) - q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Temos então que $p = q$, pois ε é arbitrário. Absurdo. $\square$

O objetivo do estudo de Sistemas Dinâmicos é entender a natureza das órbitas, identificando pontos periódicos, eventualmente periódicos, que tendem assintoticamente, etc.

2 Implicações da diferenciabilidade

Ao longo desse seção, I representará um intervalo fechado de $\mathbb{R}$.

Proposição 2.1. *Seja $f : I \to I$ uma função contínua. Então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Seja $I = [a, b]$ e considere a função contínua $g(x) = f(x) - x$ definida em I. Como $f(a), f(b) \in I$, temos que $g(a) = f(a) - a \geq 0$ e $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $p \in I$ tal que $g(p) = f(p) - p = 0$. Desse modo, p é ponto fixo de f. □

Teorema 2.2. *Seja $f : I \to I$ uma função diferenciável. Suponha que $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in I$. Então $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todo $x, y \in I$, $x \neq y$. Além disso, f admite um único ponto fixo.*

Demonstração. Sejam $x, y \in I$, $x < y$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [x, y]$ tal que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Portanto, $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| < |x - y|$.

Pela Proposição 2.1, f admite um ponto fixo p. Suponha que exista um ponto fixo q diferente de p. Então, pela primeira parte da demonstração, $|p-q| = |f(p)-f(q)| < |p-q|$. Absurdo. □

Definição 2.3. Sejam $f : I \to J$ uma função diferenciável e p um ponto periódico de f com período principal n. Dizemos que p é um ponto hiperbólico se $|(f^n)'(p)| \neq 1$. Se $|(f^n)'(p)| > 1$ dizemos que p é um ponto hiperbólico atrator e se $|(f^n)'(p)| < 1$ dizemos que p é um ponto hiperbólico repulsor. Dizemos que p é um ponto não hiperbólico se $|(f^n)'(p)| = 1$.

Teorema 2.4. *Sejam $f : I \to I$ uma função C^1 e p um ponto periódico de f com período principal n. Se p é um ponto hiperbólico atrator, existe uma vizinhança U de p tal que $lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$ para todo $x \in U$. Se p é um ponto hiperbólico repulsor, existe uma vizinhança V de p tal que, se $x \in V$ e $x \neq p$, $f^{kn}(x) \notin V$ para algum $k \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que p é um ponto hiperbólico atrator. Como f' é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Pelo Teorema do Valor Médio, se $x \in U$ então $|f^n(x) - p| = |f^n(x) - f^n(p)| \leq \lambda|x - p|$. Por indução, $|f^{kn}(x) - p| \leq \lambda^k|x - p|$. Desse modo, $f^{kn}(x) \to p$ quando $k \to \infty$.

Suponha que p é ponto hiperbólico repulsor. De maneira análoga, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f^{kn}(x) - p| \geq \lambda^k|x - p| > 1$ para todo $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, $x \neq p$. Como $\lambda^k|x - p| \to \infty$ quando $k \to \infty$, temos que $f^{kn}(x) \notin V$ para algum $k \geq 1$. □

3 A família quadrática

Nosso objetivo será estudar, durante essa seção e as próximas, a dinâmica da família de funções $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, onde $\mu > 0$. Tal família é chamada de família quadrática.

Ao longo dessa e das próximas seções, a menos que dito explicitamente o contrário, I denotará o intervalo $[0, 1]$ da reta real.

Proposição 3.1. *1. $F_\mu(0) = 0$ e $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$, onde $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.*

2. $F_\mu(1) = 0$ e $F_\mu(\frac{1}{\mu}) = p_\mu$.

3. Se $\mu > 1$ então $0 < p_\mu < 1$.

4. O vértice da parábola é o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4})$.

Demonstração. Trivial. □

No resto dessa seção estudaremos o caso onde $1 < \mu < 3$.

Proposição 3.2. *Suponha que $\mu > 1$. Então $W^s(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.*

Demonstração. Se $x < 0$, a sequência $(F_\mu^n(x))_n$ é monótona decrescente pois $F_\mu(x) < x$. Se $(F_\mu^n(x))_n \to x_0$, para algum $x_0 < 0$, a continuidade de F_μ implica que $(F_\mu^{n+1}(x))_n \to F_\mu(x_0) < x_0$. Absurdo. Portanto, $(F_\mu^n(x))_n \to -\infty$.

Como $F_\mu(x) < 0$ para todo $x > 1$, concluímos que $W^s(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. □

A proposição anterior nos diz que resta estudar a dinâmica de F_μ restrita ao intervalo $I = [0, 1]$.

Proposição 3.3. *Suponha que $1 < \mu < 3$.*

1. 0 é um ponto repulsor e p_μ é um ponto atrator.

2. $lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$ para todo $x \in (0, 1)$.

Demonstração. Como $F'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$ e $1 < \mu < 3$, a primeira parte é verdadeira pois $|F'_\mu(0)| = \mu > 1$ e $|F'_\mu(p_\mu)| = |2 - \mu| < 1$.

Falta provar o item 2. □

Portanto, conhecemos completamente a dinâmica de F_μ quando $1 < \mu < 3$. Temos $W^s(0) = \{0, 1\}$, $W^s(p_\mu) = (0, 1)$ e $W^s(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

4 Conjuntos de Cantor e Caos

Analisaremos nessa seção a dinâmica de F_μ quando $\mu > 4$ e, para entendê-la, será preciso estudar o que é um conjunto de Cantor.

Definição 4.1 (Conjunto de Cantor)**.** Um subconjunto Γ de $\mathbb{R}$, $\Gamma \neq \emptyset$, é um conjunto de Cantor se

1. Γ é fechado e limitado.

2. Γ não possui intervalos.

3. Todo ponto de Γ é um ponto de acumulação de Γ.

Observe inicialmente que $F_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} > 1$ quando $\mu > 4$, ou seja, existem pontos em I que não permanecem em I após uma iteração de F_μ. Em vista da Proposição 3.2, a dinâmica de F_μ em tais pontos é determinada, pois pertencem ao conjunto $W^s(\infty)$. De modo mais geral, se um ponto de I não permanece I após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto $W^s(\infty)$.

Desse modo, considere o conjunto $\Lambda_n = \{x \in I : F_\mu^n(x) \in I\}$, isto é, o conjunto formado pelos pontos de I que permanecem em I após n iterações de F_μ e considere o conjunto $\Lambda = \cap\Lambda_n$, isto é, o conjunto formado pelos pontos de I que permanecem em I por iteração de F_μ. Portanto, pela observação anterior, resta entender a dinâmica de F_μ nos pontos de Λ e, para isso, é necessário entender o que é o conjunto Λ.

Proposição 4.2. *Suponha $\mu > 4$.*

1. $\Lambda_1 = [0,\alpha] \cup [\beta, 1]$, *onde* $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}$ *e* $\beta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}$.

2. *Λ_n é a união de 2^n intervalos fechados disjuntos.*

3. *Se J é um dos intervalos fechados que formam Λ_n, então $F_\mu^n : J \to I$ é um homeomorfismo.*

Demonstração. Analisando F'_μ observamos que F_μ é estritamente crescente no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ e estritamente decrescente no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$. Como $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$ e $F_\mu(\frac{1}{2}) > 1$ o Teorema do Valor Intermediário implica que existem α e β tais que $F_\mu(\alpha) = F_\mu(\beta) = 1$. Os valores de α e β são encontrados resolvendo a equação de segundo grau $\mu x(1-x) = 1$. Logo, $F_\mu([0,\alpha]) = F_\mu([\beta,1]) = [0,1]$ e $F_\mu(x) > 1$ para todo $x \in (\alpha,\beta)$. Portanto, $\Lambda_1 = [0,\alpha] \cup [\beta,1]$ e o item 1 está demonstrado.

A demonstração dos itens 2 e 3 será feita por indução. Pela primeira parte dessa demonstração, Λ_1 é a união de $2^1 = 2$ intervalos fechados disjuntos e F_μ é um homeomorfismo em cada um deles pois $F_\mu([0,\alpha]) > 0$ e $F_\mu([\beta,1]) < 0$.

Suponha que Λ_k é a união de 2^k intervalos fechados disjuntos de modo que $F_\mu^k : J \to I$ é um homeomorfismo para cada intervalo J que forma Λ_k.

Sendo F_μ^k um homeomorfismo, então $F_\mu^k(x) > 0$ ou $F_\mu^k(x) < 0$ para todo $x \in J$. Suponha que $F_\mu^k(x) > 0$. O caso $F_\mu^k(x) < 0$ é tratado de maneira análoga.

Existem $a, x_1, x_2, b \in J$, $a < x_1 < x_2 < b$, tais que $F_\mu^k(a) = 0$, $F_\mu^k(x_1) = \alpha$, $F_\mu^k(x_2) = \beta$ e $F_\mu^k(b) = 1$. Considere os intervalos $J_1 = [a, x_1]$ e $J_2 = [x_2, b]$. Desse modo, $F_\mu^{k+1}(J_1) = F_\mu(F_\mu^k(J_1)) = F_\mu([0,\alpha]) = [0,1]$ e, analogamente, $F_\mu^{k+1}(J_2) = [0,1]$. Como $(F_\mu^{k+1})'(J_1) = F'_\mu(F_\mu^k(J_1))(F_\mu^k)'(J_1) = F'_\mu([0,\alpha])(F_\mu^k)'(J_1) > 0$ e, analogamente, $(F_\mu^{k+1})'(J_2) = F'_\mu([\beta,1])(F_\mu^k)'(J_2) < 0$. Logo, F_μ^{k+1} é um homeomorfismo entre J_1 e I e entre J_2 e I.

A partir de cada intervalo fechado de Λ_k construímos dois novos intervalos fechados disjuntos tais que F_μ^{k+1} restrita em cada um desses intervalos é um homeomorfismo sobre I e, portanto, esses intervalos fazem parte de Λ_{k+1}. Desse modo, se Λ_k é formado por 2^k intervalos, então Λ_{k+1} é formado por $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ intervalos fechados disjuntos. Assim, o resultado está provado. $\square$

Vamos mostrar agora que Λ é um conjunto de Cantor quando $\mu > 2+\sqrt{5}$ e, para isso, utilizaremos o resultado abaixo.

Lema 4.3. *Suponha $\mu > 2+\sqrt{5}$. Existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$. Além disso, o tamanho de cada intervalo em Λ_n é menor que $(\frac{1}{\lambda})^n$.*

Demonstração. Para provar a primeira parte, observamos inicialmente que $\mu^2 - 4\mu > 1$ quando $\mu > 2+\sqrt{5}$. Desse modo, $F'(x_1) = \sqrt{\mu^2-4\mu} > 1$ e $F'(x_2) = -\sqrt{\mu^2-4\mu} < -1$, onde $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}$ e $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}$.

Temos também que F' é estritamente decrescente, pois $F''(x) = -2\mu < 0$. Portanto, $F'(x) \geq F'(x_1) > 1$ para todo $x \in [0, x_1]$ e $F'(x) \leq F'(x_2) < -1$ para todo $x \in [x_2, 1]$. De acordo com a Proposição 4.2, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e, desse modo, $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in \Lambda_1$. (Sendo F' contínua?)Portanto, existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in \Lambda_1$.

Ainda de acordo com a Proposição 4.2, Λ_n é formado pela união de 2^n intervalos disjuntos. Seja $[a,b]$ um desses intervalos. Observe que $F^n(a), F^n(b) \in \{0,1\}$ e $F^n(a) \neq F^n(b)$. Se $c \in [a,b]$, em particular $c \in \Lambda_1$ e, portanto, $(F^n)'(c) = F'(F^{n-1}(c)) \cdots F'(c) > \lambda^n$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a,b]$ tal que $1 = |F^n(b) - F^n(a)| = |(F^n)'(c)||b-a| > \lambda^n |b-a|$. Desse modo, $|b-a| < \frac{1}{\lambda^n}$ e a segunda parte está provada. $\square$

Teorema 4.4. *Suponha $\mu > 2+\sqrt{5}$. Então Λ é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. Como $F_\mu^n(0) = 0 \in I$ para todo n temos $0 \in \Lambda$ e, portanto, Λ é não vazio. Como $\Lambda_n \in I$ para todo n temos que Λ é limitado. Como Λ é intersecção de conjuntos fechados temos que Λ é fechado.

Agora, suponha que Λ contém algum intervalo. Então, existem $x, y \in I$, $x < y$, tais que $[x,y] \subset \Lambda$. Existe N tal que $(\frac{1}{\lambda})^N < |x-y|$. De acordo com o Lema 4.4, isso implica que $[x,y] \notin \Lambda_N$ pois os intervalos de Λ_N possuem tamanho menor que $(\frac{1}{\lambda})^N$. Absurdo e, portanto, Λ não possui intervalos.

Por fim, observe que, se x é um ponto extremo de algum intervalo de Λ_n, então $x \in \Lambda$ pois $F_\mu^{n+1}(x) = 0$. Sejam $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Existe N tal que $(\frac{1}{\lambda})^N < \varepsilon$. Como $x \in \Lambda$, temos que $x \in \Lambda_N$ e, portanto, x é elemento de algum intervalo cujo tamanho é menor que ε. Portanto, existe y ponto extremo do intervalo que contém x tal que $|x-y| < \varepsilon$. Pela observação feita no início do parágrafo, $y \in \Lambda$. Como ε é arbitrário, temos que x é um ponto de acumulação de Λ.

Concluímos então que Λ é um conjunto de Cantor. $\square$

Observação. O Teorema 4.4 é válido para $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais complicada.

Durante o restante da seção, vamos definir o conceito de caos e mostrar que F é uma função caótica para $\mu > 4$.

Definição 4.5. Seja $f : D \to D$ uma função. Dizemos que f é topologicamente transitiva se dados $x, y \in D$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in D$ e $k \geq 1$ tais que $|z - x| < \varepsilon$ e $|f^k(z) - y| < \varepsilon$.

Intuitivamente, uma função f topologicamente transitiva é uma função mistura quaisquer dois conjuntos abertos, isto é, existe um ponto de um dos conjuntos que é levado para o outro conjunto após um número finito de iterações da f.

Proposição 4.6. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então F é topologicamente transitiva.*

Demonstração. □

Definição 4.7. Seja $f : D \to D$ uma função. Dizemos que f depende sensivelmente das condições iniciais se para algum $\delta > 0$, dados $x \in D$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in D$ e $k \geq 1$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Proposição 4.8. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então F depende sensivelmente das condições iniciais.*

Demonstração. □

Podemos agora definir o que é um função caótica.

Definição 4.9. Seja $f : D \to D$ uma função. Dizemos que f é caótica se

1. O conjunto de pontos periódicos de f é denso.
2. f é topologicamente transitiva.
3. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema 4.10. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então F é caótica.*

Demonstração. □