

# 1 Subshift

Seja  $N \geq 2$ . Definimos o conjunto  $\Sigma_N$  formado seqüências de números naturais limitados entre 1 e  $N$ . Precisamente,

$$\Sigma_N = \{(x_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : 1 \leq x_n \leq N\}.$$

Definimos também a função  $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$d_N(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i},$$

onde  $x = (x_n)_{n=0}^\infty$  e  $y = (y_n)_{n=0}^\infty$ . Como  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} < \infty$ ,  $d_N$  está bem definida.

**Proposição 1.1.**  $(\Sigma_N, d_N)$  é um espaço métrico.

*Demonstração.* Se  $x = (x_n)_{n=0}^\infty, y = (y_n)_{n=0}^\infty, z = (z_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ , então

1.  $d_N(x, y) \geq 0$ , pois  $|x_i - y_i| \geq 0$  para todo  $i \geq 0$ .
2.  $d_N(x, y) = d_N(y, x)$ , pois  $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$  para todo  $i \geq 0$ .
3.  $d_N(x, z) \leq d_N(x, y) + d_N(y, z)$ , pois  $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$  para todo  $i \geq 0$ .

Desse modo,  $d_N$  é uma distância em  $\Sigma_N$  e  $(\Sigma_N, d_N)$  é um espaço métrico.  $\square$

**Proposição 1.2.** Sejam  $x = (x_n)_{n=0}^\infty, y = (y_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ .

1. Se  $x_i = y_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ , então  $d_N(x, y) \leq \frac{1}{N^k}$ .
2. Se  $d_N(x, y) < \frac{1}{N^k}$ , então  $x_i = y_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ .

*Demonstração.* 1. Se  $x_i = y_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ , então

$$d_N(x, y) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N^{k+1}} \frac{N}{N-1} < \frac{1}{N^k}$$

2. Se  $x_j \neq y_j$  para algum  $0 \leq j \leq k$ , então

$$d_N(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i} \geq \frac{1}{N^j} \geq \frac{1}{N^k}$$

$\square$

Seja  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  uma matriz quadrada de ordem  $N$  tal que  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  para todo  $1 \leq i, j \leq N$ . Definimos o conjunto  $\Sigma_A$  como

$$\Sigma_A = \{(x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N : a_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \geq 0\}.$$

Seja  $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_A$ . Observando que  $a_{x_i x_{i+1}} = 1$  para todo  $i \geq 0$ , temos que  $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^\infty \in \Sigma_A$ . Desse modo, podemos definir a função  $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  como sendo a restrição de  $\sigma$  em  $\Sigma_A$ . Dizemos que  $\sigma_A$  é o subshift definido pela matriz de transição  $A$ .

**Proposição 1.3.**  $\Sigma_A$  é um subconjunto fechado de  $\Sigma_N$ .

*Demonstração.* Seja  $(x_n)_{n=0}^\infty$  uma sequência de elementos em  $\Sigma_A$  convergente para  $x = (\xi_n)_{n=0}^\infty$ .

Suponha que  $x \notin \Sigma_A$ . Então, existe  $j \geq 0$  tal que  $a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$ . Por outro lado, pela definição de convergência, existe  $n_0 \geq 0$  tal que  $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{j+1}}$  e, portanto, as  $j+1$  primeiras entradas de  $x$  e  $x_{n_0}$  são iguais. Absurdo, pois  $x_{n_0} \in \Sigma_A$ .  $\square$

No restante dessa seção vamos estudar a dinâmica da função quadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ , onde o parâmetro  $\mu = 3.839$  está fixado. Será omitido  $\mu$  na notação da função e escreveremos apenas  $F$ .

Existe uma vizinhança  $V$  de 0.149888 tal que  $F^3(V) \subset V$  e  $|(F^3)'(V)| < 1$ . Desse modo, existe um ponto periódico  $a_1 \in V$  de período 3. Chamando  $a_1, a_2, a_3$  os elementos dessa órbita, temos que

$$a_1 \simeq 0.149888,$$

$$a_2 \simeq 0.489149,$$

$$a_3 \simeq 0.959299.$$

Além disso, de acordo com o Teorema de Singer, essa é a única órbita atratora de  $F$ .

Observando o gráfico de  $F^3$ , existe outra órbita de tamanho 3. Chamando  $b_1, b_2, b_3$  os elementos dessa órbita, temos que

$$b_1 \simeq 0.169040,$$

$$b_2 \simeq 0.539247,$$

$$b_3 \simeq 0.953837.$$

Para cada  $b_i$ , existe  $\bar{b}_i$  do lado oposto de  $b_i$  em relação à  $a_i$  tal que  $F^3(\bar{b}_i) = b_i$ . Defina  $A_1 = (\bar{b}_1, b_1)$ ,  $A_2 = (\bar{b}_2, b_2)$  e  $A_3 = (b_3, \bar{b}_3)$ . Observe que  $A_i$  é o intervalo maximal contendo  $a_i$  utilizado na demonstração do Teorema de Singer.

Sendo  $F^3$  simétrica em relação à  $\frac{1}{2}$ , temos que  $F(\bar{b}_2) = F(b_2) = b_3$ . Além disso,  $F(\bar{b}_1) = \bar{b}_2$  e  $F(\bar{b}_3) = \bar{b}_1$ .

Desse modo,  $F$  mapeia, de forma monótona,  $A_1$  em  $A_2$  e  $A_3$  em  $A_1$ . Além disso, o máximo de  $F$  é  $0.95975 < \bar{b}_3$  e, portanto,  $F(A_2) \subset A_3$ . (???)

Sabemos que se  $x \notin [0, 1]$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = -\infty$ . Além disso, o único ponto periódico de  $A_i$  é  $a_i$  e todos os pontos de  $A_i$  tendem para a órbita de  $a_i$ . Portanto, todos os outros infinitos pontos periódicos residem no complemento dos  $A_i$ 's em  $[0, 1]$ , que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam  $I_0 = [0, \bar{b}_1]$ ,  $I_1 = [b_1, \bar{b}_2]$ ,  $I_2 = [b_2, b_3]$ ,  $I_3 = [\bar{b}_3, 1]$  tais intervalos. Podemos dizer mais,

**Proposição 1.4.** *Se  $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$  é um ponto periódico de  $F$ , então  $x \in I_1 \cup I_2$ .*

*Demonstração.* Observando que  $F$  é monótona nos  $I_k$ 's, temos que  $F(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$ ,  $F(I_1) = I_2$ ,  $F(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$  e  $F(I_3) = I_0$ . Desse modo, se  $x \in I_1 \cup I_2$  é periódico, então órbita de  $x$  permanece em  $I_1 \cup I_2$ .

Por outro lado, se  $x \in I_0 - \{0\}$ , existe um menor  $n \geq 1$  tal que  $F^n(x) \notin I_0$ . Se  $F^n(x) \in A_1$ , então  $x$  não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de  $A_1$  é  $a_1$ . Se  $F^n(x) \in I_1$ , então  $x$  não pode ser periódico, pois senão a órbita de  $x$  estaria contida em  $I_1 \cup I_2$  e nunca retornaria para  $I_0$ .

Finalmente, se  $x \in I_3$ , então  $F(x) \in I_0$  e a análise segue como no parágrafo anterior.  $\square$

Defina o conjunto  $\Lambda$  como

$$\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2 : F^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de  $F$  estão em  $\Lambda$ , com exceção dos pontos  $0, a_1, a_2$  e  $a_3$ .

**Lema 1.5.** *Existe  $N \geq 1$  tal que  $|(F^n)'(\Lambda)| > 1$  para todo  $n \geq N$ .*

*Demonstração.* Como  $F'' < 0$ ,  $F'$  é decrescente. Observando que  $A_2$  é uma bola centrada em  $\frac{1}{2}$ , temos que  $|F'(x)| \geq \nu = F'(\bar{b}_2) \simeq 0.3$  para todo  $x \in I_1 \cup I_2$ .

Observando o gráfico de  $F^3$ , observamos que o subconjunto de  $I_1 \cup I_2$  onde  $|F'| \leq 1$  é formado por três intervalos fechados  $B_1, B_2, B_3$ , que estão numerados da esquerda para direita. Utilizando a simetria do gráfico de  $F^3$  e o fato de que  $(F^3)'(b_1) > 1$ , temos que  $F^3(B_3) \subset A_1$  e, portanto,  $B_3 \cap \Lambda = \emptyset$ .

Por outro lado,  $B_2 \subset [0.661, 0.683]$ , já que  $(F^3)'(0.661) > 1$  e  $(F^3)'(0.683) < -1$ . Desse modo,  $F(B_2) \subset A_3$ . Utilizando novamente a simetria do gráfico de  $F^3$ ,  $F(B_1) \subset A_3$ . Portanto,  $B_1 \cap \Lambda = \emptyset$  e  $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$ . Concluimos assim que  $|(F^3)'(\Lambda)| > \lambda$  para algum  $\lambda > 1$ .

Seja  $K \geq 1$  tal que  $\nu^2 \lambda^K > 1$ .  $\square$

Para as demonstrações dos próximos resultados, vamos considerar a matriz de transição

$$A = (0, 1//1, 1)$$

Podemos definir a função  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_A$  por  $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$ , onde  $x_i = 1$  quando  $F^i(x) \in I_1$  e  $x_i = 2$  quando  $F^i(x) \in I_2$ . Observe que está bem definida. De fato,  $F(I_1) = I_2$  e  $F(I_2) \subset I_1 \cup I_2$  e, portanto,  $a_{x_i x_{i+1}} = 1$  para todo  $i \geq 0$ .

**Lema 1.6.**  $\Lambda$  não contém intervalos.

*Demonstração.* Suponha que  $\Lambda$  contém algum intervalo. Sejam  $x, y \in \Lambda$ , com  $x < y$ , tais que  $[x, y] \subset \Lambda$ . Pelo Lema anterior, existe  $N \geq 1$  tal que  $|(F^N)'(\Lambda)| > \lambda > 1$  para todo  $n \geq N$ . Utilizando a notação do Lema anterior, seja  $k \geq N$  tal que  $|x - y|\nu^N \lambda^{k-N} > 1$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c \in [x, y]$  tal que

$$\begin{aligned} |F^k(x) - F^k(y)| &= |(F^k)'(c)| |x - y| \\ &= \left| \prod_{i=0}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| |x - y| \\ &= \left| \prod_{i=0}^{N-1} F'(F^i(c)) \right| \left| \prod_{i=N}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| |x - y| \\ &> \nu^N \lambda^{k-N} > 1 \end{aligned}$$

e, portanto,  $F^k(x)$  ou  $F^k(y)$  não está em  $[0, 1]$ . Absurdo.  $\square$

**Proposição 1.7.**  $S$  é um homeomorfismo.

*Demonstração.* 1.  $S$  é injetora.

Sejam  $x, y \in \Lambda$ , com  $x < y$ , e suponha que  $S(x) = S(y)$ . Desse modo,  $F^n(x)$  e  $F^n(y)$  está no mesmo lado em relação ao ponto crítico e, portanto,  $F$  é monótona no intervalo entre  $F^n(x)$  e  $F^n(y)$  para todo  $n \geq 0$ . Absurdo, pois implica que  $[x, y] \subset \Lambda$ .

2.  $S$  é sobrejetora.

Seja  $(x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_A$ . Vamos provar que existe  $x \in \Lambda$  tal que  $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$ .

Inicialmente, para cada  $n \geq 0$ , considere

$$I_{x_0 \dots x_n} = \{x \in [0, 1] : x \in I_{x_0}, \dots, F^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

Observe que  $x \in I_{x_0 \dots x_n}$  se, e somente se,  $x \in I_{x_0}$  e  $F(x) \in \{y \in [0, 1] : y \in I_{x_1}, \dots, F^{n-1}(y) \in I_{x_n}\}$ . Desse modo,  $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1 \dots x_n})$ .

Assim, por indução, vemos que  $I_{x_0 \dots x_n}$  é um intervalo fechado não vazio. Além disso,  $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_1 \dots x_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{x_n})$ .

Desse modo,  $(I_{x_0}, I_{x_0 x_1}, \dots)$  é uma sequência de intervalos encaixantes e existe  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n}$ . Observe que  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n}$  é único, pois  $S$  é injetora. Como  $F^i(x) \in I_{x_i}$  e, portanto,  $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ .

3.  $S$  é contínua.

Seja  $x \in \Lambda$ , com  $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ . Sejam também  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$ .

Como  $I_{x_0 \dots x_k}$  um intervalo fechado e  $x \in I_{x_0 \dots x_k}$ , tome  $\delta > 0$  tal que  $|x - y| < \delta$  implica que  $y \in I_{x_0 \dots x_k}$ . Desse modo,  $S(x)$  e  $S(y)$  são iguais nas primeiras  $k + 1$  entradas e, portanto,  $d_N(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{N^{k+1}} < \varepsilon$ . □

**Teorema 1.8.**  $S \circ F|_{\Lambda} = \sigma_A \circ S$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \Lambda$ . Utilizando a notação da Proposição anterior, se  $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ , então  $x$  é o único elemento de  $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n}$ .

Como  $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap \dots \cap F^{-n}(I_{x_n})$ , temos que

$$F(I_{x_0 \dots x_n}) = I_{x_1} \cap \dots \cap F^{-n+1}(I_{x_n}),$$

pois  $F(I_{x_0}) \subset I_{x_1}$  (??). Desse modo,

$$\begin{aligned} S \circ F|_{\Lambda}(x) &= S(F(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n})) \\ &= S(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n}) \\ &= (x_n)_{n=1}^{\infty} = \sigma \circ S(x) \end{aligned}$$

□

**Proposição 1.9.** *Seja  $A$  uma matriz de transição de ordem  $N$ . Então  $\sigma_A$  possui  $\text{Tr}(A^k)$  pontos periódicos de período  $k$ .*

*Demonstração.* Temos que  $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$  é um ponto periódico de período  $k$  se, e somente se,  $x_i = x_{i+k}$  para todo  $i \geq 0$ , ou seja,

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \dots).$$

Além disso, se  $x \in \Sigma_A$  implica que  $a_{x_0 x_1} = a_{x_1 x_2} = \dots = a_{x_{k-1} x_0} = 1$  e, portanto  $a_{x_0 x_1} a_{x_1 x_2} \dots a_{x_{k-1} x_0} = 1$ . Desse modo, a quantidade de pontos periódicos de período  $k$  é dada por

$$\sum_{x_0=1}^N \dots \sum_{x_{k-1}=1}^N a_{x_0 x_1} a_{x_1 x_2} \dots a_{x_{k-1} x_0}.$$

Por outro lado, utilizando a definição de multiplicação de matrizes podemos mostrar por indução que  $A^k = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ , onde

$$c_{ij} = \sum_{x_1=1}^N \cdots \sum_{x_{k-1}=1}^N a_{ix_1} a_{x_1 x_2} \cdots a_{x_{k-1} j}$$

e, portanto,

$$\text{Tr}(A^k) = \sum_{x_0=1}^N c_{x_0 x_0} = \sum_{x_0=1}^N \cdots \sum_{x_{k-1}=1}^N a_{x_0 x_1} a_{x_1 x_2} \cdots a_{x_{k-1} x_0}.$$

□