Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos

Agenor Gonçalves Neto [a]

São Paulo, 2020

[a] Orientado pelo Prof. Salvador Addas Zanata (IME-USP).

Sumário

Conceitos Elementares

Definição

Um sistema dinâmico é função $f : X \to X$, onde X é um espaço métrico.

Dado $x \in X$, queremos estudar as propriedades da sequência

$$f^0(x) = x,\;\; f^1(x) = f(x),\;\; f^2(x) = f(f(x)),\;\; f^3(x) = f(f(f(x))),\;\; \ldots .$$

Definição

Se $x \in X$, então $\{f^k(x) : k \geq 0\}$ é a órbita de x.

Definição

Seja $p \in X$.

i. Se $f(p) = p$, então p é um ponto fixo de f.
ii. Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$, então p é um ponto periódico de f de período n.
iii. Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$ e $f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então p é um ponto periódico f de período primo n.

O conjunto dos pontos periódicos de f será denotado por $\text{Per}(f)$ e o conjunto dos pontos periódicos de f de período primo n será denotado por $\text{Per}_n(f)$.

Proposição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f([a, b]) \subset [a, b]$ ou $f([a, b]) \supset [a, b]$, então f possui ponto fixo.

Definição

Se $p \in \mathrm{Per}_n(f)$, então

$$\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p\}$$

é a bacia de atração de p. Além disso,

$$\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k\to\infty} |f^k(x)| = \infty\}$$

é a bacia de atração do infinito.

Definição

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $p \in \mathrm{Per}_n(f)$.

i. Se $|Df^n(p)| < 1$, então p é um ponto atrator.
ii. Se $|Df^n(p)| > 1$, então p é um ponto repulsor.

Teorema

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $p \in \mathrm{Per}_n(f)$.

1. *Se $|Df^n(p)| < 1$, então existe uma vizinhança de p contida na bacia de atração de p.*
2. *Se $|Df^n(p)| > 1$, então existe uma vizinhança de p tal que as órbitas de seus pontos que são diferentes de p não estão contidas nela própria.*

Sumário

Família Quadrática

Considerar a família de funções $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$h(x) = \mu x(1 - x),$$

onde $\mu > 1$. Essa família de funções é conhecida por família quadrática.

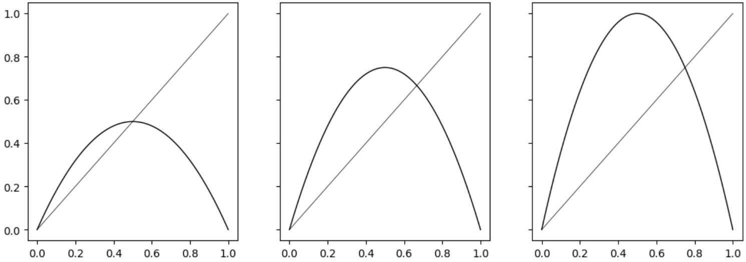

Figura 1: Gráficos de h para $\mu = 2$, $\mu = 3$ e $\mu = 4$.

Sumário

Família Quadrática: Estudo Inicial

Proposição

Se $\mu > 1$, *então* $h(0) = 0$ *e* $h(p_\mu) = p_\mu$, *onde* $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Proposição

Se $\mu > 1$, *então* $\lim_{k\to\infty} h^k(x) = -\infty$ *para todo* $x \notin [0,1]$.

Proposição

Se $1 < \mu < 3$, *então* $\lim_{k\to\infty} h^k(x) = p_\mu$ *para todo* $x \in (0,1)$.

Desse modo, se $1 < \mu < 3$, então

$$\mathcal{B}(0) = \{0,1\}, \quad \mathcal{B}(p_\mu) = (0,1) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Sumário

Família Quadrática: Conjuntos de Cantor

Se $\mu > 4$, então existem pontos em $[0,1]$ que não permanecem em $[0,1]$ após um número finito de iterações de h. Desse modo, para cada $n \geq 1$, seja

$$\Lambda_n = \{x \in [0,1] : h^n(x) \in [0,1]\}.$$

Definindo

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n,$$

vamos estudar a dinâmica $h|_\Lambda$.

Família Quadrática: Conjuntos de Cantor

Proposição

Se $\mu > 4$, então

1. *Λ_n é a união de 2^n intervalos fechados disjuntos.*
2. *$h^n : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_n.*

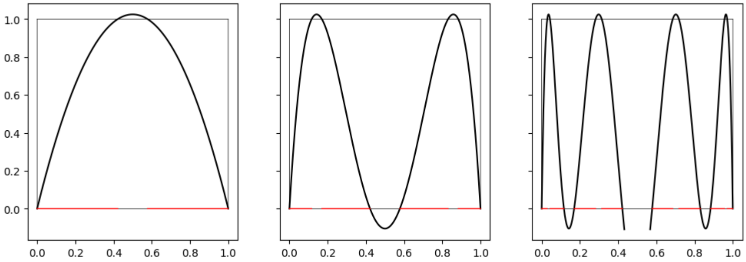

Figura 2: Gráficos de h, h^2 e h^3 para $\mu = 4.1$.

Família Quadrática: Conjuntos de Cantor

Para facilitar as demonstrações, consideramos $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Lema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então existe $\nu > 1$ tal que

1. $|Dh(\Lambda_1)| > \nu$,
2. $b - a < \frac{1}{\nu^n}$, *onde* $[a, b]$ *é um dos intervalos que formam* Λ_n.

Teorema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor [a].

Observação

Esse teorema é válido para $4 < \mu < 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais complicada.

[a] Λ é não vazio, limitado, totalmente desconexo e perfeito.

Sumário

Família Quadrática: Caos

Definição

Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f é topologicamente transitiva se dados $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ e $k \geq 0$ tais que $|x - z| < \varepsilon$ e $|y - f^k(z)| < \varepsilon$.

Proposição

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ é topologicamente transitiva.

Definição

Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f depende sensivelmente das condições iniciais se existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $k \geq 0$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Proposição

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.

Família Quadrática: Caos

Definição

Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f é caótica se as seguintes condições são válidas:

i. $\mathrm{Per}(f)$ é denso em X.

ii. f é topologicamente transitiva.

iii. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Família Quadrática: Caos

Teorema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ é caótica.

Observação

Esse teorema é válido para $4 < \mu < 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais complicada.

Teorema

Seja $f : X \to X$ é uma função contínua, onde X é um conjunto infinito. Se $\mathrm{Per}(f)$ é denso em X e f é topologicamente transitiva, então f é caótica.

Demonstração.

Ver [Holmgren, 1996]. $\square$

Sumário

Definição

Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\tau : X \to Y$ funções. Dizemos que f e g são topologicamente conjugadas por τ se as seguintes condições são válidas:

i. τ é um homeomorfismo.

ii. $\tau \circ f = g \circ \tau$.

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"] & f(x) \in X \arrow[d, "\tau"] \\ \tau(x) \in Y \arrow[r, "g"] & \tau(f(x)) = g(\tau(x)) \in Y \end{tikzcd}$$

Família Quadrática: Conjugação Topológica

Proposição

Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\tau : X \to Y$ funções. Se f e g são topologicamente conjugadas, então

1. $\mathrm{Per}(f)$ *é denso em* X *se, e somente se,* $\mathrm{Per}(g)$ *é denso em* Y.
2. f *é topologicamente transitiva se, e somente se,* g *é topologicamente transitiva.*

Família Quadrática: Conjugação Topológica

Lema

A função $T : [0,1] \to [0,1]$ *dada por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

é caótica.

Teorema

Se $\mu = 4$*, então* T *e* h *são topologicamente conjugadas por* τ*, onde* $\tau : [0,1] \to [0,1]$ *é a função dada por* $\tau(x) = \operatorname{sen}^2(\frac{\pi x}{2})$.

Corolário

Se $\mu = 4$*, então* h *é caótica.*

Sumário

Família Quadrática: Bifurcação

Definição

Seja f_λ uma família parametrizada de funções no parâmetro λ. Dizemos que a família sofre uma bifurcação em λ_0 se existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: se $\lambda_1 \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ e $\lambda_2 \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$, então f_{λ_1} e f_{λ_2} não são topologicamente conjugadas.

Família Quadrática: Bifurcação

Exemplo

A família E_λ de funções dadas por $E_\lambda(x) = e^{x+\lambda}$ sofre uma bifurcação em $\lambda_0 = -1$.

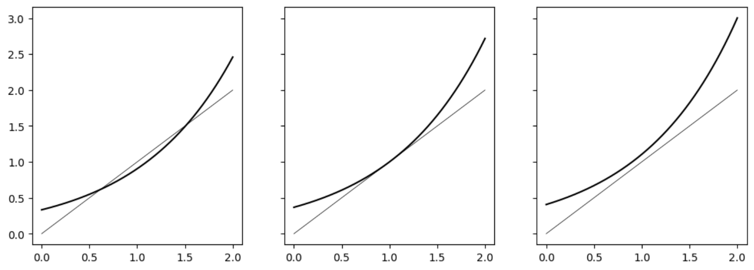

Figura 3: Gráficos de E_λ numa vizinhança de 1 para $\lambda = -1.1$, $\lambda = -1$ e $\lambda = -0.9$.

Uma bifurcação com essas características é chamada de bifurcação tangente.

Família Quadrática: Bifurcação

Exemplo

A família quadrática sofre uma bifurcação em $\mu_0 = 3$.

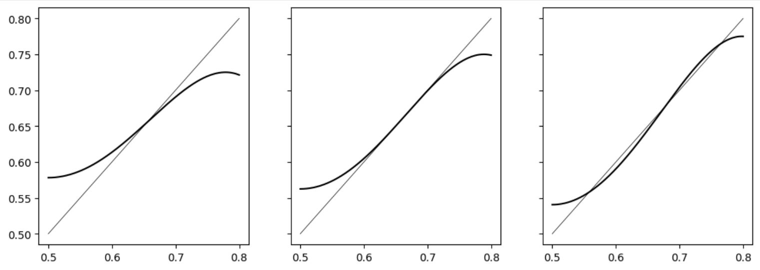

Figura 4: Gráficos de h^2 numa vizinhança de p_μ para $\mu = 2.9$, $\mu = 3$ e $\mu = 3.1$.

Uma bifurcação com essas características é chamada de bifurcação com duplicação de período.

Família Quadrática: Bifurcação

Vamos estudar com mais detalhes a bifurcação com duplicação de período que ocorre na família quadrática.

Se $\mu > 2$, então existe $p'_\mu < p_\mu$ tal que $h(p'_\mu) = p_\mu$. Na figura abaixo temos, para alguns valores de μ, gráficos de h^2 juntamente com quadrados limitados por p'_μ e p_μ.

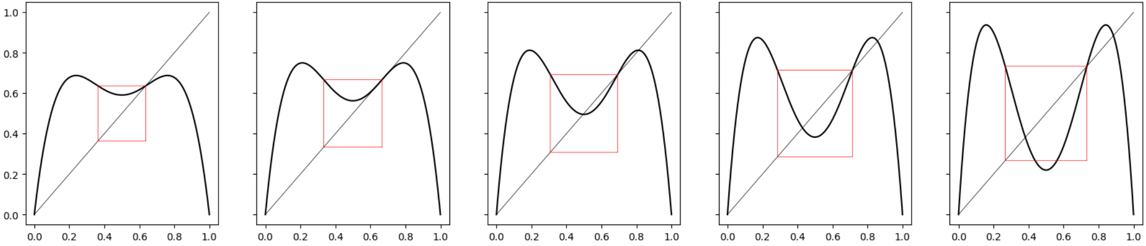

Figura 5: Gráficos de h^2 para $\mu = 2.75$, $\mu = 3$, $\mu = 3.25$, $\mu = 3.5$ e $\mu = 3.75$.

Família Quadrática: Bifurcação

Se $L : [p'_\mu, p_\mu] \to [0,1]$ é a função linear tal que $L(p'_\mu) = 1$ e $L(p_\mu) = 0$, então definimos a renormalização de h como a função $Rh : [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$Rh(x) = L \circ h^2 \circ L^{-1}(x).$$

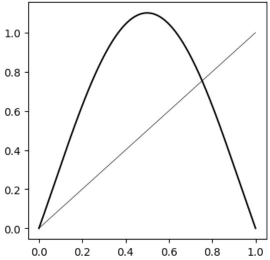

Figura 6: Gráfico de Rh para $\mu = 3.75$.

Família Quadrática: Bifurcação

Observando a semelhança de Rh com h, esperamos que Rh sofra uma bifurcação com duplicação de período conforme o parâmetro cresce e, desse modo, podemos fazer repetir a análise feita anteriormente. Continuando esse processo, criamos uma sucessão de bifurcações com duplicação de período na família quadrática.

Família Quadrática: Bifurcação

Com auxílio de um computador, podemos observar as bifurcações com duplicação de período que ocorrem na família quadrática.

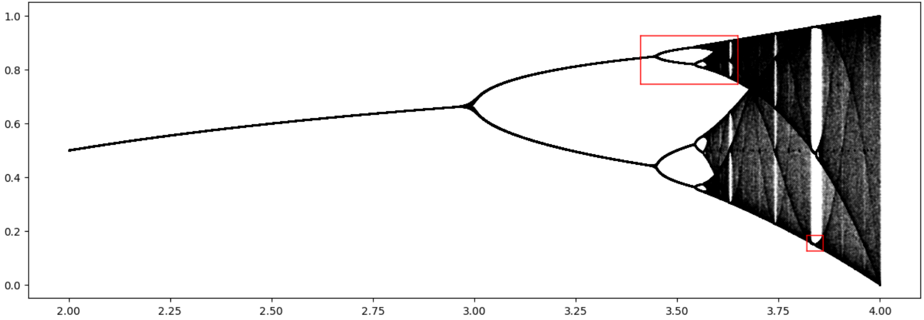

Figura 7: Diagrama de órbita de h para $2 \leq \mu \leq 4$.

Família Quadrática: Bifurcação

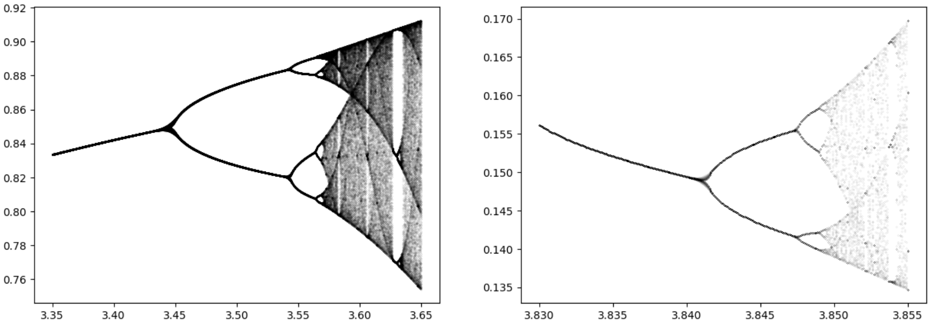

Figura 8: Ampliação das regiões marcadas na figura anterior.

Sumário

Nessa seção, vamos considerar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Além disso, escreveremos

$$I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_n$$

se os intervalos $I_0, I_1, \ldots, I_n$ forem compactos e $f(I_k) \supset I_{k+1}$ para todo $0 \leq k < n$.

Proposição

Se $I_0 \longrightarrow I_1$, então existe um intervalo fechado $I_0' \subset I_0$ tal que $f(I_0') = I_1$.

Demonstração.

Se $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [c, d]$, sejam $p \leq q \in [a, b]$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$.

Definindo

$$b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\} \quad \text{e} \quad a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\},$$

podemos concluir que $f(I_0') = I_1$, onde $I_0' = [a', b']$. $\square$

Lema

Se $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$, *então existe* $p \in I_0$ *tal que as seguintes condições são válidas:*

1. $f^k(p) \in I_k$ *para todo* $1 \leq k < n$.
2. $f^n(p) = p$.

Demonstração.

Basta observar que podemos construir uma sequência de intervalos fechados $I'_0, I'_1, \ldots, I'_{n-1}$ com as seguintes propriedades:

a) $I_0 \supset I'_0 \supset I'_1 \supset \cdots \supset I'_{n-1}$.

b) $f^k(I'_{k-1}) = I_k$ *para todo* $1 \leq k < n$.

c) $f^n(I'_{n-1}) = I_0$. $\square$

Teorema de Sharkovsky

Teorema

Se $\mathrm{Per}_3(f) \neq \emptyset$, *então* $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$ *para todo* $n \geq 1$.

Demonstração.

Sejam $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de um elemento de $\mathrm{Per}_3(f)$. Suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$. Definindo $I_0 = [p_1, p_2]$ e $I_1 = [p_2, p_3]$, temos que $I_0 \longrightarrow I_1$, $I_1 \longrightarrow I_0$ e $I_1 \longrightarrow I_1$. Desse modo, podemos demonstrar as seguintes afirmações:

a) $\mathrm{Per}_1(f) \neq \emptyset$.
   De fato, $I_1 \longrightarrow I_1$ implica que existe $p \in I_1$ tal que $f(p) = p$.

b) $\mathrm{Per}_2(f) \neq \emptyset$.
   De fato, $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0$ implica que existe $p \in I_0$ tal que $f(p) \in I_1$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in I_0 \cap I_1$, o que é um absurdo pois $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e $p_2 \in \mathrm{Per}_3(f)$.

Demonstração (continuação).

c) $\mathrm{Per}_4(f) \neq \emptyset$.
De fato, $I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$ implica que existe $p \in I_1$ tal que $f^k(p) \in I_1$ para todo $1 \leq k < 3$, $f^3(p) \in I_0$ e $f^4(p) = p$.
Se $f^3(p) = p$, então $p \in I_0 \cap I_1$, o que é um absurdo pois $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e $f^2(p_2) = p_1 \notin I_1$. Se $f^k(p) = p$ para algum $1 \leq k < 3$, então $f^k(p) \in I_1$ para todo $k \geq 1$. Em particular, $f^3(p) \in I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e, portanto, $f^4(p) = p = p_3$, o que é um absurdo pois $f(p_3) = p_1 \notin I_1$.

De maneira análoga, podemos mostrar que $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 5$. $\square$

Considere a seguinte ordenação dos números naturais:

Definição (Ordenação de Sharkovsky)

$3 \triangleright 5 \triangleright \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \cdots \triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k \cdot 5 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$

Teorema (Sharkovsky)

Se $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$*, então* $\mathrm{Per}_m(f) \neq \emptyset$ *para todo* $n \triangleright m$*.*

Demonstração.

Ver [Burns e Hasselblatt, 2011]. $\square$

Exemplo

Observando os gráficos de h, h^2 e h^4 para $\mu = 3.2$, concluímos que $\mathrm{Per}_4(h) = \emptyset$ e, portanto, $\mathrm{Per}_n(h) = \emptyset$ para todo $n \geq 3$.

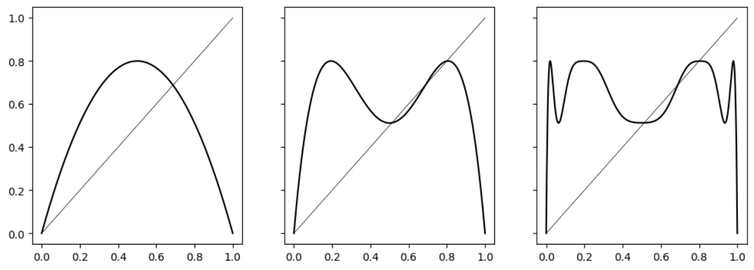

Figura 9: Gráficos de h, h^2 e h^4 para $\mu = 3.2$.

Se, por exemplo, $\mathrm{Per}_5(f) \neq \emptyset$ implica que $\mathrm{Per}_3(f) \neq \emptyset$, então os números 3 e 5 podem ser trocados de lugar na ordenação de Sharkovsky. O seguinte teorema mostra que isso não é possível.

Teorema

Se $n \geq 1$, então existe uma função f com as seguintes propriedades:

1. $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$.
2. $\mathrm{Per}_m(f) = \emptyset$ *para todo* $m \triangleright n$.

Referências

Burns, K. e Hasselblatt, B. (2011).
The Sharkovsky Theorem: a Natural Direct Proof.
The American Mathematical Monthly, 118(3):229–244.

Devaney, R. L. (1989).
An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.
Perseus Books.

Holmgren, R. A. (1996).
A First Course in Discrete Dynamical Systems.
Springer-Verlag New York.