1 Subshift

Seja $N \geq 2$. Definimos o conjunto Σ_N formado pelas sequências de números naturais limitados entre 1 e N. Precisamente,

$$\Sigma_N = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : 1 \leq x_n \leq N\}.$$

Definimos também a função $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \to \mathbb{R}$ que é dada por

$$d_N(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i},$$

onde $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ e $y = (y_n)_{n=0}^{\infty}$. Como $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} < \infty$, d_N está bem definida.

Proposição 1.1. (Σ_N, d_N) *é um espaço métrico.*

Demonstração. Se $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}, y = (y_n)_{n=0}^{\infty}, z = (z_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$, então

1. $d_N(x, y) \geq 0$, pois $|x_i - y_i| \geq 0$ para todo $i \geq 0$.
2. $d_N(x, y) = d_N(y, x)$, pois $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ para todo $i \geq 0$.
3. $d_N(x, z) \leq d_N(x, y) + d_N(y, z)$, pois $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ para todo $i \geq 0$.

Desse modo, d_N é uma distância em Σ_N e (Σ_N, d_N) é um espaço métrico. □

Proposição 1.2. *Sejam* $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}, y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$.

1. *Se* $x_i = y_i$ *para todo* $0 \leq i \leq k$, *então* $d_N(x, y) \leq \frac{1}{N^k}$.
2. *Se* $d_N(x, y) < \frac{1}{N^k}$, *então* $x_i = y_i$ *para todo* $0 \leq i \leq k$.

Demonstração. 1. Se $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, então

$$d_N(x, y) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{1}{N^{k+1}} \frac{N}{N-1} \leq \frac{1}{N^k}.$$

2. Se $x_j \neq y_j$ para algum $0 \leq j \leq k$, então

$$d_N(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i} \geq \frac{1}{N^j} \geq \frac{1}{N^k}.l$$

□

Definimos a função shift $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ que é dada por

$$\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$$

para todo $x \in \Sigma_N$, isto é, $\sigma(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

Proposição 1.3. *σ é contínua.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$. Seja $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$ e defina $\delta = \frac{1}{N^{k+1}}$.

Pela Proposição anterior, se $y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$ e $d_N(x, y) < \delta$, então $x_i = y_i$ para todo $i = 0, \dots, k+1$. Desse modo, $\sigma(x)$ e $\sigma(y)$ coincidem nas k primeiras entradas. Utilizando a Proposição anterior novamente, concluímos que $d_N(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$. □

Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ uma matriz quadrada de ordem N tal que $a_{ij} \in \{0, 1\}$ para todo $1 \leq i, j \leq N$. Dizemos que A é uma matriz de transição de ordem N. Definimos o conjunto Σ_A como

$$\Sigma_A = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N : a_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \geq 0\}.$$

Seja $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$. Observando que $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 1$, temos que $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_A$. Desse modo, podemos definir a função $\sigma_A : \Sigma_A \to \Sigma_A$ como sendo a restrição de σ em Σ_A. Dizemos que σ_A é o subshift definido por A.

Proposição 1.4. *Σ_A é um subconjunto fechado de Σ_N.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de elementos em Σ_A convergente para $x = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$. Observe que a sequência $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de sequências, pois cada x_n é elemento de Σ_N.

Suponha que $x \notin \Sigma_A$. Então, existe $j \geq 0$ tal que $a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Por outro lado, pela definição de convergência, existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{j+1}}$ e, portanto, as $j+1$ primeiras entradas de x e x_{n_0} são iguais. Escrevendo $x_{n_0} = (\eta_n)_{n=0}^{\infty}$, concluímos que $a_{\eta_j \eta_{j+1}} = a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Absurdo, pois $x_{n_0} \in \Sigma_A$. □

No restante dessa seção vamos estudar a dinâmica da função quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, onde o parâmetro $\mu = 3.839$ está fixado. Será omitido μ na notação da função e escreveremos apenas F.

Existe uma vizinhança V de 0.149888 tal que $F^3(V) \subset V$ e $|(F^3)'(V)| < 1$ e, portanto, existe um ponto periódico atrator $a_1 \in V$ de período 3. Se a_1, a_2 e a_3 são os elementos da órbita de a_1 em ordem crescente, então

$$a_1 \simeq 0.149888,$$

$$a_2 \simeq 0.489149,$$

$$a_3 \simeq 0.959299.$$

Desse modo, de acordo com o Teorema de Sharkovsky, F possui infinitos pontos periódicos. Além disso, de acordo com o Teorema de Singer, essa é a única órbita atratora de F.

De modo análogo, concluímos que F possui outra órbita de tamanho 3. Se b_1, b_2 e b_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040,$$

$$b_2 \simeq 0.539247,$$

$$b_3 \simeq 0.953837.$$

Observando o gráfico de F^3, concluímos que para cada b_i, existe b_i' no lado oposto de b_i em relação ao ponto a_i tal que $F^3(b_i') = b_i$. Defina $A_1 = (b_1', b_1)$, $A_2 = (b_2', b_2)$ e $A_3 = (b_3, b_3')$. Cada A_i é exatamente o intervalo maximal contendo a_i utilizado na demonstração do Teorema de Singer.

Sendo F^3 simétrica em relação ao ponto $\frac{1}{2}$, temos que $F(b_2') = F(b_2) = b_3$. Além disso, $F(b_1') = b_2'$ e $F(b_3') = b_1'$. Desse modo, F mapeia, de forma monótona, A_1 em A_2 e A_3 em A_1. Observando que o máximo de F em A_2 é $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0.95975 < b_3'$, concluímos que $F(A_2) \subset A_3$. (??)

Sabemos que se $x \notin [0,1]$, então $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = -\infty$. Além disso, o único ponto periódico de A_i é a_i e todos os pontos em A_i tendem para a órbita de a_i. Desse modo, todos os outros infinitos pontos periódicos residem no complemento de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ em $[0,1]$, que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam $I_0 = [0, b_1'], I_1 = [b_1, b_2'], I_2 = [b_2, b_3], I_3 = [b_3', 1]$ tais intervalos. Podemos dizer mais,

Proposição 1.5. *Se $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$ é um ponto periódico de F, então $x \in I_1 \cup I_2$.*

Demonstração. Observando que F é monótona em cada I_k, temos que $F(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$, $F(I_1) = I_2$, $F(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$ e $F(I_3) = I_0$. Desse modo, se $x \in I_1 \cup I_2$ é periódico, então órbita de x permanece em $I_1 \cup I_2$.

Por outro lado, se $x \in I_0 - \{0\}$, existe um menor $n \geq 1$ tal que $F^n(x) \notin I_0$. Se $F^n(x) \in A_1$, então x não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de A_1 é a_1. Se $F^n(x) \in I_1$, então x não pode ser periódico, pois senão a órbita de x estaria contida em $I_1 \cup I_2$ e nunca retornaria para I_0.

Finalmente, se $x \in I_3$, então $F(x) \in I_0$ e a análise segue como no parágrafo anterior. □

Defina o conjunto Λ como

$$\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2 : F^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de F estão em Λ, com exceção dos pontos 0, a_1, a_2 e a_3.

Lema 1.6. *Existe $N \geq 1$ tal que $|(F^n)'(\Lambda)| > 1$ para todo $n \geq N$.*

Demonstração. Como $F'' < 0$, F' é decrescente. Observando que A_2 é uma bola centrada em $\frac{1}{2}$, temos que $|F'(x)| \geq \nu = F'(b_2') \simeq 0.3$ para todo $x \in I_1 \cup I_2$.

Observando o gráfico de F^3, concluímos que o subconjunto de $I_1 \cup I_2$ onde $|F'| \leq 1$ é formado por três intervalos fechados B_1, B_2, B_3, que estão numerados da esquerda para direita. Utilizando a simetria do gráfico de F^3 e o fato de que $(F^3)'(b_1) > 1$, temos que $F^3(B_3) \subset A_1$ e, portanto, $B_3 \cap \Lambda = \emptyset$.

Por outro lado, $B_2 \subset [0.661, 0.683]$, já que $(F^3)'(0.661) > 1$ e $(F^3)'(0.683) < -1$. Desse modo, $F(B_2) \subset A_3$. Utilizando novamente a simetria do gráfico de F^3, concluímos que $F(B_1) \subset A_3$. Portanto, $B_1 \cap \Lambda = \emptyset$ e $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$. Portanto, $|(F^3)'(\Lambda)| > \lambda$ para algum $\lambda > 1$.

Seja $K \geq 1$ tal que $\nu^2 \lambda^K > 1$.

□

Para as demonstrações dos próximos resultados, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos definir a função $S : \Lambda \to \Sigma_A$ por $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, onde $x_i = 1$ se $F^i(x) \in I_1$ e $x_i = 2$ se $F^i(x) \in I_2$ para todo $i \geq 0$. Observe que está S bem definida, pois $F(I_1) = I_2$ e $F(I_2) \subset I_1 \cup I_2$ e, portanto, $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 0$.

Lema 1.7. *Λ não contém intervalos.*

Demonstração. Suponha que Λ contém algum intervalo e sejam $x, y \in \Lambda$, com $x < y$, tais que $[x, y] \subset \Lambda$. Pelo Lema anterior, existe $N \geq 1$ tal que $|(F^n)'(\Lambda)| > \lambda > 1$ para todo $n \geq N$. Utilizando a notação do Lema anterior, seja $k \geq N$ tal que $|y - x|\nu^N \lambda^{k-N} > 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [x, y]$ tal que

$$\begin{aligned}
|F^k(y) - F^k(x)| &= |(F^k)'(c)||y - x| \\
&= \left| \prod_{i=0}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| |y - x| \\
&= \left| \prod_{i=0}^{N-1} F'(F^i(c)) \right| \left| \prod_{i=N}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| |y - x| \\
&\geq \nu^N \lambda^{k-N} |y - x| > 1
\end{aligned}$$

e, portanto, $F^k(x)$ ou $F^k(y)$ não está em $[0, 1]$. Absurdo. □

Proposição 1.8. *S é um homeomorfismo.*

Demonstração.

1. S é injetora.

   Sejam $x, y \in \Lambda$, com $x < y$, e suponha que $S(x) = S(y)$. Desse modo, $F^n(x)$ e $F^n(y)$ está no mesmo lado em relação ao ponto crítico e, portanto, F é monótona no intervalo entre $F^n(x)$ e $F^n(y)$ para todo $n \geq 0$. Absurdo, pois implica que $[x, y] \subset \Lambda$.

2. S é sobrejetora.

   Seja $(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$. Vamos provar que existe $x \in \Lambda$ tal que $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$.

   Inicialmente, para cada $n \geq 0$, considere

   $$I_{x_0 \cdots x_n} = \{x \in [0,1] : x \in I_{x_0}, \dots, F^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

   Observe que $x \in I_{x_0 \cdots x_n}$ se, e somente se, $x \in I_{x_0}$ e $F(x) \in \{y \in [0,1] : y \in I_{x_1}, \dots, F^{n-1}(y) \in I_{x_n}\}$. Desse modo, $I_{x_0 \cdots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1 \cdots x_n})$.

   Assim, por indução, vemos que $I_{x_0 \cdots x_n}$ é um intervalo fechado não vazio. Além disso, $I_{x_0 \cdots x_n} = I_{x_1 \cdots x_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{x_n})$.

   Desse modo, $(I_{x_0}, I_{x_0 x_1}, I_{x_0 x_1 x_2}, \dots)$ é uma sequência de intervalos encaixantes e, portanto, existe $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$. Observe que $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$ é único, pois S é injetora. Como $F^i(x) \in I_{x_i}$, concluímos que $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$.

3. S é contínua.

   Seja $x \in \Lambda$, com $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Sejam também $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$.

   Como $I_{x_0 \dots x_k}$ um intervalo fechado e $x \in I_{x_0 \dots x_k}$, tome $\delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta$ implica que $y \in I_{x_0 \dots x_k}$. Desse modo, $S(x)$ e $S(y)$ são iguais nas primeiras $k+1$ entradas e, portanto, $d_N(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{N^{k+1}} < \varepsilon$.

□

Teorema 1.9. $S \circ F|_{\Lambda} = \sigma_A \circ S$.

Demonstração. Seja $x \in \Lambda$. Utilizando a notação da Proposição anterior, se $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, então x é o único elemento de $\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$.

Como $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap \cdots \cap F^{-n}(I_{x_n})$, temos que

$$F(I_{x_0 \dots x_n}) = I_{x_1} \cap \cdots \cap F^{-n+1}(I_{x_n}),$$

pois $F(I_{x_0}) \subset I_{x_1}$ (??). Desse modo,

$$\begin{aligned} S \circ F|_\Lambda(x) &= S(F(\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n})) \\ &= S(\cap_{n=1}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}) \\ &= (x_n)_{n=1}^{\infty} = \sigma \circ S(x) \end{aligned}$$

□

Proposição 1.10. *Seja A uma matriz de transição de ordem N. Então σ_A possui $Tr(A^k)$ pontos periódicos de período k.*

Demonstração. Temos que $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$ é um ponto periódico de período k se, e somente se, $x_i = x_{i+k}$ para todo $i \geq 0$, ou seja,

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, \ldots).$$

Além disso, se $x \in \Sigma_A$ implica que $a_{x_0 x_1} = a_{x_1 x_2} = \cdots = a_{x_{k-1} x_0} = 1$ e, portanto $a_{x_0 x_1} a_{x_1 x_2} \cdots a_{x_{k-1} x_0} = 1$. Desse modo, a quantidade de pontos periódicos de período k é dada por

$$\sum_{1 \leq x_0, \ldots, x_{k-1} \leq N} a_{x_0 x_1} a_{x_1 x_2} \cdots a_{x_{k-1} x_0}.$$

Por outro lado, utilizando a definição de multiplicação de matrizes podemos mostrar por indução que $A^k = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$, onde

$$c_{ij} = \sum_{1 \leq x_1, \ldots, x_{k-1} \leq N} a_{i x_1} a_{x_1 x_2} \cdots a_{x_{k-1} j}$$

e, portanto,

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{x_0=1}^{N} c_{x_0 x_0} = \sum_{1 \leq x_0, \ldots, x_{k-1} \leq N} a_{x_0 x_1} a_{x_1 x_2} \cdots a_{x_{k-1} x_0}.$$

□