

Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos

Agenor Gonçalves Neto ^a

São Paulo, 2020

^aOrientado pelo Prof. Salvador Addas Zanata (IME-USP).

Conceitos Elementares

Família Quadrática

Estudo Inicial

Conjuntos de Cantor

Caos

Conjugação Topológica

Dinâmica Simbólica

Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Conceitos Elementares

Família Quadrática

Estudo Inicial

Conjuntos de Cantor

Caos

Conjugação Topológica

Dinâmica Simbólica

Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Definição

Um sistema dinâmico é função $f : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico.

Dado $x \in X$, queremos estudar as propriedades da sequência definida recursivamente por

$$f^0(x) = x \quad \text{e} \quad f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

para todo $k \geq 1$.

Definição

Seja $p \in X$.

1. Se $f(p) = p$, então p é um ponto fixo de f .
2. Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$, então p é um ponto periódico de f de período n .
3. Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$ e $f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então p é um ponto periódico f de período primo n .

O conjunto dos pontos periódicos de f será denotado por $\text{Per}(f)$ e o conjunto dos pontos periódicos de f de período primo n será denotado por $\text{Per}_n(f)$.

Definição

Se $x \in X$, então $\mathcal{O}(x) = \{f^k(x) : k \geq 0\}$ é a órbita de x .

Definição

Se $p \in \text{Per}_n(f)$, então

$$\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p\}$$

é o conjunto estável de p . Além disso, dizemos que

$$\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(x)| = \infty\}$$

é o conjunto estável do infinito.

Proposição

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f([a, b]) \subset [a, b]$ ou $f([a, b]) \supset [a, b]$, então f possui ponto fixo.

Demonstração.

Basta considerar a função contínua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$ e observar, pelo TVI, que em ambos os casos existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$. □

Definição

Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^1 e $p \in \text{Per}_n(f)$.

- i. Se $|Df^n(p)| < 1$, então p é um ponto atrator.
- ii. Se $|Df^n(p)| > 1$, então p é um ponto repulsor.

Essa definição pode ser estendida para órbitas de pontos periódicos. De fato, se um ponto é atrator, então todos os pontos de sua órbita também são atratores e, nesse caso, dizemos que a órbita é atratora.

Teorema

Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^1 e $p \in \text{Per}_n(f)$.

1. Se $|Df^n(p)| < 1$, então existe uma vizinhança de p contida no conjunto estável de p .
2. Se $|Df^n(p)| > 1$, então existe uma vizinhança V de p com a seguinte propriedade: se $x \in V \setminus \{p\}$, então a órbita de x não está contida em V .

Conceitos Elementares

Família Quadrática

Estudo Inicial

Conjuntos de Cantor

Caos

Conjugação Topológica

Dinâmica Simbólica

Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Nessa seção, vamos considerar a família de funções $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dadas por

$$h(x) = \mu x(1 - x),$$

onde $\mu > 1$ é um parâmetro real. Essa família de funções é conhecida como família quadrática.

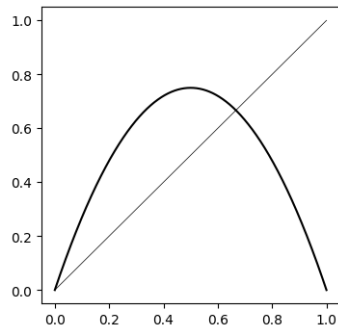


Figura 1: Gráfico de h para $\mu = 3$.

Conceitos Elementares

Família Quadrática

Estudo Inicial

Conjuntos de Cantor

Caos

Conjugação Topológica

Dinâmica Simbólica

Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Família Quadrática: Estudo Inicial

Proposição

Se $\mu > 1$, então $h(0) = 0$ e $h(p_\mu) = p_\mu$, onde $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Proposição

Se $\mu > 1$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} h^k(x) = -\infty$ para todo $x \notin [0, 1]$.

Proposição

Se $1 < \mu < 3$, então

1. 0 é um ponto repulsor e p_μ é um ponto atrator.
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} h^k(x) = p_\mu$ para todo $x \in (0, 1)$.

Desse modo, a dinâmica de h está completamente determinada quando $1 < \mu < 3$. De fato,

$$\mathcal{B}(0) = \{0, 1\}, \quad \mathcal{B}(p_\mu) = (0, 1) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

Conceitos Elementares

Família Quadrática

Estudo Inicial

Conjuntos de Cantor

Caos

Conjugação Topológica

Dinâmica Simbólica

Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Família Quadrática: Conjuntos de Cantor

Suponha $\mu > 4$. Observe que existem pontos em $[0, 1]$ que não permanecem em $[0, 1]$ após uma iteração de h e, portanto, eles pertencem ao conjunto estável do infinito.

Desse modo, considerando os conjuntos

$$\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : h^n(x) \in [0, 1]\}$$

e

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n,$$

podemos estudar a dinâmica de $h : \Lambda \rightarrow \Lambda$.

Família Quadrática: Conjuntos de Cantor

Proposição

Se $\mu > 4$, então

1. Λ_n é a união de 2^n intervalos fechados disjuntos.
2. $h^n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_n .

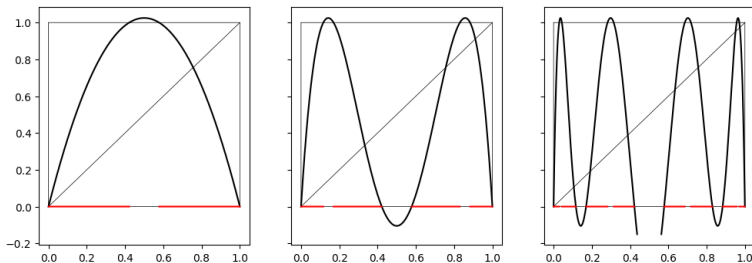


Figura 2: Gráficos de h , h^2 e h^3 para $\mu = 4.1$.

Lema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então

- 1. $|Dh(\Lambda_1)| > \lambda > 1$.*
- 2. $b - a < \frac{1}{\lambda^n}$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_n .*

Família Quadrática: Conjuntos de Cantor

Teorema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor^a.

Demonstração.

a) Λ é totalmente desconexo.

Se existe $[a, b] \subset \Lambda$, seja k tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |a - b|$. Em particular, $[a, b] \subset \Lambda_k$, o que é um absurdo pois os intervalos que formam Λ_k possuem tamanho menor que $\frac{1}{\lambda^k}$.

b) Λ é perfeito.

Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Se $x \in [a, b]$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k , então $a \in \Lambda$ e $|x - a| < \varepsilon$ e, portanto, x é ponto de acumulação de Λ . \square

Observação

Esse teorema é válido para $4 < \mu < 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais complicada.

^a Λ é não vazio, limitado, totalmente desconexo e perfeito.

Conceitos Elementares

Família Quadrática

Estudo Inicial

Conjuntos de Cantor

Caos

Conjugação Topológica

Dinâmica Simbólica

Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Definição

Seja $f : X \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f é topologicamente transitiva se dados $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ e $k \geq 0$ tais que $|x - z| < \varepsilon$ e $|y - f^k(z)| < \varepsilon$.

Proposição

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_{\Lambda}$ é topologicamente transitiva.

Demonstração.

Sejam $x, y \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k . Pelo TVI, existe $z \in [a, b]$ tal que $h^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$ e $|x - z| < \varepsilon$, concluímos que $h|_{\Lambda}$ é topologicamente transitiva. □

Família Quadrática: Caos

Definição

Seja $f : X \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f depende sensivelmente das condições iniciais se existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $k \geq 0$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Proposição

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_{\Lambda}$ depende sensivelmente das condições iniciais.

Demonstração.

Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k . Suponha que $h^k(a) = 0$ e $h^k(b) = 1$.

Como $h(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, temos que $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Se $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2})$, então $|h^k(x) - h^k(b)| = |h^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $h^k(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$, então $|h^k(x) - h^k(a)| = |h^k(x)| > \frac{1}{2}$.

Observando que $|x - a| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, concluímos que $h|_{\Lambda}$ depende sensivelmente das condições iniciais. □

Definição

Seja $f : X \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f é caótica se as seguintes condições são válidas:

- i. $\text{Per}(f)$ é denso em X .
- ii. f é topologicamente transitiva.
- iii. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_{\Lambda}$ é caótica.

Demonstração.

Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k . Como $h^k([a, b]) \supset [a, b]$, existe $y \in [a, b]$ tal que $h^k(y) = y$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \varepsilon$, concluímos que $\text{Per}(h|_{\Lambda})$ é denso em Λ . □

Observação

Esse teorema é válido para $4 < \mu < 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais complicada.

Teorema

Seja $f : X \rightarrow X$ é uma função contínua, onde X é um conjunto infinito. Se $\text{Per}(f)$ é denso em X e f é topologicamente transitiva, então f é caótica.

Demonstração.

Ver [Holmgren, 1996].



Conceitos Elementares

Família Quadrática

Estudo Inicial

Conjuntos de Cantor

Caos

Conjugação Topológica

Dinâmica Simbólica

Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Família Quadrática: Conjugação Topológica

Definição

Sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $\tau : X \rightarrow Y$ funções. Dizemos que f e g são topologicamente conjugadas por τ se as seguintes condições são válidas:

- i. τ é um homeomorfismo.
- ii. $\tau \circ f = g \circ \tau$.

$$\begin{array}{ccc} x \in X & \xrightarrow{f} & f(x) \in X \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ \tau(x) \in Y & \xrightarrow{g} & g(\tau(x)) = \tau(f(x)) \in Y \end{array}$$

Proposição

Sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $\tau : X \rightarrow Y$ funções. Se f e g são topologicamente conjugadas por τ , então

- 1. $\text{Per}(f)$ é denso em X se, e somente se, $\text{Per}(g)$ é denso em Y .*
- 2. f é topologicamente transitiva se, e somente se, g é topologicamente transitiva.*

Família Quadrática: Conjugação Topológica

Lema

A função $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é caótica.

Família Quadrática: Conjugação Topológica

Teorema

Se $\mu = 4$, então h é caótica.

Demonstração.

Basta observar que $\tau \circ T = h \circ \tau$, onde $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é o homeomorfismo dado por $\tau(x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$. □

Conceitos Elementares

Família Quadrática

Estudo Inicial

Conjuntos de Cantor

Caos

Conjugação Topológica

Dinâmica Simbólica

Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Sejam

$$\Sigma = \{(x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots) : x_n = 1 \text{ ou } x_n = 2 \text{ para todo } n \geq 0\}$$

e $d : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k},$$

onde $x = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots)$ e $y = (y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots)$.

Seja $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ a função dada por $\sigma(x_0 x_1 x_2 \dots) = (x_1 x_2 x_3 \dots)$.

Se $\Lambda_1 = I_1 \cup I_2$, podemos definir a função $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$ dada por

$$S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots),$$

onde $x_k = 1$ se $h^k(x) \in I_1$ e $x_k = 2$ se $h^k(x) \in I_2$ para todo $k \geq 0$.

Teorema

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_{\Lambda}$ e σ são topologicamente conjugadas por S .

Corolário

Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_{\Lambda}$ possui 2^n pontos periódicos de período n para todo $n \geq 1$.

Demonstração.

Basta observar que os pontos periódicos de σ de período n são determinados pelas primeiras n entradas e, portanto, σ possui 2^n pontos periódicos de período n para todo $n \geq 1$. \square

Conceitos Elementares

Família Quadrática

Estudo Inicial

Conjuntos de Cantor

Caos

Conjugação Topológica

Dinâmica Simbólica

Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Família Quadrática: Bifurcação

Seja f_λ uma família parametrizada de funções no parâmetro λ de modo que a função

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x),$$

definida num aberto de \mathbb{R}^2 , seja de classe C^∞ nas variáveis x e λ .

Definição

Dizemos que a família f_λ sofre uma bifurcação em λ_0 se existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: se $\lambda_1 \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ e $\lambda_2 \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$, então f_{λ_1} e f_{λ_2} não são topologicamente conjugadas.

Família Quadrática: Bifurcação

Exemplo

A família E_λ de funções dadas por $E_\lambda(x) = e^{x+\lambda}$ sofre uma bifurcação em $\lambda_0 = -1$.

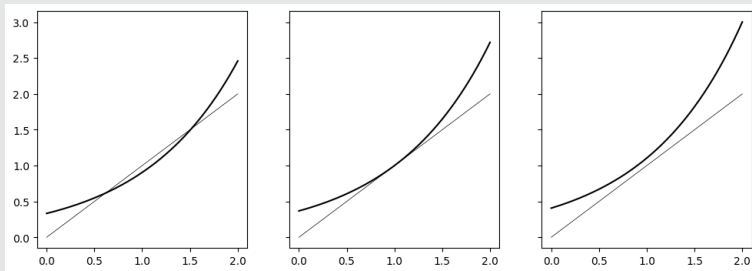


Figura 3: Gráficos de E_λ numa vizinhança de 1 para $\lambda = -1.1$, $\lambda = -1$ e $\lambda = -0.9$.

Uma bifurcação com essas características é chamada de bifurcação tangente.

Família Quadrática: Bifurcação

Exemplo

A família quadrática sofre uma bifurcação em $\mu_0 = 3$.

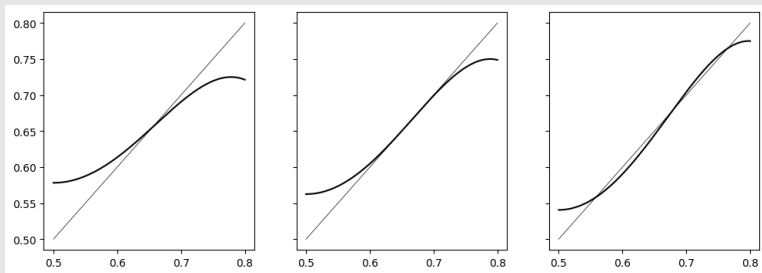


Figura 4: Gráficos de h^2 numa vizinhança de p_μ para $\mu = 2.9$, $\mu = 3$ e $\mu = 3.1$.

Uma bifurcação com essas características é chamada de bifurcação com duplicação de período.

Família Quadrática: Bifurcação

Observe, nos exemplos, que as bifurcações ocorreram quando a derivada em módulo no ponto fixo se tornou igual à 1. O teorema a seguir mostra que isso não é coincidência.

Teorema

Seja f_λ uma família parametrizada de funções. Suponha que

1. $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$,
2. $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$.

Então existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0 , respectivamente, e uma função $p : I \rightarrow J$ de classe C^∞ tais que

1. $p(\lambda_0) = x_0$,
2. $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ para todo $\lambda \in I$.

Além disso, f_λ não possui outros pontos fixos em J .

Família Quadrática: Bifurcação

Vamos estudar com mais detalhes a bifurcação com duplicação de período que ocorre na família quadrática.

Se $\mu > 2$, então existe $p'_\mu < p_\mu$ tal que $h(p'_\mu) = p_\mu$. Observe, na figura abaixo, os gráficos de h^2 para alguns valores de μ , juntamente com um quadrado de vértices (p'_μ, p_μ) , (p_μ, p_μ) , (p_μ, p'_μ) e (p'_μ, p'_μ) .

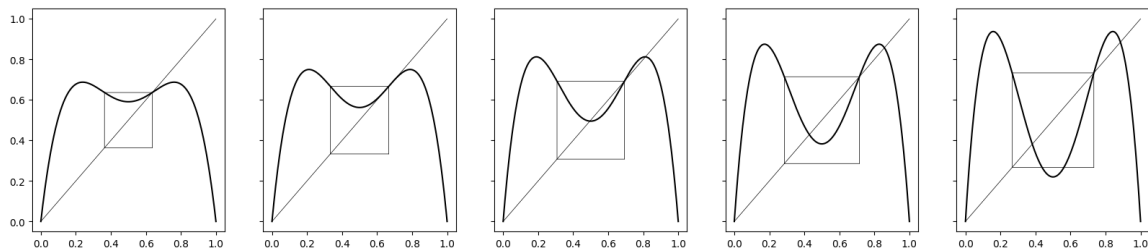


Figura 5: Gráficos de h^2 para $\mu = 2.75$, $\mu = 3$, $\mu = 3.25$, $\mu = 3.5$ e $\mu = 3.75$.

Família Quadrática: Bifurcação

Restringindo o gráfico de h^2 ao quadrado e rotacionando em π radianos, vemos que ele se assemelha ao gráfico da própria h no intervalo $[0, 1]$ para um valor de μ diferente.

Considere a função $L : [p'_\mu, p_\mu] \rightarrow [0, 1]$ linear tal que $L(p'_\mu) = 1$ e $L(p_\mu) = 0$. Definimos a renormalização de h como a função $Rh : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$Rh(x) = L \circ h^2 \circ L^{-1}(x).$$

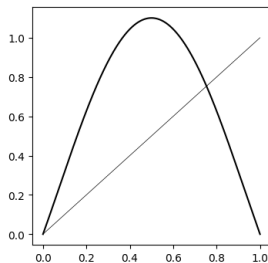


Figura 6: Gráfico de Rh para $\mu = 3.75$.

Observe que cada ponto fixo de Rh está relacionado com um ponto periódico de h de período 2. Além disso, o gráfico de Rh não está contido em $[0, 1]$ para algum $\mu < 4$. Desse modo, esperamos que Rh sofra uma bifurcação com duplicação de período conforme o parâmetro cresce e, de maneira análoga, que h^2 sofra uma bifurcação com duplicação de período. Continuando esse processo, temos uma sucessão de bifurcações com duplicação de período na família quadrática.

O computador nos permite observar esse fato experimentalmente. Para isso, vamos computar o digrama de órbita do ponto crítico da família quadrática para $\mu > 2$.

Família Quadrática: Bifurcação

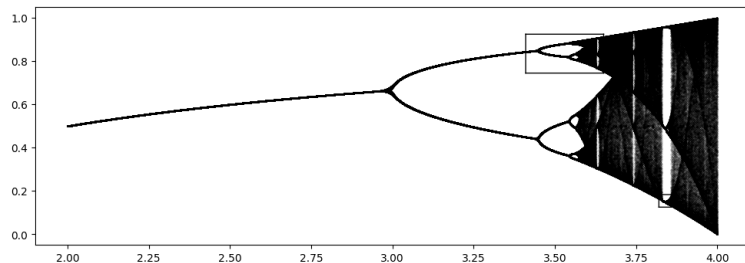


Figura 7: Diagrama de órbita de h para $\mu \in [2, 4]$.

Família Quadrática: Bifurcação

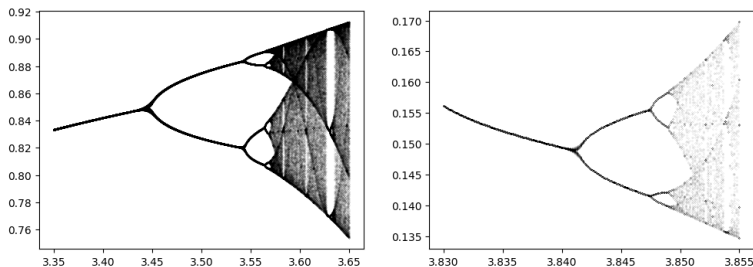


Figura 8: Ampliação das regiões retangulares marcadas na Figura 7.

Conceitos Elementares

Família Quadrática

Estudo Inicial

Conjuntos de Cantor

Caos

Conjugação Topológica

Dinâmica Simbólica

Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Teorema de Sharkovsky

Nessa seção, vamos considerar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Além disso, escreveremos $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_n$ quando I_0, I_1, \dots, I_n são intervalos compactos e $f(I_k) \supset I_{k+1}$ para todo $0 \leq k < n$.

Teorema de Sharkovsky

Proposição

Se $I_0 \longrightarrow I_1$, então existe um intervalo fechado $I'_0 \subset I_0$ tal que $f(I'_0) = I_1$.

Demonstração.

Se $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [c, d]$, sejam $p, q \in [a, b]$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$. Suponha que $p \leq q$; se $q \leq p$, a demonstração é análoga.

Definindo $b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\}$ e $a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$ e observando que f é contínua, podemos concluir que $f(I'_0) = I_1$, onde $I'_0 = [a', b']$. □

Teorema de Sharkovsky

Lema

Se $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$, então existe $p \in I_0$ tal que as seguintes condições são válidas:

1. $f^k(p) \in I_k$ para todo $1 \leq k < n$.
2. $f^n(p) = p$.

Demonstração.

Basta observar que podemos construir uma sequência de intervalos fechados $I'_0, I'_1, \dots, I'_{n-1}$ com as seguintes propriedades:

- a) $I_0 \supset I'_0 \supset I'_1 \supset \cdots \supset I'_{n-1}$.
- b) $f^k(I'_{k-1}) = I_k$ para todo $1 \leq k < n$.
- c) $f^n(I'_{n-1}) = I_0$.



Teorema de Sharkovsky

Teorema

Se $\text{Per}_3(f) \neq \emptyset$, então $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 1$.

Demonstração.

Sejam $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de um elemento de $\text{Per}_3(f)$. Suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$; se $f(p_1) = p_3$ e $f(p_3) = p_2$, a demonstração é análoga. Definindo $I_0 = [p_1, p_2]$ e $I_1 = [p_2, p_3]$, temos que $I_0 \rightarrow I_1$, $I_1 \rightarrow I_0$ e $I_1 \rightarrow I_1$. Desse modo, podemos demonstrar as seguintes afirmações:

a) $\text{Per}_1(f) \neq \emptyset$.

De fato, $I_1 \rightarrow I_1$ implica que existe $p \in I_1$ tal que $f(p) = p$.

b) $\text{Per}_2(f) \neq \emptyset$.

De fato, $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$ implica que existe $p \in I_0$ tal que $f(p) \in I_1$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in I_0 \cap I_1$, o que é um absurdo pois $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e $p_2 \in \text{Per}_3(f)$.

Teorema de Sharkovsky

Demonstração (continuação).

c) $\text{Per}_4(f) \neq \emptyset$.

De fato, $I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I_1$ implica que existe $p \in I_1$ tal que $f^k(p) \in I_1$ para todo $1 \leq k < 3$, $f^3(p) \in I_0$ e $f^4(p) = p$.

Se $f^3(p) = p$, então $p \in I_0 \cap I_1$, o que é um absurdo pois $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e $f^2(p_2) = p_1 \notin I_1$. Se $f^k(p) = p$ para algum $1 \leq k < 3$, então $f^k(p) \in I_1$ para todo $k \geq 1$. Em particular, $f^3(p) \in I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e, portanto, $f^4(p) = p = p_3$, o que é um absurdo pois $f(p_3) = p_1 \notin I_1$.

De maneira análoga, podemos mostrar que $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 5$.



Teorema de Sharkovsky

Definição (Ordenação de Sharkovsky)

$3 \triangleright 5 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$

Teorema (Sharkovsky)

Se $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$, então $\text{Per}_m(f) \neq \emptyset$ para todo $n \triangleright m$.

Demonstração.

Ver [Burns e Hasselblatt, 2011].



Teorema de Sharkovsky

O Teorema de Sharkovsky pode ser usado para provar que órbitas periódicas de certos tamanhos não existem. Por exemplo, observando os gráficos de h , h^2 e h^4 para $\mu = 3.2$ vemos que $\text{Per}_4(h) = \emptyset$ e, portanto, $\text{Per}_n(h) = \emptyset$ para todo $n \geq 3$.

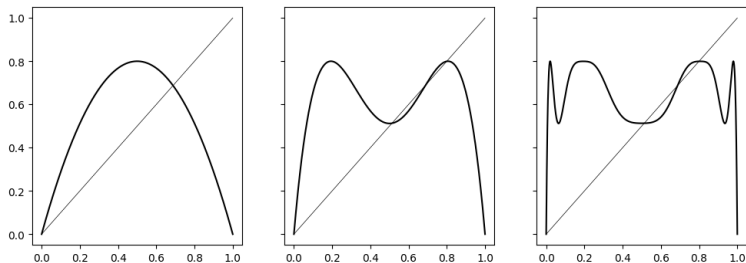


Figura 9: Gráficos de h , h^2 e h^4 para $\mu = 3.2$.

Teorema de Sharkovsky

A ordenação de Sharkovsky é a melhor possível. Por exemplo, se $\text{Per}_5(f) \neq \emptyset$ implica que $\text{Per}_3(f) \neq \emptyset$, então os números 3 e 5 podem trocar de lugar nessa ordenação. O seguinte teorema mostra que isso não é possível.

Teorema

Se $n \geq 1$, então existe uma função f com as seguintes propriedades:

- 1. $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$.*
- 2. $\text{Per}_m(f) = \emptyset$ para todo $m \triangleright n$.*



Burns, K. e Hasselblatt, B. (2011).

The Sharkovsky Theorem: a Natural Direct Proof.

The American Mathematical Monthly, 118(3):229–244.



Devaney, R. L. (1989).

An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.

Perseus Books.



Holmgren, R. A. (1996).

A First Course in Discrete Dynamical Systems.

Springer-Verlag New York.