1 Subshift

Seja $N \geq 2$. Definimos o conjunto Σ_N formado pelas sequências de números naturais limitados entre 1 e N. Precisamente,

$$\Sigma_N = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : 1 \leq x_n \leq N \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Definimos também a função $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \to \mathbb{R}$ que é dada por

$$d_N(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i},$$

onde $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ e $y = (y_n)_{n=0}^{\infty}$. Como $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} < \infty$, temos que d_N está bem definida.

Proposição 1.1. (Σ_N, d_N) *é um espaço métrico.*

Demonstração. Se $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}, y = (y_n)_{n=0}^{\infty}, z = (z_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$, então

1. $d_N(x,y) \geq 0$, pois $|x_i - y_i| \geq 0$ para todo $i \geq 0$.
2. $d_N(x,y) = d_N(y,x)$, pois $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ para todo $i \geq 0$.
3. $d_N(x,z) \leq d_N(x,y) + d_N(y,z)$, pois $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ para todo $i \geq 0$.

Desse modo, d_N é uma distância em Σ_N e (Σ_N, d_N) é um espaço métrico. □

Proposição 1.2. *Sejam* $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}, y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$.

1. *Se* $x_i = y_i$ *para todo* $0 \leq i \leq k$, *então* $d_N(x,y) \leq \frac{1}{N^k}$.
2. *Se* $d_N(x,y) < \frac{1}{N^k}$, *então* $x_i = y_i$ *para todo* $0 \leq i \leq k$.

Demonstração. 1. Se $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, então

$$d_N(x,y) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} = \frac{N-1}{N^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{N-1}{N^{k+1}} \frac{N}{N-1} = \frac{1}{N^k}.$$

2. Se $x_j \neq y_j$ para algum $0 \leq j \leq k$, então

$$d_N(x,y) \geq \frac{1}{N^j} \geq \frac{1}{N^k}.$$

□

Definimos a função shift $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ que é dada por $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ para todo $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$, isto é, $\sigma(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

Proposição 1.3. *σ é contínua.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$. Seja $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$ e defina $\delta = \frac{1}{N^{k+1}}$.

Pela Proposição anterior, se $y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$ e $d_N(x, y) < \delta$, então $x_i = y_i$ para todo $i = 0, \ldots, k+1$. Desse modo, $\sigma(x)$ e $\sigma(y)$ coincidem nas k primeiras entradas. Utilizando a Proposição anterior novamente, concluímos que $d_N(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$. $\square$

Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ uma matriz quadrada de ordem N tal que $a_{ij} \in \{0, 1\}$ para todo $1 \leq i, j \leq N$. Dizemos que A é uma matriz de transição. Definimos o conjunto Σ_A como

$$\Sigma_A = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N : a_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \geq 0\}.$$

Seja $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$. Observando que $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 1$, temos que $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_A$. Desse modo, podemos definir a função $\sigma_A : \Sigma_A \to \Sigma_A$ como sendo a restrição de σ em Σ_A. Dizemos que σ_A é o subshift definido por A.

Proposição 1.4. *Σ_A é um subconjunto fechado de Σ_N.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de elementos em Σ_A convergente para $x = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$. Observe que a sequência $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de sequências, pois cada x_n é elemento de Σ_N.

Suponha que $x \notin \Sigma_A$. Então, existe $j \geq 0$ tal que $a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Por outro lado, pela definição de convergência, existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{j+1}}$ e, portanto, as $j + 2$ primeiras entradas de x e x_{n_0} são iguais. Escrevendo $x_{n_0} = (\eta_n)_{n=0}^{\infty}$, concluímos que $a_{\eta_j \eta_{j+1}} = a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Absurdo, pois $x_{n_0} \in \Sigma_A$. $\square$

No restante dessa seção vamos estudar a dinâmica da função quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, onde o parâmetro $\mu = 3.839$ está fixado. Será omitido μ na notação da função e escreveremos apenas F.

Sejam $a = 0.149888$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Através de cálculos é possível mostrar que $F^3(I) \subset I$ e $|(F^3)'(I)| \leq |(F^3)'(a - \varepsilon)| < 1$ e, portanto, o intervalo I possui um ponto periódico atrator de F de período 3. Se a_1, a_2 e a_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$a_1 \simeq 0.149888,\ a_2 \simeq 0.489149 \text{ e } a_3 \simeq 0.959299.$$

De acordo com o Teorema de Sharkovsky, F possui infinitos pontos periódicos. Além disso, de acordo com o Teorema de Singer, essa é a única órbita atratora de F.

De modo análogo, concluímos que F possui outra órbita de tamanho 3. Se b_1, b_2 e b_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040,\ b_2 \simeq 0.539247 \text{ e } b_3 \simeq 0.953837.$$

Observando o gráfico de F^3, concluímos que para cada b_i, existe b_i' no lado oposto de b_i em relação ao ponto a_i tal que $F^3(b_i') = b_i$. Defina $A_1 = (b_1', b_1)$, $A_2 = (b_2', b_2)$ e $A_3 = (b_3, b_3')$. Cada A_i é exatamente o intervalo maximal contendo a_i utilizado na demonstração do Teorema de Singer.

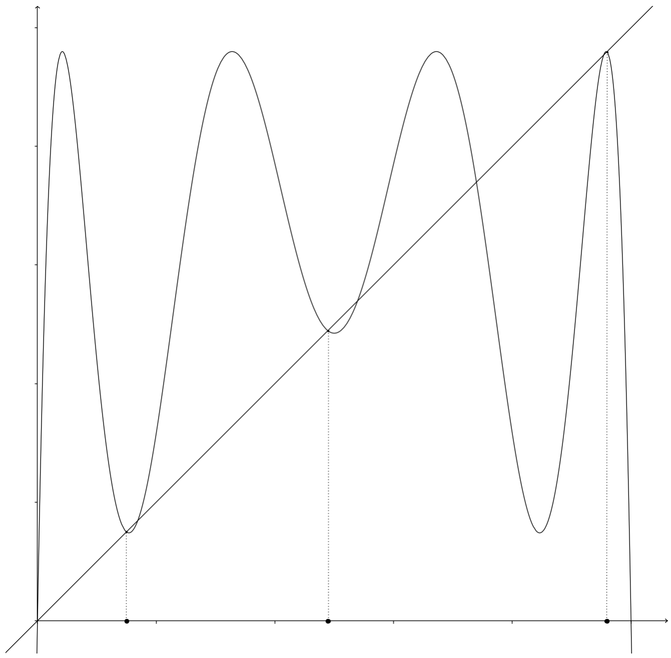

Figura: Gráfico de F^3 com os pontos a_1, a_2 e a_3 assinalados.

Sendo F^3 simétrica em relação ao ponto $\frac{1}{2}$, temos que $F(b_2') = F(b_2) = b_3$. Além disso, $F(b_1') = b_2'$ e $F(b_3') = b_1'$.

★ *Essas duas últimas igualdades parecem verdadeiras, mas não consegui provar. Ao menos é consistente, pois implica que* $b_3' \to b_1' \to b_2' \to b_3 \to b_1 \to b_2$ *e, portanto,* $F^3(b_i') = b_i$. *Tentei mostrar utilizando imagens inversas, mas cada imagem inversa possui dois elementos e eu não consigo construir uma regra sobre qual escolher.* ★

Desse modo, F mapeia, de forma monótona, A_1 em A_2 e A_3 em A_1. Observando que o máximo de F em A_2 é $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0.95975 < b_3'$, concluímos que $F(A_2) \subset A_3$.

Sabemos que se $x \notin [0,1]$, então $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = -\infty$. Além disso, o único ponto periódico de A_i é a_i e todos os pontos em A_i tendem para a órbita de a_i. Desse modo, todos os outros pontos periódicos de F residem no complemento de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ em $[0,1]$, que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam $I_0 = [0, b_1']$, $I_1 = [b_1, b_2']$, $I_2 = [b_2, b_3]$ e $I_3 = [b_3', 1]$ tais intervalos. A Proposição a seguir nos permite dizer mais.

Proposição 1.5. *Se $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$ é um ponto periódico de F, então $x \in I_1 \cup I_2$.*

Demonstração. Observando que F é monótona em cada I_k, temos que $F(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$, $F(I_1) = I_2$, $F(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$ e $F(I_3) = I_0$. Desse modo, se $x \in I_1 \cup I_2$ é periódico, então órbita de x permanece em $I_1 \cup I_2$.

Por outro lado, se $x \in I_0 - \{0\}$, existe um menor $n \geq 1$ tal que $F^n(x) \notin I_0$. Se $F^n(x) \in A_1$, então x não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de A_1 é a_1.

Se $F^n(x) \in I_1$, então x não pode ser periódico, pois caso contrário a órbita de x estaria contida em $I_1 \cup I_2$ e nunca retornaria para I_0.

Finalmente, se $x \in I_3$, então $F(x) \in I_0$ e a análise segue como no parágrafo anterior. $\square$

Defina o conjunto Λ como

$$\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2 : F^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de F estão em Λ, com exceção dos pontos 0, a_1, a_2 e a_3.

Lema 1.6. *Existe $N \geq 1$ tal que $|(F^n)'(\Lambda)| > 1$ para todo $n \geq N$.*

Demonstração. Como $F'' < 0$, temos que F' é estritamente decrescente. Sendo $F'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, concluímos que A_2 é uma vizinhança da única raiz de F'. Além disso, $|(F^3)'(b_2)| = |(F^3)'(b_2')| \simeq 0.3$. Desse modo, $|F'(I_1 \cup I_2)| \geq \nu$ para algum $\nu \in (0,1)$.

Observando o gráfico de F^3, concluímos que o subconjunto de $I_1 \cup I_2$ no qual $|F'| \leq 1$ é formado por três intervalos fechados. Sejam B_1, B_2 e B_3 tais intervalos, numerados da esquerda para direita. Utilizando a simetria do gráfico de F^3 e o fato de que $(F^3)'(b_1) > 1$, temos que $F^3(B_3) \subset A_1$ e, portanto, $B_3 \cap \Lambda = \emptyset$.

Por outro lado, $B_2 \subset [0.661, 0.683]$, já que $(F^3)'(0.661) > 1$ e $(F^3)'(0.683) < -1$. Desse modo, $F(B_2) \subset A_3$. Utilizando novamente a simetria do gráfico de F^3, concluímos que $F(B_1) \subset A_3$. Portanto, $B_1 \cap \Lambda = \emptyset$ e $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$. Assim, $|(F^3)'(\Lambda)| \geq \lambda$ para algum $\lambda > 1$. Observe que se $x \in \Lambda$ e $L \geq 1$, então

$$\left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| = \prod_{i=0}^{L-1} \left|\left(F^3\right)'\left(F^{3i}(x)\right)\right| \geq \lambda^L.$$

Finalmente, sejam $x \in \Lambda$ e $K \geq 1$ tal que $\nu^2\lambda^K > 1$. Se $N = 3K$ e $n \geq N$, podemos escrever $n = 3L + \alpha$, onde $L \geq K$ e $\alpha \in \{0,1,2\}$. Desse modo,

i. se $\alpha = 0$, então
$$\left|(F^n)'(x)\right| = \left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| \geq \lambda^L \geq \lambda^K > 1.$$

ii. se $\alpha = 1$, então
$$\left|(F^n)'(x)\right| = \left|F'\left(F^{3L}(x)\right)\right| \left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| \geq \nu\lambda^L > \nu^2\lambda^K > 1.$$

iii. se $\alpha = 2$, então
$$\left|(F^n)'(x)\right| = \left|F'\left(F^{3L+1}(x)\right)\right| \left|F'\left(F^{3L}(x)\right)\right| \left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| \geq \nu^2\lambda^L \geq \nu^2\lambda^K > 1.$$

□

Para as demonstrações dos próximos resultados, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos definir a função $S : \Lambda \to \Sigma_A$ por $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, onde $x_i = 1$ se $F^i(x) \in I_1$ e $x_i = 2$ se $F^i(x) \in I_2$ para todo $i \geq 0$. Observe que está S bem definida, pois $F(I_1) = I_2$ e $F(I_2) \subset I_1 \cup I_2$ e, portanto, $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 0$.

Lema 1.7. *Λ não contém intervalos.*

Demonstração. Suponha que Λ contém algum intervalo e sejam $a, b \in \Lambda$, com $a < b$, tais que $[a, b] \subset \Lambda$. Utilizando a notação do Lema anterior, seja $k \geq N$ tal que $(b-a)\nu^N \lambda^{k-N} > 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\begin{aligned} |F^k(b) - F^k(a)| &= |(F^k)'(c)|(b-a) \\ &= \left|\prod_{i=0}^{k-1} F'(F^i(c))\right|(b-a) \\ &= \left|\prod_{i=0}^{N-1} F'(F^i(c))\right|\left|\prod_{i=N}^{k-1} F'(F^i(c))\right|(b-a) \\ &\geq \nu^N \lambda^{k-N}(b-a) > 1 \end{aligned}$$

e, portanto, $F^k(a)$ ou $F^k(b)$ não é elemento de $[0, 1]$, o que é um absurdo. □

Proposição 1.8. *S é um homeomorfismo.*

Demonstração. i. S é injetora:

Sejam $x, y \in \Lambda$, com $x < y$, e suponha que $S(x) = S(y)$. Desse modo, $F^n(x)$ e $F^n(y)$ está no mesmo lado em relação ao ponto crítico $\frac{1}{2}$ e, portanto, F é monótona no intervalo J_n, cujos pontos extremos são $F^n(x)$ e $F^n(y)$, para todo $n \geq 0$. Desse modo, se $z \in [x, y]$, então $F^n(z) \in J_n \subset I_1 \cup I_2$ para todo $n \geq 0$ e, portanto, $z \in \Lambda$. Mas isso implica que $[x, y] \subset \Lambda$, o que é um absurdo.

ii. S é sobrejetora:

Seja $(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$. Vamos provar que existe $x \in \Lambda$ tal que $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Inicialmente, para cada $n \geq 0$, considere

$$I_{x_0 \cdots x_n} = \{x \in [0, 1] : x \in I_{x_0}, \ldots, F^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

Observe que $x \in I_{x_0 \cdots x_n}$ se, e somente se, $x \in I_{x_0}$ e $F(x) \in \{y \in [0,1] : y \in I_{x_1}, \dots, F^{n-1}(y) \in I_{x_n}\}$. Desse modo, $I_{x_0 \cdots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1 \cdots x_n})$.

Assim, por indução, é possível concluir que $I_{x_0 \cdots x_n}$ é um intervalo fechado não vazio. Além disso, $I_{x_0 \cdots x_n} = I_{x_0 \cdots x_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{x_n}) \subset I_{x_0 \cdots x_{n-1}}$.

Desse modo, $(I_{x_0 \cdots x_n})_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de intervalos encaixantes fechados e não vazios e, portanto, existe $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$. Como $F^i(x) \in I_{x_i}$ para todo $i \geq 0$, concluímos que $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Observe que $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$ é único, pois S é injetora.

iii. S é contínua:

Seja $x \in \Lambda$, com $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Sejam também $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$.

Como $I_{x_0 \dots x_k}$ um intervalo fechado e $x \in I_{x_0 \dots x_k}$, tome $\delta > 0$ tal que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \delta$ implica que $y \in I_{x_0 \dots x_k}$. Desse modo, $S(x)$ e $S(y)$ são iguais nas primeiras $k+1$ entradas e, portanto, $d_N(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$.

□

Teorema 1.9. *$S \circ F|_{\Lambda} = \sigma_A \circ S$.*

Demonstração. Seja $x \in \Lambda$. Utilizando a notação da Proposição anterior, se $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, então x é o único elemento de $\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$.

Podemos escrever $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1}) \cap \cdots \cap F^{-n}(I_{x_n})$. Se $x_0 = 1$, então $x_1 = 2$ e, portanto, $F(I_{x_0}) = I_{x_1}$. Se $x_0 = 2$, então $F(I_{x_0}) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$. Em ambos os casos, $F(I_{x_0}) \supset I_{x_1}$ e, desse modo,

$$F(I_{x_0 \dots x_n}) = I_{x_1} \cap \cdots \cap F^{-n+1}(I_{x_n}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S \circ F|_{\Lambda}(x) &= S(F(\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n})) \\ &= S(\cap_{n=1}^{\infty} I_{x_1 \cdots x_n}) \\ &= (x_n)_{n=1}^{\infty} = \sigma \circ S(x) \end{aligned}$$

□

Proposição 1.10. *Seja A uma matriz de transição de ordem N. Então σ_A possui $Tr(A^k)$ pontos periódicos de período k.*

Demonstração. Observe que $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$ é um ponto periódico de período k de σ se, e somente se, $x_i = x_{i+k}$ para todo $i \geq 0$, ou seja,

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \dots).$$

Desse modo, $x \in \Sigma_A$ se, e somente se, $a_{x_0x_1} = a_{x_1x_2} = \cdots = a_{x_{k-1}x_0} = 1$ e, portanto,

$$\begin{cases} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\dots a_{x_{k-1}x_0} = 1, & \text{se } x \in \Sigma_A \\ a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\dots a_{x_{k-1}x_0} = 0, & \text{se } x \notin \Sigma_A \end{cases}$$

Assim, a quantidade de pontos periódicos de período k de σ_A é dada por

$$\sum_{1 \leq x_0, \dots, x_{k-1} \leq N} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\dots a_{x_{k-1}x_0}.$$

Por outro lado, utilizando a definição de multiplicação de matrizes podemos mostrar por indução que $A^k = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$, onde

$$c_{ij} = \sum_{1 \leq x_1, \dots, x_{k-1} \leq N} a_{ix_1}a_{x_1x_2}\dots a_{x_{k-1}j}$$

e, portanto,

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{x_0=1}^{N} c_{x_0x_0} = \sum_{1 \leq x_0, \dots, x_{k-1} \leq N} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\dots a_{x_{k-1}x_0}.$$

□