

# Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Caóticos

Agenor Gonçalves Neto

São Paulo, 2020

## Sumário

<b>1</b>	<b>Conceitos Elementares</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Família Quadrática</b>	<b>3</b>
2.1	Estudo Inicial . . . . .	3
2.2	Conjuntos de Cantor . . . . .	4
2.3	Caos . . . . .	5
2.4	Conjugação Topológica . . . . .	7
2.5	Dinâmica Simbólica . . . . .	9
2.6	Matriz de Transição . . . . .	11
2.7	Bifurcação . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Teorema de Sharkovsky</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Teorema de Singer</b>	<b>18</b>

## 1 Conceitos Elementares

De maneira suficiente para os nossos objetivos, definimos um sistema dinâmico como uma função  $f : X \rightarrow X$ , onde  $X$  é um espaço métrico. Usualmente,  $X$  será um subconjunto de  $\mathbb{R}$  com a distância usual. Dado  $x \in X$ , nosso objetivo é estudar as propriedades da sequência definida recursivamente por

$$f^0(x) = x \quad \text{e} \quad f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

para todo  $k \geq 1$ . Para isso, vamos iniciar com algumas definições que estarão presentes durante todo o texto.

Se  $p \in X$  e  $f(p) = p$ , então  $p$  é um ponto fixo de  $f$ . Se  $f^n(p) = p$  para algum  $n \geq 1$ , então  $p$  é um ponto periódico de  $f$  de período  $n$ . Se  $f^n(p) = p$  para algum  $n \geq 1$  e

$f^k(p) \neq p$  para todo  $1 \leq k < n$ , então  $p$  é um ponto periódico  $f$  de período principal  $n$ . O conjunto dos pontos periódicos de  $f$  será denotado por  $\text{Per}(f)$  e o conjunto dos pontos periódicos de  $f$  de período principal  $n$  será denotado por  $\text{Per}_n(f)$ .

Se  $x \in X$ , então  $\mathcal{O}(x) = \{f^k(x) : k \geq 0\}$  é a órbita de  $x$ . Se  $p$  é um ponto periódico de período  $n$ , então  $\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p\}$  é o conjunto estável de  $p$ . Por fim, o conjunto  $\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(x)| = \infty\}$  é o conjunto estável do infinito.

A Proposição 1.1 nos fornece uma maneira útil de verificar se uma função contínua definida num intervalo compacto de  $\mathbb{R}$  possui ponto fixo.

**Proposição 1.1.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $f([a, b]) \subset [a, b]$  ou  $f([a, b]) \supset [a, b]$ , então  $f$  possui ponto fixo.*

*Demonstração.* Considere a função contínua  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = f(x) - x$ . Em ambos os casos é possível verificar, pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), que existe  $p \in [a, b]$  tal que  $g(p) = 0$ .  $\square$

Se a função for de classe  $\mathcal{C}^1$ , podemos conhecer o comportamento dos pontos numa vizinhança de um ponto fixo cuja derivada em módulo é diferente de 1.

**Teorema 1.2.** *Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $p \in \text{Per}_n(f)$ .*

1. *Se  $|Df^n(p)| < 1$ , então existe uma vizinhança de  $p$  contida em  $\mathcal{B}(p)$ .*
2. *Se  $|Df^n(p)| > 1$ , então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  com a seguinte propriedade: se  $x \in V \setminus \{p\}$ , então  $f^{kn}(x) \notin V$  para algum  $k \geq 1$ .*

*Demonstração.*

1. Sendo  $Df^n$  contínua, existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  tal que  $|Df^n(V)| \leq \lambda < 1$ . Pelo Teorema do Valor Médio (TVM), se  $x \in V$ , então  $|f^n(x) - p| \leq \lambda|x - p|$ . Por indução,  $|f^{kn}(x) - p| \leq \lambda^k|x - p|$  para todo  $k \geq 1$  e, portanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$ .
2. Exercício.

$\square$

**Definição 1.3.** *Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $p \in \text{Per}_n(f)$ .*

- i. *Se  $|Df^n(p)| < 1$ , então  $p$  é um ponto atrator.*
- ii. *Se  $|Df^n(p)| > 1$ , então  $p$  é um ponto repulsor.*

A Definição 1.3, que segue naturalmente do Teorema 1.2, pode ser estendida para órbitas de pontos periódicos. De fato, pela Regra da Cadeia, é possível verificar que se um ponto é atrator (repulsor), então todos os pontos de sua órbita também são atratores (repulsores) e, nesse caso, dizemos que a órbita é atratora (repulsora).

## 2 Família Quadrática

Nessa seção, consideraremos a família de funções  $h_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$h_\mu(x) = \mu x(1 - x),$$

onde  $\mu > 1$  é um parâmetro real. Essa família de funções é conhecida por família quadrática. Quando não houver possibilidade de confusão, denotaremos a função  $h_\mu$  simplesmente por  $h$ . Nosso objetivo é estudar alguns dos principais tópicos de sistemas dinâmicos através da família quadrática.

### 2.1 Estudo Inicial

Iniciamos o estudo da família quadrática observando que  $h$  possui dois pontos fixos.

**Proposição 2.1.** *Se  $\mu > 1$ , então  $h(0) = 0$  e  $h(p_\mu) = p_\mu$ , onde  $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ .*

*Demonstração.* Exercício. □

Podemos restringir  $h$  ao intervalo  $[0, 1]$ , pois conhecemos o comportamento dos pontos que não pertencem à esse ele.

**Proposição 2.2.** *Se  $\mu > 1$ , então  $\lim_{k \rightarrow \infty} h^k(x) = -\infty$  para todo  $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ .*

*Demonstração.* Basta observar que a sequência  $x, h(x), h^2(x), \dots$  é estritamente decrescente e ilimitada quando  $x \in (-\infty, 0)$ . □

A Proposição 2.3, que pode visualizada graficamente, nos mostra que a dinâmica de  $h$  é simples para valores baixos de  $\mu$ .

**Proposição 2.3.** *Se  $\mu \in (1, 3)$ , então*

1. *0 é um ponto repulsor e  $p_\mu$  é um ponto atrator.*
2.  *$\lim_{k \rightarrow \infty} h^k(x) = p_\mu$  para todo  $x \in (0, 1)$ .*

*Demonstração.* Exercício. □

Desse modo, a dinâmica de  $h$  está completamente determinada quando  $\mu \in (1, 3)$ . De fato,

$$\mathcal{B}(0) = \{0, 1\}, \quad \mathcal{B}(p_\mu) = (0, 1) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

## 2.2 Conjuntos de Cantor

Vamos estudar a dinâmica de  $h$  para  $\mu > 4$ . Inicialmente, observe que  $h(\frac{1}{2}) > 1$  e, portanto, existem pontos em  $[0, 1]$  que não permanecem em  $[0, 1]$  após uma iteração de  $h$ . Pela Proposição 2.2, tais pontos pertencem ao conjunto estável do infinito. De modo mais geral, se um ponto de  $[0, 1]$  não permanece em  $[0, 1]$  após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto estável do infinito.

Desse modo, considere o conjunto  $\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : h^n(x) \in [0, 1]\}$  formado pelos pontos que permanecem em  $[0, 1]$  após  $n$  iterações de  $h$  e o conjunto  $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$  formado pelos pontos de  $[0, 1]$  que sempre permanecem em  $[0, 1]$  por iterações de  $h$ . Assim, podemos estudar a dinâmica de  $h|_{\Lambda}$ .

Observe que  $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ , onde  $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$  e  $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ . De modo mais geral, temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.4.** *Se  $\mu > 4$ , então*

1.  $\Lambda_n$  é a união de  $2^n$  intervalos fechados disjuntos.
2.  $h^n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora, onde  $[a, b]$  é um dos intervalos que formam  $\Lambda_n$ .

*Demonstração.* Se  $k \geq 1$ , suponha que  $\Lambda_{k-1}$  é a união de  $2^{k-1}$  intervalos fechados disjuntos e que  $h^{k-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora, onde  $[a, b]$  é um dos intervalos que formam  $\Lambda_{k-1}$ . Suponha que  $h^{k-1}$  é estritamente crescente; se  $h^{k-1}$  é estritamente decrescente, a demonstração é análoga.

Inicialmente, observe que existem  $x'_1 < x'_2$  tais que  $h^{k-1}([a, x'_1]) = [0, x_1]$ ,  $h^{k-1}((x'_1, x'_2)) = (x_1, x_2)$  e  $h^{k-1}([x'_2, b]) = [x_2, 1]$  e, portanto,  $h^k([a, x'_1]) = [0, 1]$ ,  $h^k((x'_1, x'_2)) > 1$  e  $h^k([x'_2, b]) = [0, 1]$ . Além disso, pela Regra da Cadeia, temos também que  $Dh^k([a, x'_1]) > 0$  e  $Dh^k([x'_2, b]) < 0$ .

Desse modo, é imediato concluir que  $\Lambda_k$  é a união de  $2^k$  intervalos fechados disjuntos e que  $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora, onde  $[a, b]$  é um dos intervalos formam  $\Lambda_k$ .  $\square$

Com isso, podemos mostrar que  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor.

**Definição 2.5.** Seja  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  um conjunto não vazio. Dizemos que  $\Gamma$  é um conjunto de Cantor se as seguintes condições são válidas:

- i.  $\Gamma$  é limitado.
- ii.  $\Gamma$  é totalmente desconexo.
- iii.  $\Gamma$  é perfeito.

$\Gamma$  é totalmente desconexo se não contém intervalos.  $\Gamma$  é perfeito se é fechado e todos os seus pontos são pontos de acumulação dele próprio. Para facilitar as próximas demonstrações, vamos considerar  $\mu$  suficientemente grande tal que a derivada em módulo de  $h$  em  $\Lambda_1$  seja maior que 1.

**Lema 2.6.** Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então

1.  $|Dh(\Lambda_1)| > \lambda > 1$ .
2.  $b - a < \frac{1}{\lambda^n}$ , onde  $[a, b]$  é um dos intervalos que formam  $\Lambda_n$ .

*Demonstração.*

1. Basta observar que  $Dh(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$  e  $Dh(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$ .
2. Se  $x \in [a, b]$ , então  $Dh^n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} Dh(h^k(x)) > \lambda^n$ . Pelo TVM, existe  $c \in (a, b)$  tal que

$$1 = |h^n(b) - h^n(a)| > \lambda^n |b - a|.$$

□

Pelo Lema 2.6, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $k \geq 1$  tal que os intervalos que formam  $\Lambda_k$  possuem tamanho menor que  $\varepsilon$ .

**Teorema 2.7.** Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor.

*Demonstração.*

a)  $\Lambda$  é totalmente desconexo.

Se existe  $[a, b] \subset \Lambda$ , seja  $k$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < |a - b|$ . Em particular,  $[a, b] \subset \Lambda_k$ , o que é um absurdo pois os intervalos que formam  $\Lambda_k$  possuem tamanho  $\leq \frac{1}{\lambda^k}$ .

b)  $\Lambda$  é perfeito.

Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . Se  $x \in [a, b]$ , onde  $[a, b]$  é um dos intervalos que formam  $\Lambda_k$ , então  $a \in \Lambda$  e  $|x - a| < \varepsilon$  e, portanto,  $x$  é ponto de acumulação de  $\Lambda$ .

□

O Teorema 2.7 é válido para  $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$ , porém a demonstração é consideravelmente mais difícil.

## 2.3 Caos

Vamos estudar um fenômeno que a família quadrática exhibe para  $\mu$  suficientemente grande: o comportamento caótico de suas órbitas.

Iniciamos o estudo dos sistemas dinâmicos caóticos com a seguinte definição:

**Definição 2.8.** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função. Dizemos que  $f$  é topologicamente transitiva se dados  $x, y \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , existem  $z \in X$  e  $k \geq 1$  tais que  $|x - z| < \varepsilon$  e  $|y - f^k(z)| < \varepsilon$ .

Intuitivamente, um sistema dinâmico é topologicamente transitivo quando é possível ir de uma vizinhança para qualquer outra através de iterações de  $f$ . A família quadrática exibe esse comportamento para  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ .

**Proposição 2.9.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $h|_{\Lambda}$  é topologicamente transitiva.*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . Temos que  $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora, onde  $x \in [a, b]$  e  $[a, b]$  é um dos intervalos que formam  $\Lambda_k$ . Pelo TVI, existe  $z \in [a, b]$  tal que  $h^k(z) = y$ . Observando que  $z \in \Lambda$ , concluímos que  $h|_{\Lambda}$  é topologicamente transitiva.  $\square$

Outra definição que precisamos para o estudo dos sistemas dinâmicos caóticos é a seguinte:

**Definição 2.10.** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função. Dizemos que  $f$  depende sensivelmente das condições iniciais se existe  $\delta > 0$  com a seguinte propriedade: dados  $x \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , existem  $y \in X$  e  $k \geq 1$  tais que  $|x - y| < \varepsilon$  e  $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$ .

Intuitivamente, um sistema dinâmico possui dependência sensível das condições iniciais quando existem pontos arbitrariamente próximos de  $x$  cujas iteradas eventualmente se distanciam das iteradas de  $x$  em pelo menos  $\delta$ . Novamente, a família quadrática exibe esse comportamento para  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ .

**Proposição 2.11.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $h|_{\Lambda}$  depende sensivelmente das condições iniciais.*

*Demonstração.* Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . Temos que  $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora, onde  $x \in [a, b]$  e  $[a, b]$  é um dos intervalos que formam  $\Lambda_k$ . Suponha que  $h^k(a) = 0$  e  $h^k(b) = 1$ ; se  $h^k(a) = 1$  e  $h^k(b) = 0$ , a demonstração é análoga.

Como  $h(\frac{1}{2}) > 1$  e  $x \in \Lambda$ , temos que  $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ . Se  $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2})$ , então  $|h^k(x) - h^k(b)| = |h^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$  e se  $h^k(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$ , então  $|h^k(x) - h^k(a)| = |h^k(x)| > \frac{1}{2}$ . Observando que  $|x - a| < \varepsilon$  e  $|x - b| < \varepsilon$ , concluímos que  $h|_{\Lambda}$  depende sensivelmente das condições iniciais.  $\square$

Um sistema dinâmico é caótico se, além de possuir as duas propriedades definidas anteriormente, seu conjunto de pontos periódicos é denso.

**Definição 2.12.** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função. Dizemos que  $f$  é caótica se as seguintes condições são válidas:

- i.  $\text{Per}(f)$  é denso em  $X$ .
- ii.  $f$  é topologicamente transitiva.
- iii.  $f$  depende sensivelmente das condições iniciais.

Desse modo, basta mostrar que  $\text{Per}(h|_\Lambda)$  é denso em  $\Lambda$  para concluir que  $h|_\Lambda$  é caótica para  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ .

**Proposição 2.13.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $\text{Per}(h|_\Lambda)$  é denso em  $\Lambda$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . Temos que  $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora, onde  $x \in [a, b]$  e  $[a, b]$  é um dos intervalos que formam  $\Lambda_k$ . Como  $h^k([a, b]) \supset [a, b]$ , existe  $y \in [a, b]$  tal que  $h^k(y) = y$ . Observando que  $y \in \Lambda$  e  $|x - y| < \varepsilon$ , concluímos que  $\text{Per}(h|_\Lambda)$  é denso em  $\Lambda$ .  $\square$

**Teorema 2.14.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $h|_\Lambda$  é caótica.*

Novamente, o Teorema 2.14 é válido para  $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$ , porém a demonstração é consideravelmente mais difícil.

Por fim, enunciamos o Teorema 2.15 que nos permite, sob algumas hipóteses, concluir um sistema dinâmico é caótico sem verificar se ele depende sensivelmente das condições iniciais.

**Teorema 2.15.** *Seja  $f : X \rightarrow X$  é uma função contínua, onde  $X$  é um conjunto infinito. Se  $\text{Per}(f)$  é denso em  $X$  e  $f$  é topologicamente transitiva, então  $f$  é caótica.*

*Demonstração.* Ver [3].  $\square$

## 2.4 Conjugação Topológica

Vamos estudar um conceito em sistemas dinâmicos que nos permite considerar iguais dois sistemas dinâmicos que inicialmente são distintos.

**Definição 2.16.** Sejam  $f : X \rightarrow X$ ,  $g : Y \rightarrow Y$  e  $\tau : X \rightarrow Y$  funções. Dizemos que  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas por  $\tau$  se as seguintes condições são válidas:

- i.  $\tau$  é um homeomorfismo.
- ii.  $\tau \circ f = g \circ \tau$ .

Intuitivamente, o primeiro item afirma que os conjuntos  $X$  e  $Y$  são iguais e o segundo, que os sistemas dinâmicos  $f$  e  $g$  são iguais. Por exemplo, é imediato verificar que  $p \in \text{Per}_n(f)$  se, e somente se,  $\tau(p) \in \text{Per}_n(g)$ . A Proposição 2.17 nos mostra que sistemas dinâmicos topologicamente conjugados compartilham outras propriedades.

**Proposição 2.17.** *Sejam  $f : X \rightarrow X$ ,  $g : Y \rightarrow Y$  e  $\tau : X \rightarrow Y$  funções. Se  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas por  $\tau$ , então*

- 1.  $\text{Per}(f)$  é denso em  $X$  se, e somente se,  $\text{Per}(g)$  é denso em  $Y$ .
- 2.  $f$  é topologicamente transitiva se, e somente se,  $g$  é topologicamente transitiva.

*Demonstração.*

1. Se  $\text{Per}(f)$  denso em  $X$ , então  $\tau(\text{Per}(f))$  é denso em  $Y$  pois  $\tau$  é contínua. Observando que  $\tau(\text{Per}(f)) = \text{Per}(g)$ , concluímos que  $\text{Per}(g)$  é denso em  $Y$ . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.
2. Sendo  $\tau$  contínua, dados  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $z \in X$ ,  $|x - z| < \delta$  e  $|y - f^k(z)| < \delta$ , então  $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$  e  $|\tau(y) - \tau(f^k(z))| < \varepsilon$ .

Se  $x', y' \in Y$ , existem  $x, y \in X$  tais que  $\tau(x) = x'$  e  $\tau(y) = y'$ . Sendo  $f$  topologicamente transitiva, existem  $z \in X$  e  $k \geq 1$  tais que  $|x - z| < \delta$  e  $|y - f^k(z)| < \delta$ . Desse modo,  $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$  e  $|\tau(y) - \tau(f^k(z))| < \varepsilon$ . Se  $\tau(z) = z'$ , então  $|x' - z'| < \varepsilon$  e  $|y' - g^k(z')| < \varepsilon$ . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.  $\square$

Em geral, a dependência sensível de condições iniciais não é preservada por conjugação topológica. De fato, considere as funções  $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  e  $g : (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$  dadas por  $f(x) = g(x) = x^2$ . É possível mostrar que  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas pelo homeomorfismo  $\tau : (0, 1) \rightarrow (1, \infty)$  dado por  $\tau(x) = \frac{1}{x}$  e que apenas  $g$  possui dependência sensível das condições iniciais.

Na sequência, utilizaremos a conjugação topológica para demonstrar que  $h$  é caótica para  $\mu = 4$ .

**Lema 2.18.** A função  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é caótica.

*Demonstração.* Inicialmente, é possível provar por indução que  $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$  é uma função bijetora linear para todo  $0 \leq k < 2^n$  e para todo  $n \geq 1$ . Desse modo, dados  $x \in [0, 1]$  e  $\varepsilon > 0$ , seja  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ,  $x \in I$  e  $T^n : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora, onde  $I = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ .

- a)  $\text{Per}(T)$  é denso em  $[0, 1]$ .

Como  $T(I) \supset I$ , existe  $p \in I$  tal que  $T^n(p) = p$ . Observando que  $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , concluímos que  $\text{Per}(T)$  é denso em  $[0, 1]$ .

- b)  $T$  é topologicamente transitiva.

Sendo  $T^n : I \rightarrow [0, 1]$  bijetora, se  $y \in [0, 1]$ , então existe  $z \in I$  tal que  $T^n(z) = y$ . Observando que  $|x - z| \leq \frac{1}{2^n}$  e  $|y - T^n(z)| = 0$ , concluímos que  $T$  é topologicamente transitiva.



c)  $T$  depende sensivelmente das condições iniciais.

Sendo  $T^n : I \rightarrow [0, 1]$  bijetora, existem  $a, b \in I$  tais que  $T^n(a) = 0$  e  $T^n(b) = 1$ . Se  $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ , então  $|T^n(x) - T^n(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$  e se  $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ , então  $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$ . Observando que  $|x - a| \leq \frac{1}{2^n}$  e  $|x - b| \leq \frac{1}{2^n}$ , concluímos que  $T$  depende sensivelmente das condições iniciais.

□

**Teorema 2.19.** *Se  $\mu = 4$ , então  $h$  é caótica.*

*Demonstração.* Basta observar que  $h \circ \tau = \tau \circ T$ , onde  $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é o homeomorfismo dado por  $\tau(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ .

□

## 2.5 Dinâmica Simbólica

Dado  $N \geq 2$ , seja  $\Sigma_N$  o conjunto das sequências de números naturais limitados entre 1 e  $N$ , isto é,  $\Sigma_N = \{(x_0 x_1 x_2 \dots) : 1 \leq x_n \leq N \text{ para todo } n \geq 0\}$ . Seja também  $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$d_N(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{N^k},$$

onde  $x = (x_0 x_1 x_2 \dots)$  e  $y = (y_0 y_1 y_2 \dots)$ . É imediato verificar que  $(\Sigma_N, d_N)$  é um espaço métrico. Por fim, seja  $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$  a função dada por  $\sigma(x_0 x_1 x_2 \dots) = (x_1 x_2 x_3 \dots)$ .

**Proposição 2.20.** *Sejam  $x = (x_0 x_1 x_2 \dots)$  e  $y = (y_0 y_1 y_2 \dots)$  elementos de  $\Sigma_N$ .*

1. *Se  $x_k = y_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ , então  $d_N(x, y) \leq \frac{1}{N^n}$ .*
2. *Se  $d_N(x, y) < \frac{1}{N^n}$ , então  $x_k = y_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ .*

*Demonstração.* Exercício.

□

**Proposição 2.21.**  *$\sigma$  é contínua.*

*Demonstração.* Sejam  $x = (x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_N$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Se  $d_N(x, y) < \frac{1}{2^{n+1}}$ , onde  $y = (y_0 y_1 y_2 \dots) \in \Sigma_N$ , então  $x_k = y_k$  para todo  $0 \leq k \leq n+1$ . Como  $\sigma(x) = (x_1 x_2 x_3 \dots)$  e  $\sigma(y) = (y_1 y_2 y_3 \dots)$ , temos que as primeiras  $n+1$  entradas de  $\sigma(x)$  e  $\sigma(y)$  são iguais. Desse modo,  $d_N(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e, portanto,  $\sigma$  é contínua.

□

Para a demonstração do próximo resultado, vamos considerar  $N = 2$ . Se  $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ , sejam  $I_1 = [0, x_1]$  e  $I_2 = [x_2, 1]$ . Como  $\Lambda \subset I_1 \cup I_2$ , podemos definir a função  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  dada por  $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$ , onde  $x_k = 1$  se  $h^k(x) \in I_1$  e  $x_k = 2$  se  $h^k(x) \in I_2$  para todo  $k \geq 0$ .

**Teorema 2.22.** Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $h|_{\Lambda}$  e  $\sigma$  são topologicamente conjugadas por  $S$ .

*Demonstração.*

a)  $S$  é injetora.

Sejam  $x, y \in \Lambda$ ,  $x < y$ . Se  $S(x) = S(y)$ , então  $h^k(x)$  e  $h^k(y)$  está no mesmo lado em relação ao ponto crítico para todo  $k \geq 0$  e, portanto,  $h$  é monótona em cada intervalo  $J_k$  cujos extremos são  $h^k(x)$  e  $h^k(y)$ . Desse modo, se  $z \in [x, y]$ , então  $h^k(z) \in J_k \subset I_1 \cup I_2$  para todo  $k \geq 0$  e, portanto,  $z \in \Lambda$ , o que é um absurdo pois  $\Lambda$  é totalmente desconexo.

b)  $S$  é sobrejetora.

Seja  $(x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_2$ . Inicialmente, para cada  $n \geq 0$ , considere

$$I_{x_0 \dots x_n} = \{x \in [0, 1] : x \in I_{x_0}, \dots, h^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

Escrevendo  $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap h^{-1}(I_{x_1 \dots x_n})$ , é possível concluir por indução que  $I_{x_0 \dots x_n}$  é um intervalo fechado não vazio. Além disso,  $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0 \dots x_{n-1}} \cap h^{-n}(I_{x_n}) \subset I_{x_0 \dots x_{n-1}}$ . Desse modo,  $I_{x_0}, I_{x_0 x_1}, I_{x_0 x_1 x_2}, \dots$  é uma sequência de intervalos encaixantes fechados e, portanto, existe  $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n}$ . Como  $h^k(x) \in I_{x_k}$  para todo  $k \geq 0$ , concluímos que  $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$ . Observe que  $x$  é único, pois  $S$  é injetora.

c)  $S$  é contínua.

Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 0$  tal que  $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ . Se  $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$ , então  $x \in I_{x_0 \dots x_k}$ . Sendo  $I_{x_0 \dots x_k}$  um intervalo fechado, existe  $\delta > 0$  tal que se  $y \in \Lambda$  e  $|x - y| < \delta$ , então  $y \in I_{x_0 \dots x_k}$ . Desse modo,  $S(x)$  e  $S(y)$  são iguais nas primeiras  $k + 1$  entradas e, portanto,  $d_2(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$ .

d)  $S^{-1}$  é contínua.

Exercício.

e)  $S \circ h|_{\Lambda} = \sigma \circ S$ .

Se  $x \in \Lambda$  e  $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$ , então  $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n} = \{x\}$ . Desse modo, é imediato que

$$S \circ h|_{\Lambda}(x) = S(h(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n})) = S(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{x_1 \dots x_n}) = (x_1 x_2 x_3 \dots) = \sigma \circ S(x).$$

□

O teorema anterior nos permite saber, por exemplo, a quantidade de pontos periódicos de  $h|_{\Lambda}$  de período  $n$  para todo  $n \geq 1$ .

**Corolário 2.23.** Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $h|_\Lambda$  possui  $2^n$  pontos periódicos de período  $n$  para todo  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Basta observar que  $\sigma$  possui  $2^n$  pontos periódicos de período  $n$  para todo  $n \geq 1$ .  $\square$

## 2.6 Matriz de Transição

Dado  $N \geq 2$ , dizemos que  $A$  é uma matriz de transição se  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  é uma matriz quadrada de ordem  $N$  tal que  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  para todo  $1 \leq i, j \leq N$ . Se  $A$  é uma matriz de transição, definimos o conjunto  $\Sigma_A$  por

$$\Sigma_A = \{(x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_N : a_{x_k x_{k+1}} = 1 \text{ para todo } k \geq 0\}.$$

Observe que se  $x \in \Sigma_A$ , então  $\sigma(x) \in \Sigma_A$ . Desse modo, podemos definir a função  $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  como sendo a restrição de  $\sigma$  em  $\Sigma_A$ .

**Proposição 2.24.**  $\Sigma_A$  é um subconjunto fechado de  $\Sigma_N$ .

*Demonstração.* Seja  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  uma sequência de elementos em  $\Sigma_A$  convergente para  $x \in \Sigma_N$ . Vamos mostrar que  $x \in \Sigma_A$ .

Se  $x = (\xi_0 \xi_1 \xi_2 \dots)$  e  $x \notin \Sigma_A$ , então existe  $k \geq 0$  tal que  $a_{\xi_k \xi_{k+1}} = 0$ . Por outro lado, pela definição de convergência, existe  $n_0 \geq 0$  tal que  $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{k+1}}$  e, portanto, as  $k+2$  primeiras entradas de  $x$  e  $x_{n_0}$  são iguais. Escrevendo  $x_{n_0} = (\eta_0 \eta_1 \eta_2 \dots)$ , concluímos que  $a_{\eta_k \eta_{k+1}} = a_{\xi_k \xi_{k+1}} = 0$ , o que é um absurdo pois  $x_{n_0} \in \Sigma_A$ .  $\square$

Vamos estudar a dinâmica da família quadrática para  $\mu = 3.839$ . Se  $a = 0.149888$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , então é possível mostrar que  $h^3(I) \subset I$  e  $|Dh^3(I)| < 1$  e, portanto, o intervalo  $I$  possui um ponto periódico atrator de  $h$  de período principal 3. Se  $a_1, a_2$  e  $a_3$  são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

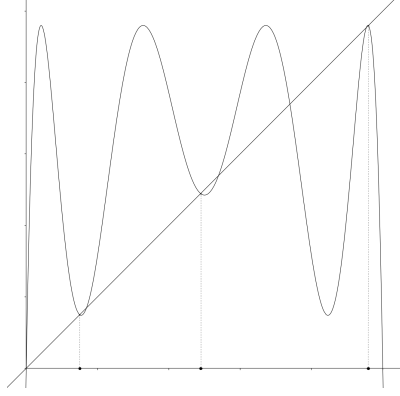
$$a_1 \simeq 0.149888, \quad a_2 \simeq 0.489149 \quad \text{e} \quad a_3 \simeq 0.959299.$$

Com auxílio do Teorema de Sharkovsky e do Teorema de Singer, que estudaremos na sequência, podemos concluir que  $h$  possui infinitos pontos periódicos e essa é a única órbita atratora de  $h$ .

De modo análogo, concluímos que  $h$  possui outra órbita de tamanho 3. Se  $b_1, b_2$  e  $b_3$  são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040, \quad b_2 \simeq 0.539247 \quad \text{e} \quad b_3 \simeq 0.953837.$$

Observando o gráfico de  $h^3$ , vemos que para cada  $b_i$ , existe  $b'_i$  no lado oposto de  $b_i$  em relação ao ponto  $a_i$  tal que  $h^3(b'_i) = b_i$ . Defina  $A_1 = (b'_1, b_1)$ ,  $A_2 = (b'_2, b_2)$  e  $A_3 = (b'_3, b_3)$ .



**Figura:** Gráfico de  $h^3$  com os pontos  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  assinalados.

Sendo  $h^3$  simétrica em relação ao ponto  $\frac{1}{2}$ , temos que  $h(b'_2) = h(b_2) = b_3$ . Além disso, podemos observar que  $h(b'_1) = b'_2$  e  $h(b'_3) = b'_1$  e, portanto,  $h$  mapeia de forma monótona  $A_1$  em  $A_2$  e  $A_3$  em  $A_1$ . Observando que o máximo de  $h$  em  $A_2$  é  $h(\frac{1}{2}) = 0.95975 < b'_3$ , concluímos que  $h(A_2) \subset A_3$ .

Sabemos que se  $x \notin [0, 1]$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} h^n(x) = -\infty$ . Além disso, o único ponto periódico em  $A_i$  é  $a_i$  e todos os pontos em  $A_i$  tendem para a órbita de  $a_i$ . Desse modo, todos os outros pontos periódicos de  $h$  residem no complemento de  $A_1 \cup A_2 \cup A_3$  em  $[0, 1]$ , que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam  $I_0 = [0, b'_1]$ ,  $I_1 = [b_1, b'_2]$ ,  $I_2 = [b_2, b_3]$  e  $I_3 = [b'_3, 1]$  tais intervalos. A proposição a seguir nos permite dizer mais.

**Proposição 2.25.** *Se  $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$  é um ponto periódico de  $h$ , então  $x \in I_1 \cup I_2$ .*

*Demonstração.* Observando que  $h$  é monótona em cada  $I_k$ , temos que  $h(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$ ,  $h(I_1) = I_2$ ,  $h(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$  e  $h(I_3) = I_0$ . Desse modo, se  $x \in I_1 \cup I_2$  é periódico, então órbita de  $x$  está contida em  $I_1 \cup I_2$ .

Por outro lado, se  $x \in I_0 \setminus \{0\}$ , existe um menor  $n \geq 1$  tal que  $h^n(x) \notin I_0$ . Se  $h^n(x) \in A_1$ , então  $x$  não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de  $A_1$  é  $a_1$ . Se  $h^n(x) \in I_1$ , então  $x$  não pode ser periódico, pois caso contrário a órbita de  $x$  estaria contida em  $I_1 \cup I_2$  e nunca retornaria para  $I_0$ . Finalmente, se  $x \in I_3$ , então  $h(x) \in I_0$  e a análise é análoga.  $\square$

Seja  $\Lambda$  o conjunto dado por

$$\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2 : h^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela proposição anterior, todos os pontos periódicos de  $h$  estão em  $\Lambda$ , com exceção dos pontos  $0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ . Para a demonstração do próximo teorema, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_A$  a função dada por  $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$ , onde  $x_k = 1$  se  $h^k(x) \in I_1$  e  $x_k = 2$  se  $h^k(x) \in I_2$  para todo  $k \geq 0$ . Observe que  $S$  está bem definida, pois  $h(I_1) = I_2$  e  $h(I_2) \subset I_1 \cup I_2$  e, portanto,  $a_{x_k x_{k+1}} = 1$  para todo  $k \geq 0$ .

**Lema 2.26.** *Existe  $n_0 \geq 1$  tal que  $|Dh^n(\Lambda)| > 1$  para todo  $n \geq n_0$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, podemos observar graficamente que  $|Dh(I_1 \cup I_2)| \geq \nu$  para algum  $\nu \in (0, 1)$ . Podemos observar também que o subconjunto de  $I_1 \cup I_2$  no qual  $|Dh^3|$  é menor que ou igual à 1 é formado por três intervalos fechados e que cada um desses intervalos possui intersecção vazia com  $\Lambda$  e, portanto,  $|Dh^3(\Lambda)| \geq \lambda$  para algum  $\lambda > 1$ .

Por fim, sejam  $x \in \Lambda$  e  $K \geq 1$  tal que  $\nu^2 \lambda^K > 1$ . Se  $n_0 = 3K$  e  $n \geq n_0$ , podemos escrever  $n = 3L + m$ , onde  $L \geq K$  e  $0 \leq m \leq 2$ . Desse modo, se  $m = 0$ , então  $|Dh^n(x)| = |Dh^{3L}(x)| \geq \lambda^L > 1$ ; se  $m = 1$ , então  $|Dh^n(x)| = |Dh(h^{3L}(x))||Dh^{3L}(x)| \geq \nu \lambda^L > 1$ ; e se  $m = 2$ , então  $|Dh^n(x)| = |Dh(h^{3L+1}(x))||Dh(h^{3L}(x))||Dh^{3L}(x)| \geq \nu^2 \lambda^L > 1$ .  $\square$

Com isso, enunciamos o teorema cuja demonstração é análoga à do Teorema 2.22.

**Teorema 2.27.**  $h|_\Lambda$  e  $\sigma_A$  são topologicamente conjugadas por  $S$ .

*Demonstração.* Exercício.  $\square$

Sabendo que  $h|_\Lambda$  e  $\sigma_A$  são topologicamente conjugadas, a proposição a seguir nos permite saber a quantidade de pontos periódicos de  $h|_\Lambda$  de período  $n$  para todo  $n \geq 1$ .

**Proposição 2.28.** *Se  $A$  uma matriz de transição de ordem  $N$ , então  $\sigma_A$  possui  $\text{Tr}(A^n)$  pontos periódicos de período  $n$  para todo  $n \geq 1$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, observe que se  $(x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_N$  é um ponto periódico de  $\sigma$  de período  $n$ , então  $x_k = x_{k+n}$  para todo  $k \geq 0$ . Desse modo,  $(x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_A$  se, e somente se,  $a_{x_0 x_1} = a_{x_1 x_2} = \dots = a_{x_{n-1} x_0} = 1$  e, portanto, a quantidade de pontos periódicos de  $\sigma_A$  de período  $n$  é dada por

$$\sum_{1 \leq x_0, \dots, x_{n-1} \leq N} a_{x_0 x_1} a_{x_1 x_2} \dots a_{x_{n-1} x_0}.$$

Por outro lado, é imediato verificar que essa soma é  $\text{Tr}(A^n)$ .  $\square$

## 2.7 Bifurcação

A família quadrática exibe outro fenômeno que ocorre em sistemas dinâmicos: a bifurcação. Através desse fenômeno, vamos explicar gráfica e intuitiva como a dinâmica de  $h$ , que é simples para  $\mu$  pequeno, se torna caótica para  $\mu$  suficientemente grande.

Seja  $f_\lambda$  uma família parametrizada de funções no parâmetro  $\lambda$  de modo que a função

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x),$$

definida num aberto de  $\mathbb{R}^2$ , seja de classe  $\mathcal{C}^\infty$  nas variáveis  $x$  e  $\lambda$ . Dizemos que  $f_\lambda$  sofre uma bifurcação em  $\lambda_0$  se existe  $\varepsilon > 0$  com a seguinte propriedade: se  $\lambda_1 \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$  e  $\lambda_2 \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ , então  $f_{\lambda_1}$  e  $f_{\lambda_2}$  não são topologicamente conjugadas. Por exemplo, uma bifurcação ocorre quando há alteração na estrutura dos pontos periódicos.

**Exemplo 2.29.**

- a) A família  $E_\lambda$  de funções dadas por  $E_\lambda(x) = e^{x+\lambda}$  sofre uma bifurcação em  $\lambda_0 = -1$ .

Conforme o parâmetro cresce, os dois pontos fixos vão se aproximando até se tornarem um único ponto fixo que, após isso, desaparece. Uma bifurcação com essas características é chamada de bifurcação tangente.

- b) A família quadrática sofre uma bifurcação em  $\mu_0 = 3$ .

Conforme o parâmetro cresce, o ponto fixo, que inicialmente é atrator, se torna repulsor e, além disso, nasce uma órbita periódica de período 2 numa vizinhança do ponto fixo. Uma bifurcação com essas características é chamada de bifurcação com duplicação de período.

Observe, nos exemplos, que as bifurcações ocorreram quando a derivada em módulo no ponto fixo se tornou igual à 1. O teorema a seguir nos mostra que isso não é coincidência.

**Teorema 2.30.** *Seja  $f_\lambda$  uma família parametrizada de funções. Suponha que*

1.  $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$ ,
2.  $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$ .

*Então existem vizinhanças  $I$  e  $J$  de  $\lambda_0$  e  $x_0$ , respectivamente, e uma função  $p : I \rightarrow J$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tais que*

1.  $p(\lambda_0) = x_0$ ,
2.  $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$  para todo  $\lambda \in I$ .

*Além disso,  $f_\lambda$  não possui outros pontos fixos em  $J$ .*

*Demonstração.* Basta aplicar o Teorema da Função Implícita para a função  $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$  no ponto  $(x_0, \lambda_0)$ .  $\square$

Vamos estudar com mais detalhes a bifurcação com duplicação de período que ocorre na família quadrática. Inicialmente, observe que se  $\mu > 2$ , então existe  $p'_\mu < p_\mu$  tal que  $h(p'_\mu) = p_\mu$ . Observe o gráfico de  $h^2$ , juntamente com um quadrado de vértices  $(p'_\mu, p_\mu)$ ,  $(p_\mu, p_\mu)$ ,  $(p_\mu, p'_\mu)$  e  $(p'_\mu, p'_\mu)$ , para alguns valores de  $\mu$ .

Restringindo o gráfico de  $h^2$  restrito ao quadrado e rotacionando em  $2\pi$ , vemos que ele se assemelha ao gráfico da própria  $h$  no intervalo  $[0, 1]$  para algum valor de  $\mu$ . Vamos

deixar essa ideia mais precisa através do operador de renormalização, que nos permite analisar a segunda iterada de uma função na mesma escala que a original.

Se  $\mu > 2$ , considere a função  $L : [p'_\mu, p_\mu] \rightarrow [0, 1]$  dada por

$$L(x) = \frac{x - p_\mu}{p'_\mu - p_\mu}.$$

Observe que  $L(p_\mu) = 0$  e  $L(p'_\mu) = 1$ . Desse modo, definimos a renormalização de  $h$  como a função  $Rh : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dada por  $Rh(x) = L \circ h^2 \circ L^{-1}(x)$ .

Observe que um ponto fixo de  $Rh$  está unicamente relacionado com um ponto periódico de  $h$  de período 2. Além disso, o gráfico de  $Rh$  não está contido em  $[0, 1]$  para algum  $\mu < 4$ . Desse modo, podemos fazer uma análise análoga para concluir que  $Rh$  passa por uma bifurcação com duplicação de período.

Portanto, esperamos que  $Rh$  sofra uma bifurcação com duplicação de período conforme o parâmetro cresce e, de maneira análoga, fazemos uma renormalização para concluir que  $h^2$  sofre uma bifurcação com duplicação de período. Continuando esse processo, temos uma sucessão de bifurcações com duplicação de período na família quadrática.

O computador nos permite observar esse fato experimentalmente. Para isso, vamos computar o digrama de órbita do ponto crítico da família quadrática para  $\mu > 2$ . Nesse diagrama, veremos o comportamento assintótico de órbita de  $\frac{1}{2}$  em função do parâmetro. Como veremos no Teorema de Singer, se  $h$  possui uma órbita periódica, então ela atrai o ponto crítico. Escolhemos 2000 valores de  $\mu$  igualmente espaçados em  $[2, 4]$  e, para cada valor, calculamos as primeiras 500 iterações da órbita de  $\frac{1}{2}$  e plotamos as últimas 400.

Na figura, vemos alguns fatos que já estudamos. Para  $\mu \in [2, 3]$ , as órbitas são atraídas para o ponto fixo  $p_\mu$  e, quando  $\mu$  passa de 3, nasce uma órbita periódica de período 2.

### 3 Teorema de Sharkovsky

Nessa seção, consideraremos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Além disso, escreveremos  $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_n$  quando  $I_0, I_1, \dots, I_n$  são intervalos compactos e  $f(I_k) \supset I_{k+1}$  para todo  $0 \leq k < n$ .

**Proposição 3.1.** *Se  $I_0 \rightarrow I_1$ , então existe um intervalo fechado  $I'_0 \subset I_0$  tal que  $f(I'_0) = I_1$ .*

*Demonstração.* Se  $I_0 = [a, b]$  e  $I_1 = [c, d]$ , sejam  $p, q \in [a, b]$  tais que  $f(p) = c$  e  $f(q) = d$ . Suponha que  $p \leq q$ ; se  $q \leq p$ , a demonstração é análoga.

Definindo  $b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\}$  e  $a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$  e observando que  $f$  é contínua, podemos concluir que  $f(I'_0) = I_1$ , onde  $I'_0 = [a', b']$ .  $\square$

**Lema 3.2.** *Se  $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$ , então existe  $p \in I_0$  tal que as seguintes condições são válidas:*

1.  $f^k(p) \in I_k$  para todo  $1 \leq k < n$ .

2.  $f^n(p) = p$ .

*Demonstração.* Pela Proposição 3.1, podemos construir uma sequência de intervalos fechados  $I'_0, I'_1, \dots, I'_{n-1}$  com as seguintes propriedades:

a)  $I_0 \supset I'_0 \supset I'_1 \supset \dots \supset I'_{n-1}$ .

b)  $f^k(I'_{k-1}) = I_k$  para todo  $1 \leq k < n$ .

c)  $f^n(I'_{n-1}) = I_0$ .

Desse modo, existe  $p \in I'_{n-1}$  tal que  $f^n(p) = p$ . Em particular,  $p \in I_0$  e  $f^k(p) \in I_k$  para todo  $1 \leq k < n$ .  $\square$

**Teorema 3.3.** Se  $\text{Per}_3(f) \neq \emptyset$ , então  $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$  para todo  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Sejam  $p_1 < p_2 < p_3$  os pontos da órbita de um elemento de  $\text{Per}_3(f)$ . Suponha que  $f(p_1) = p_2$  e  $f(p_2) = p_3$ ; se  $f(p_1) = p_3$  e  $f(p_3) = p_2$ , a demonstração é análoga. Definindo  $I_0 = [p_1, p_2]$  e  $I_1 = [p_2, p_3]$ , temos que  $I_0 \longrightarrow I_1$ ,  $I_1 \longrightarrow I_0$  e  $I_1 \longrightarrow I_1$ . Desse modo, podemos demonstrar as seguintes afirmações:

a)  $\text{Per}_1(f) \neq \emptyset$ .

De fato,  $I_1 \longrightarrow I_1$  implica que existe  $p \in I_1$  tal que  $f(p) = p$ .

b)  $\text{Per}_2(f) \neq \emptyset$ .

De fato,  $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0$  implica que existe  $p \in I_0$  tal que  $f(p) \in I_1$  e  $f^2(p) = p$ . Se  $f(p) = p$ , então  $p \in I_0 \cap I_1$ , o que é um absurdo pois  $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$  e  $p_2 \in \text{Per}_3(f)$ .

c)  $\text{Per}_4(f) \neq \emptyset$ .

De fato,  $I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$  implica que existe  $p \in I_1$  tal que  $f^k(p) \in I_1$  para todo  $1 \leq k < 3$ ,  $f^3(p) \in I_0$  e  $f^4(p) = p$ . Se  $f^3(p) = p$ , então  $p \in I_0 \cap I_1$ , o que é um absurdo pois  $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$  e  $f^2(p_2) = p_1 \notin I_1$ . Se  $f^k(p) = p$  para algum  $1 \leq k < 3$ , então  $f^k(p) \in I_1$  para todo  $k \geq 1$ . Em particular,  $f^3(p) \in I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$  e, portanto,  $f^4(p) = p = p_3$ , o que é um absurdo pois  $f(p_3) = p_1 \notin I_1$ .

Por fim, podemos demonstrar de maneira análoga à última afirmação que  $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$  para todo  $n \geq 4$ .  $\square$

O Teorema 3.3 é um caso especial do Teorema de Sharkovsky que será enunciado na sequência. Inicialmente, considere a seguinte ordenação dos números naturais:

**Definição 3.4** (Ordenação de Sharkovsky).

$$3 \triangleright 5 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$



A ordenação de Sharkovsky lista todos os ímpares diferentes de 1; em seguida, todos os ímpares diferentes de 1 multiplicados por 2; em seguida, todos os ímpares diferentes de 1 multiplicados por 4; e assim sucessivamente. Por fim, lista todas as potências de 2 em ordem decrescente.

Desse modo, podemos enunciar o Teorema de Sharkovsky cuja demonstração, apesar de não usar nenhuma ferramenta além daquelas usadas para demonstrar o Teorema 3.3, é consideravelmente maior.

**Teorema 3.5** (Sharkovsky). *Se  $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$ , então  $\text{Per}_m(f) \neq \emptyset$  para todo  $n \triangleright m$ .*

*Demonstração.* Ver [1]. □

O Teorema de Sharkovsky pode ser usado para provar que órbitas periódicas de certos tamanhos não existem. Por exemplo, observando os gráficos de  $h$ ,  $h^2$  e  $h^4$  para  $\mu = 3.2$  vemos que  $\text{Per}_4(h) = \emptyset$  e, portanto,  $\text{Per}_n(h) = \emptyset$  para todo  $n \geq 3$ .

Por fim, a ordenação de Sharkovsky é a melhor possível. Por exemplo, se  $\text{Per}_5(f) \neq \emptyset$  implica que  $\text{Per}_3(f) \neq \emptyset$ , então o número 5 pode ser removido na ordenação. O seguinte teorema mostra que isso não é possível.

**Teorema 3.6.** *Se  $n \geq 1$ , então existe uma função  $f$  com as seguintes propriedades:*

1.  $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$ .
2.  $\text{Per}_m(f) = \emptyset$  para todo  $m \triangleright n$ .

*Demonstração.* Seja  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a função dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

e considere a família de funções  $T_\lambda(x) = \min\{\lambda, T(x)\}$  definidas em  $[0, 1]$ , onde o parâmetro  $\lambda$  varia em  $[0, 1]$ .

Inicialmente, observe que  $T(x) \leq 1$  para todo  $x \in [0, 1]$  implica que  $T_1 = T$ . Além disso,  $T_1$  possui  $2^k$  pontos periódicos de período  $k$  para todo  $k \geq 1$ . Desse modo, podemos definir

$$\lambda(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } k \text{ de } T_1\}\}$$

para todo  $k \geq 1$ . A ideia principal da prova consiste no fato de que  $\lambda(k)$  desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de  $T_{\lambda(k)}$ . As seguintes afirmações tornam esse fato preciso:

- a) *Se  $\mathcal{O} \subset [0, \lambda)$  é uma órbita de  $T_\lambda$ , então  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_1$ .*

Se  $p \in \mathcal{O}$ , então  $T_\lambda(p) \in [0, \lambda)$ . Desse modo,  $T_\lambda(p) = \min\{\lambda, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$ . Assim,  $T_\lambda$  e  $T_1$  coincidem em  $\mathcal{O}$  e, portanto,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_1$ .

b) Se  $\mathcal{O} \subset [0, \lambda]$  é uma órbita de  $T_1$ , então  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_\lambda$ .

Se  $p \in \mathcal{O}$ , então  $T_1(p) \in [0, \lambda]$ . Desse modo,  $T_\lambda(p) = \min\{\lambda, T_1(p)\} = T_1(p)$ . Assim,  $T_\lambda$  e  $T_1$  coincidem em  $\mathcal{O}$  e, portanto,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_\lambda$ .

c)  $T_{\lambda(k)}$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(k))$  de tamanho  $j$  se, e somente, se  $\lambda(k) > \lambda(j)$ .

Se  $T_{\lambda(k)}$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(k))$  de tamanho  $j$ , então  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_1$  e, pela definição de  $\lambda(j)$ , concluímos que  $\lambda(k) > \lambda(j)$ . Por outro lado, se  $\lambda(k) > \lambda(j)$ , então  $T_1$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(j)] \subset [0, \lambda(k)]$  de tamanho  $j$  e, desse modo,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_{\lambda(k)}$ .

d) A órbita de  $T_1$  que contém  $\lambda(k)$  é uma órbita de tamanho  $k$  de  $T_{\lambda(k)}$ . Além disso, todas as outras órbitas de  $T_{\lambda(k)}$  estão em  $[0, \lambda(k))$ .

Pela definição de  $\lambda(k)$ ,  $T_1$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(k)]$  de tamanho  $k$  e, portanto,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_{\lambda(k)}$ .

Na segunda parte, basta observar que  $\lambda(k)$  é o valor máximo de  $T_{\lambda(k)}$  e, desse modo, toda órbita de  $T_{\lambda(k)}$  está contida em  $[0, \lambda(k)]$ . Em particular, se a órbita não contém  $\lambda(k)$ , então ela está contida em  $[0, \lambda(k))$ .

e)  $k \triangleright j$  se, e somente se,  $\lambda(k) > \lambda(j)$ .

Suponha que  $k \triangleright j$ . Sabemos que  $T_{\lambda(k)}$  possui uma órbita de tamanho  $k$  e, pelo Teorema de Sharkovsky,  $T_{\lambda(k)}$  admite uma órbita de tamanho  $j$ . Em particular, essa órbita está contida em  $[0, \lambda(k))$  e, portanto,  $\lambda(k) > \lambda(j)$ .

Suponha que  $\lambda(k) > \lambda(j)$ . Se  $j \triangleright k$ , então  $\lambda(k) < \lambda(j)$  pela demonstração no parágrafo anterior e, portanto,  $k \triangleright j$ .

Desse modo,  $T_{\lambda(n)}$  possui órbita de tamanho  $n$  para cada  $n \geq 1$ . Além disso, se  $m \triangleright n$  então  $\lambda(m) > \lambda(n)$  e, portanto,  $T_{\lambda(n)}$  não possui órbita de tamanho  $m$ .  $\square$

## 4 Teorema de Singer

Ao longo dessa seção, consideraremos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^3$ . Iniciamos com a seguinte definição:

**Definição 4.1** (Derivada de Schwarz). A derivada de Schwarz de  $f$  é a função  $\mathcal{S}f : \mathbb{R} \setminus C_f \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{D^3 f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{D^2 f(x)}{Df(x)} \right)^2,$$

onde  $C_f = \{x \in \mathbb{R} : Df(x) = 0\}$ .

Para os nossos objetivos, estudaremos funções que possuem a derivada de Schwarz negativa. Por exemplo,  $Sh(x) = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0$  para todo  $x \neq \frac{1}{2}$ . A característica fundamental dessa propriedade é ser preservada em composição de funções.

**Proposição 4.2.** *Se  $\mathcal{S}f < 0$  e  $\mathcal{S}g < 0$ , então  $\mathcal{S}(f \circ g) < 0$ .*

*Demonstração.* Basta observar que  $\mathcal{S}(f \circ g)(x) = \mathcal{S}f(g(x))(Dg(x))^2 + \mathcal{S}g(x)$ .  $\square$

**Corolário 4.3.** *Se  $\mathcal{S}f < 0$ , então  $\mathcal{S}f^n < 0$  para todo  $n \geq 1$ .*

Vamos mostra que se uma função possui derivada de Schwarz negativa e um número finito de pontos críticos, então existe um limite para a quantidade de órbitas periódicas atratoras. Para isso, provaremos uma série de lemas.

**Lema 4.4.** *Se  $\mathcal{S}f < 0$  e  $x_0$  é um ponto de mínimo local de  $Df$ , então  $Df(x_0) \leq 0$ .*

*Demonstração.* Se  $Df(x_0) \neq 0$ , então

$$\mathcal{S}f(x_0) = \frac{D^3f(x_0)}{Df(x_0)} - \frac{3}{2} \left( \frac{D^2f(x_0)}{Df(x_0)} \right)^2 < 0.$$

Sendo  $x_0$  ponto de mínimo local de  $Df$ , temos que  $D^2f(x_0) = 0$  e  $D^3f(x_0) \geq 0$  e, portanto,  $Df(x_0) < 0$ .  $\square$

**Lema 4.5.** *Se  $\mathcal{S}f < 0$  e  $a < b < c$  são pontos fixos de  $f$  com  $Df(b) \leq 1$ , então  $f$  possui ponto crítico em  $(a, c)$ .*

*Demonstração.* Pelo TVM, existem  $r \in (a, b)$  e  $s \in (b, c)$  tais que  $Df(r) = Df(s) = 1$ . Sendo  $Df$  contínua,  $Df$  restrita ao intervalo  $[r, s]$  possui mínimo global. Como  $b \in (r, s)$  e  $Df(b) \leq 1$ , temos que  $Df$  possui mínimo local em  $(r, s)$ . Utilizando Lema anterior e o TVI, a demonstração está concluída.  $\square$

**Lema 4.6.** *Se  $\mathcal{S}f < 0$  e  $a < b < c < d$  são pontos fixos de  $f$ , então  $f$  possui ponto crítico em  $(a, d)$ .*

*Demonstração.* Se  $Df(b) \leq 1$  ou  $Df(c) \leq 1$ , o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se  $Df(b) > 1$  e  $Df(c) > 1$ , existem  $r, t \in (b, c)$  tais que  $r < t$ ,  $f(r) > r$  e  $f(t) < t$ . Pelo TVM, existe  $s \in (r, t)$  tal que  $Df(s) < 1$ . Portanto,  $Df$  possui mínimo local em  $(b, c)$ . Utilizando Lema 4.4 e o TVI, a demonstração está concluída.  $\square$

**Lema 4.7.** *Se  $f$  possui finitos pontos críticos, então  $f^n$  possui finitos pontos críticos para todo  $n \geq 1$ .*

*Demonstração.* Pelo TVM, se  $c \in \mathbb{R}$ , então  $f$  possui ponto crítico entre dois elementos de  $f^{-1}(c)$  e, portanto,  $f^{-1}(c)$  é finito. De modo mais geral, é possível provar por indução que  $f^{-n}(c)$  é finito para todo  $n \geq 1$ .

Se  $n \geq 1$ , então  $Df^n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} Df(f^k(x)) = 0$  se, e somente se,  $f^k(x)$  é ponto crítico de  $f$  para algum  $1 \leq k < n$ . Portanto, o conjunto de pontos críticos de  $f^n$  é finito.  $\square$

**Lema 4.8.** *Se  $\mathcal{S}f < 0$  e  $f$  possui finitos pontos críticos, então  $f^n$  possui finitos pontos fixos para todo  $n \geq 1$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 4.6, se  $f^n$  possui infinitos pontos fixos para algum  $n \geq 1$ , então  $f^n$  possui infinitos pontos críticos, o que é um absurdo pelo Lema 4.7.  $\square$

Com isso, temos as ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema de Singer.

**Teorema 4.9** (Singer). *Se  $\mathcal{S}f < 0$  e  $f$  possui  $n$  pontos críticos, então  $f$  possui no máximo  $n + 2$  órbitas periódicas não repulsoras.*

*Demonstração.* Seja  $p$  um ponto periódico não repulsor de  $f$  de período  $m$ . Se  $g = f^m$ , então  $g(p) = p$  e  $|Dg(p)| \leq 1$ . Seja  $K$  a componente conexa de  $\mathcal{B}(p) = \{x : \lim_{k \rightarrow \infty} g^k(x) = p\}$  que contém  $p$ . Inicialmente, suponha que  $K$  é limitado.

Se  $|Dg(p)| < 1$ , então é possível mostrar que  $K$  é aberto,  $g(K) \subset K$  e  $g$  preserva os pontos extremos de  $K$ .

Escrevendo  $K = (a, b)$ , se  $g(a) = a$  e  $g(b) = b$ , então  $g$  possui ponto crítico em  $K$  pelo Lema 4.5; se  $g(a) = b$  e  $g(b) = a$ , então  $g^2$  possui ponto crítico em  $K$  pelo Lema 4.5; se  $g(a) = g(b)$ , então  $g$  possui ponto crítico em  $K$  pelo TVM.

Se  $|Dg(p)| = 1$ , então os pontos fixos de  $g$  são isolados pelo Lema anterior e, portanto, existe uma vizinhança de  $p$  que não contém outros pontos fixos de  $g$ .

Suponha que  $Dg(p) = 1$ . Se  $Dg(p) = -1$ , a demonstração é análoga considerando  $g^2$ . Se  $p$  possui o comportamento de um ponto repulsor, então, para  $x$  numa vizinhança de  $p$ ,  $g(x) > x$  quando  $x > p$  e  $g(x) < x$  quando  $x < p$ . Desse modo, 1 é um mínimo local de  $Dg$ , o que é um absurdo pelo Lema 4.4 e, portanto,  $p$  é atrator em pelo menos um dos lados. Desse modo,  $K$  é um intervalo,  $g(K) \subset K$  e  $g$  preserva os pontos extremos de  $K$ . Assim, é possível concluir de maneira análoga que  $g$  possui ponto crítico em  $K$ .

Assim, cada intervalo  $K$  limitado está associado à algum ponto crítico de  $f$  e, portanto, existem no máximo  $n$  desses intervalos. Não é possível obter a mesma conclusão se  $K$  não é limitado, mas observando que existem no máximo dois intervalos desse tipo, a demonstração está concluída.  $\square$

**Corolário 4.10.** *Se  $\mu > 1$ , então  $h$  possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.*

## Referências

- [1] BURNS, K., AND HASSELBLATT, B. The sharkovsky theorem: a natural direct proof. *The American Mathematical Monthly* 118, 3 (2011), 229–244.
- [2] DEVANEY, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Perseus Books, 1989.
- [3] HOLMGREN, R. A. *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Springer, 1996.