Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos

Agenor Gonçalves Neto

São Paulo, 2020

Sumário

1 Conceitos Iniciais

Seja $f : X \to X$ uma função, onde X é um espaço métrico. Dado $x \in X$ e denotando por f^n a n-ésima composição de f com ela mesma, queremos estudar as propriedades da sequência $(x, f(x), f^2(x), \dots)$.

Definição 1.1.

a. Se $x \in X$, então $\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ é a órbita de x.

b. Se $p \in X$ e $f^n(p) = p$ para algum $n > 0$, então p é um ponto periódico de período n. Em particular, se $n = 1$, então p é um ponto fixo. Denotaremos por $\mathrm{Per}(f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos.

c. Se p é um ponto periódico de período n e $f^k(p) \neq p$ para todo $0 < k < n$, então n é o período principal de p. Denotaremos por $\mathrm{Per}_n(f)$ o conjunto de todos os pontos periódicos de período principal n.

d. Se p um ponto periódico de período n, então $\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p\}$ é a bacia de atração de p. Além disso, $\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k\to\infty} |f^k(x)| = \infty\}$ é a bacia de atração do ∞.

Proposição 1.2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f([a, b]) \subset [a, b]$ ou $f([a, b]) \supset [a, b]$, então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Suponha que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Considere a função $g(x) = f(x) - x$ definida em $[a, b]$. Observando que $g(a) \geq 0$ e $g(b) \leq 0$ e utilizando o TVI, existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$.

Suponha que $f([a, b]) \supset [a, b]$ e sejam $c, d \in [a, b]$ tais que $f(c) = a$ e $f(d) = b$. Considere a função $g(x) = f(x) - x$ definida em $[a, b]$. Observando que $g(c) \leq 0$ e $g(d) \geq 0$ e utilizando o TVI, existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$. □

Definição 1.3. Sejam $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $p \in \operatorname{Per}_n(f)$.

a. Se $|\partial f^n(p)| \neq 1$, então p é um ponto hiperbólico.

b. Se $|\partial f^n(p)| < 1$, então p é um ponto atrator.

c. Se $|\partial f^n(p)| > 1$, então p é um ponto repulsor.

Teorema 1.4. *Sejam $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $p \in \operatorname{Per}_n(f)$.*

1. *Se p é um ponto atrator, então existe uma vizinhança de p contida em $\mathcal{B}(p)$.*

2. *Se p é um ponto repulsor, então existe uma vizinhança V de p com a seguinte propriedade: se $x \in V$ e $x \neq p$, então $f^{kn}(x) \notin V$ para algum $k \geq 1$.*

Demonstração.

1. Sendo ∂f contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\partial f^n(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in (p-\varepsilon,\, p+\varepsilon)$. Pelo TVM, se $x \in (p-\varepsilon,\, p+\varepsilon)$, então $|f^n(x)-p| \leq \lambda|x-p|$. Por indução, $|f^{kn}(x)-p| \leq \lambda^k|x-p|$ para todo $k \geq 1$. Desse modo, $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$.

2. Demonstração análoga.

□

2 Função Logística

2.1 Estudo Inicial

Proposição 2.1. *Se $\mu > 1$, então*

1. $F(1) = F(0) = 0$.

2. $F(\frac{1}{\mu}) = F(p_\mu) = p_\mu$, *onde* $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.

3. $0 < p_\mu < 1$.

Proposição 2.2. *Se $\mu > 1$, então $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset \mathcal{B}(\infty)$.*

Demonstração. Inicialmente, se $x \in (1, \infty)$, então $F(x) \in (-\infty, 0)$. Por fim, observamos que a sequência $(x, F(x), F^2(x), \dots)$ é estritamente decrescente e ilimitada quando $x \in (-\infty, 0)$. $\square$

Proposição 2.3. *Se* $1 < \mu < 3$, *então*

1. 0 *é um ponto repulsor e* p_μ *é um ponto atrator.*
2. $(0, 1) \subset \mathcal{B}(p_\mu)$.

2.2 Conjuntos de Cantor

Se $\mu > 4$, então $F(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} > 1$, ou seja, existem pontos em $[0, 1]$ que não permanecem em $[0, 1]$ após uma iteração de F. Em vista da Proposição 2.2, tais pontos pertencem ao conjunto $\mathcal{B}(\infty)$. De modo mais geral, se um ponto de $[0, 1]$ não permanece em $[0, 1]$ após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto $\mathcal{B}(\infty)$.

Desse modo, considere o conjunto $\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1]\}$ formado pelos pontos que permanecem em $[0, 1]$ após n iterações de F e considere o conjunto $\Lambda = \cap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1]$ para todo $n \geq 1\}$, que é formado pelos pontos de $[0, 1]$ que sempre permanecem em $[0, 1]$ por iterações de F. Observe que $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, pois se $F^{n+1}(x) = F(F^n(x)) \in [0, 1]$, então $F^n(x) \in [0, 1]$.

Proposição 2.4. *Se* $\mu > 4$, *então*

1. $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, *onde* $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ *e* $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$.
2. Λ_n *é a união de* 2^n *intervalos fechados disjuntos e* $F^n : [a, b] \to [0, 1]$ *é bijetora, onde* $[a, b]$ *é um desses intervalos.*

Demonstração.

1. Basta resolver a equação de segundo grau $\mu x(1 - x) = 1$.

Analisando F' observamos que F é estritamente crescente no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e estritamente decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Como $F(0) = F(1) = 0$ e $F\left(\frac{1}{2}\right) > 1$, o Teorema do Valor Intermediário garante que existem $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tais que $F(x_1) = F(x_2) = 1$. Os valores de x_1 e x_2 são encontrados resolvendo a equação de segundo grau $\mu x(1 - x) = 1$. Logo, $F([0, x_1]) = F([x_2, 1]) = [0, 1]$ e $F(x) > 1$ para todo $x \in (x_1, x_2)$. Portanto, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e o item 1 está demonstrado.

A demonstração dos itens 2 e 3 será feita por indução. De acordo com a primeira parte, Λ_1 é a união de $2^1 = 2$ intervalos fechados disjuntos e F restrita é cada um desses intervalos é uma bijeção com o intervalo $[0, 1]$.

Suponha que Λ_{k-1} é a união de 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos de modo que $F^{k-1} : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora para todo intervalo $[a, b]$ que forma Λ_{k-1}. Sendo F^{k-1} bijetora, $(F^{k-1})'(x) > 0$ ou $(F^{k-1})'(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$. Como as demonstrações para os dois casos são análogas, podemos supor que $(F^{k-1})'(x) > 0$.

Como F^{k-1} é estritamente crescente, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existem únicos $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in (a, b)$ tais que

(a) $a < \overline{x_1} < \overline{x_2} < b$,

(b) $F^{k-1}([a, \overline{x_1}]) = [0, x_1]$,

(c) $F^{k-1}((\overline{x_1}, \overline{x_2})) = (x_1, x_2)$ e

(d) $F^{k-1}([\overline{x_2}, 1]) = [x_2, 1]$.

As condições acima garantem que os intervalos $[a, \overline{x_1}]$, $[\overline{x_2}, b]$ são disjuntos e que $F^k(x) = F(F^{k-1}(x)) > 1$ para todo $x \in (\overline{x_1}, \overline{x_2})$. Também, temos que $F^k([a, \overline{x_1}]) = F([0, x_1]) = [0, 1]$ e, analogamente, $F^k([\overline{x_2}, 1]) = [0, 1]$. Além disso,

$$(F^k)'([a, \overline{x_1}]) = F'(F^{k-1}([a, \overline{x_1}]))(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) = F'([0, x_1])(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) > 0$$

e, analogamente,

$$(F^k)'([\overline{x_2}, 1]) = F'([x_2, 1])(F^{k-1})'([\overline{x_2}, 1]) < 0.$$

Logo, F^k é uma bijeção entre $[a, \overline{x_1}]$ e $[0, 1]$ e entre $[\overline{x_2}, 1]$ e $[0, 1]$.

Portanto, a partir de cada intervalo fechado de Λ_{k-1}, construímos dois novos intervalos fechados disjuntos tais que F^k restrita em cada um desses intervalos é um bijeção com $[0, 1]$ e, dessa maneira, esses intervalos estão contidos em Λ_k. Desse modo, se Λ_{k-1} é formado por 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos, então Λ_k é formado por $2 \times 2^{k-1} = 2^k$ intervalos fechados disjuntos. Assim, o resultado está provado. $\square$

Definição 2.5. Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Dizemos que Γ é um conjunto de Cantor se as seguintes condições são válidas:

i. Γ é compacto.

ii. Γ não possui intervalos.

iii. Todo ponto de Γ é um ponto de acumulação de Γ.

Lema 2.6. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então*

1. *existe $\lambda > 1$ tal que $|\partial F(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.*

2. *$b - a < \frac{1}{\lambda^n}$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_n.*

3. *dados $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$, existe um intervalo $[a, b] \subset \Lambda_n$ para algum $n \geq 1$ tal que $x \in [a, b]$, $b - a < \varepsilon$ e $F^n : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora.*

Demonstração. 1. Inicialmente, observamos que $\mu^2 - 4\mu > 1$ quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$. Desse modo, $F'(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$ e $F'(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$, onde x_1 e x_2 são como na Proposição 2.4. Observamos também que F' é estritamente decrescente, pois $F''(x) = -2\mu < 0$. Portanto, $F'(x) \geq F'(x_1) > 1$ para todo $x \in [0, x_1]$ e $F'(x) \leq F'(x_2) < -1$ para todo $x \in [x_2, 1]$. De acordo com a Proposição 2.4, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e, desse modo, $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in \Lambda_1$. Sendo F' contínua e Λ_1 compacto, existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.

2. De acordo com a Proposição 2.4, Λ_n é formado pela união de 2^n intervalos disjuntos. Seja $[a, b]$ um desses intervalos. Se $x \in [a, b]$, em particular $F^k(x) \in \Lambda_1$ para todo $0 \leq k < n$. Desse modo, de acordo com o item anterior, temos que $(F^n)'(x) = F'(F^{n-1}(x)) \times F'(F^{n-2}(x)) \times \cdots \times F'(x) > \lambda^n$.

   Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$|F^n(b) - F^n(a)| = |(F^n)'(c)||b - a| > \lambda^n |b - a|$$

   Como $F^n : [a, b] \to [0, 1]$ é contínua e bijetora, temos que $|F^n(b) - F^n(a)| = 1$. Desse modo, $|b - a| < \frac{1}{\lambda^n}$ e a afirmação está provada.

3. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^n} < \varepsilon$, onde $\lambda > 1$ é como no primeiro item. Em particular, $x \in \Lambda_n$. Seja I um dos intervalos que formam Λ_n e que contém x. Pelo item anterior, o tamanho de I é menor que ε. Além disso, pela Proposição 2.4, $F^n : I \to [0, 1]$ é bijetora e, portanto, a afirmação está provada.

$\square$

Teorema 2.7. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. Λ é não vazio pois $0 \in \Lambda$, é limitado pois $\Lambda_1 \subset [0, 1]$ e é fechado pois é intersecção de conjuntos fechados.

Agora, suponha que Λ contém algum intervalo. Então, existem $x, y \in I$, $x < y$, tais que $[x, y] \subset \Lambda$. Seja k tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |x - y|$. Em particular, $[x, y] \subset \Lambda_k$. Mas, de acordo com o Lema 2.6, os intervalos de Λ_k possuem tamanho menor que $\frac{1}{\lambda^k}$. Absurdo e, portanto, Λ não possui intervalos.

Por fim, observe que, se x é um ponto extremo de algum intervalo de Λ_n, então $x \in \Lambda$ pois $F^{n+1}(x) = 0$. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Em particular, $x \in \Lambda_k$ e, portanto, x é elemento de algum intervalo cujo tamanho é menor que ε, de acordo com o Lema 2.6. Portanto, existe $y \in \Lambda$ ponto extremo do intervalo que contém x tal que $|x - y| < \varepsilon$. Como ε é arbitrário, concluímos que x é um ponto de acumulação de Λ. $\square$

2.3 Caos

Proposição 2.8. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então o conjunto de pontos periódicos de $F : \Lambda \to \Lambda$ é denso em Λ.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 2.6, o intervalo fechado $I \subset \Lambda_k$ que contém x possui tamanho menor que ε. Pela Proposição 2.4, $F^k : I \to [0, 1]$ é bijetora. Como $F^k(I) \supset I$, a Proposição **??** afirma que existe $y \in I$ tal que $F^k(y) = y$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \varepsilon$, o resultado está provado. $\square$

Definição 2.9. Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f é transitiva topologicamente se dados $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ e $j \geq 1$ tais que $|z - x| < \varepsilon$ e $|f^j(z) - y| < \varepsilon$.

Proposição 2.10. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ é transitiva topologicamente.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Existe $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 2.6, o tamanho de cada intervalo fechado em Λ_k é menor que $\frac{1}{\lambda^k}$ e, portanto, menor que ε. Como $x \in \Lambda_k$, existe um intervalo $[a, b] \subset \Lambda_k$ que contém x. Pela Proposição 2.4, $F^k : [a, b] \to [0, 1]$ é bijetora e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $z \in [a, b]$ tal que $F^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$, concluímos que F é transitiva topologicamente. $\square$

Definição 2.11. Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f depende sensivelmente das condições iniciais se existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $j \geq 1$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^j(x) - f^j(y)| > \delta$.

Proposição 2.12. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Como na demonstração da Proposição anterior, seja I o intervalo fechado contido em Λ_k que contém x e cujo tamanho é menor que ε. Como $F^k : I \to [0, 1]$ é um bijeção, então $F^k(a) = 0$ e $F^k(b) = 1$, onde a e b são pontos extremos de I. Como $F(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, segue que $F^k(x) \in \big[0, \frac{1}{2}\big) \cup \big(\frac{1}{2}, 1\big]$. Se $F^k(x) \in \big[0, \frac{1}{2}\big)$, então $|F^k(x) - F^k(b)| = |F^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $F^k(x) \in \big(\frac{1}{2}, 1\big]$, então $|F^k(x) - F^k(a)| = |F^k(x)| > \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, temos o resultado para $\delta = \frac{1}{2}$. $\square$

Definição 2.13. Seja $f : X \to X$ uma função. Dizemos que f é caótica se as seguintes condições são válidas:

i. O conjunto de pontos periódicos de f é denso em X.

ii. f é transitiva topologicamente.

iii. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema 2.14. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ é caótica.*

Teorema 2.15. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto infinito e $f : X \to X$ é uma função. Se o conjunto de pontos periódicos de f é denso em X e f é transitiva topologicamente, então f é caótica.*

2.4 Conjugação Topológica

Definição 2.16. Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\tau : X \to Y$ funções. Dizemos que f e g são conjugadas topologicamente por τ se τ se as seguintes condições são válidas:

i. τ é um homeomorfismo.

ii. $\tau \circ f = g \circ \tau$.

Proposição 2.17. *Sejam $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ e $\tau : X \to Y$ funções. Se f e g são conjugadas topologicamente por τ, então*

1. *g e f são conjugadas topologicamente por τ^{-1}.*

2. *$\tau \circ f^j = g^j \circ \tau$ para todo $j \geq 1$.*

3. p é ponto periódico de f se e somente se $\tau(p)$ é ponto periódico de g.

4. $\mathcal{B}(\tau(p)) = \tau(\mathcal{B}(p))$, onde p é um ponto periódico de f.

5. o conjunto de pontos periódicos de f é denso em X se e somente se o conjunto de pontos periódicos de g é denso em Y.

6. f é transitiva topologicamente se e somente se g é transitiva topologicamente.

Demonstração.

1. Como τ é um homeomorfismo, a função inversa τ^{-1} existe e também é um homeomorfismo. Além disso, $\tau \circ f = g \circ \tau$ implica que $f \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ g$. Portanto, τ^{-1} é conjugação topológica de g e f.

2. Por definição, a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $\tau \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ \tau$. Desse modo, $\tau \circ f^n = \tau \circ f^{n-1} \circ f = g^{n-1} \circ \tau \circ f = g^{n-1} \circ g \circ \tau = g^n \circ \tau$. Portanto, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

3. Suponha que p é um ponto periódico de f com período principal n. Desse modo, $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) = \tau(p)$. Se $k = 1, \ldots, n-1$, então $g^k(\tau(p)) = \tau(f^k(p)) \neq \tau(p)$, pois $f^k(p) \neq p$ e τ é injetora. Portanto, $\tau(p)$ é um ponto periódico de g com período principal n. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

4. Suponha que p é um ponto periódico com período n. Se $x \in W^s(\tau(p))$, então $\lim_{k\to\infty} g^{kn}(x) = \tau(p)$. Como τ^{-1} é contínua, temos $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(\tau^{-1}(x)) = \lim_{k\to\infty} \tau^{-1}(g^{kn}(x)) = p$. Então, $x \in \tau(W^s(p))$ pois $\tau^{-1}(x) \in W^s(p)$.

   Por outro lado, se $\tau(x) \in \tau(W^s(p))$, então $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$. Como τ é contínua, temos $\lim_{k\to\infty} g^{kn}(\tau(x)) = \lim_{k\to\infty} \tau(f^{kn}(x)) = \tau(p)$ e, portanto, $\tau(x) \in W^s(\tau(p))$.

5. Se o conjunto $Per(f)$ dos pontos periódicos de f é denso em A, então $\tau(Per(f))$ é denso em B pois τ é um homeomorfismo. Como $\tau(Per(f)) = Per(g)$, temos que $Per(g)$ é denso em B. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

6. Inicialmente, sendo τ é contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que, se $z \in A$, $|x-z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$, então $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))|$, onde $n \geq 1$ é fixado.

   Se $x', y' \in B$, existem $x, y \in A$ tais que $\tau(x) = x'$ e $\tau(y) = y'$. Como f é transitiva topologicamente, existe $z \in A$ tal que $|x - z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$ para algum $n \geq 1$. Portanto, $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$. Se $\tau(z) = z'$, então $|x' - z'| < \varepsilon$ e $|y' - g^n(z')| < \varepsilon$ e, portanto, g é transitiva topologicamente. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

$\square$

Lema 2.18. *A função $T : [0,1] \to [0,1]$, dada por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

é caótica.

Demonstração. Inicialmente, provaremos por indução que $T^n : \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^n$. Pela definição de T, a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $T^{n-1} : \left[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^{n-1}$. Fixado k, podemos supor que $T^{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 0$ e $T^{n-1}\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = 1$. O caso em que $T^{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 1$ e $T^{n-1}\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = 0$ é tratado de maneira análoga. Temos que $T^{n-1}(\overline{x}) = \frac{1}{2}$, onde $\overline{x} = \frac{2k+1}{2^n}$ é o ponto médio do intervalo $\left[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right]$. Portanto, $T^n(\overline{x}) = T(T^{n-1}(\overline{x})) = T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $T^n\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = T(0) = 0$ e $T^n\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = T(1) = 0$. Desse modo, $T^n : \left[\frac{k}{2^{n-1}}, \overline{x}\right] \to [0,1]$ e $T^n : \left[\overline{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] \to [0,1]$ são funções lineares(pois são composições de funções lineares) e bijetoras para todo $0 \leq k < 2^{n-1}$. Observando que $\left[\frac{k}{2^{n-1}}, \overline{x}\right] = \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right]$ e $\left[\overline{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] = \left[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\right]$, concluímos que que $T^n : \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^n$ e, portanto, a afirmação está provada.

Para provar que T é caótica, seja $\varepsilon > 0$. Pelo afirmação do parágrafo anterior, existem $n \geq 1$ e $I = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ tais que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $x \in I$ e $T^n : I \to [0,1]$ é bijetora.

Seja $x \in [0,1]$. Como $T(I) \supset I$, a Proposição **??** afirma que existe $p \in I$ tal que $T^n(p) = p$. Observando que $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que o conjunto de pontos periódicos de T é denso em $[0,1]$.

Sejam $x, y \in [0,1]$. Como $T^n : I \to [0,1]$ é sobrejetora, existe $z \in I$ tal que $T^n(z) = y$. Observando que $|z - x| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $|T^n(z) - y| = 0 < \varepsilon$, concluímos que T é transitiva topologicamente.

Seja $x \in [0,1]$. Como $T^n : I \to [0,1]$ é sobrejetora, existem $a, b \in I$ tais que $T^n(a) = 0$ e $T^n(b) = 1$. Se $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, então $|T^n(x) - T^(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$ e se $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, então $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $|x - b| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que T depende sensivelmente das condições iniciais. □

Teorema 2.19. *Se $\mu = 4$, então F é caótica.*

Demonstração. Basta observar que $F \circ \tau = \tau \circ T$, onde $\tau : [0,1] \to [0,1]$ é o homeomorfismo dado por $\tau(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. □

2.5 Dinâmica Simbólica

Definição 2.20. $\Sigma_2 = \{(s_0\, s_1\, s_2\, \dots) : s_j \in \{0,1\}$ para todo $j \geq 0\}$ é o espaço das sequências de 0 e 1.

Proposição 2.21. *A função $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$, dada por*

$$d(s,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j},$$

é uma distância em Σ_2.

Proposição 2.22. *Sejam $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \dots)$ e $t = (t_0\, t_1\, t_2\, \dots)$ elementos de Σ_2.*

1. *Se $s_j = t_j$ para todo $0 \leq j \leq n$, então $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$.*

2. *Se $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$, então $s_j = t_j$ para todo $0 \leq j \leq n$.*

Demonstração. Suponha que $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$. Desse modo,

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

Por outro lado, se $s_i \neq t_i$ para algum $0 \leq i \leq n$, então

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n}$$

Portanto, se $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, concluímos que $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$. □

Definição 2.23. A função $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, dada por $\sigma(s_0\, s_1\, s_2\, \dots) = (s_1\, s_2\, s_3\, \dots)$, é chamada de *função shift.*

Proposição 2.24. *σ é contínua.*

Demonstração. Sejam $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \dots) \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Se $t = (t_0\, t_1\, t_2\, \dots) \in \Sigma_2$ e $d(s,t) < \frac{1}{2^{n+1}}$, então $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n+1$, de acordo com a Proposição 2.22. Como $\sigma(s) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ e $\sigma(t) = (t_1 t_2 t_3 \dots)$, temos que as primeiras $n+1$ entradas de $\sigma(s)$ e $\sigma(t)$ são iguais. Novamente, utilizando a Proposição 2.22, temos que $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Como s é um ponto arbitrário em Σ_2, concluímos que σ é contínua. □

Proposição 2.25. *1. existem 2^n pontos periódicos de período n.*

2. existe um ponto cuja órbita é densa.

3. o conjunto dos pontos periódicos é denso.

Demonstração. 1. Se $s = (s_0\, s_1\, s_2\, \dots)$ é um ponto periódico com período n, então

$$\sigma^k(\sigma^n(s)) = (s_{n+k} s_{n+k+1} s_{n+k+2} \dots) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots) = \sigma^k(s)$$

para todo $k \geq 0$. Desse modo, s é formado pela repetição das entradas $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem 2^n sequências distintas para $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ e, portanto, a afirmação está provada.

2. Considere o ponto $s^* = (0\,1\,00\,01\,10\,11\,000\,001 \dots)$ formado por todos os blocos de tamanho 1, depois por todos os blocos de tamanho 2, e assim sucessivamente.

   Sejam $s \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. É fácil ver que existe $k \geq 0$ de modo que $\sigma^k(s^*)$ e s são iguais nas primeiras $n+1$ entradas. De acordo com a Proposição 2.22, $d(s, \sigma^k(s^*)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, a afirmação está provada.

3. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Considere o ponto periódico t com período $n+1$ formado pela repetição da sequência $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$. De acordo com a Proposição 2.22, $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, a afirmação está provada.

□

3 Teorema de Sharkovsky

Ao longo dessa seção, consideraremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Além disso, escreveremos $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_n$ quando J_0, J_1, …, J_n são intervalos fechados e $f(J_k) \supset J_{k+1}$ para todo $0 \leq k < n$.

Lema 3.1. *Se $J_0 \longrightarrow J_1$, então existe um intervalo fechado $J_0' \subset J_0$ tal que $f(J_0') = J_1$.*

Demonstração. Sejam p, $q \in [a,b]$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$, onde $J_0 = [a,b]$ e $J_1 = [c,d]$. Se $p \leq q$, definimos $b' = \inf\{x \in [p,q] : f(x) = d\}$ e $a' = \sup\{x \in [p,b'] : f(x) = c\}$ e, pela continuidade de f, podemos concluir que $f(J_0') = J_1$, onde $J_0' = [a', b']$. Se $q \leq p$, a demonstração é análoga. □

Lema 3.2. *Se $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow J_0$, então existe $p \in J_0$ tal que as seguintes condições são válidas:*

1. *$f^k(p) \in J_k$ para todo $1 \leq k < n$.*
2. *$f^n(p) = p$.*

Demonstração. Pelo Lema anterior, podemos construir uma sequência de intervalos fechados J_0', J_1', …, J_{n-1}' com as seguintes propriedades:

a. $J_0 \supset J_0' \supset J_1' \supset \cdots \supset J_{n-1}'$.

b. $f^k(J_{k-1}') = J_k$ para todo $1 \leq k < n$.

c. $f^n(J_{n-1}') = J_0$.

Desse modo, existe $p \in J_{n-1}'$ tal que $f^n(p) = p$. Em particular, $p \in J_0$ e $f^k(p) \in J_k$ para todo $1 \leq k < n$. □

Teorema 3.3. *Se $\mathrm{Per}_3(f) \neq \emptyset$ e $n \geq 1$, então $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Sejam $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de um elemento de $\mathrm{Per}_3(f)$ e suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$. Se $f(p_1) = p_3$ e $f(p_3) = p_2$, a demonstração é análoga. Definindo $J_0 = [p_1, p_2]$ e $J_1 = [p_2, p_3]$, temos que $J_0 \longrightarrow J_1$, $J_1 \longrightarrow J_0$ e $J_1 \longrightarrow J_1$. Com isso, podemos demonstrar as seguintes afirmações:

a) $\mathrm{Per}_1(f) \neq \emptyset$.

De fato, $J_1 \longrightarrow J_1$ implica que existe $p \in J_1$ tal que $f(p) = p$.

b) $\mathrm{Per}_2(f) \neq \emptyset$.

De fato, $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_0$ implica que existe $p \in J_0$ tal que $f(p) \in J_1$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in J_0 \cap J_1$, o que é um absurdo pois $J_0 \cap J_1 = \{p_2\}$ e $p_2 \in \mathrm{Per}_3(f)$.

c) $\mathrm{Per}_4(f) \neq \emptyset$.

De fato, $J_1 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_0 \longrightarrow J_1$ implica que existe $p \in J_1$ tal que $f^k(p) \in J_1$ para todo $1 \leq k < 3$, $f^3(p) \in J_0$ e $f^4(p) = p$. Se $f^3(p) = p$, então $p \in J_0 \cap J_1$, o que é um absurdo pois $J_0 \cap J_1 = \{p_2\}$ e $f^2(p_2) = p_1 \notin J_1$. Se $f^k(p) = p$ para algum $1 \leq k < 3$, então $f^k(p) \in J_1$ para todo $k \geq 1$. Em particular, $f^3(p) \in J_0 \cap J_1 = \{p_2\}$ e, portanto, $f^4(p) = p = p_3$, o que é um absurdo pois $f(p_3) = p_1 \notin J_1$.

Por fim, podemos demonstrar de maneira análoga à última afirmação que $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 4$. $\square$

Definição 3.4 (Ordenação de Sharkovsky)**.**

$$3 \triangleright 5 \triangleright \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \cdots \triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k \cdot 5 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Teorema 3.5 (Sharkovsky)**.** *Se* $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$ *e* $n \triangleright m$*, então* $\mathrm{Per}_m(f) \neq \emptyset$*.*

Teorema 3.6. *Se* $n \geq 1$*, então existe uma função* f *com as seguintes propriedades:*

1. $\mathrm{Per}_n f \neq \emptyset$*.*

2. $\mathrm{Per}_m f = \emptyset$ *para todo* $m \triangleright n$*.*

Demonstração. Seja $T : [0,1] \to [0,1]$ a função dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

e considere a família de funções $T_h(x) = \min\{h, T(x)\}$ definidas em $[0,1]$, onde o parâmetro h varia em $[0,1]$.

Inicialmente, observe que $T(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$ implica que que $T_1 = T$. Além disso, é possível provar por indução que T_1 possui 2^k pontos periódicos de período k para todo $k \geq 1$. Desse modo, podemos definir

$$h(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } k \text{ de } T_1\}\}$$

para todo $k \geq 1$. A ideia principal da prova consiste no fato de que $h(k)$ desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de $T_{h(k)}$. As seguintes afirmações tornarão preciso esse fato:

a) Se $\mathcal{O} \subset [0,h)$ é uma órbita de T_h, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1.

Se $p \in \mathcal{O}$, então $T_h(p) \in [0,h)$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$. Assim, T_h e T_1 coincidem em $\mathcal{O}$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1.

b) Se $\mathcal{O} \subset [0,h]$ é uma órbita de T_1, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_h.

Se $p \in \mathcal{O}$, então $T_1(p) \in [0,h]$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T_1(p)\} = T_1(p)$. Assim, T_h e T_1 coincidem em $\mathcal{O}$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_h.

c) $T_{h(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(k))$ de tamanho j se, e somente, se $h(k) > h(j)$.

Se $T_{h(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(k))$ de tamanho j, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1 e, pela definição de $h(j)$, concluímos que $h(k) > h(j)$. Por outro lado, se $h(k) > h(j)$, então T_1

possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(j)] \subset [0, h(k)]$ de tamanho j e, desse modo, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_{h(k)}$.

d) A órbita de T_1 que contém $h(k)$ é uma órbita de tamanho k de $T_{h(k)}$. Além disso, todas as outras órbitas de $T_{h(k)}$ estão em $[0, h(k))$.

Pela definição de $h(k)$, T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(k)]$ de tamanho k e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_{h(k)}$.

Na segunda parte, basta observar que $h(k)$ é o valor máximo de $T_{h(k)}$ e, desse modo, toda órbita de $T_{h(k)}$ está contida em $[0, h(k)]$. Em particular, se a órbita não contém $h(k)$, então ela está contida em $[0, h(k))$.

e) $k \triangleright j$ se, e somente se, $h(k) > h(j)$.

Suponha que $k \triangleright j$. Sabemos que $T_{h(k)}$ possui uma órbita de tamanho k e, pelo Teorema de Sharkovsky, $T_{h(k)}$ admite uma órbita de tamanho j. Em particular, essa órbita está contida em $[0, h(k))$ e, portanto, $h(k) > h(j)$.

Suponha que $h(k) > h(j)$. Se $j \triangleright k$, então $h(k) < h(j)$ pela demonstração no parágrafo anterior e, portanto, $k \triangleright j$.

Desse modo, $T_{h(n)}$ possui órbita de tamanho n para cada $n \geq 1$. Além disso, se $m \triangleright n$ então $h(m) > h(n)$ e, portanto, $T_{h(n)}$ não possui órbita de tamanho m. $\square$

4 Derivada de Schwarz

Definição 4.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^3$. A derivada de Schwarz de f é função $\mathcal{S}f$ dada por

$$(\mathcal{S}f)(x) = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial f(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial f(x)}\right)^2$$

para todo x tal que $\partial f(x) \neq 0$.

Proposição 4.2. *Se $\mathcal{S}f < 0$, então $\mathcal{S}f^n < 0$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pela Regra da Cadeia, podemos concluir que

$$(\mathcal{S}f^2)(x) = (\mathcal{S}f)(f(x))[\partial f(x)]^2 + (\mathcal{S}f)(x) < 0$$

para todo x tal que $\partial f^2(x) \neq 0$. Desse modo, $\mathcal{S}f^n < 0$ para todo $n \geq 1$ por indução. $\square$

Lema 4.3. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e x_0 é um ponto de mínimo local de ∂f, então $\partial f(x_0) \leq 0$.*

Demonstração. Se $\partial f(x_0) \neq 0$, então

$$(\mathcal{S}f)(x_0) = \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial f(x_0)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial f(x_0)}\right)^2 < 0.$$

Sendo x_0 ponto de mínimo local de ∂f, temos que $\partial^2 f(x_0) = 0$ e $\partial^3 f(x_0) \geq 0$ e, portanto, $\partial f(x_0) < 0$. $\square$

Lema 4.4. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c$ são pontos fixos de f com $\partial f(b) \leq 1$, então f possui ponto crítico em (a, c).*

Demonstração. Pelo TVM, existem $r \in (a, b)$ e $s \in (b, c)$ tais que $\partial f(r) = \partial f(s) = 1$. Sendo ∂f contínua, ∂f restrita ao intervalo $[r, s]$ possui mínimo global. Como $b \in (r, s)$ e $\partial f(b) \leq 1$, temos que ∂f possui mínimo local em (r, s). Utilizando Lema anterior e o TVI, a demonstração está concluída. □

Lema 4.5. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c < d$ são pontos fixos de f, então f possui ponto crítico em (a, d).*

Demonstração. Se $\partial f(b) \leq 1$ ou $\partial f(c) \leq 1$, o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se $\partial f(b) > 1$ e $\partial f(c) > 1$, existem $r, t \in (b, c)$ tais que $r < t$, $f(r) > r$ e $f(t) < t$. Pelo TVM, existe $s \in (r, t)$ tal que $\partial f(s) < 1$. Portanto, ∂f possui mínimo local em (b, c). Utilizando Lema 4.3 e o TVI, a demonstração está concluída. □

Lema 4.6. *Se f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos críticos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo TVM, se $c \in \mathbb{R}$, então f possui ponto crítico entre dois elementos de $f^{-1}(c)$ e, portanto, $f^{-1}(c)$ é finito. De modo mais geral, é possível provar por indução que $f^{-n}(c)$ é finito para todo $n \geq 1$.

Se $n \geq 1$, então $\partial f^n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \partial f(f^k(x)) = 0$ se, e somente se, $f^k(x)$ é ponto crítico de f para algum $1 \leq k < n$. Portanto, o conjunto de pontos críticos de f^n é finito. □

Lema 4.7. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos fixos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.5, se f^n possui infinitos pontos fixos para algum $n \geq 1$, então f^n possui infinitos pontos críticos, o que é um absurdo pelo Lema anterior. □

Teorema 4.8 (Singer)**.** *Se $\mathcal{S}f < 0$ e f possui n pontos críticos, então f possui no máximo $n+2$ órbitas periódicas não repulsoras.*

Demonstração. Seja p um ponto periódico não repulsor de f de período m. Se $g = f^m$, então $g(p) = p$ e $|\partial g(p)| \leq 1$. Seja K a componente conexa de $\mathcal{B}(p) = \{x : \lim_{k\to\infty} g^k(x) = p\}$ que contém p. Inicialmente, suponha que K é limitado.

Se $|\partial g(p)| < 1$, então é possível mostrar que K é aberto, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K.

Escrevendo $K = (a, b)$, se $g(a) = a$ e $g(b) = b$, então g possui ponto crítico em K pelo Lema 4.4; se $g(a) = b$ e $g(b) = a$, então g^2 possui ponto crítico em K pelo Lema 4.4; se $g(a) = g(b)$, então g possui ponto crítico em K pelo TVM.

Se $|\partial g(p)| = 1$, então os pontos fixos de g são isolados pelo Lema anterior e, portanto, existe uma vizinhança de p que não contém outros pontos fixos de g.

Suponha que $\partial g(p) = 1$. Se $\partial g(p) = -1$, a demonstração é análoga considerando g^2. Se p possui o comportamento de um ponto repulsor, então, para x numa vizinhança de p, $g(x) > x$ quando $x > p$ e $g(x) < x$ quando $x < p$. Desse modo, 1 é um mínimo local de ∂g, o que é um absurdo pelo Lema 4.3 e, portanto, p é atrator em pelo menos um dos lados. Desse modo, K é um intervalo não trivial, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K. Assim, é possível concluir de maneira análoga que g possui ponto crítico em K.

Assim, cada intervalo K limitado está associado à algum ponto crítico de f e, portanto, existem no máximo n desses intervalos. Não é possível obter a mesma conclusão se K não é limitado, mas observando que existem no máximo dois intervalos desse tipo, a demonstração está concluída. □

Corolário 4.9. *Se $\mu > 0$, então $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.*

5 Bifurcação

Ao longo de seção, f_λ representará uma família parametrizada de funções no parâmetro λ de modo que a função

$$G(x,\lambda) = f_\lambda(x),$$

definida num aberto de $\mathbb{R}^2$, seja de classe $\mathcal{C}^\infty$ nas variáveis x e λ.

Teorema 5.1. *Seja f_λ uma família parametrizada de funções. Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$
2. $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$

Então existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0, respectivamente, e uma função $p : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

1. $p(\lambda_0) = x_0$
2. $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ *para todo* $\lambda \in I$

Além disso, f_λ não possui outros pontos fixos em J.

Demonstração. Seja $G(x,\lambda) = f_\lambda(x) - x$. Observe que x é ponto fixo de f_λ se e somente se $G(x,\lambda) = 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, como $G(x_0,\lambda_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0,\lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0,$$

existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0, respectivamente, e uma função $p : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $p(\lambda_0) = x_0$ e $G(p(\lambda),\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in I$.

Além disso, para cada $\lambda \in I$ está associado um único $x \in J$ e, portanto, $x \in J$ e $G(x,\lambda) = 0$ se e somente se $x = p(\lambda)$. □

De acordo com o Teorema anterior, se x_0 é um ponto fixo hiperbólico de f_{λ_0}, então f_λ possui um único ponto fixo numa vizinhança de x_0 para cada λ numa vizinhança de λ_0.

Utilizando a notação do Teorema anterior, considere a função $g_\lambda(x) = f_\lambda(x + p(\lambda)) - p(\lambda)$. Observe que $g_\lambda(0) = f(p(\lambda)) - p(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in I$, ou seja, 0 é ponto fixo de g_λ para todo $\lambda \in I$. Além disso, f_λ e g_λ são topologicamente conjugadas por $h_\lambda(x) = x - p(\lambda)$.

Teorema 5.2 (Bifurcação Tangente)**.** *Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(0) = 0$
2. $f'_{\lambda_0}(0) = 1$
3. $f''_{\lambda_0}(0) \neq 0$
4. $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

Então existem uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

1. $p(0) = \lambda_0$
2. $f_{p(x)}(x) = x$

Além disso, $p'(0) = 0$ e $p''(0) \neq 0$.

Demonstração. Considere a função $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Observe que x é um ponto fixo de f_λ se e somente se $G(x, \lambda) = 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, como $G(0, \lambda_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0,$$

existem uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ tais que $p(0) = \lambda_0$ e $G(x, p(x)) = 0$ para todo $x \in I$.

Além disso, pela Regra da Cadeia, é válido que

$$p'(0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = -\frac{f'_{\lambda_0}(0) - 1}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)} = 0$$

e

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) - \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \lambda}(0, \lambda_0)}{\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)\right)^2} = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \lambda_0)}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)} \neq 0$$

□

No Teorema anterior, se $p''(0) > 0$, então a concavidade de p é para cima. Esboçando o gráfico de p, podemos observar que f não possui pontos fixos para $\lambda < \lambda_0$, possui um único ponto fixo para $\lambda = \lambda_0$ e possui dois pontos fixos para $\lambda > \lambda_0$. Se $p''(0) < 0$, a concavidade de p é para baixo e a conclusão é análoga, invertendo os sentidos.

Teorema 5.3 (Bifurcação com Duplicação de Período)**.** *Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(0) = 0$ *para todo λ numa vizinhança de λ_0*
2. $f'_{\lambda_0}(0) = -1$
3. $\frac{\partial (f_\lambda^2)'}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$
4. $S_{f_{\lambda_0}}(0) \neq 0$

Então existem uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

1. $p(0) = \lambda_0$

2. $f_{p(x)}(x) \neq x$ *para todo* $x \in I$

3. $f^2_{p(x)}(x) = x$ *para todo* $x \in I$

Além disso, $p'(0) = 0$ *e* $p''(0) \neq 0$*.*

Demonstração. Seja $G(x, \lambda) = f^2_\lambda(x) - x$. Sendo $G(0, \lambda) = 0$ para todo λ numa vizinhança de λ_0, temos que

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = 0$$

e, portanto, não podemos utilizar o Teorema da Função Implícita diretamente. Seja

$$H(x, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{G(x, \lambda)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Desse modo, H é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e são válidas as igualdades

(I) $H(0, \lambda_0) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0) = (f^2_{\lambda_0})'(0) - 1 = f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(0)) f'_{\lambda_0}(0) - 1 = 0$

(II) $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda)\right)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial}{\partial \lambda}((f^2_\lambda)'(0) - 1)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial (f^2_\lambda)'}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

(III) $\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)$

(IV) $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) = \frac{1}{3}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0)$

Para provar as igualdades (III) e (IV), observe que podemos escrever

$$G(x, \lambda) = G(0, \lambda) + x\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) + \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda) + \frac{x^3}{6}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda) + \cdots$$

para todo x numa vizinhança de 0 e para λ fixado numa vizinhança de λ_0, utilizando a Série de Taylor. Sendo $G(0, \lambda) = 0$, podemos escrever

$$H(x, \lambda) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) + \frac{x}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda) + \frac{x^2}{6}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda) + \cdots$$

para $x \neq 0$ nessa vizinhança. Portanto, H é de classe $\mathcal{C}^\infty$. Escrevendo a Série de Taylor de H numa vizinhança de 0 e igualando os termos correspondentes, concluímos que $\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)$ e $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0)$.

Pelas igualdades (I) e (II), e pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que $p(0) = \lambda_0$ e $H(x, p(x)) = 0$ para todo $x \in I$. Em particular, se $x \neq 0$,

$$0 = \frac{G(x, p(x))}{x} = \frac{f^2_{p(x)}(x) - x}{x}$$

ou seja, $f^2_{p(x)}(x) = x$ para todo $x \in I$. Além disso, pelo Teorema 5.1, f_λ possui um único ponto fixo numa vizinhança de 0 e, portanto, podemos considerar que $f_{p(x)}(x) \neq x$ para todo $x \in I$, $x \neq 0$.

Como

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda_0) &= (f_{\lambda_0})''(x)|_{x=0} \\
&= [f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\
&= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)]|_{x=0} \\
&= f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(0)) - f''_{\lambda_0}(0) = 0
\end{aligned}
$$

temos que

$$
p'(0) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = 0
$$

Por fim,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda_0) &= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\
&= [f'''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^3 + 2f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)f'_{\lambda_0}(x) + f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)f''_{\lambda_0}(x) \\
&\quad + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'''_{\lambda_0}(x)]|_{x=0} \\
&= f'''_{\lambda_0}(0)(f'_{\lambda_0}(0))^3 + 2(f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + (f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + f'_{\lambda_0}(0)f'''_{\lambda_0}(0) \\
&= -2f'''_{\lambda_0}(0) - 3(f''_{\lambda_0}(0))^2 \\
&= 2\frac{f'''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)} - 3\left(\frac{f''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)}\right)^2 = 2S_{f_{\lambda_0}}(0)
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,\lambda_0)\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)}{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)\right)^2} = -\frac{1}{3}\frac{\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = -\frac{2}{3}\frac{S_{f_{\lambda_0}}(0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} \neq 0.
$$

□

6 Subshift

Seja $N \geq 2$. Definimos o conjunto Σ_N formado pelas sequências de números naturais limitados entre 1 e N. Precisamente,

$$
\Sigma_N = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : 1 \leq x_n \leq N \text{ para todo } n \geq 0\}.
$$

Definimos também a função $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \to \mathbb{R}$ que é dada por

$$
d_N(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i},
$$

onde $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ e $y = (y_n)_{n=0}^{\infty}$. Como $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} < \infty$, temos que d_N está bem definida.

Proposição 6.1. *(Σ_N, d_N) é um espaço métrico.*

Demonstração. Se $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}, y = (y_n)_{n=0}^{\infty}, z = (z_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$, então

1. $d_N(x,y) \geq 0$, pois $|x_i - y_i| \geq 0$ para todo $i \geq 0$.

2. $d_N(x,y) = d_N(y,x)$, pois $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ para todo $i \geq 0$.

3. $d_N(x,z) \leq d_N(x,y) + d_N(y,z)$, pois $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ para todo $i \geq 0$.

Desse modo, d_N é uma distância em Σ_N e (Σ_N, d_N) é um espaço métrico. □

Proposição 6.2. *Sejam $x = (x_n)_{n=0}^{\infty}, y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$.*

1. Se $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, então $d_N(x,y) \leq \frac{1}{N^k}$.

2. Se $d_N(x,y) < \frac{1}{N^k}$, então $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$.

Demonstração. 1. Se $x_i = y_i$ para todo $0 \leq i \leq k$, então

$$d_N(x,y) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} = \frac{N-1}{N^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{N-1}{N^{k+1}} \frac{N}{N-1} = \frac{1}{N^k}.$$

2. Se $x_j \neq y_j$ para algum $0 \leq j \leq k$, então

$$d_N(x,y) \geq \frac{1}{N^j} \geq \frac{1}{N^k}.$$

□

Definimos a função shift $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ que é dada por $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ para todo $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$, isto é, $\sigma(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$.

Proposição 6.3. *σ é contínua.*

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$. Seja $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$ e defina $\delta = \frac{1}{N^{k+1}}$.

Pela Proposição anterior, se $y = (y_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$ e $d_N(x,y) < \delta$, então $x_i = y_i$ para todo $i = 0, \dots, k+1$. Desse modo, $\sigma(x)$ e $\sigma(y)$ coincidem nas k primeiras entradas. Utilizando a Proposição anterior novamente, concluímos que $d_N(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$. □

Seja $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ uma matriz quadrada de ordem N tal que $a_{ij} \in \{0,1\}$ para todo $1 \leq i,j \leq N$. Dizemos que A é uma matriz de transição. Definimos o conjunto Σ_A como

$$\Sigma_A = \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N : a_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \geq 0\}.$$

Seja $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$. Observando que $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 1$, temos que $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma_A$. Desse modo, podemos definir a função $\sigma_A : \Sigma_A \to \Sigma_A$ como sendo a restrição de σ em Σ_A. Dizemos que σ_A é o subshift definido por A.

Proposição 6.4. *Σ_A é um subconjunto fechado de Σ_N.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de elementos em Σ_A convergente para $x = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$. Observe que a sequência $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de sequências, pois cada x_n é elemento de Σ_N.

Suponha que $x \notin \Sigma_A$. Então, existe $j \geq 0$ tal que $a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Por outro lado, pela definição de convergência, existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{j+1}}$ e, portanto, as $j+2$ primeiras entradas de x e x_{n_0} são iguais. Escrevendo $x_{n_0} = (\eta_n)_{n=0}^{\infty}$, concluímos que $a_{\eta_j \eta_{j+1}} = a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$. Absurdo, pois $x_{n_0} \in \Sigma_A$. □

No restante dessa seção vamos estudar a dinâmica da função quadrática $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, onde o parâmetro $\mu = 3.839$ está fixado. Será omitido μ na notação da função e escreveremos apenas F.

Sejam $a = 0.149888$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $I = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Através de cálculos é possível mostrar que $F^3(I) \subset I$ e $|(F^3)'(I)| \leq |(F^3)'(a-\varepsilon)| < 1$ e, portanto, o intervalo I possui um ponto periódico atrator de F de período 3. Se a_1, a_2 e a_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$a_1 \simeq 0.149888,\ a_2 \simeq 0.489149 \text{ e } a_3 \simeq 0.959299.$$

De acordo com o Teorema de Sharkovsky, F possui infinitos pontos periódicos. Além disso, de acordo com o Teorema de Singer, essa é a única órbita atratora de F.

De modo análogo, concluímos que F possui outra órbita de tamanho 3. Se b_1, b_2 e b_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040,\ b_2 \simeq 0.539247 \text{ e } b_3 \simeq 0.953837.$$

Observando o gráfico de F^3, concluímos que para cada b_i, existe b_i' no lado oposto de b_i em relação ao ponto a_i tal que $F^3(b_i') = b_i$. Defina $A_1 = (b_1', b_1)$, $A_2 = (b_2', b_2)$ e $A_3 = (b_3, b_3')$. Cada A_i é exatamente o intervalo maximal contendo a_i utilizado na demonstração do Teorema de Singer.

Figura: Gráfico de F^3 com os pontos a_1, a_2 e a_3 assinalados.

Sendo F^3 simétrica em relação ao ponto $\frac{1}{2}$, temos que $F(b_2') = F(b_2) = b_3$. Além disso, $F(b_1') = b_2'$ e $F(b_3') = b_1'$.

Desse modo, F mapeia, de forma monótona, A_1 em A_2 e A_3 em A_1. Observando que o máximo de F em A_2 é $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0.95975 < b_3'$, concluímos que $F(A_2) \subset A_3$.

Sabemos que se $x \notin [0,1]$, então $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = -\infty$. Além disso, o único ponto periódico de A_i é a_i e todos os pontos em A_i tendem para a órbita de a_i. Desse modo, todos os outros pontos periódicos de F residem no complemento de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ em $[0,1]$, que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam $I_0 = [0, b_1']$, $I_1 = [b_1, b_2']$, $I_2 = [b_2, b_3]$ e $I_3 = [b_3', 1]$ tais intervalos. A Proposição a seguir nos permite dizer mais.

Proposição 6.5. *Se $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$ é um ponto periódico de F, então $x \in I_1 \cup I_2$.*

Demonstração. Observando que F é monótona em cada I_k, temos que $F(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$, $F(I_1) = I_2$, $F(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$ e $F(I_3) = I_0$. Desse modo, se $x \in I_1 \cup I_2$ é periódico, então órbita de x permanece em $I_1 \cup I_2$.

Por outro lado, se $x \in I_0 - \{0\}$, existe um menor $n \geq 1$ tal que $F^n(x) \notin I_0$. Se $F^n(x) \in A_1$, então x não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de A_1 é a_1. Se $F^n(x) \in I_1$, então

x não pode ser periódico, pois caso contrário a órbita de x estaria contida em $I_1 \cup I_2$ e nunca retornaria para I_0.

Finalmente, se $x \in I_3$, então $F(x) \in I_0$ e a análise segue como no parágrafo anterior. $\square$

Defina o conjunto Λ como

$$\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2 : F^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de F estão em Λ, com exceção dos pontos 0, a_1, a_2 e a_3.

Lema 6.6. *Existe $N \geq 1$ tal que $|(F^n)'(\Lambda)| > 1$ para todo $n \geq N$.*

Demonstração. Como $F'' < 0$, temos que F' é estritamente decrescente. Sendo $F'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, concluímos que A_2 é uma vizinhança da única raiz de F'. Além disso, $|(F^3)'(b_2)| = |(F^3)'(b_2')| \simeq 0.3$. Desse modo, $|F'(I_1 \cup I_2)| \geq \nu$ para algum $\nu \in (0,1)$.

Observando o gráfico de F^3, concluímos que o subconjunto de $I_1 \cup I_2$ no qual $|F'| \leq 1$ é formado por três intervalos fechados. Sejam B_1, B_2 e B_3 tais intervalos, numerados da esquerda para direita. Utilizando a simetria do gráfico de F^3 e o fato de que $(F^3)'(b_1) > 1$, temos que $F^3(B_3) \subset A_1$ e, portanto, $B_3 \cap \Lambda = \emptyset$.

Por outro lado, $B_2 \subset [0.661, 0.683]$, já que $(F^3)'(0.661) > 1$ e $(F^3)'(0.683) < -1$. Desse modo, $F(B_2) \subset A_3$. Utilizando novamente a simetria do gráfico de F^3, concluímos que $F(B_1) \subset A_3$. Portanto, $B_1 \cap \Lambda = \emptyset$ e $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$. Assim, $|(F^3)'(\Lambda)| \geq \lambda$ para algum $\lambda > 1$. Observe que se $x \in \Lambda$ e $L \geq 1$, então

$$\left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| = \prod_{i=0}^{L-1} \left|\left(F^3\right)'\left(F^{3i}(x)\right)\right| \geq \lambda^L.$$

Finalmente, sejam $x \in \Lambda$ e $K \geq 1$ tal que $\nu^2\lambda^K > 1$. Se $N = 3K$ e $n \geq N$, podemos escrever $n = 3L + \alpha$, onde $L \geq K$ e $\alpha \in \{0, 1, 2\}$. Desse modo,

i. se $\alpha = 0$, então
$$\left|(F^n)'(x)\right| = \left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| \geq \lambda^L \geq \lambda^K > 1.$$

ii. se $\alpha = 1$, então

$$\left|(F^n)'(x)\right| = \left|F'\left(F^{3L}(x)\right)\right| \left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| \geq \nu\lambda^L > \nu^2\lambda^K > 1.$$

iii. se $\alpha = 2$, então

$$\left|(F^n)'(x)\right| = \left|F'\left(F^{3L+1}(x)\right)\right| \left|F'\left(F^{3L}(x)\right)\right| \left|\left(F^{3L}\right)'(x)\right| \geq \nu^2\lambda^L \geq \nu^2\lambda^K > 1.$$

$\square$

Para as demonstrações dos próximos resultados, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos definir a função $S : \Lambda \to \Sigma_A$ por $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, onde $x_i = 1$ se $F^i(x) \in I_1$ e $x_i = 2$ se $F^i(x) \in I_2$ para todo $i \geq 0$. Observe que está S bem definida, pois $F(I_1) = I_2$ e $F(I_2) \subset I_1 \cup I_2$ e, portanto, $a_{x_i x_{i+1}} = 1$ para todo $i \geq 0$.

Lema 6.7. *Λ não contém intervalos.*

Demonstração. Suponha que Λ contém algum intervalo e sejam $a, b \in \Lambda$, com $a < b$, tais que $[a, b] \subset \Lambda$. Utilizando a notação do Lema anterior, seja $k \geq N$ tal que $(b-a)\nu^N \lambda^{k-N} > 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$
\begin{aligned}
|F^k(b) - F^k(a)| &= |(F^k)'(c)|(b-a) \\
&= \left| \prod_{i=0}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| (b-a) \\
&= \left| \prod_{i=0}^{N-1} F'(F^i(c)) \right| \left| \prod_{i=N}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| (b-a) \\
&\geq \nu^N \lambda^{k-N}(b-a) > 1
\end{aligned}
$$

e, portanto, $F^k(a)$ ou $F^k(b)$ não é elemento de $[0, 1]$, o que é um absurdo. □

Proposição 6.8. *S é um homeomorfismo.*

Demonstração.

i. S é injetora:

Sejam $x, y \in \Lambda$, com $x < y$, e suponha que $S(x) = S(y)$. Desse modo, $F^n(x)$ e $F^n(y)$ está no mesmo lado em relação ao ponto crítico $\frac{1}{2}$ e, portanto, F é monótona no intervalo J_n, cujos pontos extremos são $F^n(x)$ e $F^n(y)$, para todo $n \geq 0$. Desse modo, se $z \in [x, y]$, então $F^n(z) \in J_n \subset I_1 \cup I_2$ para todo $n \geq 0$ e, portanto, $z \in \Lambda$. Mas isso implica que $[x, y] \subset \Lambda$, o que é um absurdo.

ii. S é sobrejetora:

Seja $(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_A$. Vamos provar que existe $x \in \Lambda$ tal que $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Inicialmente, para cada $n \geq 0$, considere

$$I_{x_0 \cdots x_n} = \{x \in [0, 1] : x \in I_{x_0}, \ldots, F^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

Observe que $x \in I_{x_0 \cdots x_n}$ se, e somente se, $x \in I_{x_0}$ e $F(x) \in \{y \in [0, 1] : y \in I_{x_1}, \ldots, F^{n-1}(y) \in I_{x_n}\}$. Desse modo, $I_{x_0 \cdots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1 \cdots x_n})$.

Assim, por indução, é possível concluir que $I_{x_0 \cdots x_n}$ é um intervalo fechado não vazio. Além disso, $I_{x_0 \cdots x_n} = I_{x_0 \cdots x_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{x_n}) \subset I_{x_0 \cdots x_{n-1}}$.

Desse modo, $(I_{x_0 \cdots x_n})_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de intervalos encaixantes fechados e não vazios e, portanto, existe $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$. Como $F^i(x) \in I_{x_i}$ para todo $i \geq 0$, concluímos que $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Observe que $x \in \cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \cdots x_n}$ é único, pois S é injetora.

iii. S é contínua:

Seja $x \in \Lambda$, com $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$. Sejam também $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$.

Como $I_{x_0\ldots x_k}$ um intervalo fechado e $x \in I_{x_0\ldots x_k}$, tome $\delta > 0$ tal que $y \in \Lambda$ e $|x-y| < \delta$ implica que $y \in I_{x_0\ldots x_k}$. Desse modo, $S(x)$ e $S(y)$ são iguais nas primeiras $k+1$ entradas e, portanto, $d_N(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$.

□

Teorema 6.9. *$S \circ F|_\Lambda = \sigma_A \circ S$.*

Demonstração. Seja $x \in \Lambda$. Utilizando a notação da Proposição anterior, se $S(x) = (x_n)_{n=0}^{\infty}$, então x é o único elemento de $\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0\cdots x_n}$.

Podemos escrever $I_{x_0\ldots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1}) \cap \cdots \cap F^{-n}(I_{x_n})$. Se $x_0 = 1$, então $x_1 = 2$ e, portanto, $F(I_{x_0}) = I_{x_1}$. Se $x_0 = 2$, então $F(I_{x_0}) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$. Em ambos os casos, $F(I_{x_0}) \supset I_{x_1}$ e, desse modo,

$$F(I_{x_0\ldots x_n}) = I_{x_1} \cap \cdots \cap F^{-n+1}(I_{x_n}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
S \circ F|_\Lambda(x) &= S(F(\cap_{n=0}^{\infty} I_{x_0\cdots x_n})) \\
&= S(\cap_{n=1}^{\infty} I_{x_1\cdots x_n}) \\
&= (x_n)_{n=1}^{\infty} = \sigma \circ S(x)
\end{aligned}$$

□

Proposição 6.10. *Seja A uma matriz de transição de ordem N. Então σ_A possui $Tr(A^k)$ pontos periódicos de período k.*

Demonstração. Observe que $x = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \Sigma_N$ é um ponto periódico de período k de σ se, e somente se, $x_i = x_{i+k}$ para todo $i \geq 0$, ou seja,

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, \ldots).$$

Desse modo, $x \in \Sigma_A$ se, e somente se, $a_{x_0x_1} = a_{x_1x_2} = \cdots = a_{x_{k-1}x_0} = 1$ e, portanto,

$$\begin{cases} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\ldots a_{x_{k-1}x_0} = 1, & \text{se } x \in \Sigma_A \\ a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\ldots a_{x_{k-1}x_0} = 0, & \text{se } x \notin \Sigma_A \end{cases}$$

Assim, a quantidade de pontos periódicos de período k de σ_A é dada por

$$\sum_{1 \leq x_0, \ldots, x_{k-1} \leq N} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\ldots a_{x_{k-1}x_0}.$$

Por outro lado, utilizando a definição de multiplicação de matrizes podemos mostrar por indução que $A^k = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$, onde

$$c_{ij} = \sum_{1 \leq x_1, \ldots, x_{k-1} \leq N} a_{ix_1}a_{x_1x_2}\ldots a_{x_{k-1}j}$$

e, portanto,

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{x_0=1}^{N} c_{x_0x_0} = \sum_{1\leq x_0,\ldots,x_{k-1}\leq N} a_{x_0x_1}a_{x_1x_2}\ldots a_{x_{k-1}x_0}.$$

$\square$