1 Derivada de Schwarz

Definição 1.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$. A *derivada de Schwarz de* f é a função S_f definida por

$$S_f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

para todo x tal que $f'(x) \neq 0$.

Exemplo 1.2. 1. Se $f(x) = F_\mu(x)$, então $S_f(x) = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0$ para todo $x \neq \frac{1}{2}$.

2. Se $f(x) = e^x$, então $S_f(x) = -\frac{1}{2} < 0$ para todo x.

3. Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $S_f(x) = -1 - \frac{3}{2}(\tan^2 x) < 0$ para todo x.

Lema 1.3. *Se $S_f < 0$, então $S_{f^n} < 0$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Se $S_f < 0$ e $S_g < 0$, vamos provar que $S_{f\circ g} < 0$. Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\
(f \circ g)''(x) &= f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) \\
(f \circ g)'''(x) &= f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g'''(x)
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
S_{f\circ g}(x) &= \frac{(f \circ g)'''(x)}{(f \circ g)'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{(f \circ g)''(x)}{(f \circ g)'(x)}\right)^2 \\
&= \frac{f'''(g(x))(g'(x))^2}{f'(g(x))} + 3\frac{f''(g(x))g''(x)}{f'(g(x))} + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(g(x))g'(x)}{f'(g(x))} + \frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2 \\
&= S_f(g(x))(g'(x))^2 + S_g(x) < 0
\end{aligned}$$

para todo x tal que $(f \circ g)'(x) \neq 0$. Por indução, $S_{f^n} < 0$ para todo $n \geq 1$. □

Lema 1.4. *Se $S_f < 0$ e x_0 é ponto de mínimo local de f', então $f'(x_0) \leq 0$.*

Demonstração. Se $f'(x_0) \neq 0$, então $S_f(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{3}{2}\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} < 0$. Sendo x_0 ponto de mínimo local de f', temos que $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \geq 0$. Portanto, $f'(x_0) < 0$. □

Lema 1.5. *Se $S_f < 0$ e $a < b < c$ são pontos fixos de f, com $f'(b) \leq 1$, então f possui ponto crítico em (a, c).*

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, existem $r \in (a, b)$ e $s \in (b, c)$ tais que $f'(r) = f'(s) = 1$. Sendo f' contínua, f' restrita ao intervalo $[r, s]$ possui mínimo global. Como $b \in (r, s)$ e $f'(b) \leq 1$, temos que f' possui mínimo local em (r, s). Utilizando Lema anterior e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída. □

Lema 1.6. *Se $S_f < 0$ e $a < b < c < d$ são pontos fixos de f, então f possui ponto crítico em (a, d).*

Demonstração. Se $f'(b) \leq 1$ ou $f'(c) \leq 1$, o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se $f'(b) > 1$ e $f'(c) > 1$, existem $r, t \in (b, c)$ tais que $r < t$, $f(r) > r$ e $f(t) < t$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $s \in (r, t)$ tal que $f'(s) < 1$. Portanto, f' possui mínimo local em (b, c). Utilizando Lema 1.4 e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída. □

Lema 1.7. *Se f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos críticos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, f possui ponto crítico entre dois elementos de $f^{-1}(c)$. Como f possui finitos pontos críticos, $f^{-1}(c)$ é finito. Além disso, se $f^{-k}(c)$ é finito, então $f^{-(k+1)}(c) = \{x \in \mathbb{R} : f(f^k(x)) = c\}$ é finito pois $f^{-1}(c)$ é finito e, por hipótese de indução, $f^{-k}(c_i)$ é finito para cada $c_i \in f^{-1}(c)$. Portanto, $f^{-n}(c)$ é finito para todo $n \geq 1$.

Temos que $(f^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x)) = 0$ se e somente se $f^k(x)$ é ponto crítico de f para algum $k = 1, \dots, n-1$. Assim, o conjunto de pontos críticos de f^n é finito pois é dado pela união dos conjuntos $\cup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(c_i)$, onde c_i é ponto crítico de f. □

Observe que o Lema anterior, ao contrário dos outros, não exige que $S_f < 0$.

Lema 1.8. *Se $S_f < 0$ e f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos fixos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Se f^n possui infinitos pontos fixos para algum $n > 1$, então f^n possui infinitos pontos críticos de acordo com o Lema 1.6. Essa implicação contradiz o Lema anterior. □

Para demonstrar os próximos resultados, seja p um ponto fixo não repulsor de g, ou seja, $|g'(p)| \leq 1$. Defina K_p o intervalo maximal que contém p e que está contido em $B(p) = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{k\to\infty} g^k(x) = p\}$.

Lema 1.9. *Seja p um ponto fixo de g tal que $|g'(p)| < 1$. Se K_p é limitado, então K_p é aberto, $g(K_p) \subset K_p$.*

Demonstração. Como g' é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|g'(x)| < 1$ para todo $x \in V = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Pelo Teorema do Valor Médio, $V \subset B(p)$. Observe também que para todo $x \in K_p$, existe $n \geq 1$ tal que $g^n(x) \in V$.

Sendo p um ponto fixo, considere $g^{-n}(V)^*$ a componente conexa de $g^{-n}(V)$ que contém p. Observe que $g^{-n}(V)^*$ é aberto, pois $g^{-n}(V)$ é aberto e componente conexa de aberto é aberto. Vamos provar que $K_p = \cup_{n=0}^{\infty} g^{-n}(V)^*$.

Desse modo, K_p é aberto pois é união de abertos, e $g(K_p) \subset K_p$ por construção. □

Teorema 1.10 (Singer)**.** *Se $S_f < 0$ e f possui n pontos críticos, então f possui no máximo $n+2$ órbitas periódicas não repulsoras.*

Demonstração. Sejam p um ponto periódico não repulsor de f de período m e $g = f^m$. Desse modo, p é um ponto fixo não repulsor de g, ou seja, $g(p) = p$ e $|g'(p)| \leq 1$. Seja K o maior intervalo que contém p e que está contido em $B(p) = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{k\to\infty} g^k(x) = p\}$.

Suponha que K é limitado e $|g'(p)| < 1$. Vamos mostrar que K é aberto, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K.

Como $|g'(p)| < 1$, p é um ponto atrator. Desse modo, existe uma vizinhança V de p contida em $B(p)$. Se $x \in K$, existe n tal que $g^n(x) \in V$. Sendo g^n contínua, $(g^n)^{-1}(V)$ é um aberto em K que contém x. Portanto, K é aberto.

Seja a um ponto extremo de K e suponha que $g(a) \in K$. Desse modo, existe uma vizinhança V de $g(a)$ contida em K. Sendo g contínua, $g^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a contida $B(p)$, o que contraria o fato de K ser maximal. Como $g(K) \subset K$ e g é contínua, concluímos que g preserva os pontos extremos de K.

Desse modo, escrevendo $K = (a, b)$ ocorre um dos três casos abaixo. Vamos mostrar que em cada caso, g possui ponto crítico em K. Observe que $S_g < 0$.

a) Se $g(a) = a$ e $g(b) = b$, g possui ponto crítico em K pelo Lema 1.5.

b) Se $g(a) = b$ e $g(b) = a$, considerando $h = g^2$ e utilizando novamente o Lema 1.5, h possui ponto crítico em K. Como $g(K) \subset K$, g possui ponto crítico em K.

c) Se $g(a) = g(b)$, g possui ponto crítico em K pelo Teorema do Valor Médio.

Suponha que K é limitado e $|g'(p)| = 1$. Pelo Lema anterior, g possui finitos pontos fixos e, portanto, são isolados.

Se $g'(p) = 1$ e, para x numa vizinhança de p, $g(x) > x$ quando $x > p$ e $g(x) < x$ quando $x < p$, então $g'(p) = 1$ é mínimo local de g' maior que zero, o que contradiz o Lema 1.4. Se $g'(p) = -1$, basta considerar $h = g^2$ e obter o mesmo resultado. Portanto, p é atrator em pelo menos um dos lados. Desse modo, K é um intervalo não trivial, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K. Assim, é possível concluir de maneira análoga que g possui ponto crítico em K.

Portanto, se K é limitado e $|g'(p)| \leq 1$, então g possui ponto crítico $x_0 \in K$. Pela Regra da Cadeia, $f^i(x_0)$ é ponto crítico de f para algum $i = 0, \ldots, m-1$. Não é possível obter a mesma conclusão se K não é limitado, mas observando que existem no máximo dois intervalos desse tipo, a demonstração está concluída. □

Corolário 1.11. *$F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $\mu > 0$, possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.*

Demonstração. Observe que F_μ possui um único ponto crítico em $\frac{1}{2}$. Pelo Teorema de Singer, F_μ possui no máximo 3 órbitas periódicas não repulsoras. Se p é ponto fixo de F_μ e observando que $\lim_{n\to\infty} |F_\mu^n(x)| = \infty$ quando $|x|$ é suficientemente grande, concluímos que $B(p)$ é limitado. Portanto, F_μ possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora. $\square$

Considere a função $F_4(x) = 4x(1-x)$, $x \in [0,1]$. O ponto crítico de F_4 é eventualmente fixo em 0, que por sua vez é um ponto repulsor. Pelo Corolário acima, todas as órbitas periódicas de F_4 são repulsoras. Utilizando o fato que $S_{F_4} < 0$ é possível mostrar ainda que F_4 é caótica.

Se $q = \frac{1}{4}$ e $p = \frac{3}{4}$, então $F(q) = p$ e $F(p) = p$. Defina $J = [q,p)$ e $J' = \left(q, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, p\right)$. Observe que $F_4(J') = (p,1)$, ou seja, $F_4(x) \notin J$ quando $x \in J'$.

Afirmação. *Se $x \in J'$, existe $n \geq 2$ tal que $F_4^n(x) \in J$.*

Demonstração. Como $F_4^2(J') = (0,p)$, basta mostrar que se $x \in (0,q)$, então $F_4^n(x) \in J$ para algum $n \geq 1$.

Seja $x \in (0,q)$ e suponha que $F_4^n(x) < q$ para todo $n \geq 1$. Observando que F_4 é estritamente crescente em $(0,q]$, a sequência $(F_4^n(x))_n$ é monótona limitada e, portanto, possui um limite $L \leq q$. Sendo F_4 contínua,

$$L = \lim_{n\to\infty} F_4^n(x) = \lim_{n\to\infty} F_4^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} F_4(F_4^n(x)) = F_4(L)$$

o que é um absurdo. Portanto, a demonstração está concluída. $\square$

Com base na afirmação anterior, podemos definir

$$\phi(x) = \min\{n \geq 2 : F_4^n(x) \in J\}$$

para todo $x \in J'$, ou seja, $\phi(x)$ é a menor iterada de F_4 em x que retorna para J. Assim, é possível construir a função R, denominada a função de primeiro retorno de F_4 em J. Precisamente, $R : J' \to J$ é dada por

$$R(x) = F_4^{\phi(x)}(x)$$

Também podemos definir os intervalos

$$I_n^- = \left\{x \in \left(q, \frac{1}{2}\right) : \phi(x) = n\right\}$$
$$I_n^+ = \left\{x \in \left(\frac{1}{2}, p\right) : \phi(x) = n\right\}$$

para todo $n \geq 2$. Esses intervalos possuem propriedades que estão retratadas na Afirmação abaixo.

Afirmação. *Para todo* $n \geq 2$,

i. I_n^- *é da forma* $(l_n, r_n]$, $(F_4^n)'(I_n^-) < 0$, $F_4^n(l_n) = p$, $F_4^n(r_n) = q$ *e* $r_n = l_{n+1}$.

ii. I_n^+ *é da forma* $[l_n, r_n)$, $(F_4^n)'(I_n^+) > 0$, $F_4^n(l_n) = q$, $F_4^n(r_n) = p$ *e* $l_n = r_{n+1}$.

Demonstração. Considere a função T, o Tent Map. Temos que T e F_4 são conjugados topologicamente por $\tau(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, ou seja, $\tau \circ T = F_4 \circ \tau$ em $[0,1]$. Desse modo, bastar demonstrar um resultado análogo para T. Vamos provar a afirmação *ii.* A prova da afirmação *i* é análoga.

Temos que $T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ e $T\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$. Portanto, definimos $J = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ como sendo o intervalo análogo para T. Além disso, é fácil ver por indução que $T^n : \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right] \to [0,1]$ é uma função linear estritamente crescente para todo $n \geq 2$.

Observe que $T^n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}$. Desse modo, existem $l_n \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ e $r_n \in \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)$ tais que $T^n(l_n) = \frac{1}{3}$ e $T^n(r_n) = \frac{2}{3}$. Definindo $I_n^+ = [l_n, r_n)$, temos que $T^n(x) \in J$ se o somente se $x \in I_n^+$.

Fazendo a mesma construção para T^{n+1}, encontramos $r_{n+1} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ tal que $T^{n+1}(r_{n+1}) = \frac{2}{3}$. Como $l_n \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ e $T^{n+1}(l_n) = T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} = T^{n+1}(r_{n+1})$, concluímos que $l_n = r_{n+1}$. □

Afirmação. *Se* $S_f < 0$ *e* f' *não se anula no intervalo limitado* I*, então o mínimo de* f' *em* I *ocorre em algum ponto extremo de* I*.*

Demonstração. Como $S_f = S_{-f}$, podemos considerar $f'(I) > 0$ sem perda de generalidade. Se f' possui um ponto de mínimo x_0 no interior de I, então $f'(x_0) \leq 0$ de acordo com o Lema 1.4, o que é um absurdo. □

Afirmação. $|R'(x)| > 1$ *para todo* $x \in J'$.

Demonstração. Sejam $I_n^+ = [l_n, r_n)$ e $W_n = (\frac{1}{2}, l_n)$, $n \geq 2$. De acordo com a Afirmação anterior, para mostrar que $(F_4^n)'(I_n^+) > 1$ é suficiente mostrar que $(F_4^n)'(l_n) > 1$ e $(F_4^n)'(r_n) > 1$.

Observe que $F_4^n(I_n^+) = J$ e $F_4^n(W_n) \supset (0, q)$ para todo $n \geq 2$. Como os tamanhos de I_n^+ e W_n são menores que $\frac{1}{4}$, o Teorema do Valor Médio afirma que existem $x_k' \in W_k$ e $x_k \in (l_n, r_n)$ tais que $(F_4^n)'(x_k') > 1$ e $(F_4^n)'(x_k) > 1$. Como $l_n \in (x_k', x_k)$ e $(F_4^n)'$ não pode assumir mínimo local positivo em (x_k', x_k), temos que $(F_4^n)'(l_n) > 1$.

Por outro lado, $(F_4^n)'(r_n) = F_4'(F_4^{n-1}(r_n))(F_4^{n-1})'(r_n) = F_4'(q)(F_4^{n-1})'(l_{n-1}) > 1$, pois ambos os termos são maiores que 1.

A demostração de que $(F_4^n)'(I_n^-) < -1$ é feita de maneira análoga. Desse modo, $|R'(x)| > 1$ para todo $x \in J'$. □

Afirmação. *Se* U *é um intervalo em* $[0,1]$*, então existe* $n \geq 1$ *tal que* $F_4^n(U) \supset [0,1]$.

Demonstração. Seja U um intervalo aberto em $[0, 1]$. Como $|F_4'(x)| > 1$ para todo $x \notin J$, existe $U_0 \subset U$ e $n \geq 1$ tal que $V = F_4^n(U_0) \subset J$. Como $|R'(x)| > 1$ para todo $x \in J'$, existe $V_0 \subset V$ e $m \geq 1$ tal que $R^m(V_0)$ contém algum ponto de descontinuidade de R. Portanto, existe $k \geq 1$ tal que $p \in F_4^k(V_0)$. Por fim, como é possível estender qualquer vizinhança de p por iteração de F_4 até cobrir $[0, 1]$, existe $l \geq 1$ tal que $F_4^{k+l}(V_0) \supset [0, 1]$. □

Afirmação. *F_4 é caótica.*

Demonstração. Seja U, V um intervalos abertos em $[0, 1]$. Pela Afirmação anterior, existe $n \geq 1$ tal que $F_4^n(U) \supset [0, 1]$.

O conjunto conjunto de pontos periódicos de F_4 é denso em $[0, 1]$. De fato, $F_4^n(U) \supset U$ e, portanto, existe $x \in U$ tal que $F_4^n(x) = x$.

F_4 é transitiva topologicamente. De fato, $F_4^n(U) \supset V$ e, portanto, existe $x \in U$ tal que $F_4^n(x) \in V$.

F_4 depende sensivelmente das condições iniciais. De fato, $F_4^n(U) \supset [0, 1]$ e, portanto, existem $x, y \in U$ tais que $|F_4^n(x) - F_4^n(y)| = |1 - 0| \geq 1$. □

2 Bifurcação

Teorema 2.1 (Função Implícita)**.** *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$. Suponha que*

i. $F(x_0, y_0) = c$

ii. $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$

Então existem uma vizinhança I de x_0 e uma função $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

1. $f(x_0) = y_0$
2. $F(x, f(x)) = c$ *para todo* $x \in I$
3. $f'(x) = -\frac{\partial_x F(x)}{\partial_y F(x)}$ *para todo* $x \in I$

Teorema 2.2. *Seja f_λ uma família parametrizada de funções. Suponha que $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$ e $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$. Então existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0, respectivamente, e uma função $p : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $p(\lambda_0) = x_0$ e $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ para todo $\lambda \in I$. Além disso, f_λ não possui outros pontos fixos em J.*

Demonstração. Seja $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Temos que $G(x_0, \lambda_0) = 0$ e $\partial_x G(x_0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0$. Utilizando o Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0, respectivamente, e uma função $p : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $p(\lambda_0) = x_0$ e $G(p(\lambda), \lambda) = f_\lambda(p(\lambda)) - p(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in I$. Além disso, para $\lambda \in I$ está associado um único $x \in J$ e, portanto, $x \in J$ e $G(x, \lambda) = 0$ se e somente se $x = p(\lambda)$. $\square$

De acordo com o Teorema anterior, se x_0 é um ponto fixo não hiperbólico de f_{λ_0}, então f_λ possui um único ponto fixo próximo de x_0 para cada λ numa vizinhança de λ_0.

Com a notação do Teorema anterior, considere a função $g_\lambda(x) = f_\lambda(x + p(\lambda)) - p(\lambda)$. Observe que $g_\lambda(0) = f(p(\lambda)) - p(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in I$, ou seja, 0 é ponto fixo de g_λ para todo $\lambda \in I$. Se $h_\lambda(x) = x - p(\lambda)$, então $g_\lambda \circ h_\lambda(x) = f_\lambda(x) - p(\lambda) = h_\lambda \circ f_\lambda(x)$, ou seja, f_λ e g_λ são topologicamente conjugadas.

Teorema 2.3. *Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(0) = 0$
2. $f'_{\lambda_0}(0) = 1$
3. $f''_{\lambda_0}(0) \neq 0$
4. $\partial_\lambda f_\lambda|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

Então existe uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $p(0) = \lambda_0$ e $f_{p(x)}(x) = x$. Além disso, $p'(0) = \lambda_0$ e $p''(0) \neq 0$.

Demonstração. Considere a função $G(x,\lambda) = f_\lambda(x) - x$. Observe que x é um ponto fixo de f_λ se $G(x,\lambda) = 0$.

Temos que $G(0,\lambda_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0,\lambda_0) = \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}(0)|_{\lambda=\lambda_0} \neq 0$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ tal que $p(0) = \lambda_0$, $G(x,p(x)) = 0$ para todo $x \in I$ e

$$p'(x) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x,p(x))}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x,p(x))}$$

e, portanto,

$$p'(0) = -\frac{f'_{\lambda_0}(0) - 1}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}(0)|_{\lambda=\lambda_0}} = 0$$

Além disso, utilizando a Regra da Cadeia,

$$p''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,p(x))\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x,p(x)) - \frac{\partial G}{\partial x}(x,p(x))\frac{\partial^2 G}{\partial \lambda \partial x}(x,p(x))}{\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x,p(x))\right)^2}$$

e, portanto,

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,\lambda_0)\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)}{\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)\right)^2} = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,\lambda_0)}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}(0)|_{\lambda=\lambda_0}} \neq 0$$

□

Teorema 2.4. *Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(0) = 0$ *para todo* λ *numa vizinhança de* λ_0
2. $f'_{\lambda_0}(0) = -1$
3. $\partial_\lambda (f_\lambda^2)'|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

Então existe uma vizinhança I *de* 0 *e uma função* $p : I \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *tal que* $p(0) = \lambda_0$, $p'(0) = 0$, $f_{p(x)}(x) \neq x$ *e* $f^2_{p(x)}(x) = x$ *para todo* $x \in I$. *Além disso,* $p''(0) \neq 0$ *se* $S_{f_{\lambda_0}}(0) \neq 0$.

Demonstração. Seja $G(x,\lambda) = f_\lambda^2(x) - x$. Sendo $G(0,\lambda) = 0$ para todo λ numa vizinhança de λ_0, temos que

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0,\lambda_0) = 0$$

e, portanto, não podemos utilizar o Teorema da Função Implícita diretamente. Seja

$$H(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{G(x,\lambda)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(0,\lambda) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Desse modo, H é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e são válidas as igualdades

(I) $H(0,\lambda_0) = \frac{\partial G}{\partial x}(0,\lambda_0) = (f_{\lambda_0}^2)'(0) - 1 = f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}0))f'_{\lambda_0}(0) - 1 = 0$

(II) $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda}((f_\lambda^2)'(0) - 1)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial (f_\lambda^2)'(0)}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}$

(III) $\frac{\partial H}{\partial x}(0,\lambda_0) = \lim_{x\to 0} \frac{H(x,\lambda_0) - H(0,\lambda_0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{G(x,\lambda_0)}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x,\lambda_0)}{x} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda_0)$

(IV) $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,\lambda_0) = \frac{1}{3}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda_0)$

Pelas igualdades (I) e (II), e pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $p(0) = \lambda_0$ e $H(x,p(x)) = 0$ para todo $x \in I$. Em particular, se $x \neq 0$,

$$0 = \frac{G(x,p(x))}{x} = \frac{f_{p(x)}^2(x) - x}{x}$$

ou seja, $f_{p(x)}^2(x) = x$ para todo $x \in I$. Além disso, pelo Teorema 2.2, f_λ possui apenas 1 ponto fixo numa vizinhança de 0 e, portanto, podemos considerar que $f_{p(x)}(x) \neq x$ para todo $x \in I$, $x \neq 0$.

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda_0) &= (f_{\lambda_0})''(x)|_{x=0} \\
&= [f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\
&= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)]_{x=0} \\
&= f''_{\lambda_0}(0) - f''_{\lambda_0}(0) = 0
\end{aligned}$$

temos que

$$p'(0) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = -\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = 0$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)(0,\lambda_0) \\
&= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)]'_{x=0} \\
&= [f'''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^3 + 2f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)f'_{\lambda_0}(x) + f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)f''_{\lambda_0}(x) \\
&\quad + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'''_{\lambda_0}(x)]_{x=0} \\
&= f'''_{\lambda_0}(0)(f'_{\lambda_0}(0))^3 + 2(f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + (f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + f'_{\lambda_0}(0)f'''_{\lambda_0}(0) \\
&= -2f'''_{\lambda_0}(0) + 3(f''_{\lambda_0}(0))^2 \\
&= -2\frac{f'''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)} + 3\left(\frac{f''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)}\right)^2 = -2S_{f_{\lambda_0}}(0)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,\lambda_0)\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)}{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)\right)^2} = -\frac{1}{3}\frac{\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = \frac{2}{3}\frac{S_{f_{\lambda_0}}(0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} \neq 0$$

quando $S_{f_{\lambda_0}}(0) \neq 0$. $\square$