1 Definições Elementares

Definição 1.1. Sejam $f : X \to X$ uma função, $p \in X$ e $n \geq 1$. Dizemos que p é um *ponto periódico com período* n, se $f^n(p) = p$. Se $f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então n é chamado de *período principal*. Em particular, se $n = 1$, dizemos que p é um *ponto fixo*.

Definição 1.2. Sejam $f : X \to X$ uma função, $p \in X$ e $n \geq 1$. Dizemos que p é um *ponto eventualmente periódico com período* n, se existe $m > 1$ tal que $f^k(p) = f^{k+n}(p)$ para todo $k \geq m$. Em particular, se $n = 1$, dizemos que p é um *ponto eventualmente fixo*.

Definição 1.3. Sejam $f : X \to X$ uma função e $x \in X$. O conjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$$

é a *órbita de* x.

Definição 1.4. Sejam $f : X \to X$ uma função, p um ponto periódico período n e $x \in X$. Dizemos que x *tende assintoticamente para* p se $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$. O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para p, denotado por $W^s(p)$, é chamado chamado de *conjunto estável de* p. Dizemos que x *tende assintoticamente para infinito* se $\lim_{k\to\infty} |f^k(x)| = \infty$. O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para infinito, denotado por $W^s(\infty)$, é chamado de *conjunto estável do infinito*.

Proposição 1.5. *Sejam $f : X \to X$ uma função e p_1, p_2 pontos periódicos distintos. Então $W^s(p_1) \cap W^s(p_2) = \emptyset$.*

Demonstração. Sejam n_1, n_2 os períodos de p_1, p_2, respectivamente. Suponha que exista $x \in W^s(p_1) \cap W^s(p_2)$. Sabemos que $|f^{kn_1}(x) - p_1| \to 0$ e $|f^{kn_2}(x) - p_2| \to 0$, quando $k \to \infty$. Desse modo, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que $|f^{kn_1}(x) - p_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|f^{kn_2}(x) - p_2| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $k > N$. Portanto, $|p_1 - p_2| = |p_1 - f^{kn_1n_2}(x) + f^{kn_1n_2}(x) - p_2| \leq |f^{kn_2n_1}(x) - p_1| + |f^{kn_1n_2}(x) - p_2| < \varepsilon$. Temos então que $p = q$, pois ε é arbitrário. Absurdo. $\square$

2 Implicações da Diferenciabilidade

Proposição 2.1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(I) \subset I$ ou $f(I) \supset I$, então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Seja $I = [a, b]$. Suponha que $f(I) \subset I$. Considere a função contínua $g(x) = f(x) - x$ definida em I. Como $f(a), f(b) \in I$, temos que $g(a) = f(a) - a \geq 0$ e $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $p \in I$ tal que $g(p) = f(p) - p = 0$. Desse modo, p é ponto fixo de f.

Suponha que $f(I) \supset I$. Por definição, existem $c, d \in I$ tais que $f(c) = a$ e$f(d) = b$. Considere a função contínua $g(x) = f(x) - x$ definida em I. Temos que $g(c) = a - c \leq 0$ e $g(d) = b - d \geq 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $p \in I$ tal que $g(p) = f(p) - p = 0$. Desse modo, p é ponto fixo de f. □

Teorema 2.2. *Seja $f : I \to I$ uma função diferenciável. Se $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in I$, então f admite um único ponto fixo e $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ para todo $x, y \in I$ distintos.*

Demonstração. Sejam $x, y \in I$, $x < y$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [x, y]$ tal que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Portanto, $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| < |x - y|$.

Pela Proposição 2.1, f admite um ponto fixo p. Suponha que exista um ponto fixo q diferente de p. Então, pela primeira parte da demonstração, $|p-q| = |f(p)-f(q)| < |p-q|$. Absurdo. □

Definição 2.3. Sejam $f : I \to I$ uma função diferenciável e p um ponto periódico com período principal n. Dizemos que p é um *ponto hiperbólico* se $|(f^n)'(p)| \neq 1$. Se $|(f^n)'(p)| > 1$, dizemos que p é um *ponto atrator* e se $|(f^n)'(p)| < 1$, dizemos que p é um *ponto repulsor*. Dizemos que p é um *ponto não hiperbólico* se $|(f^n)'(p)| = 1$.

Teorema 2.4. *Sejam $f : I \to I$ uma função C^1 e p um ponto periódico com período principal n. Se p é um ponto hiperbólico atrator, existe uma vizinhança de p contida em $W^s(p)$. Se p é um ponto hiperbólico repulsor, existe uma vizinhança U de p tal que, se $x \in U$ e $x \neq p$, $f^{kn}(x) \notin U$ para algum $k \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que p é um ponto hiperbólico atrator. Como f' é contínua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Pelo Teorema do Valor Médio, se $x \in U$ então $|f^n(x) - p| = |f^n(x) - f^n(p)| \leq \lambda|x - p|$. Por indução, $|f^{kn}(x) - p| \leq \lambda^k|x - p|$. Desse modo, $f^{kn}(x) \to p$ quando $k \to \infty$.

Suponha que p é ponto hiperbólico repulsor. De maneira análoga, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(f^n)'(x)| \geq \lambda > 1$ para todo $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Fixado $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, $x \neq p$, suponha que $f^{kn}(x) \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ para todo $k \geq 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, $|f^{kn}(x) - p| \geq \lambda^k|x - p|$ para todo $k \geq 1$. Absurdo, pois $\lambda^k|x - p| \to \infty$ quando $k \to \infty$. □

Observação. A segunda parte do teorema afirma que existe uma vizinhança de p tal que todo ponto diferente de p nessa vizinhança é movida para fora dela após um número de iterações da f. Observe o ponto pode voltar para vizinhança após mais um número finito de iterações da f, pois sabermos que o valor absoluto da derivada é maior que 1 apenas nessa vizinhança.

3 Função Logística I: Estudo Inicial

Durante essa seção e as próximas, estudaremos a dinâmica da função logística, que é dada por $F(x) = \mu x(1 - x)$ para $\mu > 0$.

Proposição 3.1. *Se $\mu > 1$, então*

1. $F(1) = F(0) = 0$ *e* $F(\frac{1}{\mu}) = F(p_\mu) = p_\mu$*, onde* $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.
2. $0 < p_\mu < 1$.
3. *o vértice da parábola de F é o ponto* $(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4})$.

Demonstração. Aplicação direta das definições. □

Proposição 3.2. *Se $\mu > 1$, então* $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$.

Demonstração. Se $x < 0$, a sequência $(x, F(x), F^2(x), \dots)$ é estritamente decrescente pois $F(x) < x$. Se $(F^n(x))_n \to x_0$ quando $n \to \infty$, a continuidade de F implica que $(F^{n+1}(x))_n \to F(x_0) < x_0$. Absurdo. Portanto, $(F^n(x))_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$. Como $F(x) < 0$ para todo $x > 1$, concluímos que $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$. □

Proposição 3.3. *Se $1 < \mu < 3$, então*

1. *0 é um ponto repulsor e p_μ é um ponto atrator.*
2. $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = p_\mu$ *para todo* $x \in (0, 1)$.

Demonstração. A primeira parte é verdadeira pois $|F'(0)| = \mu > 1$ e $|F'(p_\mu)| = |2-\mu| < 1$, quando $1 < \mu < 3$.

Falta provar o item 2. □

Desse modo, conhecemos completamente a dinâmica de F quando $1 < \mu < 3$:

$$W^s(0) = \{0, 1\},\ W^s(p_\mu) = (0, 1) \text{ e } W^s(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

4 Função Logística II: Conjuntos de Cantor

Se $\mu > 4$, então $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} > 1$, ou seja, existem pontos em $[0,1]$ que não permanecem em $[0,1]$ após uma iteração de F. Em vista da Proposição 3.2, a dinâmica de F em tais pontos é determinada, pois pertencem ao conjunto $W^s(\infty)$. De modo mais geral, se um ponto de $[0,1]$ não permanece $[0,1]$ após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto $W^s(\infty)$.

Desse modo, considere o conjunto $\Lambda_n = \{x \in [0,1] : F^n(x) \in [0,1]\}$, que é formado pelos pontos que permanecem em $[0,1]$ após n iterações de F, e considere o conjunto $\Lambda = \cap \Lambda_n = \{x \in [0,1] : F^n(x) \in [0,1] \text{ para todo } n \geq 1\}$, que é formado pelos pontos que permanecem para sempre em $[0,1]$ por iterações de F. Observe que $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$, para todo $n \geq 1$, pois se $F^{n+1}(x) = F(F^n(x)) \in [0,1]$, então $F^n(x) \in [0,1]$.

Proposição 4.1. *Se $\mu > 4$, então*

1. $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, *onde* $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ *e* $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2-4\mu}}{2\mu}$.

2. Λ_n *é a união de* 2^n *intervalos fechados disjuntos.*

3. $F^n : I \to [0,1]$ *é bijetora, onde* I *é qualquer um dos* 2^n *intervalos fechados disjuntos que formam* Λ_n.

Demonstração. Analisando F' observamos que F é estritamente crescente no intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e estritamente decrescente no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Como $F(0) = F(1) = 0$ e $F\left(\frac{1}{2}\right) > 1$, o Teorema do Valor Intermediário garante que existem $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tais que $F(x_1) = F(x_2) = 1$. Os valores de x_1 e x_2 são encontrados resolvendo a equação de segundo grau $\mu x(1-x) = 1$. Logo, $F([0,x_1]) = F([x_2,1]) = [0,1]$ e $F(x) > 1$ para todo $x \in (x_1, x_2)$. Portanto, $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ e o item 1 está demonstrado.

A demonstração dos itens 2 e 3 será feita por indução. De acordo com a primeira parte, Λ_1 é a união de $2^1 = 2$ intervalos fechados disjuntos e F restrita é cada um desses intervalos é uma bijeção com o intervalo $[0,1]$.

Suponha que Λ_{k-1} é a união de 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos de modo que $F^{k-1} : [a,b] \to [0,1]$ é bijetora para todo intervalo $[a,b]$ que forma Λ_{k-1}. Sendo F^{k-1} bijetora, $(F^{k-1})'(x) > 0$ ou $(F^{k-1})'(x) < 0$ para todo $x \in [a,b]$. Como as demonstrações para os dois casos são análogas, podemos supor que $(F^{k-1})'(x) > 0$.

Como F^{k-1} é estritamente crescente, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existem únicos $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in (a,b)$ tais que

(a) $a < \overline{x_1} < \overline{x_2} < b$,

(b) $F^{k-1}([a, \overline{x_1}]) = [0, x_1]$,

(c) $F^{k-1}((\overline{x_1}, \overline{x_2})) = (x_1, x_2)$ e

(d) $F^{k-1}([\overline{x_2},1]) = [x_2,1]$.

As condições acima garantem que os intervalos $[a,\overline{x_1}]$, $[\overline{x_2},b]$ são disjuntos e que $F^k(x) = F(F^{k-1}(x)) > 1$ para todo $x \in (\overline{x_1},\overline{x_2})$. Também, temos que $F^k([a,\overline{x_1}]) = F([0,x_1]) = [0,1]$ e, analogamente, $F^k([\overline{x_2},1]) = [0,1]$. Além disso,

$$(F^k)'([a,\overline{x_1}]) = F'(F^{k-1}([a,\overline{x_1}]))(F^{k-1})'([a,\overline{x_1}]) = F'([0,x_1])(F^{k-1})'([a,\overline{x_1}]) > 0$$

e, analogamente,

$$(F^k)'([\overline{x_2},1]) = F'([x_2,1])(F^{k-1})'([\overline{x_2},1]) < 0.$$

Logo, F^k é uma bijeção entre $[a,\overline{x_1}]$ e $[0,1]$ e entre $[\overline{x_2},1]$ e $[0,1]$.

Portanto, a partir de cada intervalo fechado de Λ_{k-1}, construímos dois novos intervalos fechados disjuntos tais que F^k restrita em cada um desses intervalos é um bijeção com $[0,1]$ e, dessa maneira, esses intervalos estão contidos em Λ_k. Desse modo, se Λ_{k-1} é formado por 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos, então Λ_k é formado por $2 \times 2^{k-1} = 2^k$ intervalos fechados disjuntos. Assim, o resultado está provado. □

Definição 4.2 (Conjunto de Cantor)**.** Um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}$ não vazio é um *conjunto de Cantor* se

1. Γ é fechado e limitado,
2. Γ não possui intervalos e
3. Todo ponto de Γ é um ponto de acumulação de Γ.

Lema 4.3. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então*

1. *existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.*
2. *o tamanho de cada intervalo fechado em Λ_n é menor que $\frac{1}{\lambda^n}$.*
3. *dados $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$, existe um intervalo fechado $I \subset \Lambda_n$, para algum $n \geq 1$, que contém x e cujo tamanho é menor que ε tal que $F^n : I \to [0,1]$ é bijetora.*

Demonstração. 1. Inicialmente, observamos que $\mu^2 - 4\mu > 1$ quando $\mu > 2+\sqrt{5}$. Desse modo, $F'(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$ e $F'(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$, onde x_1 e x_2 são como na Proposição 4.1. Observamos também que F' é estritamente decrescente, pois $F''(x) = -2\mu < 0$. Portanto, $F'(x) \geq F'(x_1) > 1$ para todo $x \in [0,x_1]$ e $F'(x) \leq F'(x_2) < -1$ para todo $x \in [x_2,1]$. De acordo com a Proposição 4.1, $\Lambda_1 = [0,x_1] \cup [x_2,1]$ e, desse modo, $|F'(x)| > 1$ para todo $x \in \Lambda_1$. Sendo F' contínua e Λ_1 compacto, existe $\lambda > 1$ tal que $|F'(x)| > \lambda$ para todo $x \in \Lambda_1$.

2. De acordo com a Proposição 4.1, Λ_n é formado pela união de 2^n intervalos disjuntos. Seja $[a, b]$ um desses intervalos. Se $x \in [a, b]$, em particular $F^k(x) \in \Lambda_1$ para todo $0 \leq k < n$. Desse modo, de acordo com o item anterior, temos que $(F^n)'(x) = F'(F^{n-1}(x)) \times F'(F^{n-2}(x)) \times \cdots \times F'(x) > \lambda^n$.

   Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in [a, b]$ tal que

   $$|F^n(b) - F^n(a)| = |(F^n)'(c)||b - a| > \lambda^n|b - a|$$

   Como $F^n : [a, b] \to [0, 1]$ é contínua e bijetora, temos que $|F^n(b) - F^n(a)| = 1$. Desse modo, $|b - a| < \frac{1}{\lambda^n}$ e a afirmação está provada.

3. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^n} < \varepsilon$, onde $\lambda > 1$ é como no primeiro item. Em particular, $x \in \Lambda_n$. Seja I um dos intervalos que formam Λ_n e que contém x. Pelo item anterior, o tamanho de I é menor que ε. Além disso, pela Proposição 4.1, $F^n : I \to [0, 1]$ é bijetora e, portanto, a afirmação está provada.

□

Teorema 4.4. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.*

Demonstração. Λ é não vazio pois $0 \in \Lambda$, é limitado pois $\Lambda_1 \in [0, 1]$ e é fechado pois é intersecção de conjuntos fechados.

Agora, suponha que Λ contém algum intervalo. Então, existem $x, y \in I$, $x < y$, tais que $[x, y] \subset \Lambda$. Seja k tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |x - y|$. Em particular, $[x, y] \subset \Lambda_k$. Mas, de acordo com o Lema 4.3, os intervalos de Λ_k possuem tamanho menor que $\frac{1}{\lambda^k}$. Absurdo e, portanto, Λ não possui intervalos.

Por fim, observe que, se x é um ponto extremo de algum intervalo de Λ_n, então $x \in \Lambda$ pois $F^{n+1}(x) = 0$. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Em particular, $x \in \Lambda_k$ e, portanto, x é elemento de algum intervalo cujo tamanho é menor que ε, de acordo com o Lema 4.3. Portanto, existe $y \in \Lambda$ ponto extremo do intervalo que contém x tal que $|x - y| < \varepsilon$. Como ε é arbitrário, concluímos que x é um ponto de acumulação de Λ. □

Observação. O Teorema 4.4 é válido para $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais difícil.

5 Função Logística III: Caos

Proposição 5.1. *Se $\mu > 2+\sqrt{5}$, então o conjunto de pontos periódicos de $F : \Lambda \to \Lambda$ é denso em Λ.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 4.3, o intervalo fechado $I \subset \Lambda_k$ que contém x possui tamanho menor que ε. Pela Proposição 4.1, $F^k : I \to [0,1]$ é bijetora. Como $F^k(I) \supset I$, a Proposição 2.1 afirma que existe $y \in I$ tal que $F^k(y) = y$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x-y| < \varepsilon$, o resultado está provado. □

Definição 5.2. Seja $f : D \to D$ uma função. Dizemos que f é *topologicamente transitiva* se dados $x, y \in D$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in D$ e $k \geq 1$ tais que $|z-x| < \varepsilon$ e $|f^k(z) - y| < \varepsilon$.

Proposição 5.3. *Se $\mu > 2+\sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Existe $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. De acordo com o Lema 4.3, o tamanho de cada intervalo fechado em Λ_k é menor que $\frac{1}{\lambda^k}$ e, portanto, menor que ε. Como $x \in \Lambda_k$, existe um intervalo $[a,b] \subset \Lambda_k$ que contém x. Pela Proposição 4.1, $F^k : [a,b] \to [0,1]$ é bijetora e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $z \in [a,b]$ tal que $F^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$, concluímos que F é topologicamente transitiva. □

Definição 5.4. Seja $f : D \to D$ uma função. Dizemos que f *depende sensivelmente das condições iniciais* se para algum $\delta > 0$, dados $x \in D$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in D$ e $k \geq 1$ tais que $|x-y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Proposição 5.5. *Se $\mu > 2+\sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.*

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Como na demonstração da Proposição anterior, seja I o intervalo fechado contido em Λ_k que contém x e cujo tamanho é menor que ε. Como $F^k : I \to [0,1]$ é um bijeção, então $F^k(a) = 0$ e $F^k(b) = 1$, onde a e b são pontos extremos de I. Como $F(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, segue que $F^k(x) \in \big[0, \frac{1}{2}\big) \cup \big(\frac{1}{2}, 1\big]$. Se $F^k(x) \in \big[0, \frac{1}{2}\big)$, então $|F^k(x) - F^k(b)| = |F^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $F^k(x) \in \big(\frac{1}{2}, 1\big]$, então $|F^k(x) - F^k(a)| = |F^k(x)| > \frac{1}{2}$. Observando que $|x-a| < \varepsilon$ e $|x-b| < \varepsilon$, temos o resultado para $\delta = \frac{1}{2}$. □

Definição 5.6. Seja $f : D \to D$ uma função. Dizemos que f *é caótica* se

1. O conjunto de pontos periódicos de f é denso em D.

2. f é topologicamente transitiva.

3. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema 5.7. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $F : \Lambda \to \Lambda$ é caótica.*

Demonstração. O resultado segue das Proposições 5.1, 5.3 e 5.5. $\square$

Observação. O Teorema 5.7 é válido para $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$, porém a demonstração é mais difícil.

Teorema 5.8. *Se D é um subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ e $f : D \to D$ é uma função topologicamente transitiva cujo conjunto de pontos periódicos é denso, então f é caótica.*

Demonstração. Por demonstrar. $\square$

6 Função Logística IV: Conjugação Topológica

Definição 6.1. Sejam $f : A \to A$, $g : B \to B$ e $\tau : A \to B$ funções. Dizemos que *f e g são topologicamente conjugadas por τ*, se τ é um homeomorfismo tal que $\tau \circ f = g \circ \tau$.

Proposição 6.2. *Sejam $f : A \to A$, $g : B \to B$ e $\tau : A \to B$ funções. Se f e g são topologicamente conjugadas por τ, então*

1. *g e f são topologicamente conjugadas por τ^{-1}.*

2. *$\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$ para todo $n \geq 1$.*

3. *p é ponto periódico de f se e somente se $\tau(p)$ é ponto periódico de g. Além disso, os períodos principais de p e $\tau(p)$ são iguais.*

4. *$W^s(\tau(p)) = \tau(W^s(p))$, se p é um ponto periódico de f.*

5. *o conjunto de pontos periódicos de f é denso se e somente se o conjunto de pontos periódicos de g é denso.*

6. *f é topologicamente transitiva se e somente se g é topologicamente transitiva.*

Demonstração.

1. Como τ é um homeomorfismo, a função inversa τ^{-1} existe e também é um homeomorfismo. Além disso, $\tau \circ f = g \circ \tau$ implica que $f \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ g$. Portanto, τ^{-1} é conjugação topológica de g e f.

2. Por definição, a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $\tau \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ \tau$. Desse modo, $\tau \circ f^n = \tau \circ f^{n-1} \circ f = g^{n-1} \circ \tau \circ f = g^{n-1} \circ g \circ \tau = g^n \circ \tau$. Portanto, a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

3. Suponha que p é um ponto periódico de f com período principal n. Desse modo, $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) = \tau(p)$. Se $k = 1, \ldots, n-1$, então $g^k(\tau(p)) = \tau(f^k(p)) \neq \tau(p)$, pois $f^k(p) \neq p$ e τ é injetora. Portanto, $\tau(p)$ é um ponto periódico de g com período principal n. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

4. Suponha que p é um ponto periódico com período n. Se $x \in W^s(\tau(p))$, então $\lim_{k\to\infty} g^{kn}(x) = \tau(p)$. Como τ^{-1} é contínua, temos $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(\tau^{-1}(x)) = \lim_{k\to\infty} \tau^{-1}(g^{kn}(x)) = p$. Então, $x \in \tau(W^s(p))$ pois $\tau^{-1}(x) \in W^s(p)$.

   Por outro lado, se $\tau(x) \in \tau(W^s(p))$, então $\lim_{k\to\infty} f^{kn}(x) = p$. Como τ é contínua, temos $\lim_{k\to\infty} g^{kn}(\tau(x)) = \lim_{k\to\infty} \tau(f^{kn}(x)) = \tau(p)$ e, portanto, $\tau(x) \in W^s(\tau(p))$.

5. Se o conjunto $Per(f)$ dos pontos periódicos de f é denso em A, então $\tau(Per(f))$ é denso em B pois τ é um homeomorfismo. Como $\tau(Per(f)) = Per(g)$, temos que $Per(g)$ é denso em B. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

6. Inicialmente, sendo τ é contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que, se $z \in A$, $|x - z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$, então $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))|$, onde $n \geq 1$ é fixado.

   Se $x', y' \in B$, existem $x, y \in A$ tais que $\tau(x) = x'$ e $\tau(y) = y'$. Como f é topologicamente transitiva, existe $z \in A$ tal que $|x - z| < \delta$ e $|y - f^n(z)| < \delta$ para algum $n \geq 1$. Portanto, $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$. Se $\tau(z) = z'$, então $|x' - z'| < \varepsilon$ e $|y' - g^n(z')| < \varepsilon$ e, portanto, g é topologicamente transitiva. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

□

Lema 6.3. *A função* $T : [0,1] \to [0,1]$*, dada por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 2 - 2x, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

é caótica.

Demonstração. Inicialmente, provaremos por indução que $T^n : \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^n$. Pela definição de T, a afirmação é verdadeira quando $n = 1$. Suponha que $T^{n-1} : \left[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^{n-1}$. Fixado k, podemos supor que $T^{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 0$ e $T^{n-1}\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = 1$. O caso em que $T^{n-1}\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 1$ e $T^{n-1}\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = 0$ é tratado de maneira análoga. Temos que $T^{n-1}(\overline{x}) = \frac{1}{2}$, onde $\overline{x} = \frac{2k+1}{2^n}$ é o ponto médio do intervalo $\left[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right]$. Portanto, $T^n(\overline{x}) = T(T^{n-1}(\overline{x})) = T\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $T^n\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = T(0) = 0$ e $T^n\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right) = T(1) = 0$. Desse modo, $T^n : \left[\frac{k}{2^{n-1}}, \overline{x}\right] \to [0,1]$ e $T^n : \left[\overline{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] \to [0,1]$ são funções lineares(pois são composições de funções lineares) e bijetoras para todo $0 \leq k < 2^{n-1}$. Observando que $\left[\frac{k}{2^{n-1}}, \overline{x}\right] = \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}\right]$ e $\left[\overline{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}\right] = \left[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}\right]$, concluímos que que $T^n : \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \to [0,1]$ é uma função linear bijetora para todo $0 \leq k < 2^n$ e, portanto, a afirmação está provada.

Para provar que T é caótica, seja $\varepsilon > 0$. Pelo afirmação do parágrafo anterior, existem $n \geq 1$ e $I = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$ tais que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $x \in I$ e $T^n : I \to [0,1]$ é bijetora.

Seja $x \in [0,1]$. Como $T(I) \supset I$, a Proposição 2.1 afirma que existe $p \in I$ tal que $T^n(p) = p$. Observando que $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que o conjunto de pontos periódicos de T é denso em $[0,1]$.

Sejam $x, y \in [0,1]$. Como $T^n : I \to [0,1]$ é sobrejetora, existe $z \in I$ tal que $T^n(z) = y$. Observando que $|z - x| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $|T^n(z) - y| = 0 < \varepsilon$, concluímos que T é topologicamente transitiva.

Seja $x \in [0,1]$. Como $T^n : I \to [0,1]$ é sobrejetora, existem $a, b \in I$ tais que $T^n(a) = 0$ e $T^n(b) = 1$. Se $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, então $|T^n(x) - T^(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$ e se $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, então $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $|x - b| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que T depende sensivelmente das condições iniciais. □

Teorema 6.4. *Se $\mu = 4$, então F é caótica.*

Demonstração. Seja $\tau(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ definida no intervalo $[0,1]$. τ é homeomorfismo pois τ' existe em $[0,1]$ e $\tau' > 0$ em $(0,1)$.

Se $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, então

$$\tau \circ T(x) = \tau(2x) = \operatorname{sen}^2(\pi x)$$

e se $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, então

$$\tau \circ T(x) = \tau(2-2x) = \operatorname{sen}^2(\pi - \pi x) = (\operatorname{sen}(\pi)\cos(\pi x) - \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi))^2 = \operatorname{sen}^2(\pi x)$$

Por outro lado,

$$F \circ \tau(x) = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)(1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)) = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \operatorname{sen}^2(\pi x)$$

Desse modo, $\tau \circ T = F \circ \tau$. Portanto, de acordo com o Teorema 5.7, a Proposição 6.2 e o Lema 6.3, F é caótica. $\square$

7 Função Logística V: Dinâmica Simbólica

Definição 7.1. $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) : s_k = 0 \text{ ou } s_k = 1 \text{ para todo } k \geq 0\}$ é o *espaço das sequências de* 0 *e* 1.

Proposição 7.2. *A função* $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}$$

é uma distância em Σ_2*.*

Demonstração. Inicialmente, observamos que a função d é bem definida pois

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

Além disso, é fácil verificar que as propriedades de uma distância são válidas em d, isto é,

(a) $d(s,t) \geq 0$

(b) $d(s,t) = 0$ se e somente se $s = t$

(c) $d(s,t) = d(t,s)$

(d) $d(s,t) \leq d(s,r) + d(r,t)$

para todo $r, s, t \in \Sigma_2$. Portando, d é uma distância e a afirmação está provada. □

Proposição 7.3. *Sejam* $s = (s_0 s_1 s_2 \dots), t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$*. Se* $s_k = t_k$ *para todo* $0 \leq k \leq n$*, então* $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$*. Por outro lado, se* $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$*, então* $s_k = t_k$ *para todo* $0 \leq k \leq n$*.*

Demonstração. Suponha que $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$. Desse modo,

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

Por outro lado, se $s_i \neq t_i$ para algum $0 \leq i \leq n$, então

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n}$$

Portanto, se $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, concluímos que $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$. □

Definição 7.4. A função $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, dada por $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$, é chamada de *função shift*.

Proposição 7.5. *σ é contínua.*

Demonstração. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Se $t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$ e $d(s,t) < \frac{1}{2^{n+1}}$, então $s_k = t_k$ para todo $0 \leq k \leq n+1$, de acordo com a Proposição 7.3. Como $\sigma(s) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ e $\sigma(t) = (t_1 t_2 t_3 \dots)$, temos que as primeiras $n+1$ entradas de $\sigma(s)$ e $\sigma(t)$ são iguais. Novamente, utilizando a Proposição 7.3, temos que $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Como s é um ponto arbitrário em Σ_2, concluímos que σ é contínua. □

Proposição 7.6. *Se σ é a função shift, então*

1. *existem 2^n pontos periódicos com período n.*

2. *existe um ponto cuja órbita é densa.*

3. *o conjunto dos pontos periódicos é denso.*

4. *o conjunto dos pontos não periódicos que são eventualmente periódicos é denso.*

5. *o conjunto dos pontos que não são periódicos e nem eventualmente periódicos é denso.*

Demonstração.

1. Se $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ é um ponto periódico com período n, então

$$\sigma^k(\sigma^n(s)) = (s_{n+k} s_{n+k+1} s_{n+k+2} \dots) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots) = \sigma^k(s)$$

para todo $k \geq 0$. Desse modo, s é formado pela repetição das entradas $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem 2^n sequências distintas para $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ e, portanto, a afirmação está provada.

2. Considere o ponto $s^* = (0\,1\,00\,01\,10\,11\,000\,001 \dots)$ formado por todos os blocos de tamanho 1, depois por todos os blocos de tamanho 2, e assim sucessivamente.

   Sejam $s \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. É fácil ver que existe $k \geq 0$ de modo que $\sigma^k(s^*)$ e s são iguais nas primeiras $n+1$ entradas. De acordo com a Proposição 7.3, $d(s, \sigma^k(s^*)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, a afirmação está provada.

3. Sejam $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Considere o ponto periódico t com período $n+1$ formado pela repetição da sequência $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$. De acordo com a Proposição 7.3, $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, a afirmação está provada.

□

8 Teorema de Sharkovsky

Ao longo dessa seção, f denotará uma função contínua de um intervalo em $\mathbb{R}$, onde o intervalo não precisa ser fechado ou limitado.

Definição 8.1. Se $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ são intervalos fechados, $n > 1$,

1. dizemos que I_0 *cobre* I_1, e denotamos por $I_0 \longrightarrow I_1$, se $f(I_0) \supset I_1$.
2. dizemos que $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ *é um caminho entre* I_0 *e* I_{n-1}, e denotamos por $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1}$, se $f(I_i) \supset I_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-2$.
3. dizemos que $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ *é um ciclo entre* I_0 *e* I_{n-1}, e denotamos por $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$, se $f(I_i) \supset I_{i+1}$, $i = 0, \ldots, n-2$, e $f(I_{n-1}) \supset I_0$.

Lema 8.2. *Se $I_0 \longrightarrow I_1$, então $f(I_0') = I_1$ para algum intervalo fechado $I_0' \subset I_1$.*

Demonstração. Se $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [c, d]$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existem $p, q \in I_0$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$. Suponha que $p \leq q$ e defina $I_0' = [a', b']$, onde

$$b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\} \text{ e } a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$$

Sendo f contínua temos que $f(a') = c$ e $f(b') = d$ e, desse modo, $f(I_0') \supset I_1$. Se $f(x) < c$ para algum $x \in I_0'$, existe $y \in [x, b']$ tal que $f(y) = c$, o que é um absurdo pois nesse caso $y > a'$. Absurdo análogo ocorre se $f(x) > d$ para algum $x \in I_0'$. Portanto, $f(I_0') = I_1$. □

Lema 8.3. *Se $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow J_0$, então existe $p \in J_0$ tal que $f^k(p) \in J_k$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$, e $f^n(p) = p$.*

Demonstração. De acordo com as hipóteses e com a Proposição anterior, temos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned}
J_0 \longrightarrow J_1 &\Rightarrow \text{ existe } J_0' \subset J_0 \text{ tal que } f(J_0') = J_1 \\
J_1 \longrightarrow J_2 &\Rightarrow \text{ existe } J_1' \subset J_0' \text{ tal que } f^2(J_1') = J_2 \\
&\vdots \\
J_{n-2} \longrightarrow J_{n-1} &\Rightarrow \text{ existe } J_{n-2}' \subset J_{n-3}' \text{ tal que } f^{n-1}(J_{n-2}') = J_{n-1} \\
J_{n-1} \longrightarrow J_0 &\Rightarrow \text{ existe } J_{n-1}' \subset J_{n-2}' \text{ tal que } f^n(J_{n-1}') = J_0
\end{aligned}$$

Construímos então uma sequência de n intervalos fechados $J_0 \supset J_0' \supset J_1' \supset \cdots \supset J_{n-1}'$ tal que $f^k(J_{k-1}') = J_k$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$, e $f^n(J_{n-1}') = J_0$. Como $J_0 \supset J_{n-1}'$, existe $p \in J_{n-1}'$ tal que $f^n(p) = p$. Em particular, $p \in J_0$ e $f^k(p) \in J_k$, para todo $k = 1, \ldots, n-1$. □

Teorema 8.4. *Se f admite ponto periódico de período principal 3, então f admite ponto periódico de período principal n, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Sejam p um ponto periódico de período principal 3 e $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de p e suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$. O outro caso possível, em que $f(p_1) = p_3$ e $f(p_3) = p_2$, é demonstrado de maneira análoga. Definindo $I_1 = [p_1, p_2]$ e $I_2 = [p_2, p_3]$, temos que $I_1 \longrightarrow I_2$, $I_2 \longrightarrow I_1$ e $I_2 \longrightarrow I_2$.

(a) $n = 1$: Como $I_2 \longrightarrow I_2$, existe $p \in I_2$ tal que $f(p) = p$.

(b) $n = 2$: Como $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1$, existe $p \in I_1$ tal que $f(p) \in I_2$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, o que é um absurdo pois p_2 possui período principal 3. Desse modo, o período principal de p é 2.

(c) $n > 3$: Se $I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2$ é um ciclo de tamanho n, existe $p \in I_2$ tal que $f^k(p) \in I_2$, para todo $k = 1, \ldots, n-2$, $f^{n-1}(p) \in I_1$ e $f^n(p) = p$. Se $f^{n-1}(p) = p$, então $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$, o que é um absurdo pois implica que $f(p) = p_3 \in I_1$. Se $f^k(p) = p$ para algum $k = 1, \ldots, n-2$ implica que $f^k(p) \in I_2$, para todo $k \geq 1$. Em particular, $f^{n-1}(p) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ e, portanto, $p = f^n(p) = p_3$, o que é um absurdo pois implica que $f(p) = p_1 \in I_2$.

Desse modo, o resultado está provado. □

Para demonstrar os seguintes Lemas, supomos que f admite um ponto periódico p de período principal $n > 1$. Seja $\mathcal{O}(p) = \{p_1 < p_2 < \cdots < p_n\}$ a órbita de p. Vamos definir $n-1$ intervalos fechados da forma $[p_i, p_{i+1}]$, que serão denotados por $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}$, com propriedades que permitam demonstrar o Teorema de Shakovsky.

Lema 8.5. *Existe $k = 1, \ldots, n-1$ tal que $[p_k, p_{k+1}] \longrightarrow [p_k, p_{k+1}]$.*

Demonstração. Seja $p_k = \max\{p_i \in \mathcal{O}(p) : f(p_i) > p_i\}$. Observe que $p_k < p_n$. Pela definição de p_k e por $f(p_{k+1}) \neq p_{k+1}$, temos que $f(p_k) > p_k$ e $f(p_{k+1}) < p_{k+1}$. Portanto, $[p_k, p_{k+1}] \longrightarrow [p_k, p_{k+1}]$. □

O intervalo encontrado no Lema anterior será denotado por I_1. Portanto, $I_1 \longrightarrow I_1$.

Lema 8.6. *Existe um caminho entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$.*

Demonstração. Para cada $n \geq 1$, defina $\mathcal{U}_n$ como a união dos intervalos da forma $[p_i, p_{i+1}]$ tal que existe um caminho de tamanho n entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$.

Se $[p_i, p_{i+1}]$ é um intervalo de $\mathcal{U}_n$, então existe um caminho de tamanho n entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$. Adicionando $I_1 \longrightarrow I_1$ ao início do caminho formamos um caminho de tamanho $n+1$ entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$. Portanto, $[p_i, p_{i+1}]$ é um intervalo de $\mathcal{U}_{n+1}$ e, desse modo, $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1}$. Observe que se $\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}_{n+1}$, existe um intervalo $[p_i, p_{i+1}]$ de $\mathcal{U}_n$ tal que $f([p_i, p_{i+1}] \cap \mathcal{O}(p)) \nsubseteq \mathcal{U}_n$.

Como $\mathcal{O}(p)$ é finita e $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \cdots$, existe $k \geq 1$ tal que $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_{k+1}$. De acordo com a observação anterior, $f([p_i, p_{i+1}] \cap \mathcal{O}(p)) \subset \mathcal{U}_k$ para todo intervalo $[p_i, p_{i+1}]$ de $\mathcal{U}_k$, ou seja, $f(\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)) \subset \mathcal{U}_k$. Desse modo, $f(\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)) = \mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)$. Como o único subconjunto de $\mathcal{O}(p)$ estável por f é ele próprio, segue que $\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(p)$. Assim, $\mathcal{U}_k = [p_1, p_n]$ e o resultado está provado. □

Lema 8.7. *Se não existe $[p_i, p_{i+1}] \neq I_1$ tal que $[p_i, p_{i+1}] \longrightarrow I_1$, então*

1. *f é uma bijeção entre os pontos de $\mathcal{O}(p)$ à esquerda e à direita de I_1*
2. *n é par*
3. *f admite um ponto de período 2*

Demonstração. Seja $I_1 = [p_k, p_{k+1}]$ e considere os conjuntos $\mathcal{O}_1 = \{p_1, \ldots, p_k\}$ e $\mathcal{O}_2 = \{p_{k+1}, \ldots, p_n\}$.

1. Se f calculada em algum ponto de $\mathcal{O}_1$ permanece em $\mathcal{O}_1$, considere $p_j = \max\{p_i \in \mathcal{O}_1 : f(p_i) \in \mathcal{O}_1\}$. Por definição de p_j, temos $f(p_j) \leq p_k$ e $f(p_{j+1}) \geq p_{k+1}$. Além disso, $p_j < p_k$. Desse modo, $[p_j, p_{j+1}] \neq I_1$ e $[p_j, p_{j+1}] \longrightarrow I_1$, o que é um absurdo.

   Logo, todo ponto de $\mathcal{O}_1$ é levado em $\mathcal{O}_2$ por f. Analogamente, mostra-se que todo ponto de $\mathcal{O}_2$ é levado em $\mathcal{O}_1$ por f. Assim, existe uma bijeção entre $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$.

2. Em particular, o tamanho de $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ são iguais. Desse modo, n é par.

3. Como $[p_1, p_k] \longrightarrow [p_{k+1}, p_n]$ e $[p_{k+1}, p_n] \longrightarrow [p_1, p_k]$, existe $p \in [p_1, p_k]$ tal que $f^2(p) = p$. Como os intervalos são disjuntos, segue que o período principal de p é 2.

Desse modo, as afirmações estão provadas. □

Lema 8.8. *Se $n > 1$ é ímpar e f não admite ponto de período ímpar menor que n, então existe um ciclo $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1$ tal que*

1. *se $I_i \longrightarrow I_{i+j}$ então $j = 1$*
2. *$I_{n-1} \longrightarrow I_j$, para todo $j < n-1$ ímpar*

Demonstração. Inicialmente, vamos provar a existência do ciclo de tamanho $n-1$. De acordo com os dois Lemas anteriores, existe um intervalo da forma $[p_i, p_{i+1}]$ diferente de I_1 tal que $[p_i, p_{i+1}] \longrightarrow I_1$(se esse intervalo não existe, então n é par) e existe um caminho entre I_1 e $[p_i, p_{i+1}]$. Portanto, existe um ciclo começando em I_1 diferente de $I_1 \longrightarrow I_1$. Observe que o tamanho desse ciclo pode ser arbitrariamente grande já que $I_1 \longrightarrow I_1$. Suponha que o menor ciclo dessa forma possui tamanho k e o denote por $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1$.

Suponha que $k < n-1$. Então $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1$ ou $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_1$ é um ciclo de tamanho ímpar m menor que n. Desse modo, $f^m(p) = p$ para algum $p \in I_1$, o que é um absurdo pois f não admite ponto periódico de período ímpar menor que n.

Pela minimalidade do ciclo, a propriedade 1. é verdadeira. Para provar a propriedade 2., seja $I_1 = [p_k, p_{k+1}]$. Pela definição de I_1, temos que $f(p_k) \geq p_{k+1}$ e $f(p_{k+1}) \leq p_k$. Como o período de p é maior que 2, então $f(p_k) > f(p_{k+1})$ ou $f(p_{k+1}) < p_k$. Suponha que $f(p_k) > f(p_{k+1})$. O outro caso é demonstrado de maneira análoga.

Pela propriedade 1., sabemos que I_1 cobre somente ele mesmo e I_2. Desse modo, $f(p_k) = p_{k+2}$ e $f(p_{k+1}) = p_k$, e portanto $I_2 = [p_{k+1}, p_{k+2}]$. Como I_2 cobre somente I_3, e já sabendo que $f(p_{k+1}) = p_k$, temos que $f(p_{k+2}) = p_{k-1}$ e portanto $I_3 = [p_{k-1}, p_k]$. Prosseguindo desse modo, observamos que os intervalos estão distribuídos de maneira simétrica em relação à I_1. Em particular, $I_{n-1} = [p_{n-1}, p_n]$ com $f(p_{n-1}) = p_1$ e $f(p_n) = p_{k+1}$. Desse modo, $f(I_{n-1}) \supset [p_1, p_{k+1}]$ e a afirmação está provada. $\square$

Definição 8.9. O Ordenação de Sharkovsky é definida por

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \cdots \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd 2\cdot 7 \rhd \cdots \rhd 2^2\cdot 3 \rhd 2^2\cdot 5 \rhd 2^2\cdot 7 \rhd \cdots \rhd 2^n\cdot 3 \rhd 2^n\cdot 5 \rhd 2^n\cdot 7 \rhd \cdots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$$

ou seja, é formada inicialmente pelos ímpares maiores que 1 em ordem crescente; depois pelos ímpares maiores que 1, multiplicados por 2, em ordem crescente; depois pelos ímpares maiores que 1, multiplicados por 2^2, em ordem crescente; e assim sucessivamente. Por fim, a ordem é formada por todas as potências de 2 em ordem decrescente.

Teorema 8.10 (Sharkovsky)**.** *Se f admite ponto de período principal n, então f admite ponto de período principal m, para todo $m \lhd n$.*

Demonstração. Suponha que f admite ponto de período principal n. Vamos provar o teorema nos seguintes casos:

(a) se $n > 1$ ímpar e f não admite ponto periódico de período ímpar menor que n

Pelo Lema anterior, podemos construir o ciclo

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_1$$

de tamanho m, para todo $m > n$. Desse modo, existe $p \in I_1$ tal que $f^k(p) \in I_{k+1}$ se $k = 1, \ldots, n-2$, $f^k(p) \in I_1$ se $k = n-1, \ldots, m-1$ e $f^m(p) = p$.

Se $f^k(p) = p$ para algum $k = 1, \ldots, n-2$, então $p \in I_1 \cap I_{k+1}$ e, portanto, p não existe ou possui período principal $n > k$, o que é um absurdo. Analogamente, $f^k(p) \neq p$ para $k = n-1, \ldots, m-1$. Portanto, o período principal de p é m.

Ainda de acordo com o Lema anterior, podemos construir ciclos da forma

$$I_{n-1} \longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1}$$

$$I_{n-1} \longrightarrow I_{n-4} \longrightarrow I_{n-3} \longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1}$$

$$\vdots$$

que permitem mostrar a existência de ponto de período principal $m < n$, m par.

(b) se $n = 2^m$, com $m \geq 1$

Seja $k = 2^l$ com $l < m$ e considere $g = f^{\frac{k}{2}}$. Temos que g admite um ponto de período principal 2^{m-l+1}. Como g admite um ponto de período principal par ≥ 2, segue que g admite ponto de período principal 2. Portanto, f admite um ponto de período principal 2^l.

(c) se $n = p2^m$, com $m \geq 1$ e p ímpar

Seja $g = f^{2^m}$. Vamos mostrar inicialmente que f admite ponto de período principal $q2^m$, q par. Temos que g admite ponto de período principal p ímpar. Pelo item (a), g admite ponto de período principal q par. Logo, f admite ponto de período principal $q2^m$, q par.

Agora, vamos mostrar que f admite ponto de período principal $q2^m$, $q > p$ ímpar. Pelo item (a), g admite ponto de período principal $q > p$ ímpar. Desse modo, f admite ponto de período principal $q2^{m-i}$ para algum $i = 0, \ldots, m$. Se $i = 0$, está mostrado. Se $i > 0$, pelo parágrafo anterior, f admite ponto de período principal $2^i(q2^{m-i}) = q2^m$ e, portanto, a afirmação está provada.

Por fim, vamos mostrar que f admite ponto de período principal 2^l, com $l < k$. Sabemos que f admite ponto de período principal $q2^k$, q par. Em particular, tomando $q = 2$, concluímos que f admite ponto de período principal 2^l, com $l < k$.

Observando que as afirmações anteriores esgotam as possibilidades na ordenação de Sharkovsky, concluímos a demonstração do teorema. □

Teorema 8.11. *Para todo $n \geq 1$ existe uma função f que admite ponto periódico de período principal n e que não admite ponto de período principal m se $m \triangleright n$.*

Demonstração. Seja $T : [0, 1] \to [0, 1]$ a função dada por $T(x) = 1 - |2x - 1|$ e considere a família de funções $T_h(x) = \min\{h, T(x)\}$ definidas em $[0, 1]$, com o parâmetro h variando em $[0, 1]$. Observe que $T_1 = T$, pois $T(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Além disso, observando o gráfico de T_1 concluímos que a função possui 2^k pontos periódicos de período k e assim podemos definir, para cada $k \geq 1$,

$$h(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } n \text{ de } T_1\}\}$$

A ideia principal da prova consiste no fato de que $h(k)$ desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de $T_{h(k)}$. As seguintes afirmações tornarão preciso esse fato.

(a) Se $\mathcal{O} \subset [0, h)$ é uma órbita de T_h, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1.

Se $p \in \mathcal{O}$ então $T_h(p) \in [0, h)$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$, ou seja, T_h e T_1 coincidem em $\mathcal{O}$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1.

(b) Se $\mathcal{O} \subset [0, h]$ é uma órbita de T_1, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_h.

Se $p \in \mathcal{O}$ então $T_1(p) \in [0, h]$. Desse modo, $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = \min\{h, T_1(p)\} = T_1(p)$, ou seja, T_h e T_1 coincidem em $\mathcal{O}$ e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_h.

(c) $T_{h(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \in [0, h(k))$ de tamanho l se e somente se $h(k) > h(l)$.

Se $T_{h(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \in [0, h(k))$ de tamanho l, então $\mathcal{O}$ é uma órbita de T_1 por (a) e, pela definição de $h(l)$, concluímos que $h(l) < h(k)$.

Por outro lado, se $h(l) < h(k)$, então T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(l)] \subset [0, h(k)]$ de tamanho l e, desse modo, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_{h(k)}$ por (b).

(d) A órbita de T_1 que contém $h(k)$ é uma órbita de tamanho k de $T_{h(k)}$. Além disso, todas as outras órbitas de $T_{h(k)}$ estão em $[0, h(k))$.

Pela definição de $h(k)$, T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, h(k)]$ de tamanho k e, portanto, $\mathcal{O}$ é uma órbita de $T_{h(k)}$ por (b).

Para demonstrar a segunda parte, basta observar que $h(k)$ é o valor máximo de $T_{h(k)}$ e, desse modo, toda órbita de $T_{h(k)}$ está contida em $[0, h(k)]$. Em particular, se a órbita não contém $h(k)$, então ela está contida em $[0, h(k))$.

(e) $k \triangleright l$ se o somente se $h(k) > h(l)$.

Suponha que $k \triangleright l$. Por (d), $T_{h(k)}$ possui uma órbita de tamanho k. De acordo com o Teorema de Sharkovsky e com (d), $T_{h(k)}$ admite uma órbita de tamanho l contida em $[0, h(k))$. Desse modo, $h(k) > h(l)$ por (c).

Por outro lado, suponha que $h(k) > h(l)$. Caso $l \triangleright k$, a demonstração no parágrafo anterior implicaria que $h(k) < h(l)$, contrariando a hipótese. Desse modo, $k \triangleright l$.

Assim, para cada $n \geq 1$, $T_{h(n)}$ possui órbita de tamanho n. Além disso, se $m \triangleright n$ então $h(m) > h(n)$ por (e) e, portanto, $T_{h(n)}$ não possui órbita de tamanho m por (c). $\square$

9 Derivada de Schwarz

Definição 9.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$. A *derivada de Schwarz de f* é a função S_f definida por

$$S_f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

para todo x tal que $f'(x) \neq 0$.

Exemplo 9.2.

1. Se $f(x) = F_\mu(x)$, então $S_f(x) = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0$ para todo $x \neq \frac{1}{2}$.
2. Se $f(x) = e^x$, então $S_f(x) = -\frac{1}{2} < 0$ para todo x.
3. Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então $S_f(x) = -1 - \frac{3}{2}(\tan^2 x) < 0$ para todo x.

Lema 9.3. *Se $S_f < 0$, então $S_{f^n} < 0$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Se $S_f < 0$ e $S_g < 0$, vamos provar que $S_{f\circ g} < 0$. Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}
(f\circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x)\\
(f\circ g)''(x) &= f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)\\
(f\circ g)'''(x) &= f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g'''(x)
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
S_{f\circ g}(x) &= \frac{(f\circ g)'''(x)}{(f\circ g)'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{(f\circ g)''(x)}{(f\circ g)'(x)}\right)^2\\
&= \frac{f'''(g(x))(g'(x))^2}{f'(g(x))} + 3\frac{f''(g(x))g''(x)}{f'(g(x))} + \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(g(x))g'(x)}{f'(g(x))} + \frac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2\\
&= S_f(g(x))(g'(x))^2 + S_g(x) < 0
\end{aligned}$$

para todo x tal que $(f\circ g)'(x) \neq 0$. Por indução, $S_{f^n} < 0$ para todo $n \geq 1$. $\square$

Lema 9.4. *Se $S_f < 0$ e x_0 é ponto de mínimo local de f', então $f'(x_0) \leq 0$.*

Demonstração. Se $f'(x_0) \neq 0$, então $S_f(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{3}{2}\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} < 0$. Sendo x_0 ponto de mínimo local de f', temos que $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \geq 0$. Portanto, $f'(x_0) < 0$. $\square$

Lema 9.5. *Se $S_f < 0$ e $a < b < c$ são pontos fixos de f, com $f'(b) \leq 1$, então f possui ponto crítico em (a, c).*

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, existem $r \in (a, b)$ e $s \in (b, c)$ tais que $f'(r) = f'(s) = 1$. Sendo f' contínua, f' restrita ao intervalo $[r, s]$ possui mínimo global. Como $b \in (r, s)$ e $f'(b) \leq 1$, temos que f' possui mínimo local em (r, s). Utilizando Lema anterior e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída. $\square$

Lema 9.6. *Se $S_f < 0$ e $a < b < c < d$ são pontos fixos de f, então f possui ponto crítico em (a, d).*

Demonstração. Se $f'(b) \leq 1$ ou $f'(c) \leq 1$, o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se $f'(b) > 1$ e $f'(c) > 1$, existem $r, t \in (b, c)$ tais que $r < t$, $f(r) > r$ e $f(t) < t$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $s \in (r, t)$ tal que $f'(s) < 1$. Portanto, f' possui mínimo local em (b, c). Utilizando Lema 9.4 e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída. □

Lema 9.7. *Se f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos críticos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, f possui ponto crítico entre dois elementos de $f^{-1}(c)$. Como f possui finitos pontos críticos, $f^{-1}(c)$ é finito. Além disso, se $f^{-k}(c)$ é finito, então $f^{-(k+1)}(c) = \{x \in \mathbb{R} : f(f^k(x)) = c\}$ é finito pois $f^{-1}(c)$ é finito e, por hipótese de indução, $f^{-k}(c_i)$ é finito para cada $c_i \in f^{-1}(c)$. Portanto, $f^{-n}(c)$ é finito para todo $n \geq 1$.

Temos que $(f^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x)) = 0$ se e somente se $f^k(x)$ é ponto crítico de f para algum $k = 1, \ldots, n-1$. Assim, o conjunto de pontos críticos de f^n é finito pois é dado pela união dos conjuntos $\cup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(c_i)$, onde c_i é ponto crítico de f. □

Observe que o Lema anterior, ao contrário dos outros, não exige que $S_f < 0$.

Teorema 9.8 (Singer)**.** *Se $S_f < 0$ e f possui n pontos críticos, então f possui no máximo $n + 2$ órbitas periódicas não repulsoras.*

Demonstração. Sejam p um ponto periódico não repulsor de f de período m e $g = f^m$. Desse modo, p é um ponto fixo não repulsor de g, ou seja, $g(p) = p$ e $|g'(p)| \leq 1$. Seja K a componente conexa de $B(p) = \{x : \lim_{k\to\infty} g^k(x) = p\}$ que contém p.

Suponha que K é limitado e $|g'(p)| < 1$. Vamos mostrar que K é aberto, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K.

Como $|g'(p)| < 1$, p é um ponto atrator e, portanto, existe uma vizinhança V de p contida em $B(p)$. Além disso, $g(\bar{V}) \subset V$. Sendo g contínua, $g^{-n}(V)$ é um aberto que contém p para todo $n \geq 1$. Como $g^n(p) = p \in V$, considere $g^{-n}(V)^*$ a componente conexa de $g^{-n}(V)$ que contém p.

Observe que, se $x \in K$, existe $n \geq 1$ tal que $g^n(x) \in V$. Desse modo, podemos escrever $K = \cup_{n=0}^{\infty} g^{-n}(V)^*$. Portanto, K é aberto e, por construção, $g(K) \subset K$.

Seja a um ponto extremo de K e suponha que $g(a) \in K$. Desse modo, existe uma vizinhança V de $g(a)$ contida em K. Sendo g contínua, $g^{-1}(V)$ é uma vizinhança de a contida $B(p)$, o que contraria o fato de K ser a componente conexa de $B(p)$ que contém p. Como $g(K) \subset K$ e g é contínua, concluímos que g preserva os pontos extremos de K.

Desse modo, escrevendo $K = (a, b)$, ocorre um dos três casos abaixo. Vamos mostrar que em cada caso, g possui ponto crítico em K. Observe que $S_g < 0$.

a) Se $g(a) = a$ e $g(b) = b$, g possui ponto crítico em K pelo Lema 9.5.

b) Se $g(a) = b$ e $g(b) = a$, considerando $h = g^2$ e utilizando novamente o Lema 9.5, h possui ponto crítico em K. Como $g(K) \subset K$, g possui ponto crítico em K.

c) Se $g(a) = g(b)$, g possui ponto crítico em K pelo Teorema do Valor Médio.

Suponha que K é limitado e $|g'(p)| = 1$. Pelo Lema anterior, g possui finitos pontos fixos e, portanto, são isolados.

Se $g'(p) = 1$ e, para x numa vizinhança de p, $g(x) > x$ quando $x > p$ e $g(x) < x$ quando $x < p$, então $g'(x^*) > 0$, para x^* próximo de p, é um mínimo local de g' maior que zero, o que contradiz o Lema 9.4. Se $g'(p) = -1$, basta considerar $h = g^2$ e obter o mesmo resultado. Portanto, p é atrator em pelo menos um dos lados. Desse modo, K é um intervalo não trivial, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K. Assim, é possível concluir de maneira análoga que g possui ponto crítico em K.

Pela Regra da Cadeia, se g possui ponto crítico $x_0 \in K$, então $f^i(x_0)$ é ponto crítico de f para algum $i = 0, \ldots, m-1$. Desse modo, se p é um ponto periódico não repulsor de f cujo intervalo associado K é limitado, então K possui pelo menos um ponto crítico e, como existem n pontos críticos, existem no máximo n intervalos K limitados. Não é possível obter a mesma conclusão se K não é limitado, mas observando que existem no máximo dois intervalos desse tipo, a demonstração está concluída. □

Corolário 9.9. *$F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $\mu > 0$, possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.*

Demonstração. Observe que F_μ possui um único ponto crítico em $\frac{1}{2}$. Pelo Teorema de Singer, F_μ possui no máximo 3 órbitas periódicas não repulsoras. Se p é ponto fixo de F_μ e observando que $\lim_{n\to\infty} |F_\mu^n(x)| = \infty$ quando $|x|$ é suficientemente grande, concluímos que $B(p)$ é limitado. Portanto, F_μ possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora. □

Considere a função $F_4(x) = 4x(1-x)$, $x \in [0,1]$. O ponto crítico de F_4 é eventualmente fixo em 0, que por sua vez é um ponto repulsor. Pelo Corolário acima, todas as órbitas periódicas de F_4 são repulsoras. Utilizando o fato que $S_{F_4} < 0$ é possível mostrar ainda que F_4 é caótica.

Se $q = \frac{1}{4}$ e $p = \frac{3}{4}$, então $F(q) = p$ e $F(p) = p$. Defina $J = [q, p)$ e $J' = \left(q, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, p\right)$. Observe que $F_4(J') = (p, 1)$, ou seja, $F_4(x) \notin J$ quando $x \in J'$.

Afirmação. *Se $x \in J'$, existe $n \geq 2$ tal que $F_4^n(x) \in J$.*

Demonstração. Como $F_4^2(J') = (0, p)$, basta mostrar que se $x \in (0, q)$, então $F_4^n(x) \in J$ para algum $n \geq 1$.

Seja $x \in (0, q)$ e suponha que $F_4^n(x) < q$ para todo $n \geq 1$. Observando que F_4 é estritamente crescente em $(0, q]$, a sequência $(F_4^n(x))_n$ é monótona limitada e, portanto, possui um limite $L \leq q$. Sendo F_4 contínua,

$$L = \lim_{n\to\infty} F_4^n(x) = \lim_{n\to\infty} F_4^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} F_4(F_4^n(x)) = F_4(L)$$

o que é um absurdo. Portanto, a demonstração está concluída. $\square$

Com base na afirmação anterior, podemos definir

$$\phi(x) = \min\{n \geq 2 : F_4^n(x) \in J\}$$

para todo $x \in J'$, ou seja, $\phi(x)$ é a menor iterada de F_4 em x que retorna para J. Assim, é possível construir a função R, denominada a função de primeiro retorno de F_4 em J. Precisamente, $R : J' \to J$ é dada por

$$R(x) = F_4^{\phi(x)}(x)$$

Também podemos definir os intervalos

$$I_n^- = \left\{x \in \left(q, \frac{1}{2}\right) : \phi(x) = n\right\}$$
$$I_n^+ = \left\{x \in \left(\frac{1}{2}, p\right) : \phi(x) = n\right\}$$

para todo $n \geq 2$. Esses intervalos possuem propriedades que estão retratadas na Afirmação abaixo.

Afirmação. *Para todo $n \geq 2$,*

i. I_n^- é da forma $(l_n, r_n]$, $(F_4^n)'(I_n^-) < 0$, $F_4^n(l_n) = p$, $F_4^n(r_n) = q$ e $r_n = l_{n+1}$.

ii. I_n^+ é da forma $[l_n, r_n)$, $(F_4^n)'(I_n^+) > 0$, $F_4^n(l_n) = q$, $F_4^n(r_n) = p$ e $l_n = r_{n+1}$.

Demonstração. Considere a função T, o Tent Map. Temos que T e F_4 são conjugados topologicamente por $\tau(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, ou seja, $\tau \circ T = F_4 \circ \tau$ em $[0, 1]$. Desse modo, bastar demonstrar um resultado análogo para T. Vamos provar a afirmação *ii*. A prova da afirmação *i* é análoga.

Temos que $T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ e $T\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$. Portanto, definimos $J = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ como sendo o intervalo análogo para T. Além disso, é fácil ver por indução que $T^n : \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right] \to [0, 1]$ é uma função linear estritamente crescente para todo $n \geq 2$.

Observe que $T^n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}$. Desse modo, existem $l_n \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ e $r_n \in \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)$ tais que $T^n(l_n) = \frac{1}{3}$ e $T^n(r_n) = \frac{2}{3}$. Definindo $I_n^+ = [l_n, r_n)$, temos que $T^n(x) \in J$ se o somente se $x \in I_n^+$.

Fazendo a mesma construção para T^{n+1}, encontramos $r_{n+1} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ tal que $T^{n+1}(r_{n+1}) = \frac{2}{3}$. Como $l_n \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ e $T^{n+1}(l_n) = T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} = T^{n+1}(r_{n+1})$, concluímos que $l_n = r_{n+1}$. $\square$

Afirmação. *Se $S_f < 0$ e f' não se anula no intervalo limitado I, então o mínimo de f' em I ocorre em algum ponto extremo de I.*

Demonstração. Como $S_f = S_{-f}$, podemos considerar $f'(I) > 0$ sem perda de generalidade. Se f' possui um ponto de mínimo x_0 no interior de I, então $f'(x_0) \leq 0$ de acordo com o Lema 9.4, o que é um absurdo. $\square$

Por definição, $R(x)$ é o primeiro retorno de x em J para cada $x \in J'$ e, portanto, $F_4(x), F_4^2(x), \ldots, F_4^{\phi(x)-1}(x)$ não pertencem à J. Desse modo, $R'(x) = (F_4^{\phi(x)})'(x) = \prod_{k=0}^{\phi(x)-1} F_4'(F_4^k(x)) \neq 0$. Porém, como está demonstrado na Afirmação seguinte, é possível concluir mais sobre a derivada de R.

Afirmação. *$|R'(x)| > 1$ para todo $x \in J'$.*

Demonstração. Sejam $I_n^+ = [l_n, r_n)$ e $W_n = (\frac{1}{2}, l_n)$, $n \geq 2$. Vamos provar que $(F_4^n)'(I_n^+) > 1$. A demostração de que $(F_4^n)'(I_n^-) < -1$ é feita de maneira análoga. De acordo com a Afirmação anterior, para mostrar que $(F_4^n)'(I_n^+) > 1$ é suficiente mostrar que $(F_4^n)'(l_n) > 1$ e $(F_4^n)'(r_n) > 1$.

Observe que $F_4^n(I_n^+) = J$ e $F_4^n(W_n) \supset (0, q)$ para todo $n \geq 2$. Como os tamanhos de I_n^+ e W_n são menores que $\frac{1}{4}$, o Teorema do Valor Médio afirma que existem $x_n' \in W_n$ e $x_n \in (l_n, r_n)$ tais que $(F_4^n)'(x_n') > 1$ e $(F_4^n)'(x_n) > 1$. Como $l_n \in (x_n', x_n)$ e $(F_4^n)'$ não pode assumir mínimo local positivo em (x_n', x_n), temos que $(F_4^n)'(l_n) > 1$.

Por outro lado, $(F_4^n)'(r_n) = F_4'(F_4^{n-1}(r_n))(F_4^{n-1})'(r_n) = F_4'(q)(F_4^{n-1})'(l_{n-1}) > 1$, pois ambos os termos são maiores que 1.

Desse modo, $|R'(x)| > 1$ para todo $x \in J'$. $\square$

Afirmação. *Se U é um intervalo em $[0,1]$, então existe $n \geq 1$ tal que $F_4^n(U) \supset [0,1]$.*

Demonstração. Seja U um intervalo aberto em $[0,1]$. Como $|F_4'(x)| > 1$ para todo $x \notin J$, existe $U_0 \subset U$ e $n \geq 1$ tal que $V = F_4^n(U_0) \subset J$. Como $|R'(x)| > 1$ para todo $x \in J'$, existe $V_0 \subset V$ e $m \geq 1$ tal que $R^m(V_0)$ contém algum ponto de descontinuidade de R. Portanto, existe $k \geq 1$ tal que $p \in F_4^k(V_0)$. Por fim, como é possível estender qualquer vizinhança de p por iteração de F_4 até cobrir $[0,1]$, existe $l \geq 1$ tal que $F_4^{k+l}(V_0) \supset [0,1]$. $\square$

Afirmação. *F_4 é caótica.*

Demonstração. Seja U, V um intervalos abertos em $[0,1]$. Pela Afirmação anterior, existe $n \geq 1$ tal que $F_4^n(U) \supset [0,1]$.

O conjunto conjunto de pontos periódicos de F_4 é denso em $[0,1]$. De fato, $F_4^n(U) \supset U$ e, portanto, existe $x \in U$ tal que $F_4^n(x) = x$.

F_4 é transitiva topologicamente. De fato, $F_4^n(U) \supset V$ e, portanto, existe $x \in U$ tal que $F_4^n(x) \in V$.

F_4 depende sensivelmente das condições iniciais. De fato, $F_4^n(U) \supset [0,1]$ e, portanto, existem $x, y \in U$ tais que $|F_4^n(x) - F_4^n(y)| = |1 - 0| \geq 1$. $\square$

10 Bifurcação

Ao longo de seção, f_λ representará uma família parametrizada de funções no parâmetro λ de modo que a função

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x)$$

definida num aberto de $\mathbb{R}^2$ seja de classe $\mathcal{C}^\infty$ nas variáveis x e λ.

Teorema 10.1 (Função Implícita)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e $F : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^k$, $1 \leq k \leq \infty$. Suponha que*

1. $F(x_0, y_0) = c$

2. $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Então existem uma vizinhança I de x_0 e uma função $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ tais que

1. $f(x_0) = y_0$

2. $F(x, f(x)) = c$ *para todo* $x \in I$

Teorema 10.2. *Seja f_λ uma família parametrizada de funções. Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$

2. $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$

Então existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0, respectivamente, e uma função $p : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

1. $p(\lambda_0) = x_0$

2. $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ *para todo* $\lambda \in I$

Além disso, f_λ não possui outros pontos fixos em J.

Demonstração. Seja $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Observe que x é ponto fixo de f_λ se e somente se $G(x, \lambda) = 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, como $G(x_0, \lambda_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0,$$

existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0, respectivamente, e uma função $p : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tal que $p(\lambda_0) = x_0$ e $G(p(\lambda), \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in I$.

Além disso, para cada $\lambda \in I$ está associado um único $x \in J$ e, portanto, $x \in J$ e $G(x, \lambda) = 0$ se e somente se $x = p(\lambda)$. $\square$

De acordo com o Teorema anterior, se x_0 é um ponto fixo não hiperbólico de f_{λ_0}, então f_λ possui um único ponto fixo numa vizinhança de x_0 para cada λ numa vizinhança de λ_0.

Utilizando a notação do Teorema anterior, considere a função $g_\lambda(x) = f_\lambda(x + p(\lambda)) - p(\lambda)$. Observe que $g_\lambda(0) = f(p(\lambda)) - p(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in I$, ou seja, 0 é ponto fixo de g_λ para todo $\lambda \in I$. Além disso, f_λ e g_λ são topologicamente conjugadas por $h_\lambda(x) = x - p(\lambda)$.

Teorema 10.3 (Bifurcação Tangente)**.** *Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(0) = 0$

2. $f'_{\lambda_0}(0) = 1$

3. $f''_{\lambda_0}(0) \neq 0$

4. $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

Então existem uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que

1. $p(0) = \lambda_0$

2. $f_{p(x)}(x) = x$

Além disso, $p'(0) = 0$ e $p''(0) \neq 0$.

Demonstração. Considere a função $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. Observe que x é um ponto fixo de f_λ se e somente se $G(x, \lambda) = 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, como $G(0, \lambda_0) = 0$ e

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0,$$

existem uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ tais que $p(0) = \lambda_0$ e $G(x, p(x)) = 0$ para todo $x \in I$.

Além disso, pela Regra da Cadeia, é válido que

$$p'(0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = -\frac{f'_{\lambda_0}(0) - 1}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)} = 0$$

e

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) - \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \lambda}(0, \lambda_0)}{\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)\right)^2} = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \lambda_0)}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)} \neq 0$$

□

Teorema 10.4 (Bifurcação com Duplicação de Período)**.** *Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(0) = 0$ *para todo* λ *numa vizinhança de* λ_0

2. $f'_{\lambda_0}(0) = -1$

3. $\frac{\partial (f_\lambda^2)'}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

4. $S_{f_{\lambda_0}}(0) \neq 0$

Então existem uma vizinhança I *de* 0 *e uma função* $p : I \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *tais que*

1. $p(0) = \lambda_0$

2. $f_{p(x)}(x) \neq x$ *para todo* $x \in I$

3. $f^2_{p(x)}(x) = x$ *para todo* $x \in I$

Além disso, $p'(0) = 0$ *e* $p''(0) \neq 0$.

Demonstração. Seja $G(x, \lambda) = f_\lambda^2(x) - x$. Sendo $G(0, \lambda) = 0$ para todo λ numa vizinhança de λ_0, temos que

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = 0$$

e, portanto, não podemos utilizar o Teorema da Função Implícita diretamente. Seja

$$H(x, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{G(x, \lambda)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Desse modo, H é de classe $\mathcal{C}^\infty$ e são válidas as igualdades

(I) $H(0, \lambda_0) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0) = (f^2_{\lambda_0})'(0) - 1 = f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(0)) f'_{\lambda_0}(0) - 1 = 0$

(II) $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda)\right)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial}{\partial \lambda}((f_\lambda^2)'(0) - 1)|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial (f_\lambda^2)'}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

(III) $\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) = \lim_{x \to 0} \frac{H(x,\lambda_0) - H(0,\lambda_0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{G(x,\lambda_0)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x,\lambda_0)}{x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)$

(IV) $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) = \frac{1}{3} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0)$

Pelas igualdades (I) e (II), e pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança I de 0 e uma função $p : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tais que $p(0) = \lambda_0$ e $H(x, p(x)) = 0$ para todo $x \in I$. Em particular, se $x \neq 0$,

$$0 = \frac{G(x, p(x))}{x} = \frac{f^2_{p(x)}(x) - x}{x}$$

ou seja, $f^2_{p(x)}(x) = x$ para todo $x \in I$. Além disso, pelo Teorema 10.2, f_λ possui um único ponto fixo numa vizinhança de 0 e, portanto, podemos considerar que $f_{p(x)}(x) \neq x$ para todo $x \in I$, $x \neq 0$.

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda_0) &= (f_{\lambda_0})''(x)|_{x=0} \\
&= [f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\
&= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)]|_{x=0} \\
&= f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(0)) - f''_{\lambda_0}(0) = 0
\end{aligned}$$

temos que

$$p'(0) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = -\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = 0$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda_0) &= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\
&= [f'''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^3 + 2f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)f'_{\lambda_0}(x) + f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)f''_{\lambda_0}(x) \\
&\quad + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'''_{\lambda_0}(x)]|_{x=0} \\
&= f'''_{\lambda_0}(0)(f'_{\lambda_0}(0))^3 + 2(f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + (f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + f'_{\lambda_0}(0)f'''_{\lambda_0}(0) \\
&= -2f'''_{\lambda_0}(0) - 3(f''_{\lambda_0}(0))^2 \\
&= 2\frac{f'''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)} - 3\left(\frac{f''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)}\right)^2 = 2S_{f_{\lambda_0}}(0)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0,\lambda_0)\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)}{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)\right)^2} = -\frac{1}{3}\frac{\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0,\lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} = -\frac{2}{3}\frac{S_{f_{\lambda_0}}(0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0,\lambda_0)} \neq 0.$$

$\square$