

# Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos

Agenor Gonçalves Neto

São Paulo, 2020

## Sumário

<b>1</b>	<b>Conceitos Iniciais</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Função Logística</b>	<b>2</b>
2.1	Estudo Inicial . . . . .	2
2.2	Conjuntos de Cantor . . . . .	3
2.3	Caos . . . . .	5
2.4	Conjugação Topológica . . . . .	6
2.5	Dinâmica Simbólica . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Teorema de Sharkovsky</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Derivada de Schwarz</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Bifurcação</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Subshift</b>	<b>18</b>

## 1 Conceitos Iniciais

Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função, onde  $X$  é um espaço métrico. Dado  $x \in X$  e denotando por  $f^n$  a  $n$ -ésima composição de  $f$  com ela mesma, queremos estudar as propriedades da sequência  $(x, f(x), f^2(x), \dots)$ .

### Definição 1.1.

- Se  $x \in X$ , então  $\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$  é a órbita de  $x$ .
- Se  $p \in X$  e  $f^n(p) = p$  para algum  $n > 0$ , então  $p$  é um ponto periódico de período  $n$ . Em particular, se  $n = 1$ , então  $p$  é um ponto fixo. Denotaremos por  $\text{Per}(f)$  o conjunto de todos os pontos periódicos.
- Se  $p$  é um ponto periódico de período  $n$  e  $f^k(p) \neq p$  para todo  $0 < k < n$ , então  $n$  é o período principal de  $p$ . Denotaremos por  $\text{Per}_n(f)$  o conjunto de todos os pontos periódicos de período principal  $n$ .

- d. Se  $p$  um ponto periódico de período  $n$ , então  $\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p\}$  é a bacia de atração de  $p$ . Além disso,  $\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(x)| = \infty\}$  é a bacia de atração do  $\infty$ .

**Proposição 1.2.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $f([a, b]) \subset [a, b]$  ou  $f([a, b]) \supset [a, b]$ , então  $f$  possui ponto fixo.*

*Demonstração.* Suponha que  $f([a, b]) \subset [a, b]$ . Considere a função  $g(x) = f(x) - x$  definida em  $[a, b]$ . Observando que  $g(a) \geq 0$  e  $g(b) \leq 0$  e utilizando o TVI, existe  $p \in [a, b]$  tal que  $g(p) = 0$ .

Suponha que  $f([a, b]) \supset [a, b]$  e sejam  $c, d \in [a, b]$  tais que  $f(c) = a$  e  $f(d) = b$ . Considere a função  $g(x) = f(x) - x$  definida em  $[a, b]$ . Observando que  $g(c) \leq 0$  e  $g(d) \geq 0$  e utilizando o TVI, existe  $p \in [a, b]$  tal que  $g(p) = 0$ .  $\square$

**Definição 1.3.** Sejam  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $p \in \text{Per}_n(f)$ .

- Se  $|\partial f^n(p)| \neq 1$ , então  $p$  é um ponto hiperbólico.
- Se  $|\partial f^n(p)| < 1$ , então  $p$  é um ponto atrator.
- Se  $|\partial f^n(p)| > 1$ , então  $p$  é um ponto repulsor.

**Teorema 1.4.** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $p \in \text{Per}_n(f)$ .*

- Se  $p$  é um ponto atrator, então existe uma vizinhança de  $p$  contida em  $\mathcal{B}(p)$ .*
- Se  $p$  é um ponto repulsor, então existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  com a seguinte propriedade: se  $x \in V$  e  $x \neq p$ , então  $f^{kn}(x) \notin V$  para algum  $k \geq 1$ .*

*Demonstração.*

- Sendo  $\partial f$  contínua, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $|\partial f^n(x)| \leq \lambda < 1$  para todo  $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ . Pelo TVM, se  $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ , então  $|f^n(x) - p| \leq \lambda |x - p|$ . Por indução,  $|f^{kn}(x) - p| \leq \lambda^k |x - p|$  para todo  $k \geq 1$ . Desse modo,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$ .
- Demonstração análoga.

$\square$

## 2 Função Logística

### 2.1 Estudo Inicial

**Proposição 2.1.** *Se  $\mu > 1$ , então*

- $F(1) = F(0) = 0$ .
- $F(\frac{1}{\mu}) = F(p_\mu) = p_\mu$ , onde  $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ .
- $0 < p_\mu < 1$ .

**Proposição 2.2.** *Se  $\mu > 1$ , então  $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset \mathcal{B}(\infty)$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, se  $x \in (1, \infty)$ , então  $F(x) \in (-\infty, 0)$ . Por fim, observamos que a sequência  $(x, F(x), F^2(x), \dots)$  é estritamente decrescente e ilimitada quando  $x \in (-\infty, 0)$ .  $\square$

**Proposição 2.3.** *Se  $1 < \mu < 3$ , então*

1.  $0$  é um ponto repulsor e  $p_\mu$  é um ponto atrator.
2.  $(0, 1) \subset \mathcal{B}(p_\mu)$ .

## 2.2 Conjuntos de Cantor

Se  $\mu > 4$ , então  $F(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4} > 1$ , ou seja, existem pontos em  $[0, 1]$  que não permanecem em  $[0, 1]$  após uma iteração de  $F$ . Em vista da Proposição 2.2, tais pontos pertencem ao conjunto  $\mathcal{B}(\infty)$ . De modo mais geral, se um ponto de  $[0, 1]$  não permanece em  $[0, 1]$  após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto  $\mathcal{B}(\infty)$ .

Desse modo, considere o conjunto  $\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1]\}$  formado pelos pontos que permanecem em  $[0, 1]$  após  $n$  iterações de  $F$  e considere o conjunto  $\Lambda = \cap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1] \text{ para todo } n \geq 1\}$ , que é formado pelos pontos de  $[0, 1]$  que sempre permanecem em  $[0, 1]$  por iterações de  $F$ . Observe que  $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$ , para todo  $n \geq 1$ , pois se  $F^{n+1}(x) = F(F^n(x)) \in [0, 1]$ , então  $F^n(x) \in [0, 1]$ .

**Proposição 2.4.** *Se  $\mu > 4$ , então*

1.  $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ , onde  $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$  e  $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ .
2.  $\Lambda_n$  é a união de  $2^n$  intervalos fechados disjuntos e  $F^n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora, onde  $[a, b]$  é um desses intervalos.

*Demonstração.*

1. Basta resolver a equação de segundo grau  $\mu x(1 - x) = 1$ .

Analisando  $F'$  observamos que  $F$  é estritamente crescente no intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$  e estritamente decrescente no intervalo  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Como  $F(0) = F(1) = 0$  e  $F(\frac{1}{2}) > 1$ , o Teorema do Valor Intermediário garante que existem  $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$  e  $x_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$  tais que  $F(x_1) = F(x_2) = 1$ . Os valores de  $x_1$  e  $x_2$  são encontrados resolvendo a equação de segundo grau  $\mu x(1 - x) = 1$ . Logo,  $F([0, x_1]) = F([x_2, 1]) = [0, 1]$  e  $F(x) > 1$  para todo  $x \in (x_1, x_2)$ . Portanto,  $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$  e o item 1 está demonstrado.

A demonstração dos itens 2 e 3 será feita por indução. De acordo com a primeira parte,  $\Lambda_1$  é a união de  $2^1 = 2$  intervalos fechados disjuntos e  $F$  restrita a cada um desses intervalos é uma bijeção com o intervalo  $[0, 1]$ .

Suponha que  $\Lambda_{k-1}$  é a união de  $2^{k-1}$  intervalos fechados disjuntos de modo que  $F^{k-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora para todo intervalo  $[a, b]$  que forma  $\Lambda_{k-1}$ . Sendo  $F^{k-1}$  bijetora,  $(F^{k-1})'(x) > 0$  ou  $(F^{k-1})'(x) < 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Como as demonstrações para os dois casos são análogas, podemos supor que  $(F^{k-1})'(x) > 0$ .

Como  $F^{k-1}$  é estritamente crescente, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existem únicos  $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in (a, b)$  tais que

- (a)  $a < \overline{x_1} < \overline{x_2} < b$ ,
- (b)  $F^{k-1}([a, \overline{x_1}]) = [0, x_1]$ ,
- (c)  $F^{k-1}((\overline{x_1}, \overline{x_2})) = (x_1, x_2)$  e
- (d)  $F^{k-1}([\overline{x_2}, 1]) = [x_2, 1]$ .

As condições acima garantem que os intervalos  $[a, \overline{x_1}]$ ,  $[\overline{x_2}, b]$  são disjuntos e que  $F^k(x) = F(F^{k-1}(x)) > 1$  para todo  $x \in (\overline{x_1}, \overline{x_2})$ . Também, temos que  $F^k([a, \overline{x_1}]) = F([0, x_1]) = [0, 1]$  e, analogamente,  $F^k([\overline{x_2}, 1]) = [0, 1]$ . Além disso,

$$(F^k)'([a, \overline{x_1}]) = F'(F^{k-1}([a, \overline{x_1}]))(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) = F'([0, x_1])(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) > 0$$

e, analogamente,

$$(F^k)'([\overline{x_2}, 1]) = F'([x_2, 1])(F^{k-1})'([\overline{x_2}, 1]) < 0.$$

Logo,  $F^k$  é uma bijeção entre  $[a, \overline{x_1}]$  e  $[0, 1]$  e entre  $[\overline{x_2}, 1]$  e  $[0, 1]$ .

Portanto, a partir de cada intervalo fechado de  $\Lambda_{k-1}$ , construímos dois novos intervalos fechados disjuntos tais que  $F^k$  restrita em cada um desses intervalos é um bijeção com  $[0, 1]$  e, dessa maneira, esses intervalos estão contidos em  $\Lambda_k$ . Desse modo, se  $\Lambda_{k-1}$  é formado por  $2^{k-1}$  intervalos fechados disjuntos, então  $\Lambda_k$  é formado por  $2 \times 2^{k-1} = 2^k$  intervalos fechados disjuntos. Assim, o resultado está provado.  $\square$

**Definição 2.5.** Seja  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  um conjunto não vazio. Dizemos que  $\Gamma$  é um conjunto de Cantor se as seguintes condições são válidas:

- i.  $\Gamma$  é compacto.
- ii.  $\Gamma$  não possui intervalos.
- iii. Todo ponto de  $\Gamma$  é um ponto de acumulação de  $\Gamma$ .

**Lema 2.6.** Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então

- 1. existe  $\lambda > 1$  tal que  $|\partial F(x)| > \lambda$  para todo  $x \in \Lambda_1$ .
- 2.  $b - a < \frac{1}{\lambda^n}$ , onde  $[a, b]$  é um dos intervalos que formam  $\Lambda_n$ .
- 3. dados  $x \in \Lambda$  e  $\varepsilon > 0$ , existe um intervalo  $[a, b] \subset \Lambda_n$  para algum  $n \geq 1$  tal que  $x \in [a, b]$ ,  $b - a < \varepsilon$  e  $F^n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora.

*Demonstração.* 1. Inicialmente, observamos que  $\mu^2 - 4\mu > 1$  quando  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ . Desse modo,  $F'(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$  e  $F'(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são como na Proposição 2.4. Observamos também que  $F'$  é estritamente decrescente, pois  $F''(x) = -2\mu < 0$ . Portanto,  $F'(x) \geq F'(x_1) > 1$  para todo  $x \in [0, x_1]$  e  $F'(x) \leq F'(x_2) < -1$  para todo  $x \in [x_2, 1]$ . De acordo com a Proposição 2.4,  $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$  e, desse modo,  $|F'(x)| > 1$  para todo  $x \in \Lambda_1$ . Sendo  $F'$  contínua e  $\Lambda_1$  compacto, existe  $\lambda > 1$  tal que  $|F'(x)| > \lambda$  para todo  $x \in \Lambda_1$ .

2. De acordo com a Proposição 2.4,  $\Lambda_n$  é formado pela união de  $2^n$  intervalos disjuntos. Seja  $[a, b]$  um desses intervalos. Se  $x \in [a, b]$ , em particular  $F^k(x) \in \Lambda_1$  para todo  $0 \leq k < n$ . Desse modo, de acordo com o item anterior, temos que  $(F^n)'(x) = F'(F^{n-1}(x)) \times F'(F^{n-2}(x)) \times \cdots \times F'(x) > \lambda^n$ .

Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$|F^n(b) - F^n(a)| = |(F^n)'(c)| |b - a| > \lambda^n |b - a|$$

Como  $F^n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é contínua e bijetora, temos que  $|F^n(b) - F^n(a)| = 1$ . Desse modo,  $|b - a| < \frac{1}{\lambda^n}$  e a afirmação está provada.

3. Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^n} < \varepsilon$ , onde  $\lambda > 1$  é como no primeiro item. Em particular,  $x \in \Lambda_n$ . Seja  $I$  um dos intervalos que formam  $\Lambda_n$  e que contém  $x$ . Pelo item anterior, o tamanho de  $I$  é menor que  $\varepsilon$ . Além disso, pela Proposição 2.4,  $F^n : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora e, portanto, a afirmação está provada. □

**Teorema 2.7.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor.*

*Demonstração.*  $\Lambda$  é não vazio pois  $0 \in \Lambda$ , é limitado pois  $\Lambda_1 \subset [0, 1]$  e é fechado pois é intersecção de conjuntos fechados.

Agora, suponha que  $\Lambda$  contém algum intervalo. Então, existem  $x, y \in I$ ,  $x < y$ , tais que  $[x, y] \subset \Lambda$ . Seja  $k$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < |x - y|$ . Em particular,  $[x, y] \subset \Lambda_k$ . Mas, de acordo com o Lema 2.6, os intervalos de  $\Lambda_k$  possuem tamanho menor que  $\frac{1}{\lambda^k}$ . Absurdo e, portanto,  $\Lambda$  não possui intervalos.

Por fim, observe que, se  $x$  é um ponto extremo de algum intervalo de  $\Lambda_n$ , então  $x \in \Lambda$  pois  $F^{n+1}(x) = 0$ . Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . Em particular,  $x \in \Lambda_k$  e, portanto,  $x$  é elemento de algum intervalo cujo tamanho é menor que  $\varepsilon$ , de acordo com o Lema 2.6. Portanto, existe  $y \in \Lambda$  ponto extremo do intervalo que contém  $x$  tal que  $|x - y| < \varepsilon$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, concluímos que  $x$  é um ponto de acumulação de  $\Lambda$ . □

## 2.3 Caos

**Proposição 2.8.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então o conjunto de pontos periódicos de  $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é denso em  $\Lambda$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . De acordo com o Lema 2.6, o intervalo fechado  $I \subset \Lambda_k$  que contém  $x$  possui tamanho menor que  $\varepsilon$ . Pela Proposição 2.4,  $F^k : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora. Como  $F^k(I) \supset I$ , a Proposição ?? afirma que existe  $y \in I$  tal que  $F^k(y) = y$ . Observando que  $y \in \Lambda$  e  $|x - y| < \varepsilon$ , o resultado está provado. □

**Definição 2.9.** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função. Dizemos que  $f$  é transitiva topologicamente se dados  $x, y \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , existem  $z \in X$  e  $j \geq 1$  tais que  $|z - x| < \varepsilon$  e  $|f^j(z) - y| < \varepsilon$ .

**Proposição 2.10.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é transitiva topologicamente.*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in \Lambda$  e  $\varepsilon > 0$ . Existe  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . De acordo com o Lema 2.6, o tamanho de cada intervalo fechado em  $\Lambda_k$  é menor que  $\frac{1}{\lambda^k}$  e, portanto, menor que  $\varepsilon$ . Como  $x \in \Lambda_k$ , existe um intervalo  $[a, b] \subset \Lambda_k$  que contém  $x$ . Pela Proposição 2.4,  $F^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $z \in [a, b]$  tal que  $F^k(z) = y$ . Observando que  $z \in \Lambda$ , concluímos que  $F$  é transitiva topologicamente.  $\square$

**Definição 2.11.** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função. Dizemos que  $f$  depende sensivelmente das condições iniciais se existe  $\delta > 0$  com a seguinte propriedade: dados  $x \in X$  e  $\varepsilon > 0$ , existem  $y \in X$  e  $j \geq 1$  tais que  $|x - y| < \varepsilon$  e  $|f^j(x) - f^j(y)| > \delta$ .

**Proposição 2.12.** Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$  depende sensivelmente das condições iniciais.

*Demonstração.* Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . Como na demonstração da Proposição anterior, seja  $I$  o intervalo fechado contido em  $\Lambda_k$  que contém  $x$  e cujo tamanho é menor que  $\varepsilon$ . Como  $F^k : I \rightarrow [0, 1]$  é um bijeção, então  $F^k(a) = 0$  e  $F^k(b) = 1$ , onde  $a$  e  $b$  são pontos extremos de  $I$ . Como  $F(\frac{1}{2}) > 1$  e  $x \in \Lambda$ , segue que  $F^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ . Se  $F^k(x) \in [0, \frac{1}{2})$ , então  $|F^k(x) - F^k(b)| = |F^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$  e se  $F^k(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$ , então  $|F^k(x) - F^k(a)| = |F^k(x)| > \frac{1}{2}$ . Observando que  $|x - a| < \varepsilon$  e  $|x - b| < \varepsilon$ , temos o resultado para  $\delta = \frac{1}{2}$ .  $\square$

**Definição 2.13.** Seja  $f : X \rightarrow X$  uma função. Dizemos que  $f$  é caótica se as seguintes condições são válidas:

- i. O conjunto de pontos periódicos de  $f$  é denso em  $X$ .
- ii.  $f$  é transitiva topologicamente.
- iii.  $f$  depende sensivelmente das condições iniciais.

**Teorema 2.14.** Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é caótica.

**Teorema 2.15.** Seja  $X \subset \mathbb{R}$  um conjunto infinito e  $f : X \rightarrow X$  é uma função. Se o conjunto de pontos periódicos de  $f$  é denso em  $X$  e  $f$  é transitiva topologicamente, então  $f$  é caótica.

## 2.4 Conjugação Topológica

**Definição 2.16.** Sejam  $f : X \rightarrow X$ ,  $g : Y \rightarrow Y$  e  $\tau : X \rightarrow Y$  funções. Dizemos que  $f$  e  $g$  são conjugadas topologicamente por  $\tau$  se  $\tau$  se as seguintes condições são válidas:

- i.  $\tau$  é um homeomorfismo.
- ii.  $\tau \circ f = g \circ \tau$ .

**Proposição 2.17.** Sejam  $f : X \rightarrow X$ ,  $g : Y \rightarrow Y$  e  $\tau : X \rightarrow Y$  funções. Se  $f$  e  $g$  são conjugadas topologicamente por  $\tau$ , então

1.  $g$  e  $f$  são conjugadas topologicamente por  $\tau^{-1}$ .
2.  $\tau \circ f^j = g^j \circ \tau$  para todo  $j \geq 1$ .

3.  $p$  é ponto periódico de  $f$  se e somente se  $\tau(p)$  é ponto periódico de  $g$ .
4.  $\mathcal{B}(\tau(p)) = \tau(\mathcal{B}(p))$ , onde  $p$  é um ponto periódico de  $f$ .
5. o conjunto de pontos periódicos de  $f$  é denso em  $X$  se e somente se o conjunto de pontos periódicos de  $g$  é denso em  $Y$ .
6.  $f$  é transitiva topologicamente se e somente se  $g$  é transitiva topologicamente.

*Demonstração.* 1. Como  $\tau$  é um homeomorfismo, a função inversa  $\tau^{-1}$  existe e também é um homeomorfismo. Além disso,  $\tau \circ f = g \circ \tau$  implica que  $f \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ g$ . Portanto,  $\tau^{-1}$  é conjugação topológica de  $g$  e  $f$ .

2. Por definição, a afirmação é verdadeira quando  $n = 1$ . Suponha que  $\tau \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ \tau$ . Desse modo,  $\tau \circ f^n = \tau \circ f^{n-1} \circ f = g^{n-1} \circ \tau \circ f = g^{n-1} \circ g \circ \tau = g^n \circ \tau$ . Portanto, a afirmação é verdadeira para todo  $n \geq 1$ .
3. Suponha que  $p$  é um ponto periódico de  $f$  com período principal  $n$ . Desse modo,  $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) = \tau(p)$ . Se  $k = 1, \dots, n-1$ , então  $g^k(\tau(p)) = \tau(f^k(p)) \neq \tau(p)$ , pois  $f^k(p) \neq p$  e  $\tau$  é injetora. Portanto,  $\tau(p)$  é um ponto periódico de  $g$  com período principal  $n$ . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.
4. Suponha que  $p$  é um ponto periódico com período  $n$ . Se  $x \in W^s(\tau(p))$ , então  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{kn}(x) = \tau(p)$ . Como  $\tau^{-1}$  é contínua, temos  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(\tau^{-1}(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau^{-1}(g^{kn}(x)) = p$ . Então,  $x \in \tau(W^s(p))$  pois  $\tau^{-1}(x) \in W^s(p)$ .

Por outro lado, se  $\tau(x) \in \tau(W^s(p))$ , então  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$ . Como  $\tau$  é contínua, temos  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{kn}(\tau(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau(f^{kn}(x)) = \tau(p)$  e, portanto,  $\tau(x) \in W^s(\tau(p))$ .

5. Se o conjunto  $Per(f)$  dos pontos periódicos de  $f$  é denso em  $A$ , então  $\tau(Per(f))$  é denso em  $B$  pois  $\tau$  é um homeomorfismo. Como  $\tau(Per(f)) = Per(g)$ , temos que  $Per(g)$  é denso em  $B$ . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.
6. Inicialmente, sendo  $\tau$  é contínua, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  de modo que, se  $z \in A$ ,  $|x - z| < \delta$  e  $|y - f^n(z)| < \delta$ , então  $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$  e  $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$ , onde  $n \geq 1$  é fixado.

Se  $x', y' \in B$ , existem  $x, y \in A$  tais que  $\tau(x) = x'$  e  $\tau(y) = y'$ . Como  $f$  é transitiva topologicamente, existe  $z \in A$  tal que  $|x - z| < \delta$  e  $|y - f^n(z)| < \delta$  para algum  $n \geq 1$ . Portanto,  $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$  e  $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$ . Se  $\tau(z) = z'$ , então  $|x' - z'| < \varepsilon$  e  $|y' - g^n(z')| < \varepsilon$  e, portanto,  $g$  é transitiva topologicamente. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

□

**Lema 2.18.** A função  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

é caótica.

*Demonstração.* Inicialmente, provaremos por indução que  $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$  é uma função linear bijetora para todo  $0 \leq k < 2^n$ . Pela definição de  $T$ , a afirmação é verdadeira quando  $n = 1$ . Suponha que  $T^{n-1} : [\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] \rightarrow [0, 1]$  é uma função linear bijetora para todo  $0 \leq k < 2^{n-1}$ . Fixado  $k$ , podemos supor que  $T^{n-1}(\frac{k}{2^{n-1}}) = 0$  e  $T^{n-1}(\frac{k+1}{2^{n-1}}) = 1$ . O caso em que  $T^{n-1}(\frac{k}{2^{n-1}}) = 1$  e  $T^{n-1}(\frac{k+1}{2^{n-1}}) = 0$  é tratado de maneira análoga. Temos que  $T^{n-1}(\bar{x}) = \frac{1}{2}$ , onde  $\bar{x} = \frac{2k+1}{2^n}$  é o ponto médio do intervalo  $[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}]$ . Portanto,  $T^n(\bar{x}) = T(T^{n-1}(\bar{x})) = T(\frac{1}{2}) = 1$ ,  $T^n(\frac{k}{2^{n-1}}) = T(0) = 0$  e  $T^n(\frac{k+1}{2^{n-1}}) = T(1) = 0$ . Desse modo,  $T^n : [\frac{k}{2^{n-1}}, \bar{x}] \rightarrow [0, 1]$  e  $T^n : [\bar{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] \rightarrow [0, 1]$  são funções lineares (pois são composições de funções lineares) e bijetoras para todo  $0 \leq k < 2^{n-1}$ . Observando que  $[\frac{k}{2^{n-1}}, \bar{x}] = [\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}]$  e  $[\bar{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] = [\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}]$ , concluímos que  $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$  é uma função linear bijetora para todo  $0 \leq k < 2^n$  e, portanto, a afirmação está provada.

Para provar que  $T$  é caótica, seja  $\varepsilon > 0$ . Pelo afirmação do parágrafo anterior, existem  $n \geq 1$  e  $I = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$  tais que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ,  $x \in I$  e  $T^n : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora.

Seja  $x \in [0, 1]$ . Como  $T(I) \supset I$ , a Proposição ?? afirma que existe  $p \in I$  tal que  $T^n(p) = p$ . Observando que  $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , concluímos que o conjunto de pontos periódicos de  $T$  é denso em  $[0, 1]$ .

Sejam  $x, y \in [0, 1]$ . Como  $T^n : I \rightarrow [0, 1]$  é sobrejetora, existe  $z \in I$  tal que  $T^n(z) = y$ . Observando que  $|z - x| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e  $|T^n(z) - y| = 0 < \varepsilon$ , concluímos que  $T$  é transitiva topologicamente.

Seja  $x \in [0, 1]$ . Como  $T^n : I \rightarrow [0, 1]$  é sobrejetora, existem  $a, b \in I$  tais que  $T^n(a) = 0$  e  $T^n(b) = 1$ . Se  $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ , então  $|T^n(x) - T^n(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$  e se  $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ , então  $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$ . Observando que  $|x - a| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e  $|x - b| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , concluímos que  $T$  depende sensivelmente das condições iniciais.  $\square$

**Teorema 2.19.** *Se  $\mu = 4$ , então  $F$  é caótica.*

*Demonstração.* Basta observar que  $F \circ \tau = \tau \circ T$ , onde  $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é o homeomorfismo dado por  $\tau(x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$ .  $\square$

## 2.5 Dinâmica Simbólica

**Definição 2.20.**  $\Sigma_2 = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) : s_j \in \{0, 1\} \text{ para todo } j \geq 0\}$  é o espaço das sequências de 0 e 1.

**Proposição 2.21.** *A função  $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por*

$$d(s, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_j - t_j|}{2^j},$$

*é uma distância em  $\Sigma_2$ .*

**Proposição 2.22.** *Sejam  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  e  $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$  elementos de  $\Sigma_2$ .*

1. *Se  $s_j = t_j$  para todo  $0 \leq j \leq n$ , então  $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$ .*
2. *Se  $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$ , então  $s_j = t_j$  para todo  $0 \leq j \leq n$ .*



*Demonstração.* Suponha que  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ . Desse modo,

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

Por outro lado, se  $s_i \neq t_i$  para algum  $0 \leq i \leq n$ , então

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n}$$

Portanto, se  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ , concluímos que  $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$ .  $\square$

**Definição 2.23.** A função  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , dada por  $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ , é chamada de *função shift*.

**Proposição 2.24.**  $\sigma$  é contínua.

*Demonstração.* Sejam  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Se  $t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$  e  $d(s, t) < \frac{1}{2^{n+1}}$ , então  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n+1$ , de acordo com a Proposição 2.22. Como  $\sigma(s) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$  e  $\sigma(t) = (t_1 t_2 t_3 \dots)$ , temos que as primeiras  $n+1$  entradas de  $\sigma(s)$  e  $\sigma(t)$  são iguais. Novamente, utilizando a Proposição 2.22, temos que  $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Como  $s$  é um ponto arbitrário em  $\Sigma_2$ , concluímos que  $\sigma$  é contínua.  $\square$

**Proposição 2.25.** 1. existem  $2^n$  pontos periódicos de período  $n$ .

2. existe um ponto cuja órbita é densa.

3. o conjunto dos pontos periódicos é denso.

*Demonstração.* 1. Se  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  é um ponto periódico com período  $n$ , então

$$\sigma^k(\sigma^n(s)) = (s_{n+k} s_{n+k+1} s_{n+k+2} \dots) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots) = \sigma^k(s)$$

para todo  $k \geq 0$ . Desse modo,  $s$  é formado pela repetição das entradas  $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ . Pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem  $2^n$  sequências distintas para  $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$  e, portanto, a afirmação está provada.

2. Considere o ponto  $s^* = (0 1 00 01 10 11 000 001 \dots)$  formado por todos os blocos de tamanho 1, depois por todos os blocos de tamanho 2, e assim sucessivamente.

Sejam  $s \in \Sigma_2$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . É fácil ver que existe  $k \geq 0$  de modo que  $\sigma^k(s^*)$  e  $s$  são iguais nas primeiras  $n+1$  entradas. De acordo com a Proposição 2.22,  $d(s, \sigma^k(s^*)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e, portanto, a afirmação está provada.

3. Sejam  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Considere o ponto periódico  $t$  com período  $n+1$  formado pela repetição da sequência  $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$ . De acordo com a Proposição 2.22,  $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e, portanto, a afirmação está provada.  $\square$

### 3 Teorema de Sharkovsky

Ao longo dessa seção, consideraremos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Além disso, escreveremos  $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_n$  quando  $J_0, J_1, \dots, J_n$  são intervalos fechados e  $f(J_k) \supset J_{k+1}$  para todo  $0 \leq k < n$ .

**Lema 3.1.** *Se  $J_0 \longrightarrow J_1$ , então existe um intervalo fechado  $J'_0 \subset J_0$  tal que  $f(J'_0) = J_1$ .*

*Demonstração.* Sejam  $p, q \in [a, b]$  tais que  $f(p) = c$  e  $f(q) = d$ , onde  $J_0 = [a, b]$  e  $J_1 = [c, d]$ . Se  $p \leq q$ , definimos  $b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\}$  e  $a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$  e, pela continuidade de  $f$ , podemos concluir que  $f(J'_0) = J_1$ , onde  $J'_0 = [a', b']$ . Se  $q \leq p$ , a demonstração é análoga.  $\square$

**Lema 3.2.** *Se  $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow J_0$ , então existe  $p \in J_0$  tal que as seguintes condições são válidas:*

1.  $f^k(p) \in J_k$  para todo  $1 \leq k < n$ .
2.  $f^n(p) = p$ .

*Demonstração.* Pelo Lema anterior, podemos construir uma sequência de intervalos fechados  $J'_0, J'_1, \dots, J'_{n-1}$  com as seguintes propriedades:

- a.  $J_0 \supset J'_0 \supset J'_1 \supset \cdots \supset J'_{n-1}$ .
- b.  $f^k(J'_{k-1}) = J_k$  para todo  $1 \leq k < n$ .
- c.  $f^n(J'_{n-1}) = J_0$ .

Desse modo, existe  $p \in J'_{n-1}$  tal que  $f^n(p) = p$ . Em particular,  $p \in J_0$  e  $f^k(p) \in J_k$  para todo  $1 \leq k < n$ .  $\square$

**Teorema 3.3.** *Se  $\text{Per}_3(f) \neq \emptyset$  e  $n \geq 1$ , então  $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Sejam  $p_1 < p_2 < p_3$  os pontos da órbita de um elemento de  $\text{Per}_3(f)$  e suponha que  $f(p_1) = p_2$  e  $f(p_2) = p_3$ . Se  $f(p_1) = p_3$  e  $f(p_3) = p_2$ , a demonstração é análoga. Definindo  $J_0 = [p_1, p_2]$  e  $J_1 = [p_2, p_3]$ , temos que  $J_0 \longrightarrow J_1$ ,  $J_1 \longrightarrow J_0$  e  $J_1 \longrightarrow J_1$ . Com isso, podemos demonstrar as seguintes afirmações:

- a)  $\text{Per}_1(f) \neq \emptyset$ .

De fato,  $J_1 \longrightarrow J_1$  implica que existe  $p \in J_1$  tal que  $f(p) = p$ .

- b)  $\text{Per}_2(f) \neq \emptyset$ .

De fato,  $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_0$  implica que existe  $p \in J_0$  tal que  $f(p) \in J_1$  e  $f^2(p) = p$ . Se  $f(p) = p$ , então  $p \in J_0 \cap J_1$ , o que é um absurdo pois  $J_0 \cap J_1 = \{p_2\}$  e  $p_2 \in \text{Per}_3(f)$ .

- c)  $\text{Per}_4(f) \neq \emptyset$ .

De fato,  $J_1 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_1 \longrightarrow J_0 \longrightarrow J_1$  implica que existe  $p \in J_1$  tal que  $f^k(p) \in J_1$  para todo  $1 \leq k < 3$ ,  $f^3(p) \in J_0$  e  $f^4(p) = p$ . Se  $f^3(p) = p$ , então  $p \in J_0 \cap J_1$ , o que é

um absurdo pois  $J_0 \cap J_1 = \{p_2\}$  e  $f^2(p_2) = p_1 \notin J_1$ . Se  $f^k(p) = p$  para algum  $1 \leq k < 3$ , então  $f^k(p) \in J_1$  para todo  $k \geq 1$ . Em particular,  $f^3(p) \in J_0 \cap J_1 = \{p_2\}$  e, portanto,  $f^4(p) = p = p_3$ , o que é um absurdo pois  $f(p_3) = p_1 \notin J_1$ .

Por fim, podemos demonstrar de maneira análoga à última afirmação que  $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$  para todo  $n \geq 4$ .  $\square$

**Definição 3.4** (Ordenação de Sharkovsky).

$$3 \triangleright 5 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

**Teorema 3.5** (Sharkovsky). *Se  $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$  e  $n \triangleright m$ , então  $\text{Per}_m(f) \neq \emptyset$ .*

**Teorema 3.6.** *Se  $n \geq 1$ , então existe uma função  $f$  com as seguintes propriedades:*

1.  $\text{Per}_n f \neq \emptyset$ .
2.  $\text{Per}_m f = \emptyset$  para todo  $m \triangleright n$ .

*Demonstração.* Seja  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a função dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

e considere a família de funções  $T_h(x) = \min\{h, T(x)\}$  definidas em  $[0, 1]$ , onde o parâmetro  $h$  varia em  $[0, 1]$ .

Inicialmente, observe que  $T(x) \leq 1$  para todo  $x \in [0, 1]$  implica que  $T_1 = T$ . Além disso, é possível provar por indução que  $T_1$  possui  $2^k$  pontos periódicos de período  $k$  para todo  $k \geq 1$ . Desse modo, podemos definir

$$h(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } k \text{ de } T_1\}\}$$

para todo  $k \geq 1$ . A ideia principal da prova consiste no fato de que  $h(k)$  desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de  $T_{h(k)}$ . As seguintes afirmações tornarão preciso esse fato:

- a) Se  $\mathcal{O} \subset [0, h)$  é uma órbita de  $T_h$ , então  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_1$ .  
Se  $p \in \mathcal{O}$ , então  $T_h(p) \in [0, h)$ . Desse modo,  $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$ . Assim,  $T_h$  e  $T_1$  coincidem em  $\mathcal{O}$  e, portanto,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_1$ .
- b) Se  $\mathcal{O} \subset [0, h]$  é uma órbita de  $T_1$ , então  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_h$ .  
Se  $p \in \mathcal{O}$ , então  $T_1(p) \in [0, h]$ . Desse modo,  $T_h(p) = \min\{h, T_1(p)\} = T_1(p)$ . Assim,  $T_h$  e  $T_1$  coincidem em  $\mathcal{O}$  e, portanto,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_h$ .
- c)  $T_{h(k)}$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \subset [0, h(k))$  de tamanho  $j$  se, e somente, se  $h(k) > h(j)$ .  
Se  $T_{h(k)}$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \subset [0, h(k))$  de tamanho  $j$ , então  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_1$  e, pela definição de  $h(j)$ , concluímos que  $h(k) > h(j)$ . Por outro lado, se  $h(k) > h(j)$ , então  $T_1$

possui uma órbita  $\mathcal{O} \subset [0, h(j)] \subset [0, h(k)]$  de tamanho  $j$  e, desse modo,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_{h(k)}$ .

- d) A órbita de  $T_1$  que contém  $h(k)$  é uma órbita de tamanho  $k$  de  $T_{h(k)}$ . Além disso, todas as outras órbitas de  $T_{h(k)}$  estão em  $[0, h(k))$ .

Pela definição de  $h(k)$ ,  $T_1$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \subset [0, h(k)]$  de tamanho  $k$  e, portanto,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_{h(k)}$ .

Na segunda parte, basta observar que  $h(k)$  é o valor máximo de  $T_{h(k)}$  e, desse modo, toda órbita de  $T_{h(k)}$  está contida em  $[0, h(k)]$ . Em particular, se a órbita não contém  $h(k)$ , então ela está contida em  $[0, h(k))$ .

- e)  $k \triangleright j$  se, e somente se,  $h(k) > h(j)$ .

Suponha que  $k \triangleright j$ . Sabemos que  $T_{h(k)}$  possui uma órbita de tamanho  $k$  e, pelo Teorema de Sharkovsky,  $T_{h(k)}$  admite uma órbita de tamanho  $j$ . Em particular, essa órbita está contida em  $[0, h(k))$  e, portanto,  $h(k) > h(j)$ .

Suponha que  $h(k) > h(j)$ . Se  $j \triangleright k$ , então  $h(k) < h(j)$  pela demonstração no parágrafo anterior e, portanto,  $k \triangleright j$ .

Desse modo,  $T_{h(n)}$  possui órbita de tamanho  $n$  para cada  $n \geq 1$ . Além disso, se  $m \triangleright n$  então  $h(m) > h(n)$  e, portanto,  $T_{h(n)}$  não possui órbita de tamanho  $m$ .  $\square$

## 4 Derivada de Schwarz

**Definição 4.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^3$ . A função  $\mathcal{S}f$  dada por

$$(\mathcal{S}f)(x) = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial f(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial f(x)} \right)^2$$

para todo  $x$  tal que  $\partial f(x) \neq 0$  é a derivada de Schwarz de  $f$ .

**Lema 4.2.** Se  $\mathcal{S}f < 0$ , então  $\mathcal{S}f^k < 0$  para todo  $k \geq 1$ .

*Demonstração.* Pela Regra da Cadeia, podemos concluir que  $\mathcal{S}f^2(x) < 0$  para todo  $x$  tal que  $\partial f^2(x) \neq 0$ . Por indução,  $\mathcal{S}f^k < 0$  para todo  $k \geq 1$ .  $\square$

**Lema 4.3.** Se  $\mathcal{S}f < 0$  e  $x_0$  é um ponto de mínimo local de  $\partial f$ , então  $\partial f(x_0) \leq 0$ .

*Demonstração.* Se  $\partial f(x_0) \neq 0$ , então  $\mathcal{S}f(x_0) = \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial f(x_0)} - \frac{3}{2} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial f(x_0)} < 0$ . Sendo  $x_0$  ponto de mínimo local de  $\partial f$ , temos que  $\partial^2 f(x_0) = 0$  e  $\partial^3 f(x_0) \geq 0$ . Portanto,  $\partial f(x_0) < 0$ .  $\square$

**Lema 4.4.** Se  $\mathcal{S}f < 0$  e  $a < b < c$  são pontos fixos de  $f$ , com  $\partial f(b) \leq 1$ , então  $f$  possui ponto crítico em  $(a, c)$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema do Valor Médio, existem  $r \in (a, b)$  e  $s \in (b, c)$  tais que  $\partial f(r) = \partial f(s) = 1$ . Sendo  $\partial f$  contínua,  $\partial f$  restrita ao intervalo  $[r, s]$  possui mínimo global. Como  $b \in (r, s)$  e  $\partial f(b) \leq 1$ , temos que  $\partial f$  possui mínimo local em  $(r, s)$ . Utilizando Lema anterior e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída.  $\square$

**Lema 4.5.** Se  $\mathcal{S}f < 0$  e  $a < b < c < d$  são pontos fixos de  $f$ , então  $f$  possui ponto crítico em  $(a, d)$ .

*Demonstração.* Se  $\partial f(b) \leq 1$  ou  $\partial f(c) \leq 1$ , o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se  $\partial f(b) > 1$  e  $\partial f(c) > 1$ , existem  $r, t \in (b, c)$  tais que  $r < t$ ,  $f(r) > r$  e  $f(t) < t$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $s \in (r, t)$  tal que  $\partial f(s) < 1$ . Portanto,  $\partial f$  possui mínimo local em  $(b, c)$ . Utilizando Lema 4.3 e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída.  $\square$

**Lema 4.6.** Se  $f$  possui finitos pontos críticos, então  $f^n$  possui finitos pontos críticos para todo  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema do Valor Médio,  $f$  possui ponto crítico entre dois elementos de  $f^{-1}(c)$ . Como  $f$  possui finitos pontos críticos,  $f^{-1}(c)$  é finito. Além disso, se  $f^{-k}(c)$  é finito, então  $f^{-(k+1)}(c) = \{x \in \mathbb{R} : f(f^k(x)) = c\}$  é finito pois  $f^{-1}(c)$  é finito e, por hipótese de indução,  $f^{-k}(c_i)$  é finito para cada  $c_i \in f^{-1}(c)$ . Portanto,  $f^{-n}(c)$  é finito para todo  $n \geq 1$ .

Temos que  $(f^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \partial f(f^k(x)) = 0$  se e somente se  $f^k(x)$  é ponto crítico de  $f$  para algum  $k = 1, \dots, n-1$ . Assim, o conjunto de pontos críticos de  $f^n$  é finito pois é dado pela união dos conjuntos  $\cup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(c_i)$ , onde  $c_i$  é ponto crítico de  $f$ .  $\square$

Observe que o Lema anterior, ao contrário dos outros, não exige que  $\mathcal{S}f < 0$ .

**Teorema 4.7** (Singer). Se  $\mathcal{S}f < 0$  e  $f$  possui  $n$  pontos críticos, então  $f$  possui no máximo  $n+2$  órbitas periódicas não repulsoras.

*Demonstração.* Sejam  $p$  um ponto periódico não repulsor de  $f$  de período  $m$  e  $g = f^m$ . Desse modo,  $p$  é um ponto fixo não repulsor de  $g$ , ou seja,  $g(p) = p$  e  $|g'(p)| \leq 1$ . Seja  $K$  a componente conexa de  $B(p) = \{x : \lim_{k \rightarrow \infty} g^k(x) = p\}$  que contém  $p$ .

Suponha que  $K$  é limitado e  $|g'(p)| < 1$ . Vamos mostrar que  $K$  é aberto,  $g(K) \subset K$  e  $g$  preserva os pontos extremos de  $K$ .

Como  $|g'(p)| < 1$ ,  $p$  é um ponto atrator e, portanto, existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  contida em  $B(p)$ . Além disso,  $g(\bar{V}) \subset V$ . Sendo  $g$  contínua,  $g^{-n}(V)$  é um aberto que contém  $p$  para todo  $n \geq 1$ . Como  $g^n(p) = p \in V$ , considere  $g^{-n}(V)^*$  a componente conexa de  $g^{-n}(V)$  que contém  $p$ .

Observe que, se  $x \in K$ , existe  $n \geq 1$  tal que  $g^n(x) \in V$ . Desse modo, podemos escrever  $K = \cup_{n=0}^{\infty} g^{-n}(V)^*$ . Portanto,  $K$  é aberto e, por construção,  $g(K) \subset K$ .

Seja  $a$  um ponto extremo de  $K$  e suponha que  $g(a) \in K$ . Desse modo, existe uma vizinhança  $V$  de  $g(a)$  contida em  $K$ . Sendo  $g$  contínua,  $g^{-1}(V)$  é uma vizinhança de  $a$  contida em  $B(p)$ , o que contraria o fato de  $K$  ser a componente conexa de  $B(p)$  que contém  $p$ . Como  $g(K) \subset K$  e  $g$  é contínua, concluímos que  $g$  preserva os pontos extremos de  $K$ .

Desse modo, escrevendo  $K = (a, b)$ , ocorre um dos três casos abaixo. Vamos mostrar que em cada caso,  $g$  possui ponto crítico em  $K$ . Observe que  $\mathcal{S}g < 0$ .

- a) Se  $g(a) = a$  e  $g(b) = b$ ,  $g$  possui ponto crítico em  $K$  pelo Lema 4.4.
- b) Se  $g(a) = b$  e  $g(b) = a$ , considerando  $h = g^2$  e utilizando novamente o Lema 4.4,  $h$  possui ponto crítico em  $K$ . Como  $g(K) \subset K$ ,  $g$  possui ponto crítico em  $K$ .

c) Se  $g(a) = g(b)$ ,  $g$  possui ponto crítico em  $K$  pelo Teorema do Valor Médio.

Suponha que  $K$  é limitado e  $|g'(p)| = 1$ . Pelo Lema anterior,  $g$  possui finitos pontos fixos e, portanto, são isolados.

Se  $g'(p) = 1$  e, para  $x$  numa vizinhança de  $p$ ,  $g(x) > x$  quando  $x > p$  e  $g(x) < x$  quando  $x < p$ , então  $g'(x^*) > 0$ , para  $x^*$  próximo de  $p$ , é um mínimo local de  $g'$  maior que zero, o que contradiz o Lema 4.3. Se  $g'(p) = -1$ , basta considerar  $h = g^2$  e obter o mesmo resultado. Portanto,  $p$  é atrator em pelo menos um dos lados. Desse modo,  $K$  é um intervalo não trivial,  $g(K) \subset K$  e  $g$  preserva os pontos extremos de  $K$ . Assim, é possível concluir de maneira análoga que  $g$  possui ponto crítico em  $K$ .

Pela Regra da Cadeia, se  $g$  possui ponto crítico  $x_0 \in K$ , então  $f^i(x_0)$  é ponto crítico de  $f$  para algum  $i = 0, \dots, m-1$ . Desse modo, se  $p$  é um ponto periódico não repulsor de  $f$  cujo intervalo associado  $K$  é limitado, então  $K$  possui pelo menos um ponto crítico e, como existem  $n$  pontos críticos, existem no máximo  $n$  intervalos  $K$  limitados. Não é possível obter a mesma conclusão se  $K$  não é limitado, mas observando que existem no máximo dois intervalos desse tipo, a demonstração está concluída.  $\square$

**Corolário 4.8.**  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ ,  $\mu > 0$ , possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.

*Demonstração.* Observe que  $F_\mu$  possui um único ponto crítico em  $\frac{1}{2}$ . Pelo Teorema de Singer,  $F_\mu$  possui no máximo 3 órbitas periódicas não repulsoras. Se  $p$  é ponto fixo de  $F_\mu$  e observando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |F_\mu^n(x)| = \infty$  quando  $|x|$  é suficientemente grande, concluímos que  $B(p)$  é limitado. Portanto,  $F_\mu$  possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.  $\square$

## 5 Bifurcação

Ao longo de seção,  $f_\lambda$  representará uma família parametrizada de funções no parâmetro  $\lambda$  de modo que a função

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x),$$

definida num aberto de  $\mathbb{R}^2$ , seja de classe  $\mathcal{C}^\infty$  nas variáveis  $x$  e  $\lambda$ .

**Teorema 5.1.** *Seja  $f_\lambda$  uma família parametrizada de funções. Suponha que*

1.  $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$
2.  $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$

*Então existem vizinhanças  $I$  e  $J$  de  $\lambda_0$  e  $x_0$ , respectivamente, e uma função  $p : I \rightarrow J$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tais que*

1.  $p(\lambda_0) = x_0$
2.  $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$  para todo  $\lambda \in I$

*Além disso,  $f_\lambda$  não possui outros pontos fixos em  $J$ .*

*Demonstração.* Seja  $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$ . Observe que  $x$  é ponto fixo de  $f_\lambda$  se e somente se  $G(x, \lambda) = 0$ .

Pelo Teorema da Função Implícita, como  $G(x_0, \lambda_0) = 0$  e

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0,$$

existem vizinhanças  $I$  e  $J$  de  $\lambda_0$  e  $x_0$ , respectivamente, e uma função  $p : I \rightarrow J$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tal que  $p(\lambda_0) = x_0$  e  $G(p(\lambda), \lambda) = 0$  para todo  $\lambda \in I$ .

Além disso, para cada  $\lambda \in I$  está associado um único  $x \in J$  e, portanto,  $x \in J$  e  $G(x, \lambda) = 0$  se e somente se  $x = p(\lambda)$ .  $\square$

De acordo com o Teorema anterior, se  $x_0$  é um ponto fixo hiperbólico de  $f_{\lambda_0}$ , então  $f_\lambda$  possui um único ponto fixo numa vizinhança de  $x_0$  para cada  $\lambda$  numa vizinhança de  $\lambda_0$ .

Utilizando a notação do Teorema anterior, considere a função  $g_\lambda(x) = f_\lambda(x + p(\lambda)) - p(\lambda)$ . Observe que  $g_\lambda(0) = f(p(\lambda)) - p(\lambda) = 0$  para todo  $\lambda \in I$ , ou seja,  $0$  é ponto fixo de  $g_\lambda$  para todo  $\lambda \in I$ . Além disso,  $f_\lambda$  e  $g_\lambda$  são topologicamente conjugadas por  $h_\lambda(x) = x - p(\lambda)$ .

**Teorema 5.2** (Bifurcação Tangente). *Suponha que*

1.  $f_{\lambda_0}(0) = 0$
2.  $f'_{\lambda_0}(0) = 1$
3.  $f''_{\lambda_0}(0) \neq 0$
4.  $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

*Então existem uma vizinhança  $I$  de  $0$  e uma função  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tais que*

1.  $p(0) = \lambda_0$
2.  $f_{p(x)}(x) = x$

*Além disso,  $p'(0) = 0$  e  $p''(0) \neq 0$ .*

*Demonstração.* Considere a função  $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$ . Observe que  $x$  é um ponto fixo de  $f_\lambda$  se e somente se  $G(x, \lambda) = 0$ .

Pelo Teorema da Função Implícita, como  $G(0, \lambda_0) = 0$  e

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0,$$

existem uma vizinhança  $I$  de  $0$  e uma função  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $p(0) = \lambda_0$  e  $G(x, p(x)) = 0$  para todo  $x \in I$ .

Além disso, pela Regra da Cadeia, é válido que

$$p'(0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = -\frac{f'_{\lambda_0}(0) - 1}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)} = 0$$

e

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0) \frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) - \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0) \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \lambda}(0, \lambda_0)}{\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)\right)^2} = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \lambda_0)}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)} \neq 0$$

□

No Teorema anterior, se  $p''(0) > 0$ , então a concavidade de  $p$  é para cima. Esboçando o gráfico de  $p$ , podemos observar que  $f$  não possui pontos fixos para  $\lambda < \lambda_0$ , possui um único ponto fixo para  $\lambda = \lambda_0$  e possui dois pontos fixos para  $\lambda > \lambda_0$ . Se  $p''(0) < 0$ , a concavidade de  $p$  é para baixo e a conclusão é análoga, invertendo os sentidos.

**Teorema 5.3** (Bifurcação com Duplicação de Período). *Suponha que*

1.  $f_{\lambda_0}(0) = 0$  para todo  $\lambda$  numa vizinhança de  $\lambda_0$
2.  $f'_{\lambda_0}(0) = -1$
3.  $\frac{\partial(f_{\lambda}^2)'}{\partial\lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$
4.  $S_{f_{\lambda_0}}(0) \neq 0$

Então existem uma vizinhança  $I$  de 0 e uma função  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tais que

1.  $p(0) = \lambda_0$
2.  $f_{p(x)}(x) \neq x$  para todo  $x \in I$
3.  $f_{p(x)}^2(x) = x$  para todo  $x \in I$

Além disso,  $p'(0) = 0$  e  $p''(0) \neq 0$ .

*Demonstração.* Seja  $G(x, \lambda) = f_{\lambda}^2(x) - x$ . Sendo  $G(0, \lambda) = 0$  para todo  $\lambda$  numa vizinhança de  $\lambda_0$ , temos que

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = 0$$

e, portanto, não podemos utilizar o Teorema da Função Implícita diretamente. Seja

$$H(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{G(x, \lambda)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Desse modo,  $H$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$  e são válidas as igualdades

- (I)  $H(0, \lambda_0) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0) = (f_{\lambda_0}^2)'(0) - 1 = f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(0))f'_{\lambda_0}(0) - 1 = 0$
- (II)  $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) \right) |_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} ((f_{\lambda}^2)'(0) - 1) |_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial(f_{\lambda}^2)'}{\partial \lambda} |_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$
- (III)  $\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)$
- (IV)  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) = \frac{1}{3} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0)$

Para provar as igualdades (III) e (IV), observe que podemos escrever

$$G(x, \lambda) = G(0, \lambda) + x \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda) + \frac{x^3}{6} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda) + \dots$$



para todo  $x$  numa vizinhança de 0 e para  $\lambda$  fixado numa vizinhança de  $\lambda_0$ , utilizando a Série de Taylor. Sendo  $G(0, \lambda) = 0$ , podemos escrever

$$H(x, \lambda) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda) + \frac{x^2}{6} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda) + \dots$$

para  $x \neq 0$  nessa vizinhança. Portanto,  $H$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Escrevendo a Série de Taylor de  $H$  numa vizinhança de 0 e igualando os termos correspondentes, concluímos que  $\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)$  e  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0)$ .

Pelas igualdades (I) e (II), e pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança  $I$  de 0 e uma função  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tais que  $p(0) = \lambda_0$  e  $H(x, p(x)) = 0$  para todo  $x \in I$ . Em particular, se  $x \neq 0$ ,

$$0 = \frac{G(x, p(x))}{x} = \frac{f_{p(x)}^2(x) - x}{x}$$

ou seja,  $f_{p(x)}^2(x) = x$  para todo  $x \in I$ . Além disso, pelo Teorema 5.1,  $f_\lambda$  possui um único ponto fixo numa vizinhança de 0 e, portanto, podemos considerar que  $f_{p(x)}(x) \neq x$  para todo  $x \in I$ ,  $x \neq 0$ .

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0) &= (f_{\lambda_0})''(x)|_{x=0} \\ &= [f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\ &= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)]|_{x=0} \\ &= f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(0)) - f''_{\lambda_0}(0) = 0 \end{aligned}$$

temos que

$$p'(0) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = 0$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0) &= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\ &= [f'''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^3 + 2f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)f''_{\lambda_0}(x) + f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)f''_{\lambda_0}(x) \\ &\quad + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'''_{\lambda_0}(x)]|_{x=0} \\ &= f'''_{\lambda_0}(0)(f'_{\lambda_0}(0))^3 + 2(f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + (f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + f'_{\lambda_0}(0)f'''_{\lambda_0}(0) \\ &= -2f'''_{\lambda_0}(0) - 3(f''_{\lambda_0}(0))^2 \\ &= 2\frac{f'''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)} - 3\left(\frac{f''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)}\right)^2 = 2S_{f_{\lambda_0}}(0) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) \frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)}{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)\right)^2} = -\frac{1}{3} \frac{\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = -\frac{2}{3} \frac{S_{f_{\lambda_0}}(0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} \neq 0.$$

□

## 6 Subshift

Seja  $N \geq 2$ . Definimos o conjunto  $\Sigma_N$  formado pelas sequências de números naturais limitados entre 1 e  $N$ . Precisamente,

$$\Sigma_N = \{(x_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : 1 \leq x_n \leq N \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Definimos também a função  $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \rightarrow \mathbb{R}$  que é dada por

$$d_N(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i},$$

onde  $x = (x_n)_{n=0}^\infty$  e  $y = (y_n)_{n=0}^\infty$ . Como  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} < \infty$ , temos que  $d_N$  está bem definida.

**Proposição 6.1.**  $(\Sigma_N, d_N)$  é um espaço métrico.

*Demonstração.* Se  $x = (x_n)_{n=0}^\infty, y = (y_n)_{n=0}^\infty, z = (z_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ , então

1.  $d_N(x, y) \geq 0$ , pois  $|x_i - y_i| \geq 0$  para todo  $i \geq 0$ .
2.  $d_N(x, y) = d_N(y, x)$ , pois  $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$  para todo  $i \geq 0$ .
3.  $d_N(x, z) \leq d_N(x, y) + d_N(y, z)$ , pois  $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$  para todo  $i \geq 0$ .

Desse modo,  $d_N$  é uma distância em  $\Sigma_N$  e  $(\Sigma_N, d_N)$  é um espaço métrico. □

**Proposição 6.2.** Sejam  $x = (x_n)_{n=0}^\infty, y = (y_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ .

1. Se  $x_i = y_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ , então  $d_N(x, y) \leq \frac{1}{N^k}$ .
2. Se  $d_N(x, y) < \frac{1}{N^k}$ , então  $x_i = y_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ .

*Demonstração.* 1. Se  $x_i = y_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ , então

$$d_N(x, y) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} = \frac{N-1}{N^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{N-1}{N^{k+1}} \frac{N}{N-1} = \frac{1}{N^k}.$$

2. Se  $x_j \neq y_j$  para algum  $0 \leq j \leq k$ , então

$$d_N(x, y) \geq \frac{1}{N^j} \geq \frac{1}{N^k}.$$

□

Definimos a função shift  $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$  que é dada por  $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^\infty$  para todo  $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ , isto é,  $\sigma(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$ .

**Proposição 6.3.**  $\sigma$  é contínua.

*Demonstração.* Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ . Seja  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$  e defina  $\delta = \frac{1}{N^{k+1}}$ .

Pela Proposição anterior, se  $y = (y_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$  e  $d_N(x, y) < \delta$ , então  $x_i = y_i$  para todo  $i = 0, \dots, k+1$ . Desse modo,  $\sigma(x)$  e  $\sigma(y)$  coincidem nas  $k$  primeiras entradas. Utilizando a Proposição anterior novamente, concluímos que  $d_N(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$ .  $\square$

Seja  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  uma matriz quadrada de ordem  $N$  tal que  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  para todo  $1 \leq i, j \leq N$ . Dizemos que  $A$  é uma matriz de transição. Definimos o conjunto  $\Sigma_A$  como

$$\Sigma_A = \{(x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N : a_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \geq 0\}.$$

Seja  $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_A$ . Observando que  $a_{x_i x_{i+1}} = 1$  para todo  $i \geq 1$ , temos que  $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^\infty \in \Sigma_A$ . Desse modo, podemos definir a função  $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  como sendo a restrição de  $\sigma$  em  $\Sigma_A$ . Dizemos que  $\sigma_A$  é o subshift definido por  $A$ .

**Proposição 6.4.**  $\Sigma_A$  é um subconjunto fechado de  $\Sigma_N$ .

*Demonstração.* Seja  $(x_n)_{n=0}^\infty$  uma sequência de elementos em  $\Sigma_A$  convergente para  $x = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ . Observe que a sequência  $(x_n)_{n=0}^\infty$  é uma sequência de sequências, pois cada  $x_n$  é elemento de  $\Sigma_N$ .

Suponha que  $x \notin \Sigma_A$ . Então, existe  $j \geq 0$  tal que  $a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$ . Por outro lado, pela definição de convergência, existe  $n_0 \geq 0$  tal que  $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{j+1}}$  e, portanto, as  $j+2$  primeiras entradas de  $x$  e  $x_{n_0}$  são iguais. Escrevendo  $x_{n_0} = (\eta_n)_{n=0}^\infty$ , concluímos que  $a_{\eta_j \eta_{j+1}} = a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$ . Absurdo, pois  $x_{n_0} \in \Sigma_A$ .  $\square$

No restante dessa seção vamos estudar a dinâmica da função quadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ , onde o parâmetro  $\mu = 3.839$  está fixado. Será omitido  $\mu$  na notação da função e escreveremos apenas  $F$ .

Sejam  $a = 0.149888$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Através de cálculos é possível mostrar que  $F^3(I) \subset I$  e  $|(F^3)'(I)| \leq |(F^3)'(a - \varepsilon)| < 1$  e, portanto, o intervalo  $I$  possui um ponto periódico atrator de  $F$  de período 3. Se  $a_1, a_2$  e  $a_3$  são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$a_1 \simeq 0.149888, a_2 \simeq 0.489149 \text{ e } a_3 \simeq 0.959299.$$

De acordo com o Teorema de Sharkovsky,  $F$  possui infinitos pontos periódicos. Além disso, de acordo com o Teorema de Singer, essa é a única órbita atratora de  $F$ .

De modo análogo, concluímos que  $F$  possui outra órbita de tamanho 3. Se  $b_1, b_2$  e  $b_3$  são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040, b_2 \simeq 0.539247 \text{ e } b_3 \simeq 0.953837.$$

Observando o gráfico de  $F^3$ , concluímos que para cada  $b_i$ , existe  $b'_i$  no lado oposto de  $b_i$  em relação ao ponto  $a_i$  tal que  $F^3(b'_i) = b_i$ . Defina  $A_1 = (b'_1, b_1)$ ,  $A_2 = (b'_2, b_2)$  e  $A_3 = (b_3, b'_3)$ . Cada  $A_i$  é exatamente o intervalo maximal contendo  $a_i$  utilizado na demonstração do Teorema de Singer.

**Figura:** Gráfico de  $F^3$  com os pontos  $a_1, a_2$  e  $a_3$  assinalados.

Sendo  $F^3$  simétrica em relação ao ponto  $\frac{1}{2}$ , temos que  $F(b'_2) = F(b_2) = b_3$ . Além disso,  $F(b'_1) = b'_2$  e  $F(b'_3) = b'_1$ .

Desse modo,  $F$  mapeia, de forma monótona,  $A_1$  em  $A_2$  e  $A_3$  em  $A_1$ . Observando que o máximo de  $F$  em  $A_2$  é  $F(\frac{1}{2}) = 0.95975 < b'_3$ , concluímos que  $F(A_2) \subset A_3$ .

Sabemos que se  $x \notin [0, 1]$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = -\infty$ . Além disso, o único ponto periódico de  $A_i$  é  $a_i$  e todos os pontos em  $A_i$  tendem para a órbita de  $a_i$ . Desse modo, todos os outros pontos periódicos de  $F$  residem no complemento de  $A_1 \cup A_2 \cup A_3$  em  $[0, 1]$ , que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam  $I_0 = [0, b'_1]$ ,  $I_1 = [b_1, b'_2]$ ,  $I_2 = [b_2, b_3]$  e  $I_3 = [b'_3, 1]$  tais intervalos. A Proposição a seguir nos permite dizer mais.

**Proposição 6.5.** *Se  $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$  é um ponto periódico de  $F$ , então  $x \in I_1 \cup I_2$ .*

*Demonstração.* Observando que  $F$  é monótona em cada  $I_k$ , temos que  $F(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$ ,  $F(I_1) = I_2$ ,  $F(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$  e  $F(I_3) = I_0$ . Desse modo, se  $x \in I_1 \cup I_2$  é periódico, então órbita de  $x$  permanece em  $I_1 \cup I_2$ .

Por outro lado, se  $x \in I_0 - \{0\}$ , existe um menor  $n \geq 1$  tal que  $F^n(x) \notin I_0$ . Se  $F^n(x) \in A_1$ , então  $x$  não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de  $A_1$  é  $a_1$ . Se  $F^n(x) \in I_1$ , então  $x$  não pode ser periódico, pois caso contrário a órbita de  $x$  estaria contida em  $I_1 \cup I_2$  e nunca retornaria para  $I_0$ .

Finalmente, se  $x \in I_3$ , então  $F(x) \in I_0$  e a análise segue como no parágrafo anterior.  $\square$

Defina o conjunto  $\Lambda$  como

$$\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2 : F^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de  $F$  estão em  $\Lambda$ , com exceção dos pontos  $0, a_1, a_2$  e  $a_3$ .

**Lema 6.6.** *Existe  $N \geq 1$  tal que  $|(F^n)'(\Lambda)| > 1$  para todo  $n \geq N$ .*

*Demonstração.* Como  $F'' < 0$ , temos que  $F'$  é estritamente decrescente. Sendo  $F'(\frac{1}{2}) = 0$ , concluímos que  $A_2$  é uma vizinhança da única raiz de  $F'$ . Além disso,  $|(F^3)'(b_2)| = |(F^3)'(b'_2)| \simeq 0.3$ . Desse modo,  $|F'(I_1 \cup I_2)| \geq \nu$  para algum  $\nu \in (0, 1)$ .

Observando o gráfico de  $F^3$ , concluímos que o subconjunto de  $I_1 \cup I_2$  no qual  $|F'| \leq 1$  é formado por três intervalos fechados. Sejam  $B_1, B_2$  e  $B_3$  tais intervalos, numerados da esquerda para direita. Utilizando a simetria do gráfico de  $F^3$  e o fato de que  $(F^3)'(b_1) > 1$ , temos que  $F^3(B_3) \subset A_1$  e, portanto,  $B_3 \cap \Lambda = \emptyset$ .

Por outro lado,  $B_2 \subset [0.661, 0.683]$ , já que  $(F^3)'(0.661) > 1$  e  $(F^3)'(0.683) < -1$ . Desse modo,  $F(B_2) \subset A_3$ . Utilizando novamente a simetria do gráfico de  $F^3$ , concluímos que  $F(B_1) \subset A_3$ . Portanto,  $B_1 \cap \Lambda = \emptyset$  e  $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$ . Assim,  $|(F^3)'(\Lambda)| \geq \lambda$  para algum  $\lambda > 1$ . Observe que se  $x \in \Lambda$  e  $L \geq 1$ , então

$$\left| (F^{3L})'(x) \right| = \prod_{i=0}^{L-1} \left| (F^3)'(F^{3i}(x)) \right| \geq \lambda^L.$$

Finalmente, sejam  $x \in \Lambda$  e  $K \geq 1$  tal que  $\nu^2 \lambda^K > 1$ . Se  $N = 3K$  e  $n \geq N$ , podemos escrever  $n = 3L + \alpha$ , onde  $L \geq K$  e  $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ . Desse modo,

i. se  $\alpha = 0$ , então

$$|(F^n)'(x)| = |(F^{3L})'(x)| \geq \lambda^L \geq \lambda^K > 1.$$

ii. se  $\alpha = 1$ , então

$$|(F^n)'(x)| = |F'(F^{3L}(x))| |(F^{3L})'(x)| \geq \nu \lambda^L > \nu^2 \lambda^K > 1.$$

iii. se  $\alpha = 2$ , então

$$|(F^n)'(x)| = |F'(F^{3L+1}(x))| |F'(F^{3L}(x))| |(F^{3L})'(x)| \geq \nu^2 \lambda^L \geq \nu^2 \lambda^K > 1.$$

□

Para as demonstrações dos próximos resultados, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos definir a função  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_A$  por  $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$ , onde  $x_i = 1$  se  $F^i(x) \in I_1$  e  $x_i = 2$  se  $F^i(x) \in I_2$  para todo  $i \geq 0$ . Observe que está  $S$  bem definida, pois  $F(I_1) = I_2$  e  $F(I_2) \subset I_1 \cup I_2$  e, portanto,  $a_{x_i x_{i+1}} = 1$  para todo  $i \geq 0$ .

**Lema 6.7.**  $\Lambda$  não contém intervalos.

*Demonstração.* Suponha que  $\Lambda$  contém algum intervalo e sejam  $a, b \in \Lambda$ , com  $a < b$ , tais que  $[a, b] \subset \Lambda$ . Utilizando a notação do Lema anterior, seja  $k \geq N$  tal que  $(b-a)\nu^N \lambda^{k-N} > 1$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$\begin{aligned} |F^k(b) - F^k(a)| &= |(F^k)'(c)|(b-a) \\ &= \left| \prod_{i=0}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| (b-a) \\ &= \left| \prod_{i=0}^{N-1} F'(F^i(c)) \right| \left| \prod_{i=N}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| (b-a) \\ &\geq \nu^N \lambda^{k-N} (b-a) > 1 \end{aligned}$$

e, portanto,  $F^k(a)$  ou  $F^k(b)$  não é elemento de  $[0, 1]$ , o que é um absurdo. □

**Proposição 6.8.**  $S$  é um homeomorfismo.

*Demonstração.* i.  $S$  é injetora:

Sejam  $x, y \in \Lambda$ , com  $x < y$ , e suponha que  $S(x) = S(y)$ . Desse modo,  $F^n(x)$  e  $F^n(y)$  está no mesmo lado em relação ao ponto crítico  $\frac{1}{2}$  e, portanto,  $F$  é monótona no intervalo  $J_n$ , cujos pontos extremos são  $F^n(x)$  e  $F^n(y)$ , para todo  $n \geq 0$ . Desse modo, se  $z \in [x, y]$ , então  $F^n(z) \in J_n \subset I_1 \cup I_2$  para todo  $n \geq 0$  e, portanto,  $z \in \Lambda$ . Mas isso implica que  $[x, y] \subset \Lambda$ , o que é um absurdo.

ii.  $S$  é sobrejetora:

Seja  $(x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_A$ . Vamos provar que existe  $x \in \Lambda$  tal que  $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$ .

Inicialmente, para cada  $n \geq 0$ , considere

$$I_{x_0 \dots x_n} = \{x \in [0, 1] : x \in I_{x_0}, \dots, F^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

Observe que  $x \in I_{x_0 \dots x_n}$  se, e somente se,  $x \in I_{x_0}$  e  $F(x) \in \{y \in [0, 1] : y \in I_{x_1}, \dots, F^{n-1}(y) \in I_{x_n}\}$ . Desse modo,  $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1 \dots x_n})$ .

Assim, por indução, é possível concluir que  $I_{x_0 \dots x_n}$  é um intervalo fechado não vazio. Além disso,  $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0 \dots x_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{x_n}) \subset I_{x_0 \dots x_{n-1}}$ .

Desse modo,  $(I_{x_0 \dots x_n})_{n=0}^\infty$  é uma sequência de intervalos encaixantes fechados e não vazios e, portanto, existe  $x \in \bigcap_{n=0}^\infty I_{x_0 \dots x_n}$ . Como  $F^i(x) \in I_{x_i}$  para todo  $i \geq 0$ , concluímos que  $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$ . Observe que  $x \in \bigcap_{n=0}^\infty I_{x_0 \dots x_n}$  é único, pois  $S$  é injetora.

iii.  $S$  é contínua:

Seja  $x \in \Lambda$ , com  $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$ . Sejam também  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$ .

Como  $I_{x_0 \dots x_k}$  um intervalo fechado e  $x \in I_{x_0 \dots x_k}$ , tome  $\delta > 0$  tal que  $y \in \Lambda$  e  $|x - y| < \delta$  implica que  $y \in I_{x_0 \dots x_k}$ . Desse modo,  $S(x)$  e  $S(y)$  são iguais nas primeiras  $k + 1$  entradas e, portanto,  $d_N(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$ .

□

**Teorema 6.9.**  $S \circ F|_\Lambda = \sigma_A \circ S$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \Lambda$ . Utilizando a notação da Proposição anterior, se  $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$ , então  $x$  é o único elemento de  $\bigcap_{n=0}^\infty I_{x_0 \dots x_n}$ .

Podemos escrever  $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1}) \cap \dots \cap F^{-n}(I_{x_n})$ . Se  $x_0 = 1$ , então  $x_1 = 2$  e, portanto,  $F(I_{x_0}) = I_{x_1}$ . Se  $x_0 = 2$ , então  $F(I_{x_0}) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$ . Em ambos os casos,  $F(I_{x_0}) \supset I_{x_1}$  e, desse modo,

$$F(I_{x_0 \dots x_n}) = I_{x_1} \cap \dots \cap F^{-n+1}(I_{x_n}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S \circ F|_\Lambda(x) &= S(F(\bigcap_{n=0}^\infty I_{x_0 \dots x_n})) \\ &= S(\bigcap_{n=1}^\infty I_{x_1 \dots x_n}) \\ &= (x_n)_{n=1}^\infty = \sigma \circ S(x) \end{aligned}$$

□

**Proposição 6.10.** *Seja  $A$  uma matriz de transição de ordem  $N$ . Então  $\sigma_A$  possui  $\text{Tr}(A^k)$  pontos periódicos de período  $k$ .*

*Demonstração.* Observe que  $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$  é um ponto periódico de período  $k$  de  $\sigma$  se, e somente se,  $x_i = x_{i+k}$  para todo  $i \geq 0$ , ou seja,

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \dots).$$

Desse modo,  $x \in \Sigma_A$  se, e somente se,  $a_{x_0x_1} = a_{x_1x_2} = \dots = a_{x_{k-1}x_0} = 1$  e, portanto,

$$\begin{cases} a_{x_0x_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}x_0} = 1, & \text{se } x \in \Sigma_A \\ a_{x_0x_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}x_0} = 0, & \text{se } x \notin \Sigma_A \end{cases}$$

Assim, a quantidade de pontos periódicos de período  $k$  de  $\sigma_A$  é dada por

$$\sum_{1 \leq x_0, \dots, x_{k-1} \leq N} a_{x_0x_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}x_0}.$$

Por outro lado, utilizando a definição de multiplicação de matrizes podemos mostrar por indução que  $A^k = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ , onde

$$c_{ij} = \sum_{1 \leq x_1, \dots, x_{k-1} \leq N} a_{ix_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}j}$$

e, portanto,

$$\text{Tr}(A^k) = \sum_{x_0=1}^N c_{x_0x_0} = \sum_{1 \leq x_0, \dots, x_{k-1} \leq N} a_{x_0x_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}x_0}.$$

□