

Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Caóticos

Agenor Gonçalves Neto

São Paulo, 2020

Sumário

1	Conceitos Elementares	1
2	Família Quadrática	3
2.1	Estudo Inicial	3
2.2	Conjuntos de Cantor	4
2.3	Caos	5
2.4	Conjugação Topológica	7
2.5	Dinâmica Simbólica	9
2.6	Matriz de Transição	10
2.7	Bifurcação	13
3	Teorema de Sharkovsky	15
4	Teorema de Singer	18

1 Conceitos Elementares

De maneira suficiente para os nossos objetivos, definimos um sistema dinâmico como uma função $f : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico. Usualmente, X será um subconjunto de \mathbb{R} com a distância usual. Dado $x \in X$, nosso objetivo é estudar as propriedades da sequência definida recursivamente por

$$f^0(x) = x \quad \text{e} \quad f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

para todo $k \geq 1$. Para isso, vamos iniciar com algumas definições que estarão presentes durante todo o texto.

Se $p \in X$ e $f(p) = p$, então p é um ponto fixo de f . Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$, então p é um ponto periódico de f de período n . Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$ e

$f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então p é um ponto periódico f de período principal n . O conjunto dos pontos periódicos de f será denotado por $\text{Per}(f)$ e o conjunto dos pontos periódicos de f de período principal n será denotado por $\text{Per}_n(f)$.

Se $x \in X$, então $\mathcal{O}(x) = \{f^k(x) : k \geq 0\}$ é a órbita de x . Se p um ponto periódico de período n , então $\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p\}$ é o conjunto estável de p . Por fim, o conjunto $\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(x)| = \infty\}$ é o conjunto estável do infinito.

A Proposição 1.1 nos fornece uma maneira útil de verificar se uma função contínua definida num intervalo compacto de \mathbb{R} possui ponto fixo.

Proposição 1.1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f([a, b]) \subset [a, b]$ ou $f([a, b]) \supset [a, b]$, então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Considere a função contínua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Em ambos os casos é possível verificar, pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), que existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$. \square

Se a função for de classe \mathcal{C}^1 , podemos conhecer o comportamento dos pontos numa vizinhança de um ponto fixo cuja derivada em módulo é diferente de 1.

Teorema 1.2. *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^1 e $p \in \text{Per}_n(f)$.*

1. *Se $|Df^n(p)| < 1$, então existe uma vizinhança de p contida em $\mathcal{B}(p)$.*
2. *Se $|Df^n(p)| > 1$, então existe uma vizinhança V de p com a seguinte propriedade: se $x \in V \setminus \{p\}$, então $f^{kn}(x) \notin V$ para algum $k \geq 1$.*

Demonstração.

1. Sendo Df^n contínua, existe uma vizinhança V de p tal que $|Df^n(V)| \leq \lambda < 1$. Pelo Teorema do Valor Médio (TVM), se $x \in V$, então $|f^n(x) - p| \leq \lambda|x - p|$. Por indução, $|f^{kn}(x) - p| \leq \lambda^k|x - p|$ para todo $k \geq 1$ e, portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$.
2. Exercício.

\square

Definição 1.3. *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^1 e $p \in \text{Per}_n(f)$.*

- i. *Se $|Df^n(p)| < 1$, então p é um ponto atrator.*
- ii. *Se $|Df^n(p)| > 1$, então p é um ponto repulsor.*

A Definição 1.3, que segue naturalmente do Teorema 1.2, pode ser estendida para órbitas de pontos periódicos. De fato, pela Regra da Cadeia, é possível verificar que se um ponto é atrator (repulsor), então todos os pontos de sua órbita também são atratores (repulsores) e, nesse caso, dizemos que sua órbita é atratora (repulsora).

2 Família Quadrática

Nessa seção, considere a família de funções $h_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$h_\mu(x) = \mu x(1 - x),$$

onde $\mu > 1$ é um parâmetro real. Essa família de funções é conhecida por família quadrática. Quando não houver possibilidade de confusão, denotaremos a função h_μ simplesmente por h .

Nosso objetivo é estudar a dinâmica de h conforme μ varia e, conseqüentemente, estudar alguns dos principais fenômenos que ocorrem em sistemas dinâmicos.

2.1 Estudo Inicial

Iniciamos o estudo da família quadrática observando que h possui dois pontos fixos.

Proposição 2.1. *Se $\mu > 1$, então $h(0) = 0$ e $h(p_\mu) = p_\mu$, onde $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.*

Demonstração. Exercício. □

A Proposição 2.2 nos permite restringir o estudo da dinâmica de h ao intervalo $[0, 1]$, pois conhecemos o comportamento dos pontos que não pertencem à esse intervalo.

Proposição 2.2. *Se $\mu > 1$, então $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset \mathcal{B}(\infty)$.*

Demonstração. Basta observar que a sequência $x, h(x), h^2(x), \dots$ é estritamente decrescente e ilimitada quando $x \in (-\infty, 0)$. □

A Proposição 2.3, que pode visualizada graficamente, nos mostra que a dinâmica de h é simples para valores baixo de μ .

Proposição 2.3. *Se $\mu \in (1, 3)$, então*

1. 0 é um ponto repulsor e p_μ é um ponto atrator.
2. $(0, 1) \subset \mathcal{B}(p_\mu)$.

Demonstração. Exercício. □

Desse modo, a dinâmica de h está completamente determinada quando $\mu \in (1, 3)$. De fato,

$$\mathcal{B}(0) = \{0, 1\}, \quad \mathcal{B}(p_\mu) = (0, 1) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

2.2 Conjuntos de Cantor

Vamos estudar a dinâmica de h quando $\mu > 4$. Inicialmente, observe que $h(\frac{1}{2}) > 1$ e, portanto, existem pontos em $[0, 1]$ que não permanecem em $[0, 1]$ após uma iteração de h . Pela Proposição 2.2, tais pontos pertencem ao conjunto estável do infinito. De modo mais geral, se um ponto de $[0, 1]$ não permanece em $[0, 1]$ após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto estável do infinito.

Desse modo, considere o conjunto $\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : h^n(x) \in [0, 1]\}$ formado pelos pontos que permanecem em $[0, 1]$ após n iterações de h e o conjunto $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ formado pelos pontos de $[0, 1]$ que sempre permanecem em $[0, 1]$ por iterações de h . Assim, podemos estudar a dinâmica de h_Λ .

Observe que $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, onde $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ e $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$. De modo mais geral, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Se $\mu > 4$, então*

1. Λ_n é a união de 2^n intervalos fechados disjuntos.
2. $h^n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_n .

Demonstração. Se $k \geq 1$, suponha que Λ_{k-1} é a união de 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos e que $h^{k-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_{k-1} . Suponha que h^{k-1} é estritamente crescente; se h^{k-1} é estritamente decrescente, a demonstração é análoga.

Inicialmente, observe que existem $x'_1 < x'_2$ tais que $h^{k-1}([a, x'_1]) = [0, x_1]$, $h^{k-1}((x'_1, x'_2)) = (x_1, x_2)$ e $h^{k-1}([x'_2, 1]) = [x_2, 1]$ e, portanto, $h^k([a, x'_1]) = [0, 1]$, $h^k((x'_1, x'_2)) > 1$ e $h^k([x'_2, 1]) = [0, 1]$. Além disso, pela Regra da Cadeia, temos também que $Dh^k([a, x'_1]) > 0$ e $Dh^k([x'_2, 1]) < 0$.

Desse modo, é imediato concluir que Λ_k é a união de 2^k intervalos fechados disjuntos e que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $[a, b]$ é um dos intervalos formam Λ_k . \square

Desse modo, podemos mostrar que Λ é um conjunto de Cantor.

Definição 2.5. Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Dizemos que Γ é um conjunto de Cantor se as seguintes condições são válidas:

- i. Γ é limitado.
- ii. Γ é totalmente desconexo.
- iii. Γ é perfeito.

Γ é totalmente desconexo se não contém intervalos. Γ é perfeito se é fechado e todos os seus pontos são pontos de acumulação Γ . Para facilitar as próximas demonstrações, vamos considerar μ suficientemente grande tal que a derivada em módulo de h em Λ_1 seja maior que 1.

Lema 2.6. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então*

1. $|Dh(\Lambda_1)| \geq \lambda > 1$.
2. $b - a \leq \frac{1}{\lambda^n}$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_n .

Demonstração.

1. Basta observar que $Dh(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$ e $Dh(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$.
2. Se $x \in [a, b]$, então $Dh^n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} Dh(h^k(x)) \geq \lambda^n$. Pelo TVM, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$1 = |h^n(b) - h^n(a)| \geq \lambda^n |b - a|.$$

□

Pelo Lema 2.6, dado $\varepsilon > 0$, existe $k(\varepsilon) \geq 1$ tal que $b - a < \varepsilon$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam $\Lambda_{k(\varepsilon)}$.

Teorema 2.7. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.*

Demonstração.

- a) Λ é totalmente desconexo.

Se existe $[x, y] \subset \Lambda$, seja k tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |x - y|$. Em particular, $[x, y] \subset \Lambda_k$, o que é um absurdo pois os intervalos que formam Λ_k possuem tamanho $\leq \frac{1}{\lambda^k}$.

- b) Λ é perfeito.

Sejam $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Se $x \in [a, b]$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam $\Lambda_{k(\varepsilon)}$, então $a \in \Lambda$ e $|x - a| < \varepsilon$ e, portanto, x é ponto de acumulação de Λ .

□

2.3 Caos

Vamos estudar um fenômeno que a família quadrática exibe quando μ é suficientemente grande: o comportamento caótico de suas órbitas. Iniciamos esse estudo com a seguinte definição:

Definição 2.8. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f é topologicamente transitiva se dados $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ e $k \geq 1$ tais que $|x - z| < \varepsilon$ e $|y - f^k(z)| < \varepsilon$.

Intuitivamente, um sistema dinâmico é topologicamente transitivo quando é possível ir de uma vizinhança para qualquer outra vizinhança através de iterações de f . A família quadrática exibe esse comportamento quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Proposição 2.9. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_{\Lambda}$ é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k . Pelo TVI, existe $z \in [a, b]$ tal que $h^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$, concluímos que $h|_\Lambda$ é topologicamente transitiva. \square

Outra definição importante para o estudo desse fenômeno é feita a seguir:

Definição 2.10. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f depende sensivelmente das condições iniciais se existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $k \geq 1$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Intuitivamente, um sistema que possui dependência sensível das condições iniciais quando existem pontos arbitrariamente próximos à x que eventualmente se distanciam de x em pelo menos δ através de iterações de f . Novamente, a família quadrática exibe esse comportamento quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Proposição 2.11. Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k . Suponha que $h^k(a) = 0$ e $h^k(b) = 1$; se $h^k(a) = 1$ e $h^k(b) = 0$, a demonstração é análoga.

Como $h(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, temos que $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Se $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2})$, então $|h^k(x) - h^k(b)| = |h^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $h^k(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$, então $|h^k(x) - h^k(a)| = |h^k(x)| > \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, concluímos que $h|_\Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais. \square

Segundo Devaney, um sistema dinâmico é caótico se, além de possuir as duas propriedades definidas anteriormente, seu conjunto de pontos periódicos é denso.

Definição 2.12. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f é caótica se as seguintes condições são válidas:

- i. $\text{Per}(f)$ é denso em X .
- ii. f é topologicamente transitiva.
- iii. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Desse modo, basta mostrar que $\text{Per}(h|_\Lambda)$ é denso em Λ para concluir que $h|_\Lambda$ é caótica quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Proposição 2.13. Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $\text{Per}(h|_\Lambda)$ é denso em Λ .

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k . Como $h^k([a, b]) \supset [a, b]$, existe $y \in [a, b]$ tal que $h^k(y) = x$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \varepsilon$, concluímos que $\text{Per}(h|_\Lambda)$ é denso em Λ . \square

Teorema 2.14. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_{\Lambda}$ é caótica.*

Por fim, enunciamos o Teorema 2.15 que nos permite, sob algumas hipóteses, concluir um sistema dinâmico é caótico sem verificar se ele depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema 2.15. *Seja $f : X \rightarrow X$ é uma função contínua, onde X é um conjunto infinito. Se $\text{Per}(f)$ é denso em X e f é topologicamente transitiva, então f é caótica.*

Demonstração. Ver [2], página 45. □

2.4 Conjugação Topológica

Vamos estudar um conceito em sistemas dinâmicos que nos permite considerar iguais dois sistemas dinâmicos que inicialmente são distintos.

Definição 2.16. Sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $\tau : X \rightarrow Y$ funções. Dizemos que f e g são topologicamente conjugadas por τ se as seguintes condições são válidas:

- i. τ é um homeomorfismo.
- ii. $\tau \circ f = g \circ \tau$.

Intuitivamente, o primeiro item afirma que os conjuntos X e Y são iguais e o segundo, que os sistemas dinâmicos f e g são iguais. Por exemplo, é imediato verificar que $p \in \text{Per}_n(f)$ se, e somente se, $\tau(p) \in \text{Per}_n(g)$. A Proposição 2.17 nos mostra que sistemas dinâmicos topologicamente conjugados compartilham outras propriedades.

Proposição 2.17. *Sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $\tau : X \rightarrow Y$ funções. Se f e g são topologicamente conjugadas por τ , então*

- 1. $\text{Per}(f)$ é denso em X se, e somente se, $\text{Per}(g)$ é denso em Y .
- 2. f é topologicamente transitiva se, e somente se, g é topologicamente transitiva.

Demonstração.

- 1. Se $\text{Per}(f)$ denso em X , então $\tau(\text{Per}(f))$ é denso em Y pois τ é contínua. Observando que $\tau(\text{Per}(f)) = \text{Per}(g)$, concluímos que $\text{Per}(g)$ é denso em Y . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.
- 2. Sendo τ contínua, dados $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in X$, $|x - z| < \delta$ e $|y - f^k(z)| < \delta$, então $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^k(z))| < \varepsilon$.

Se $x', y' \in Y$, existem $x, y \in X$ tais que $\tau(x) = x'$ e $\tau(y) = y'$. Sendo f topologicamente transitiva, existem $z \in X$ e $k \geq 1$ tais que $|x - z| < \delta$ e $|y - f^k(z)| < \delta$. Desse modo, $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^k(z))| < \varepsilon$. Se $\tau(z) = z'$, então $|x' - z'| < \varepsilon$ e $|y' - g^k(z')| < \varepsilon$. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga. □

A seguir, temos um exemplo da utilização da conjugação topológica no estudo dos sistemas dinâmicos.

Lema 2.18. A função $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é caótica.

Demonstração. Inicialmente, é possível provar por indução que $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$ é uma função bijetora linear para todo $0 \leq k < 2^n$ e para todo $n \geq 1$. Desse modo, dados $x \in [0, 1]$ e $\varepsilon > 0$, seja $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $x \in I$ e $T^n : I \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $I = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$.

a) $\text{Per}(T)$ é denso em $[0, 1]$.

Como $T(I) \supset I$, existe $p \in I$ tal que $T^n(p) = p$. Observando que $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que $\text{Per}(T)$ é denso em $[0, 1]$.

b) T é topologicamente transitiva.

Sendo $T^n : I \rightarrow [0, 1]$ bijetora, se $y \in [0, 1]$, então existe $z \in I$ tal que $T^n(z) = y$. Observando que $|x - z| \leq \frac{1}{2^n}$ e $|y - T^n(z)| = 0$, concluímos que T é topologicamente transitiva.

c) T depende sensivelmente das condições iniciais.

Sendo $T^n : I \rightarrow [0, 1]$ bijetora, existem $a, b \in I$ tais que $T^n(a) = 0$ e $T^n(b) = 1$. Se $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, então $|T^n(x) - T^n(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$ e se $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, então $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| \leq \frac{1}{2^n}$ e $|x - b| \leq \frac{1}{2^n}$, concluímos que T depende sensivelmente das condições iniciais.

□

Desse modo, podemos concluir que h é caótica quando $\mu = 4$.

Teorema 2.19. Se $\mu = 4$, então h é caótica.

Demonstração. Basta observar que $h \circ \tau = \tau \circ T$, onde $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é o homeomorfismo dado por $\tau(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. □

2.5 Dinâmica Simbólica

Dado $N \geq 2$, seja Σ_N o conjunto das seqüências de números naturais limitados entre 1 e N , isto é, $\Sigma_N = \{(x_0 x_1 x_2 \dots) : 1 \leq x_n \leq N \text{ para todo } n \geq 0\}$. Seja também $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$d_N(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{N^k},$$

onde $x = (x_0 x_1 x_2 \dots)$ e $y = (y_0 y_1 y_2 \dots)$. É imediato verificar que (Σ_N, d_N) é um espaço métrico. Por fim, seja $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ a função dada por $\sigma(x_0 x_1 x_2 \dots) = (x_1 x_2 x_3 \dots)$.

Proposição 2.20. *Sejam $x = (x_0 x_1 x_2 \dots)$ e $y = (y_0 y_1 y_2 \dots)$ elementos de Σ_N .*

1. *Se $x_k = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, então $d_N(x, y) \leq \frac{1}{N^n}$.*
2. *Se $d_N(x, y) < \frac{1}{N^n}$, então $x_k = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n$.*

Proposição 2.21. *σ é contínua.*

Demonstração. Sejam $x = (x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_N$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Se $d_N(x, y) < \frac{1}{2^{n+1}}$, onde $y = (y_0 y_1 y_2 \dots) \in \Sigma_N$, então $x_k = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n+1$. Como $\sigma(x) = (x_1 x_2 x_3 \dots)$ e $\sigma(y) = (y_1 y_2 y_3 \dots)$, temos que as primeiras $n+1$ entradas de $\sigma(x)$ e $\sigma(y)$ são iguais. Desse modo, $d_N(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, σ é contínua. \square

Para a demonstração do próximo resultado, vamos considerar $N = 2$. Se $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, sejam $J_1 = [0, x_1]$ e $J_2 = [x_2, 1]$. Como $\Lambda \subset J_1 \cup J_2$, podemos definir a função $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ dada por $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$, onde $x_k = 1$ se $h^k(x) \in J_1$ e $x_k = 2$ se $h^k(x) \in J_2$ para todo $k \geq 0$.

Teorema 2.22. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_{\Lambda}$ e σ são topologicamente conjugadas por S .*

Demonstração.

a) S é injetora.

Sejam $x, y \in \Lambda$, $x < y$. Se $S(x) = S(y)$, então $h^k(x)$ e $h^k(y)$ está no mesmo lado em relação ao ponto crítico para todo $k \geq 0$ e, portanto, h é monótona em cada intervalo I_k cujos extremos são $h^k(x)$ e $h^k(y)$. Desse modo, se $z \in [x, y]$, então $h^k(z) \in I_k \subset J_1 \cup J_2$ para todo $k \geq 0$ e, portanto, $z \in \Lambda$, o que é um absurdo pois Λ é totalmente desconexo.

b) S é sobrejetora.

Seja $(x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_2$. Inicialmente, para cada $n \geq 0$, considere

$$J_{x_0 \dots x_n} = \{x \in [0, 1] : x \in J_{x_0}, \dots, h^n(x) \in J_{x_n}\}.$$

Escrevendo $J_{x_0 \dots x_n} = J_{x_0} \cap h^{-1}(J_{x_1 \dots x_n})$, é possível concluir por indução que $J_{x_0 \dots x_n}$ é um intervalo fechado não vazio. Além disso, $J_{x_0 \dots x_n} = J_{x_0 \dots x_{n-1}} \cap h^{-n}(J_{x_n}) \subset J_{x_0 \dots x_{n-1}}$. Desse modo, $J_{x_0}, J_{x_0 x_1}, J_{x_0 x_1 x_2}, \dots$ é uma sequência de intervalos encaixantes fechados e, portanto, existe $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} J_{x_0 \dots x_n}$. Como $h^k(x) \in J_{x_k}$ para todo $k \geq 0$, concluímos que $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$. Observe que x é único, pois S é injetora.

c) S é contínua.

Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 0$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Se $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$, então $x \in J_{x_0 \dots x_k}$. Sendo $J_{x_0 \dots x_k}$ um intervalo fechado, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \delta$, então $y \in J_{x_0 \dots x_k}$. Desse modo, $S(x)$ e $S(y)$ são iguais nas primeiras $k + 1$ entradas e, portanto, $d_2(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$.

d) S^{-1} é contínua.

Exercício.

e) $S \circ h|_{\Lambda} = \sigma \circ S$.

Se $x \in \Lambda$ e $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$, então $\bigcap_{n=0}^{\infty} J_{x_0 \dots x_n} = \{x\}$. Desse modo, é imediato que

$$S \circ h|_{\Lambda}(x) = S(h(\bigcap_{n=0}^{\infty} J_{x_0 \dots x_n})) = S(\bigcap_{n=1}^{\infty} J_{x_1 \dots x_n}) = (x_1 x_2 x_3 \dots) = \sigma \circ S(x).$$

□

2.6 Matriz de Transição

Dado $N \geq 2$, dizemos que A é uma matriz de transição se $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ é uma matriz quadrada de ordem N tal que $a_{ij} \in \{0, 1\}$ para todo $1 \leq i, j \leq N$. Se A é uma matriz de transição, definimos o conjunto Σ_A por

$$\Sigma_A = \{(x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_N : a_{x_k x_{k+1}} = 1 \text{ para todo } k \geq 0\}.$$

Observe que se $x \in \Sigma_A$, então $\sigma(x) \in \Sigma_A$. Desse modo, podemos definir a função $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ como sendo a restrição de σ em Σ_A .

Proposição 2.23. Σ_A é um subconjunto fechado de Σ_N .

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de elementos em Σ_A convergente para $x \in \Sigma_N$. Vamos mostrar que $x \in \Sigma_A$.

Se $x = (\xi_0 \xi_1 \xi_2 \dots)$ e $x \notin \Sigma_A$, então existe $k \geq 0$ tal que $a_{\xi_k \xi_{k+1}} = 0$. Por outro lado, pela definição de convergência, existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{k+1}}$ e, portanto, as $k+2$ primeiras entradas de x e x_{n_0} são iguais. Escrevendo $x_{n_0} = (\eta_0 \eta_1 \eta_2 \dots)$, concluímos que $a_{\eta_k \eta_{k+1}} = a_{\xi_k \xi_{k+1}} = 0$, o que é um absurdo pois $x_{n_0} \in \Sigma_A$. \square

Vamos estudar a dinâmica da família quadrática para $\mu = 3.839$. Se $a = 0.149888$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, então é possível mostrar que $h^3(I) \subset I$ e $|Dh^3(I)| < 1$ e, portanto, o intervalo I possui um ponto periódico atrator de h de período principal 3. Se a_1, a_2 e a_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$a_1 \simeq 0.149888, \quad a_2 \simeq 0.489149 \quad \text{e} \quad a_3 \simeq 0.959299.$$

Com auxílio do Teorema de Sharkovsky e do Teorema de Singer, que estudaremos na sequência, podemos concluir que h possui infinitos pontos periódicos e essa é a única órbita atratora de h .

De modo análogo, concluímos que h possui outra órbita de tamanho 3. Se b_1, b_2 e b_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040, \quad b_2 \simeq 0.539247 \quad \text{e} \quad b_3 \simeq 0.953837.$$

Observando o gráfico de h^3 , concluímos que para cada b_i , existe b'_i no lado oposto de b_i em relação ao ponto a_i tal que $h^3(b'_i) = b_i$. Defina $A_1 = (b'_1, b_1)$, $A_2 = (b'_2, b_2)$ e $A_3 = (b_3, b'_3)$.

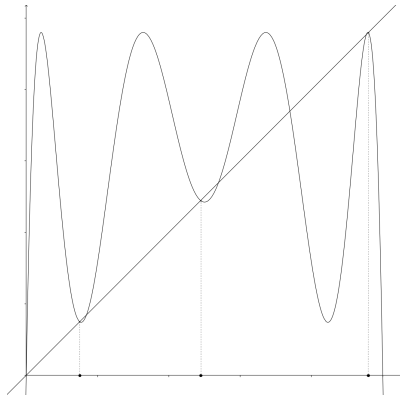


Figura: Gráfico de h^3 com os pontos a_1, a_2 e a_3 assinalados.

Sendo h^3 simétrica em relação ao ponto $\frac{1}{2}$, temos que $h(b'_2) = h(b_2) = b_3$. Além disso, podemos observar que $h(b'_1) = b'_2$ e $h(b'_3) = b'_1$ e, portanto, h mapeia de forma monótona A_1 em A_2 e A_3 em A_1 . Observando que o máximo de h em A_2 é $h(\frac{1}{2}) = 0.95975 < b'_3$, concluímos que $h(A_2) \subset A_3$.

Sabemos que se $x \notin [0, 1]$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} h^n(x) = -\infty$. Além disso, o único ponto periódico em A_i é a_i e todos os pontos em A_i tendem para a órbita de a_i . Desse modo, todos os outros pontos periódicos de h residem no complemento de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ em $[0, 1]$, que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam $J_0 = [0, b'_1]$, $J_1 = [b_1, b'_2]$, $J_2 = [b_2, b_3]$ e $J_3 = [b'_3, 1]$ tais intervalos. A Proposição a seguir nos permite dizer mais.

Proposição 2.24. *Se $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$ é um ponto periódico de h , então $x \in J_1 \cup J_2$.*

Demonstração. Observando que h é monótona em cada J_k , temos que $h(J_0) = J_0 \cup A_1 \cup J_1$, $h(J_1) = J_2$, $h(J_2) = J_1 \cup A_2 \cup J_2$ e $h(J_3) = J_0$. Desse modo, se $x \in J_1 \cup J_2$ é periódico, então órbita de x está contida em $J_1 \cup J_2$.

Por outro lado, se $x \in J_0 \setminus \{0\}$, existe um menor $n \geq 1$ tal que $h^n(x) \notin J_0$. Se $h^n(x) \in A_1$, então x não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de A_1 é a_1 . Se $h^n(x) \in J_1$, então x não pode ser periódico, pois caso contrário a órbita de x estaria contida em $J_1 \cup J_2$ e nunca retornaria para J_0 . Finalmente, se $x \in J_3$, então $h(x) \in J_0$ e a análise é análoga. \square

Seja Λ o conjunto dado por

$$\Lambda = \{x \in J_1 \cup J_2 : h^n(x) \in J_1 \cup J_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de h estão em Λ , com exceção dos pontos $0, a_1, a_2$ e a_3 .

Lema 2.25. *Existe $n_0 \geq 1$ tal que $|Dh^n(\Lambda)| > 1$ para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Inicialmente, podemos observar graficamente que $|Dh(J_1 \cup J_2)| \geq \nu$ para algum $\nu \in (0, 1)$. Podemos observar também que o subconjunto de $J_1 \cup J_2$ no qual $|Dh^3|$ é menor que ou igual à 1 é formado por três intervalos fechados e que cada um desses intervalos possui intersecção vazia com Λ e, portanto, $|Dh^3(\Lambda)| \geq \lambda$ para algum $\lambda > 1$.

Por fim, sejam $x \in \Lambda$ e $K \geq 1$ tal que $\nu^2 \lambda^K > 1$. Se $n_0 = 3K$ e $n \geq n_0$, podemos escrever $n = 3L + \alpha$, onde $L \geq K$ e $0 \leq \alpha \leq 2$. Desse modo, se $\alpha = 0$, então $|Dh^n(x)| = |Dh^{3L}(x)| \geq \lambda^L > 1$; se $\alpha = 1$, então $|Dh^n(x)| = |Dh(h^{3L}(x))||Dh^{3L}(x)| \geq \nu \lambda^L > 1$; e se $\alpha = 2$, então $|Dh^n(x)| = |Dh(h^{3L+1}(x))||Dh(h^{3L}(x))||Dh^{3L}(x)| \geq \nu^2 \lambda^L > 1$. \square

Lema 2.26. *Λ não contém intervalos.*

Demonstração. Suponha que exista $[a, b] \subset \Lambda$. Utilizando notação do Lema anterior, seja

$n \geq n_0$ tal que $\nu^{n_0} \lambda^{n-n_0} (b-a) > 1$. Pelo TVM, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\begin{aligned} |h^n(b) - h^n(a)| &= |Dh^n(c)|(b-a) \\ &= \prod_{k=0}^{n_0-1} |Dh(h^k(c))| \prod_{k=n_0}^{n-1} |Dh(h^k(c))|(b-a) \\ &\geq \nu^{n_0} \lambda^{n-n_0} (b-a) > 1 \end{aligned}$$

e, portanto, $h^n(a)$ ou $h^n(b)$ não é elemento de $[0, 1]$, o que é um absurdo. \square

Para as demonstrações dos próximos resultados, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_A$ a função dada por $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$, onde $x_k = 1$ se $h^k(x) \in J_1$ e $x_k = 2$ se $h^k(x) \in J_2$ para todo $k \geq 0$. Observe que S está bem definida, pois $h(J_1) = J_2$ e $h(J_2) \subset J_1 \cup J_2$ e, portanto, $a_{x_k x_{k+1}} = 1$ para todo $k \geq 0$.

Teorema 2.27. $h|_\Lambda$ e σ_A são topologicamente conjugadas por S .

2.7 Bifurcação

A família quadrática exibe outro fenômeno que ocorre em sistemas dinâmicos: a bifurcação. Através desse fenômeno, vamos explicar gráfica e intuitiva como a dinâmica de h , que é simples para μ pequeno, se torna caótica para μ suficientemente grande.

Seja f_λ uma família parametrizada de funções no parâmetro λ de modo que a função

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x),$$

definida num aberto de \mathbb{R}^2 , seja de classe \mathcal{C}^∞ nas variáveis x e λ . Dizemos que f_λ sofre uma bifurcação em λ_0 se existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: se $\lambda_1 \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ e $\lambda_2 \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$, então f_{λ_1} e f_{λ_2} não são topologicamente conjugadas. Por exemplo, uma bifurcação ocorre quando há alteração na estrutura dos pontos periódicos.

Exemplo 2.28.

a) A família E_λ de funções dadas por $E_\lambda(x) = e^{x+\lambda}$ sofre uma bifurcação em $\lambda_0 = -1$.

Conforme o parâmetro cresce, os dois pontos fixos vão se aproximando até se tornarem um único ponto fixo que, após isso, desaparece. Uma bifurcação com essas características é chamada de bifurcação tangente.

b) A família quadrática sofre uma bifurcação em $\mu_0 = 3$.

Conforme o parâmetro cresce, o ponto fixo, que inicialmente é atrator, se torna repulsor e, além disso, nasce uma órbita periódica de período 2 numa vizinhança do ponto fixo. Uma bifurcação com essas características é chamada de bifurcação com duplicação de período.

Observe, nos exemplos, que as bifurcações ocorreram quando a derivada em módulo no ponto fixo se tornou igual à 1. O teorema a seguir nos mostra que isso não é coincidência.

Teorema 2.29. *Seja f_λ uma família parametrizada de funções. Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$,
2. $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$.

Então existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0 , respectivamente, e uma função $p : I \rightarrow J$ de classe \mathcal{C}^∞ tais que

1. $p(\lambda_0) = x_0$,
2. $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ para todo $\lambda \in I$.

Além disso, f_λ não possui outros pontos fixos em J .

Demonstração. Basta aplicar o Teorema da Função Implícita para a função $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$ no ponto (x_0, λ_0) . \square

Vamos estudar com mais detalhes a bifurcação com duplicação de período que ocorre na família quadrática. Inicialmente, observe que se $\mu > 2$, então existe $p'_\mu < p_\mu$ tal que $h(p'_\mu) = p_\mu$. Observe o gráfico de h^2 , juntamente com um quadrado de vértices (p'_μ, p_μ) , (p_μ, p_μ) , (p_μ, p'_μ) e (p'_μ, p'_μ) , para alguns valores de μ .

Restringindo o gráfico de h^2 restrito ao quadrado e rotacionando em 2π , vemos que ele se assemelha ao gráfico da própria h no intervalo $[0, 1]$ para algum valor de μ . Vamos deixar essa ideia mais precisa através do operador de renormalização, que nos permite analisar a segunda iterada de uma função na mesma escala que a original.

Se $\mu > 2$, considere a função $L : [p'_\mu, p_\mu] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$L(x) = \frac{x - p_\mu}{p'_\mu - p_\mu}.$$

Observe que $L(p_\mu) = 0$ e $L(p'_\mu) = 1$. Desse modo, definimos a renormalização de h como a função $Rh : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $Rh(x) = L \circ h^2 \circ L^{-1}(x)$.

Observe que um ponto fixo de Rh está unicamente relacionado com um ponto periódico de h de período 2. Além disso, o gráfico de Rh não está contido em $[0, 1]$ para algum

$\mu < 4$. Desse modo, podemos fazer uma análise análoga para concluir que Rh passa por uma bifurcação com duplicação de período.

Portanto, esperamos que Rh sofra uma bifurcação com duplicação de período conforme o parâmetro cresce e, de maneira análoga, fazemos uma renormalização para concluir que h^2 sofre uma bifurcação com duplicação de período. Continuando esse processo, temos uma sucessão de bifurcações com duplicação de período na família quadrática.

O computador nos permite observar esse fato experimentalmente. Para isso, vamos computar o digrama de órbita do ponto crítico da família quadrática para $\mu > 2$. Nesse diagrama, veremos o comportamento assintótico de órbita de $\frac{1}{2}$ em função do parâmetro. Como veremos no Teorema de Singer, se h possui uma órbita periódica, então ela atrai o ponto crítico. Escolhemos 2000 valores de μ igualmente espaçados em $[2, 4]$ e, para cada valor, calculamos as primeiras 500 iterações da órbita de $\frac{1}{2}$ e plotamos as últimas 400.

Na figura, vemos alguns fatos que já estudamos. Para $\mu \in [2, 3]$, as órbitas são atraídas para o ponto fixo p_μ e, quando μ passa de 3, nasce uma órbita periódica de período 2.

3 Teorema de Sharkovsky

Ao longo dessa seção, consideraremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Além disso, escreveremos $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_n$ quando I_0, I_1, \dots, I_n são intervalos fechados e $f(I_k) \supset I_{k+1}$ para todo $0 \leq k < n$.

Proposição 3.1. *Se $I_0 \rightarrow I_1$, então existe um intervalo fechado $I'_0 \subset I_0$ tal que $f(I'_0) = I_1$.*

Demonstração. Sejam $p, q \in [a, b]$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$, onde $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [c, d]$. Se $p \leq q$, definimos $b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\}$ e $a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$ e, pela continuidade de f , podemos concluir que $f(I'_0) = I_1$, onde $I'_0 = [a', b']$. Se $q \leq p$, a demonstração é análoga. \square

Lema 3.2. *Se $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$, então existe $p \in I_0$ tal que as seguintes condições são válidas:*

1. $f^k(p) \in I_k$ para todo $1 \leq k < n$.

2. $f^n(p) = p$.

Demonstração. Pelo Proposição 3.1, podemos construir uma sequência de intervalos fechados $I'_0, I'_1, \dots, I'_{n-1}$ com as seguintes propriedades:

- a) $I_0 \supset I'_0 \supset I'_1 \supset \dots \supset I'_{n-1}$.

- b) $f^k(I'_{k-1}) = I_k$ para todo $1 \leq k < n$.

c) $f^n(I'_{n-1}) = I_0$.

Desse modo, existe $p \in I'_{n-1}$ tal que $f^n(p) = p$. Em particular, $p \in I_0$ e $f^k(p) \in I_k$ para todo $1 \leq k < n$. \square

Teorema 3.3. *Se $\text{Per}_3(f) \neq \emptyset$, então $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Sejam $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de um elemento de $\text{Per}_3(f)$. Suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$. Se $f(p_1) = p_3$ e $f(p_3) = p_2$, a demonstração é análoga. Definindo $I_0 = [p_1, p_2]$ e $I_1 = [p_2, p_3]$, temos que $I_0 \longrightarrow I_1$, $I_1 \longrightarrow I_0$ e $I_1 \longrightarrow I_1$. Desse modo, podemos demonstrar as seguintes afirmações:

a) $\text{Per}_1(f) \neq \emptyset$.

De fato, $I_1 \longrightarrow I_1$ implica que existe $p \in I_1$ tal que $f(p) = p$.

b) $\text{Per}_2(f) \neq \emptyset$.

De fato, $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0$ implica que existe $p \in I_0$ tal que $f(p) \in I_1$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in I_0 \cap I_1$, o que é um absurdo pois $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e $p_2 \in \text{Per}_3(f)$.

c) $\text{Per}_4(f) \neq \emptyset$.

De fato, $I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$ implica que existe $p \in I_1$ tal que $f^k(p) \in I_1$ para todo $1 \leq k < 3$, $f^3(p) \in I_0$ e $f^4(p) = p$. Se $f^3(p) = p$, então $p \in I_0 \cap I_1$, o que é um absurdo pois $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e $f^2(p_2) = p_1 \notin I_1$. Se $f^k(p) = p$ para algum $1 \leq k < 3$, então $f^k(p) \in I_1$ para todo $k \geq 1$. Em particular, $f^3(p) \in I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e, portanto, $f^4(p) = p = p_3$, o que é um absurdo pois $f(p_3) = p_1 \notin I_1$.

Por fim, podemos demonstrar de maneira análoga à última afirmação que $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 4$. \square

O Teorema 3.3 é um caso especial de um teorema, provado por A. N. Sharkovsky, que vamos enunciar na sequência. Inicialmente, considere a seguinte ordenação dos números naturais:

Definição 3.4 (Ordenação de Sharkovsky).

$$3 \triangleright 5 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

A ordenação de Sharkovsky lista todos os ímpares ≥ 3 em ordem crescente; em seguida, todos os ímpares ≥ 3 em ordem crescente multiplicados por 2; em seguida, todos os ímpares ≥ 3 em ordem crescente multiplicados por 4; e assim sucessivamente. Por fim, lista todas as potências de 2 em ordem decrescente.

Desse modo, enunciamos o Teorema de Sharkovsky cuja demonstração, apesar de não usar nenhuma ferramenta além daquelas usadas para demonstrar o Teorema 3.3, é consideravelmente maior.

Teorema 3.5 (Sharkovsky). *Se $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$, então $\text{Per}_m(f) \neq \emptyset$ para todo $n \triangleright m$.*

Demonstração. Ver [2]. □

O Teorema de Sharkovsky pode ser usado para provar que órbitas periódicas de certos tamanhos não existem. Por exemplo, observando os gráficos de h , h^2 e h^4 para $\mu = 3.2$ vemos que $\text{Per}_4(h) = \emptyset$ e, portanto, $\text{Per}_n(h) = \emptyset$ para todo $n \geq 3$.

Por fim, a ordenação de Sharkovsky é a melhor possível. Por exemplo, se $\text{Per}_5(f) \neq \emptyset$ implicasse $\text{Per}_3(f) \neq \emptyset$, então o número 5 poderia ser removido na ordenação. O seguinte teorema mostra que isso não é possível.

Teorema 3.6. *Se $n \geq 1$, então existe uma função f com as seguintes propriedades:*

1. $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$.
2. $\text{Per}_m(f) = \emptyset$ para todo $m \triangleright n$.

Demonstração. Seja $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a função dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

e considere a família de funções $T_\lambda(x) = \min\{\lambda, T(x)\}$ definidas em $[0, 1]$, onde o parâmetro λ varia em $[0, 1]$.

Inicialmente, observe que $T(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$ implica que $T_1 = T$. Além disso, é possível provar por indução que T_1 possui 2^k pontos periódicos de período k para todo $k \geq 1$. Desse modo, podemos definir

$$\lambda(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } k \text{ de } T_1\}\}$$

para todo $k \geq 1$. A ideia principal da prova consiste no fato de que $\lambda(k)$ desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de $T_{\lambda(k)}$. As seguintes afirmações tornarão preciso esse fato:

- a) Se $\mathcal{O} \subset [0, \lambda)$ é uma órbita de T_λ , então \mathcal{O} é uma órbita de T_1 .

Se $p \in \mathcal{O}$, então $T_\lambda(p) \in [0, \lambda)$. Desse modo, $T_\lambda(p) = \min\{\lambda, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$. Assim, T_λ e T_1 coincidem em \mathcal{O} e, portanto, \mathcal{O} é uma órbita de T_1 .

- b) Se $\mathcal{O} \subset [0, \lambda]$ é uma órbita de T_1 , então \mathcal{O} é uma órbita de T_λ .

Se $p \in \mathcal{O}$, então $T_1(p) \in [0, \lambda]$. Desse modo, $T_\lambda(p) = \min\{\lambda, T_1(p)\} = T_1(p)$. Assim, T_λ e T_1 coincidem em \mathcal{O} e, portanto, \mathcal{O} é uma órbita de T_λ .

c) $T_{\lambda(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(k))$ de tamanho j se, e somente, se $\lambda(k) > \lambda(j)$.

Se $T_{\lambda(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(k))$ de tamanho j , então \mathcal{O} é uma órbita de T_1 e, pela definição de $\lambda(j)$, concluímos que $\lambda(k) > \lambda(j)$. Por outro lado, se $\lambda(k) > \lambda(j)$, então T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(j)] \subset [0, \lambda(k)]$ de tamanho j e, desse modo, \mathcal{O} é uma órbita de $T_{\lambda(k)}$.

d) A órbita de T_1 que contém $\lambda(k)$ é uma órbita de tamanho k de $T_{\lambda(k)}$. Além disso, todas as outras órbitas de $T_{\lambda(k)}$ estão em $[0, \lambda(k))$.

Pela definição de $\lambda(k)$, T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(k)]$ de tamanho k e, portanto, \mathcal{O} é uma órbita de $T_{\lambda(k)}$.

Na segunda parte, basta observar que $\lambda(k)$ é o valor máximo de $T_{\lambda(k)}$ e, desse modo, toda órbita de $T_{\lambda(k)}$ está contida em $[0, \lambda(k)]$. Em particular, se a órbita não contém $\lambda(k)$, então ela está contida em $[0, \lambda(k))$.

e) $k \triangleright j$ se, e somente se, $\lambda(k) > \lambda(j)$.

Suponha que $k \triangleright j$. Sabemos que $T_{\lambda(k)}$ possui uma órbita de tamanho k e, pelo Teorema de Sharkovsky, $T_{\lambda(k)}$ admite uma órbita de tamanho j . Em particular, essa órbita está contida em $[0, \lambda(k))$ e, portanto, $\lambda(k) > \lambda(j)$.

Suponha que $\lambda(k) > \lambda(j)$. Se $j \triangleright k$, então $\lambda(k) < \lambda(j)$ pela demonstração no parágrafo anterior e, portanto, $k \triangleright j$.

Desse modo, $T_{\lambda(n)}$ possui órbita de tamanho n para cada $n \geq 1$. Além disso, se $m \triangleright n$ então $\lambda(m) > \lambda(n)$ e, portanto, $T_{\lambda(n)}$ não possui órbita de tamanho m . \square

4 Teorema de Singer

Ao longo dessa seção, consideraremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^3 . Iniciamos com a seguinte definição:

Definição 4.1 (Derivada de Schwarz). A derivada de Schwarz de f é a função $\mathcal{S}f : \mathbb{R} \setminus C_f \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{D^3f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f(x)}{Df(x)} \right)^2,$$

onde $C_f = \{x \in \mathbb{R} : Df(x) \neq 0\}$.

Para os nossos objetivos, estudaremos funções que possuem a derivada de Schwarz negativa. Por exemplo, $Sh(x) = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0$ para todo $x \neq \frac{1}{2}$. A característica fundamental dessa propriedade é ser preservada em composição de funções.

Proposição 4.2. Se $\mathcal{S}f < 0$ e $\mathcal{S}g < 0$, então $\mathcal{S}(f \circ g) < 0$.

Demonstração. Basta observar que $\mathcal{S}(f \circ g)(x) = \mathcal{S}f(g(x))(Dg(x))^2 + \mathcal{S}g(x)$. \square

Corolário 4.3. *Se $\mathcal{S}f < 0$, então $\mathcal{S}f^n < 0$ para todo $n \geq 1$.*

Vamos mostra que se uma função possui derivada de Schwarz negativa e um número finito de pontos críticos, então existe um limite para a quantidade de órbitas periódicas atratoras. Para isso, iniciamos provando uma série de lemas.

Lema 4.4. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e x_0 é um ponto de mínimo local de Df , então $Df(x_0) \leq 0$.*

Demonstração. Se $Df(x_0) \neq 0$, então

$$\mathcal{S}f(x_0) = \frac{D^3f(x_0)}{Df(x_0)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f(x_0)}{Df(x_0)} \right)^2 < 0.$$

Sendo x_0 ponto de mínimo local de Df , temos que $D^2f(x_0) = 0$ e $D^3f(x_0) \geq 0$ e, portanto, $Df(x_0) < 0$. \square

Lema 4.5. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c$ são pontos fixos de f com $Df(b) \leq 1$, então f possui ponto crítico em (a, c) .*

Demonstração. Pelo TVM, existem $r \in (a, b)$ e $s \in (b, c)$ tais que $Df(r) = Df(s) = 1$. Sendo Df contínua, Df restrita ao intervalo $[r, s]$ possui mínimo global. Como $b \in (r, s)$ e $Df(b) \leq 1$, temos que Df possui mínimo local em (r, s) . Utilizando Lema anterior e o TVI, a demonstração está concluída. \square

Lema 4.6. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c < d$ são pontos fixos de f , então f possui ponto crítico em (a, d) .*

Demonstração. Se $Df(b) \leq 1$ ou $Df(c) \leq 1$, o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se $Df(b) > 1$ e $Df(c) > 1$, existem $r, t \in (b, c)$ tais que $r < t$, $f(r) > r$ e $f(t) < t$. Pelo TVM, existe $s \in (r, t)$ tal que $Df(s) < 1$. Portanto, Df possui mínimo local em (b, c) . Utilizando Lema 4.4 e o TVI, a demonstração está concluída. \square

Lema 4.7. *Se f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos críticos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo TVM, se $c \in \mathbb{R}$, então f possui ponto crítico entre dois elementos de $f^{-1}(c)$ e, portanto, $f^{-1}(c)$ é finito. De modo mais geral, é possível provar por indução que $f^{-n}(c)$ é finito para todo $n \geq 1$.

Se $n \geq 1$, então $Df^n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} Df(f^k(x)) = 0$ se, e somente se, $f^k(x)$ é ponto crítico de f para algum $1 \leq k < n$. Portanto, o conjunto de pontos críticos de f^n é finito. \square

Lema 4.8. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos fixos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.6, se f^n possui infinitos pontos fixos para algum $n \geq 1$, então f^n possui infinitos pontos críticos, o que é um absurdo pelo Lema 4.7. \square

Teorema 4.9 (Singer). *Se $Sf < 0$ e f possui n pontos críticos, então f possui no máximo $n + 2$ órbitas periódicas não repulsoras.*

Demonstração. Seja p um ponto periódico não repulsor de f de período m . Se $g = f^m$, então $g(p) = p$ e $|Dg(p)| \leq 1$. Seja K a componente conexa de $\mathcal{B}(p) = \{x : \lim_{k \rightarrow \infty} g^k(x) = p\}$ que contém p . Inicialmente, suponha que K é limitado.

Se $|Dg(p)| < 1$, então é possível mostrar que K é aberto, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K .

Escrevendo $K = (a, b)$, se $g(a) = a$ e $g(b) = b$, então g possui ponto crítico em K pelo Lema 4.5; se $g(a) = b$ e $g(b) = a$, então g^2 possui ponto crítico em K pelo Lema 4.5; se $g(a) = g(b)$, então g possui ponto crítico em K pelo TVM.

Se $|Dg(p)| = 1$, então os pontos fixos de g são isolados pelo Lema anterior e, portanto, existe uma vizinhança de p que não contém outros pontos fixos de g .

Suponha que $Dg(p) = 1$. Se $Dg(p) = -1$, a demonstração é análoga considerando g^2 . Se p possui o comportamento de um ponto repulsor, então, para x numa vizinhança de p , $g(x) > x$ quando $x > p$ e $g(x) < x$ quando $x < p$. Desse modo, 1 é um mínimo local de Dg , o que é um absurdo pelo Lema 4.4 e, portanto, p é atrator em pelo menos um dos lados. Desse modo, K é um intervalo, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K . Assim, é possível concluir de maneira análoga que g possui ponto crítico em K .

Assim, cada intervalo K limitado está associado à algum ponto crítico de f e, portanto, existem no máximo n desses intervalos. Não é possível obter a mesma conclusão se K não é limitado, mas observando que existem no máximo dois intervalos desse tipo, a demonstração está concluída. \square

Corolário 4.10. *Se $\mu > 1$, então h possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.*