

Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos

Agenor Gonçalves Neto *

São Paulo, 2020

Sumário

1	Conceitos Elementares	1
2	Família Quadrática	2
2.1	Estudo Inicial	3
2.2	Conjuntos de Cantor	3
2.3	Caos	5
2.4	Conjugação Topológica	6
2.5	Dinâmica Simbólica	8
2.6	Matriz de Transição	10
2.7	Bifurcação	12
3	Teorema de Sharkovsky	16
4	Teorema de Singer	19
	Referências	21

1 Conceitos Elementares

De maneira suficiente para os nossos objetivos, definimos um sistema dinâmico como uma função $f : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico. Usualmente, X será um subconjunto de \mathbb{R} com a distância usual. Dado $x \in X$, nosso objetivo é estudar as propriedades da sequência definida recursivamente por

$$f^0(x) = x \quad \text{e} \quad f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

para todo $k \geq 1$. Para isso, vamos iniciar com algumas definições que estarão presentes durante todo o texto.

Se $p \in X$ e $f(p) = p$, então p é um ponto fixo de f . Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$, então p é um ponto periódico de f de período n . Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$ e $f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então p é um ponto periódico f de período primo n . O conjunto dos pontos

*Graduando em Bacharelado em Matemática (IME-USP) orientado pelo Prof. Salvador Addas Zanata (IME-USP).

periódicos de f será denotado por $\text{Per}(f)$ e o conjunto dos pontos periódicos de f de período primo n será denotado por $\text{Per}_n(f)$.

Se $x \in X$, então $\mathcal{O}(x) = \{f^k(x) : k \geq 0\}$ é a órbita de x . Se $p \in \text{Per}_n(f)$, então $\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p\}$ é o conjunto estável de p . Por fim, o conjunto $\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(x)| = \infty\}$ é o conjunto estável do infinito.

A Proposição 1.1 nos fornece uma maneira útil para verificar se uma função contínua definida num intervalo compacto possui ponto fixo.

Proposição 1.1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f([a, b]) \subset [a, b]$ ou $f([a, b]) \supset [a, b]$, então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Considere a função contínua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Em ambos os casos é possível verificar, pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), que existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$. \square

Se a função for de classe \mathcal{C}^1 , podemos conhecer o comportamento dos pontos numa vizinhança de um ponto fixo cuja derivada em módulo é diferente de 1.

Teorema 1.2. *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^1 e $p \in \text{Per}_n(f)$.*

1. *Se $|Df^n(p)| < 1$, então existe uma vizinhança de p contida em $\mathcal{B}(p)$.*
2. *Se $|Df^n(p)| > 1$, então existe uma vizinhança V de p com a seguinte propriedade:
se $x \in V \setminus \{p\}$, então $f^{kn}(x) \notin V$ para algum $k \geq 1$.*

Demonstração.

1. Sendo Df^n contínua, existe uma vizinhança V de p tal que $|Df^n(V)| < \lambda$ para algum $\lambda < 1$. Pelo Teorema do Valor Médio (TVM), se $x \in V$, então $|f^n(x) - p| < \lambda|x - p|$. Por indução, $|f^{kn}(x) - p| < \lambda^k|x - p|$ para todo $k \geq 1$ e, portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$.
2. Exercício.

\square

Definição 1.3. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^1 e $p \in \text{Per}_n(f)$.

- i. Se $|Df^n(p)| < 1$, então p é um ponto atrator.
- ii. Se $|Df^n(p)| > 1$, então p é um ponto repulsor.

A Definição 1.3, que segue naturalmente do Teorema 1.2, pode ser estendida para órbitas de pontos periódicos. De fato, pela Regra da Cadeia, é possível verificar que se um ponto é atrator/repulsor, então todos os pontos de sua órbita também são atratores/repulsores e, nesse caso, dizemos que ela é uma órbita periódica atratora/repulsora.

2 Família Quadrática

Nessa seção, consideraremos a família de funções $h_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $h_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, onde $\mu > 1$ é um parâmetro real. Essa família de funções é conhecida como família quadrática. Denotaremos a função h_μ simplesmente por h . Vamos estudar alguns dos principais fenômenos de sistemas dinâmicos através da família quadrática.

2.1 Estudo Inicial

Iniciamos o estudo da família quadrática observando que h possui dois pontos fixos.

Proposição 2.1. *Se $\mu > 1$, então $h(0) = 0$ e $h(p_\mu) = p_\mu$, onde $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.*

Demonstração. Exercício. □

Podemos restringir o estudo da dinâmica de h ao intervalo $[0, 1]$, pois conhecemos o comportamento dos pontos que não pertencem à ele.

Proposição 2.2. *Se $\mu > 1$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} h^k(x) = -\infty$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.*

Demonstração. Basta observar que a sequência $x, h(x), h^2(x), \dots$ é estritamente decrescente e ilimitada quando $x \in (-\infty, 0)$. □

A Proposição 2.3, que pode visualizada graficamente, nos mostra que a dinâmica de h é simples para valores baixos de μ .

Proposição 2.3. *Se $\mu \in (1, 3)$, então*

1. *0 é um ponto repulsor e p_μ é um ponto atrator.*
2. *$\lim_{k \rightarrow \infty} h^k(x) = p_\mu$ para todo $x \in (0, 1)$.*

Demonstração. Exercício. □

Desse modo, a dinâmica de h está completamente determinada quando $\mu \in (1, 3)$. De fato, $\mathcal{B}(0) = \{0, 1\}$, $\mathcal{B}(p_\mu) = (0, 1)$ e $\mathcal{B}(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

2.2 Conjuntos de Cantor

Vamos estudar a dinâmica de h para $\mu > 4$. Inicialmente, observe que $h(\frac{1}{2}) > 1$ e, portanto, existem pontos em $[0, 1]$ que não permanecem em $[0, 1]$ após uma iteração de h . Pela Proposição 2.2, tais pontos pertencem ao conjunto estável do infinito. De modo mais geral, se um ponto de $[0, 1]$ não permanece em $[0, 1]$ após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto estável do infinito.

Desse modo, considere o conjunto $\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : h^n(x) \in [0, 1]\}$ formado pelos pontos que permanecem em $[0, 1]$ após n iterações de h e o conjunto $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ formado pelos pontos de $[0, 1]$ cuja órbita está contida em $[0, 1]$. Assim, vamos estudar a dinâmica de h restrita ao conjunto Λ .

Observe que $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, onde $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ e $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$. De modo mais geral, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Se $\mu > 4$, então*

1. *Λ_n é a união de 2^n intervalos fechados disjuntos.*
2. *$h^n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_n .*

Demonstração. Se $k \geq 1$, suponha que Λ_{k-1} é a união de 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos e que $h^{k-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_{k-1} . Suponha que h^{k-1} é estritamente crescente; se h^{k-1} é estritamente decrescente, a demonstração é análoga.

Inicialmente, observe que existem $x'_1 < x'_2$ tais que $h^{k-1}([a, x'_1]) = [0, x_1]$, $h^{k-1}((x'_1, x'_2)) = (x_1, x_2)$ e $h^{k-1}([x'_2, b]) = [x_2, 1]$ e, portanto, $h^k([a, x'_1]) = [0, 1]$, $h^k((x'_1, x'_2)) > 1$ e $h^k([x'_2, b]) = [0, 1]$. Além disso, pela Regra da Cadeia, temos que $Dh^k([a, x'_1]) > 0$ e $Dh^k([x'_2, b]) < 0$.

Desse modo, é imediato concluir que Λ_k é a união de 2^k intervalos fechados disjuntos e que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $[a, b]$ é um dos intervalos formam Λ_k . \square

Com isso, podemos mostrar que Λ é um conjunto de Cantor para μ suficientemente grande.

Definição 2.5. Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Dizemos que Γ é um conjunto de Cantor se as seguintes condições são válidas:

- i. Γ é limitado.
- ii. Γ é totalmente desconexo.
- iii. Γ é perfeito.

Γ é totalmente desconexo se não contém intervalos. Γ é perfeito se é fechado e todos os seus pontos são pontos de acumulação dele próprio. Para facilitar as próximas demonstrações, vamos considerar μ suficientemente grande tal que a derivada em módulo de h em Λ_1 seja maior que 1.

Lema 2.6. Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então

- 1. $|Dh(\Lambda_1)| > \lambda > 1$.
- 2. $b - a < \frac{1}{\lambda^n}$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_n .

Demonstração.

- 1. Basta observar que $Dh(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$ e $Dh(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$.
- 2. Se $x \in [a, b]$, então $|Dh^n(x)| = \prod_{k=0}^{n-1} Dh(h^k(x)) > \lambda^n$ e, pelo TVM,

$$1 = |h^n(b) - h^n(a)| > \lambda^n |b - a|.$$

\square

Pelo Lema 2.6, dado $\varepsilon > 0$, existe $k \geq 1$ tal que os intervalos que formam Λ_k possuem tamanho menor que ε .

Teorema 2.7. Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.

Demonstração.

a) Λ é totalmente desconexo.

Se existe $[a, b] \subset \Lambda$, seja k tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |a - b|$. Em particular, $[a, b] \subset \Lambda_k$, o que é um absurdo pois os intervalos que formam Λ_k possuem tamanho menor que $\frac{1}{\lambda^k}$.

b) Λ é perfeito.

Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Se $x \in [a, b]$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k , então $a \in \Lambda$ e $|x - a| < \varepsilon$ e, portanto, x é ponto de acumulação de Λ . \square

O Teorema 2.7 é válido para $\mu \in (4, 2 + \sqrt{5})$, porém a demonstração é mais complicada.

2.3 Caos

Vamos estudar um fenômeno que a família quadrática exibe para μ suficientemente grande: o comportamento caótico de suas órbitas. Para isso, iniciamos com a seguinte definição:

Definição 2.8. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f é topologicamente transitiva se dados $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ e $k \geq 0$ tais que $|x - z| < \varepsilon$ e $|y - f^k(z)| < \varepsilon$.

Intuitivamente, um sistema dinâmico é topologicamente transitivo quando é possível ir de uma vizinhança para qualquer outra através de iterações de f . A família quadrática possui essa propriedade para $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Proposição 2.9. Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ é topologicamente transitiva.

Demonstração. Sejam $x, y \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k . Pelo TVI, existe $z \in [a, b]$ tal que $h^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$ e $|x - z| < \varepsilon$, concluímos que $h|_\Lambda$ é topologicamente transitiva. \square

Outra definição importante para o estudo dos sistemas dinâmicos caóticos é a seguinte:

Definição 2.10. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f depende sensivelmente das condições iniciais se existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $k \geq 0$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Intuitivamente, um sistema dinâmico possui dependência sensível das condições iniciais quando existem pontos arbitrariamente próximos de x cujas iteradas eventualmente se distanciam das iteradas de x em pelo menos δ . Novamente, a família quadrática possui essa propriedade para $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Proposição 2.11. Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k . Suponha que $h^k(a) = 0$ e $h^k(b) = 1$; se $h^k(a) = 1$ e $h^k(b) = 0$, a demonstração é análoga.

Como $h(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, temos que $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Se $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2})$, então $|h^k(x) - h^k(b)| = |h^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $h^k(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$, então $|h^k(x) - h^k(a)| = |h^k(x)| > \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, concluímos que $h|_\Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais. \square

Um sistema dinâmico é caótico se, além de possuir as duas propriedades definidas anteriormente, seu conjunto de pontos periódicos é denso.

Definição 2.12. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f é caótica se as seguintes condições são válidas:

- i. $\text{Per}(f)$ é denso em X .
- ii. f é topologicamente transitiva.
- iii. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Desse modo, basta mostrar que $\text{Per}(h|_\Lambda)$ é denso em Λ para concluir que $h|_\Lambda$ é caótica para $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Teorema 2.13. Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ é caótica.

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k . Como $h^k([a, b]) \supset [a, b]$, existe $y \in [a, b]$ tal que $h^k(y) = y$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \varepsilon$, concluímos que $\text{Per}(h|_\Lambda)$ é denso em Λ . \square

Novamente, o Teorema 2.13 é válido para $\mu \in (4, 2 + \sqrt{5})$, porém a demonstração é mais complicada.

Por fim, enunciamos o Teorema 2.14 que nos permite, sob algumas hipóteses, concluir um sistema dinâmico é caótico apenas verificando se ele é topologicamente transitivo e se o conjunto de pontos periódicos é denso.

Teorema 2.14. Seja $f : X \rightarrow X$ é uma função contínua, onde X é um conjunto infinito. Se $\text{Per}(f)$ é denso em X e f é topologicamente transitiva, então f é caótica.

Demonstração. Ver [Holmgren, 1996]. \square

2.4 Conjugação Topológica

Vamos estudar um conceito em sistemas dinâmicos que nos permite considerar iguais dois sistemas dinâmicos que inicialmente são distintos.

Definição 2.15. Sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $\tau : X \rightarrow Y$ funções. Dizemos que f e g são topologicamente conjugadas por τ se as seguintes condições são válidas:

- i. τ é um homeomorfismo.
- ii. $\tau \circ f = g \circ \tau$.

Intuitivamente, o primeiro item afirma que os conjuntos X e Y são iguais e o segundo, que os sistemas dinâmicos f e g são iguais. Por exemplo, é imediato verificar que $p \in \text{Per}_n(f)$ se, e somente se, $\tau(p) \in \text{Per}_n(g)$. A Proposição 2.16 nos mostra que sistemas dinâmicos topologicamente conjugados compartilham outras propriedades.

Proposição 2.16. Sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $\tau : X \rightarrow Y$ funções. Se f e g são topologicamente conjugadas por τ , então

- 1. $\text{Per}(f)$ é denso em X se, e somente se, $\text{Per}(g)$ é denso em Y .

2. f é topologicamente transitiva se, e somente se, g é topologicamente transitiva.

Demonstração.

1. Se $\text{Per}(f)$ denso em X , então $\tau(\text{Per}(f))$ é denso em Y , pois τ é contínua. Observando que $\tau(\text{Per}(f)) = \text{Per}(g)$, concluímos que $\text{Per}(g)$ é denso em Y . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

2. Pela continuidade de τ , dados $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y, z \in X$, $|x - z| < \delta$ e $|y - f^k(z)| < \delta$, então $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^k(z))| < \varepsilon$.

Se $x', y' \in Y$, existem $x, y \in X$ tais que $\tau(x) = x'$ e $\tau(y) = y'$. Sendo f topologicamente transitiva, existem $z \in X$ e $k \geq 1$ tais que $|x - z| < \delta$ e $|y - f^k(z)| < \delta$. Desse modo, $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^k(z))| < \varepsilon$. Se $\tau(z) = z'$, então $|x' - z'| < \varepsilon$ e $|y' - g^k(z')| < \varepsilon$. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

□

Em geral, a dependência sensível das condições iniciais não é preservada por conjugação topológica. De fato, considere as funções $f : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ e $g : (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ dadas por $f(x) = g(x) = x^2$. É possível mostrar que f e g são topologicamente conjugadas pelo homeomorfismo $\tau : (0, 1) \rightarrow (1, \infty)$ dado por $\tau(x) = \frac{1}{x}$ e que apenas g possui dependência sensível das condições iniciais.

Na sequência, utilizaremos a conjugação topológica para demonstrar que h é caótica para $\mu = 4$.

Lema 2.17. A função $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é caótica.

Demonstração. Inicialmente, é possível provar por indução que $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$ é uma função bijetora linear para todo $0 \leq k < 2^n$ e para todo $n \geq 1$. Ver Figura 1. Desse modo, dados $x \in [0, 1]$ e $\varepsilon > 0$, sejam $n \geq 1$ e $0 \leq k < 2^n$ tais que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e $x \in I = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$.

a) $\text{Per}(T)$ é denso em $[0, 1]$.

Como $T(I) \supset I$, existe $p \in I$ tal que $T^n(p) = p$. Observando que $|x - p| \leq \frac{1}{2^n}$, concluímos que $\text{Per}(T)$ é denso em $[0, 1]$.

b) T é topologicamente transitiva.

Sendo $T^n : I \rightarrow [0, 1]$ bijetora, se $y \in [0, 1]$, então existe $z \in I$ tal que $T^n(z) = y$. Observando que $|x - z| \leq \frac{1}{2^n}$, concluímos que T é topologicamente transitiva.

c) T depende sensivelmente das condições iniciais.

Sendo $T^n : I \rightarrow [0, 1]$ bijetora, existem $a, b \in I$ tais que $T^n(a) = 0$ e $T^n(b) = 1$. Se $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, então $|T^n(x) - T^n(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$ e se $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, então

$|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| \leq \frac{1}{2^n}$ e $|x - b| \leq \frac{1}{2^n}$, concluímos que T depende sensivelmente das condições iniciais.

□

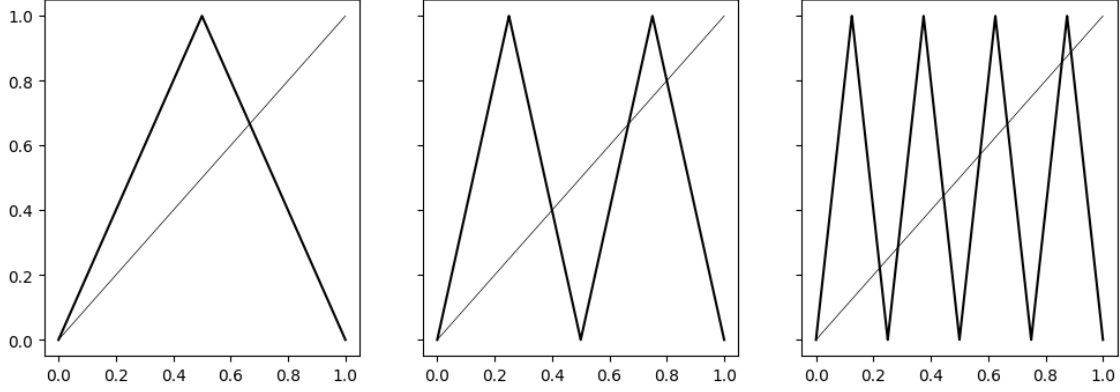


Figura 1: Gráficos de T , T^2 e T^3 .

Teorema 2.18. *Se $\mu = 4$, então h é caótica.*

Demonstração. Basta observar que $\tau \circ T = h \circ \tau$, onde $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é o homeomorfismo dado por $\tau(x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$. □

2.5 Dinâmica Simbólica

Dado $N \geq 2$, seja Σ_N o conjunto das sequências de números naturais limitados entre 1 e N , isto é, $\Sigma_N = \{(x_0 x_1 x_2 \dots) : 1 \leq x_n \leq N \text{ para todo } n \geq 0\}$. Seja também $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$d_N(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{N^k},$$

onde $x = (x_0 x_1 x_2 \dots)$ e $y = (y_0 y_1 y_2 \dots)$. É imediato verificar que (Σ_N, d_N) é um espaço métrico. Por fim, seja $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ a função dada por $\sigma(x_0 x_1 x_2 \dots) = (x_1 x_2 x_3 \dots)$.

Proposição 2.19. *Sejam $x = (x_0 x_1 x_2 \dots)$ e $y = (y_0 y_1 y_2 \dots)$ elementos de Σ_N .*

1. *Se $x_k = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, então $d_N(x, y) \leq \frac{1}{N^n}$.*
2. *Se $d_N(x, y) < \frac{1}{N^n}$, então $x_k = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n$.*

Demonstração. Exercício. □

Proposição 2.20. *σ é contínua.*

Demonstração. Sejam $x = (x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_N$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Se $d_N(x, y) < \frac{1}{2^{n+1}}$, onde $y = (y_0 y_1 y_2 \dots) \in \Sigma_N$, então $x_k = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n+1$. Como $\sigma(x) = (x_1 x_2 x_3 \dots)$ e $\sigma(y) = (y_1 y_2 y_3 \dots)$, temos que as primeiras $n+1$ entradas de $\sigma(x)$ e $\sigma(y)$ são iguais. Desse modo, $d_N(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, σ é contínua. □

Para a demonstração do próximo resultado, vamos considerar $N = 2$. Se $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, sejam $I_1 = [0, x_1]$ e $I_2 = [x_2, 1]$. Como $\Lambda \subset I_1 \cup I_2$, podemos definir a função $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ dada por $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$, onde $x_k = 1$ se $h^k(x) \in I_1$ e $x_k = 2$ se $h^k(x) \in I_2$ para todo $k \geq 0$.

Teorema 2.21. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ e σ são topologicamente conjugadas por S .*

Demonstração.

a) S é injetora.

Sejam $x, y \in \Lambda$, $x < y$. Se $S(x) = S(y)$, então $h^k(x)$ e $h^k(y)$ está no mesmo lado em relação ao ponto crítico para todo $k \geq 0$ e, portanto, h é monótona em cada intervalo J_k cujos extremos são $h^k(x)$ e $h^k(y)$. Desse modo, se $z \in [x, y]$, então $h^k(z) \in J_k \subset I_1 \cup I_2$ para todo $k \geq 0$ e, portanto, $z \in \Lambda$, o que é um absurdo pois Λ é totalmente desconexo.

b) S é sobrejetora.

Seja $(x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_2$. Inicialmente, para cada $n \geq 0$, considere

$$I_{x_0 \dots x_n} = \{x \in [0, 1] : x \in I_{x_0}, \dots, h^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

Escrevendo $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap h^{-1}(I_{x_1 \dots x_n})$, é possível concluir por indução que $I_{x_0 \dots x_n}$ é um intervalo fechado não vazio. Além disso, $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0 \dots x_{n-1}} \cap h^{-n}(I_{x_n}) \subset I_{x_0 \dots x_{n-1}}$. Desse modo, $I_{x_0}, I_{x_0 x_1}, I_{x_0 x_1 x_2}, \dots$ é uma sequência de intervalos encaixantes fechados não vazios e, portanto, existe $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n}$. Como $h^k(x) \in I_{x_k}$ para todo $k \geq 0$, concluímos que $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$. Observe que x é único, pois S é injetora.

c) S é contínua.

Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 0$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Se $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$, então $x \in I_{x_0 \dots x_k}$. Sendo $I_{x_0 \dots x_k}$ um intervalo fechado, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \delta$, então $y \in I_{x_0 \dots x_k}$. Desse modo, $S(x)$ e $S(y)$ são iguais nas primeiras $k + 1$ entradas e, portanto, $d_2(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$.

d) S^{-1} é contínua.

Exercício.

e) $S \circ h|_\Lambda = \sigma \circ S$.

Se $x \in \Lambda$ e $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$, então $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n} = \{x\}$. Desse modo, é imediato que

$$S \circ h|_\Lambda(x) = S(h(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{x_0 \dots x_n})) = S(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{x_1 \dots x_n}) = (x_1 x_2 x_3 \dots) = \sigma \circ S(x).$$

□

O teorema anterior nos permite saber, por exemplo, a quantidade de pontos periódicos de $h|_\Lambda$ de período n para todo $n \geq 1$.

Corolário 2.22. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ possui 2^n pontos periódicos de período n para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Basta observar que os pontos periódicos de σ de período n são determinados pelas primeiras n entradas e, portanto, σ possui 2^n pontos periódicos de período n para todo $n \geq 1$. \square

2.6 Matriz de Transição

Dado $N \geq 2$, dizemos que A é uma matriz de transição se $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ é uma matriz quadrada de ordem N tal que $a_{ij} \in \{0, 1\}$ para todo $1 \leq i, j \leq N$. Se A é uma matriz de transição, definimos o conjunto Σ_A por

$$\Sigma_A = \{(x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_N : a_{x_k x_{k+1}} = 1 \text{ para todo } k \geq 0\}.$$

Observe que se $x \in \Sigma_A$, então $\sigma(x) \in \Sigma_A$. Desse modo, podemos definir a função $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ como sendo a restrição de σ em Σ_A .

Vamos estudar a dinâmica da família quadrática para $\mu = 3.839$. Se $a = 0.149888$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, então é possível mostrar que $h^3(I) \subset I$ e $|Dh^3(I)| < 1$ e, portanto, o intervalo I possui um ponto periódico atrator de h de período primo 3. Se a_1, a_2 e a_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$a_1 \simeq 0.149888, \quad a_2 \simeq 0.489149 \quad \text{e} \quad a_3 \simeq 0.959299.$$

Com auxílio do Teorema de Sharkovsky e do Teorema de Singer, que estudaremos na sequência, podemos concluir que h possui infinitos pontos periódicos e essa é a única órbita atratora de h .

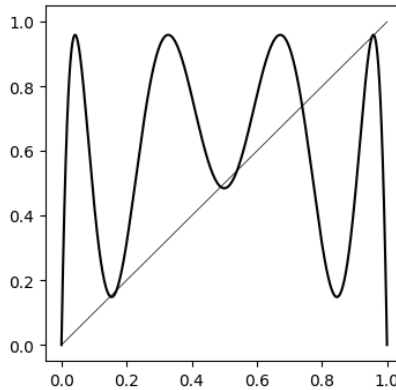


Figura 2: Gráfico de h^3 para $\mu = 3.839$.

De modo análogo, concluímos que h possui outra órbita de tamanho 3. Se b_1, b_2 e b_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040, \quad b_2 \simeq 0.539247 \quad \text{e} \quad b_3 \simeq 0.953837.$$

Observando o gráfico de h^3 , vemos que para cada b_i , existe b'_i no lado oposto de b_i em relação ao ponto a_i tal que $h^3(b'_i) = b_i$. Defina $A_1 = (b'_1, b_1)$, $A_2 = (b'_2, b_2)$ e $A_3 = (b_3, b'_3)$.

Sendo h^3 simétrica em relação ao ponto $\frac{1}{2}$, temos que $h(b'_2) = h(b_2) = b_3$. Além disso,

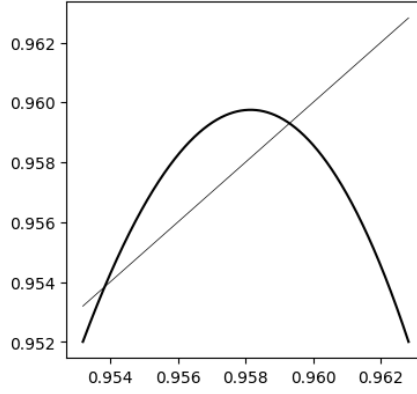


Figura 3: Gráfico de h^3 numa vizinhança de a_3 para $\mu = 3.839$.

podemos observar que $h(b'_1) = b'_2$ e $h(b'_3) = b'_1$ e, portanto, h mapeia de forma monótona A_1 em A_2 e A_3 em A_1 . Observando que o máximo de h em A_2 é $h(\frac{1}{2}) = 0.95975 < b'_3$, concluímos que $h(A_2) \subset A_3$.

Sabemos que se $x \notin [0, 1]$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} h^n(x) = -\infty$. Além disso, o único ponto periódico em A_i é a_i e todos os pontos em A_i tendem para a órbita de a_i . Desse modo, todos os outros pontos periódicos de h residem no complemento de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ em $[0, 1]$, que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam $I_0 = [0, b'_1]$, $I_1 = [b_1, b'_2]$, $I_2 = [b_2, b_3]$ e $I_3 = [b'_3, 1]$ tais intervalos.

Proposição 2.23. *Se $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$ é um ponto periódico de h , então $x \in I_1 \cup I_2$.*

Demonstração. Observando que h é monótona em cada I_k , temos que $h(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$, $h(I_1) = I_2$, $h(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$ e $h(I_3) = I_0$. Desse modo, se $x \in I_1 \cup I_2$ é periódico, então órbita de x está contida em $I_1 \cup I_2$.

Por outro lado, se $x \in I_0 \setminus \{0\}$, existe um menor $n \geq 1$ tal que $h^n(x) \notin I_0$. Se $h^n(x) \in A_1$, então x não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de A_1 é a_1 . Se $h^n(x) \in I_1$, então x não pode ser periódico, pois caso contrário a órbita de x estaria contida em $I_1 \cup I_2$ e nunca retornaria para I_0 . Finalmente, se $x \in I_3$, então $h(x) \in I_0$ e a análise é análoga. \square

Considere o conjunto $\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2 : h^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}$. Pela proposição anterior, todos os pontos periódicos de h estão em Λ , com exceção dos pontos $0, a_1, a_2$ e a_3 .

Para a demonstração do próximo teorema, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_A$ a função dada por $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$, onde $x_k = 1$ se $h^k(x) \in I_1$ e $x_k = 2$ se $h^k(x) \in I_2$ para todo $k \geq 0$. Observe que S está bem definida, pois $h(I_1) = I_2$ e $h(I_2) \subset I_1 \cup I_2$ e, portanto, $a_{x_k x_{k+1}} = 1$ para todo $k \geq 0$.

Lema 2.24. *Existe $n_0 \geq 1$ tal que $|Dh^n(\Lambda)| > 1$ para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Inicialmente, podemos observar graficamente que $|Dh(I_1 \cup I_2)| \geq \nu$ para algum $\nu \in (0, 1)$. Podemos observar também que o subconjunto de $I_1 \cup I_2$ no qual a derivada em

módulo de h^3 é menor que ou igual à 1 é formado por três intervalos fechados e que cada um desses intervalos possui intersecção vazia com Λ e, portanto, $|Dh^3(\Lambda)| \geq \lambda$ para algum $\lambda > 1$.

Por fim, sejam $x \in \Lambda$ e $K \geq 1$ tal que $\nu^2 \lambda^K > 1$. Se $n_0 = 3K$ e $n \geq n_0$, podemos escrever $n = 3L + m$, onde $L \geq K$ e $0 \leq m \leq 2$. Desse modo, se $m = 0$, então $|Dh^n(x)| = |Dh^{3L}(x)| \geq \lambda^L > 1$; se $m = 1$, então $|Dh^n(x)| = |Dh(h^{3L}(x))||Dh^{3L}(x)| \geq \nu \lambda^L > 1$; e se $m = 2$, então $|Dh^n(x)| = |Dh(h^{3L+1}(x))||Dh(h^{3L}(x))||Dh^{3L}(x)| \geq \nu^2 \lambda^L > 1$. \square

Com isso, enunciamos o teorema cuja demonstração é análoga à do Teorema 2.21.

Teorema 2.25. $h|_\Lambda$ e σ_A são topologicamente conjugadas por S .

Demonstração. Exercício. \square

Sabendo que $h|_\Lambda$ e σ_A são topologicamente conjugadas, a proposição a seguir nos permite saber a quantidade de pontos periódicos de $h|_\Lambda$ de período n para todo $n \geq 1$.

Proposição 2.26. Se A uma matriz de transição de ordem N , então σ_A possui $\text{Tr}(A^n)$ pontos periódicos de período n para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Inicialmente, observe que se $(x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_N$ é um ponto periódico de σ de período n , então $x_k = x_{k+n}$ para todo $k \geq 0$. Desse modo, $(x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_A$ se, e somente se, $a_{x_0 x_1} = a_{x_1 x_2} = \dots = a_{x_{n-1} x_0} = 1$ e, portanto, a quantidade de pontos periódicos de σ_A de período n é dada por

$$\sum_{1 \leq x_0, \dots, x_{n-1} \leq N} a_{x_0 x_1} a_{x_1 x_2} \dots a_{x_{n-1} x_0}.$$

Por outro lado, é imediato verificar que essa soma é $\text{Tr}(A^n)$. \square

2.7 Bifurcação

A família quadrática exibe outro fenômeno que ocorre em sistemas dinâmicos: a bifurcação. Através desse fenômeno, vamos explicar gráfica e intuitivamente como a dinâmica de h , que é simples para μ pequeno, se torna caótica para μ suficientemente grande.

Seja f_λ uma família parametrizada de funções no parâmetro λ de modo que a função

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x),$$

definida num aberto de \mathbb{R}^2 , seja de classe \mathcal{C}^∞ nas variáveis x e λ . Dizemos que f_λ sofre uma bifurcação em λ_0 se existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: se $\lambda_1 \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ e $\lambda_2 \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$, então f_{λ_1} e f_{λ_2} não são topologicamente conjugadas. Por exemplo, uma bifurcação ocorre quando há alteração na estrutura dos pontos periódicos.

Exemplo 2.27.

- a) A família E_λ de funções dadas por $E_\lambda(x) = e^{x+\lambda}$ sofre uma bifurcação em $\lambda_0 = -1$.

Conforme o parâmetro cresce, os dois pontos fixos vão se aproximando até se tornarem um único ponto fixo que, após isso, desaparece. Uma bifurcação com essas características é chamada de bifurcação tangente. Ver Figura 4.

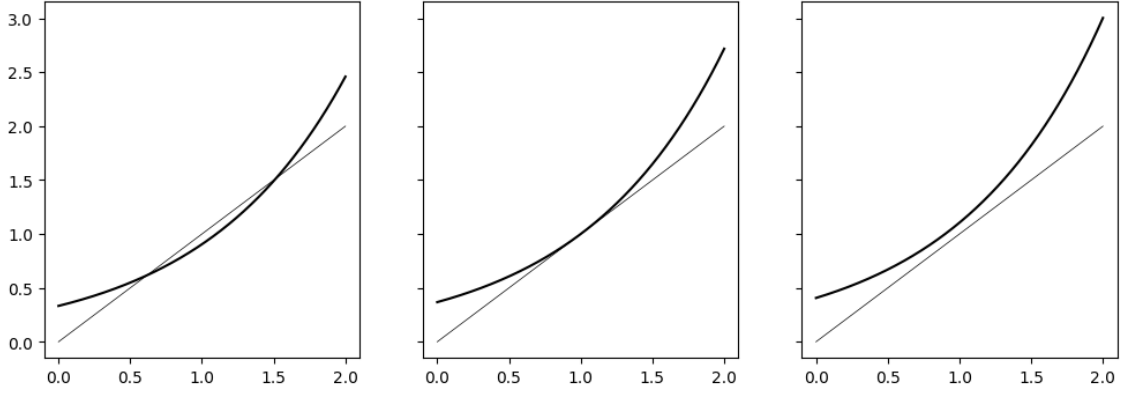


Figura 4: Gráficos de E_λ numa vizinhança de 1 para $\lambda = -1.1$, $\lambda = -1$ e $\lambda = -0.9$.

b) A família quadrática sofre uma bifurcação em $\mu_0 = 3$.

Conforme o parâmetro cresce, o ponto fixo, que inicialmente é atrator, se torna repulsor e, além disso, nasce uma órbita periódica de período 2 numa vizinhança do ponto fixo. Uma bifurcação com essas características é chamada de bifurcação com duplicação de período. Ver Figura 5.

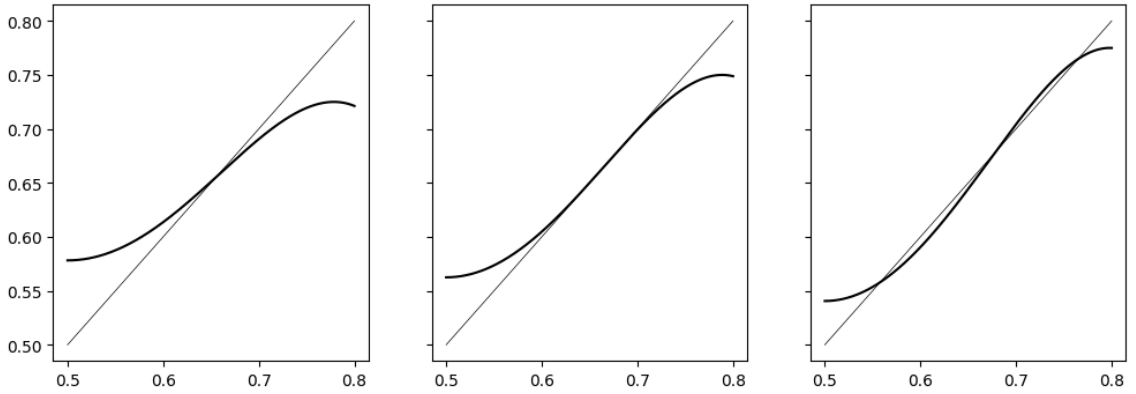


Figura 5: Gráficos de h^2 numa vizinhança de p_μ para $\mu = 2.9$, $\mu = 3$ e $\mu = 3.1$.

Observe, nos exemplos, que as bifurcações ocorreram quando a derivada em módulo no ponto fixo se tornou igual a 1. O teorema a seguir nos mostra que isso não é coincidência.

Teorema 2.28. *Seja f_λ uma família parametrizada de funções. Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$,
2. $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$.

Então existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0 , respectivamente, e uma função $p : I \rightarrow J$ de classe C^∞ tais que

1. $p(\lambda_0) = x_0$,
2. $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ para todo $\lambda \in I$.

Além disso, f_λ não possui outros pontos fixos em J .

Demonstração. Basta aplicar o Teorema da Função Implícita para a função $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$ no ponto (x_0, λ_0) . \square

Vamos estudar com um pouco mais de detalhes a bifurcação com duplicação de período que ocorre na família quadrática. Inicialmente, observe que se $\mu > 2$, então existe $p'_\mu < p_\mu$ tal que $h(p'_\mu) = p_\mu$. Na Figura 6, observe o gráfico de h^2 para alguns valores de μ , juntamente com um quadrado de vértices (p'_μ, p_μ) , (p_μ, p_μ) , (p_μ, p'_μ) e (p'_μ, p'_μ) .

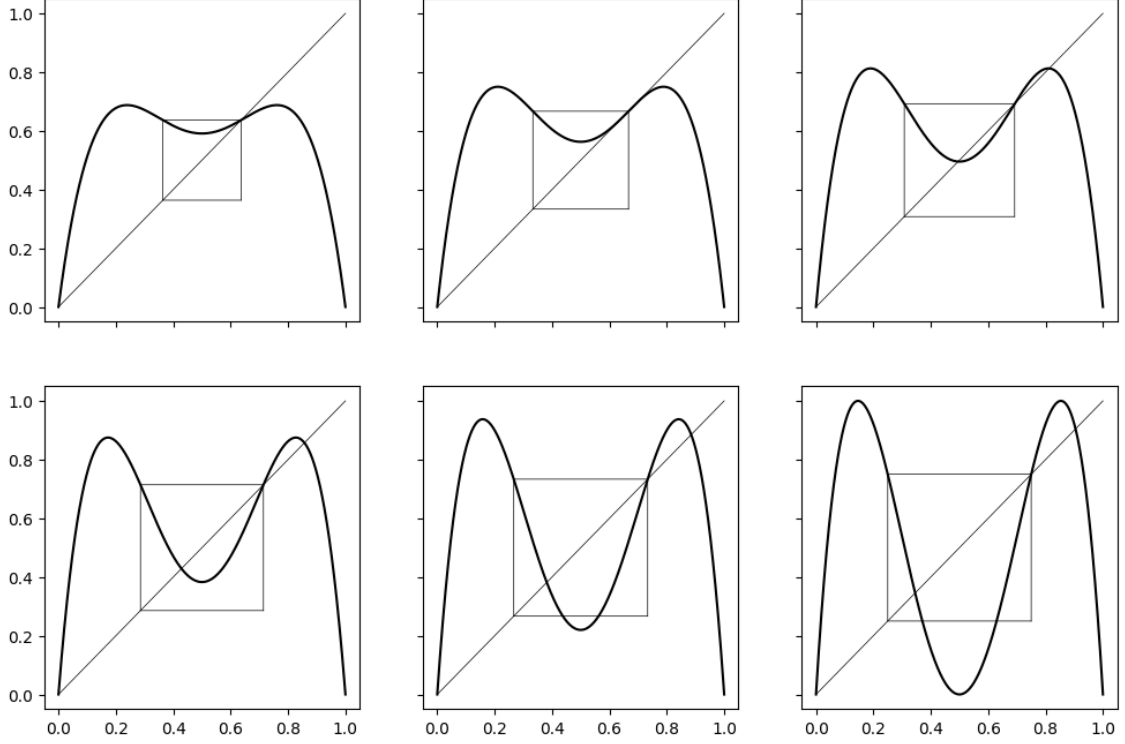


Figura 6: Gráficos de h^2 para $\mu = 2.75$, $\mu = 3$, $\mu = 3.25$, $\mu = 3.5$, $\mu = 3.75$ e $\mu = 4$.

Restringindo o gráfico de h^2 ao quadrado e rotacionando em π radianos, vemos que ele se assemelha ao gráfico da própria h no intervalo $[0, 1]$ para um valor de μ diferente. Vamos deixar essa ideia mais precisa através do operador de renormalização, que nos permite analisar a segunda iterada de uma função na mesma escala que a original.

Se $\mu > 2$, considere a função $L : [p'_\mu, p_\mu] \rightarrow [0, 1]$ linear bijetora tal que $L(p'_\mu) = 1$ e $L(p_\mu) = 0$. Desse modo, definimos a renormalização de h como a função $Rh : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $Rh(x) = L \circ h^2 \circ L^{-1}(x)$. Observe que cada ponto fixo de Rh está relacionado com um ponto periódico de h de período 2. Além disso, o gráfico de Rh não está contido em $[0, 1]$ para algum $\mu < 4$. Ver Figura 7.

Desse modo, esperamos que Rh sofra uma bifurcação com duplicação de período conforme o parâmetro cresce e, de maneira análoga, que h^2 sofra uma bifurcação com duplicação de período. Continuando esse processo, temos uma sucessão de bifurcações com duplicação de período na família quadrática.

O computador nos permite observar esse fato experimentalmente. Para isso, vamos computar o digrama de órbita do ponto crítico da família quadrática para $\mu > 2$. Nesse diagrama, veremos o comportamento assintótico de órbita de $\frac{1}{2}$ em função de μ . Escolhemos a órbita de $\frac{1}{2}$ para

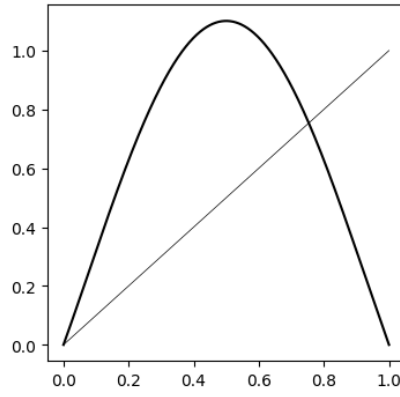


Figura 7: Gráfico de Rh para $\mu = 3.75$.

desenhar o diagrama pois, como veremos no Teorema de Singer, se h possui uma órbita periódica atratora, então essa órbita atrai o ponto crítico.

Para construir o diagrama de órbita, escolhemos 10000 valores de μ igualmente espaçados em $[2, 4]$ e, para cada um desses valores, plotamos $h^k(\frac{1}{2})$ na abscissa μ para todo $100 \leq k \leq 300$.

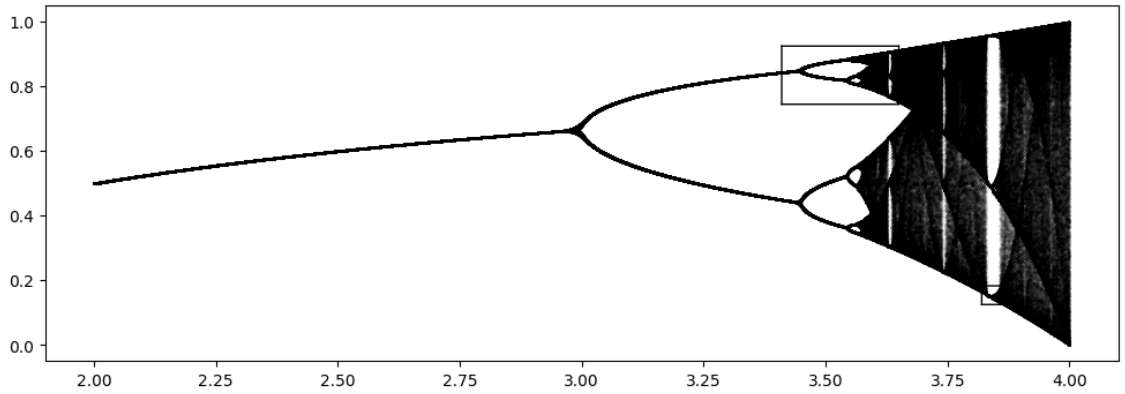


Figura 8: Diagrama de órbita de h para $\mu \in [2, 4]$.

Na Figura 8 vemos alguns fatos que já estudamos: se $\mu \in [2, 3]$, então as órbitas são atraídas para o ponto fixo p_μ ; quando μ passa de 3, nasce uma órbita periódica de período 2; e se $\mu = 3.839$, então existe uma órbita atratora de período 3.

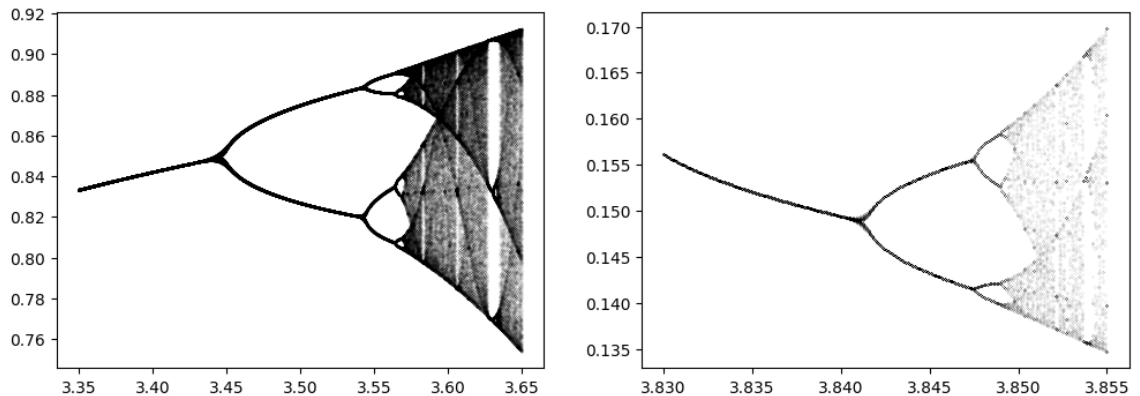


Figura 9: Ampliação das regiões retangulares marcadas na Figura 8.

Por fim, ampliando algumas regiões do diagrama, percebemos um fato interessante: elas são semelhantes ao próprio diagrama, como está sugerido na Figura 9.

3 Teorema de Sharkovsky

Nessa seção, consideraremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Além disso, escreveremos $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_n$ quando I_0, I_1, \dots, I_n são intervalos compactos e $f(I_k) \supset I_{k+1}$ para todo $0 \leq k < n$.

Proposição 3.1. *Se $I_0 \rightarrow I_1$, então existe um intervalo fechado $I'_0 \subset I_0$ tal que $f(I'_0) = I_1$.*

Demonstração. Se $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [c, d]$, sejam $p, q \in [a, b]$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$. Suponha que $p \leq q$; se $q \leq p$, a demonstração é análoga.

Definindo $b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\}$ e $a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$ e observando que f é contínua, podemos concluir que $f(I'_0) = I_1$, onde $I'_0 = [a', b']$. \square

Lema 3.2. *Se $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$, então existe $p \in I_0$ tal que as seguintes condições são válidas:*

1. $f^k(p) \in I_k$ para todo $1 \leq k < n$.
2. $f^n(p) = p$.

Demonstração. Pela Proposição 3.1, podemos construir uma sequência de intervalos fechados $I'_0, I'_1, \dots, I'_{n-1}$ com as seguintes propriedades:

- a) $I_0 \supset I'_0 \supset I'_1 \supset \dots \supset I'_{n-1}$.
- b) $f^k(I'_{k-1}) = I_k$ para todo $1 \leq k < n$.
- c) $f^n(I'_{n-1}) = I_0$.

Desse modo, existe $p \in I'_{n-1}$ tal que $f^n(p) = p$. Em particular, $p \in I_0$ e $f^k(p) \in I_k$ para todo $1 \leq k < n$. \square

Teorema 3.3. *Se $\text{Per}_3(f) \neq \emptyset$, então $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Sejam $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de um elemento de $\text{Per}_3(f)$. Suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$; se $f(p_1) = p_3$ e $f(p_3) = p_2$, a demonstração é análoga. Definindo $I_0 = [p_1, p_2]$ e $I_1 = [p_2, p_3]$, temos que $I_0 \rightarrow I_1$, $I_1 \rightarrow I_0$ e $I_1 \rightarrow I_1$. Desse modo, podemos demonstrar as seguintes afirmações:

- a) $\text{Per}_1(f) \neq \emptyset$.

De fato, $I_1 \rightarrow I_1$ implica que existe $p \in I_1$ tal que $f(p) = p$.

- b) $\text{Per}_2(f) \neq \emptyset$.

De fato, $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$ implica que existe $p \in I_0$ tal que $f(p) \in I_1$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in I_0 \cap I_1$, o que é um absurdo pois $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e $p_2 \in \text{Per}_3(f)$.

c) $\text{Per}_4(f) \neq \emptyset$.

De fato, $I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1$ implica que existe $p \in I_1$ tal que $f^k(p) \in I_1$ para todo $1 \leq k < 3$, $f^3(p) \in I_0$ e $f^4(p) = p$. Se $f^3(p) = p$, então $p \in I_0 \cap I_1$, o que é um absurdo pois $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e $f^2(p_2) = p_1 \notin I_1$. Se $f^k(p) = p$ para algum $1 \leq k < 3$, então $f^k(p) \in I_1$ para todo $k \geq 1$. Em particular, $f^3(p) \in I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e, portanto, $f^4(p) = p = p_3$, o que é um absurdo pois $f(p_3) = p_1 \notin I_1$.

Por fim, podemos demonstrar de maneira análoga à última afirmação que $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 4$. \square

O Teorema 3.3 é um caso especial do Teorema de Sharkovsky que será enunciado na sequência. Inicialmente, considere a seguinte ordenação dos números naturais:

Definição 3.4 (Ordenação de Sharkovsky).

$$3 \triangleright 5 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

A ordenação de Sharkovsky lista todos os ímpares diferentes de 1; depois, todos os ímpares diferentes de 1 multiplicados por 2; depois, todos os ímpares diferentes de 1 multiplicados por 4; e assim sucessivamente. Por fim, lista todas as potências de 2 em ordem decrescente.

Desse modo, podemos enunciar o Teorema de Sharkovsky cuja demonstração, apesar de não usar nenhuma ferramenta além daquelas usadas para demonstrar o Teorema 3.3, é consideravelmente maior.

Teorema 3.5 (Sharkovsky). *Se $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$, então $\text{Per}_m(f) \neq \emptyset$ para todo $n \triangleright m$.*

Demonstração. Ver [Burns e Hasselblatt, 2011]. \square

O Teorema de Sharkovsky pode ser usado para provar que órbitas periódicas de certos tamanhos não existem. Por exemplo, observando os gráficos de h , h^2 e h^4 para $\mu = 3.2$ vemos que $\text{Per}_4(h) = \emptyset$ e, portanto, $\text{Per}_n(h) = \emptyset$ para todo $n \geq 3$. Ver Figura 10.

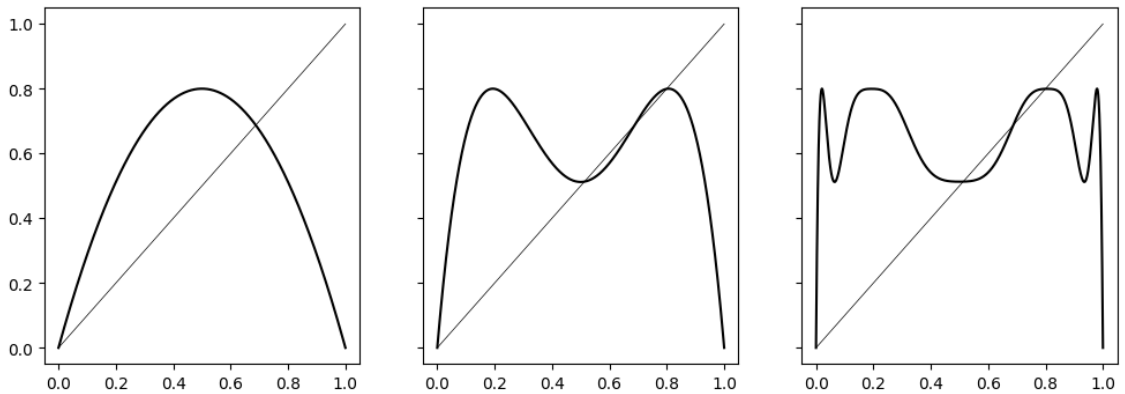


Figura 10: Gráficos de h , h^2 e h^4 para $\mu = 3.2$.

Por fim, a ordenação de Sharkovsky é a melhor possível. Se, por exemplo, $\text{Per}_5(f) \neq \emptyset$ implica que $\text{Per}_3(f) \neq \emptyset$, então o número 5 pode ser removido dessa ordenação. O seguinte teorema mostra que isso não é possível.

Teorema 3.6. *Se $n \geq 1$, então existe uma função f com as seguintes propriedades:*

1. $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$.
2. $\text{Per}_m(f) = \emptyset$ para todo $m \triangleright n$.

Demonstração. Seja $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a função dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

e considere a família de funções $T_\lambda(x) = \min\{\lambda, T(x)\}$ definidas em $[0, 1]$, onde o parâmetro λ varia em $[0, 1]$.

Inicialmente, observe que $T(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$ implica que $T_1 = T$. Além disso, T_1 possui 2^k pontos periódicos de período k para todo $k \geq 1$. Desse modo, podemos definir

$$\lambda(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } k \text{ de } T_1\}\}$$

para todo $k \geq 1$. A ideia principal da prova consiste no fato de que $\lambda(k)$ desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de $T_{\lambda(k)}$. As seguintes afirmações tornam esse fato preciso:

- a) *Se $\mathcal{O} \subset [0, \lambda)$ é uma órbita de T_λ , então \mathcal{O} é uma órbita de T_1 .*
 Se $p \in \mathcal{O}$, então $T_\lambda(p) \in [0, \lambda)$. Desse modo, $T_\lambda(p) = \min\{\lambda, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$. Assim, T_λ e T_1 coincidem em \mathcal{O} e, portanto, \mathcal{O} é uma órbita de T_1 .
- b) *Se $\mathcal{O} \subset [0, \lambda]$ é uma órbita de T_1 , então \mathcal{O} é uma órbita de T_λ .*
 Se $p \in \mathcal{O}$, então $T_1(p) \in [0, \lambda]$. Desse modo, $T_\lambda(p) = \min\{\lambda, T_1(p)\} = T_1(p)$. Assim, T_λ e T_1 coincidem em \mathcal{O} e, portanto, \mathcal{O} é uma órbita de T_λ .
- c) *$T_{\lambda(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(k))$ de tamanho j se, e somente se, $\lambda(k) > \lambda(j)$.*
 Se $T_{\lambda(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(k))$ de tamanho j , então \mathcal{O} é uma órbita de T_1 e, pela definição de $\lambda(j)$, concluímos que $\lambda(k) > \lambda(j)$. Por outro lado, se $\lambda(k) > \lambda(j)$, então T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(j)] \subset [0, \lambda(k)]$ de tamanho j e, desse modo, \mathcal{O} é uma órbita de $T_{\lambda(k)}$.
- d) *A órbita de T_1 que contém $\lambda(k)$ é uma órbita de tamanho k de $T_{\lambda(k)}$. Além disso, todas as outras órbitas de $T_{\lambda(k)}$ estão em $[0, \lambda(k))$.*
 Pela definição de $\lambda(k)$, T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(k)]$ de tamanho k e, portanto, \mathcal{O} é uma órbita de $T_{\lambda(k)}$.
 Na segunda parte, basta observar que $\lambda(k)$ é o valor máximo de $T_{\lambda(k)}$ e, desse modo, toda órbita de $T_{\lambda(k)}$ está contida em $[0, \lambda(k)]$. Em particular, se a órbita não contém $\lambda(k)$, então ela está contida em $[0, \lambda(k))$.
- e) *$k \triangleright j$ se, e somente se, $\lambda(k) > \lambda(j)$.*

Suponha que $k \triangleright j$. Sabemos que $T_{\lambda(k)}$ possui uma órbita de tamanho k e, pelo Teorema de Sharkovsky, $T_{\lambda(k)}$ admite uma órbita de tamanho j . Em particular, essa órbita está contida em $[0, \lambda(k))$ e, portanto, $\lambda(k) > \lambda(j)$.

Suponha que $\lambda(k) > \lambda(j)$. Se $j \triangleright k$, então $\lambda(k) < \lambda(j)$ pela demonstração no parágrafo anterior e, portanto, $k \triangleright j$.

Desse modo, $T_{\lambda(n)}$ possui órbita de tamanho n para cada $n \geq 1$. Além disso, se $m \triangleright n$ então $\lambda(m) > \lambda(n)$ e, portanto, $T_{\lambda(n)}$ não possui órbita de tamanho m . \square

4 Teorema de Singer

Ao longo dessa seção, consideraremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^3 . Iniciamos com a seguinte definição:

Definição 4.1 (Derivada de Schwarz). A derivada de Schwarz de f é a função $\mathcal{S}f : \mathbb{R} \setminus C_f \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{D^3f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f(x)}{Df(x)} \right)^2,$$

onde $C_f = \{x \in \mathbb{R} : Df(x) = 0\}$.

Vamos estudar funções que possuem a derivada de Schwarz negativa. Por exemplo, $Sh(x) = -6(1 - 2x)^{-2} < 0$ para todo $x \neq \frac{1}{2}$. A característica fundamental dessa propriedade é ser preservada em composição de funções.

Proposição 4.2. Se $\mathcal{S}f < 0$ e $\mathcal{S}g < 0$, então $\mathcal{S}(f \circ g) < 0$.

Demonstração. Basta observar que $\mathcal{S}(f \circ g)(x) = \mathcal{S}f(g(x))(Dg(x))^2 + \mathcal{S}g(x)$. \square

Corolário 4.3. Se $\mathcal{S}f < 0$, então $\mathcal{S}f^n < 0$ para todo $n \geq 1$.

Vamos mostrar que se uma função possui derivada de Schwarz negativa e um número finito de pontos críticos, então existe um limite para a quantidade de órbitas periódicas atratoras. Para isso, provaremos uma série de lemas.

Lema 4.4. Se $\mathcal{S}f < 0$ e x_0 é um ponto de mínimo local de Df , então $Df(x_0) \leq 0$.

Demonstração. Se $Df(x_0) \neq 0$, então

$$\mathcal{S}f(x_0) = \frac{D^3f(x_0)}{Df(x_0)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f(x_0)}{Df(x_0)} \right)^2 < 0.$$

Sendo x_0 ponto de mínimo local de Df , temos que $D^2f(x_0) = 0$ e $D^3f(x_0) \geq 0$ e, portanto, $Df(x_0) < 0$. \square

Lema 4.5. Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c$ são pontos fixos de f com $Df(b) \leq 1$, então f possui ponto crítico em (a, c) .

Demonstração. Pelo TVM, existem $r \in (a, b)$ e $s \in (b, c)$ tais que $Df(r) = Df(s) = 1$. Sendo Df contínua, Df restrita ao intervalo $[r, s]$ possui mínimo global. Como $b \in (r, s)$ e $Df(b) \leq 1$, temos que Df possui mínimo local em (r, s) . Utilizando Lema anterior e o TVI, a demonstração está concluída. \square

Lema 4.6. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c < d$ são pontos fixos de f , então f possui ponto crítico em (a, d) .*

Demonstração. Se $Df(b) \leq 1$ ou $Df(c) \leq 1$, o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se $Df(b) > 1$ e $Df(c) > 1$, existem $r, t \in (b, c)$ tais que $r < t$, $f(r) > r$ e $f(t) < t$. Pelo TVM, existe $s \in (r, t)$ tal que $Df(s) < 1$. Portanto, Df possui mínimo local em (b, c) . Utilizando Lema 4.4 e o TVI, a demonstração está concluída. \square

Lema 4.7. *Se f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos críticos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo TVM, se $c \in \mathbb{R}$, então f possui ponto crítico entre dois elementos de $f^{-1}(c)$ e, portanto, $f^{-1}(c)$ é finito. De modo mais geral, é possível provar por indução que $f^{-n}(c)$ é finito para todo $n \geq 1$.

Se $n \geq 1$, então $Df^n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} Df(f^k(x)) = 0$ se, e somente se, $f^k(x)$ é ponto crítico de f para algum $1 \leq k < n$. Portanto, o conjunto de pontos críticos de f^n é finito. \square

Lema 4.8. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos fixos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.6, se f^n possui infinitos pontos fixos para algum $n \geq 1$, então f^n possui infinitos pontos críticos, o que é um absurdo pelo Lema 4.7. \square

Com isso, temos as ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema de Singer.

Teorema 4.9 (Singer). *Se $\mathcal{S}f < 0$ e f possui n pontos críticos, então f possui no máximo $n+2$ órbitas periódicas não repulsoras.*

Demonstração. Seja p um ponto periódico não repulsor de f de período m . Se $g = f^m$, então $g(p) = p$ e $|Dg(p)| \leq 1$. Seja K a componente conexa de $\mathcal{B}(p) = \{x : \lim_{k \rightarrow \infty} g^k(x) = p\}$ que contém p . Inicialmente, suponha que K é limitado.

Se $|Dg(p)| < 1$, então é possível mostrar que K é aberto, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K .

Escrevendo $K = (a, b)$, se $g(a) = a$ e $g(b) = b$, então g possui ponto crítico em K pelo Lema 4.5; se $g(a) = b$ e $g(b) = a$, então g^2 possui ponto crítico em K pelo Lema 4.5; se $g(a) = g(b)$, então g possui ponto crítico em K pelo TVM.

Se $|Dg(p)| = 1$, então os pontos fixos de g são isolados pelo Lema anterior e, portanto, existe uma vizinhança de p que não contém outros pontos fixos de g .

Suponha que $Dg(p) = 1$; se $Dg(p) = -1$, a demonstração é análoga considerando g^2 . Se p possui o comportamento de um ponto repulsor, então, para x numa vizinhança de p , $g(x) > x$ quando $x > p$ e $g(x) < x$ quando $x < p$. Desse modo, 1 é um mínimo local de Dg , o que é um absurdo pelo Lema 4.4 e, portanto, p é atrator em pelo menos um dos lados. Desse modo, K é

um intervalo, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K . Assim, é possível concluir de maneira análoga que g possui ponto crítico em K .

Assim, cada intervalo K limitado está associado à algum ponto crítico de f e, portanto, existem no máximo n desses intervalos. Não é possível obter a mesma conclusão se K não é limitado, mas observando que existem no máximo dois intervalos desse tipo, a demonstração está concluída. \square

Corolário 4.10. *Se $\mu > 1$, então h possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.*

Referências

- [Burns e Hasselblatt, 2011] Burns, K. e Hasselblatt, B. (2011). The Sharkovsky Theorem: a Natural Direct Proof. *The American Mathematical Monthly*, 118(3):229–244.
- [Devaney, 1989] Devaney, R. L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Perseus Books.
- [Holmgren, 1996] Holmgren, R. A. (1996). *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Springer-Verlag New York.