Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Discretos

Agenor Gonçalves Neto [a]

São Paulo, 2020

[a] Graduando em Bacharelado em Matemática (IME-USP), orientado pelo Prof. Salvador Addas Zanata (IME-USP).

Sumário

- Conceitos Elementares
- Família Quadrática
  - Estudo Inicial
  - Conjuntos de Cantor
  - Caos
  - Conjugação Topológica
  - Dinâmica Simbólica
  - Matriz de Transição
  - Bifurcação
- Teorema de Sharkovsky
- Teorema de Singer

Sumário

Conceitos Elementares

Família Quadrática

- Estudo Inicial
- Conjuntos de Cantor
- Caos
- Conjugação Topológica
- Dinâmica Simbólica
- Matriz de Transição
- Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Teorema de Singer

Definição

Um sistema dinâmico é função $f : X \to X$, onde X é um espaço métrico.

Dado $x \in X$, nosso objetivo é estudar as propriedades da sequência definida recursivamente por

$$f^0(x) = x \quad \text{e} \quad f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

para todo $k \geq 1$.

Definição

Um sistema dinâmico é função $f : X \to X$, onde X é um espaço métrico.

Dado $x \in X$, nosso objetivo é estudar as propriedades da sequência definida recursivamente por

$$f^0(x) = x \quad \text{e} \quad f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

para todo $k \geq 1$.

Conceitos Elementares

Definição

1. Se $p \in X$ e $f(p) = p$, então p é um ponto fixo de f.
2. Se $p \in X$ e $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$, então p é um ponto periódico de f de período n.
3. Se $p \in X$, $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$ e $f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então p é um ponto periódico f de período primo n.

O conjunto dos pontos periódicos de f será denotado por $\mathrm{Per}(f)$.

O conjunto dos pontos periódicos de f de período primo n será denotado por $\mathrm{Per}_n(f)$.

Definição

1. Se $p \in X$ e $f(p) = p$, então p é um ponto fixo de f.
2. Se $p \in X$ e $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$, então p é um ponto periódico de f de período n.
3. Se $p \in X$, $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$ e $f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então p é um ponto periódico f de período primo n.

O conjunto dos pontos periódicos de f será denotado por $\mathrm{Per}(f)$.
O conjunto dos pontos periódicos de f de período primo n será denotado por $\mathrm{Per}_n(f)$.

Definição

1. Se $x \in X$, então $\mathcal{O}(x) = \{f^k(x) : k \geq 0\}$ é a órbita de x.
2. Se $p \in \mathrm{Per}_n(f)$, então

$$\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k \to \infty} f^{kn}(x) = p\}$$

é o conjunto estável de p.

Além disso, dizemos que

$$\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k \to \infty} |f^k(x)| = \infty\}$$

é o conjunto estável do infinito.

Definição

1. Se $x \in X$, então $\mathcal{O}(x) = \{f^k(x) : k \geq 0\}$ é a órbita de x.
2. Se $p \in \mathrm{Per}_n(f)$, então

$$\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k \to \infty} f^{kn}(x) = p\}$$

   é o conjunto estável de p.

Além disso, dizemos que

$$\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k \to \infty} |f^k(x)| = \infty\}$$

é o conjunto estável do infinito.

Conceitos Elementares

Proposição

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $f([a, b]) \subset [a, b]$ *ou* $f([a, b]) \supset [a, b]$*, então* f *possui ponto fixo.*

Teorema

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $\mathcal{C}^1$ *e* $p \in \mathrm{Per}_n(f)$*.*

1. *Se* $|Df^n(p)| < 1$*, então existe uma vizinhança de* p *contida em* $\mathcal{B}(p)$*.*
2. *Se* $|Df^n(p)| > 1$*, então existe uma vizinhança* V *de* p *com a seguinte propriedade: se* $x \in V \backslash \{p\}$*, então* $f^{kn}(x) \notin V$ *para algum* $k \geq 1$*.*

Definição

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $p \in \mathrm{Per}_n(f)$.

1. Se $|Df^n(p)| < 1$, então p é um ponto atrator.
2. Se $|Df^n(p)| > 1$, então p é um ponto repulsor.

A definição anterior pode ser estendida para órbitas de pontos periódicos. De fato, se um ponto é atrator, então todos os pontos de sua órbita também são atratores e, nesse caso, dizemos que a órbita é atratora.

Definição

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e $p \in \mathrm{Per}_n(f)$.

1. Se $|Df^n(p)| < 1$, então p é um ponto atrator.
2. Se $|Df^n(p)| > 1$, então p é um ponto repulsor.

A definição anterior pode ser estendida para órbitas de pontos periódicos. De fato, se um ponto é atrator, então todos os pontos de sua órbita também são atratores e, nesse caso, dizemos que a órbita é atratora.

Sumário

Conceitos Elementares

Família Quadrática

- Estudo Inicial
- Conjuntos de Cantor
- Caos
- Conjugação Topológica
- Dinâmica Simbólica
- Matriz de Transição
- Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Teorema de Singer

Família Quadrática

Nessa seção, consideraremos a família de funções $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$h(x) = \mu x(1 - x),$$

onde $\mu > 1$ é um parâmetro real. Essa família de funções é conhecia como família quadrática.

Sumário

- Conceitos Elementares
- Família Quadrática
  - Estudo Inicial
  - Conjuntos de Cantor
  - Caos
  - Conjugação Topológica
  - Dinâmica Simbólica
  - Matriz de Transição
  - Bifurcação
- Teorema de Sharkovsky
- Teorema de Singer

Família Quadrática: Estudo Inicial

•

Sumário

Conceitos Elementares

Família Quadrática

- Estudo Inicial
- Conjuntos de Cantor
- Caos
- Conjugação Topológica
- Dinâmica Simbólica
- Matriz de Transição
- Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Teorema de Singer

Família Quadrática: Conjuntos de Cantor

•

Sumário

Conceitos Elementares

Família Quadrática

- Estudo Inicial
- Conjuntos de Cantor
- Caos
- Conjugação Topológica
- Dinâmica Simbólica
- Matriz de Transição
- Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Teorema de Singer

Família Quadrática: Caos

-

Sumário

Conceitos Elementares

Família Quadrática

- Estudo Inicial
- Conjuntos de Cantor
- Caos
- Conjugação Topológica
- Dinâmica Simbólica
- Matriz de Transição
- Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Teorema de Singer

Família Quadrática: Conjugação Topológica

•

Sumário

Conceitos Elementares

Família Quadrática

- Estudo Inicial
- Conjuntos de Cantor
- Caos
- Conjugação Topológica
- Dinâmica Simbólica
- Matriz de Transição
- Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Teorema de Singer

•

Sumário

Conceitos Elementares

Família Quadrática

- Estudo Inicial
- Conjuntos de Cantor
- Caos
- Conjugação Topológica
- Dinâmica Simbólica
- Matriz de Transição
- Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Teorema de Singer

Família Quadrática: Matriz de Transição

•

Sumário

Conceitos Elementares

Família Quadrática

- Estudo Inicial
- Conjuntos de Cantor
- Caos
- Conjugação Topológica
- Dinâmica Simbólica
- Matriz de Transição
- Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Teorema de Singer

Família Quadrática: Bifurcação

•

Sumário

Conceitos Elementares

Família Quadrática

- Estudo Inicial
- Conjuntos de Cantor
- Caos
- Conjugação Topológica
- Dinâmica Simbólica
- Matriz de Transição
- Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Teorema de Singer

Teorema de Sharkovsky

Definição

Ordenação de Sharkovsky

$3 \rhd 5 \rhd \cdots \rhd 2{\cdot}3 \rhd 2{\cdot}5 \rhd \cdots \rhd 2^2{\cdot}3 \rhd 2^2{\cdot}5 \rhd \cdots \rhd 2^k{\cdot}3 \rhd 2^k{\cdot}5 \rhd \cdots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$

Teorema (Sharkovsky)

Se $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$*, então* $\mathrm{Per}_m(f) \neq \emptyset$ *para todo* $n \rhd m$*.*

Teorema de Sharkovsky

Definição

Ordenação de Sharkovsky

$3 \rhd 5 \rhd \cdots \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2\cdot 3 \rhd 2^2\cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^k\cdot 3 \rhd 2^k\cdot 5 \rhd \cdots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$

Teorema (Sharkovsky)

Se $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$, *então* $\mathrm{Per}_m(f) \neq \emptyset$ *para todo* $n \rhd m$.

Teorema de Sharkovsky

Teorema

Se $n \geq 1$, então existe uma função f com as seguintes propriedades:

1. $\mathrm{Per}_n(f) \neq \emptyset$.
2. $\mathrm{Per}_m(f) = \emptyset$ *para todo* $m \triangleright n$.

Sumário

Conceitos Elementares

Família Quadrática

- Estudo Inicial
- Conjuntos de Cantor
- Caos
- Conjugação Topológica
- Dinâmica Simbólica
- Matriz de Transição
- Bifurcação

Teorema de Sharkovsky

Teorema de Singer

Teorema de Singer

-

Referências

Burns, K. e Hasselblatt, B. (2011).
The Sharkovsky Theorem: a Natural Direct Proof.
The American Mathematical Monthly, 118(3):229–244.

Devaney, R. L. (1989).
An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.
Perseus Books.

Holmgren, R. A. (1996).
A First Course in Discrete Dynamical Systems.
Springer-Verlag New York.