

Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Caóticos

Agenor Gonçalves Neto

São Paulo, 2020

Sumário

1	Conceitos Elementares	1
2	Família Quadrática	3
2.1	Estudo Inicial	3
2.2	Conjuntos de Cantor	4
2.3	Caos	5
2.4	Conjugação Topológica	7
2.5	Dinâmica Simbólica	9
2.6	Matriz de Transição	10
2.7	Bifurcação	13
3	Teorema de Sharkovsky	15
4	Teorema de Singer	18

1 Conceitos Elementares

De maneira suficiente para os nossos objetivos, definimos um sistema dinâmico como uma função $f : X \rightarrow X$, onde X é um espaço métrico. Usualmente, X será um subconjunto de \mathbb{R} com a distância usual. Dado $x \in X$, nosso objetivo é estudar as propriedades da sequência definida recursivamente por

$$f^0(x) = x \quad \text{e} \quad f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$$

para todo $k \geq 1$. Para isso, vamos iniciar com algumas definições que estarão presentes durante todo o texto.

Se $p \in X$ e $f(p) = p$, então p é um ponto fixo de f . Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$, então p é um ponto periódico de f de período n . Se $f^n(p) = p$ para algum $n \geq 1$ e

$f^k(p) \neq p$ para todo $1 \leq k < n$, então p é um ponto periódico f de período principal n . O conjunto dos pontos periódicos de f será denotado por $\text{Per}(f)$ e o conjunto dos pontos periódicos de f de período principal n será denotado por $\text{Per}_n(f)$.

Se $x \in X$, então $\mathcal{O}(x) = \{f^k(x) : k \geq 0\}$ é a órbita de x . Se p um ponto periódico de período n , então $\mathcal{B}(p) = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p\}$ é o conjunto estável de p . Por fim, o conjunto $\mathcal{B}(\infty) = \{x \in X : \lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(x)| = \infty\}$ é o conjunto estável do infinito.

A Proposição 1.1 nos fornece uma maneira útil de verificar se uma função contínua definida num intervalo compacto de \mathbb{R} possui ponto fixo.

Proposição 1.1. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f([a, b]) \subset [a, b]$ ou $f([a, b]) \supset [a, b]$, então f possui ponto fixo.*

Demonstração. Considere a função contínua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Em ambos os casos é possível verificar, pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), que existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$. \square

Se a função for de classe \mathcal{C}^1 , podemos conhecer o comportamento dos pontos numa vizinhança de um ponto fixo cuja derivada em módulo é diferente de 1.

Teorema 1.2. *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^1 e $p \in \text{Per}_n(f)$.*

1. *Se $|Df^n(p)| < 1$, então existe uma vizinhança de p contida em $\mathcal{B}(p)$.*
2. *Se $|Df^n(p)| > 1$, então existe uma vizinhança V de p com a seguinte propriedade: se $x \in V \setminus \{p\}$, então $f^{kn}(x) \notin V$ para algum $k \geq 1$.*

Demonstração.

1. Sendo Df^n contínua, existe uma vizinhança V de p tal que $|Df^n(V)| \leq \lambda < 1$. Pelo Teorema do Valor Médio (TVM), se $x \in V$, então $|f^n(x) - p| \leq \lambda|x - p|$. Por indução, $|f^{kn}(x) - p| \leq \lambda^k|x - p|$ para todo $k \geq 1$ e, portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$.
2. Exercício.

\square

Definição 1.3. *Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^1 e $p \in \text{Per}_n(f)$.*

- i. *Se $|Df^n(p)| < 1$, então p é um ponto atrator.*
- ii. *Se $|Df^n(p)| > 1$, então p é um ponto repulsor.*

A Definição 1.3, que segue naturalmente do Teorema 1.2, pode ser estendida para órbitas de pontos periódicos. De fato, pela Regra da Cadeia, é possível verificar que se um ponto é atrator (repulsor), então todos os pontos de sua órbita também são atratores (repulsores) e, nesse caso, dizemos que sua órbita é atratora (repulsora).

2 Família Quadrática

Nessa seção, considere a família de funções $h_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$h_\mu(x) = \mu x(1 - x),$$

onde $\mu > 1$ é um parâmetro real. Essa família de funções é conhecida por família quadrática. Quando não houver possibilidade de confusão, denotaremos a função h_μ simplesmente por h .

Nosso objetivo é estudar a dinâmica de h conforme μ varia e, conseqüentemente, estudar alguns dos principais fenômenos que ocorrem em sistemas dinâmicos.

2.1 Estudo Inicial

Iniciamos o estudo da família quadrática observando que h possui dois pontos fixos.

Proposição 2.1. *Se $\mu > 1$, então $h(0) = 0$ e $h(p_\mu) = p_\mu$, onde $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.*

Demonstração. Exercício. □

A Proposição 2.2 nos permite restringir o estudo da dinâmica de h ao intervalo $[0, 1]$, pois conhecemos o comportamento dos pontos que não pertencem à esse intervalo.

Proposição 2.2. *Se $\mu > 1$, então $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset \mathcal{B}(\infty)$.*

Demonstração. Basta observar que a sequência $x, h(x), h^2(x), \dots$ é estritamente decrescente e ilimitada quando $x \in (-\infty, 0)$. □

A Proposição 2.3, que pode visualizada graficamente, nos mostra que a dinâmica de h é simples para valores baixo de μ .

Proposição 2.3. *Se $\mu \in (1, 3)$, então*

1. 0 é um ponto repulsor e p_μ é um ponto atrator.
2. $(0, 1) \subset \mathcal{B}(p_\mu)$.

Demonstração. Exercício. □

Desse modo, a dinâmica de h está completamente determinada quando $\mu \in (1, 3)$. De fato,

$$\mathcal{B}(0) = \{0, 1\}, \quad \mathcal{B}(p_\mu) = (0, 1) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

2.2 Conjuntos de Cantor

Vamos estudar a dinâmica de h quando $\mu > 4$. Inicialmente, observe que $h(\frac{1}{2}) > 1$ e, portanto, existem pontos em $[0, 1]$ que não permanecem em $[0, 1]$ após uma iteração de h . Pela Proposição 2.2, tais pontos pertencem ao conjunto estável do infinito. De modo mais geral, se um ponto de $[0, 1]$ não permanece em $[0, 1]$ após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto estável do infinito.

Desse modo, considere o conjunto $\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : h^n(x) \in [0, 1]\}$ formado pelos pontos que permanecem em $[0, 1]$ após n iterações de h e o conjunto $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$ formado pelos pontos de $[0, 1]$ que sempre permanecem em $[0, 1]$ por iterações de h . Assim, podemos estudar a dinâmica de h_Λ .

Observe que $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, onde $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ e $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$. De modo mais geral, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Se $\mu > 4$, então*

1. Λ_n é a união de 2^n intervalos fechados disjuntos.
2. $h^n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_n .

Demonstração. Se $k \geq 1$, suponha que Λ_{k-1} é a união de 2^{k-1} intervalos fechados disjuntos e que $h^{k-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_{k-1} . Suponha que h^{k-1} é estritamente crescente; se h^{k-1} é estritamente decrescente, a demonstração é análoga.

Inicialmente, observe que existem $x'_1 < x'_2$ tais que $h^{k-1}([a, x'_1]) = [0, x_1]$, $h^{k-1}((x'_1, x'_2)) = (x_1, x_2)$ e $h^{k-1}([x'_2, 1]) = [x_2, 1]$ e, portanto, $h^k([a, x'_1]) = [0, 1]$, $h^k((x'_1, x'_2)) > 1$ e $h^k([x'_2, 1]) = [0, 1]$. Além disso, pela Regra da Cadeia, temos também que $Dh^k([a, x'_1]) > 0$ e $Dh^k([x'_2, 1]) < 0$.

Desse modo, é imediato concluir que Λ_k é a união de 2^k intervalos fechados disjuntos e que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $[a, b]$ é um dos intervalos formam Λ_k . \square

Desse modo, podemos mostrar que Λ é um conjunto de Cantor.

Definição 2.5. Seja $\Gamma \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio. Dizemos que Γ é um conjunto de Cantor se as seguintes condições são válidas:

- i. Γ é limitado.
- ii. Γ é totalmente desconexo.
- iii. Γ é perfeito.

Γ é totalmente desconexo se não contém intervalos. Γ é perfeito se é fechado e todos os seus pontos são pontos de acumulação Γ . Para facilitar as próximas demonstrações, vamos considerar μ suficientemente grande tal que a derivada em módulo de h em Λ_1 seja maior que 1.

Lema 2.6. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então*

1. $|Dh(\Lambda_1)| \geq \lambda > 1$.
2. $b - a \leq \frac{1}{\lambda^n}$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_n .

Demonstração.

1. Basta observar que $Dh(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$ e $Dh(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$.
2. Se $x \in [a, b]$, então $Dh^n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} Dh(h^k(x)) \geq \lambda^n$. Pelo TVM, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$1 = |h^n(b) - h^n(a)| \geq \lambda^n |b - a|.$$

□

Pelo Lema 2.6, dado $\varepsilon > 0$, existe $k(\varepsilon) \geq 1$ tal que $b - a < \varepsilon$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam $\Lambda_{k(\varepsilon)}$.

Teorema 2.7. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então Λ é um conjunto de Cantor.*

Demonstração.

- a) Λ é totalmente desconexo.

Se existe $[x, y] \subset \Lambda$, seja k tal que $\frac{1}{\lambda^k} < |x - y|$. Em particular, $[x, y] \subset \Lambda_k$, o que é um absurdo pois os intervalos que formam Λ_k possuem tamanho $\leq \frac{1}{\lambda^k}$.

- b) Λ é perfeito.

Sejam $x \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$. Se $x \in [a, b]$, onde $[a, b]$ é um dos intervalos que formam $\Lambda_{k(\varepsilon)}$, então $a \in \Lambda$ e $|x - a| < \varepsilon$ e, portanto, x é ponto de acumulação de Λ .

□

2.3 Caos

Vamos estudar um fenômeno que a família quadrática exibe quando μ é suficientemente grande: o comportamento caótico de suas órbitas. Iniciamos esse estudo com a seguinte definição:

Definição 2.8. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f é topologicamente transitiva se dados $x, y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $z \in X$ e $k \geq 1$ tais que $|x - z| < \varepsilon$ e $|y - f^k(z)| < \varepsilon$.

Intuitivamente, um sistema dinâmico é topologicamente transitivo quando é possível ir de uma vizinhança para qualquer outra vizinhança através de iterações de f . A família quadrática exibe esse comportamento quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Proposição 2.9. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_{\Lambda}$ é topologicamente transitiva.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k . Pelo TVI, existe $z \in [a, b]$ tal que $h^k(z) = y$. Observando que $z \in \Lambda$, concluímos que $h|_\Lambda$ é topologicamente transitiva. \square

Outra definição importante para o estudo desse fenômeno é feita a seguir:

Definição 2.10. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f depende sensivelmente das condições iniciais se existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existem $y \in X$ e $k \geq 1$ tais que $|x - y| < \varepsilon$ e $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$.

Intuitivamente, um sistema que possui dependência sensível das condições iniciais quando existem pontos arbitrariamente próximos à x que eventualmente se distanciam de x em pelo menos δ através de iterações de f . Novamente, a família quadrática exibe esse comportamento quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Proposição 2.11. Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_\Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais.

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k . Suponha que $h^k(a) = 0$ e $h^k(b) = 1$; se $h^k(a) = 1$ e $h^k(b) = 0$, a demonstração é análoga.

Como $h(\frac{1}{2}) > 1$ e $x \in \Lambda$, temos que $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$. Se $h^k(x) \in [0, \frac{1}{2})$, então $|h^k(x) - h^k(b)| = |h^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$ e se $h^k(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$, então $|h^k(x) - h^k(a)| = |h^k(x)| > \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| < \varepsilon$ e $|x - b| < \varepsilon$, concluímos que $h|_\Lambda$ depende sensivelmente das condições iniciais. \square

Segundo Devaney, um sistema dinâmico é caótico se, além de possuir as duas propriedades definidas anteriormente, seu conjunto de pontos periódicos é denso.

Definição 2.12. Seja $f : X \rightarrow X$ uma função. Dizemos que f é caótica se as seguintes condições são válidas:

- i. $\text{Per}(f)$ é denso em X .
- ii. f é topologicamente transitiva.
- iii. f depende sensivelmente das condições iniciais.

Desse modo, basta mostrar que $\text{Per}(h|_\Lambda)$ é denso em Λ para concluir que $h|_\Lambda$ é caótica quando $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

Proposição 2.13. Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $\text{Per}(h|_\Lambda)$ é denso em Λ .

Demonstração. Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$ tal que $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$. Temos que $h^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $x \in [a, b]$ e $[a, b]$ é um dos intervalos que formam Λ_k . Como $h^k([a, b]) \supset [a, b]$, existe $y \in [a, b]$ tal que $h^k(y) = x$. Observando que $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \varepsilon$, concluímos que $\text{Per}(h|_\Lambda)$ é denso em Λ . \square

Teorema 2.14. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_{\Lambda}$ é caótica.*

Por fim, enunciamos o Teorema 2.15 que nos permite, sob algumas hipóteses, concluir um sistema dinâmico é caótico sem verificar se ele depende sensivelmente das condições iniciais.

Teorema 2.15. *Seja $f : X \rightarrow X$ é uma função contínua, onde X é um conjunto infinito. Se $\text{Per}(f)$ é denso em X e f é topologicamente transitiva, então f é caótica.*

Demonstração. Ver [2], página 45. □

2.4 Conjugação Topológica

Vamos estudar um conceito em sistemas dinâmicos que nos permite considerar iguais dois sistemas dinâmicos que inicialmente são distintos.

Definição 2.16. Sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $\tau : X \rightarrow Y$ funções. Dizemos que f e g são topologicamente conjugadas por τ se as seguintes condições são válidas:

- i. τ é um homeomorfismo.
- ii. $\tau \circ f = g \circ \tau$.

Intuitivamente, o primeiro item afirma que os conjuntos X e Y são iguais e o segundo, que os sistemas dinâmicos f e g são iguais. Por exemplo, é imediato verificar que $p \in \text{Per}_n(f)$ se, e somente se, $\tau(p) \in \text{Per}_n(g)$. A Proposição 2.17 nos mostra que sistemas dinâmicos topologicamente conjugados compartilham outras propriedades.

Proposição 2.17. *Sejam $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ e $\tau : X \rightarrow Y$ funções. Se f e g são topologicamente conjugadas por τ , então*

1. $\text{Per}(f)$ é denso em X se, e somente se, $\text{Per}(g)$ é denso em Y .
2. f é topologicamente transitiva se, e somente se, g é topologicamente transitiva.

Demonstração.

1. Se $\text{Per}(f)$ denso em X , então $\tau(\text{Per}(f))$ é denso em Y pois τ é contínua. Observando que $\tau(\text{Per}(f)) = \text{Per}(g)$, concluímos que $\text{Per}(g)$ é denso em Y . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.
2. Sendo τ contínua, dados $\varepsilon > 0$ e $k \geq 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $z \in X$, $|x - z| < \delta$ e $|y - f^k(z)| < \delta$, então $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^k(z))| < \varepsilon$.

Se $x', y' \in Y$, existem $x, y \in X$ tais que $\tau(x) = x'$ e $\tau(y) = y'$. Sendo f topologicamente transitiva, existem $z \in X$ e $k \geq 1$ tais que $|x - z| < \delta$ e $|y - f^k(z)| < \delta$. Desse modo, $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$ e $|\tau(y) - \tau(f^k(z))| < \varepsilon$. Se $\tau(z) = z'$, então $|x' - z'| < \varepsilon$ e $|y' - g^k(z')| < \varepsilon$. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga. □

A seguir, temos um exemplo da utilização da conjugação topológica no estudo dos sistemas dinâmicos.

Lema 2.18. A função $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é caótica.

Demonstração. Inicialmente, é possível provar por indução que $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$ é uma função bijetora linear para todo $0 \leq k < 2^n$ e para todo $n \geq 1$. Desse modo, dados $x \in [0, 1]$ e $\varepsilon > 0$, seja $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $x \in I$ e $T^n : I \rightarrow [0, 1]$ é bijetora, onde $I = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$.

a) $\text{Per}(T)$ é denso em $[0, 1]$.

Como $T(I) \supset I$, existe $p \in I$ tal que $T^n(p) = p$. Observando que $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, concluímos que $\text{Per}(T)$ é denso em $[0, 1]$.

b) T é topologicamente transitiva.

Sendo $T^n : I \rightarrow [0, 1]$ bijetora, se $y \in [0, 1]$, então existe $z \in I$ tal que $T^n(z) = y$. Observando que $|x - z| \leq \frac{1}{2^n}$ e $|y - T^n(z)| = 0$, concluímos que T é topologicamente transitiva.

c) T depende sensivelmente das condições iniciais.

Sendo $T^n : I \rightarrow [0, 1]$ bijetora, existem $a, b \in I$ tais que $T^n(a) = 0$ e $T^n(b) = 1$. Se $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$, então $|T^n(x) - T^n(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$ e se $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$, então $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$. Observando que $|x - a| \leq \frac{1}{2^n}$ e $|x - b| \leq \frac{1}{2^n}$, concluímos que T depende sensivelmente das condições iniciais.

□

Desse modo, podemos concluir que h é caótica quando $\mu = 4$.

Teorema 2.19. Se $\mu = 4$, então h é caótica.

Demonstração. Basta observar que $h \circ \tau = \tau \circ T$, onde $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é o homeomorfismo dado por $\tau(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. □

2.5 Dinâmica Simbólica

Dado $N \geq 2$, seja Σ_N o conjunto das seqüências de números naturais limitados entre 1 e N , isto é, $\Sigma_N = \{(x_0 x_1 x_2 \dots) : 1 \leq x_n \leq N \text{ para todo } n \geq 0\}$. Seja também $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$d_N(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{N^k},$$

onde $x = (x_0 x_1 x_2 \dots)$ e $y = (y_0 y_1 y_2 \dots)$. É imediato verificar que (Σ_N, d_N) é um espaço métrico. Por fim, seja $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ a função dada por $\sigma(x_0 x_1 x_2 \dots) = (x_1 x_2 x_3 \dots)$.

Proposição 2.20. *Sejam $x = (x_0 x_1 x_2 \dots)$ e $y = (y_0 y_1 y_2 \dots)$ elementos de Σ_N .*

1. *Se $x_k = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n$, então $d_N(x, y) \leq \frac{1}{N^n}$.*
2. *Se $d_N(x, y) < \frac{1}{N^n}$, então $x_k = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n$.*

Proposição 2.21. *σ é contínua.*

Demonstração. Sejam $x = (x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_N$, $\varepsilon > 0$ e $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Se $d_N(x, y) < \frac{1}{2^{n+1}}$, onde $y = (y_0 y_1 y_2 \dots) \in \Sigma_N$, então $x_k = y_k$ para todo $0 \leq k \leq n+1$. Como $\sigma(x) = (x_1 x_2 x_3 \dots)$ e $\sigma(y) = (y_1 y_2 y_3 \dots)$, temos que as primeiras $n+1$ entradas de $\sigma(x)$ e $\sigma(y)$ são iguais. Desse modo, $d_N(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ e, portanto, σ é contínua. \square

Para a demonstração do próximo resultado, vamos considerar $N = 2$. Se $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$, sejam $J_1 = [0, x_1]$ e $J_2 = [x_2, 1]$. Como $\Lambda \subset J_1 \cup J_2$, podemos definir a função $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$ dada por $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$, onde $x_k = 1$ se $h^k(x) \in J_1$ e $x_k = 2$ se $h^k(x) \in J_2$ para todo $k \geq 0$.

Teorema 2.22. *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $h|_{\Lambda}$ e σ são topologicamente conjugadas por S .*

Demonstração.

a) S é injetora.

Sejam $x, y \in \Lambda$, $x < y$. Se $S(x) = S(y)$, então $h^k(x)$ e $h^k(y)$ está no mesmo lado em relação ao ponto crítico para todo $k \geq 0$ e, portanto, h é monótona em cada intervalo I_k cujos extremos são $h^k(x)$ e $h^k(y)$. Desse modo, se $z \in [x, y]$, então $h^k(z) \in I_k \subset J_1 \cup J_2$ para todo $k \geq 0$ e, portanto, $z \in \Lambda$, o que é um absurdo pois Λ é totalmente desconexo.

b) S é sobrejetora.

Seja $(x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_2$. Inicialmente, para cada $n \geq 0$, considere

$$J_{x_0 \dots x_n} = \{x \in [0, 1] : x \in J_{x_0}, \dots, h^n(x) \in J_{x_n}\}.$$

Escrevendo $J_{x_0 \dots x_n} = J_{x_0} \cap h^{-1}(J_{x_1 \dots x_n})$, é possível concluir por indução que $J_{x_0 \dots x_n}$ é um intervalo fechado não vazio. Além disso, $J_{x_0 \dots x_n} = J_{x_0 \dots x_{n-1}} \cap h^{-n}(J_{x_n}) \subset J_{x_0 \dots x_{n-1}}$. Desse modo, $J_{x_0}, J_{x_0 x_1}, J_{x_0 x_1 x_2}, \dots$ é uma sequência de intervalos encaixantes fechados e, portanto, existe $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} J_{x_0 \dots x_n}$. Como $h^k(x) \in J_{x_k}$ para todo $k \geq 0$, concluímos que $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$. Observe que x é único, pois S é injetora.

c) S é contínua.

Sejam $x \in \Lambda$, $\varepsilon > 0$ e $k \geq 0$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Se $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$, então $x \in J_{x_0 \dots x_k}$. Sendo $J_{x_0 \dots x_k}$ um intervalo fechado, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in \Lambda$ e $|x - y| < \delta$, então $y \in J_{x_0 \dots x_k}$. Desse modo, $S(x)$ e $S(y)$ são iguais nas primeiras $k + 1$ entradas e, portanto, $d_2(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon$.

d) S^{-1} é contínua.

Exercício.

e) $S \circ h|_{\Lambda} = \sigma \circ S$.

Se $x \in \Lambda$ e $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$, então $\bigcap_{n=0}^{\infty} J_{x_0 \dots x_n} = \{x\}$. Desse modo, é imediato que

$$S \circ h|_{\Lambda}(x) = S(h(\bigcap_{n=0}^{\infty} J_{x_0 \dots x_n})) = S(\bigcap_{n=1}^{\infty} J_{x_1 \dots x_n}) = (x_1 x_2 x_3 \dots) = \sigma \circ S(x).$$

□

2.6 Matriz de Transição

Dado $N \geq 2$, dizemos que A é uma matriz de transição se $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ é uma matriz quadrada de ordem N tal que $a_{ij} \in \{0, 1\}$ para todo $1 \leq i, j \leq N$. Se A é uma matriz de transição, definimos o conjunto Σ_A por

$$\Sigma_A = \{(x_0 x_1 x_2 \dots) \in \Sigma_N : a_{x_k x_{k+1}} = 1 \text{ para todo } k \geq 0\}.$$

Observe que se $x \in \Sigma_A$, então $\sigma(x) \in \Sigma_A$. Desse modo, podemos definir a função $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ como sendo a restrição de σ em Σ_A .

Proposição 2.23. Σ_A é um subconjunto fechado de Σ_N .

Demonstração. Seja $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de elementos em Σ_A convergente para $x \in \Sigma_N$. Vamos mostrar que $x \in \Sigma_A$.

Se $x = (\xi_0 \xi_1 \xi_2 \dots)$ e $x \notin \Sigma_A$, então existe $k \geq 0$ tal que $a_{\xi_k \xi_{k+1}} = 0$. Por outro lado, pela definição de convergência, existe $n_0 \geq 0$ tal que $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{k+1}}$ e, portanto, as $k+2$ primeiras entradas de x e x_{n_0} são iguais. Escrevendo $x_{n_0} = (\eta_0 \eta_1 \eta_2 \dots)$, concluímos que $a_{\eta_k \eta_{k+1}} = a_{\xi_k \xi_{k+1}} = 0$, o que é um absurdo pois $x_{n_0} \in \Sigma_A$. \square

Vamos estudar a dinâmica da família quadrática para $\mu = 3.839$. Se $a = 0.149888$, $\varepsilon = 10^{-3}$ e $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, então é possível mostrar que $h^3(I) \subset I$ e $|Dh^3(I)| < 1$ e, portanto, o intervalo I possui um ponto periódico atrator de h de período principal 3. Se a_1, a_2 e a_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$a_1 \simeq 0.149888, \quad a_2 \simeq 0.489149 \quad \text{e} \quad a_3 \simeq 0.959299.$$

Com auxílio do Teorema de Sharkovsky e do Teorema de Singer, que estudaremos na sequência, podemos concluir que h possui infinitos pontos periódicos e essa é a única órbita atratora de h .

De modo análogo, concluímos que h possui outra órbita de tamanho 3. Se b_1, b_2 e b_3 são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040, \quad b_2 \simeq 0.539247 \quad \text{e} \quad b_3 \simeq 0.953837.$$

Observando o gráfico de h^3 , concluímos que para cada b_i , existe b'_i no lado oposto de b_i em relação ao ponto a_i tal que $h^3(b'_i) = b_i$. Defina $A_1 = (b'_1, b_1)$, $A_2 = (b'_2, b_2)$ e $A_3 = (b_3, b'_3)$.

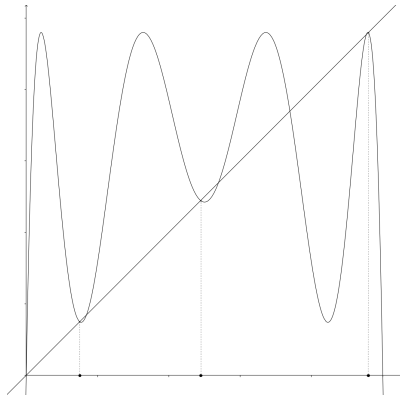


Figura: Gráfico de h^3 com os pontos a_1, a_2 e a_3 assinalados.

Sendo h^3 simétrica em relação ao ponto $\frac{1}{2}$, temos que $h(b'_2) = h(b_2) = b_3$. Além disso, podemos observar que $h(b'_1) = b'_2$ e $h(b'_3) = b'_1$ e, portanto, h mapeia de forma monótona A_1 em A_2 e A_3 em A_1 . Observando que o máximo de h em A_2 é $h(\frac{1}{2}) = 0.95975 < b'_3$, concluímos que $h(A_2) \subset A_3$.

Sabemos que se $x \notin [0, 1]$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} h^n(x) = -\infty$. Além disso, o único ponto periódico em A_i é a_i e todos os pontos em A_i tendem para a órbita de a_i . Desse modo, todos os outros pontos periódicos de h residem no complemento de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ em $[0, 1]$, que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam $J_0 = [0, b'_1]$, $J_1 = [b_1, b'_2]$, $J_2 = [b_2, b_3]$ e $J_3 = [b'_3, 1]$ tais intervalos. A Proposição a seguir nos permite dizer mais.

Proposição 2.24. *Se $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$ é um ponto periódico de h , então $x \in J_1 \cup J_2$.*

Demonstração. Observando que h é monótona em cada J_k , temos que $h(J_0) = J_0 \cup A_1 \cup J_1$, $h(J_1) = J_2$, $h(J_2) = J_1 \cup A_2 \cup J_2$ e $h(J_3) = J_0$. Desse modo, se $x \in J_1 \cup J_2$ é periódico, então órbita de x está contida em $J_1 \cup J_2$.

Por outro lado, se $x \in J_0 \setminus \{0\}$, existe um menor $n \geq 1$ tal que $h^n(x) \notin J_0$. Se $h^n(x) \in A_1$, então x não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de A_1 é a_1 . Se $h^n(x) \in J_1$, então x não pode ser periódico, pois caso contrário a órbita de x estaria contida em $J_1 \cup J_2$ e nunca retornaria para J_0 . Finalmente, se $x \in J_3$, então $h(x) \in J_0$ e a análise é análoga. \square

Seja Λ o conjunto dado por

$$\Lambda = \{x \in J_1 \cup J_2 : h^n(x) \in J_1 \cup J_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de h estão em Λ , com exceção dos pontos $0, a_1, a_2$ e a_3 .

Lema 2.25. *Existe $n_0 \geq 1$ tal que $|Dh^n(\Lambda)| > 1$ para todo $n \geq n_0$.*

Demonstração. Inicialmente, podemos observar graficamente que $|Dh(J_1 \cup J_2)| \geq \nu$ para algum $\nu \in (0, 1)$. Podemos observar também que o subconjunto de $J_1 \cup J_2$ no qual $|Dh^3|$ é menor que ou igual à 1 é formado por três intervalos fechados e que cada um desses intervalos possui intersecção vazia com Λ e, portanto, $|Dh^3(\Lambda)| \geq \lambda$ para algum $\lambda > 1$.

Por fim, sejam $x \in \Lambda$ e $K \geq 1$ tal que $\nu^2 \lambda^K > 1$. Se $n_0 = 3K$ e $n \geq n_0$, podemos escrever $n = 3L + \alpha$, onde $L \geq K$ e $0 \leq \alpha \leq 2$. Desse modo, se $\alpha = 0$, então $|Dh^n(x)| = |Dh^{3L}(x)| \geq \lambda^L > 1$; se $\alpha = 1$, então $|Dh^n(x)| = |Dh(h^{3L}(x))||Dh^{3L}(x)| \geq \nu \lambda^L > 1$; e se $\alpha = 2$, então $|Dh^n(x)| = |Dh(h^{3L+1}(x))||Dh(h^{3L}(x))||Dh^{3L}(x)| \geq \nu^2 \lambda^L > 1$. \square

Lema 2.26. *Λ não contém intervalos.*

Demonstração. Suponha que exista $[a, b] \subset \Lambda$. Utilizando notação do Lema anterior, seja

$n \geq n_0$ tal que $\nu^{n_0} \lambda^{n-n_0} (b-a) > 1$. Pelo TVM, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\begin{aligned} |h^n(b) - h^n(a)| &= |Dh^n(c)|(b-a) \\ &= \prod_{k=0}^{n_0-1} |Dh(h^k(c))| \prod_{k=n_0}^{n-1} |Dh(h^k(c))|(b-a) \\ &\geq \nu^{n_0} \lambda^{n-n_0} (b-a) > 1 \end{aligned}$$

e, portanto, $h^n(a)$ ou $h^n(b)$ não é elemento de $[0, 1]$, o que é um absurdo. \square

Para as demonstrações dos próximos resultados, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_A$ a função dada por $S(x) = (x_0 x_1 x_2 \dots)$, onde $x_k = 1$ se $h^k(x) \in J_1$ e $x_k = 2$ se $h^k(x) \in J_2$ para todo $k \geq 0$. Observe que S está bem definida, pois $h(J_1) = J_2$ e $h(J_2) \subset J_1 \cup J_2$ e, portanto, $a_{x_k x_{k+1}} = 1$ para todo $k \geq 0$.

Teorema 2.27. $h|_\Lambda$ e σ_A são topologicamente conjugadas por S .

2.7 Bifurcação

A família quadrática exibe outro fenômeno que ocorre em sistemas dinâmicos: a bifurcação. Esse fenômeno ajuda a explicar como a dinâmica de h , que é simples para μ pequeno, se torna caótica para μ suficientemente grande.

Seja f_λ uma família parametrizada de funções no parâmetro λ de modo que a função

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x),$$

definida num aberto de \mathbb{R}^2 , seja de classe \mathcal{C}^∞ nas variáveis x e λ . Dizemos que f_λ sofre uma bifurcação em λ_0 se existe $\varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade: se $\lambda_1 \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ e $\lambda_2 \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$, então a dinâmica de f_{λ_1} e f_{λ_2} são diferentes, isto é, f_{λ_1} e f_{λ_2} não são topologicamente conjugadas. Por exemplo, ocorre uma bifurcação quando altera a estrutura dos pontos periódicos conforme o parâmetro varia.

Exemplo 2.28.

a) Seja E_λ a família de funções dadas por $E_\lambda(x) = \lambda e^x$, onde $\lambda > 0$. Graficamente, podemos observar que E_λ sofre uma bifurcação em $\lambda_0 = \frac{1}{e}$.

Se $\lambda > \frac{1}{e}$, então E_λ não possui pontos fixos; se $\lambda = \frac{1}{e}$, então E_λ possui um único ponto fixo em $x = 1$; e se $\lambda < \frac{1}{e}$, então E_λ possui dois pontos fixos.

b) Seja h_μ a família quadrática. Graficamente, podemos observar que h_μ sofre uma bifurcação em $\mu_0 = 3$.

Se $\mu < 3$, então p_μ é um ponto fixo atrator e se $\mu > 3$, então p_μ é um ponto fixo repulsor. Observando o gráfico de h^2 é possível ver que, conforme μ se torna maior que 3, nasce uma órbita de h de período 2. Essa é a chamada bifurcação com duplicação de período.

Observe nos exemplos que $E'_{\lambda_0}(1) = 1$ e $h_{\mu_0}(p_\mu) = -1$, ou seja, as bifurcações ocorreram quando a derivada em módulo no ponto fixo se tornou igual à 1. O teorema a seguir mostra que isso não é coincidência.

Teorema 2.29. *Seja f_λ uma família parametrizada de funções. Suponha que*

1. $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$,
2. $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$.

Então existem vizinhanças I e J de λ_0 e x_0 , respectivamente, e uma função $p : I \rightarrow J$ de classe \mathcal{C}^∞ tais que

1. $p(\lambda_0) = x_0$,
2. $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ para todo $\lambda \in I$.

Além disso, f_λ não possui outros pontos fixos em J .

Demonstração. Basta aplicar o Teorema da Função Implícita para a função $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$ no ponto (x_0, λ_0) . \square

De acordo com o Teorema anterior, se x_0 é um ponto fixo hiperbólico de f_{λ_0} , então f_λ possui um único ponto fixo numa vizinhança de x_0 para cada λ numa vizinhança de λ_0 .

Vamos olhar com mais detalhes a bifurcação com duplicação de período que ocorre na família quadrática. Inicialmente, quando μ se torna maior que 2, existe p'_μ menor que p_μ tal que $h(p'_\mu) = p_\mu$. Vamos desenhar o gráfico de h^2 juntamente com um quadrado de lados (p'_μ, p_μ) , (p_μ, p_μ) , (p_μ, p'_μ) e (p'_μ, p'_μ) .

Observe que o gráfico de h^2 restrito aos quadrados, após uma rotação de 2π , se assemelha ao gráfico da própria h no intervalo $[0, 1]$. Vamos deixar essa ideia mais precisa através do operador de renormalização.

Seja $L_\mu : [p'_\mu, p_\mu] \rightarrow [0, 1]$ a função dada por

$$L_\mu(x) = \frac{1}{p'_\mu - p_\mu}(x - p_\mu).$$

Observe que $L_\mu(p_\mu) = 0$ e $L_\mu(p'_\mu) = 1$. A inversa de L_μ é a função $L_\mu^{-1} : [0, 1] \rightarrow [p'_\mu, p_\mu]$ dada por $L_\mu^{-1}(x) = (p'_\mu - p_\mu)x + p_\mu$. Desse modo, definimos a renormalização de h como

a função $Rh : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $(Rh)(x) = L_\mu \circ h^2 \circ L_\mu^{-1}(x)$. A renormalização de h possui algumas semelhanças com h .

Proposição 2.30.

1. $(Rh)(0) = (Rh)(1) = 0$.
2. $\frac{1}{2}$ é o único ponto crítico de Rh .

Observe que um ponto fixo de Rh está unicamente relacionado com um ponto periódico de h de período 2. Além disso, o gráfico de Rh não está contido em $[0, 1]$ para algum $\mu < 4$. Desse modo, podemos fazer uma análise análoga para concluir que Rh passa por uma bifurcação com duplicação de período.

3 Teorema de Sharkovsky

Ao longo dessa seção, consideraremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Além disso, escreveremos $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_n$ quando I_0, I_1, \dots, I_n são intervalos fechados e $f(I_k) \supset I_{k+1}$ para todo $0 \leq k < n$.

Proposição 3.1. *Se $I_0 \rightarrow I_1$, então existe um intervalo fechado $I'_0 \subset I_0$ tal que $f(I'_0) = I_1$.*

Demonstração. Sejam $p, q \in [a, b]$ tais que $f(p) = c$ e $f(q) = d$, onde $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [c, d]$. Se $p \leq q$, definimos $b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\}$ e $a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$ e, pela continuidade de f , podemos concluir que $f(I'_0) = I_1$, onde $I'_0 = [a', b']$. Se $q \leq p$, a demonstração é análoga. \square

Lema 3.2. *Se $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_0$, então existe $p \in I_0$ tal que as seguintes condições são válidas:*

1. $f^k(p) \in I_k$ para todo $1 \leq k < n$.
2. $f^n(p) = p$.

Demonstração. Pelo Proposição 3.1, podemos construir uma sequência de intervalos fechados $I'_0, I'_1, \dots, I'_{n-1}$ com as seguintes propriedades:

- a) $I_0 \supset I'_0 \supset I'_1 \supset \cdots \supset I'_{n-1}$.
- b) $f^k(I'_{k-1}) = I_k$ para todo $1 \leq k < n$.
- c) $f^n(I'_{n-1}) = I_0$.

Desse modo, existe $p \in I'_{n-1}$ tal que $f^n(p) = p$. Em particular, $p \in I_0$ e $f^k(p) \in I_k$ para todo $1 \leq k < n$. \square

Teorema 3.3. Se $\text{Per}_3(f) \neq \emptyset$, então $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Sejam $p_1 < p_2 < p_3$ os pontos da órbita de um elemento de $\text{Per}_3(f)$. Suponha que $f(p_1) = p_2$ e $f(p_2) = p_3$. Se $f(p_1) = p_3$ e $f(p_3) = p_2$, a demonstração é análoga. Definindo $I_0 = [p_1, p_2]$ e $I_1 = [p_2, p_3]$, temos que $I_0 \rightarrow I_1$, $I_1 \rightarrow I_0$ e $I_1 \rightarrow I_1$. Desse modo, podemos demonstrar as seguintes afirmações:

a) $\text{Per}_1(f) \neq \emptyset$.

De fato, $I_1 \rightarrow I_1$ implica que existe $p \in I_1$ tal que $f(p) = p$.

b) $\text{Per}_2(f) \neq \emptyset$.

De fato, $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0$ implica que existe $p \in I_0$ tal que $f(p) \in I_1$ e $f^2(p) = p$. Se $f(p) = p$, então $p \in I_0 \cap I_1$, o que é um absurdo pois $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e $p_2 \in \text{Per}_3(f)$.

c) $\text{Per}_4(f) \neq \emptyset$.

De fato, $I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I_1$ implica que existe $p \in I_1$ tal que $f^k(p) \in I_1$ para todo $1 \leq k < 3$, $f^3(p) \in I_0$ e $f^4(p) = p$. Se $f^3(p) = p$, então $p \in I_0 \cap I_1$, o que é um absurdo pois $I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e $f^2(p_2) = p_1 \notin I_1$. Se $f^k(p) = p$ para algum $1 \leq k < 3$, então $f^k(p) \in I_1$ para todo $k \geq 1$. Em particular, $f^3(p) \in I_0 \cap I_1 = \{p_2\}$ e, portanto, $f^4(p) = p = p_3$, o que é um absurdo pois $f(p_3) = p_1 \notin I_1$.

Por fim, podemos demonstrar de maneira análoga à última afirmação que $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$ para todo $n \geq 4$. □

O Teorema 3.3 é um caso especial de um teorema, provado por A. N. Sharkovsky, que vamos enunciar na sequência. Inicialmente, considere a seguinte ordenação dos números naturais:

Definição 3.4 (Ordenação de Sharkovsky).

$$3 \triangleright 5 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

A ordenação de Sharkovsky lista todos os ímpares ≥ 3 em ordem crescente; em seguida, todos os ímpares ≥ 3 em ordem crescente multiplicados por 2; em seguida, todos os ímpares ≥ 3 em ordem crescente multiplicados por 4; e assim sucessivamente. Por fim, lista todas as potências de 2 em ordem decrescente.

Desse modo, enunciamos o Teorema de Sharkovsky cuja demonstração, apesar de não usar nenhuma ferramenta além daquelas usadas para demonstrar o Teorema 3.3, é consideravelmente grande.

Teorema 3.5 (Sharkovsky). Se $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$, então $\text{Per}_m(f) \neq \emptyset$ para todo $n \triangleright m$.

Demonstração. Ver [2]. □

O Teorema de Sharkovsky pode ser usado para provar que órbitas periódicas de certos tamanhos não existem. Por exemplo, observando os gráficos de h , h^2 e h^4 para $\mu = 3.2$ vemos que $\text{Per}_4(h) = \emptyset$ e, portanto, $\text{Per}_n(h) = \emptyset$ para todo $n \geq 3$.

Por fim, a ordenação de Sharkovsky é a melhor possível. Por exemplo, se $\text{Per}_5(f) \neq \emptyset$ implicasse $\text{Per}_3(f) \neq \emptyset$, então o número 5 poderia ser removido na ordenação. O seguinte teorema mostra que isso não é possível.

Teorema 3.6. *Se $n \geq 1$, então existe uma função f com as seguintes propriedades:*

1. $\text{Per}_n(f) \neq \emptyset$.
2. $\text{Per}_m(f) = \emptyset$ para todo $m \triangleright n$.

Demonstração. Seja $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a função dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

e considere a família de funções $T_\lambda(x) = \min\{\lambda, T(x)\}$ definidas em $[0, 1]$, onde o parâmetro λ varia em $[0, 1]$.

Inicialmente, observe que $T(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$ implica que $T_1 = T$. Além disso, é possível provar por indução que T_1 possui 2^k pontos periódicos de período k para todo $k \geq 1$. Desse modo, podemos definir

$$\lambda(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } k \text{ de } T_1\}\}$$

para todo $k \geq 1$. A ideia principal da prova consiste no fato de que $\lambda(k)$ desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de $T_{\lambda(k)}$. As seguintes afirmações tornarão preciso esse fato:

- a) Se $\mathcal{O} \subset [0, \lambda)$ é uma órbita de T_λ , então \mathcal{O} é uma órbita de T_1 .

Se $p \in \mathcal{O}$, então $T_\lambda(p) \in [0, \lambda)$. Desse modo, $T_\lambda(p) = \min\{\lambda, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$. Assim, T_λ e T_1 coincidem em \mathcal{O} e, portanto, \mathcal{O} é uma órbita de T_1 .

- b) Se $\mathcal{O} \subset [0, \lambda]$ é uma órbita de T_1 , então \mathcal{O} é uma órbita de T_λ .

Se $p \in \mathcal{O}$, então $T_1(p) \in [0, \lambda]$. Desse modo, $T_\lambda(p) = \min\{\lambda, T_1(p)\} = T_1(p)$. Assim, T_λ e T_1 coincidem em \mathcal{O} e, portanto, \mathcal{O} é uma órbita de T_λ .

- c) $T_{\lambda(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(k))$ de tamanho j se, e somente, se $\lambda(k) > \lambda(j)$.

Se $T_{\lambda(k)}$ possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(k))$ de tamanho j , então \mathcal{O} é uma órbita de T_1 e, pela definição de $\lambda(j)$, concluímos que $\lambda(k) > \lambda(j)$. Por outro lado, se $\lambda(k) > \lambda(j)$, então T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(j)] \subset [0, \lambda(k)]$ de tamanho j e, desse modo, \mathcal{O} é uma órbita de $T_{\lambda(k)}$.

- d) A órbita de T_1 que contém $\lambda(k)$ é uma órbita de tamanho k de $T_{\lambda(k)}$. Além disso, todas as outras órbitas de $T_{\lambda(k)}$ estão em $[0, \lambda(k))$.

Pela definição de $\lambda(k)$, T_1 possui uma órbita $\mathcal{O} \subset [0, \lambda(k)]$ de tamanho k e, portanto, \mathcal{O} é uma órbita de $T_{\lambda(k)}$.

Na segunda parte, basta observar que $\lambda(k)$ é o valor máximo de $T_{\lambda(k)}$ e, desse modo, toda órbita de $T_{\lambda(k)}$ está contida em $[0, \lambda(k)]$. Em particular, se a órbita não contém $\lambda(k)$, então ela está contida em $[0, \lambda(k))$.

- e) $k \triangleright j$ se, e somente se, $\lambda(k) > \lambda(j)$.

Suponha que $k \triangleright j$. Sabemos que $T_{\lambda(k)}$ possui uma órbita de tamanho k e, pelo Teorema de Sharkovsky, $T_{\lambda(k)}$ admite uma órbita de tamanho j . Em particular, essa órbita está contida em $[0, \lambda(k))$ e, portanto, $\lambda(k) > \lambda(j)$.

Suponha que $\lambda(k) > \lambda(j)$. Se $j \triangleright k$, então $\lambda(k) < \lambda(j)$ pela demonstração no parágrafo anterior e, portanto, $k \triangleright j$.

Desse modo, $T_{\lambda(n)}$ possui órbita de tamanho n para cada $n \geq 1$. Além disso, se $m \triangleright n$ então $\lambda(m) > \lambda(n)$ e, portanto, $T_{\lambda(n)}$ não possui órbita de tamanho m . \square

4 Teorema de Singer

Ao longo dessa seção, consideraremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe \mathcal{C}^3 . Iniciamos com a seguinte definição:

Definição 4.1 (Derivada de Schwarz). A derivada de Schwarz de f é a função $\mathcal{S}f : \mathbb{R} \setminus C_f \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{S}f(x) = \frac{D^3f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f(x)}{Df(x)} \right)^2,$$

onde $C_f = \{x \in \mathbb{R} : Df(x) \neq 0\}$.

Para os nossos objetivos, estudaremos funções que possuem a derivada de Schwarz negativa. Por exemplo, $Sh(x) = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0$ para todo $x \neq \frac{1}{2}$. A característica fundamental dessa propriedade é ser preservada em composição de funções.

Proposição 4.2. Se $\mathcal{S}f < 0$ e $\mathcal{S}g < 0$, então $\mathcal{S}(f \circ g) < 0$.

Demonstração. Basta observar que $\mathcal{S}(f \circ g)(x) = \mathcal{S}f(g(x))(Dg(x))^2 + \mathcal{S}g(x)$. \square

Corolário 4.3. Se $\mathcal{S}f < 0$, então $\mathcal{S}f^n < 0$ para todo $n \geq 1$.

Vamos mostra que se uma função possui derivada de Schwarz negativa e um número finito de pontos críticos, então existe um limite para a quantidade de órbitas periódicas atratoras. Para isso, iniciamos provando uma série de lemas.

Lema 4.4. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e x_0 é um ponto de mínimo local de Df , então $Df(x_0) \leq 0$.*

Demonstração. Se $Df(x_0) \neq 0$, então

$$\mathcal{S}f(x_0) = \frac{D^3f(x_0)}{Df(x_0)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f(x_0)}{Df(x_0)} \right)^2 < 0.$$

Sendo x_0 ponto de mínimo local de Df , temos que $D^2f(x_0) = 0$ e $D^3f(x_0) \geq 0$ e, portanto, $Df(x_0) < 0$. \square

Lema 4.5. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c$ são pontos fixos de f com $Df(b) \leq 1$, então f possui ponto crítico em (a, c) .*

Demonstração. Pelo TVM, existem $r \in (a, b)$ e $s \in (b, c)$ tais que $Df(r) = Df(s) = 1$. Sendo Df contínua, Df restrita ao intervalo $[r, s]$ possui mínimo global. Como $b \in (r, s)$ e $Df(b) \leq 1$, temos que Df possui mínimo local em (r, s) . Utilizando Lema anterior e o TVI, a demonstração está concluída. \square

Lema 4.6. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e $a < b < c < d$ são pontos fixos de f , então f possui ponto crítico em (a, d) .*

Demonstração. Se $Df(b) \leq 1$ ou $Df(c) \leq 1$, o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se $Df(b) > 1$ e $Df(c) > 1$, existem $r, t \in (b, c)$ tais que $r < t$, $f(r) > r$ e $f(t) < t$. Pelo TVM, existe $s \in (r, t)$ tal que $Df(s) < 1$. Portanto, Df possui mínimo local em (b, c) . Utilizando Lema 4.4 e o TVI, a demonstração está concluída. \square

Lema 4.7. *Se f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos críticos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo TVM, se $c \in \mathbb{R}$, então f possui ponto crítico entre dois elementos de $f^{-1}(c)$ e, portanto, $f^{-1}(c)$ é finito. De modo mais geral, é possível provar por indução que $f^{-n}(c)$ é finito para todo $n \geq 1$.

Se $n \geq 1$, então $Df^n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} Df(f^k(x)) = 0$ se, e somente se, $f^k(x)$ é ponto crítico de f para algum $1 \leq k < n$. Portanto, o conjunto de pontos críticos de f^n é finito. \square

Lema 4.8. *Se $\mathcal{S}f < 0$ e f possui finitos pontos críticos, então f^n possui finitos pontos fixos para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.6, se f^n possui infinitos pontos fixos para algum $n \geq 1$, então f^n possui infinitos pontos críticos, o que é um absurdo pelo Lema 4.7. \square

Teorema 4.9 (Singer). *Se $\mathcal{S}f < 0$ e f possui n pontos críticos, então f possui no máximo $n + 2$ órbitas periódicas não repulsoras.*

Demonstração. Seja p um ponto periódico não repulsor de f de período m . Se $g = f^m$, então $g(p) = p$ e $|Dg(p)| \leq 1$. Seja K a componente conexa de $\mathcal{B}(p) = \{x : \lim_{k \rightarrow \infty} g^k(x) = p\}$ que contém p . Inicialmente, suponha que K é limitado.

Se $|Dg(p)| < 1$, então é possível mostrar que K é aberto, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K .

Escrevendo $K = (a, b)$, se $g(a) = a$ e $g(b) = b$, então g possui ponto crítico em K pelo Lema 4.5; se $g(a) = b$ e $g(b) = a$, então g^2 possui ponto crítico em K pelo Lema 4.5; se $g(a) = g(b)$, então g possui ponto crítico em K pelo TVM.

Se $|Dg(p)| = 1$, então os pontos fixos de g são isolados pelo Lema anterior e, portanto, existe uma vizinhança de p que não contém outros pontos fixos de g .

Suponha que $Dg(p) = 1$. Se $Dg(p) = -1$, a demonstração é análoga considerando g^2 . Se p possui o comportamento de um ponto repulsor, então, para x numa vizinhança de p , $g(x) > x$ quando $x > p$ e $g(x) < x$ quando $x < p$. Desse modo, 1 é um mínimo local de Dg , o que é um absurdo pelo Lema 4.4 e, portanto, p é atrator em pelo menos um dos lados. Desse modo, K é um intervalo, $g(K) \subset K$ e g preserva os pontos extremos de K . Assim, é possível concluir de maneira análoga que g possui ponto crítico em K .

Assim, cada intervalo K limitado está associado à algum ponto crítico de f e, portanto, existem no máximo n desses intervalos. Não é possível obter a mesma conclusão se K não é limitado, mas observando que existem no máximo dois intervalos desse tipo, a demonstração está concluída. \square

Por fim, temos o Teorema de Singer aplicado à família quadrática.

Corolário 4.10. *Se $\mu > 1$, então h possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.*