

# 1 Definições Elementares

**Definição 1.1.** Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma função,  $p \in X$  e  $n \geq 1$ . Dizemos que  $p$  é um *ponto periódico com período  $n$* , se  $f^n(p) = p$ . Se  $f^k(p) \neq p$  para todo  $1 \leq k < n$ , então  $n$  é chamado de *período principal*. Em particular, se  $n = 1$ , dizemos que  $p$  é um *ponto fixo*.

**Definição 1.2.** Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma função,  $p \in X$  e  $n \geq 1$ . Dizemos que  $p$  é um *ponto eventualmente periódico com período  $n$* , se existe  $m > 1$  tal que  $f^k(p) = f^{k+n}(p)$  para todo  $k \geq m$ . Em particular, se  $n = 1$ , dizemos que  $p$  é um *ponto eventualmente fixo*.

**Definição 1.3.** Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma função e  $x \in X$ . O conjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$$

é a *órbita* de  $x$ .

**Definição 1.4.** Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma função,  $p$  um ponto periódico período  $n$  e  $x \in X$ . Dizemos que  $x$  *tende assintoticamente para  $p$*  se  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$ . O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para  $p$ , denotado por  $W^s(p)$ , é chamado de *conjunto estável de  $p$* . Dizemos que  $x$  *tende assintoticamente para infinito* se  $\lim_{k \rightarrow \infty} |f^k(x)| = \infty$ . O conjunto dos pontos que tendem assintoticamente para infinito, denotado por  $W^s(\infty)$ , é chamado de *conjunto estável do infinito*.

**Proposição 1.5.** Sejam  $f : X \rightarrow X$  uma função e  $p_1, p_2$  pontos periódicos distintos. Então  $W^s(p_1) \cap W^s(p_2) = \emptyset$ .

*Demonstração.* Sejam  $n_1, n_2$  os períodos de  $p_1, p_2$ , respectivamente. Suponha que exista  $x \in W^s(p_1) \cap W^s(p_2)$ . Sabemos que  $|f^{kn_1}(x) - p_1| \rightarrow 0$  e  $|f^{kn_2}(x) - p_2| \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Desse modo, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $N \geq 1$  tal que  $|f^{kn_1}(x) - p_1| < \frac{\varepsilon}{2}$  e  $|f^{kn_2}(x) - p_2| < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $k > N$ . Portanto,  $|p_1 - p_2| = |p_1 - f^{kn_1 n_2}(x) + f^{kn_1 n_2}(x) - p_2| \leq |f^{kn_2 n_1}(x) - p_1| + |f^{kn_1 n_2}(x) - p_2| < \varepsilon$ . Temos então que  $p = q$ , pois  $\varepsilon$  é arbitrário. Absurdo.  $\square$

## 2 Implicações da Diferenciabilidade

**Proposição 2.1.** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $f(I) \subset I$  ou  $f(I) \supset I$ , então  $f$  possui ponto fixo.*

*Demonstração.* Seja  $I = [a, b]$ . Suponha que  $f(I) \subset I$ . Considere a função contínua  $g(x) = f(x) - x$  definida em  $I$ . Como  $f(a), f(b) \in I$ , temos que  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  e  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $p \in I$  tal que  $g(p) = f(p) - p = 0$ . Desse modo,  $p$  é ponto fixo de  $f$ .

Suponha que  $f(I) \supset I$ . Por definição, existem  $c, d \in I$  tais que  $f(c) = a$  e  $f(d) = b$ . Considere a função contínua  $g(x) = f(x) - x$  definida em  $I$ . Temos que  $g(c) = a - c \leq 0$  e  $g(d) = b - d \geq 0$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $p \in I$  tal que  $g(p) = f(p) - p = 0$ . Desse modo,  $p$  é ponto fixo de  $f$ .  $\square$

**Teorema 2.2.** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma função diferenciável. Se  $|f'(x)| < 1$  para todo  $x \in I$ , então  $f$  admite um único ponto fixo e  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  para todo  $x, y \in I$  distintos.*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in I$ ,  $x < y$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c \in [x, y]$  tal que  $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ . Portanto,  $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| < |x - y|$ .

Pela Proposição 2.1,  $f$  admite um ponto fixo  $p$ . Suponha que exista um ponto fixo  $q$  diferente de  $p$ . Então, pela primeira parte da demonstração,  $|p - q| = |f(p) - f(q)| < |p - q|$ . Absurdo.  $\square$

**Definição 2.3.** Sejam  $f : I \rightarrow I$  uma função diferenciável e  $p$  um ponto periódico com período principal  $n$ . Dizemos que  $p$  é um *ponto hiperbólico* se  $|(f^n)'(p)| \neq 1$ . Se  $|(f^n)'(p)| > 1$ , dizemos que  $p$  é um *ponto atrator* e se  $|(f^n)'(p)| < 1$ , dizemos que  $p$  é um *ponto repulsor*. Dizemos que  $p$  é um *ponto não hiperbólico* se  $|(f^n)'(p)| = 1$ .

**Teorema 2.4.** *Sejam  $f : I \rightarrow I$  uma função  $C^1$  e  $p$  um ponto periódico com período principal  $n$ . Se  $p$  é um ponto hiperbólico atrator, existe uma vizinhança de  $p$  contida em  $W^s(p)$ . Se  $p$  é um ponto hiperbólico repulsor, existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que, se  $x \in U$  e  $x \neq p$ ,  $f^{kn}(x) \notin U$  para algum  $k \geq 1$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $p$  é um ponto hiperbólico atrator. Como  $f'$  é contínua, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $|(f^n)'(x)| \leq \lambda < 1$  para todo  $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ . Pelo Teorema do Valor Médio, se  $x \in U$  então  $|f^n(x) - p| = |f^n(x) - f^n(p)| \leq \lambda|x - p|$ . Por indução,  $|f^{kn}(x) - p| \leq \lambda^k|x - p|$ . Desse modo,  $f^{kn}(x) \rightarrow p$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Suponha que  $p$  é ponto hiperbólico repulsor. De maneira análoga, existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $|(f^n)'(x)| \geq \lambda > 1$  para todo  $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ . Fixado  $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ ,  $x \neq p$ , suponha que  $f^{kn}(x) \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$  para todo  $k \geq 1$ . Pelo Teorema do Valor Médio,  $|f^{kn}(x) - p| \geq \lambda^k|x - p|$  para todo  $k \geq 1$ . Absurdo, pois  $\lambda^k|x - p| \rightarrow \infty$  quando  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

*Observação.* A segunda parte do teorema afirma que existe uma vizinhança de  $p$  tal que todo ponto diferente de  $p$  nessa vizinhança é movida para fora dela após um número de iterações da  $f$ . Observe o ponto pode voltar para vizinhança após mais um número finito de iterações da  $f$ , pois sabemos que o valor absoluto da derivada é maior que 1 apenas nessa vizinhança.

### 3 Função Logística I: Estudo Inicial

Durante essa seção e as próximas, estudaremos a dinâmica da função logística, que é dada por  $F(x) = \mu x(1 - x)$  para  $\mu > 0$ .

**Proposição 3.1.** *Se  $\mu > 1$ , então*

1.  $F(1) = F(0) = 0$  e  $F(\frac{1}{\mu}) = F(p_\mu) = p_\mu$ , onde  $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ .
2.  $0 < p_\mu < 1$ .
3. o vértice da parábola de  $F$  é o ponto  $(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4})$ .

*Demonstração.* Aplicação direta das definições. □

**Proposição 3.2.** *Se  $\mu > 1$ , então  $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$ .*

*Demonstração.* Se  $x < 0$ , a sequência  $(x, F(x), F^2(x), \dots)$  é estritamente decrescente pois  $F(x) < x$ . Se  $(F^n(x))_n \rightarrow x_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , a continuidade de  $F$  implica que  $(F^{n+1}(x))_n \rightarrow F(x_0) < x_0$ . Absurdo. Portanto,  $(F^n(x))_n \rightarrow -\infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $F(x) < 0$  para todo  $x > 1$ , concluímos que  $(-\infty, 0) \cup (1, \infty) \subset W^s(\infty)$ . □

**Proposição 3.3.** *Se  $1 < \mu < 3$ , então*

1.  $0$  é um ponto repulsor e  $p_\mu$  é um ponto atrator.
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = p_\mu$  para todo  $x \in (0, 1)$ .

*Demonstração.* A primeira parte é verdadeira pois  $|F'(0)| = \mu > 1$  e  $|F'(p_\mu)| = |2 - \mu| < 1$ , quando  $1 < \mu < 3$ .

Falta provar o item 2. □

Desse modo, conhecemos completamente a dinâmica de  $F$  quando  $1 < \mu < 3$ :

$$W^s(0) = \{0, 1\}, W^s(p_\mu) = (0, 1) \text{ e } W^s(\infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty).$$

## 4 Função Logística II: Conjuntos de Cantor

Se  $\mu > 4$ , então  $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} > 1$ , ou seja, existem pontos em  $[0, 1]$  que não permanecem em  $[0, 1]$  após uma iteração de  $F$ . Em vista da Proposição 3.2, a dinâmica de  $F$  em tais pontos é determinada, pois pertencem ao conjunto  $W^s(\infty)$ . De modo mais geral, se um ponto de  $[0, 1]$  não permanece em  $[0, 1]$  após um número finito de iterações, então ele pertence ao conjunto  $W^s(\infty)$ .

Desse modo, considere o conjunto  $\Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1]\}$ , que é formado pelos pontos que permanecem em  $[0, 1]$  após  $n$  iterações de  $F$ , e considere o conjunto  $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n = \{x \in [0, 1] : F^n(x) \in [0, 1] \text{ para todo } n \geq 1\}$ , que é formado pelos pontos de  $[0, 1]$  que sempre permanecem em  $[0, 1]$  por iterações de  $F$ . Observe que  $\Lambda_n \supset \Lambda_{n+1}$ , para todo  $n \geq 1$ , pois se  $F^{n+1}(x) = F(F^n(x)) \in [0, 1]$ , então  $F^n(x) \in [0, 1]$ .

**Proposição 4.1.** *Se  $\mu > 4$ , então*

1.  $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$ , onde  $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$  e  $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu}$ .
2.  $\Lambda_n$  é a união de  $2^n$  intervalos fechados disjuntos.
3.  $F^n : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora, onde  $I$  é qualquer um dos  $2^n$  intervalos fechados disjuntos que formam  $\Lambda_n$ .

*Demonstração.* Analisando  $F'$  observamos que  $F$  é estritamente crescente no intervalo  $[0, \frac{1}{2}]$  e estritamente decrescente no intervalo  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Como  $F(0) = F(1) = 0$  e  $F(\frac{1}{2}) > 1$ , o Teorema do Valor Intermediário garante que existem  $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$  e  $x_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$  tais que  $F(x_1) = F(x_2) = 1$ . Os valores de  $x_1$  e  $x_2$  são encontrados resolvendo a equação de segundo grau  $\mu x(1 - x) = 1$ . Logo,  $F([0, x_1]) = F([x_2, 1]) = [0, 1]$  e  $F(x) > 1$  para todo  $x \in (x_1, x_2)$ . Portanto,  $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$  e o item 1 está demonstrado.

A demonstração dos itens 2 e 3 será feita por indução. De acordo com a primeira parte,  $\Lambda_1$  é a união de  $2^1 = 2$  intervalos fechados disjuntos e  $F$  restrita a cada um desses intervalos é uma bijeção com o intervalo  $[0, 1]$ .

Suponha que  $\Lambda_{k-1}$  é a união de  $2^{k-1}$  intervalos fechados disjuntos de modo que  $F^{k-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora para todo intervalo  $[a, b]$  que forma  $\Lambda_{k-1}$ . Sendo  $F^{k-1}$  bijetora,  $(F^{k-1})'(x) > 0$  ou  $(F^{k-1})'(x) < 0$  para todo  $x \in [a, b]$ . Como as demonstrações para os dois casos são análogas, podemos supor que  $(F^{k-1})'(x) > 0$ .

Como  $F^{k-1}$  é estritamente crescente, o Teorema do Valor Intermediário afirma que existem únicos  $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in (a, b)$  tais que

- (a)  $a < \overline{x}_1 < \overline{x}_2 < b$ ,
- (b)  $F^{k-1}([a, \overline{x}_1]) = [0, x_1]$ ,
- (c)  $F^{k-1}((\overline{x}_1, \overline{x}_2)) = (x_1, x_2)$  e

$$(d) \ F^{k-1}([\overline{x_2}, 1]) = [x_2, 1].$$

As condições acima garantem que os intervalos  $[a, \overline{x_1}]$ ,  $[\overline{x_2}, b]$  são disjuntos e que  $F^k(x) = F(F^{k-1}(x)) > 1$  para todo  $x \in (\overline{x_1}, \overline{x_2})$ . Também, temos que  $F^k([a, \overline{x_1}]) = F([0, x_1]) = [0, 1]$  e, analogamente,  $F^k([\overline{x_2}, 1]) = [0, 1]$ . Além disso,

$$(F^k)'([a, \overline{x_1}]) = F'(F^{k-1}([a, \overline{x_1}]))(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) = F'([0, x_1])(F^{k-1})'([a, \overline{x_1}]) > 0$$

e, analogamente,

$$(F^k)'([\overline{x_2}, 1]) = F'([x_2, 1])(F^{k-1})'([\overline{x_2}, 1]) < 0.$$

Logo,  $F^k$  é uma bijeção entre  $[a, \overline{x_1}]$  e  $[0, 1]$  e entre  $[\overline{x_2}, 1]$  e  $[0, 1]$ .

Portanto, a partir de cada intervalo fechado de  $\Lambda_{k-1}$ , construímos dois novos intervalos fechados disjuntos tais que  $F^k$  restrita em cada um desses intervalos é um bijeção com  $[0, 1]$  e, dessa maneira, esses intervalos estão contidos em  $\Lambda_k$ . Desse modo, se  $\Lambda_{k-1}$  é formado por  $2^{k-1}$  intervalos fechados disjuntos, então  $\Lambda_k$  é formado por  $2 \times 2^{k-1} = 2^k$  intervalos fechados disjuntos. Assim, o resultado está provado.  $\square$

**Definição 4.2** (Conjunto de Cantor). Um conjunto  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  não vazio é um *conjunto de Cantor* se

1.  $\Gamma$  é fechado e limitado,
2.  $\Gamma$  não possui intervalos e
3. Todo ponto de  $\Gamma$  é um ponto de acumulação de  $\Gamma$ .

**Lema 4.3.** Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então

1. existe  $\lambda > 1$  tal que  $|F'(x)| > \lambda$  para todo  $x \in \Lambda_1$ .
2. o tamanho de cada intervalo fechado em  $\Lambda_n$  é menor que  $\frac{1}{\lambda^n}$ .
3. dados  $x \in \Lambda$  e  $\varepsilon > 0$ , existe um intervalo fechado  $I \subset \Lambda_n$ , para algum  $n \geq 1$ , que contém  $x$  e cujo tamanho é menor que  $\varepsilon$  tal que  $F^n : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora.

*Demonstração.* 1. Inicialmente, observamos que  $\mu^2 - 4\mu > 1$  quando  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ . Desse modo,  $F'(x_1) = \sqrt{\mu^2 - 4\mu} > 1$  e  $F'(x_2) = -\sqrt{\mu^2 - 4\mu} < -1$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são como na Proposição 4.1. Observamos também que  $F'$  é estritamente decrescente, pois  $F''(x) = -2\mu < 0$ . Portanto,  $F'(x) \geq F'(x_1) > 1$  para todo  $x \in [0, x_1]$  e  $F'(x) \leq F'(x_2) < -1$  para todo  $x \in [x_2, 1]$ . De acordo com a Proposição 4.1,  $\Lambda_1 = [0, x_1] \cup [x_2, 1]$  e, desse modo,  $|F'(x)| > 1$  para todo  $x \in \Lambda_1$ . Sendo  $F'$  contínua e  $\Lambda_1$  compacto, existe  $\lambda > 1$  tal que  $|F'(x)| > \lambda$  para todo  $x \in \Lambda_1$ .

2. De acordo com a Proposição 4.1,  $\Lambda_n$  é formado pela união de  $2^n$  intervalos disjuntos. Seja  $[a, b]$  um desses intervalos. Se  $x \in [a, b]$ , em particular  $F^k(x) \in \Lambda_1$  para todo  $0 \leq k < n$ . Desse modo, de acordo com o item anterior, temos que  $(F^n)'(x) = F'(F^{n-1}(x)) \times F'(F^{n-2}(x)) \times \cdots \times F'(x) > \lambda^n$ .

Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$|F^n(b) - F^n(a)| = |(F^n)'(c)| |b - a| > \lambda^n |b - a|$$

Como  $F^n : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é contínua e bijetora, temos que  $|F^n(b) - F^n(a)| = 1$ . Desse modo,  $|b - a| < \frac{1}{\lambda^n}$  e a afirmação está provada.

3. Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^n} < \varepsilon$ , onde  $\lambda > 1$  é como no primeiro item. Em particular,  $x \in \Lambda_n$ . Seja  $I$  um dos intervalos que formam  $\Lambda_n$  e que contém  $x$ . Pelo item anterior, o tamanho de  $I$  é menor que  $\varepsilon$ . Além disso, pela Proposição 4.1,  $F^n : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora e, portanto, a afirmação está provada.

□

**Teorema 4.4.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $\Lambda$  é um conjunto de Cantor.*

*Demonstração.*  $\Lambda$  é não vazio pois  $0 \in \Lambda$ , é limitado pois  $\Lambda_1 \subset [0, 1]$  e é fechado pois é intersecção de conjuntos fechados.

Agora, suponha que  $\Lambda$  contém algum intervalo. Então, existem  $x, y \in I$ ,  $x < y$ , tais que  $[x, y] \subset \Lambda$ . Seja  $k$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < |x - y|$ . Em particular,  $[x, y] \subset \Lambda_k$ . Mas, de acordo com o Lema 4.3, os intervalos de  $\Lambda_k$  possuem tamanho menor que  $\frac{1}{\lambda^k}$ . Absurdo e, portanto,  $\Lambda$  não possui intervalos.

Por fim, observe que, se  $x$  é um ponto extremo de algum intervalo de  $\Lambda_n$ , então  $x \in \Lambda$  pois  $F^{n+1}(x) = 0$ . Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . Em particular,  $x \in \Lambda_k$  e, portanto,  $x$  é elemento de algum intervalo cujo tamanho é menor que  $\varepsilon$ , de acordo com o Lema 4.3. Portanto, existe  $y \in \Lambda$  ponto extremo do intervalo que contém  $x$  tal que  $|x - y| < \varepsilon$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, concluímos que  $x$  é um ponto de acumulação de  $\Lambda$ . □

*Observação.* O Teorema 4.4 é válido para  $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$ , porém a demonstração é mais difícil.

## 5 Função Logística III: Caos

**Proposição 5.1.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então o conjunto de pontos periódicos de  $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é denso em  $\Lambda$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . De acordo com o Lema 4.3, o intervalo fechado  $I \subset \Lambda_k$  que contém  $x$  possui tamanho menor que  $\varepsilon$ . Pela Proposição 4.1,  $F^k : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora. Como  $F^k(I) \supset I$ , a Proposição 2.1 afirma que existe  $y \in I$  tal que  $F^k(y) = y$ . Observando que  $y \in \Lambda$  e  $|x - y| < \varepsilon$ , o resultado está provado.  $\square$

**Definição 5.2.** Seja  $f : D \rightarrow D$  uma função. Dizemos que  $f$  é *topologicamente transitiva* se dados  $x, y \in D$  e  $\varepsilon > 0$ , existem  $z \in D$  e  $k \geq 1$  tais que  $|z - x| < \varepsilon$  e  $|f^k(z) - y| < \varepsilon$ .

**Proposição 5.3.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é topologicamente transitiva.*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in \Lambda$  e  $\varepsilon > 0$ . Existe  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . De acordo com o Lema 4.3, o tamanho de cada intervalo fechado em  $\Lambda_k$  é menor que  $\frac{1}{\lambda^k}$  e, portanto, menor que  $\varepsilon$ . Como  $x \in \Lambda_k$ , existe um intervalo  $[a, b] \subset \Lambda_k$  que contém  $x$ . Pela Proposição 4.1,  $F^k : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  é bijetora e, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $z \in [a, b]$  tal que  $F^k(z) = y$ . Observando que  $z \in \Lambda$ , concluímos que  $F$  é topologicamente transitiva.  $\square$

**Definição 5.4.** Seja  $f : D \rightarrow D$  uma função. Dizemos que  $f$  *depende sensivelmente das condições iniciais* se para algum  $\delta > 0$ , dados  $x \in D$  e  $\varepsilon > 0$ , existem  $y \in D$  e  $k \geq 1$  tais que  $|x - y| < \varepsilon$  e  $|f^k(x) - f^k(y)| > \delta$ .

**Proposição 5.5.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$  depende sensivelmente das condições iniciais.*

*Demonstração.* Sejam  $x \in \Lambda$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{\lambda^k} < \varepsilon$ . Como na demonstração da Proposição anterior, seja  $I$  o intervalo fechado contido em  $\Lambda_k$  que contém  $x$  e cujo tamanho é menor que  $\varepsilon$ . Como  $F^k : I \rightarrow [0, 1]$  é um bijeção, então  $F^k(a) = 0$  e  $F^k(b) = 1$ , onde  $a$  e  $b$  são pontos extremos de  $I$ . Como  $F(\frac{1}{2}) > 1$  e  $x \in \Lambda$ , segue que  $F^k(x) \in [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ . Se  $F^k(x) \in [0, \frac{1}{2})$ , então  $|F^k(x) - F^k(b)| = |F^k(x) - 1| > \frac{1}{2}$  e se  $F^k(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$ , então  $|F^k(x) - F^k(a)| = |F^k(x)| > \frac{1}{2}$ . Observando que  $|x - a| < \varepsilon$  e  $|x - b| < \varepsilon$ , temos o resultado para  $\delta = \frac{1}{2}$ .  $\square$

**Definição 5.6.** Seja  $f : D \rightarrow D$  uma função. Dizemos que  $f$  é *caótica* se

1. O conjunto de pontos periódicos de  $f$  é denso em  $D$ .
2.  $f$  é topologicamente transitiva.
3.  $f$  depende sensivelmente das condições iniciais.



**Teorema 5.7.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $F : \Lambda \rightarrow \Lambda$  é caótica.*

*Demonstração.* O resultado segue das Proposições 5.1, 5.3 e 5.5. □

*Observação.* O Teorema 5.7 é válido para  $4 < \mu \leq 2 + \sqrt{5}$ , porém a demonstração é mais difícil.

**Teorema 5.8.** *Se  $D$  é um subconjunto infinito de  $\mathbb{R}$  e  $f : D \rightarrow D$  é uma função topologicamente transitiva cujo conjunto de pontos periódicos é denso, então  $f$  é caótica.*

*Demonstração.* Por demonstrar. □

## 6 Função Logística IV: Conjugação Topológica

**Definição 6.1.** Sejam  $f : A \rightarrow A$ ,  $g : B \rightarrow B$  e  $\tau : A \rightarrow B$  funções. Dizemos que  $f$  e  $g$  são *topologicamente conjugadas por  $\tau$* , se  $\tau$  é um homeomorfismo tal que  $\tau \circ f = g \circ \tau$ .

**Proposição 6.2.** Sejam  $f : A \rightarrow A$ ,  $g : B \rightarrow B$  e  $\tau : A \rightarrow B$  funções. Se  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas por  $\tau$ , então

1.  $g$  e  $f$  são topologicamente conjugadas por  $\tau^{-1}$ .
2.  $\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$  para todo  $n \geq 1$ .
3.  $p$  é ponto periódico de  $f$  se e somente se  $\tau(p)$  é ponto periódico de  $g$ . Além disso, os períodos principais de  $p$  e  $\tau(p)$  são iguais.
4.  $W^s(\tau(p)) = \tau(W^s(p))$ , se  $p$  é um ponto periódico de  $f$ .
5. o conjunto de pontos periódicos de  $f$  é denso se e somente se o conjunto de pontos periódicos de  $g$  é denso.
6.  $f$  é topologicamente transitiva se e somente se  $g$  é topologicamente transitiva.

*Demonstração.* 1. Como  $\tau$  é um homeomorfismo, a função inversa  $\tau^{-1}$  existe e também é um homeomorfismo. Além disso,  $\tau \circ f = g \circ \tau$  implica que  $f \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ g$ . Portanto,  $\tau^{-1}$  é conjugação topológica de  $g$  e  $f$ .

2. Por definição, a afirmação é verdadeira quando  $n = 1$ . Suponha que  $\tau \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ \tau$ . Desse modo,  $\tau \circ f^n = \tau \circ f^{n-1} \circ f = g^{n-1} \circ \tau \circ f = g^{n-1} \circ g \circ \tau = g^n \circ \tau$ . Portanto, a afirmação é verdadeira para todo  $n \geq 1$ .

3. Suponha que  $p$  é um ponto periódico de  $f$  com período principal  $n$ . Desse modo,  $g^n(\tau(p)) = \tau(f^n(p)) = \tau(p)$ . Se  $k = 1, \dots, n-1$ , então  $g^k(\tau(p)) = \tau(f^k(p)) \neq \tau(p)$ , pois  $f^k(p) \neq p$  e  $\tau$  é injetora. Portanto,  $\tau(p)$  é um ponto periódico de  $g$  com período principal  $n$ . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

4. Suponha que  $p$  é um ponto periódico com período  $n$ . Se  $x \in W^s(\tau(p))$ , então  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{kn}(x) = \tau(p)$ . Como  $\tau^{-1}$  é contínua, temos  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(\tau^{-1}(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau^{-1}(g^{kn}(x)) = p$ . Então,  $x \in \tau(W^s(p))$  pois  $\tau^{-1}(x) \in W^s(p)$ .

Por outro lado, se  $\tau(x) \in \tau(W^s(p))$ , então  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{kn}(x) = p$ . Como  $\tau$  é contínua, temos  $\lim_{k \rightarrow \infty} g^{kn}(\tau(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau(f^{kn}(x)) = \tau(p)$  e, portanto,  $\tau(x) \in W^s(\tau(p))$ .

5. Se o conjunto  $Per(f)$  dos pontos periódicos de  $f$  é denso em  $A$ , então  $\tau(Per(f))$  é denso em  $B$  pois  $\tau$  é um homeomorfismo. Como  $\tau(Per(f)) = Per(g)$ , temos que  $Per(g)$  é denso em  $B$ . A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.

6. Inicialmente, sendo  $\tau$  é contínua, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  de modo que, se  $z \in A$ ,  $|x - z| < \delta$  e  $|y - f^n(z)| < \delta$ , então  $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$  e  $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$ , onde  $n \geq 1$  é fixado.

Se  $x', y' \in B$ , existem  $x, y \in A$  tais que  $\tau(x) = x'$  e  $\tau(y) = y'$ . Como  $f$  é topologicamente transitiva, existe  $z \in A$  tal que  $|x - z| < \delta$  e  $|y - f^n(z)| < \delta$  para algum  $n \geq 1$ . Portanto,  $|\tau(x) - \tau(z)| < \varepsilon$  e  $|\tau(y) - \tau(f^n(z))| < \varepsilon$ . Se  $\tau(z) = z'$ , então  $|x' - z'| < \varepsilon$  e  $|y' - g^n(z')| < \varepsilon$  e, portanto,  $g$  é topologicamente transitiva. A outra implicação é demonstrada de maneira análoga.  $\square$

**Lema 6.3.** A função  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é caótica.

*Demonstração.* Inicialmente, provaremos por indução que  $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$  é uma função linear bijetora para todo  $0 \leq k < 2^n$ . Pela definição de  $T$ , a afirmação é verdadeira quando  $n = 1$ . Suponha que  $T^{n-1} : [\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] \rightarrow [0, 1]$  é uma função linear bijetora para todo  $0 \leq k < 2^{n-1}$ . Fixado  $k$ , podemos supor que  $T^{n-1}(\frac{k}{2^{n-1}}) = 0$  e  $T^{n-1}(\frac{k+1}{2^{n-1}}) = 1$ . O caso em que  $T^{n-1}(\frac{k}{2^{n-1}}) = 1$  e  $T^{n-1}(\frac{k+1}{2^{n-1}}) = 0$  é tratado de maneira análoga. Temos que  $T^{n-1}(\bar{x}) = \frac{1}{2}$ , onde  $\bar{x} = \frac{2k+1}{2^n}$  é o ponto médio do intervalo  $[\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{k+1}{2^{n-1}}]$ . Portanto,  $T^n(\bar{x}) = T(T^{n-1}(\bar{x})) = T(\frac{1}{2}) = 1$ ,  $T^n(\frac{k}{2^{n-1}}) = T(0) = 0$  e  $T^n(\frac{k+1}{2^{n-1}}) = T(1) = 0$ . Desse modo,  $T^n : [\frac{k}{2^{n-1}}, \bar{x}] \rightarrow [0, 1]$  e  $T^n : [\bar{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] \rightarrow [0, 1]$  são funções lineares (pois são composições de funções lineares) e bijetoras para todo  $0 \leq k < 2^{n-1}$ . Observando que  $[\frac{k}{2^{n-1}}, \bar{x}] = [\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}]$  e  $[\bar{x}, \frac{k+1}{2^{n-1}}] = [\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}]$ , concluímos que  $T^n : [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] \rightarrow [0, 1]$  é uma função linear bijetora para todo  $0 \leq k < 2^n$  e, portanto, a afirmação está provada.

Para provar que  $T$  é caótica, seja  $\varepsilon > 0$ . Pelo afirmação do parágrafo anterior, existem  $n \geq 1$  e  $I = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$  tais que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ ,  $x \in I$  e  $T^n : I \rightarrow [0, 1]$  é bijetora.

Seja  $x \in [0, 1]$ . Como  $T(I) \supset I$ , a Proposição 2.1 afirma que existe  $p \in I$  tal que  $T^n(p) = p$ . Observando que  $|x - p| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , concluímos que o conjunto de pontos periódicos de  $T$  é denso em  $[0, 1]$ .

Sejam  $x, y \in [0, 1]$ . Como  $T^n : I \rightarrow [0, 1]$  é sobrejetora, existe  $z \in I$  tal que  $T^n(z) = y$ . Observando que  $|z - x| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e  $|T^n(z) - y| = 0 < \varepsilon$ , concluímos que  $T$  é topologicamente transitiva.

Seja  $x \in [0, 1]$ . Como  $T^n : I \rightarrow [0, 1]$  é sobrejetora, existem  $a, b \in I$  tais que  $T^n(a) = 0$  e  $T^n(b) = 1$ . Se  $T^n(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ , então  $|T^n(x) - T^n(b)| = |T^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$  e se  $T^n(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$ , então  $|T^n(x) - T^n(a)| = |T^n(x)| \geq \frac{1}{2}$ . Observando que  $|x - a| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e  $|x - b| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ , concluímos que  $T$  depende sensivelmente das condições iniciais.  $\square$

**Teorema 6.4.** *Se  $\mu = 4$ , então  $F$  é caótica.*

*Demonstração.* Seja  $\tau(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$  definida no intervalo  $[0, 1]$ .  $\tau$  é homeomorfismo pois  $\tau'$  existe em  $[0, 1]$  e  $\tau' > 0$  em  $(0, 1)$ .

Se  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , então

$$\tau \circ T(x) = \tau(2x) = \sin^2(\pi x)$$

e se  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , então

$$\tau \circ T(x) = \tau(2 - 2x) = \sin^2(\pi - \pi x) = (\sin(\pi) \cos(\pi x) - \sin(\pi x) \cos(\pi))^2 = \sin^2(\pi x)$$

Por outro lado,

$$F \circ \tau(x) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \left(1 - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sin^2(\pi x)$$

Desse modo,  $\tau \circ T = F \circ \tau$ . Portanto, de acordo com o Teorema 5.7, a Proposição 6.2 e o Lema 6.3,  $F$  é caótica.  $\square$

## 7 Função Logística V: Dinâmica Simbólica

**Definição 7.1.**  $\Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) : s_k = 0 \text{ ou } s_k = 1 \text{ para todo } k \geq 0\}$  é o espaço das sequências de 0 e 1.

**Proposição 7.2.** A função  $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}$$

é uma distância em  $\Sigma_2$ .

*Demonstração.* Inicialmente, observamos que a função  $d$  é bem definida pois

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$$

Além disso, é fácil verificar que as propriedades de uma distância são válidas em  $d$ , isto é,

- (a)  $d(s, t) \geq 0$
- (b)  $d(s, t) = 0$  se e somente se  $s = t$
- (c)  $d(s, t) = d(t, s)$
- (d)  $d(s, t) \leq d(s, r) + d(r, t)$

para todo  $r, s, t \in \Sigma_2$ . Portanto,  $d$  é uma distância e a afirmação está provada.  $\square$

**Proposição 7.3.** Sejam  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots), t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$ . Se  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ , então  $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n}$ . Por outro lado, se  $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$ , então  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ .

*Demonstração.* Suponha que  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ . Desse modo,

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

Por outro lado, se  $s_i \neq t_i$  para algum  $0 \leq i \leq n$ , então

$$d(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \geq \frac{1}{2^i} \geq \frac{1}{2^n}$$

Portanto, se  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n$ , concluímos que  $d(s, t) < \frac{1}{2^n}$ .  $\square$

**Definição 7.4.** A função  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ , dada por  $\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ , é chamada de função *shift*.

**Proposição 7.5.**  $\sigma$  é contínua.

*Demonstração.* Sejam  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Se  $t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$  e  $d(s, t) < \frac{1}{2^{n+1}}$ , então  $s_k = t_k$  para todo  $0 \leq k \leq n+1$ , de acordo com a Proposição 7.3. Como  $\sigma(s) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$  e  $\sigma(t) = (t_1 t_2 t_3 \dots)$ , temos que as primeiras  $n+1$  entradas de  $\sigma(s)$  e  $\sigma(t)$  são iguais. Novamente, utilizando a Proposição 7.3, temos que  $d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Como  $s$  é um ponto arbitrário em  $\Sigma_2$ , concluímos que  $\sigma$  é contínua.  $\square$

**Proposição 7.6.** Se  $\sigma$  é a função shift, então

1. existem  $2^n$  pontos periódicos com período  $n$ .
2. existe um ponto cuja órbita é densa.
3. o conjunto dos pontos periódicos é denso.
4. o conjunto dos pontos não periódicos que são eventualmente periódicos é denso.
5. o conjunto dos pontos que não são periódicos e nem eventualmente periódicos é denso.

*Demonstração.* 1. Se  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  é um ponto periódico com período  $n$ , então

$$\sigma^k(\sigma^n(s)) = (s_{n+k} s_{n+k+1} s_{n+k+2} \dots) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots) = \sigma^k(s)$$

para todo  $k \geq 0$ . Desse modo,  $s$  é formado pela repetição das entradas  $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ . Pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem  $2^n$  sequências distintas para  $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$  e, portanto, a afirmação está provada.

2. Considere o ponto  $s^* = (0 1 00 01 10 11 000 001 \dots)$  formado por todos os blocos de tamanho 1, depois por todos os blocos de tamanho 2, e assim sucessivamente.

Sejam  $s \in \Sigma_2$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . É fácil ver que existe  $k \geq 0$  de modo que  $\sigma^k(s^*)$  e  $s$  são iguais nas primeiras  $n+1$  entradas. De acordo com a Proposição 7.3,  $d(s, \sigma^k(s^*)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e, portanto, a afirmação está provada.

3. Sejam  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $n \geq 1$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ . Considere o ponto periódico  $t$  com período  $n+1$  formado pela repetição da sequência  $s_0 s_1 s_2 \dots s_n$ . De acordo com a Proposição 7.3,  $d(s, t) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$  e, portanto, a afirmação está provada.  $\square$

## 8 Teorema de Sharkovsky

Ao longo dessa seção,  $f$  denotará uma função contínua de um intervalo em  $\mathbb{R}$ , onde o intervalo não precisa ser fechado ou limitado.

**Definição 8.1.** Se  $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$  são intervalos fechados,  $n > 1$ ,

1. dizemos que  $I_0$  cobre  $I_1$ , e denotamos por  $I_0 \longrightarrow I_1$ , se  $f(I_0) \supset I_1$ .
2. dizemos que  $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$  é um caminho entre  $I_0$  e  $I_{n-1}$ , e denotamos por  $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1}$ , se  $f(I_i) \supset I_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n-2$ .
3. dizemos que  $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$  é um ciclo entre  $I_0$  e  $I_{n-1}$ , e denotamos por  $I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$ , se  $f(I_i) \supset I_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n-2$ , e  $f(I_{n-1}) \supset I_0$ .

**Lema 8.2.** Se  $I_0 \longrightarrow I_1$ , então  $f(I'_0) = I_1$  para algum intervalo fechado  $I'_0 \subset I_0$ .

*Demonstração.* Se  $I_0 = [a, b]$  e  $I_1 = [c, d]$ , pelo Teorema do Valor Intermediário, existem  $p, q \in I_0$  tais que  $f(p) = c$  e  $f(q) = d$ . Suponha que  $p \leq q$  e defina  $I'_0 = [a', b']$ , onde

$$b' = \inf\{x \in [p, q] : f(x) = d\} \text{ e } a' = \sup\{x \in [p, b'] : f(x) = c\}$$

Sendo  $f$  contínua temos que  $f(a') = c$  e  $f(b') = d$  e, desse modo,  $f(I'_0) \supset I_1$ . Se  $f(x) < c$  para algum  $x \in I'_0$ , existe  $y \in [x, b']$  tal que  $f(y) = c$ , o que é um absurdo pois nesse caso  $y > a'$ . Absurdo análogo ocorre se  $f(x) > d$  para algum  $x \in I'_0$ . Portanto,  $f(I'_0) = I_1$ .  $\square$

**Lema 8.3.** Se  $J_0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow J_{n-1} \longrightarrow J_0$ , então existe  $p \in J_0$  tal que  $f^k(p) \in J_k$ , para todo  $k = 1, \dots, n-1$ , e  $f^n(p) = p$ .

*Demonstração.* De acordo com as hipóteses e com a Proposição anterior, temos as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} J_0 \longrightarrow J_1 &\Rightarrow \text{ existe } J'_0 \subset J_0 \text{ tal que } f(J'_0) = J_1 \\ J_1 \longrightarrow J_2 &\Rightarrow \text{ existe } J'_1 \subset J'_0 \text{ tal que } f^2(J'_1) = J_2 \\ &\vdots \\ J_{n-2} \longrightarrow J_{n-1} &\Rightarrow \text{ existe } J'_{n-2} \subset J'_{n-3} \text{ tal que } f^{n-1}(J'_{n-2}) = J_{n-1} \\ J_{n-1} \longrightarrow J_0 &\Rightarrow \text{ existe } J'_{n-1} \subset J'_{n-2} \text{ tal que } f^n(J'_{n-1}) = J_0 \end{aligned}$$

Construímos então uma sequência de  $n$  intervalos fechados  $J_0 \supset J'_0 \supset J'_1 \supset \dots \supset J'_{n-1}$  tal que  $f^k(J'_{k-1}) = J_k$ , para todo  $k = 1, \dots, n-1$ , e  $f^n(J'_{n-1}) = J_0$ . Como  $J_0 \supset J'_{n-1}$ , existe  $p \in J'_{n-1}$  tal que  $f^n(p) = p$ . Em particular,  $p \in J_0$  e  $f^k(p) \in J_k$ , para todo  $k = 1, \dots, n-1$ .  $\square$

**Teorema 8.4.** *Se  $f$  admite ponto periódico de período principal 3, então  $f$  admite ponto periódico de período principal  $n$ , para todo  $n \geq 1$ .*

*Demonstração.* Sejam  $p$  um ponto periódico de período principal 3 e  $p_1 < p_2 < p_3$  os pontos da órbita de  $p$  e suponha que  $f(p_1) = p_2$  e  $f(p_2) = p_3$ . O outro caso possível, em que  $f(p_1) = p_3$  e  $f(p_3) = p_2$ , é demonstrado de maneira análoga. Definindo  $I_1 = [p_1, p_2]$  e  $I_2 = [p_2, p_3]$ , temos que  $I_1 \longrightarrow I_2$ ,  $I_2 \longrightarrow I_1$  e  $I_2 \longrightarrow I_2$ .

- (a)  $n = 1$ : Como  $I_2 \longrightarrow I_2$ , existe  $p \in I_2$  tal que  $f(p) = p$ .
- (b)  $n = 2$ : Como  $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1$ , existe  $p \in I_1$  tal que  $f(p) \in I_2$  e  $f^2(p) = p$ . Se  $f(p) = p$ , então  $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ , o que é um absurdo pois  $p_2$  possui período principal 3. Desse modo, o período principal de  $p$  é 2.
- (c)  $n > 3$ : Se  $I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2$  é um ciclo de tamanho  $n$ , existe  $p \in I_2$  tal que  $f^k(p) \in I_2$ , para todo  $k = 1, \dots, n-2$ ,  $f^{n-1}(p) \in I_1$  e  $f^n(p) = p$ . Se  $f^{n-1}(p) = p$ , então  $p \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$ , o que é um absurdo pois implica que  $f(p) = p_3 \in I_1$ . Se  $f^k(p) = p$  para algum  $k = 1, \dots, n-2$  implica que  $f^k(p) \in I_2$ , para todo  $k \geq 1$ . Em particular,  $f^{n-1}(p) \in I_1 \cap I_2 = \{p_2\}$  e, portanto,  $p = f^n(p) = p_3$ , o que é um absurdo pois implica que  $f(p) = p_1 \in I_2$ .

Desse modo, o resultado está provado.  $\square$

Para demonstrar os seguintes Lemas, supomos que  $f$  admite um ponto periódico  $p$  de período principal  $n > 1$ . Seja  $\mathcal{O}(p) = \{p_1 < p_2 < \dots < p_n\}$  a órbita de  $p$ . Vamos definir  $n-1$  intervalos fechados da forma  $[p_i, p_{i+1}]$ , que serão denotados por  $I_1, I_2, \dots, I_{n-1}$ , com propriedades que permitam demonstrar o Teorema de Shakovsky.

**Lema 8.5.** *Existe  $k = 1, \dots, n-1$  tal que  $[p_k, p_{k+1}] \longrightarrow [p_k, p_{k+1}]$ .*

*Demonstração.* Seja  $p_k = \max\{p_i \in \mathcal{O}(p) : f(p_i) > p_i\}$ . Observe que  $p_k < p_n$ . Pela definição de  $p_k$  e por  $f(p_{k+1}) \neq p_{k+1}$ , temos que  $f(p_k) > p_k$  e  $f(p_{k+1}) < p_{k+1}$ . Portanto,  $[p_k, p_{k+1}] \longrightarrow [p_k, p_{k+1}]$ .  $\square$

O intervalo encontrado no Lema anterior será denotado por  $I_1$ . Portanto,  $I_1 \longrightarrow I_1$ .

**Lema 8.6.** *Existe um caminho entre  $I_1$  e  $[p_i, p_{i+1}]$ , para todo  $i = 1, \dots, n-1$ .*

*Demonstração.* Para cada  $n \geq 1$ , defina  $\mathcal{U}_n$  como a união dos intervalos da forma  $[p_i, p_{i+1}]$  tal que existe um caminho de tamanho  $n$  entre  $I_1$  e  $[p_i, p_{i+1}]$ .

Se  $[p_i, p_{i+1}]$  é um intervalo de  $\mathcal{U}_n$ , então existe um caminho de tamanho  $n$  entre  $I_1$  e  $[p_i, p_{i+1}]$ . Adicionando  $I_1 \longrightarrow I_1$  ao início do caminho formamos um caminho de tamanho  $n+1$  entre  $I_1$  e  $[p_i, p_{i+1}]$ . Portanto,  $[p_i, p_{i+1}]$  é um intervalo de  $\mathcal{U}_{n+1}$  e, desse modo,  $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1}$ . Observe que se  $\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}_{n+1}$ , existe um intervalo  $[p_i, p_{i+1}]$  de  $\mathcal{U}_n$  tal que  $f([p_i, p_{i+1}] \cap \mathcal{O}(p)) \not\subset \mathcal{U}_n$ .



Como  $\mathcal{O}(p)$  é finita e  $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \dots$ , existe  $k \geq 1$  tal que  $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_{k+1}$ . De acordo com a observação anterior,  $f([p_i, p_{i+1}] \cap \mathcal{O}(p)) \subset \mathcal{U}_k$  para todo intervalo  $[p_i, p_{i+1}]$  de  $\mathcal{U}_k$ , ou seja,  $f(\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)) \subset \mathcal{U}_k$ . Desse modo,  $f(\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)) = \mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p)$ . Como o único subconjunto de  $\mathcal{O}(p)$  estável por  $f$  é ele próprio, segue que  $\mathcal{U}_k \cap \mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(p)$ . Assim,  $\mathcal{U}_k = [p_1, p_n]$  e o resultado está provado.  $\square$

**Lema 8.7.** *Se não existe  $[p_i, p_{i+1}] \neq I_1$  tal que  $[p_i, p_{i+1}] \longrightarrow I_1$ , então*

1.  *$f$  é uma bijeção entre os pontos de  $\mathcal{O}(p)$  à esquerda e à direita de  $I_1$*
2.  *$n$  é par*
3.  *$f$  admite um ponto de período 2*

*Demonstração.* Seja  $I_1 = [p_k, p_{k+1}]$  e considere os conjuntos  $\mathcal{O}_1 = \{p_1, \dots, p_k\}$  e  $\mathcal{O}_2 = \{p_{k+1}, \dots, p_n\}$ .

1. Se  $f$  calculada em algum ponto de  $\mathcal{O}_1$  permanece em  $\mathcal{O}_1$ , considere  $p_j = \max\{p_i \in \mathcal{O}_1 : f(p_i) \in \mathcal{O}_1\}$ . Por definição de  $p_j$ , temos  $f(p_j) \leq p_k$  e  $f(p_{j+1}) \geq p_{k+1}$ . Além disso,  $p_j < p_k$ . Desse modo,  $[p_j, p_{j+1}] \neq I_1$  e  $[p_j, p_{j+1}] \longrightarrow I_1$ , o que é um absurdo.

Logo, todo ponto de  $\mathcal{O}_1$  é levado em  $\mathcal{O}_2$  por  $f$ . Analogamente, mostra-se que todo ponto de  $\mathcal{O}_2$  é levado em  $\mathcal{O}_1$  por  $f$ . Assim, existe uma bijeção entre  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$ .

2. Em particular, o tamanho de  $\mathcal{O}_1$  e  $\mathcal{O}_2$  são iguais. Desse modo,  $n$  é par.
3. Como  $[p_1, p_k] \longrightarrow [p_{k+1}, p_n]$  e  $[p_{k+1}, p_n] \longrightarrow [p_1, p_k]$ , existe  $p \in [p_1, p_k]$  tal que  $f^2(p) = p$ . Como os intervalos são disjuntos, segue que o período principal de  $p$  é 2.

Desse modo, as afirmações estão provadas.  $\square$

**Lema 8.8.** *Se  $n > 1$  é ímpar e  $f$  não admite ponto de período ímpar menor que  $n$ , então existe um ciclo  $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_1$  tal que*

1. *se  $I_i \longrightarrow I_{i+j}$  então  $j = 1$*
2.  *$I_{n-1} \longrightarrow I_j$ , para todo  $j < n - 1$  ímpar*

*Demonstração.* Inicialmente, vamos provar a existência do ciclo de tamanho  $n - 1$ . De acordo com os dois Lemas anteriores, existe um intervalo da forma  $[p_i, p_{i+1}]$  diferente de  $I_1$  tal que  $[p_i, p_{i+1}] \longrightarrow I_1$  (se esse intervalo não existe, então  $n$  é par) e existe um caminho entre  $I_1$  e  $[p_i, p_{i+1}]$ . Portanto, existe um ciclo começando em  $I_1$  diferente de  $I_1 \longrightarrow I_1$ . Observe que o tamanho desse ciclo pode ser arbitrariamente grande já que  $I_1 \longrightarrow I_1$ . Suponha que o menor ciclo dessa forma possui tamanho  $k$  e o denote por  $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_k \longrightarrow I_1$ .

Suponha que  $k < n - 1$ . Então  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$  ou  $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_1$  é um ciclo de tamanho ímpar  $m$  menor que  $n$ . Desse modo,  $f^m(p) = p$  para algum  $p \in I_1$ , o que é um absurdo pois  $f$  não admite ponto periódico de período ímpar menor que  $n$ .

Pela minimalidade do ciclo, a propriedade 1. é verdadeira. Para provar a propriedade 2., seja  $I_1 = [p_k, p_{k+1}]$ . Pela definição de  $I_1$ , temos que  $f(p_k) \geq p_{k+1}$  e  $f(p_{k+1}) \leq p_k$ . Como o período de  $p$  é maior que 2, então  $f(p_k) > f(p_{k+1})$  ou  $f(p_{k+1}) < p_k$ . Suponha que  $f(p_k) > f(p_{k+1})$ . O outro caso é demonstrado de maneira análoga.

Pela propriedade 1., sabemos que  $I_1$  cobre somente ele mesmo e  $I_2$ . Desse modo,  $f(p_k) = p_{k+2}$  e  $f(p_{k+1}) = p_k$ , e portanto  $I_2 = [p_{k+1}, p_{k+2}]$ . Como  $I_2$  cobre somente  $I_3$ , e já sabendo que  $f(p_{k+1}) = p_k$ , temos que  $f(p_{k+2}) = p_{k-1}$  e portanto  $I_3 = [p_{k-1}, p_k]$ . Prosseguindo desse modo, observamos que os intervalos estão distribuídos de maneira simétrica em relação à  $I_1$ . Em particular,  $I_{n-1} = [p_{n-1}, p_n]$  com  $f(p_{n-1}) = p_1$  e  $f(p_n) = p_{k+1}$ . Desse modo,  $f(I_{n-1}) \supset [p_1, p_{k+1}]$  e a afirmação está provada.  $\square$

**Definição 8.9.** O Ordenação de Sharkovsky é definida por

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \cdots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright 2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright 2^2 \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright 2^n \cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

ou seja, é formada inicialmente pelos ímpares maiores que 1 em ordem crescente; depois pelos ímpares maiores que 1, multiplicados por 2, em ordem crescente; depois pelos ímpares maiores que 1, multiplicados por  $2^2$ , em ordem crescente; e assim sucessivamente. Por fim, a ordem é formada por todas as potências de 2 em ordem decrescente.

**Teorema 8.10** (Sharkovsky). *Se  $f$  admite ponto de período principal  $n$ , então  $f$  admite ponto de período principal  $m$ , para todo  $m \triangleleft n$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $f$  admite ponto de período principal  $n$ . Vamos provar o teorema nos seguintes casos:

- (a) se  $n > 1$  ímpar e  $f$  não admite ponto periódico de período ímpar menor que  $n$

Pelo Lema anterior, podemos construir o ciclo

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_1$$

de tamanho  $m$ , para todo  $m > n$ . Desse modo, existe  $p \in I_1$  tal que  $f^k(p) \in I_{k+1}$  se  $k = 1, \dots, n - 2$ ,  $f^k(p) \in I_1$  se  $k = n - 1, \dots, m - 1$  e  $f^m(p) = p$ .

Se  $f^k(p) = p$  para algum  $k = 1, \dots, n - 2$ , então  $p \in I_1 \cap I_{k+1}$  e, portanto,  $p$  não existe ou possui período principal  $n > k$ , o que é um absurdo. Analogamente,  $f^k(p) \neq p$  para  $k = n - 1, \dots, m - 1$ . Portanto, o período principal de  $p$  é  $m$ .

Ainda de acordo com o Lema anterior, podemos construir ciclos da forma

$$\begin{aligned} I_{n-1} &\longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1} \\ I_{n-1} &\longrightarrow I_{n-4} \longrightarrow I_{n-3} \longrightarrow I_{n-2} \longrightarrow I_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

que permitem mostrar a existência de ponto de período principal  $m < n$ ,  $m$  par.

(b) se  $n = 2^m$ , com  $m \geq 1$

Seja  $k = 2^l$  com  $l < m$  e considere  $g = f^{\frac{k}{2}}$ . Temos que  $g$  admite um ponto de período principal  $2^{m-l+1}$ . Como  $g$  admite um ponto de período principal par  $\geq 2$ , segue que  $g$  admite ponto de período principal 2. Portanto,  $f$  admite um ponto de período principal  $2^l$ .

(c) se  $n = p2^m$ , com  $m \geq 1$  e  $p$  ímpar

Seja  $g = f^{2^m}$ . Vamos mostrar inicialmente que  $f$  admite ponto de período principal  $q2^m$ ,  $q$  par. Temos que  $g$  admite ponto de período principal  $p$  ímpar. Pelo item (a),  $g$  admite ponto de período principal  $q$  par. Logo,  $f$  admite ponto de período principal  $q2^m$ ,  $q$  par.

Agora, vamos mostrar que  $f$  admite ponto de período principal  $q2^m$ ,  $q > p$  ímpar. Pelo item (a),  $g$  admite ponto de período principal  $q > p$  ímpar. Desse modo,  $f$  admite ponto de período principal  $q2^{m-i}$  para algum  $i = 0, \dots, m$ . Se  $i = 0$ , está mostrado. Se  $i > 0$ , pelo parágrafo anterior,  $f$  admite ponto de período principal  $2^i(q2^{m-i}) = q2^m$  e, portanto, a afirmação está provada.

Por fim, vamos mostrar que  $f$  admite ponto de período principal  $2^l$ , com  $l < k$ . Sabemos que  $f$  admite ponto de período principal  $q2^k$ ,  $q$  par. Em particular, tomando  $q = 2$ , concluímos que  $f$  admite ponto de período principal  $2^l$ , com  $l < k$ .

Observando que as afirmações anteriores esgotam as possibilidades na ordenação de Sharkovsky, concluímos a demonstração do teorema.  $\square$

**Teorema 8.11.** *Para todo  $n \geq 1$  existe uma função  $f$  que admite ponto periódico de período principal  $n$  e que não admite ponto de período principal  $m$  se  $m \triangleright n$ .*

*Demonstração.* Seja  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  a função dada por  $T(x) = 1 - |2x - 1|$  e considere a família de funções  $T_h(x) = \min\{h, T(x)\}$  definidas em  $[0, 1]$ , com o parâmetro  $h$  variando em  $[0, 1]$ . Observe que  $T_1 = T$ , pois  $T(x) \leq 1$  para todo  $x \in [0, 1]$ . Além disso, observando o gráfico de  $T_1$  concluímos que a função possui  $2^k$  pontos periódicos de período  $k$  e assim podemos definir, para cada  $k \geq 1$ ,

$$h(k) = \min\{\max\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é uma órbita de tamanho } n \text{ de } T_1\}\}$$

A ideia principal da prova consiste no fato de que  $h(k)$  desempenha os papéis de parâmetro, máximo e ponto de uma órbita de  $T_{h(k)}$ . As seguintes afirmações tornarão preciso esse fato.

(a) Se  $\mathcal{O} \subset [0, h]$  é uma órbita de  $T_h$ , então  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_1$ .

Se  $p \in \mathcal{O}$  então  $T_h(p) \in [0, h]$ . Desse modo,  $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = T(p) = T_1(p)$ , ou seja,  $T_h$  e  $T_1$  coincidem em  $\mathcal{O}$  e, portanto,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_1$ .

(b) Se  $\mathcal{O} \subset [0, h]$  é uma órbita de  $T_1$ , então  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_h$ .

Se  $p \in \mathcal{O}$  então  $T_1(p) \in [0, h]$ . Desse modo,  $T_h(p) = \min\{h, T(p)\} = \min\{h, T_1(p)\} = T_1(p)$ , ou seja,  $T_h$  e  $T_1$  coincidem em  $\mathcal{O}$  e, portanto,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_h$ .

(c)  $T_{h(k)}$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \in [0, h(k))$  de tamanho  $l$  se e somente se  $h(k) > h(l)$ .

Se  $T_{h(k)}$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \in [0, h(k))$  de tamanho  $l$ , então  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_1$  por (a) e, pela definição de  $h(l)$ , concluímos que  $h(l) < h(k)$ .

Por outro lado, se  $h(l) < h(k)$ , então  $T_1$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \subset [0, h(l)] \subset [0, h(k)]$  de tamanho  $l$  e, desse modo,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_{h(k)}$  por (b).

(d) A órbita de  $T_1$  que contém  $h(k)$  é uma órbita de tamanho  $k$  de  $T_{h(k)}$ . Além disso, todas as outras órbitas de  $T_{h(k)}$  estão em  $[0, h(k))$ .

Pela definição de  $h(k)$ ,  $T_1$  possui uma órbita  $\mathcal{O} \subset [0, h(k)]$  de tamanho  $k$  e, portanto,  $\mathcal{O}$  é uma órbita de  $T_{h(k)}$  por (b).

Para demonstrar a segunda parte, basta observar que  $h(k)$  é o valor máximo de  $T_{h(k)}$  e, desse modo, toda órbita de  $T_{h(k)}$  está contida em  $[0, h(k)]$ . Em particular, se a órbita não contém  $h(k)$ , então ela está contida em  $[0, h(k))$ .

(e)  $k \triangleright l$  se e somente se  $h(k) > h(l)$ .

Suponha que  $k \triangleright l$ . Por (d),  $T_{h(k)}$  possui uma órbita de tamanho  $k$ . De acordo com o Teorema de Sharkovsky e com (d),  $T_{h(k)}$  admite uma órbita de tamanho  $l$  contida em  $[0, h(k))$ . Desse modo,  $h(k) > h(l)$  por (c).

Por outro lado, suponha que  $h(k) > h(l)$ . Caso  $l \triangleright k$ , a demonstração no parágrafo anterior implicaria que  $h(k) < h(l)$ , contrariando a hipótese. Desse modo,  $k \triangleright l$ .

Assim, para cada  $n \geq 1$ ,  $T_{h(n)}$  possui órbita de tamanho  $n$ . Além disso, se  $m \triangleright n$  então  $h(m) > h(n)$  por (e) e, portanto,  $T_{h(n)}$  não possui órbita de tamanho  $m$  por (c).  $\square$

## 9 Derivada de Schwarz

**Definição 9.1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . A *derivada de Schwarz* de  $f$  é a função  $S_f$  definida por

$$S_f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

para todo  $x$  tal que  $f'(x) \neq 0$ .

**Exemplo 9.2.** 1. Se  $f(x) = F_\mu(x)$ , então  $S_f(x) = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0$  para todo  $x \neq \frac{1}{2}$ .

2. Se  $f(x) = e^x$ , então  $S_f(x) = -\frac{1}{2} < 0$  para todo  $x$ .

3. Se  $f(x) = \sin x$ , então  $S_f(x) = -1 - \frac{3}{2}(\tan^2 x) < 0$  para todo  $x$ .

**Lema 9.3.** Se  $S_f < 0$ , então  $S_{f^n} < 0$  para todo  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Se  $S_f < 0$  e  $S_g < 0$ , vamos provar que  $S_{f \circ g} < 0$ . Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x) &= f'(g(x))g'(x) \\ (f \circ g)''(x) &= f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x) \\ (f \circ g)'''(x) &= f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g'''(x) \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} S_{f \circ g}(x) &= \frac{(f \circ g)'''(x)}{(f \circ g)'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{(f \circ g)''(x)}{(f \circ g)'(x)} \right)^2 \\ &= \frac{f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g'''(x)}{f'(g(x))g'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)}{f'(g(x))g'(x)} \right)^2 \\ &= S_f(g(x))(g'(x))^2 + S_g(x) < 0 \end{aligned}$$

para todo  $x$  tal que  $(f \circ g)'(x) \neq 0$ . Por indução,  $S_{f^n} < 0$  para todo  $n \geq 1$ .  $\square$

**Lema 9.4.** Se  $S_f < 0$  e  $x_0$  é ponto de mínimo local de  $f'$ , então  $f'(x_0) \leq 0$ .

*Demonstração.* Se  $f'(x_0) \neq 0$ , então  $S_f(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{3}{2} \frac{f''(x_0)^2}{f'(x_0)^3} < 0$ . Sendo  $x_0$  ponto de mínimo local de  $f'$ , temos que  $f''(x_0) = 0$  e  $f'''(x_0) \geq 0$ . Portanto,  $f'(x_0) < 0$ .  $\square$

**Lema 9.5.** Se  $S_f < 0$  e  $a < b < c$  são pontos fixos de  $f$ , com  $f'(b) \leq 1$ , então  $f$  possui ponto crítico em  $(a, c)$ .

*Demonstração.* Pelo Teorema do Valor Médio, existem  $r \in (a, b)$  e  $s \in (b, c)$  tais que  $f'(r) = f'(s) = 1$ . Sendo  $f'$  contínua,  $f'$  restrita ao intervalo  $[r, s]$  possui mínimo global. Como  $b \in (r, s)$  e  $f'(b) \leq 1$ , temos que  $f'$  possui mínimo local em  $(r, s)$ . Utilizando Lema anterior e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída.  $\square$

**Lema 9.6.** *Se  $S_f < 0$  e  $a < b < c < d$  são pontos fixos de  $f$ , então  $f$  possui ponto crítico em  $(a, d)$ .*

*Demonstração.* Se  $f'(b) \leq 1$  ou  $f'(c) \leq 1$ , o resultado é verdadeiro pelo Lema anterior. Se  $f'(b) > 1$  e  $f'(c) > 1$ , existem  $r, t \in (b, c)$  tais que  $r < t$ ,  $f(r) > r$  e  $f(t) < t$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $s \in (r, t)$  tal que  $f'(s) < 1$ . Portanto,  $f'$  possui mínimo local em  $(b, c)$ . Utilizando Lema 9.4 e o Teorema do Valor Intermediário, a demonstração está concluída.  $\square$

**Lema 9.7.** *Se  $f$  possui finitos pontos críticos, então  $f^n$  possui finitos pontos críticos para todo  $n \geq 1$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema do Valor Médio,  $f$  possui ponto crítico entre dois elementos de  $f^{-1}(c)$ . Como  $f$  possui finitos pontos críticos,  $f^{-1}(c)$  é finito. Além disso, se  $f^{-k}(c)$  é finito, então  $f^{-(k+1)}(c) = \{x \in \mathbb{R} : f(f^k(x)) = c\}$  é finito pois  $f^{-1}(c)$  é finito e, por hipótese de indução,  $f^{-k}(c_i)$  é finito para cada  $c_i \in f^{-1}(c)$ . Portanto,  $f^{-n}(c)$  é finito para todo  $n \geq 1$ .

Temos que  $(f^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x)) = 0$  se e somente se  $f^k(x)$  é ponto crítico de  $f$  para algum  $k = 1, \dots, n-1$ . Assim, o conjunto de pontos críticos de  $f^n$  é finito pois é dado pela união dos conjuntos  $\cup_{k=0}^{n-1} f^{-k}(c_i)$ , onde  $c_i$  é ponto crítico de  $f$ .  $\square$

Observe que o Lema anterior, ao contrário dos outros, não exige que  $S_f < 0$ .

**Teorema 9.8 (Singer).** *Se  $S_f < 0$  e  $f$  possui  $n$  pontos críticos, então  $f$  possui no máximo  $n + 2$  órbitas periódicas não repulsoras.*

*Demonstração.* Sejam  $p$  um ponto periódico não repulsor de  $f$  de período  $m$  e  $g = f^m$ . Desse modo,  $p$  é um ponto fixo não repulsor de  $g$ , ou seja,  $g(p) = p$  e  $|g'(p)| \leq 1$ . Seja  $K$  a componente conexa de  $B(p) = \{x : \lim_{k \rightarrow \infty} g^k(x) = p\}$  que contém  $p$ .

Suponha que  $K$  é limitado e  $|g'(p)| < 1$ . Vamos mostrar que  $K$  é aberto,  $g(K) \subset K$  e  $g$  preserva os pontos extremos de  $K$ .

Como  $|g'(p)| < 1$ ,  $p$  é um ponto atrator e, portanto, existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  contida em  $B(p)$ . Além disso,  $g(\bar{V}) \subset V$ . Sendo  $g$  contínua,  $g^{-n}(V)$  é um aberto que contém  $p$  para todo  $n \geq 1$ . Como  $g^n(p) = p \in V$ , considere  $g^{-n}(V)^*$  a componente conexa de  $g^{-n}(V)$  que contém  $p$ .

Observe que, se  $x \in K$ , existe  $n \geq 1$  tal que  $g^n(x) \in V$ . Desse modo, podemos escrever  $K = \cup_{n=0}^{\infty} g^{-n}(V)^*$ . Portanto,  $K$  é aberto e, por construção,  $g(K) \subset K$ .

Seja  $a$  um ponto extremo de  $K$  e suponha que  $g(a) \in K$ . Desse modo, existe uma vizinhança  $V$  de  $g(a)$  contida em  $K$ . Sendo  $g$  contínua,  $g^{-1}(V)$  é uma vizinhança de  $a$  contida em  $B(p)$ , o que contraria o fato de  $K$  ser a componente conexa de  $B(p)$  que contém  $p$ . Como  $g(K) \subset K$  e  $g$  é contínua, concluímos que  $g$  preserva os pontos extremos de  $K$ .

Desse modo, escrevendo  $K = (a, b)$ , ocorre um dos três casos abaixo. Vamos mostrar que em cada caso,  $g$  possui ponto crítico em  $K$ . Observe que  $S_g < 0$ .

- a) Se  $g(a) = a$  e  $g(b) = b$ ,  $g$  possui ponto crítico em  $K$  pelo Lema 9.5.
- b) Se  $g(a) = b$  e  $g(b) = a$ , considerando  $h = g^2$  e utilizando novamente o Lema 9.5,  $h$  possui ponto crítico em  $K$ . Como  $g(K) \subset K$ ,  $g$  possui ponto crítico em  $K$ .
- c) Se  $g(a) = g(b)$ ,  $g$  possui ponto crítico em  $K$  pelo Teorema do Valor Médio.

Suponha que  $K$  é limitado e  $|g'(p)| = 1$ . Pelo Lema anterior,  $g$  possui finitos pontos fixos e, portanto, são isolados.

Se  $g'(p) = 1$  e, para  $x$  numa vizinhança de  $p$ ,  $g(x) > x$  quando  $x > p$  e  $g(x) < x$  quando  $x < p$ , então  $g'(x^*) > 0$ , para  $x^*$  próximo de  $p$ , é um mínimo local de  $g'$  maior que zero, o que contradiz o Lema 9.4. Se  $g'(p) = -1$ , basta considerar  $h = g^2$  e obter o mesmo resultado. Portanto,  $p$  é atrator em pelo menos um dos lados. Desse modo,  $K$  é um intervalo não trivial,  $g(K) \subset K$  e  $g$  preserva os pontos extremos de  $K$ . Assim, é possível concluir de maneira análoga que  $g$  possui ponto crítico em  $K$ .

Pela Regra da Cadeia, se  $g$  possui ponto crítico  $x_0 \in K$ , então  $f^i(x_0)$  é ponto crítico de  $f$  para algum  $i = 0, \dots, m-1$ . Desse modo, se  $p$  é um ponto periódico não repulsor de  $f$  cujo intervalo associado  $K$  é limitado, então  $K$  possui pelo menos um ponto crítico e, como existem  $n$  pontos críticos, existem no máximo  $n$  intervalos  $K$  limitados. Não é possível obter a mesma conclusão se  $K$  não é limitado, mas observando que existem no máximo dois intervalos desse tipo, a demonstração está concluída.  $\square$

**Corolário 9.9.**  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ ,  $\mu > 0$ , possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.

*Demonstração.* Observe que  $F_\mu$  possui um único ponto crítico em  $\frac{1}{2}$ . Pelo Teorema de Singer,  $F_\mu$  possui no máximo 3 órbitas periódicas não repulsoras. Se  $p$  é ponto fixo de  $F_\mu$  e observando que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |F_\mu^n(x)| = \infty$  quando  $|x|$  é suficientemente grande, concluímos que  $B(p)$  é limitado. Portanto,  $F_\mu$  possui no máximo 1 órbita periódica não repulsora.  $\square$

Considere a função  $F_4(x) = 4x(1-x)$ ,  $x \in [0, 1]$ . O ponto crítico de  $F_4$  é eventualmente fixo em 0, que por sua vez é um ponto repulsor. Pelo Corolário acima, todas as órbitas periódicas de  $F_4$  são repulsoras. Utilizando o fato que  $S_{F_4} < 0$  é possível mostrar ainda que  $F_4$  é caótica.

Se  $q = \frac{1}{4}$  e  $p = \frac{3}{4}$ , então  $F(q) = p$  e  $F(p) = q$ . Defina  $J = [q, p]$  e  $J' = (q, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, p)$ . Observe que  $F_4(J') = (p, 1)$ , ou seja,  $F_4(x) \notin J$  quando  $x \in J'$ .

**Afirmção.** Se  $x \in J'$ , existe  $n \geq 2$  tal que  $F_4^n(x) \in J$ .

*Demonstração.* Como  $F_4^2(J') = (0, p)$ , basta mostrar que se  $x \in (0, q)$ , então  $F_4^n(x) \in J$  para algum  $n \geq 1$ .

Seja  $x \in (0, q)$  e suponha que  $F_4^n(x) < q$  para todo  $n \geq 1$ . Observando que  $F_4$  é estritamente crescente em  $(0, q]$ , a sequência  $(F_4^n(x))_n$  é monótona limitada e, portanto, possui um limite  $L \leq q$ . Sendo  $F_4$  contínua,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} F_4^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_4^{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_4(F_4^n(x)) = F_4(L)$$

o que é um absurdo. Portanto, a demonstração está concluída.  $\square$

Com base na afirmação anterior, podemos definir

$$\phi(x) = \min\{n \geq 2 : F_4^n(x) \in J\}$$

para todo  $x \in J'$ , ou seja,  $\phi(x)$  é a menor iterada de  $F_4$  em  $x$  que retorna para  $J$ . Assim, é possível construir a função  $R$ , denominada a função de primeiro retorno de  $F_4$  em  $J$ . Precisamente,  $R : J' \rightarrow J$  é dada por

$$R(x) = F_4^{\phi(x)}(x)$$

Também podemos definir os intervalos

$$I_n^- = \left\{ x \in \left( q, \frac{1}{2} \right) : \phi(x) = n \right\}$$

$$I_n^+ = \left\{ x \in \left( \frac{1}{2}, p \right) : \phi(x) = n \right\}$$

para todo  $n \geq 2$ . Esses intervalos possuem propriedades que estão retratadas na Afirmação abaixo.

**Afirmação.** Para todo  $n \geq 2$ ,

*i.*  $I_n^-$  é da forma  $(l_n, r_n]$ ,  $(F_4^n)'(I_n^-) < 0$ ,  $F_4^n(l_n) = p$ ,  $F_4^n(r_n) = q$  e  $r_n = l_{n+1}$ .

*ii.*  $I_n^+$  é da forma  $[l_n, r_n)$ ,  $(F_4^n)'(I_n^+) > 0$ ,  $F_4^n(l_n) = q$ ,  $F_4^n(r_n) = p$  e  $l_n = r_{n+1}$ .

*Demonstração.* Considere a função  $T$ , o Tent Map. Temos que  $T$  e  $F_4$  são conjugados topologicamente por  $\tau(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ , ou seja,  $\tau \circ T = F_4 \circ \tau$  em  $[0, 1]$ . Desse modo, basta demonstrar um resultado análogo para  $T$ . Vamos provar a afirmação *ii*. A prova da afirmação *i* é análoga.

Temos que  $T\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$  e  $T\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ . Portanto, definimos  $J = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$  como sendo o intervalo análogo para  $T$ . Além disso, é fácil ver por indução que  $T^n : \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right] \rightarrow [0, 1]$  é uma função linear estritamente crescente para todo  $n \geq 2$ .

Observe que  $T^n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}$ . Desse modo, existem  $l_n \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$  e  $r_n \in \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)$  tais que  $T^n(l_n) = \frac{1}{3}$  e  $T^n(r_n) = \frac{2}{3}$ . Definindo  $I_n^+ = [l_n, r_n)$ , temos que  $T^n(x) \in J$  se e somente se  $x \in I_n^+$ .



Fazendo a mesma construção para  $T^{n+1}$ , encontramos  $r_{n+1} \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}})$  tal que  $T^{n+1}(r_{n+1}) = \frac{2}{3}$ . Como  $l_n \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}})$  e  $T^{n+1}(l_n) = T(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} = T^{n+1}(r_{n+1})$ , concluímos que  $l_n = r_{n+1}$ .  $\square$

**Afirmção.** Se  $S_f < 0$  e  $f'$  não se anula no intervalo limitado  $I$ , então o mínimo de  $f'$  em  $I$  ocorre em algum ponto extremo de  $I$ .

*Demonstração.* Como  $S_f = S_{-f}$ , podemos considerar  $f'(I) > 0$  sem perda de generalidade. Se  $f'$  possui um ponto de mínimo  $x_0$  no interior de  $I$ , então  $f'(x_0) \leq 0$  de acordo com o Lema 9.4, o que é um absurdo.  $\square$

Por definição,  $R(x)$  é o primeiro retorno de  $x$  em  $J$  para cada  $x \in J'$  e, portanto,  $F_4(x), F_4^2(x), \dots, F_4^{\phi(x)-1}(x)$  não pertencem à  $J$ . Desse modo,  $R'(x) = (F_4^{\phi(x)})'(x) = \prod_{k=0}^{\phi(x)-1} F_4'(F_4^k(x)) \neq 0$ . Porém, como está demonstrado na Afirmção seguinte, é possível concluir mais sobre a derivada de  $R$ .

**Afirmção.**  $|R'(x)| > 1$  para todo  $x \in J'$ .

*Demonstração.* Sejam  $I_n^+ = [l_n, r_n)$  e  $W_n = (\frac{1}{2}, l_n)$ ,  $n \geq 2$ . Vamos provar que  $(F_4^n)'(I_n^+) > 1$ . A demonstração de que  $(F_4^n)'(I_n^-) < -1$  é feita de maneira análoga. De acordo com a Afirmção anterior, para mostrar que  $(F_4^n)'(I_n^+) > 1$  é suficiente mostrar que  $(F_4^n)'(l_n) > 1$  e  $(F_4^n)'(r_n) > 1$ .

Observe que  $F_4^n(I_n^+) = J$  e  $F_4^n(W_n) \supset (0, q)$  para todo  $n \geq 2$ . Como os tamanhos de  $I_n^+$  e  $W_n$  são menores que  $\frac{1}{4}$ , o Teorema do Valor Médio afirma que existem  $x'_n \in W_n$  e  $x_n \in (l_n, r_n)$  tais que  $(F_4^n)'(x'_n) > 1$  e  $(F_4^n)'(x_n) > 1$ . Como  $l_n \in (x'_n, x_n)$  e  $(F_4^n)'$  não pode assumir mínimo local positivo em  $(x'_n, x_n)$ , temos que  $(F_4^n)'(l_n) > 1$ .

Por outro lado,  $(F_4^n)'(r_n) = F_4'(F_4^{n-1}(r_n))(F_4^{n-1})'(r_n) = F_4'(q)(F_4^{n-1})'(l_{n-1}) > 1$ , pois ambos os termos são maiores que 1.

Desse modo,  $|R'(x)| > 1$  para todo  $x \in J'$ .  $\square$

**Afirmção.** Se  $U$  é um intervalo em  $[0, 1]$ , então existe  $n \geq 1$  tal que  $F_4^n(U) \supset [0, 1]$ .

*Demonstração.* Seja  $U$  um intervalo aberto em  $[0, 1]$ . Como  $|F_4'(x)| > 1$  para todo  $x \notin J$ , existe  $U_0 \subset U$  e  $n \geq 1$  tal que  $V = F_4^n(U_0) \subset J$ . Como  $|R'(x)| > 1$  para todo  $x \in J'$ , existe  $V_0 \subset V$  e  $m \geq 1$  tal que  $R^m(V_0)$  contém algum ponto de descontinuidade de  $R$ . Portanto, existe  $k \geq 1$  tal que  $p \in F_4^k(V_0)$ . Por fim, como é possível estender qualquer vizinhança de  $p$  por iteração de  $F_4$  até cobrir  $[0, 1]$ , existe  $l \geq 1$  tal que  $F_4^{k+l}(V_0) \supset [0, 1]$ .  $\square$

**Afirmção.**  $F_4$  é caótica.

*Demonstração.* Seja  $U, V$  um intervalos abertos em  $[0, 1]$ . Pela Afirmção anterior, existe  $n \geq 1$  tal que  $F_4^n(U) \supset [0, 1]$ .

O conjunto conjunto de pontos periódicos de  $F_4$  é denso em  $[0, 1]$ . De fato,  $F_4^n(U) \supset U$  e, portanto, existe  $x \in U$  tal que  $F_4^n(x) = x$ .

$F_4$  é transitiva topologicamente. De fato,  $F_4^n(U) \supset V$  e, portanto, existe  $x \in U$  tal que  $F_4^n(x) \in V$ .

$F_4$  depende sensivelmente das condições iniciais. De fato,  $F_4^n(U) \supset [0, 1]$  e, portanto, existem  $x, y \in U$  tais que  $|F_4^n(x) - F_4^n(y)| = |1 - 0| \geq 1$ .  $\square$

## 10 Bifurcação

Ao longo de seção,  $f_\lambda$  representará uma família parametrizada de funções no parâmetro  $\lambda$  de modo que a função

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x),$$

definida num aberto de  $\mathbb{R}^2$ , seja de classe  $\mathcal{C}^\infty$  nas variáveis  $x$  e  $\lambda$ .

**Teorema 10.1** (Função Implícita). *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  um aberto e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ . Suponha que*

1.  $F(x_0, y_0) = c$
2.  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

*Então existem uma vizinhança  $I$  de  $x_0$  e uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  tais que*

1.  $f(x_0) = y_0$
2.  $F(x, f(x)) = c$  para todo  $x \in I$

**Teorema 10.2.** *Seja  $f_\lambda$  uma família parametrizada de funções. Suponha que*

1.  $f_{\lambda_0}(x_0) = x_0$
2.  $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 1$

*Então existem vizinhanças  $I$  e  $J$  de  $\lambda_0$  e  $x_0$ , respectivamente, e uma função  $p : I \rightarrow J$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tais que*

1.  $p(\lambda_0) = x_0$
2.  $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$  para todo  $\lambda \in I$

*Além disso,  $f_\lambda$  não possui outros pontos fixos em  $J$ .*

*Demonstração.* Seja  $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$ . Observe que  $x$  é ponto fixo de  $f_\lambda$  se e somente se  $G(x, \lambda) = 0$ .

Pelo Teorema da Função Implícita, como  $G(x_0, \lambda_0) = 0$  e

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x_0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(x_0) - 1 \neq 0,$$

existem vizinhanças  $I$  e  $J$  de  $\lambda_0$  e  $x_0$ , respectivamente, e uma função  $p : I \rightarrow J$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tal que  $p(\lambda_0) = x_0$  e  $G(p(\lambda), \lambda) = 0$  para todo  $\lambda \in I$ .

Além disso, para cada  $\lambda \in I$  está associado um único  $x \in J$  e, portanto,  $x \in J$  e  $G(x, \lambda) = 0$  se e somente se  $x = p(\lambda)$ .  $\square$

De acordo com o Teorema anterior, se  $x_0$  é um ponto fixo hiperbólico de  $f_{\lambda_0}$ , então  $f_\lambda$  possui um único ponto fixo numa vizinhança de  $x_0$  para cada  $\lambda$  numa vizinhança de  $\lambda_0$ .

Utilizando a notação do Teorema anterior, considere a função  $g_\lambda(x) = f_\lambda(x + p(\lambda)) - p(\lambda)$ . Observe que  $g_\lambda(0) = f(p(\lambda)) - p(\lambda) = 0$  para todo  $\lambda \in I$ , ou seja, 0 é ponto fixo de  $g_\lambda$  para todo  $\lambda \in I$ . Além disso,  $f_\lambda$  e  $g_\lambda$  são topologicamente conjugadas por  $h_\lambda(x) = x - p(\lambda)$ .

**Teorema 10.3** (Bifurcação Tangente). *Suponha que*

1.  $f_{\lambda_0}(0) = 0$
2.  $f'_{\lambda_0}(0) = 1$
3.  $f''_{\lambda_0}(0) \neq 0$
4.  $\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$

Então existem uma vizinhança  $I$  de 0 e uma função  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tais que

1.  $p(0) = \lambda_0$
2.  $f_{p(x)}(x) = x$

Além disso,  $p'(0) = 0$  e  $p''(0) \neq 0$ .

*Demonstração.* Considere a função  $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$ . Observe que  $x$  é um ponto fixo de  $f_\lambda$  se e somente se  $G(x, \lambda) = 0$ .

Pelo Teorema da Função Implícita, como  $G(0, \lambda_0) = 0$  e

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0,$$

existem uma vizinhança  $I$  de 0 e uma função  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $p(0) = \lambda_0$  e  $G(x, p(x)) = 0$  para todo  $x \in I$ .

Além disso, pela Regra da Cadeia, é válido que

$$p'(0) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = -\frac{f'_{\lambda_0}(0) - 1}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)} = 0$$

e

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0) \frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) - \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0) \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial \lambda}(0, \lambda_0)}{\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)\right)^2} = -\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, \lambda_0)}{\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)} \neq 0$$

□

No Teorema anterior, se  $p''(0) > 0$ , então a concavidade de  $p$  é para cima. Esboçando o gráfico de  $p$ , podemos observar que  $f$  não possui pontos fixos para  $\lambda < \lambda_0$ , possui um único ponto fixo para  $\lambda = \lambda_0$  e possui dois pontos fixos para  $\lambda > \lambda_0$ . Se  $p''(0) < 0$ , a concavidade de  $p$  é para baixo e a conclusão é análoga, invertendo os sentidos.

**Teorema 10.4** (Bifurcação com Duplicação de Período). *Suponha que*

1.  $f_{\lambda_0}(0) = 0$  para todo  $\lambda$  numa vizinhança de  $\lambda_0$
2.  $f'_{\lambda_0}(0) = -1$
3.  $\frac{\partial(f_{\lambda}^2)'}{\partial\lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$
4.  $S_{f_{\lambda_0}}(0) \neq 0$

Então existem uma vizinhança  $I$  de 0 e uma função  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tais que

1.  $p(0) = \lambda_0$
2.  $f_{p(x)}(x) \neq x$  para todo  $x \in I$
3.  $f_{p(x)}^2(x) = x$  para todo  $x \in I$

Além disso,  $p'(0) = 0$  e  $p''(0) \neq 0$ .

*Demonstração.* Seja  $G(x, \lambda) = f_{\lambda}^2(x) - x$ . Sendo  $G(0, \lambda) = 0$  para todo  $\lambda$  numa vizinhança de  $\lambda_0$ , temos que

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = 0$$

e, portanto, não podemos utilizar o Teorema da Função Implícita diretamente. Seja

$$H(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{G(x, \lambda)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Desse modo,  $H$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$  e são válidas as igualdades

- (I)  $H(0, \lambda_0) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0) = (f_{\lambda_0}^2)'(0) - 1 = f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(0))f'_{\lambda_0}(0) - 1 = 0$
- (II)  $\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) \right) |_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} ((f_{\lambda}^2)'(0) - 1) |_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial(f_{\lambda}^2)'}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0$
- (III)  $\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)$
- (IV)  $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) = \frac{1}{3} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0)$

Para provar as igualdades (III) e (IV), observe que podemos escrever

$$G(x, \lambda) = G(0, \lambda) + x \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda) + \frac{x^3}{6} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda) + \dots$$

para todo  $x$  numa vizinhança de 0 e para  $\lambda$  fixado numa vizinhança de  $\lambda_0$ , utilizando a Série de Taylor. Sendo  $G(0, \lambda) = 0$ , podemos escrever

$$H(x, \lambda) = \frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda) + \frac{x}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda) + \frac{x^2}{6} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda) + \dots$$

para  $x \neq 0$  nessa vizinhança. Portanto,  $H$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Escrevendo a Série de Taylor de  $H$  numa vizinhança de 0 e igualando os termos correspondentes, concluímos que  $\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)$  e  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0)$ .

Pelas igualdades (I) e (II), e pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança  $I$  de 0 e uma função  $p : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tais que  $p(0) = \lambda_0$  e  $H(x, p(x)) = 0$  para todo  $x \in I$ . Em particular, se  $x \neq 0$ ,

$$0 = \frac{G(x, p(x))}{x} = \frac{f_{p(x)}^2(x) - x}{x}$$

ou seja,  $f_{p(x)}^2(x) = x$  para todo  $x \in I$ . Além disso, pelo Teorema 10.2,  $f_\lambda$  possui um único ponto fixo numa vizinhança de 0 e, portanto, podemos considerar que  $f_{p(x)}(x) \neq x$  para todo  $x \in I$ ,  $x \neq 0$ .

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0) &= (f_{\lambda_0})''(x)|_{x=0} \\ &= [f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\ &= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)]|_{x=0} \\ &= f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(0)) - f''_{\lambda_0}(0) = 0 \end{aligned}$$

temos que

$$p'(0) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = 0$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0) &= [f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^2 + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)]'|_{x=0} \\ &= [f'''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))(f'_{\lambda_0}(x))^3 + 2f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f''_{\lambda_0}(x)f'_{\lambda_0}(x) + f''_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'_{\lambda_0}(x)f''_{\lambda_0}(x) \\ &\quad + f'_{\lambda_0}(f_{\lambda_0}(x))f'''_{\lambda_0}(x)]|_{x=0} \\ &= f'''_{\lambda_0}(0)(f'_{\lambda_0}(0))^3 + 2(f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + (f''_{\lambda_0}(0))^2 f'_{\lambda_0}(0) + f'_{\lambda_0}(0)f'''_{\lambda_0}(0) \\ &= -2f'''_{\lambda_0}(0) - 3(f''_{\lambda_0}(0))^2 \\ &= 2\frac{f'''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)} - 3\left(\frac{f''_{\lambda_0}(0)}{f'_{\lambda_0}(0)}\right)^2 = 2S_{f_{\lambda_0}}(0) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$p''(0) = -\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(0, \lambda_0) \frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)}{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)\right)^2} = -\frac{1}{3} \frac{\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(0, \lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} = -\frac{2}{3} \frac{S_{f_{\lambda_0}}(0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(0, \lambda_0)} \neq 0.$$

□

## 11 Subshift

Seja  $N \geq 2$ . Definimos o conjunto  $\Sigma_N$  formado pelas sequências de números naturais limitados entre 1 e  $N$ . Precisamente,

$$\Sigma_N = \{(x_n)_{n=0}^\infty \in \mathbb{N}^\mathbb{N} : 1 \leq x_n \leq N \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Definimos também a função  $d_N : \Sigma_N \times \Sigma_N \rightarrow \mathbb{R}$  que é dada por

$$d_N(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{N^i},$$

onde  $x = (x_n)_{n=0}^\infty$  e  $y = (y_n)_{n=0}^\infty$ . Como  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} < \infty$ , temos que  $d_N$  está bem definida.

**Proposição 11.1.**  $(\Sigma_N, d_N)$  é um espaço métrico.

*Demonstração.* Se  $x = (x_n)_{n=0}^\infty, y = (y_n)_{n=0}^\infty, z = (z_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ , então

1.  $d_N(x, y) \geq 0$ , pois  $|x_i - y_i| \geq 0$  para todo  $i \geq 0$ .
2.  $d_N(x, y) = d_N(y, x)$ , pois  $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$  para todo  $i \geq 0$ .
3.  $d_N(x, z) \leq d_N(x, y) + d_N(y, z)$ , pois  $|x_i - z_i| = |x_i - y_i + y_i - z_i| \leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$  para todo  $i \geq 0$ .

Desse modo,  $d_N$  é uma distância em  $\Sigma_N$  e  $(\Sigma_N, d_N)$  é um espaço métrico.  $\square$

**Proposição 11.2.** Sejam  $x = (x_n)_{n=0}^\infty, y = (y_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ .

1. Se  $x_i = y_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ , então  $d_N(x, y) \leq \frac{1}{N^k}$ .
2. Se  $d_N(x, y) < \frac{1}{N^k}$ , então  $x_i = y_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ .

*Demonstração.* 1. Se  $x_i = y_i$  para todo  $0 \leq i \leq k$ , então

$$d_N(x, y) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} = \frac{N-1}{N^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i} = \frac{N-1}{N^{k+1}} \frac{N}{N-1} = \frac{1}{N^k}.$$

2. Se  $x_j \neq y_j$  para algum  $0 \leq j \leq k$ , então

$$d_N(x, y) \geq \frac{1}{N^j} \geq \frac{1}{N^k}.$$

$\square$

Definimos a função shift  $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$  que é dada por  $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^\infty$  para todo  $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ , isto é,  $\sigma(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots)$ .

**Proposição 11.3.**  $\sigma$  é contínua.

*Demonstração.* Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ . Seja  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$  e defina  $\delta = \frac{1}{N^{k+1}}$ .

Pela Proposição anterior, se  $y = (y_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$  e  $d_N(x, y) < \delta$ , então  $x_i = y_i$  para todo  $i = 0, \dots, k+1$ . Desse modo,  $\sigma(x)$  e  $\sigma(y)$  coincidem nas  $k$  primeiras entradas. Utilizando a Proposição anterior novamente, concluímos que  $d_N(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$ .  $\square$

Seja  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  uma matriz quadrada de ordem  $N$  tal que  $a_{ij} \in \{0, 1\}$  para todo  $1 \leq i, j \leq N$ . Dizemos que  $A$  é uma matriz de transição. Definimos o conjunto  $\Sigma_A$  como

$$\Sigma_A = \{(x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N : a_{x_i x_{i+1}} = 1 \text{ para todo } i \geq 0\}.$$

Seja  $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_A$ . Observando que  $a_{x_i x_{i+1}} = 1$  para todo  $i \geq 1$ , temos que  $\sigma(x) = (x_n)_{n=1}^\infty \in \Sigma_A$ . Desse modo, podemos definir a função  $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$  como sendo a restrição de  $\sigma$  em  $\Sigma_A$ . Dizemos que  $\sigma_A$  é o subshift definido por  $A$ .

**Proposição 11.4.**  $\Sigma_A$  é um subconjunto fechado de  $\Sigma_N$ .

*Demonstração.* Seja  $(x_n)_{n=0}^\infty$  uma sequência de elementos em  $\Sigma_A$  convergente para  $x = (\xi_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$ . Observe que a sequência  $(x_n)_{n=0}^\infty$  é uma sequência de sequências, pois cada  $x_n$  é elemento de  $\Sigma_N$ .

Suponha que  $x \notin \Sigma_A$ . Então, existe  $j \geq 0$  tal que  $a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$ . Por outro lado, pela definição de convergência, existe  $n_0 \geq 0$  tal que  $d(x_{n_0}, x) < \frac{1}{N^{j+1}}$  e, portanto, as  $j+2$  primeiras entradas de  $x$  e  $x_{n_0}$  são iguais. Escrevendo  $x_{n_0} = (\eta_n)_{n=0}^\infty$ , concluímos que  $a_{\eta_j \eta_{j+1}} = a_{\xi_j \xi_{j+1}} = 0$ . Absurdo, pois  $x_{n_0} \in \Sigma_A$ .  $\square$

No restante dessa seção vamos estudar a dinâmica da função quadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ , onde o parâmetro  $\mu = 3.839$  está fixado. Será omitido  $\mu$  na notação da função e escreveremos apenas  $F$ .

Sejam  $a = 0.149888$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$  e  $I = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Através de cálculos é possível mostrar que  $F^3(I) \subset I$  e  $|(F^3)'(I)| \leq |(F^3)'(a - \varepsilon)| < 1$  e, portanto, o intervalo  $I$  possui um ponto periódico atrator de  $F$  de período 3. Se  $a_1, a_2$  e  $a_3$  são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$a_1 \simeq 0.149888, a_2 \simeq 0.489149 \text{ e } a_3 \simeq 0.959299.$$

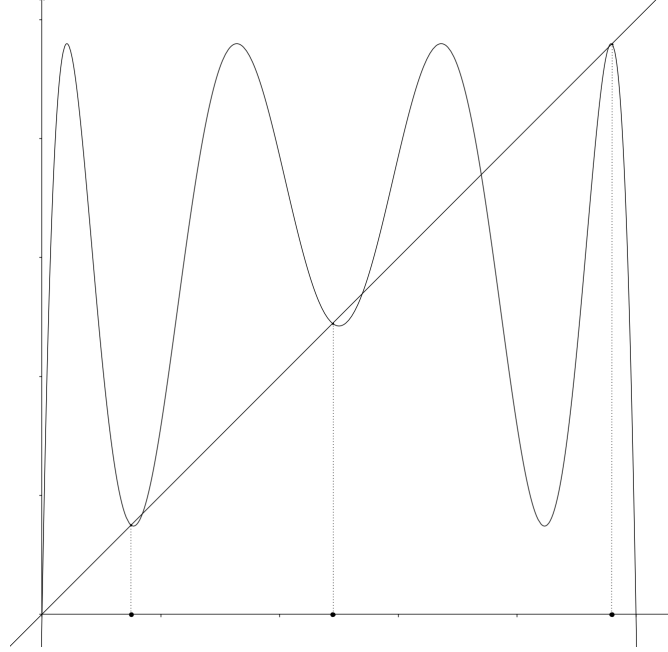
De acordo com o Teorema de Sharkovsky,  $F$  possui infinitos pontos periódicos. Além disso, de acordo com o Teorema de Singer, essa é a única órbita atratora de  $F$ .

De modo análogo, concluímos que  $F$  possui outra órbita de tamanho 3. Se  $b_1, b_2$  e  $b_3$  são os elementos dessa órbita em ordem crescente, então

$$b_1 \simeq 0.169040, b_2 \simeq 0.539247 \text{ e } b_3 \simeq 0.953837.$$



Observando o gráfico de  $F^3$ , concluímos que para cada  $b_i$ , existe  $b'_i$  no lado oposto de  $b_i$  em relação ao ponto  $a_i$  tal que  $F^3(b'_i) = b_i$ . Defina  $A_1 = (b'_1, b_1)$ ,  $A_2 = (b'_2, b_2)$  e  $A_3 = (b'_3, b'_3)$ . Cada  $A_i$  é exatamente o intervalo maximal contendo  $a_i$  utilizado na demonstração do Teorema de Singer.



**Figura:** Gráfico de  $F^3$  com os pontos  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  assinalados.

Sendo  $F^3$  simétrica em relação ao ponto  $\frac{1}{2}$ , temos que  $F(b'_2) = F(b_2) = b_3$ . Além disso,  $F(b'_1) = b'_2$  e  $F(b'_3) = b'_1$ .

★ *Essas duas últimas igualdades parecem verdadeiras, mas não consegui provar. Ao menos é consistente, pois implica que  $b'_3 \rightarrow b'_1 \rightarrow b'_2 \rightarrow b_3 \rightarrow b_1 \rightarrow b_2$  e, portanto,  $F^3(b'_i) = b_i$ . Tentei mostrar utilizando imagens inversas, mas cada imagem inversa possui dois elementos e eu não consigo construir uma regra sobre qual escolher.* ★

Desse modo,  $F$  mapeia, de forma monótona,  $A_1$  em  $A_2$  e  $A_3$  em  $A_1$ . Observando que o máximo de  $F$  em  $A_2$  é  $F(\frac{1}{2}) = 0.95975 < b'_3$ , concluímos que  $F(A_2) \subset A_3$ .

Sabemos que se  $x \notin [0, 1]$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = -\infty$ . Além disso, o único ponto periódico de  $A_i$  é  $a_i$  e todos os pontos em  $A_i$  tendem para a órbita de  $a_i$ . Desse modo, todos os outros pontos periódicos de  $F$  residem no complemento de  $A_1 \cup A_2 \cup A_3$  em  $[0, 1]$ , que é formado por quatro intervalos fechados. Sejam  $I_0 = [0, b'_1]$ ,  $I_1 = [b_1, b'_2]$ ,  $I_2 = [b_2, b_3]$  e  $I_3 = [b'_3, 1]$  tais intervalos. A Proposição a seguir nos permite dizer mais.

**Proposição 11.5.** *Se  $x \notin \{0, a_1, a_2, a_3\}$  é um ponto periódico de  $F$ , então  $x \in I_1 \cup I_2$ .*

*Demonstração.* Observando que  $F$  é monótona em cada  $I_k$ , temos que  $F(I_0) = I_0 \cup A_1 \cup I_1$ ,  $F(I_1) = I_2$ ,  $F(I_2) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$  e  $F(I_3) = I_0$ . Desse modo, se  $x \in I_1 \cup I_2$  é periódico, então órbita de  $x$  permanece em  $I_1 \cup I_2$ .

Por outro lado, se  $x \in I_0 - \{0\}$ , existe um menor  $n \geq 1$  tal que  $F^n(x) \notin I_0$ . Se  $F^n(x) \in A_1$ , então  $x$  não pode ser periódico, pois o único ponto periódico de  $A_1$  é  $a_1$ .

Se  $F^n(x) \in I_1$ , então  $x$  não pode ser periódico, pois caso contrário a órbita de  $x$  estaria contida em  $I_1 \cup I_2$  e nunca retornaria para  $I_0$ .

Finalmente, se  $x \in I_3$ , então  $F(x) \in I_0$  e a análise segue como no parágrafo anterior.  $\square$

Defina o conjunto  $\Lambda$  como

$$\Lambda = \{x \in I_1 \cup I_2 : F^n(x) \in I_1 \cup I_2 \text{ para todo } n \geq 1\}.$$

Pela Proposição anterior, todos os pontos periódicos de  $F$  estão em  $\Lambda$ , com exceção dos pontos  $0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ .

**Lema 11.6.** *Existe  $N \geq 1$  tal que  $|(F^n)'(\Lambda)| > 1$  para todo  $n \geq N$ .*

*Demonstração.* Como  $F'' < 0$ , temos que  $F'$  é estritamente decrescente. Sendo  $F'(\frac{1}{2}) = 0$ , concluímos que  $A_2$  é uma vizinhança da única raiz de  $F'$ . Além disso,  $|(F^3)'(b_2)| = |(F^3)'(b'_2)| \simeq 0.3$ . Desse modo,  $|F'(I_1 \cup I_2)| \geq \nu$  para algum  $\nu \in (0, 1)$ .

Observando o gráfico de  $F^3$ , concluímos que o subconjunto de  $I_1 \cup I_2$  no qual  $|F'| \leq 1$  é formado por três intervalos fechados. Sejam  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$  tais intervalos, numerados da esquerda para direita. Utilizando a simetria do gráfico de  $F^3$  e o fato de que  $(F^3)'(b_1) > 1$ , temos que  $F^3(B_3) \subset A_1$  e, portanto,  $B_3 \cap \Lambda = \emptyset$ .

Por outro lado,  $B_2 \subset [0.661, 0.683]$ , já que  $(F^3)'(0.661) > 1$  e  $(F^3)'(0.683) < -1$ . Desse modo,  $F(B_2) \subset A_3$ . Utilizando novamente a simetria do gráfico de  $F^3$ , concluímos que  $F(B_1) \subset A_3$ . Portanto,  $B_1 \cap \Lambda = \emptyset$  e  $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$ . Assim,  $|(F^3)'(\Lambda)| \geq \lambda$  para algum  $\lambda > 1$ . Observe que se  $x \in \Lambda$  e  $L \geq 1$ , então

$$\left| (F^{3L})'(x) \right| = \prod_{i=0}^{L-1} \left| (F^3)'(F^{3i}(x)) \right| \geq \lambda^L.$$

Finalmente, sejam  $x \in \Lambda$  e  $K \geq 1$  tal que  $\nu^2 \lambda^K > 1$ . Se  $N = 3K$  e  $n \geq N$ , podemos escrever  $n = 3L + \alpha$ , onde  $L \geq K$  e  $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ . Desse modo,

i. se  $\alpha = 0$ , então

$$\left| (F^n)'(x) \right| = \left| (F^{3L})'(x) \right| \geq \lambda^L \geq \lambda^K > 1.$$

ii. se  $\alpha = 1$ , então

$$\left| (F^n)'(x) \right| = \left| F'(F^{3L}(x)) \right| \left| (F^{3L})'(x) \right| \geq \nu \lambda^L > \nu^2 \lambda^K > 1.$$

iii. se  $\alpha = 2$ , então

$$\left| (F^n)'(x) \right| = \left| F'(F^{3L+1}(x)) \right| \left| F'(F^{3L}(x)) \right| \left| (F^{3L})'(x) \right| \geq \nu^2 \lambda^L \geq \nu^2 \lambda^K > 1.$$

□

Para as demonstrações dos próximos resultados, vamos considerar a matriz de transição

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos definir a função  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma_A$  por  $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$ , onde  $x_i = 1$  se  $F^i(x) \in I_1$  e  $x_i = 2$  se  $F^i(x) \in I_2$  para todo  $i \geq 0$ . Observe que está  $S$  bem definida, pois  $F(I_1) = I_2$  e  $F(I_2) \subset I_1 \cup I_2$  e, portanto,  $a_{x_i x_{i+1}} = 1$  para todo  $i \geq 0$ .

**Lema 11.7.**  $\Lambda$  não contém intervalos.

*Demonstração.* Suponha que  $\Lambda$  contém algum intervalo e sejam  $a, b \in \Lambda$ , com  $a < b$ , tais que  $[a, b] \subset \Lambda$ . Utilizando a notação do Lema anterior, seja  $k \geq N$  tal que  $(b-a)\nu^N \lambda^{k-N} > 1$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$\begin{aligned} |F^k(b) - F^k(a)| &= |(F^k)'(c)|(b-a) \\ &= \left| \prod_{i=0}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| (b-a) \\ &= \left| \prod_{i=0}^{N-1} F'(F^i(c)) \right| \left| \prod_{i=N}^{k-1} F'(F^i(c)) \right| (b-a) \\ &\geq \nu^N \lambda^{k-N} (b-a) > 1 \end{aligned}$$

e, portanto,  $F^k(a)$  ou  $F^k(b)$  não é elemento de  $[0, 1]$ , o que é um absurdo. □

**Proposição 11.8.**  $S$  é um homeomorfismo.

*Demonstração.* i.  $S$  é injetora:

Sejam  $x, y \in \Lambda$ , com  $x < y$ , e suponha que  $S(x) = S(y)$ . Desse modo,  $F^n(x)$  e  $F^n(y)$  está no mesmo lado em relação ao ponto crítico  $\frac{1}{2}$  e, portanto,  $F$  é monótona no intervalo  $J_n$ , cujos pontos extremos são  $F^n(x)$  e  $F^n(y)$ , para todo  $n \geq 0$ . Desse modo, se  $z \in [x, y]$ , então  $F^n(z) \in J_n \subset I_1 \cup I_2$  para todo  $n \geq 0$  e, portanto,  $z \in \Lambda$ . Mas isso implica que  $[x, y] \subset \Lambda$ , o que é um absurdo.

ii.  $S$  é sobrejetora:

Seja  $(x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_A$ . Vamos provar que existe  $x \in \Lambda$  tal que  $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$ .

Inicialmente, para cada  $n \geq 0$ , considere

$$I_{x_0 \dots x_n} = \{x \in [0, 1] : x \in I_{x_0}, \dots, F^n(x) \in I_{x_n}\}.$$

Observe que  $x \in I_{x_0 \dots x_n}$  se, e somente se,  $x \in I_{x_0}$  e  $F(x) \in \{y \in [0, 1] : y \in I_{x_1}, \dots, F^{n-1}(y) \in I_{x_n}\}$ . Desse modo,  $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1 \dots x_n})$ .

Assim, por indução, é possível concluir que  $I_{x_0 \dots x_n}$  é um intervalo fechado não vazio. Além disso,  $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0 \dots x_{n-1}} \cap F^{-n}(I_{x_n}) \subset I_{x_0 \dots x_{n-1}}$ .

Desse modo,  $(I_{x_0 \dots x_n})_{n=0}^\infty$  é uma sequência de intervalos encaixantes fechados e não vazios e, portanto, existe  $x \in \cap_{n=0}^\infty I_{x_0 \dots x_n}$ . Como  $F^i(x) \in I_{x_i}$  para todo  $i \geq 0$ , concluímos que  $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$ . Observe que  $x \in \cap_{n=0}^\infty I_{x_0 \dots x_n}$  é único, pois  $S$  é injetora.

iii.  $S$  é contínua:

Seja  $x \in \Lambda$ , com  $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$ . Sejam também  $\varepsilon > 0$  e  $k \geq 1$  tal que  $\frac{1}{N^k} < \varepsilon$ .

Como  $I_{x_0 \dots x_k}$  um intervalo fechado e  $x \in I_{x_0 \dots x_k}$ , tome  $\delta > 0$  tal que  $y \in \Lambda$  e  $|x - y| < \delta$  implica que  $y \in I_{x_0 \dots x_k}$ . Desse modo,  $S(x)$  e  $S(y)$  são iguais nas primeiras  $k + 1$  entradas e, portanto,  $d_N(S(x), S(y)) \leq \frac{1}{N^k} < \varepsilon$ . □

**Teorema 11.9.**  $S \circ F|_\Lambda = \sigma_A \circ S$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \Lambda$ . Utilizando a notação da Proposição anterior, se  $S(x) = (x_n)_{n=0}^\infty$ , então  $x$  é o único elemento de  $\cap_{n=0}^\infty I_{x_0 \dots x_n}$ .

Podemos escrever  $I_{x_0 \dots x_n} = I_{x_0} \cap F^{-1}(I_{x_1}) \cap \dots \cap F^{-n}(I_{x_n})$ . Se  $x_0 = 1$ , então  $x_1 = 2$  e, portanto,  $F(I_{x_0}) = I_{x_1}$ . Se  $x_0 = 2$ , então  $F(I_{x_0}) = I_1 \cup A_2 \cup I_2$ . Em ambos os casos,  $F(I_{x_0}) \supset I_{x_1}$  e, desse modo,

$$F(I_{x_0 \dots x_n}) = I_{x_1} \cap \dots \cap F^{-n+1}(I_{x_n}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S \circ F|_\Lambda(x) &= S(F(\cap_{n=0}^\infty I_{x_0 \dots x_n})) \\ &= S(\cap_{n=1}^\infty I_{x_1 \dots x_n}) \\ &= (x_n)_{n=1}^\infty = \sigma \circ S(x) \end{aligned}$$
□

**Proposição 11.10.** *Seja  $A$  uma matriz de transição de ordem  $N$ . Então  $\sigma_A$  possui  $Tr(A^k)$  pontos periódicos de período  $k$ .*

*Demonstração.* Observe que  $x = (x_n)_{n=0}^\infty \in \Sigma_N$  é um ponto periódico de período  $k$  de  $\sigma$  se, e somente se,  $x_i = x_{i+k}$  para todo  $i \geq 0$ , ou seja,

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \dots).$$

Desse modo,  $x \in \Sigma_A$  se, e somente se,  $a_{x_0x_1} = a_{x_1x_2} = \dots = a_{x_{k-1}x_0} = 1$  e, portanto,

$$\begin{cases} a_{x_0x_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}x_0} = 1, & \text{se } x \in \Sigma_A \\ a_{x_0x_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}x_0} = 0, & \text{se } x \notin \Sigma_A \end{cases}$$

Assim, a quantidade de pontos periódicos de período  $k$  de  $\sigma_A$  é dada por

$$\sum_{1 \leq x_0, \dots, x_{k-1} \leq N} a_{x_0x_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}x_0}.$$

Por outro lado, utilizando a definição de multiplicação de matrizes podemos mostrar por indução que  $A^k = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ , onde

$$c_{ij} = \sum_{1 \leq x_1, \dots, x_{k-1} \leq N} a_{ix_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}j}$$

e, portanto,

$$\text{Tr}(A^k) = \sum_{x_0=1}^N c_{x_0x_0} = \sum_{1 \leq x_0, \dots, x_{k-1} \leq N} a_{x_0x_1} a_{x_1x_2} \dots a_{x_{k-1}x_0}.$$

□

## 12 Estabilidade Estrutural

**Definição 12.1.** Sejam  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  funções de classe  $\mathcal{C}^k$ . A  $\mathcal{C}^k$ -distância entre  $f$  e  $g$  é definida por

$$d_k(f, g) = \sup_{x \in D} \{ |f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|, \dots, |f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)| \}$$

**Definição 12.2.** Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^k$ . Dizemos que  $f$  é  $\mathcal{C}^k$ -estável se existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $\mathcal{C}^k$  e  $d_k(f, g) < \varepsilon$ , então  $f$  e  $g$  são topologicamente conjugadas.

**Exemplo 12.3.** Seja  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $L(x) = \frac{x}{2}$ . Se  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  com  $d_1(L, g) < \frac{1}{2}$ , vamos mostrar que  $L$  e  $g$  são topologicamente conjugadas.

Inicialmente,  $g$  possui pelo menos 1 ponto fixo. Como  $|\frac{x}{2} - g(x)| < \frac{1}{2}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos que  $-\frac{1}{2} < \frac{x}{2} - g(x) < \frac{1}{2}$  e, portanto,  $-\frac{1}{2} - \frac{x}{2} < g(x) - x < \frac{1}{2} - \frac{x}{2}$ . Definindo  $h(x) = g(x) - x$ , temos que  $0 < h(-1) < 1$  e  $-1 < h(1) < 0$ . Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $x_0 \in (-1, 1)$  tal que  $h(x_0) = 0$  e, portanto,  $g(x_0) = x_0$ .

Além disso,  $g$  possui no máximo 1 ponto fixo. Como  $|\frac{1}{2} - g'(x)| < \frac{1}{2}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos que  $0 < g'(x) < 1$ . De acordo com o Teorema do Valor Médio, se  $g$  possui 2 pontos fixos, então existe  $x_0$  tal que  $g'(x_0) = 1$ , o que é um absurdo.

Seja  $J = [-10, -5] \cup (5, 10]$ . Observe que se  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ , então existe um único  $n_x \in \mathbb{Z}$  tal que  $L^{n_x}(x) \in J$ . Analogamente, se  $x \in \mathbb{R}$  e  $x$  não é ponto fixo de  $g$ , então existe um único  $n_x$  tal que  $g^{n_x}(x) \in [-10, g(-10)) \cup (g(10), 10]$ .

Seja  $h$  uma função tal que  $h|_{[-10, -5]}$  é um homeomorfismo crescente entre  $[-10, -5]$  e  $[-10, g(-10)]$  e  $h|_{[5, 10]}$  é um homeomorfismo crescente entre  $[5, 10]$  e  $[g(10), 10]$ .

Seja  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Como  $L^{n_x}(x) \in J$ , temos que  $h \circ L^{n_x}(x)$  está bem definido. Sendo  $g$  um homeomorfismo,  $g^{-n_x} \circ h \circ L^{n_x}(x)$  também está bem definido. Defina  $h(x) = g^{-n_x} \circ h \circ L^{n_x}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Observe que se  $x \in J$ , então  $n_x = 0$  e, portanto, está bem definida em  $J$ . Por fim, defina  $h(0)$  como sendo o ponto fixo de  $g$ . Resta mostrar que  $h \circ L(x) = g \circ h(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Se  $x \neq 0$ , então  $h(x) = g^{-n_x} \circ h \circ L^{n_x}(x)$ . Se  $y = L(x)$ , então  $y \neq 0$  e  $L^{n_x-1}(y) = L^{n_x-1}(L(x)) = L^{n_x}(x) \in J$ , ou seja,  $n_y = n_x - 1$ . Desse modo,

$$h \circ L(x) = h(y) = g^{-n_y} \circ h \circ L^{n_y}(y) = g \circ g^{-n_x} \circ h \circ L^{n_x}(x) = g \circ h(x)$$

e  $g(h(0)) = h(0) = h(L(0))$ .

Assim,  $h \circ L = g \circ h$ . Além disso,  $h$  é um homeomorfismo pois é composição de homeomorfismos. Desse modo,  $L$  e  $g$  são topologicamente conjugadas e, portanto,  $L$  é  $\mathcal{C}^1$ -estável.

Finalmente, vamos estudar a estabilidade estrutural da função quadrática  $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$  para  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ .

Relembrando, 0 e  $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$  são os únicos pontos fixos de  $F_\mu$ . Além disso,  $F_\mu$  possui um único ponto crítico em  $\frac{1}{2}$ , é estritamente crescente em  $(-\infty, \frac{1}{2})$  e é estritamente decrescente em  $(\frac{1}{2}, \infty)$ . Sendo  $F_\mu(\frac{1}{2}) > 1$ , temos que  $F_\mu^{-1}(1)$  possui dois elementos. Denotando tais elementos por  $y_0$  e  $y_1$ , com  $y_0 < y_1$ , temos que  $|F'_\mu(x)| > 1$  para todo  $x \in [0, y_0] \cup [y_1, 1]$ .

Além disso,  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = -\infty$  para todo  $x \notin [0, y_0] \cup [y_1, 1]$  e, desse modo, estudamos a dinâmica de  $F_\mu$  restrita ao conjunto  $\Lambda = \{x \in [0, 1] : F_\mu^n(x) \in [0, 1] \text{ para todo } n \geq 1\}$ . Por fim, mostramos que  $F_\mu|_\Lambda$  é topologicamente conjugada com a função  $\sigma$  em  $\Sigma_2$ .

**Teorema 12.4.** *Se  $\mu > 2 + \sqrt{5}$ , então  $F_\mu$  é  $\mathcal{C}^2$ -estável.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que existe  $\varepsilon > 0$  tal que se  $g$  é de classe  $\mathcal{C}^2$  e  $d_2(F_\mu, g) < \varepsilon$ , então  $F_\mu$  e  $g$  são topologicamente conjugadas.

Seja  $\varepsilon_1 > 0$  tal que  $d_2(F_\mu, g) < \varepsilon_1$  implica que  $g'' < 0$  e, portanto, que a concavidade de  $g$  é para baixo. Existe  $\varepsilon_1$  com essa propriedade pois  $F''_\mu = -2\mu$ .

Seja  $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$  tal que  $d_2(F_\mu, g) < \varepsilon_2$  implica que  $g$  possui dois pontos fixos  $\alpha < \beta$  com  $g'(\alpha) > 1$  e  $g'(\beta) < -1$ . Existe  $\varepsilon_2$  com essa propriedade pois  $F_\mu$  possui os pontos fixos 0 e  $p_\mu$  com  $F'_\mu(0) > 1$  e  $F'_\mu(p_\mu) < -1$ .

Pelo Teorema do Valor Médio, temos que  $g$  possui um ponto crítico  $c \in (\alpha, \beta)$ . Sendo  $g'' < 0$ , o ponto crítico de  $g$  é único. Além disso,  $g$  é estritamente crescente em  $(-\infty, c)$  e estritamente decrescente em  $(c, \infty)$ . Desse modo, existe  $\alpha' \in (c, \infty)$  tal que  $g(\alpha') = \alpha$ .

Por fim, seja  $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$  tal que  $d_2(F_\mu, g) < \varepsilon$  implica que  $g^{-1}(\alpha')$  possui os elementos  $x_0$  e  $x_1$ , com  $x_0 < x_1$ , e que  $|g'(x)| > 1$  para todo  $x \in [\alpha, x_0] \cup [x_1, \alpha']$ .

Desse modo, se  $d_2(F_\mu, g) < \varepsilon$ , então os gráficos de  $g$  e  $F_\mu$  possuem as mesmas propriedades. Em particular,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$  para todo  $x \notin [\alpha, x_0] \cup [x_1, \alpha']$ . De modo análogo ao feito para  $F_\mu$  restrita ao conjunto  $\Lambda$ , é possível mostrar que  $g$  restrita ao conjunto  $\Lambda_g = \{x \in [\alpha, \alpha'] : g^n(x) \in [\alpha, \alpha'] \text{ para todo } n \geq 1\}$  é topologicamente conjugada com a função  $\sigma$  de  $\Sigma_2$ . Portanto, por transitividade,  $F_\mu$  e  $g$  são topologicamente conjugadas.  $\square$

**Teorema 12.5** (Hartman). *Seja  $p$  um ponto fixo hiperbólico de  $f$  e suponha que  $f'(p) = \lambda \neq 0$ . Então existem vizinhanças  $U$  de  $p$  e  $V$  de 0 e um homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$  que conjuga as funções  $f|_U$  e  $L(x) = \lambda x$ ,  $x \in V$ .*

## 13 Princípio da Contração

**Definição 13.1.** Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  uma função contínua. Dizemos que um intervalo  $J \subset [0, 1]$  é *errante* se

1.  $J$  não está contido na base de atração de um ponto periódico atrator.
2.  $f^n(J) \cap f^m(J) = \emptyset$  para todo  $n > m \geq 0$ .

**Lema 13.2.** (*Princípio da Contração*) Seja  $J$  um intervalo tal que

$$\inf_{n \geq 0} |f^n(J)| = 0.$$

Então  $J$  é um intervalo errante ou está contido na base de atração de um ponto periódico atrator.

*Demonstração.* Seja

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(J).$$

Primeiramente, suponha que  $f^n(U) \cap U = \emptyset$  para todo  $n \geq 1$  e para todo conexo  $U$  em  $X$ . Sendo  $f$  contínua,  $f^m(J)$  é conexo em  $X$  para todo  $m \geq 0$  e, portanto,  $f^k(f^m(J)) \cap f^m(J) = \emptyset$  para todo  $k \geq 1$ . Desse modo,  $f^n(J) \cap f^m(J) = \emptyset$  para todo  $n > m \geq 0$ . Assim, pela Definição 13.1,  $J$  é um intervalo errante ou está contido em na base de atração de um ponto periódico atrator.

Por outro lado, suponha que exista um conexo  $U$  em  $X$  e  $n \geq 0$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Assim,  $f^n(U) \subset U$  e a função  $f^n : U \rightarrow U$  possui um ponto fixo  $p$ . **•• pra mim não é claro que essa suposição implica que  $f^n(U) \subset U$  ••** Se  $p$  está no interior de  $U$ , então alguma iterada de  $J$  contém  $p$  em seu fecho e, portanto,  $\inf_{n \geq 0} |f^n(J)| = 0$  implica que a órbita de  $p$  atrai  $J$ . Se  $p$  não está no interior de  $U$ , então  $f^n$  é estritamente monótona e todos os pontos em  $U$  são atraídos para  $p$  por  $f^n$ . Novamente, alguma iterada de  $J$  contém  $p$  e, portanto,  $\inf_{n \geq 0} |f^n(J)| = 0$  implica que a órbita de  $p$  atrai  $J$ .  $\square$

Na sequência, dados um intervalo  $J$  e  $\delta > 0$ , definiremos o intervalo  $J_\delta$  como

$$J_\delta = (\inf J - \delta|J|, \sup J + \delta|J|).$$

**Lema 13.3.** Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  contínua e suponha que  $x \mapsto \log |Df(x)|$  é Lipschitz com contante  $K$ . Então existe  $\delta > 0$  com a seguinte propriedade. Se  $J$  e  $T$  são intervalos em  $[0, 1]$  tais que  $J, \dots, f^{n-1}(J)$  são dois a dois disjuntos para algum  $n \geq 1$  e  $J \subset T \subset J_\delta$ , então

$$\frac{|Df^k(x)|}{|Df^k(y)|} \leq \exp(2K) \text{ para todo } x, y \in T$$



e

$$|f^k(T)| \leq 2|f^k(J)|$$

para todo  $k = 0, \dots, n$ .

*Demonstração.* Seja  $\delta < \frac{1}{2} \exp(-2K)$ . Por definição,

$$\left| \log |Df(x)| - \log |Df(y)| \right| \leq K|x - y| \leq K \leq 2K \text{ para todo } x, y \in T.$$

Suponha que

$$\left| \log |Df^i(x)| - \log |Df^i(y)| \right| \leq 2K \text{ para todo } x, y \in T$$

para todo  $1 \leq i < k \leq n$ .

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$|f^i(T)| = |f^i(J)| + |f^i(T - J)| = |f^i(J)| + |Df^i(z)||T - J|$$

para algum  $z \in T - J$ . Utilizando a definição de  $\delta$ , temos que

$$|f^i(T)| \leq |f^i(J)| + \exp(2K) \frac{|f^i(J)|}{|J|} |T - J| \leq |f^i(J)| (1 + 2\delta \exp(2K)) \leq 2|f^i(J)|.$$

•• aqui não entendi porque  $|Df^i(z)| \leq \exp(2K) \frac{|f^i(J)|}{|J|}$  ••

Além disso, sendo  $J, \dots, f^{n-1}(J)$  dois a dois disjuntos, temos que

$$\sum_{i=0}^{k-1} |f^i(T)| \leq \sum_{i=0}^{k-1} 2|f^i(J)| \leq 2$$

e, portanto, utilizando a Regra da Cadeia e a definição de  $K$ , concluímos que

$$\begin{aligned} \left| \log |Df^k(x)| - \log |Df^k(y)| \right| &= \left| \log \prod_{i=0}^{k-1} |Df(f^i(x))| - \log \prod_{i=0}^{k-1} |Df(f^i(y))| \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left| \log |Df(f^i(x))| - \log |Df(f^i(y))| \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} |f^i(T)| K \leq 2K \end{aligned}$$

para todo  $x, y \in T$ . □

Suponha que  $J \subset [0, 1]$  é um intervalo errante. Então, a sequência  $(f^n(J))_{n \geq 0}$  é formada por intervalos dois a dois disjuntos em  $[0, 1]$  e, portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f^n(J)| \leq 1.$$

Sendo a série convergente, concluímos que  $|f^n(J)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Corolário 13.4.** *Seja  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  contínua e suponha que  $x \mapsto \log |Df(x)|$  é Lipschitz. Então  $f$  não possui intervalos errantes.*

*Demonstração.* Suponha que  $f$  possua intervalos errantes e seja  $J$  um intervalo errante maximal, ou seja, não existem intervalos errantes contidos estritamente em  $J$ . Sendo todas as iteradas de  $J$  disjuntas, pelo Lema anterior temos que

$$|f^k(J_\delta)| \leq 2|f^k(J)|$$

para todo  $k \geq 0$ . Em particular,  $J_\delta$  não está contido na base de atração de um ponto periódico atrator e  $|f^k(J_\delta)| \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Desse modo,  $J_\delta$  é um intervalo errante que contém estritamente  $J$ . Sendo  $J$  um intervalo errante maximal, obtemos uma contradição.  $\square$