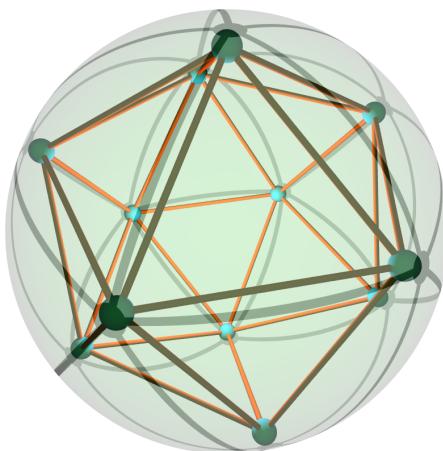




TEORIE GRAFŮ



Petr Kovář

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Petr Kovář
Teorie grafů

Úvodem

Text, který právě čtete, vznikal jako systematická příprava přednášek i cvičení a současně obsahuje řasu poznámek a postřehů souvisejících s předmětem *Teorie grafů* pro magisterské i doktorské studium na technické vysoké škole. Při výběru témat a přípravě textu jsem vycházel z osnov předmětu, ze skript *Úvod do Teorie grafů* Dalibora Frončka [F], z knihy *Kapitoly z diskrétní matematiky* od Jiřího Matouška a Jaroslava Nešetřila [MN], z knihy *Discrete Mathematics and Its Applications* od K. Rosena [R], z knihy *Introduction to Graph Theory* od Douglase B. Westa [W] a celé řady dalších. Využil jsem také řadu podnětů z internetu, zejména z cut-the-knot.org, wikipedia.org a wolfram.com.

Pokud máte pocit, že v textu je nějaká nesrovnalost, dejte mi vědět. Je velmi pravděpodobné, že se jedná o chybu nebo překlep. Budu rád, když mne upozorníte i na méně srozumitelné pasáže, abych je v dalších verzích textu mohl vylepšit.

Jak číst tento text

Text je psán pro čtenáře s hlubším zájmem o oblast diskrétní matematiky, který prošel některým ze základních kurzů kombinatoriky. Nultá kapitola shrnuje základní pojmy a symboly, které se objeví v dalších kapitolách. Doporučuji čtenářům ji prolistovat a při čtení pozdějších kapitol se případně vrátit k příslušnému tématu. Při studiu doporučuji nejprve dobře zvládnout první čtyři kapitoly textu, pořadí dalších kapitol už není rozhodující.

Na konci každé podkapitoly najdete příklady k procvičení probrané látky. Protože není smysluplné vybudovat nejdříve celou teorii a teprve potom řešit příklady, tak některá cvičení se odvolávají na pojmy, které budou zavedeny teprve v pozdějších kapitolách. Věřím, že není problém nalistovat si příslušnou definici (na konci textu najdete rejstřík) a pak takové příklady vyřešit.

V textu kapitol a na konci podkapitol jsem zařadil množství odkazů na internet. Prosím o shovívavost, jestliže některé odkazy budou v době vašeho studia zastaralé. Připomínky posílejte na adresu petr.kovar@vsb.cz.

Poděkování

Děkuji Michaelu Kubesovi za pečlivé přečtení velké části jedné z verzí tohoto textu. Odhalil mnoho chyb a jeho promyšlené návrhy přispěly ke srozumitelnosti celého textu. Děkuji i Martině Litschmannové za užitečné připomínky k organizaci textu a jazykové stránce.

K použitým symbolům

Příklady označené „*“ patří k náročnějším. Jejich řešení obvykle vyžaduje delší výpočet nebo pečlivější rozbor. Pro řešení příkladů označených „**“ je třeba nějaký nápad nebo výsledek z jiné oblasti matematiky. Zdůrazněme ale, že hvězdička neznamená nutně „to nikdy nevyřeším“. Naproti tomu příklady označené „○“ jsou tak lehké, že jejich řešení je možné z paměti a jen s užitím základních pojmu.

V Paskově 30. listopadu 2010.

O projektu MI21

Vážený čtenáři,

text, který právě čtete, vznikl v rámci projektu „Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti.“ Projekt je řešen na Vysoké škole báňské - Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009–2012.

Hlavní motivací projektu je potřeba reagovat na změny významu jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně prezentace některých pojmu v základních kurzech neodráží z nejrůznějších důvodů potřeby odborných kateder. Bohužel tento stav ztěžuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe.

Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmu v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů. Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu „od problému k řešení.“

V rámci projektu vytváříme čtyřicet nových výukových materiálů z matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, diskrétní matematiky, teorie grafů, statistiky a několika odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály budou volně k dispozici na webových stránkách projektu <http://mi21.vsb.cz>.

Autoři předem děkují za všechny případné nápady a návrhy k vylepšení textu i za upozornění na chyby.

Obsah

| | |
|---|-----|
| Úvodem | i |
| O projektu MI21 | ii |
| Přehled pojmu a označení | 1 |
| 0.1. Motivační příklady | 1 |
| 0.2. Množiny a posloupnosti | 1 |
| 0.3. Relace | 6 |
| 0.4. Zobrazení a operace | 11 |
| 0.5. Kombinatorické výběry | 12 |
| 0.6. Co se nevešlo | 17 |
| 1. Grafy a podgrafy | 19 |
| 1.1. Grafy a jednoduché grafy | 19 |
| 1.2. Stupeň vrcholu | 22 |
| 1.3. Podgrafy | 26 |
| 1.4. Implementace grafů v počítači | 27 |
| 2. Cesty a cykly v grafu | 30 |
| 2.1. Sledy, tahy a cesty | 30 |
| 2.2. Souvislost a vzdálenost v grafu | 31 |
| 2.3. Excentricita, poloměr a průměr grafu | 33 |
| 3. Stromy a cykly | 36 |
| 3.1. Stromy | 36 |
| 3.2. Kostry | 39 |
| 3.3. Cykly a bipartitní grafy | 41 |
| 4. Isomorfismus grafů | 44 |
| 4.1. Pojem isomorfismu | 44 |
| 4.2. Automorfismus grafů | 48 |
| 5. Vrcholová a hranová souvislost | 51 |
| 5.1. Míra souvislosti grafu | 51 |
| 5.2. Bloky a artikulace grafů | 56 |
| 6. Párování a pokrytí | 60 |
| 6.1. Párování | 60 |
| 6.2. Párování v bipartitních grafech | 62 |
| 6.3. Pokrytí v bipartitních grafech | 64 |
| 6.4. Úplné párování v obecných grafech | 66 |
| 7. Hranová barvení grafů | 69 |
| 7.1. Hranová barvení a chromatický index grafu | 69 |
| 7.2. Hranová barvení některých speciálních tříd grafů | 73 |
| 7.3. Rozklady grafů | 74 |
| 8. Vrcholová barvení grafů | 77 |
| 8.1. Vrcholové barvení a chromatické číslo grafu | 77 |
| 8.2. Brooksova věta | 80 |
| 8.3. Další meze chromatického čísla | 82 |
| 9. Planární grafy a neplanární grafy | 85 |
| 9.1. Rovinné a planární grafy | 85 |
| 9.2. Topologický přístup | 86 |
| 9.3. Algebraický přístup a Eulerův vzorec | 89 |
| 9.4. Duální grafy a barvení planárních grafů | 93 |
| 9.5. Neplanární grafy | 97 |
| 9.6. Rod grafu | 99 |
| 10. Eulerovské a hamiltonovské grafy | 103 |
| 10.1. Eulerovské grafy | 103 |
| 10.2. Hamiltonovské grafy | 105 |
| 10.3. Další výsledky | 111 |
| 11. Orientované grafy | 114 |
| 11.1. Základní pojmy | 114 |

| | |
|--|------------|
| 11.2. Cesty, cykly, dosažitelnost | 116 |
| 11.3. Turnaje | 121 |
| 11.4. Orientované eulerovské grafy | 126 |
| Rejstřík | 129 |
| Literatura | 137 |
| Přehled použitých symbolů | 138 |

Přehled pojmu a označení

V úvodní kapitole shrneme stručný přehled pojmu, se kterými budeme v textu pracovat a které spadají do jiných (předchozích) matematických kurzů. Budeme se snažit spíše o přehlednost, než o korektní vybudování teorie. Pro studenty, kteří si budou chtít doplnit znalosti podrobněji, uvedeme několik odkazů na konci podkapitol.

0.1. Motivační příklady

Následuje malá ochutnávka problémů, které se naučíme řešit užitím nástrojů teorie grafů.

Příklad 0.1. „Handshaking problem“

Máme skupinu n lidí ($n \geq 2$) z nichž někteří si podali ruce. Ukažte, že ve skupině jsou alespoň dva lidé, kteří podali ruku stejnemu počtu lidí ve skupině.

Každý z n lidí mohl podat ruku nejvíce $n - 1$ krát a nejméně 0 krát. To je celkem n možných různých počtů. Nemůže však současně nastat, že někdo podá ruku všem $n - 1$ ostatním a někdo jiný si nepodá ruku s nikým. Proto máme nejvíce $n - 1$ různých počtů podání rukou mezi n lidmi. Podle Dirichletova principu musí alespoň dva lidé podat ruku stejnemu počtu lidí ve skupině. Jiné, kratší řešení si ukážeme v kapitole 1.2. ✓

Příklad 0.2. Sedm mostů města Královce

Městem Královec (nyní Kaliningrad na území Ruska) teče řeka Pregola, která vytváří dva ostrovy. V 18. století byly ostrovy spojeny s oběma břehy i navzájem celkem sedmi mosty. Otázka zní, zda je možné všechny mosty přejít tak, aby ten, kdo se o to pokouší, vstoupil na každý most pouze jednou.

V 10. kapitole ukážeme, že graf, jehož vrcholy reprezentují oba ostrovy a břehy a jehož hrany reprezentují mosty v dobové mapě Královce, není možno nakreslit jedním tahem, protože graf není Eulerovský. Řešení této úlohy proto neexistuje. ✓

Příklad 0.3. Vánoční dárky

Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal.

Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že takovou výměnu dárků podle podmínek zadání lze provést. Všimneme si, že v tom případě si každá dvojice kamarádů buď žádný dárek nevymění nebo si navzájem vymění dva dárky. Proto celkový počet dárků musí být sudý (násobek dvou). Současně každý z devíti kamarádů si připravil tři dárky, to je celkem $9 \cdot 3 = 27$ dárků (lichý počet), což je spor. Proto není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal. Jiné elegantní řešení si ukážeme v kapitole 1.2. ✓

Příklad 0.4. Ke třem nově postaveným domům má být zavedena voda, elektřina a plyn. Pro přehlednost předpokládejme, že všechny tři domy jsou postavené na jedné straně cesty a společná přípojka pro plyn, společná přípojka pro vodu a také pro elektřinu jsou na druhé straně cesty. Vedení do každého domu povede v zemi a podle nových předpisů se jednotlivá vedení (výkopy) nesmí sdílet, dokonce ani křížit. Jak navrhnout trasu vedení tak, aby se jednotlivá vedení nekřížila? Pomůže, když domy a přípojky budou rozmístěny jinak po obou stranách cesty?

V kapitole 9. ukážeme, že řešení neexistuje ani když dovolíme libovolné rozmístění domů a společných přípojek. Vždy musí existovat alespoň jedno křížení. Zmíníme dokonce jedno zobecnění uvedeného problému. Pokud by domy a přípojky byly postaveny na hypotetické planetě ve tvaru anuloidu (torus), tak by bylo možno podle předpisů připojit dokonce čtyři domy ke čtyřem různým přípojkám (například ještě ke kanalizaci), větší počet domů nebo větší počet přípojek pak opět bude možné vybudovat jen pokud budou povoleny společné výkopy nebo jejich křížení. ✓

0.2. Množiny a posloupnosti

V textu budeme často pracovat s množinou přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Zejména si všimněte, že na rozdíl od předmětu Diskrétní matematika nepovažujeme číslo 0 za přirozené číslo.

Množiny

Množinou rozumíme nějaký soubor objektů. Množiny obvykle značíme velkými písmeny A, B, M, V, E . *Prvky* množin značíme malými písmeny a, b, x, u, v, e, \dots . Skutečnost, že prvek a do množiny M patří, zapíšeme $a \in M$ (řekneme, že a je *prvek množiny M*) a pokud prvek a do množiny M nepatří, řekneme, že a není *prvek množiny M* , a zapíšeme stručně $a \notin M$. *Prázdnou množinu* značíme symbolem \emptyset .

Množiny zadáváme buď výčtem prvků (například $X = \{a, b, c, d\}$) nebo popisem vlastnosti (například $M = \{x : x \in \mathbb{N}, x > 5\}$). V některých případech využijeme zavedená označení, například přirozená čísla \mathbb{N} , celá čísla \mathbb{Z} nebo reálná čísla \mathbb{R} . Pořadí prvků množiny, na rozdíl od posloupnosti, nehraje roli, dokonce ani pro množinu reprezentující interval celých čísel (definici najdete dále v této kapitole). V množině není „*první*“ nebo „*druhý*“ prvek, na pořadí má smysl se odvolat jen pro určitý zápis dané množiny.

Předpokládáme, že v množině se každý prvek vyskytuje nejvýše jedenkrát. Proto například $\{a, b, a, c\} = \{a, b, c\}$ a je tedy rozumné předpokládat, že v seznamu se každý prvek vyskytuje jen jednou. V literatuře se objevuje pojem *multimnožina*, který popisuje takové zobecnění pojmu množiny, ve kterém je povoleno opakování prvků. V tomto textu opakované prvky v obyčejné množině ani v jejím zápisu nepřipustíme s výjimkou stručného zápisu posloupnosti užitím trojtečky. Například seznam $1, 2, \dots, n$ pro $n = 2$ obsahuje číslo 2 dvakrát a pro $n = 1$ je dokonce číslo 2 nadbytečné! Budeme dodržovat úmluvu, že v zápisu použitím trojtečky uvedeme vždy dva první členy a po trojtečce poslední člen a případné zdvojení členů nebo překročení výčtu do přípustných hodnot nezahrneme.

Množina A je *podmnožinou* B , jestliže pro každé $a \in A$ je také $a \in B$, což zapisujeme jako $A \subseteq B$. Jestliže chceme zdůraznit, že A je *vlastní podmnožinou* množiny B , tj. B obsahuje alespoň jeden prvek, který není v množině A , tak použijeme symbol $A \subset B$.

Interval celých čísel $[a, b]$ zavedeme jako množinu $\{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \wedge x \leq b\}$. *Mohutnost* (konečné) množiny M udává počet prvků v M a značíme ji $|M|$. Mohutnost má smysl zavést i pro nekonečné (i nespočetné) množiny, v tomto textu ale budeme pracovat s mohutností jen konečných množin.

Posloupnosti

Posloupnost je seřazený seznam libovolných *prvků* nějaké pevně zvolené množiny A . Nekonečnou posloupnost můžeme formálně zavést jako *funkci*, která každému přirozenému číslu přiřadí nějaký prvek z množiny A . Konečnou n -prvkovou posloupností budeme rozumět funkci $a : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$ a zapisujeme ji (a_1, a_2, \dots, a_n) nebo $(a_i)_{i=1}^n$. Podobně *i-tý člen* (prvek) posloupnosti značíme a_i místo $a(i)$. Indexy členů posloupnosti jsou obvykle přirozená čísla, která začínají od 1. Někdy je vhodné za index prvního člena zvolit jiné celé číslo.

Posloupnosti mohou být konečné i nekonečné. Nekonečnou posloupnost zapišeme (a_1, a_2, \dots) nebo $(a_i)_{i=1}^\infty$. Dokonce dovolíme, aby definiční obor funkce posloupnosti byla prázdná množina. Hovoříme pak o *prázdné posloupnosti*. Všimněte si, že podle definice se prvky v posloupnosti mohou opakovat v libovolném počtu kopií. Proto i z prvků konečné množiny můžeme sestavit nekonečnou posloupnost. V tomto textu budeme pracovat téměř výhradně s konečnými posloupnostmi. Posloupnost můžeme zadat několika různými způsoby:

Výčtem prvků Je-li posloupnost zadána výčtem prvků, tak jednoduše vypíšeme všechny členy posloupnosti (a_1, a_2, \dots, a_n) . Například $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29)$.

Vzorcem pro n-tý člen Zadáme funkční předpis, jak vypočítat a_n , například $a_n = n^2 + n + 41$ pro $n = 0, 1, \dots, 39$.

Rekurentně Je-li posloupnost daná *rekurentně*, znamená to, že zadáme dostatečný počet prvních členů a vztah, jak vypočítat další člen z několika předchozích členů. Například zadáme dva první členy $a_1 = 1, a_2 = 1$ a rekurentní předpis $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a dostaneme známou Fibonacciho posloupnost.

Prvky číselné posloupností můžeme sčítat. Pokud budeme sčítat všechny členy posloupnosti $(a_i)_{i=1}^n$, můžeme součet zapsat pomocí *sumačního znaménka* \sum jako

$$\sum_{i=1}^n a_i.$$

Podobně můžeme zapsat součet jen některých členů posloupnosti, například $\sum_{i=1}^n a_{2i}$ nebo dokonce součet nekonečné posloupnosti $\sum_{i=1}^\infty a_i$. Někdy je šikovné sečít jen vybrané členy dané posloupnosti. S výhodou můžeme využít *indexovou množinu*, tj. množinu indexů vybraných členů. Například

$$\sum_{i \in \{2, 4, 7\}} i^2 = 2^2 + 4^2 + 7^2.$$

Při popisu indexové množiny se mohou využít i jiné zápisy, pokud jsou obecně srozumitelné. Například

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq 10 \\ i \neq 5}} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.$$

Podobně jako se součtem můžeme pracovat se součinem prvků posloupnosti. Zatímco pro označení součtu používáme \sum podle řeckého písmene Σ jako „suma“, tak pro označení součinu členů posloupnosti se používá \prod podle řeckého písmene Π jako „produkt“. Součin všech členů posloupnosti $(a_i)_{i=1}^n$, můžeme zapsat stručně

$$\prod_{i=1}^n a_i.$$

Samozřejmě můžeme pracovat s indexovou množinou pro součiny podobně jako pro sumy. Pokud je posloupnost hodnot, přes kterou se má sčítat, prázdná, tak *prázdnou sumu* klademe rovnu 0. Podobně součin prvků prázdné posloupnosti klademe roven 1 (nikoliv nula!), například

$$\sum_{i=3}^2 i = 0, \quad \prod_{\substack{24 \leq i < 29 \\ i \text{ prvočíslo}}} i = 1.$$

Operace s množinami

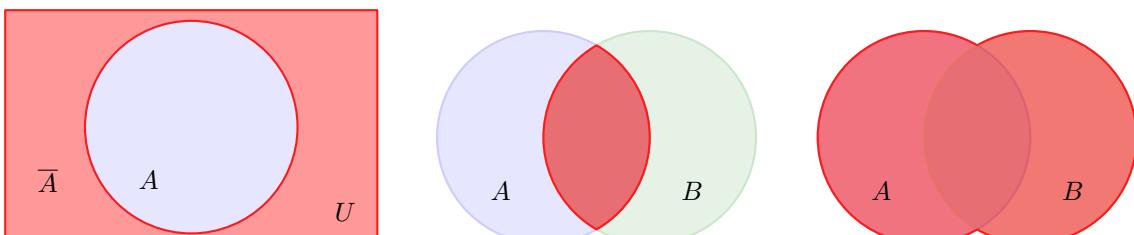
S množinami můžeme provádět různé operace. Oproti operacím s čísly jsou možnosti rozmanitější. Operací (obvykle binární) na množině A rozumíme proces, který několika množinám (obvykle dvěma) přiřadí nějakou další množinu. Formální definici operace zmíníme později.

Při popisu operací bývá užitečné zavést pojem univerza. Univerzem U rozumíme takovou obecnou množinu, která obsahuje všechny prvky, se kterými budeme pracovat. Každá množina A pak bude podmnožinou U . V analýze bývá univerzem \mathbb{R} , případně \mathbb{C} , v aritmetice \mathbb{N} . V teorii grafů může, v závislosti na řešeném problému, takovým univerzem být například množina „všech vrcholů“ grafu. Všimněte si, že hrany pak *nebudou* do zvoleného univerza patřit.

Nejjednodušší operací je doplněk množiny na univerzu U . Jestliže máme množinu A v univerzu U , tak její doplněk je množina, která obsahuje právě všechny prvky univerza U , které nejsou v množině A . Doplněk množiny značíme \bar{A} , případně \bar{A}_U , pokud chceme zdůraznit množinu univerza, a formálně definujeme $\bar{A}_U = \{a \in U : a \notin A\}$. Neformálně můžeme doplněk popsat pomocí Vennova diagramu na Obrázku 0.1.

Otzázkы:

- Může platit $\bar{\bar{A}} = A$?
- Může platit $\bar{A} \subseteq A$?



Obrázek 0.1.: Doplněk množiny A na univerzu U , průnik množin $A \cap B$ a sjednocení množin $A \cup B$.

Obrázek 0.2.: Rozdíl množin $A \setminus B$ a symetrická differenční množina $A \Delta B$.

Různých binárních operací existuje mnoho (kolik?). Průnik dvou množin A, B značíme $A \cap B$ a jedná se o množinu prvků, které jsou v obou množinách současně. Formálně definujeme $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$. Sjednocení dvou množin A, B značíme $A \cup B$ a jedná se o množinu prvků, které jsou v alespoň jedné z množin. Formálně definujeme $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$. Neformální popis průniku a sjednocení množin A a B pomocí Vennova diagramu je na Obrázku 0.1.

Pro doplněk, průnik a sjednocení dvou množin A a B platí De Morganova pravidla

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Rozdíl množin značíme $A \setminus B$ (v tomto pořadí). Jedná se o množinu prvků z množiny A , které nejsou v množině B . Formálně definujeme $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$. Symetrická differenční množina A a B se značí $A \Delta B$ nebo $A \ominus B$. Někdy také $A \Delta B$ či $A + B$. V tomto textu budeme používat označení $A \Delta B$. Jedná se o prvky, které jsou obsaženy v právě jedné ze dvou množin A a B , formálně $A \Delta B = \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$. Symetrickou differenci můžeme nadefinovat také jako $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ nebo $A \Delta B = (\overline{A \cap B})_{A \cup B}$. Rozdíl a symetrická differenční množinu znázorněné Vennovým diagramem jsou na Obrázku 0.2.

Podobně, jako jsme na straně 2 zavedli sumáční symbol pro součet prvků posloupnosti, můžeme zavést symbol pro průnik a sjednocení posloupnosti množin A_1, A_2, \dots, A_n .

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n, \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

Analogicky zavedeme i průnik a sjednocení posloupnosti množin přes indexovou množinu $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$, kde $\{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\bigcap_{j \in J} A_j = A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_k}, \quad \bigcup_{j \in J} A_j = A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \dots \cup A_{j_k}.$$

Uvědomme si, že průnik posloupnosti množin a sjednocení posloupnosti množin můžeme takto zavést, protože operace průnik a sjednocení množin je podle definice asociativní. Průnik a sjednocení přes indexovou množinu navíc vyžaduje, aby příslušné operace byly komutativní, což platí (Cvičení 0.2.2.).

Symbolům $\cup, \cap, \setminus, \Delta$ i dalším podobným říkáme *binární operátory*.

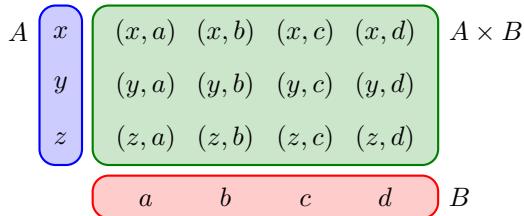
Otázky:

- Je operace rozdíl množin pro některé dvě množiny komutativní?
- Je operace rozdíl množin pro některé tři množiny asociativní?
- Je operace symetrické differenze množin pro některé dvě množiny asociativní?

Další operace s množinami

Zavedeme další užitečné operace – kartézský součin a kartézskou mocninu množin. Mějme dvě množiny A a B . Jejich kartézský součin bude množina uspořádaných dvojic prvků z A a B , kterou označíme $A \times B$. Definujeme

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Obrázek 0.3.: Znázornění kartézského součinu množin $A \times B = \{x, y, z\} \times \{a, b, c, d\}$.

Pro konečné množiny se dá snadno ukázat, že platí $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Grafické znázornění je na Obrázku 0.3. Všimněte si, že obecně neplatí $A \subseteq A \times B$ ani $A \in A \times B$.

Kartézský součin množin obecně není komutativní operace. Komutativita je splněna pouze v triviálních případech, kdy $A = B$ nebo když alespoň jedna z množin je prázdná. Kartézský součin můžeme zobecnit i pro součin více množin. Definujeme a značíme n -ární kartézský součin množin A_1, A_2, \dots, A_n jako

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in A_i \text{ pro } i = 1, 2, \dots, n\},$$

přičemž unární kartézský součin A_1 klademe roven A_1 . V některé literatuře najdeme rekurzivní definici n -árního součinu, která využívá konstrukci $A^n = A^{n-1} \times A$. Striktně vzato bez nějaké další úmluvy nejsou tyto definice ekvivalentní a obecně by takto zavedená operace nebyla asociativní, protože například pro $A = \{a\}$ bychom měli

$$A \times (A \times A) = \{(a, (a, a))\} \neq \{((a, a), a)\} = (A \times A) \times A.$$

Zavedeme proto úmluvu, že prvky kartézského součinu n množin pro libovolné uzávorkování budou uspořádané n -tice sestavené po řadě z prvků množin součinu. Nyní snadno zavedeme také n -tou *kartézskou mocninu* množiny A jako

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ krát}},$$

přičemž definujeme $A^1 = A$ a $A^0 = \{\emptyset\}$.

Otzázkы:

- Co je výsledkem kartézského součinu $A \times \emptyset$?
- Co je výsledkem kartézské mocniny \emptyset^2 ?
- Co je výsledkem kartézské mocniny \emptyset^0 ?
- Platí obecně $A \subseteq (A \times A)$?
- Platí vždy $A \cap (A \times B) = \emptyset$?

Jestliže množina S obsahuje jako prvky jen množiny, říkáme, že S je *systém množin*. Je to nejen přehlednější, ale i srozumitelnější než „množina množin“. Ke každé množině A umíme sestrojit systém množin, který obsahuje všechny její podmnožiny. Tento systém značíme 2^A a nazýváme jej *potenční množina* nebo *potenční systém množiny* A , protože obsahuje všechny potenciální podmnožiny množiny A . Snadno se ukáže (například indukcí), že mohutnost potenční množiny 2^A množiny A je $|2^A| = 2^{|A|}$ (Cvičení ??). Nyní snadno nahlédneme, odkud pochází i poněkud zvláštní označení potenční množiny.

Otzázkы:

- Jaký je rozdíl mezi \emptyset a $\{\emptyset\}$?
- Jak vypadá potenční množina prázdné množiny?
- Jaká množina má prázdnou potenční množinu?
- Platí $A \in 2^A$ nebo $A \subseteq 2^A$?

Cvičení

0.2.1.^\diamond Ukažte, že pro libovolné univerzum U a libovolnou množinu $A \in U$ platí $\overline{\overline{A}} = A$.

0.2.2.^\diamond Ukažte, že operace průnik množin a sjednocení množin je komutativní a asociativní.

0.2.3.^\diamond Ukažte, že operace rozdíl množin není komutativní ani asociativní.

0.2.4. Ukažte, že operace symetrická diference množin je asociativní.

0.2.5. Nadefinujeme symetrickou differenci přes indexovou množinu následujícím způsobem: $\Delta_{j \in J} A_j = (\dots ((A_{j_1} \Delta A_{j_2}) \Delta A_{j_3}) \Delta \dots \Delta A_{j_k})$, kde $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$. Ukažte, že platí

$$\Delta_{j \in J} A_j = \{x \in \bigcup_{j \in J} A_j : |\{A_j : x \in A_j\}| \text{ je liché číslo}\},$$

neboli symetrická differenční posloupnost množin obsahuje pouze ty prvky, které se vyskytují v lichém počtu množin daného systému množin.

0.2.6.* Najděte všechny takové množiny A , pro které platí $A \subseteq 2^A$.

0.2.7. Kolik existuje takových trojic množin A, B, C , aby platilo $A \subseteq B \subseteq C$?

0.2.8. Najděte obecný vztah pro součet a) prvních n lichých čísel, b) prvních n sudých kladných čísel.

0.2.9. Vypočítejte součet $\sum_{i=1}^n (-1)^i i$.

0.3. Relace

Pokud dvě věci spolu souvisí, tak v běžné řeči někdy říkáme, že jsou v relaci¹. Tuto vlastnost budeme nyní formalizovat pro matematické objekty.

Základní vlastnosti relací

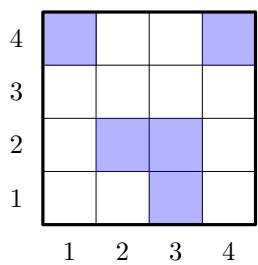
Relace mezi množinami A a B je nějaká (libovolná) podmnožina R kartézského součinu $A \times B$. Součin $A \times B$ obsahuje všechny uspořádané dvojice prvků z $A \times B$, relace R obecně obsahuje jen některé z nich – ty dvojice prvků, které jsou v relaci. Vlastnost, že dva prvky $a \in A, b \in B$ jsou v relaci zapisujeme zkráceně aRb místo $(a, b) \in R$. Jestliže dvojice prvků není v relaci, píšeme $a \not R b$ místo $(a, b) \notin R$. Prvek a se nazývá předchůdce prvku b a naopak prvek b se nazývá následovník prvku a .

Rada relací má svá ustálená označení, kterému říkáme *relační symbol*. Například relace rovnosti značíme $=$, relace menší $<$, relace menší nebo rovno \leq nebo relace ekvivalence \sim . V takovém případě je značení $a < b$ (rozuměj aRb) mnohem přehlednější, než „ $(a, b) \in <$ “.

Speciální a velmi důležitý případ je (binární) *relace na množině* A . Jedná se o libovolnou podmnožinu druhé kartézské mocniny A^2 . Relaci R na množině A můžeme přehledně znázornit několika způsoby. Jedním je algebraický zápis pomocí čtvercové matice $M = (m_{ij})$ řádu $|A|$. Každému prvku množiny A přiřadíme nějaký (jiný) řádek a sloupec. Jestliže platí iRj (prvky i a j jsou v relaci R), tak položíme $m_{ij} = 1$. V opačném případě definujeme $m_{ij} = 0$. Například relaci $R = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 4)\}$ na množině $A = [1, 4]$ můžeme znázornit pomocí následující matice M .

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uvedeme i dva grafické způsoby znázornění relace. Podle toho, zda jsou prvky i a j v relaci budeme vybarvovat jednotková políčka ve čtvercovém schématu o rozměru $|A| \times |A|$ políček (počítáme jako v prvním kvadrantu souřadné soustavy). Příklad znázornění relace R na množině A je na Obrázku 0.4. vlevo. Zcela odlišné grafické znázornění pomocí šipek je na Obrázku 0.4. vpravo. Každému prvku množiny A přiřadíme bod v rovině a dva body x, y spojíme šipkou směřující z x do y právě tehdy, když xRy .



Obrázek 0.4.: Dvě různá grafická znázornění téže relace R na množině $[1, 4]$.

¹ Relací máme na mysli vzájemný vztah, nikoliv rozhlasové nebo jiné vysílání.

Obrázek 0.5.: Znázornění relace S mezi množinami $A = \{x, y, z\}$ a $B = \{a, b, c, d\}$.

Pro přehledné znázornění relace mezi dvěma různými množinami můžeme použít obdélníkové matice nebo obdélníková grafická schémata. Na Obrázku 0.5. vlevo je relace $S = \{(y, a), (y, c), (y, d), (z, a), (z, d)\}$ mezi množinami $A = \{x, y, z\}$ a $B = \{a, b, c, d\}$ zapsaná v matici N a grafický způsob znázornění relace S pomocí šipek je na Obrázku 0.5. vpravo.

Speciální typy relací

Relací na konečně množině existuje sice konečně mnoho, ale i pro malé množiny může počet různých relací být velký. Například na desetiprvkové množině můžeme sestavit $2^{100} \doteq 1,3 \cdot 10^{30}$ různých relací. Pro zajímavost srovnajme počet různých relací na patnáctiprvkové množině $2^{225} \doteq 5,4 \cdot 10^{67}$ a odhadovaný počet atomů ve Sluneční soustavě $1,2 \cdot 10^{57}$. Jak by asi vypadal seznam všech takových relací? Protože obvykle není možno zkoumat všechny relace na dané (byť poměrně malé) konečné množině, zaměříme se jen na relace, které mají pěkné vlastnosti a praktický význam. Takové „pěkné“ vlastnosti mají své názvy. Řekneme, že (binární) relace na množině A je

- reflexivní jestliže $\forall x \in A$ platí $(x, x) \in R$,
- ireflexivní jestliže $\forall x \in A$ platí $(x, x) \notin R$,
- symetrická jestliže $\forall x, y \in A$ platí $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$,
- antisymetrická jestliže $\forall x, y \in A$ platí $(x, y), (y, x) \in R \Rightarrow x = y$,
- asymetrická jestliže $\forall x, y \in A$ platí $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$,
- tranzitivní jestliže $\forall x, y, z \in A$ platí $(x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$,
- lineární (nebo také úplná) jestliže $\forall x, y \in A$ platí $(x, y) \in R \vee (y, x) \in R$.

Uvedeme několik příkladů. Relace rovnosti $=$ je reflexivní, tranzitivní, symetrická i antisymetrická. Relace menší $<$ je tranzitivní, antisymetrická a je ireflexivní na rozdíl od relace \leq , která je tranzitivní, antisymetrická a reflexivní. Relace „dorozumět se“ je obvykle symetrická, nemusí však být tranzitivní.

Mějme celá čísla a, b . Řekneme, že a dělí b a píšeme $a | b$, jestliže existuje takové celé číslo k , že $b = ka$. V opačném případě řekneme, že a nedělí b a píšeme $a \nmid b$. Snadno se přesvědčíme, že relace dělitelnosti $|$ je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní na nějaké (konečné i nekonečné) množině přirozených čísel. Relace dělitelnosti $|$ na množině přirozených čísel \mathbb{N} je reflexivní, tranzitivní a antisymetrická, není však úplná ani symetrická. Stejně vlastnosti má i dělitelnosti $|$ na množině přirozených čísel včetně nuly ($\mathbb{N} \cup \{0\}$). Zejména si všimněte, že je reflexivní. Avšak relace dělitelnosti na množině všech celých čísel \mathbb{Z} není antisymetrická.

Není obtížné spočítat, kolik existuje různých symetrických relací, antisymetrických relací, asymetrických relací na dané n -prvkové množině A (Cvičení 0.3.5.). Je znám počet relací na A , které jsou současně symetrické a tranzitivní, které jsou současně reflexivní, symetrické a tranzitivní (relace ekvivalence) nebo které jsou současně lineární, antisymetrické a tranzitivní. Na druhou stranu určení počtu všech tranzitivních relací (bez dalšího omezení) na množině A , je stále otevřený problém.

Uspořádání a ekvivalence

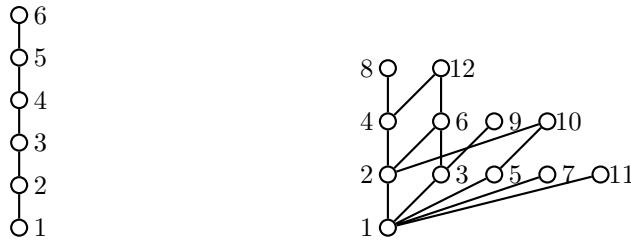
Mezi všemi relacemi mají významné postavení dvě: relace částečného uspořádání a relace ekvivalence. Relace částečného uspořádání na množině A je každá binární relace, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Částečné uspořádání se značí symbolem \preceq , protože se může jednat i o jiné uspořádání, než je klasická relace uspořádání \leq čísel podle velikosti. Názvem „částečné“ chceme zdůraznit, že se nemusí jednat o úplnou relaci na množině A , tj. ne každá dvojice prvků musí být v relaci xRy nebo yRx . Takové dva prvky se nazývají *neporovnatelné*. Například relace „být podmnožinou“ (relace inkluze \subseteq) je relace částečného uspořádání na nějaké množině. Už na dvouprvkové množině $\{x, y\}$ najdeme dvě neporovnatelné podmnožiny $\{x\}$ a $\{y\}$. Je-li naopak relace \preceq lineární, tak říkáme, že relace je *lineární uspořádání* (Obrázek 0.6. vlevo). Příkladem lineárního uspořádání je obyčejné uspořádání celých, racionálních nebo reálných čísel podle velikosti nebo třeba abecední (lexikografické) uspořádání slov ve slovníku (Cvičení 0.3.4.).

Taková podmnožina B množiny A s uspořádáním \preceq , ve které jsou každé dva prvky porovnatelné, se nazývá *řetězec* (anglicky „chain“). Naopak, každá podmnožina C množiny A , ve které jsou každé dva prvky neporovnatelné, se nazývá *úplně neuspořádaná množina* nebo *antiřetězec* (z anglického „antichain“).

Relaci částečného uspořádání na konečně množině můžeme přehledně znázornit pomocí *hasseovského diagramu*. Prvky množiny A zakreslíme jako body v rovině. Dále dodržíme následující dvě pravidla

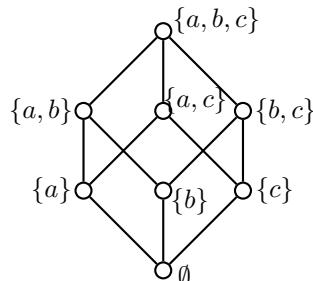
- (i) Je-li $x \preceq y$, tak bod x zakreslíme níž než bod y .
- (ii) Dva body spojíme hranou, jestliže $x \preceq y$ a neexistuje žádné $t \in A$ takové, aby $x \preceq t$ a současně $t \preceq y$.

Říkáme, že y je *bezprostřední následovník* prvku x . Všimněte si, že vzájemná úroveň každých dvou prvků v relaci je určena jednoznačně, protože relace \preceq je antisymetrická. Navíc *všechny* další spojnice vyplývají z tranzitivity relace, proto je do diagramu nemusíme zakreslovat. Tyto spojnice „navíc“ by celý diagram jen znepřehlednily.



Obrázek 0.6.: Lineární uspořádání relace menší nebo rovno \leq na množině $[1, 6]$ a částečné uspořádání relace dělitelnosti $|$ na množině $[1, 12]$.

Relace dělitelnosti $|$ na nějaké množině přirozených čísel je pěkným příkladem relace částečného uspořádání, které obecně *není* lineární (Obrázek 0.6. vpravo). Dalším běžným příkladem nelineární relace uspořádání je relace inkluze \subseteq na potenční množině nějaké n -prvkové množiny (Obrázek 0.7., Cvičení ??).



Obrázek 0.7.: Relace podmnožiny \subseteq na množině $\{a, b, c\}$.

Otzázkы:

- Jaký je rozdíl mezi dělitelností čísel a, b a dělením čísel a, b ?
- Vysvětlete, která z následujících tvrzení jsou pravdivá: a) nula dělí každé číslo, b) každé číslo dělí nulu, c) nulou můžeme dělit každé číslo, d) nulou můžeme dělit každým číslem.

V matematice, na rozdíl od běžné řeči, rozlišujeme pojmy největší a maximální. Tyto pojmy jsou (někdy explicitně, jindy nepřímo) spjaty s nějakou relací částečného uspořádání. Množina s uspořádáním \preceq se nazývá *poset* z anglického *partially ordered set*. Mějme nějaký poset (A, \preceq) . Prvek $m \in A$ se nazývá

- 1) *největší*, jestliže pro každý prvek $x \in A$ platí $x \preceq m$,
- 2) *nejmenší*, jestliže pro každý prvek $x \in A$ platí $m \preceq x$,
- 3) *maximální*, jestliže pro každý prvek $x \in A$ platí implikace $m \preceq x \Rightarrow x = m$,
- 4) *minimální*, jestliže pro každý prvek $x \in A$ platí implikace $x \preceq m \Rightarrow x = m$.

Jinými slovy, aby prvek m posetu (A, \preceq) byl maximální, nesmí existovat jiný prvek x ($x \neq m$), který by byl „následovníkem“ prvku m “, tedy v relaci „napravo od m “ $m \preceq x$. Z uvedené definice snadno odvodíme, že každý největší prvek je zároveň maximální. Opačné tvrzení platit nemusí. Podobně je tomu s nejmenšími a minimálními prvky posetu. Minimální prvek posetu (A, \preceq) není následovníkem žádného jiného prvku a prvek je nejmenší, jestliže každý prvek v posetu (A, \preceq) je jeho následovníkem. Například poset $([1, 12], |)$

na Obrázku 0.6. vpravo má šest maximálních prvků a nemá největší prvek. Naproti tomu nejmenším a zároveň minimálním prvkem je 1. Význam rozdílu obou pojmu bude patrný zejména v kapitole 6.

Příklady nekonečného posetu bez maximálního prvku jsou (\mathbb{N}, \leq) , $(\mathbb{N}, |)$ a $((0, 1), \leq)$. Všechny tři uvedené posety mají nejmenší prvek (jaký?) Naproti tomu poset (\mathbb{Z}, \leq) nemá žádný nejmenší, největší ani maximální a minimální prvek. Všimněte si, že poset $(\mathbb{N} \cup \{0\}, |)$ má největší prvek, jaký?

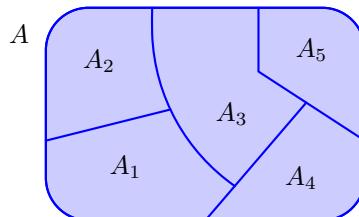
Otázky:

- Prvky řetězce uspořádané množiny jsou podle definice hasseovského diagramu zakresleny v různých hladinách. Je hladina každého prvku určena jednoznačně?
- Jaké jsou maximální a minimální prvky posetu $([1, 12], |)$ na Obrázku 0.6. vpravo?
- Jaký prvek bychom mohli do množiny $A = [1, 12]$ posetu $(A, |)$ přidat, aby poset $(A \cup \{m\}, |)$ měl největší prvek? Jaké by v tom případě byly maximální prvky?

V celém textu budeme často rozdělovat nějaké množiny na disjunktní části. *Rozklad* množiny A je takový systém S neprázdných podmnožin množiny A , které jsou po dvou navzájem disjunktní a jejichž sjednocení je množina S . Formálně je rozklad množiny A systém podmnožin $A_i \subseteq A$ (kde $i \in I$ a I je nějaká indexová množina), pro který platí

- (i) $A_i \neq \emptyset$ pro každé $i \in I$,
- (ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i, j \in I$, $i \neq j$,
- (iii) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Každá množina A_i se nazývá *třída rozkladu* množiny A . Všimněte si, že definice zformulovaná pomocí indexové množiny zahrne i rozklad na nekonečně mnoho tříd rozkladu, zatímco kdybychom řekli, že rozklad je tvořen třídami A_1, A_2, \dots, A_k , tak tříd bude právě k , tedy konečně mnoho. Samozřejmě třídy rozkladu A_i mohou být libovolně neprázdné konečné i nekonečné množiny. Rozklad množiny na konečně mnoho podmnožin můžeme znázornit podobně jako na Obrázku 0.8., jednotlivé třídy mohou být konečné i nekonečné podmnožiny A . Rozklad na nekonečně mnoho tříd rozkladu lze znázornit jen schématicky.



Obrázek 0.8.: Rozklad množiny A na pět tříd A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 .

Otázky:

- Najdete příklad rozkladu, který má konečně mnoho nekonečných tříd rozkladu?
- Najdete příklad rozkladu, který má nekonečně mnoho konečných tříd rozkladu?
- Najdete příklad rozkladu, který má nekonečně mnoho nekonečných tříd rozkladu?

Další významnou relací je relace ekvivalence. Každou binární relaci na množině A , která je reflexivní, symetrická a tranzitivní nazveme relace *ekvivalence*. Relace ekvivalence se značí podle kontextu různými symboly, zpravidla $=, \equiv, \sim, \approx, \simeq, \cong$ a podobně. V následujících odstavcích budeme používat symbol \simeq .

Každou relaci ekvivalence můžeme znázornit, stejně jako každou relaci, maticí nebo pomocí šipek. Všimněte si, že znázornění pomocí hasseovského diagramu obecně *nemůžeme* použít (proč?). Nejpřehlednější je znázornění pomocí rozkladu množiny A na tzv. třídy ekvivalence. Další věta ukáže, že mezi relacemi ekvivalence na dané množině a rozklady této množiny je úzká souvislost. *Třída ekvivalence* příslušná prvku $x \in A$ v relaci \simeq je množina všech takových prvků A , které jsou s x v relaci \simeq . Značíme ji $[x]_\simeq$, případně $[x]$, pokud je z kontextu zřejmé, s jakou relací ekvivalence pracujeme.

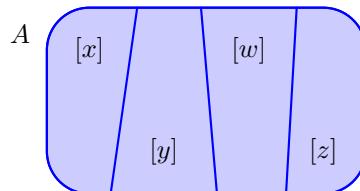
Věta 0.1. *Je-li \simeq ekvivalence na množině A , tak různé třídy ekvivalence \simeq tvoří rozklad množiny A . Naopak, je-li A_1, A_2, \dots, A_k rozklad množiny A , tak existuje taková relace ekvivalence \simeq na množině A , že A_1, A_2, \dots, A_k jsou třídy ekvivalence \simeq .*

Důkaz. Jedná se o dvě implikace, dokážeme první z nich. Druhá je ponechána jako Cvičení 0.3.8.

Mějme relaci ekvivalence \simeq na dané množině A . Pro každý prvek $x \in A$ bude příslušná třída rozkladu $[x]$ neprázdná, protože z reflexivity je $x \simeq x$ a proto x jistě patří do $[x]$. Protože do každé třídy $[x]$ zařazujeme pouze prvky A , jistě platí $\cup_{x \in A} [x] \subseteq A$. Dále, protože každý prvek $x \in A$ patří do třídy $[x]$, platí $A \subseteq \cup_{x \in A} [x]$ a celkem dostaneme $\cup_{x \in A} [x] = A$.

Zbývá ověřit, zda jsou disjunktní různé třídy rozkladu. Postupujeme nepřímo a ukážeme, že je-li $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, tak $[x] = [y]$. Je-li $z \in [x]$, tak podle definice $[x]$ platí $z \simeq x$. Protože $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, tak existuje $w \in [x] \cap [y]$ a z definice tříd $[x]$, $[y]$ je proto $w \simeq x$ a $w \simeq y$. Dále ze symetrie relace \simeq dostaneme $x \simeq w$. Víme, že $z \simeq x$, $x \simeq w$ a $w \simeq y$, a z tranzitivnosti relace \simeq pak plyne $z \simeq y$. To ale znamená, že $z \in [y]$ a platí $[x] \subseteq [y]$. Opačná inkluze se dokáže analogicky záměnou symbolů x a y . \square

Vidíme, že oba pojmy, rozklad množiny A a relace ekvivalence na množině A , jsou jen dva různé pohledy na stejnou věc. Podle důkazu Věty 0.1. můžeme k libovolnému rozkladu S (jistému systému podmnožin) množiny A sestavit relaci ekvivalence tak, že třídy rozkladu příslušné této ekvivalence budou právě třídy původního rozkladu. A také naopak, máme-li relaci ekvivalence \simeq na množině A , uděláme rozklad množiny A příslušný relaci \simeq a sestrojíme relaci ekvivalence postupem podle důkazu předchozí věty, dostaneme právě relaci ekvivalence \simeq (Obrázek 0.9.).



Obrázek 0.9.: Třídy relace ekvivalence na množině A .

Otázky:

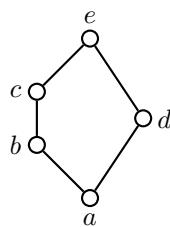
- Je možno (a jak) znázornit některé relace ekvivalence pomocí hasseovského diagramu?
- Jaký je rozdíl mezi relačním symbolem a binárním operátorem?
- Je symbol a) „množinové \in “, b) „množinové \subseteq “, c) „množinové $=$ “, d) „množinový součin \times “ binární operátor?

Odkazy:

- <http://math.chapman.edu/~jipsen/finitestructures/Lat8.pdf>
- http://en.wikipedia.org/wiki/Equivalence_relation

Cvičení

0.3.1. Máme poset $P = (A, \preceq)$ daný hasseovským diagramem na Obrázku 0.10. a) Popište příslušnou relaci \preceq na množině A pomocí uspořádaných dvojic. b) Najděte největší a nejmenší prvky (pokud existují). c) Najděte nejdelší řetězec B v posetu (A, \preceq) . d) Najděte největší antiřetězec C v posetu (A, \preceq) .



Obrázek 0.10.: Poset $P = (A, \preceq)$.

0.3.2. Ukažte, že relace R na množině A je tranzitivní právě tehdy, když platí $R \circ R \subseteq R$, kde „ \circ “ značí skládání relací.

0.3.3. Dokažte, že je-li A reflexivní relace, tak platí $A \circ A = A$ právě tehdy, když A je tranzitivní relace.

0.3.4. Sestavte definici lexikografického uspořádání slov.

0.3.5. Máme množinu A s n prvky. Kolik existuje relací na množině A , které jsou a) reflexivní, b) symetrické, c) antisymetrické, d) asymetrické, e) symetrické i antisymetrické současně, f) všech?

0.3.6. Řekneme, že dvě čísla $x, y \in \mathbb{R}$ jsou v relaci \star , jestliže $\exists k \in \mathbb{N} : x^k = y^k$. Ukažte, že \star je relace ekvivalence na množině \mathbb{R} .

0.3.7. Najděte příklad relace na množině A , která je symetrická, tranzitivní, ale není reflexivní.

0.3.8. Dokažte zbývající implikaci Věty 0.1. Je-li A_1, A_2, \dots, A_k rozklad množiny A , tak existuje taková relace ekvivalence \simeq na množině A , že A_1, A_2, \dots, A_k jsou třídy ekvivalence \simeq .

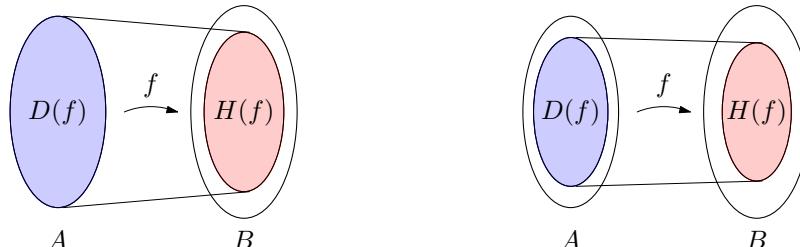
0.4. Zobrazení a operace

Zobrazení a operace můžeme chápát jako speciální případy relací mezi množinami.

Zobrazení

Zobrazení budeme chápát jako pravidlo, které každému prvku množiny A (množina *vzorů*) přiřazuje právě jeden prvek z množiny B (množina *obrazů*). Všimněte si, že toto „přiřazení“ je vztahem mezi dvojicemi prvků, kdy jeden prvek je z množiny A a druhý prvek je z množiny B . Proto formálně definujeme *zobrazení množiny A do množiny B* jako relaci mezi množinami A a B , ve které je každý prvek množiny A v relaci s právě jedním prvkem množiny B . Podle uvedené definice ne každý prvek množiny obrazů B je nutně v relaci (následovníkem) nějakého prvku množiny A . Množina vzorů A je současně *definičním oborem $D(f)$* zobrazení f a *oborem hodnot zobrazení f* je taková podmnožina $H(f)$ množiny B , jež obsahuje všechny prvky B , které jsou v relaci (následovníkem) s nějakým prvkem množiny A .

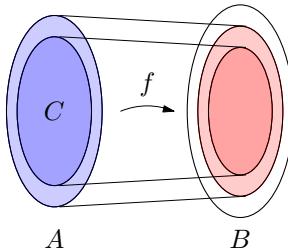
Někdy bývá zobrazení definováno jako pravidlo, které některým prvkům z množiny A přiřazuje právě jeden prvek z množiny B . Takové zobrazení pak nazýváme *zobrazení z množiny A do množiny B* (nepřehlédněte předložku „z“ v názvu) a definujeme jej jako relaci mezi množinami A a B , ve které je každý prvek množiny A v relaci s nejvýše jedním prvkem množiny B . Všimněte si, že podle definice nemusí být každý prvek množiny vzorů A v relaci s nějakým prvkem množiny obrazů B . Definičním oborem je pak taková podmnožina množiny A , která obsahuje všechny prvky A , které jsou v relaci (předchůdcem) s nějakým prvkem množiny B .



Obrázek 0.11.: Zobrazení A do B a z A do B se zvýrazněným definičním oborem a oborem hodnot.

Zobrazení f množiny A (nebo i z množiny A) do množiny B značíme $f : A \rightarrow B$. Protože takové přiřazení je pro každý prvek z A jednoznačné, můžeme místo zápisu relace užitím uspořádaných dvojic použít stručnější a přehlednější zápis $b = f(a)$, kde $a \in A$ je *vzor* prvku b , $b \in B$, kterému říkáme *obraz* prvku a .

Mějme dáno nějaké zobrazení $f : A \rightarrow B$ a podmnožinu $C \subseteq A$. *Restrikce* zobrazení f na množinu C je zobrazení $f' : C \rightarrow B$ takové, že $\forall c \in C$ platí $f'(c) = f(c)$. Je zřejmé, že pro každé zobrazení z množiny A

Obrázek 0.12.: Restrikce zobrazení $f : A \rightarrow B$ na množinu C .

do množiny B můžeme najít takovou největší podmnožinu $C \subseteq A$, aby restrikce $f' : C \rightarrow B$ byla zobrazením množiny C do množiny B , nikoliv z množiny C do B .

Operace

Teprve nyní můžeme formálně popsat *operaci* na množině. *Binární operací* na univerzu U rozumíme libovolné zobrazení $U \times U \rightarrow U$. Každé uspořádané dvojici prvků z množiny U přiřadíme výsledek operace – nějaký další prvek z množiny U .

Podobně n -ární operace na univerzu U je zobrazení $U^n \rightarrow n$, kde U^n je n -tá kartézská mocnina množiny U . Všimněte si, že má smysl hovořit i o *unárních operacích*, tedy operacích $U \rightarrow U$. Příkladem takových operací (a operátorů) může být opačné znaménko „ \neg “ na množině reálných čísel, faktoriál „ $!$ “ na množině přirozených čísel včetně nuly ($\mathbb{N} \cup \{0\}$), mocniny a dokonce libovolná funkce může být chápána jako unární operace. Výjimečně se lze setkat s pojmem *nulární operace*, což je vlastně konstanta.

Cvičení

0.4.1. Logické spojky konjunkce „ \wedge “, disjunkce „ \vee “ a implikace „ \Rightarrow “ patří mezi binární logické operátory $\{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$, kde 0 a 1 odpovídají pravdivostním hodnotám. Kolik takových různých binárních operátorů existuje?

0.4.2. Mějme binární operaci \square a unární operaci \boxminus definované pro všechna reálná čísla předpisem $a \square b = (a + b)/2$ a unární operaci $\boxminus a = (1 - a)^2$. Určete a) $(\boxminus a) \square (1 - \boxminus a)$, jestliže $\boxminus a = 3$ b) $\boxminus \boxminus a$, jestliže $a \square 5 = 3$.

0.5. Kombinatorické výběry

Běžně se setkáme s problémem, kdy máme za úkol odpovědět na otázku „kolik“ je objektů jistého typu. Jedná-li se o konečně velkou množinu, pak určení celkového počtu možností nám může pomoci udělat si představu o rozsahu zkoumaného problému. Budeme-li, podobně jako mudrc v jednom starém příběhu, chtít na první políčko šachovnice položit jedno zrnek rýže a na každé další políčko dvojnásobek zrnek, než na políčko předchozí, tak dojdeme k překvapujícímu závěru, že na celém světě není dostatek zrnek pro splnění úkolu².

V této podkapitole připomeneme několik základních početních postupů při hledání (konečného) počtu objektů jistého typu. *Výběrem* budeme rozumět podmnožinu nějaké množiny, případně posloupnost sestavenou z prvků dané množiny. V prvním případě výběr nazveme *neuspořádaný*, v druhém případě *uspořádaný*. Jestliže se v rámci jednoho výběru nemohou prvky (nebo jejich zkoumané vlastnosti) opakovat, jedná se o výběr *bez opakování*. V opačném případě se jedná o výběr *s opakováním*.

Nejprve zmíníme tři jednoduché a jeden komplikovanější početní postup pro určení počtu výběrů jistého typu.

Kombinatorické pravidlo součtu

Nejprve uvedeme následující jednoduché pozorování.

Lemma 0.2. Jestliže A_1, A_2, \dots, A_n je rozklad konečné množiny A , pak počet prvků množiny A je dán součtem počtu prvků v jednotlivých třídách rozkladu A_1, A_2, \dots, A_n , tj.

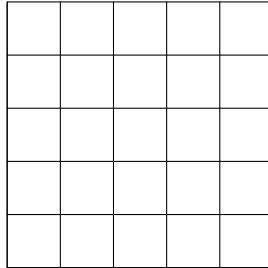
$$|A| = |\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

² Odhaduje se, že v jedné tuně je asi 35 miliónů zrnek rýže. Budeme-li postupovat podle naznačeného schématu, pak bychom na šachovnici potřebovali více než 500 miliard tun zrnek rýže, což mnohonásobně překračuje celosvětovou roční produkci rýže.

Snadno si rozmyslíme, že každý prvek konečné množiny A je vždy do celkového počtu započítám právě jednou a tvrzení proto platí.

Pravidlo součtu *Jestliže existuje n_1 výběrů daného typu provedených jedním způsobem a n_2 výběrů provedených druhým způsobem, přičemž žádný z výběrů nelze provést oběma způsoby, pak existuje právě $n_1 + n_2$ různých výběrů daného typu.*

Příklad 0.5. Kolik různých čtverců najdeme ve čtvercové mřížce na Obrázku 0.13.?



Obrázek 0.13.: Čtvercová mřížka.

Mřížka vznikne nakreslením šesti vodorovných a šesti svislých úseček. Čtverce rozdělíme do několika skupin podle délky stran. Skupina A_1 obsahuje čtverce o straně 1. Ihned je zřejmé, že $|A_1| = 25$. Čtverce o straně 2 mohou mít levý horní roh jen na prvních čtyřech úsečkách (počítáno jak zleva, tak shora). Proto $|A_2| = 16$. Podobně určíme $|A_3| = 9$, $|A_4| = 4$ a $|A_5| = 1$. Protože každý čtverec v mřížce spadá do právě jedné množiny A_1, A_2, \dots, A_5 , tak celkový počet čtverců je

$$\sum_{i=1}^5 |A_i| = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

✓

Kombinatorické pravidlo součinu

Zatímco kombinatorické pravidlo součtu využíváme při počítání možností, které nemohou nastat současně, tak kombinatorické pravidlo součinu využijeme pro počítání výběrů, které sestávají z několika nezávislých podvýběrů.

Lemma 0.3. *Jestliže A_1, A_2, \dots, A_n jsou konečné množiny, pak počet prvků jejich kartézského součinu $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ je dán součinem počtu prvků v jednotlivých množinách A_1, A_2, \dots, A_n , tj.*

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|.$$

Prvky kartézského součinu si můžeme představit jako body v konečném n -rozměrném prostoru. Souřadnice každého bodu je tvořena uspořádanou n -ticí prvků jednotlivých množin.

Pravidlo součinu *Mějme výběr, který sestává ze dvou podvýběrů (částí). Jestliže první podvýběr můžeme provést n_1 způsoby a druhý podvýběr n_2 způsoby, přičemž počet způsobů jednoho podvýběru nezávisí na konkrétní volbě (výsledku) druhého podvýběru, tak existuje právě $n_1 \cdot n_2$ různých výběrů daného typu.*

Kombinatorické pravidlo součinu se někdy nazývá také *princip nezávislých výběrů*. Zdůrazňuje se tak, že počet možností každého podvýběru nezávisí na tom, která možnost byla vybrána v druhém podvýběru.

Příklad 0.6. Klasické domino obsahuje 28 dílků s počty ok 0 až 6. Kolik je takových dvojic dominových kostek, které můžeme přiložit k sobě (na každé kostce najdeme políčko se stejným počtem ok)?

Rozlišíme dva disjunktní případy.

- (i) Jedna z kostek obsahuje dvakrát stejný počet ok, kostka $\{i, i\}$, potom druhá kostka obsahuje jedno políčko s i oky a druhé políčko s jiným počtem ok j . Kostku $\{i, i\}$ můžeme vybrat ze sedmi možností a druhou kostku $\{i, j\}$ pak vybereme vždy z šesti možných. S využitím kombinatorického pravidla součinu dostaneme, že takových dvojic kostek existuje $7 \cdot 6 = 42$.

(ii) Každá kostka obsahuje dva různé počty. Společná hodnota počtu ok i může být libovolná ze sedmi možných. Na každé kostce se pak vyskytuje ještě jiný počet ok: na první hodnota j a na druhé hodnota k . Zatímco j vybíráme z šesti možností, tak k už jen z pěti možností. Jestliže nyní počet dvojic kostek vypočítáme podle kombinatorického pravidla součinu jako $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$, tak každou dvojici kostek započítáme dvakrát. Protože nezávisí na pořadí výběru kostek (která je první a která druhá), je hledaný počet dvojic kostek poloviční, tedy 105.

Celkem máme, s využitím kombinatorického pravidla součtu, $42 + 105 = 147$ dvojic kostek, neboť každá dvojice kostek s jedním společným počtem ok odpovídá právě jednomu z uvedených případů. ✓

Příklad 0.7. Postupka

Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hodu padají větší čísla než v předchozím?

Všimněte si, že při řešení nemůžeme použít kombinatorické pravidlo součinu bez rozmyslu. Jestliže v prvním hodu padle číslo 1, tak v druhém hodu máme čtyři (proč ne pět?) možné hody, které odpovídají zadání. Pokud ale v prvním hodu padle číslo 4, tak v druhém hodu máme jen jedinou možnost, pro druhý i třetí hod. Počet možností n_2 druhého podvýběru závisí na výsledku prvního výběru. Řešení příkladu si ukážeme později v této kapitole. ✓

Dirichletův princip

Při důkazech počítáním možností se často s výhodou využije následující tvrzení.

Dirichletův princip *Jestliže alespoň $nk+1$ předmětů je rozděleno do k příhrádek, pak v některé příhrádce je alespoň $n+1$ předmětů.*

Důkaz je ponechán jako Cvičení 0.5.2.

Sestavování posloupností – variace

Pomocí kombinatorických pravidel součtu a součinu můžeme odvodit vztahy pro všechny klasické výběry jako permutace, kombinace i variace s opakováním i bez opakování. V tomto textu jen připomeneme vztahy pro počty příslušných výběrů, jejich odvození najde čtenář například v [HKS], [MN] nebo [T].

Každou k -prvkovou posloupnost sestavenou z prvků nějaké n -prvkové množiny nazýváme k -prvkovou variaci s opakováním z prvků n -prvkové množiny. Jejich počet $V^*(n, k)$ je dán vztahem

$$V^*(n, k) = n^k.$$

Jestliže nedovolíme, aby se prvky v posloupnosti opakovali, hovoříme o k -prvkové variaci (bez opakování) z prvků n -prvkové množiny. Jejich počet $V(n, k)$ je dán vztahem

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Oba vztahy snadno odvodíme užitím kombinatorického pravidla součinu.

Příklad 0.8. Kolik různých značek Morseovy abecedy je možné vytvořit, jestliže tečky a čárky sestavujeme do skupin o jednom až čtyřech znacích?

S využitím kombinatorického pravidla součtu si úlohu rozdělíme na čtyři části pro skupiny N_1, N_2, N_3, N_4 s jedním, dvěma, třemi a čtyřmi znaky. Při sestavování znaků skupiny N_i vybíráme i -krát vždy ze dvou možností (tečka a čárka) s možností opakování. Proto $|N_i|$ je rovna počtu i -prvkových variací s opakováním ze dvou prvků. Platí $|N_i| = V^*(2, i) = 2^i$. Celkem dostaneme hledaný počet znaků

$$\sum_{i=1}^4 |N_i| = \sum_{i=1}^4 2^i = 2 + 4 + 8 + 16 = 30,$$

proto může existovat nejvýše 30 symbolů Morseovy abecedy dlouhých nejvýše čtyři znaky. ✓

Sestavování podmnožin – kombinace

Každou k -prvkovou podmnožinu nějaké n -prvkové množiny nazýváme k -prvkovou kombinací z prvků n -prvkové množiny. Jejich počet $C(n, k)$ je dán vztahem

$$C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Pokud ve výběru k prvků dané n -prvkové množiny dovolíme opakování vybraných prvků, hovoříme o *k -prvkové kombinaci s opakováním z prvků n -prvkové množiny*. Počet takových výběrů $C^*(n, k)$ je dán vztahem

$$C^*(n, k) = \binom{k+n-1}{n-1} = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Všimněte si, že takový výběr *není* ani posloupností (neboť pořadí vybraných prvků nehraje roli), ani podmnožinou dané n -prvkové množiny, neboť se prvky výběru mohou opakovat. Jedná se o počet různých k -prvkových multimnožin sestavených z prvků nějaké n -prvkové množiny. Alternativně bychom takový výběr mohli popsat jako počet všech zobrazení nějaké k -prvkové množiny A do n -prvkové množiny B , přičemž nerozlišujeme taková zobrazení, která se liší záměnou (permutací) prvků množiny A .

Příklad 0.9. Postupka (podruhé)

Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hodu padají větší čísla než v předchozím?

Všimneme si, že každá přípustná trojice hodů obsahuje tři různá čísla, přičemž pořadí čísel během tří hodů je jednoznačně určeno. Počet takových trojic proto přesně odpovídá výběru tříprvkové podmnožiny z šestiprvkové množiny výsledků. Jedná se o kombinace $C(6, 3) = \binom{6}{3} = 20$. ✓

Příklad 0.10. Kolika způsoby, je možné napsat k jako součet n sčítanců? Předpokládáme, že rozlišujeme pořadí sčítanců.

Hledáme počet takových řešení rovnice

$$k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

kde hodnoty proměnných x_1, x_2, \dots, x_n jsou nezáporná celá čísla. Představíme si číslo k jako součet k jedniček. Nyní rozdělíme těchto k jedniček do n skupin tak, že mezi ně (případně před či za jedničky) přidáme $n - 1$ symbolů „+“ a dostaneme vždy jiný součet čísla k pomocí n sčítanců. Jedná se tedy o výběr $n - 1$ symbolů „+“ v řadě s celkem $k + n - 1$ symboly (k jedniček a $n - 1$ symbolů „+“). Hledaný počet řešení rovnice určíme jako kombinace $(n - 1)$ -prvkové kombinace z $k + n - 1$ prvků.

$$C(k + n - 1, n - 1) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Jiné řešení:

Opět si představíme číslo k jako součet k jedniček. Každé jedničce přiřadíme jednu z n příhrádek (sčítanců x_1, x_2, \dots, x_n). Jedná se o neusporádaný výběr některého z n indexů s možností opakování. Proto je počet řešení rovnice roven počtu k -prvkových kombinací z n prvků s možností opakování.

$$C^*(n, k) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

✓

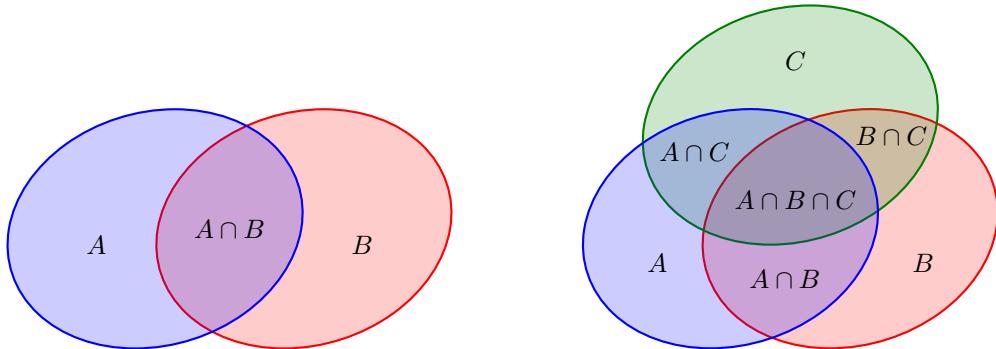
Princip inkluze a exkluze

Při hledání počtu výběrů, které lze rozdělit do několika disjunktních podvýběrů, můžeme použít kombinatorické pravidlo součtu. Avšak v případech, kdy složený výběr není rozdělen na disjunktní podvýběry, kombinatorické pravidlo součtu použít nelze, neboť bychom některé výběry započítali vícekrát. Pro dva nebo tři podvýběry s neprázdnými průniky není těžké dopočítat se správného počtu výběrů pečlivým rozborem (přičtením a odečtením) jednotlivých možností (Obrázek 0.14.). Pro komplikovanější systémy výběrů však raději použijeme obecnější početní postup – princip inkluze a exkluze. Princip ukazuje, jak v obecném výběru započítat každý z podvýběrů právě jednou, tj. vyloučit duplicitu, které vzniknou z neprázdných průniků jednotlivých podvýběrů.

Pro počet prvků ve sjednocení (konečného) systému (konečných) množin A_1, A_2, \dots, A_n jistě platí

$$\left| \bigcup_{j=1}^n A_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |A_j|,$$

přičemž rovnost nastane pouze v případě, kdy jsou každé dvě různé množiny disjunktní. Zavedeme-li přirozenou konvenci, že $\bigcup_{i=1}^1 A_i = A_i$, je počet prvků obecného systému množin popsán v následujícím lemmatu.



Obrázek 0.14.: Počet prvků sjednocení množin je $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, respektive $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Lemma 0.4. Princip inkluze a exkluze

Počet prvků ve sjednocení systému množin A_1, A_2, \dots, A_n je

$$\left| \bigcup_{j=1}^n A_j \right| = \sum_{\substack{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|. \quad (1)$$

Jestliže každá množina A_i má stejný počet prvků a také každý průnik k různých množin má stejný počet prvků, je počet prvků ve sjednocení systému množin A_1, A_2, \dots, A_n určen jednodušším vztahem

$$\left| \bigcup_{j=1}^n A_j \right| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \left| \bigcap_{j=1}^i A_j \right|. \quad (2)$$

Otázky:

- Kolik sčítanců má suma ve vztahu (1) a kolik ve vztahu (2)?
- Jak se změní vztahy (1) a (2), pokud jsou všechny množiny A_1, A_2, \dots, A_n navzájem disjunktní?

Příklad 0.11. Máme čísla $1, 2, \dots, 1000$. Kolik čísel zůstane po vyškrtnání všech násobků $2, 3, 5, 7$?

Symbolem A_i označíme množinu všech násobků čísla i mezi 1 a 1000. Vyškrtná čísla pak leží ve sjednocení množin $A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$. Podle principu inkluze a exkluze určíme jejich počet

$$\begin{aligned} |A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| &= |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| - \\ &\quad - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + \\ &\quad + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| - \\ &\quad - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|. \end{aligned}$$

Všimneme-li si, že $A_i \cap A_j = A_{ij}$ (index ij chápeme jako součin $i \cdot j$), pak snadno určíme velikosti jednotlivých průniků.

- Násobků dvojky je $|A_2| = \frac{1000}{2} = 500$.
- Násobků trojky je $|A_3| = \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor = 333$.
- Násobků pětky je $|A_5| = \frac{1000}{5} = 200$.
- Násobků sedmičky je $|A_7| = \lfloor \frac{1000}{7} \rfloor = 142$.
- Násobků $2 \cdot 3 = 6$ je $|A_6| = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166$.
- Násobků $2 \cdot 5 = 10$ je $|A_{10}| = \lfloor \frac{1000}{10} \rfloor = 100$.
- Násobků $2 \cdot 7 = 14$ je $|A_{14}| = \lfloor \frac{1000}{14} \rfloor = 71$.
- Násobků $3 \cdot 5 = 15$ je $|A_{15}| = \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor = 66$.
- Násobků $3 \cdot 7 = 21$ je $|A_{21}| = \lfloor \frac{1000}{21} \rfloor = 47$.
- Násobků $5 \cdot 7 = 35$ je $|A_{35}| = \lfloor \frac{1000}{35} \rfloor = 28$.
- Násobků $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ je $|A_{30}| = \lfloor \frac{1000}{30} \rfloor = 33$.

- Násobků $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ je $|A_{42}| = \lfloor \frac{1000}{42} \rfloor = 23$.
- Násobků $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ je $|A_{70}| = \lfloor \frac{1000}{70} \rfloor = 14$.
- Násobků $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ je $|A_{105}| = \lfloor \frac{1000}{105} \rfloor = 9$.
- Násobků $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ je $|A_{210}| = \lfloor \frac{1000}{210} \rfloor = 4$.

Při určení velikostí množin jsme využili, že se jedná o množinu po sobě jdoucích čísel začínajících číslem 1. Odečtením počtu vyškrtaných čísel od počtu všech daných čísel, dostaneme (s využitím principu inkluze a exkluze)

$$1000 - |A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 1000 - 500 - 333 - 200 - 142 + 166 + 100 + 71 + 66 + 47 + 28 - 33 - 23 - 14 - 9 + 4 = 228,$$

což je hledaný počet čísel, která zůstanou po vyškrtnání násobků 2, 3, 5, 7. ✓

Příklad 0.12. Kolik existuje surjektivních zobrazení k -prvkové množiny do n -prvkové množiny.

Počet všech zobrazení k -prvkové množiny do n -prvkové množiny se rovná počtu všech uspořádaných výběrů k prvků z n možných obrazů, tj. jejich počet je $V^*(n, k) = n^k$. Avšak ne každé uvedené zobrazení pro $n > 1$ je surjektivní.

Bez újmy na obecnosti mějme $K = \{1, 2, \dots, k\}$ a $N = \{1, 2, \dots, n\}$ (můžeme je chápout jako množiny indexů prvků libovolných dvou neprázdných konečných množin). Pro $i = 1, 2, \dots, n$ označíme A_i množinu všech zobrazení $K \rightarrow N$ takových, že prvek $i \in N$ není obrazem žádného prvku. Je zřejmé, že všechna zobrazení $K \rightarrow N$, která nejsou surjektivní, patří do sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Počet takových zobrazení určíme pomocí principu a inkluze užitím vztahu (2), neboť velikost průniku několika vybraných množin $A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_i}$ (přičemž $j_1, j_2, \dots, j_i \in \{1, 2, \dots, n\}$) nezávisí na výběru konkrétních množin, jen na jejich počtu. Platí

$$|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_i}| = (n - i)^k,$$

protože vztah udává počet zobrazení množiny K do nějaké $(n - i)$ -prvkové množiny. Dle vztahu (2) pak ihned dostaneme

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \left| \bigcap_{j=1}^i A_j \right| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n - i)^k.$$

Odečteme-li nyní od počtu všech zobrazení $K \rightarrow N$ počet všech zobrazení, která nejsou surjektivní, dostaneme hledaný počet surjekcí

$$n^k - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = n^k - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n - i)^k = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n - i)^k.$$

Poslední sčítanec sumy je vždy nulový (odpovídá počtu zobrazení neprázdné množiny do prázdné množiny). Je zajímavé si uvědomit, že vztah platí i pro $n > k$ a dává správný číselný výsledek 0 (Cvičení 0.5.5.). ✓

Cvičení

0.5.1. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B a $b \in \mathbb{N}$ platí a) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$; b) $|A^n| = |A|^n$.

0.5.2. Dokažte Dirichletův princip.

0.5.3. Máme k dispozici neomezené množství neobarvených krychliček a šest různých barev. Mac Mahonovy kostky je sada všech různých krychliček, z nichž každá má stěny obarvené šesti různými barvami. Dvě kostky považujeme za shodné, pokud jednu můžeme dostat z druhé vhodným otočením. Kolik existuje různých Mac Mahonových kostek?

0.5.4. Házíme třikrát kostkou. Kolik existuje takových možností, kdy v každém dalším hodu nepadají menší čísla než v předchozím?

0.5.5. Vysvětlete, proč vztah $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n - i)^k$ pro počet surjekcí z k -prvkové množiny do n -prvkové množiny dává pro $n > k$ číselně správný výsledek 0.

0.6. Co se nevešlo

Následuje několik poznámek, které nespadají do žádné z předchozích podkapitol.

Symbole

Funkce „ $\lfloor x \rfloor$ “ se nazývá *dolní celá část z čísla x* a je definována jako největší celé číslo, které není větší než x . Podobně funkce „ $\lceil x \rceil$ “ se nazývá *horní celá část z čísla x*, definujeme ji jako nejmenší celé číslo, které není menší než x .

Systém (množinu) všech k prvkových podmnožin množiny X budeme značit $\binom{X}{k}$. Často budeme pracovat se systémem $\binom{X}{2}$, tj. systémem všech dvouprvkových podmnožin množiny X . Aby nedošlo k záměně s kombinačními čísly, budeme důsledně horní symbol (množinu) značit velkými písmeny a konstantu u kombinačního čísla malými písmeny. Navíc význam symbolů s kombinačními čísly bude vždy zřejmý z kontextu.

Grupoidy a grupy

V diskrétní matematice často pracujeme i s operacemi na konečných číselných množinách. Korektní vybudování teorie číselných množin spadá do algebry, my zde připomeneme jen několik základních pojmu a faktů, které se nám budou hodit při řešení konkrétních problémů.

Mějme nějakou množinu M . Na straně 12 jsme zavedli pojem *binární operace* na množině M jako zobrazení $M \times M \rightarrow M$. Množinu M spolu s touto operací nazveme *grupoid* (v některých knihách se používá termín *magma*). Značíme ji (M, \otimes) , kde symbolem \otimes chceme zdůraznit, že operace může být libovolná, ne nutně klasické násobení nebo sčítání jaké známe z počítání s přirozenými nebo reálnými čísly. Místo $c = \otimes(a, b)$ obvykle píšeme $a \otimes b = c$. Uzavřenosť operace \otimes na množině M vyplývá ihned z definice binární operace, tj. pro libovolné $a, b \in M$ je výsledek operace $a \otimes b \in M$.

Různých operací i na malých konečných množinách existuje mnoho (Cvičení 0.6.1.). Nás však obvykle zajímají jen takové operace na množině M a takové grupoidy (M, \otimes) , které mají některé pěkné vlastnosti. Důležitou a možné nejdůležitější skupinu grupoidů tvoří grupy.

Definice Grupa

Každý grupoid (M, \otimes) , který splňuje následující vlastnosti (*axiomy grupy*) nazýváme *grupa* (M, \otimes) .

1) asociativita

Pro každé tři prvky $a, b, c \in M$ platí $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$.

2) existence neutrálního prvku

Existuje takový prvek $e \in M$, že pro každý prvek $a \in M$ platí $e \otimes a = a \otimes e = a$.

3) existence inverzního prvku

Pro každý prvek $a \in M$ existuje takový prvek $b \in M$, že $a \otimes b = b \otimes a = e$, kde $e \in M$ je neutrální prvek grupoidu.

Pokud je z kontextu zřejmé, s jakou operací pracujeme, hovoříme stručně o grupě G .

Všimněte si, že obecně *nevyzadujeme* komutativitu operace \otimes . Dále se dá ukázat, že neutrální prvek e je v každé grupě definovaný jednoznačně, tj. neutrální prvek existuje v grupě právě jeden (Cvičení 0.6.2.). Také inverzní prvek ke každému prvku $a \in M$ je určen jednoznačně, proto má smysl pro inverzní prvek k prvku a používat označení a^{-1} (Cvičení 0.6.3.). A konečně z definice grupy není ani těžké ukázat, že pokud $a \otimes b = e$, tak $b \otimes a = e$, tj. násobení inverzním prvkem v grupě vždy komutuje vzhledem k operaci \otimes . Zájemce o teorii grup odkážeme například na knihu [G].

Cvičení

0.6.1. Kolik existuje různých operací na n -prvkové množině?

0.6.2. Ukažte, že v každé grupě existuje právě jeden neutrální prvek.

0.6.3. Ukažte, že v grupě je inverzní prvek ke každému prvku určen jednoznačně.

Kapitola 1. Grafy a podgrafy

1.1. Grafy a jednoduché grafy

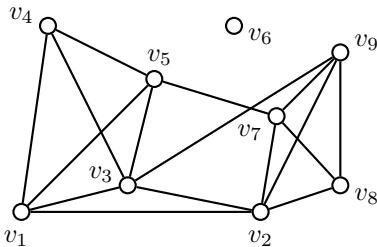
Pojem grafu byl zaveden Leonhardem Eulerem³ v roce 1736. Jedná se o model, který reprezentuje objekty a vztahy mezi nimi. Zdůrazněme, že v tomto textu grafem nebude graf funkce.

Definice Jednoduchý graf G je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je neprázdná množina vrcholů a E je nějaká množina dvouprvkových podmnožin množiny V . Prvkům E říkáme hrany.

Množinu vrcholů grafu G budeme označovat $V(G)$ a množinu hran $E(G)$. Pokud nebude hrozit mýlka, vystačíme s označením V a E . Jestliže budeme chtít zdůraznit množinu vrcholů resp. hran, označíme graf $G = (V, E)$, v literatuře najdeme také zápis $G(V, E)$.

Diagramy

Grafy znázorňujeme pomocí diagramů⁴. Síla teorie grafů spočívá zejména ve stručné a přehledné interpretaci problému, kdy abstrahujeme od nedůležitých symbolů a soustředíme se na strukturu, která je v problému obsažena. V nakreslení grafu (v diagramu) znázorníme vrcholy jako body v rovině a hrany jako křivky, které spojují vždy oba body odpovídající vrcholům jež hranu určují. Rozlišujeme pojmy hrana a nakreslení hrany. V nakreslení grafu prochází každá hrana jen dvěma takovými body, které odpovídají vrcholům a sice dvojicí vrcholů, které hranu určují. Je praktické požadovat, aby se dvě různé hranы protínaly nejvýše jedenkrát.



Obrázek 1.1.: Nakreslení grafu G .

Na Obrázku 1.1. je nakreslení grafu $G = (V, E)$ s množinou vrcholů $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ a množinou hran $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_7\}, \{v_2, v_8\}, \{v_2, v_9\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_9\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_7\}, \{v_7, v_8\}, \{v_7, v_9\}, \{v_8, v_9\}\}$.

Značení a terminologie

Budeme pracovat téměř výhradně s konečnými grafy. V takovém případě má smysl říci, že graf G má $|V|$ vrcholů a $|E|$ hran. Vrcholy u a v jsou koncové vrcholy hrany $\{u, v\}$. Hrany označujeme obvykle písmeny z první poloviny abecedy (e, f, h, \dots) a vrcholy písmeny z konce abecedy u, v, w, \dots, z . Máme-li hranu e s koncovými vrcholy u, v , tak místo $e = \{u, v\}$ používáme kratší zápis $e = uv$ nebo jen hrana uv . Je-li vrchol v koncovým vrcholem hrany e , můžeme psát $v \in e$ a říkáme, že vrchol v je incidentní s hranou e .

Dva různé vrcholy u, v v grafu jsou sousední neboli závislé, jestliže v grafu existuje hrana uv (jsou koncovými vrcholy téže hrany). V opačném případě se vrcholy nazývají nezávislé nebo nesousední. Množina vrcholů, ve které jsou každé dva vrcholy nezávislé, se nazývá množina nezávislých vrcholů. Černé vrcholy v levém grafu na Obrázku 1.2. jsou závislé a bílé vrcholy tvoří největší nezávislou množinu vrcholů (největší znamená, že žádná nezávislá množina s více prvky v grafu neexistuje). V pravém grafu tvoří černé vrcholy množinu nezávislých vrcholů, která je maximální (maximální znamená, že žádný vrchol do množiny nezávislých vrcholů již nemůžeme přidat), ale která není největší.

³ Na straně 103 je popsána úloha sedmi mostů města Královce.

⁴ Diagramy odpradávna pomáhaly porozumět popisu.

Na obrázku je fragment textu a diagram z Eukleidových Základů. Jedná se o jeden z nejlépe dochovaných Oxyrhynchských papyrus, jejichž vznik se datuje na přelom prvního a druhého století našeho letopočtu. http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Oxyrhynchus_papyri





Obrázek 1.2.: Závislé a nezávislé vrcholy v grafu.

Podobně říkáme, že dvě hrany jsou *nezávislé*, jestliže nemají žádný společný koncový vrchol (průnik hran je prázdná množina). Množina hran se nazývá *nezávislá* (v Kapitole 6. jí budeme říkat také *párování*), jestliže každá dvojice hran z množiny je nezávislá.

Zobecnění pojmu graf

Graf, tak jak jsme jej zavedli v definici na straně 19, se nazývá *jednoduchý graf*. Všimněte si, že nerozlišujeme hrany uv a vu . Při řešení některých problémů však má smysl rozlišit pořadí vrcholů hrany. V takovém případě zobecníme definici grafu na *orientovaný graf*. Orientovaným grafům se budeme věnovat v Kapitole 11.

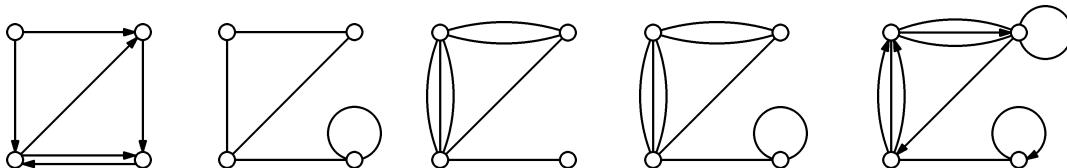
Definice jednoduchého grafu nedovoluje, aby oba koncové vrcholy hrany byly stejné, protože by se nejdalo o dvouprvkovou podmnožinu $V(G)$. Takovým „hranám“ se říká *smyčky*. Pokud bychom chtěli do definice grafu zahrnout i smyčky, dovolíme, aby hrany byly i jednoprvkové podmnožiny $V(G)$, tedy $E' \subseteq E(G) \cup V(G)$. Zavedeme tak *graf se smyčkami*.

Ještě obecnější je *multigraf*, ve kterém dovolíme, aby dva vrcholy byly spojeny i více než jednou hranou, a *pseudograf*, ve kterém navíc povolíme smyčky. Připomeňme, že symbolem $\binom{X}{k}$ značíme systém všech k -prvkových podmnožin množiny X . Definice obecného grafu, ve kterém mohou být orientované i neorientované hrany i smyčky vypadá takto:

Definice Obecný graf

Obecný graf je trojice (V, E, φ) , kde V je neprázdná množina vrcholů, E je množina hran, $E \cap V = \emptyset$, a φ je *incidenční zobrazení* $\varphi : E \rightarrow \binom{V}{2} \cup V^2 \cup V$.

Všimněte si, že E je nějaká obecná množina, interpretaci jejích prvků zajistí teprve funkce φ .



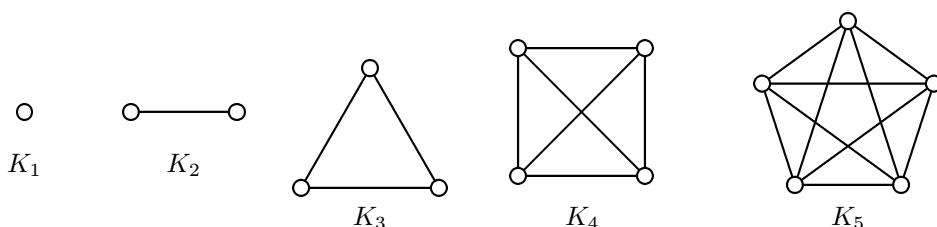
Obrázek 1.3.: Orientovaný graf, graf se smyčkou, multigraf, pseudograf a obecný graf.

Ještě obecnější než graf je *hypergraf*. Hrany hypergrafu nemusí být jen dvouprvkové, ale obecné podmnožiny V .

V dalším se zaměříme na tzv. *jednoduchý graf*, tj. konečný neorientovaný graf bez smyček a násobných hran. Nebude-li výslovně řečeno jinak, tak pod pojmem „graf“ budeme rozumět jednoduchý graf. Ačkoli má velmi dobrý smysl zabývat se i nekonečnými grafy, my se budeme zabývat jen konečnými grafy (tj. takovými grafy G , kdy $|V(G)| \in \mathbb{N}$).

Základní typy grafů

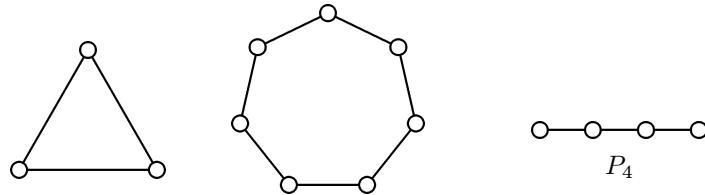
Po definici nemůže být graf prázdný. Graf, který obsahuje jediný vrchol (a žádnou hranu) se nazývá *triviální graf*. Řada grafů, se kterými budeme pracovat, má svá jména. Například graf na n vrcholech, který obsahuje všech $\binom{n}{2}$ hran, se nazývá *kompletní graf* (někdy také *klika*) a značí se K_n .



Obrázek 1.4.: Triviální graf a kompletní grafy.

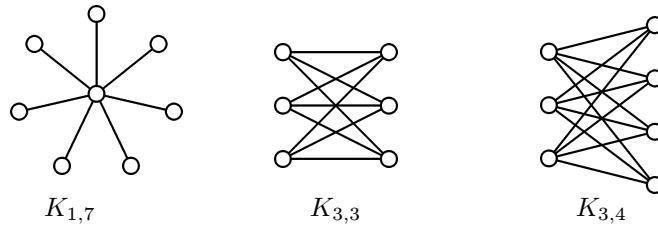
Graf s vrcholovou množinou $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, pro $n \geq 3$, a množinou hran $E = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$ se nazývá *cyklus*. Cykly značíme C_n . V některé literatuře se pro cyklus používá pojem *kružnice*, zatímco „cyklus“ se říká orientovaným cyklům (definice orientovaného cyklu je na straně 116). V tomto textu nebudeme cykly a kružnice striktně rozlišovat, rozdíl bude vždy jasné z kontextu.

Cesta je graf s množinou vrcholů $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ a množinou hran $E = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{n-1}x_n\}$. Cesty značíme P_n (z anglického „path“). Pokud je V jednoprvková množina, tak E neobsahuje žádnou hranu a cesta P_1 se nazývá *triviální* cesta. Pozor na jinou symboliku než v předmětu Diskrétní matematika, kde P_n značilo cestu s $n + 1$ vrcholy!



Obrázek 1.5.: Grafy C_3 , C_7 a P_4 .

Graf, jehož vrcholová množina je sjednocením dvou neprázdných disjunktních množin U , W a množina hran je $E = \{uw : u \in U \wedge w \in W\}$, se nazývá *kompletní bipartitní* graf nebo *biklika* s *partitami* U a W . Kompletní bipartitní graf značíme $K_{m,n}$, kde $m = |U|$ a $n = |W|$. Na Obrázku 1.6. jsou příklady kompletních bipartitních grafů.



Obrázek 1.6.: Kompletní bipartitní grafy $K_{1,7}$, $K_{3,3}$ a $K_{3,4}$.

Bipartitní graf je zobecněním kompletního bipartitního grafu. V bipartitním grafu nemusí být všechny hrany mezi partitami U a W , ale jen některé: $E \subseteq \{uw : u \in U, w \in W\}$. O bipartitních grafech se dozvímáme více v podkapitole 6.2.

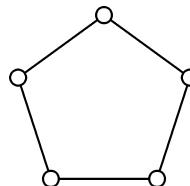
Kompletnímu bipartitnímu grafu $K_{1,n}$ se říká *hvězda*. Další typy grafů (například stromy, kola, mapy) zavedeme v dalších kapitolách, někdy i v rámci cvičení.

Zadávání grafů

Graf můžeme zadat třemi způsoby:

- algebraicky – určením množiny vrcholů a množiny hran,
- graficky – zakreslením diagramu,
- popisem vlastností nebo ve speciálních případech jménem grafu.

Například cyklus C_5 můžeme zadat algebraicky jako graf $G = (V, E)$, kde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_1v_5\}$ nebo Obrázkem 1.7. Také můžeme cyklus C_5 popsat jako graf na pěti vrcholech, ve kterém je každý vrchol incidentní s právě dvěma hranami.



Obrázek 1.7.: Cyklus C_5 .

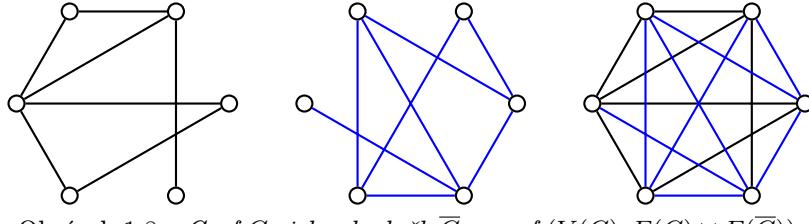
Všechny způsoby obvykle považujeme za ekvivalentní, neměli bychom je však zaměňovat vždy. Obvykle budeme pracovat s grafem daným (podle definice) množinou vrcholů a množinou hran.

Doplněk grafu

Připomeňme, že symbolem 2^X značíme potenční množinu množiny X (definice je na straně 5).

Definice *Doplnkem grafu $G = (V, E)$ rozumíme graf $\bar{G} = (V, \bar{E})$, kde $\bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E$.*

V literatuře se někdy pro doplněk používá značení G' . Z definice plyne, že pro každý graf G je jeho doplněk \bar{G} určen jednoznačně (proč?).



Obrázek 1.8.: Graf G , jeho doplněk \bar{G} a graf $(V(G), E(G) \cup E(\bar{G}))$.

O grafu řekneme, že je *hustý*, jestliže obsahuje mnoho hran, rádově více než vrcholů (přesná hranice se nestanovuje). Pokud zkoumáme vlastnosti hustého grafu, může být jednodušší zkoumat doplněk grafu.

Otázka: Máme dánu množinu A . Jaká je mohutnost množiny 2^A ?

Cvičení

1.1.1. [♡] Ukažte, že platí $\bar{\bar{G}} = G$, tj. doplněk doplnku grafu G je právě graf G .

1.1.2. Může být graf svým vlastním doplnkem? Pokud ano, najděte všechny grafy, které jsou shodné se svým doplnkem.

1.1.3. [♡] Najděte příklad grafu, který je isomorfní (má stejnou strukturu) se svým doplnkem (isomorfismus je zaveden na straně 44).

1.1.4. [♡] Najdete příklad grafu na deseti vrcholech, který je isomorfní se svým doplnkem?

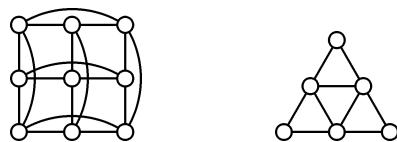
1.1.5. Najděte třídu nekonečně mnoha grafů, které jsou isomorfní se svým doplnkem.

1.2. Stupeň vrcholu

Definice *Stupeň vrcholu v je počet hran, se kterými je vrchol v incidentní, a značí se $\deg(v)$.*

Pokud je třeba zdůraznit, ke kterému grafu se stupeň vrcholu v vztahuje, použijeme dolní index $\deg_G(v)$. Vrcholu stupně 0 říkáme *izolovaný vrchol*. Graf, ve kterém jsou všechny vrcholy stejněho stupně se nazývá *pravidelný*, nebo také *regulární*. Například graf, ve kterém jsou všechny vrcholy stupně 2, nazýváme *2-pravidelný*. Největší stupeň v grafu se značí $\Delta(G)$, nejmenší stupeň pak $\delta(G)$. Všimněte si, že zatímco $\deg(v)$ je vlastnost vrcholů, tak $\delta(G)$ a $\Delta(G)$ přiřazujeme grafu. Na Obrázku 1.9. je příklad 4-pravidelného grafu a grafu G , který má nejmenší stupeň $\delta(G) = 2$ a největší stupeň $\Delta(G) = 4$.

Grafům, které jsou 3-pravidelné, se říká *kubické grafy*. Například Petersenův graf na Obrázku ?? je kubický. Další kubické grafy jsou na Obrázcích ?? a ??



Obrázek 1.9.: 4-pravidelný graf a graf G s $\delta(G) = 2$ a $\Delta(G) = 4$.

Symbolem $h(G)$ budeme označovat počet hran grafu G a symbolem $v(G)$ počet vrcholů grafu G . V hustém grafu je vysoký průměrný stupeň

$$\frac{\sum_{v \in V(G)} \deg(v)}{v(G)}.$$

Věta 1.1. Princip sudosti

Mějme graf G s vrcholy v_1, v_2, \dots, v_n , kde $n \geq 1$. Symbolem $h(G)$ označme počet hran grafu G . Potom

$$\sum_{v_i \in V(G)} \deg(v_i) = 2h(G).$$

Důkaz. Každá hrana je incidentní s právě dvěma vrcholy a proto přispívá jedničkou ke stupni dvou vrcholů. V součtu na levé straně přispěje každá hrana dvojkou a proto je součet roven dvojnásobku počtu hran. \square

Jiný důkaz. Indukcí vzhledem k počtu vrcholů

Základ indukce: Pro triviální graf K_1 s jediným vrcholem tvrzení jistě platí

$$\sum_{v_i \in V(K_1)} \deg(v_i) = 0 = 2 \cdot 0 = h(K_1).$$

Indukční krok: Předpokládáme, že tvrzení platí pro všechny grafy s nejméně n vrcholy, kde $n \geq 1$. Ukážeme, že potom tvrzení platí i pro libovolný graf s $n+1$ vrcholy. Mějme libovolný graf $G = (V, E)$ s $n+1$ vrcholy. Vyberme libovolný vrchol x v G (takový vrchol v G jistě existuje, proč?). Označme $G-x$ graf, který vznikne z grafu G odebráním vrcholu x a všech $\deg_G(x)$ hran s vrcholem x incidentních, tj. $G-x = (V \setminus \{x\}, E \setminus \{xy : y \in V \wedge xy \in E\})$. Graf $G-x$ splňuje indukční předpoklad, proto $\sum_{v_i \in V(G-x)} \deg_{G-x}(v_i) = 2h(G-x)$.

Nyní využijeme vztah $\deg_G v = \deg_{G-x}(v) + 1$ pro $v \neq x$ a vypočítáme

$$\begin{aligned} \sum_{v_i \in V(G)} \deg_G(v_i) &= \deg_G(x) + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\deg_G(x)} + \sum_{v_i \in V(G-x)} \deg_{G-x}(v_i) = \\ &= 2 \deg_G(x) + 2h(G-x) = 2(\deg_G(x) + h(G-x)) = 2h(G). \end{aligned}$$

To je dokazované tvrzení a podle principu matematické indukce je důkaz hotov. \square

Třetí způsob, důkaz indukcí vzhledem k počtu hran je ponechán jako cvičení.

Příklad 1.1. Kolik hran má 4-pravidelný graf na Obrázku 1.9.?

Při řešení využijeme princip sudosti. Graf na Obrázku 1.9. má devět vrcholů stupně 4, proto součet stupňů vrcholů je $9 \cdot 4 = 36$, což je dvojnásobek počtu hran. Graf má 18 hran. \checkmark

Tvrzení Věty 1.1. je poměrně jednoduché, přesto má celou řadu důsledků, jak je vidět i podle předchozího příkladu. Následuje tvrzení, které říká, že grafy s lichým počtem vrcholů lichého stupně nemohou existovat.

Důsledek 1.2. Počet vrcholů lichého stupně v libovolném grafu je sudý.

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Nechť platí předpoklad věty a neplatí tvrzení, tj. „mějme takový graf G , že počet vrcholů lichého stupně v G je lichý“. Užitím principu sudosti dojdeme ke sporu. Je-li počet vrcholů lichého stupně lichý, tak součet stupňů všech vrcholů je také lichý (proč?) Avšak podle Věty 1.1. je součet stupňů všech vrcholů roven dvojnásobku počtu hran, a je tedy sudý. Dostáváme spor a tvrzení je dokázáno. \square

Jiný důkaz. Tvrzení dokážeme nepřímo. Místo implikace „mějme libovolný graf G , potom počet vrcholů lichého stupně v G je sudý“ budeme dokazovat implikaci „máme-li v G lichý počet vrcholů lichého stupně, potom G není graf“.

Víme, že je-li počet vrcholů lichého stupně lichý, tak součet S stupňů všech vrcholů je také lichý. Podle Věty 1.1. je roven dvojnásobku počtu hran $S = 2h(G)$. Odtud vidíme, že $h(G) = S/2$ není celé číslo, protože S je liché. V grafu je jistě počet hran celočíselný, proto G není graf. \square

Mějme na paměti, že graf je množina vrcholů a množina hran, které splňují další vlastnosti. Pokud vezmeme například množiny

$$V = \{x, y, z\}, \quad E = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{v, y\}\},$$

tak snadno ověříme, že všechny tři prvky („vrcholy“) x, y, z patří do jedné nebo tří dvouprvkových podmnožin („hran“) v systému množin E . Vypadá to, že všechny tři vrcholy jsou stupně 1 nebo 3. Vysvětlete, v čem je chyba.

Příklad 1.2. Vánoční dárky (podruhé)

Devět kamarádů si na Vánoce dalo dárky. Každý dal dárky třem svým kamarádům. Ukažte, že není možné, aby každý dostal dárky právě od těch tří kamarádů, kterým dárky sám dal.

Problém popíšeme grafem, ve kterém vrcholy odpovídají kamarádům a hranou spojíme ty dva kamarády, kteří si vymění navzájem dárky. Pokud by existovala situace, kdy si každý jen vymění dárky se třemi kamarády, tak odpovídající graf by byl kubický graf na devíti vrcholech. Takový graf však podle Důsledku 1.2. neexistuje! ✓

Posloupnost stupňů vrcholů

Někdy je výhodné pracovat nejen s hranami, které jsou incidentní s daným vrcholem v (resp. s jejich počtem $\deg(v)$), ale také s vrcholy, které jsou s daným vrcholem sousední.

Definice Okolí vrcholu v je množina $N_G(v) = \{u \in V : \exists uv \in E(G)\}$.

Okolí vrcholu je množina vrcholů, které jsou sousední s daným vrcholem v . Značíme ji $N(v)$ a pokud budeme chtít zdůraznit, že se jedná o okolí vrcholu v v grafu G , použijeme dolní index: $N_G(v)$. Všimněte si, že v jednoduchém grafu G pro každý vrchol $v \in V(G)$ platí $|N(v)| = \deg(v)$.

Definice Grafová posloupnost

Máme dán graf G s vrcholy v_1, v_2, \dots, v_n . Posloupnost $(\deg(v_1), \deg(v_2), \dots, \deg(v_n))$ nazýváme stupňovou posloupností grafu G . Nerostoucí posloupnost $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ se nazývá grafová, je-li stupňovou posloupností nějakého grafu.

Ke každému grafu jistě najdeme stupňovou posloupnost, ale není těžké si uvědomit, že ne každá nerostoucí posloupnost nezáporných celých čísel je grafová. Jistě musí být největší číslo v posloupnosti menší, než počet prvků posloupnosti. Dále například podle Důsledku 1.2. víme, že posloupnost, která obsahuje lichý počet lichých čísel, nemůže být grafová. Dokonce ani posloupnost, která obsahuje sudý počet lichých nezáporných čísel nemusí být grafová (proč?). Například posloupnosti $(2, 0, 0)$ nebo $(2, 2, 0)$ jistě nejsou stupňovou posloupností žádného grafu (proč?). Následující věta dává poměrně jednoduchý návod jak poznat, zda nějaká posloupnost je nebo není grafová.

Věta 1.3. Havel–Hakimi

Nechť $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ je nerostoucí posloupnost a nechť D' vznikne přeusporečnáním posloupnosti $(d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ na nerostoucí posloupnost. Potom platí, že posloupnost D je grafová právě tehdy, když D' je grafová.

Jinými slovy D' vznikne z nerostoucí posloupnosti D tak, že vynecháme první člen d_1 a právě d_1 následujících prvků (pokud existují) zmenšíme o jedničku. Nakonec její prvky přeusporečnáme tak, abychom dostali nerostoucí posloupnost.

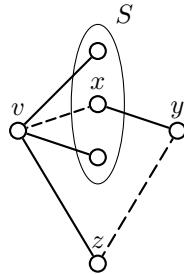
Důkaz. Jedná se o důkaz ekvivalence, proto musíme dokázat obě implikace.

„ \Rightarrow “ Mějme graf G se stupňovou posloupností $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$. Odebereme-li z grafu G vrchol stupně d_1 (a všechny hrany s ním incidentní), dostaneme menší graf, jehož stupňová posloupnost nemusí být posloupnost D' , protože vrchol stupně d_1 nemusí být sousední právě s vrcholy stupňů $d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}$. Ukážeme však, že z daného grafu G můžeme sestrojit takový graf G' se stejnou stupňovou posloupností D , že odstraněním vrcholu stupně d_1 (a všech hrany s ním incidentních) z grafu G' dostaneme menší graf H' se stupňovou posloupností D' . Označme v vrchol stupně $d_1 = \Delta(G)$. Označme S množinu těch d_1 vrcholů grafu G , které jsou stupňů $d_2, d_3, \dots, d_{d_1+1}$.

Je-li $N_G(v) = S$, je důkaz hotov, protože graf, který dostaneme z G tak, že odebereme vrchol v a všechny hrany s ním incidentní (označíme jej $G - v$), je graf se stupňovou posloupností D' .

Je-li $N_G(v) \neq S$, tak ukážeme, jak sestavit graf G_1 , pro který platí

$$|N_{G_1}(v) \cap S| = |N_G(v) \cap S| + 1.$$

Obrázek 1.10.: Záměna dvou hran grafu G v důkazu Věty Havla–Hakimiho.

Nechť tedy $N_G(v) \neq S$, tj. existuje takový vrchol $x \in S$, že $vx \notin E(G)$. Protože $|N_G(v)| = |S|$ musí současně existovat takový vrchol $z \in (N_G(v) \setminus S)$, že $vz \in E(G)$, viz Obrázek 1.10.

Nyní si uvědomíme, že v množině S jsou vrcholy nejvyšších stupňů v grafu G (s výjimkou vrcholu v) a proto $\deg_G(x) \geq \deg_G(z) \geq 1$. Navíc jeden ze sousedů vrcholu z je vrchol v , avšak v není sousední s x . Protože $\deg_{G-v}(x) > \deg_{G-v}(z)$, tak jistě někde v grafu $G - v$ (a také v grafu G) existuje takový vrchol y (y je různý od v, x, z), který je sousední s vrcholem x a není sousední s vrcholem z . Nyní z grafu G odstraníme hrany vz , xy a přidáme hrany vx a zy . Dostaneme graf G_1 , pro který platí $|N_{G_1}(v) \cap S| = |N_G(v) \cap S| + 1$. Grafy G a G_1 mají stejnou stupňovou posloupnost. Podobně můžeme postup zopakovat a dostat takový graf G_2 , že $|N_{G_2}(v) \cap S| = |N_G(v) \cap S| + 2$ a nejpozději po Δ krocích dostaneme graf G' se stejnou stupňovou posloupností D jako má graf G , pro který však platí $N(G') = S$. Pro graf G' nyní jistě platí, že $G' - v = H'$, kde H' je graf se stupňovou posloupností D' . Tím je důkaz první implikace dokončen.

„ \Leftarrow “ Důkaz této implikace je jednodušší. Jestliže posloupnost D' je grafová, tak existuje jednoduchý graf G' se stupňovou posloupností $D' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$. Do grafu G' přidáme vrchol v stupně d_1 , spojíme jej hranami s vrcholy stupňů $d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1$. Získáme tak nadgraf G grafu G' , který má stupňovou posloupnost $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, tj. D je grafová posloupnost. \square

Postup uvedený v důkazu Věty 1.3. dává rekurzivní algoritmus pro ověření, zda daná posloupnost je grafová. Opakovaným použitím Věty 1.3. dostaneme po konečném počtu kroků odpověď. Výpočet můžeme použít i pro konstrukci grafu s danou stupňovou posloupností (Cvičení 1.2.5.). Je nutné si uvědomit, že ne každý graf s danou stupňovou posloupností můžeme tímto způsobem zkonztruovat (viz Cvičení 1.2.8.).

Příklad 1.3. „Handshaking problem“ (podruhé)

Máme skupinu n lidí ($n \geq 2$) z nichž někteří si podali ruce. Ukažte, že ve skupině jsou alespoň dva lidé, kteří podali ruku stejněmu počtu lidí ve skupině.

Sestavíme graf, kde vrcholy budou odpovídat lidem a hranou spojíme každou dvojici, která si podala ruce. Je zřejmé, že relace „podat si ruce“ je symetrická a ireflexivní, proto graf bude jednoduchý (neorientovaný a bez smyček). Pro důkaz můžeme použít také Větu Havla–Hakimiho. Každý z n lidí mohl podat ruku nejvíce $n - 1$ krát a nejméně 0 krát. Pokud by bylo možné, aby si každý podal ruku s jiným počtem lidí, tak by odpovídající graf měl stupňovou posloupnost $D = (n - 1, n - 2, \dots, 0)$. Po jediné úpravě užitím Věty 1.3. dostaneme posloupnost $D' = (n - 3, n - 4, \dots, 0, -1)$, která jistě není grafová (proč?). Proto alespoň dva lidé musí podat ruku stejněmu počtu lidí ve skupině. \checkmark

Cvičení

1.2.1. Dokažte Větu 1.1. indukcí vzhledem k počtu hran.

1.2.2. \heartsuit Kolik existuje 0-pravidelných grafů? Kolik z nich je souvislých (souvislost je zavedena na straně 31)?

1.2.3. Označme $v(G)$ počet vrcholů grafu G . Ukažte, že v každém grafu platí $\delta(G) \leq 2h(G)/v(G) \leq \Delta(G)$.

1.2.4. Ve firmě pracuje kromě ředitele i několik zaměstnanců. Mužů je mezi zaměstnanci o tři více než žen. Během doby se zaměstnanci mnohokrát stěhovali a sdíleli kanceláře. Víme, že jedenáct zaměstnanců již během doby sdílelo kancelář s dvěma kolegy, tři se čtyřmi kolegy a ostatní sdíleli kancelář s jedním, třemi nebo pěti kolegy (nevíme kolik jich je, jen víme, že takoví zaměstnanci ve firmě jsou). Ředitel má nyní kancelář sám pro sebe. Bylo tomu tak vždy?

1.2.5. Najděte algoritmus pro konstrukci grafu s danou stupňovou posloupností D . Využijte Větu Havla–Hakimiho.

1.2.6. Nechť G je k -pravidelný graf, kde k je liché číslo. Dokažte, že počet hran grafu G , $h(G)$, je násobkem čísla k . Platí to i v případě, že k je sudé? Co musí být splněno?

- 1.2.7. Nechť graf G má n vrcholů a $n-1$ hran. Ukažte, že G má buď vrchol stupně 1 nebo izolovaný vrchol.
- 1.2.8. Ukažte, že neexistují jednoduché grafy se stupňovými posloupnostmi $(3, 3, 3, 1)$ a $(3, 3, 3, 1, 1)$. Dokažte i bez použití věty Havla–Hakimiho.
- 1.2.9. Najděte všechny různé grafy se stupňovými posloupnostmi $(3, 3, 3, 1, 1, 1)$ a $(3, 3, 2, 2, 1, 1)$, přičemž nerozlišujeme pojmenování vrcholů.
- 1.2.10. Je možno Větu 1.1. zobecnit i pro jiné než jednoduché grafy? Pokud ano, pro které? Zobecněnou větu dokažte.
- 1.2.11. Existuje některý z grafů ze Cvičení 1.2.8., pokud se neomezíme na jednoduché grafy?
- 1.2.12. Kolik existuje 2-pravidelných grafů na patnácti vrcholech? Kolik z nich je souvislých?
- 1.2.13.[♡] Kolik existuje 3-pravidelných grafů na šesti vrcholech?
- 1.2.14.[♡] Kolik existuje různých 8-pravidelných grafů na deseti vrcholech?
- 1.2.15. Máme 25 mobilních stanic a každá může komunikovat s ostatními na 60 různých (společných) frekvencích, přičemž dvě různé dvojice stanic nemohou komunikovat současně na jedné frekvenci. Označme $f(G)$ nejmenší počet spojení, který udržuje nějaká stanice v síti. Navrhнete takovou síť, aby hodnota $f(G)$ byla co největší a ukažte, že síť s větší hodnotou $f(G)$ nemůže existovat.
- 1.2.16.[♡] Pro jaká n existuje graf na n vrcholech, který má vrcholy $n-1$ různých stupňů? (Tj. všechny vrcholy až na dva jsou různého stupně.)

1.3. Podgrafy

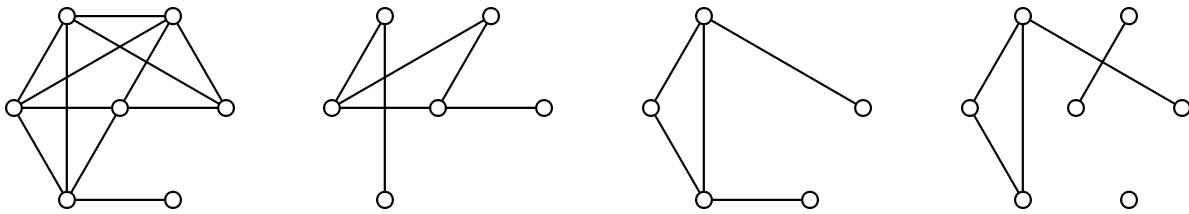
V předchozí podkapitole jsme v důkazu Věty 1.3. pracovali s grafem G a s grafem, který vznikl odstraněním některé hrany grafu G . Pracovali jsme s objektem, který bychom intuitivně nazvali „podgrafem“ grafu G . Nyní si pojem podgrafu korektně naefinujeme.

Definice Méjme dán graf $G = (V, E)$. Řekneme, že graf $H = (V', E')$ je *podgrafem* grafu G , jestliže $V' \subseteq V$ a současně $E' \subseteq E$.

Všimněte si, že definice je korektní. Ne každá dvojice podmnožin V' , E' tvoří podgraf grafu G . Je-li například V' jednoprvková a E' neprázdná, tak množina E' nemůže být systémem dvouprvkových podmnožin V' , protože s každou hranou, musí v grafu ležet oba její koncové vrcholy. V definici proto požadujeme, aby H byl graf.

Definice připouští i takový extrémní případ, kdy $V' = V$ a $E' = E$, neboli každý graf je svým podgrafem. Jestliže alespoň jedna z rovností není splněna (tj. alespoň jedna z množin V' , resp. E' je vlastní podmnožinou V , resp. E), říkáme, že H je *vlastním* podgrafem grafu G . V opačném případě říkáme, že graf H je *nevlastní* podgraf. Pro graf, který vznikne z grafu G vynecháním jedné hranы uv , zavedeme označení $G - uv$. Podobně graf, který vznikne z grafu G vynecháním jednoho vrcholu v a všech hran incidentních s tímto vrcholem, budeme značit $G - v$. Je-li N nějaká podmnožina vrcholů grafu G , tak symbolem $G - N$ značíme graf, který vznikne z G odebráním všech vrcholů v N a všech hran incidentních s těmito vrcholy. Podobně, je-li M nějaká podmnožina hran grafu G , tak symbolem $G - M$ značíme graf, který vznikne z G odebráním všech hran v M .

Dalším důležitým speciálním případem je podgraf, který obsahuje všechny vrcholy původního grafu (tj. $V' = V$). Takovému podgrafu říkáme *faktor*. Posledním speciálním případem podgrafa je *indukovaný podgraf*, který obsahuje všechny hrany původního grafu G , které jsou incidentní s vrcholy v množině V' . Ekvivalentně můžeme říci, že indukovaný podgraf H vznikne z grafu G případným vynecháním některých vrcholů a vynecháním pouze všech takových hran, které byly incidentní s některým vynechaným vrcholem. Třetí způsob, jak popsat indukovaný podgraf, je říci, že se jedná o takový podgraf H grafu G , který má ze všech podgrafů s vrcholovou množinou $V(H)$ největší počet hran.

Obrázek 1.11.: Graf G a jeho podgraf H , indukovaný podgraf I a faktor F .

Jestliže o grafu H říkáme, že je podgrafem grafu G , tak naopak graf G se nazývá *nadgraf* nebo také *supergraf* grafu H .

Otázky:

- Existuje takový graf G a takový jeho podgraf H , že H není faktorem grafu G , ani indukovaným podgrafem grafu G ?
- Může být graf H současně podgrafem i nadgrafem nějakého grafu G ?
- Může být graf H současně vlastním podgrafem grafu G i nadgrafem grafu G ?

Na straně 21 jsme zavedli cestu. Cestou G v grafu rozumíme takový podgraf grafu G , který je cestou. Zcela analogicky zavedeme cyklus v grafu, kliku v grafu i další podgrafy.

Cvičení

1.3.1. Dokažte, že pro každý graf G existuje takový jeho nadgraf N , že N je pravidelný stupně $\Delta(G)$ a G je indukovaný podgraf grafu N .

1.3.2. Může být indukovaný faktor F grafu G vlastním podgrafem grafu G ? Pokud ano, najděte příklad, pokud ne, dokažte.

1.3.3. Předpokládejme, že rozlišujeme jednotlivé vrcholy grafu G (například označením). Kolik různých faktorů má graf G ?

1.3.4. Předpokládejme, že rozlišujeme jednotlivé vrcholy grafu G (například označením). Kolik různých podgrafů má kompletní graf K_n ?

1.3.5. Předpokládejme, že rozlišujeme jednotlivé vrcholy grafu G (například označením). Kolik existuje různých grafů bez izolovaných vrcholů s vrcholovou množinou $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$?

1.3.6. Máme graf G , který neobsahuje vrchol stupně 0 ani žádný indukovaný podgraf s právě dvěma hranami. Ukažte, že G je kompletní graf.

1.3.7. Najděte chybu v následujícím důkazu:

Ukážeme, že každý bipartitní graf $G = (U \cup W, E)$ je podgrafem nějakého $\Delta(G)$ -pravidelného bipartitního grafu. Pokud nejsou partity U a W stejné velikosti, přidáme do menší partity tolik vrcholů, aby byly obě partity stejné velikosti. Jsou-li všechny vrcholy stejněho stupně, důkaz končí. Jinak najdeme ke každému vrcholu $u \in U$ stupně menšího než $\Delta(G)$ vrchol $w \in W$ stupně menšího než $\Delta(G)$, protože součet stupňů vrcholů v každé partitě je stejný. Nyní stačí spojit u a w hranou a zvýšme tak stupeň vrcholů u a w . Je-li výsledný graf pravidelný, důkaz končí, jinak přidáváme hrany dokud výsledný nadgraf nebude pravidelný.

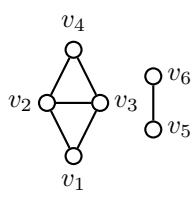
1.3.8. Kolik existuje indukovaných podgrafů s k vrcholy v kompletním grafu K_n ? Předpokládejme, že vrcholy kompletního grafu rozlišujeme (například označením).

1.4. Implementace grafů v počítači

Řešíme-li jednoduché úlohy pro malé grafy, nejnázornější je obvykle nakreslit diagram příslušného grafu a úlohu vyřešit ručně. Avšak už pro graf s více než dvaceti vrcholy může být diagram hustého grafu značně nepřehledný. Pokud uvažujeme o implementaci v počítači, je nutné zvolit vhodný formát pro uložení grafu. Přitom musíme uvážit jednak jak bude konkrétní graf do počítače vkládán a jednak jaké operace se budou při řešení úlohy používat. Existuje několik základních struktur, které se používají pro implementace grafů.

Incidenční matice

Mějme dán graf G . *Incidenční matici* $B(G)$ je obdélníková matici s $v(G)$ řádky a $h(G)$ sloupci. Vrcholy grafu G označíme v_1, v_2, \dots, v_n a hrany e_1, e_2, \dots, e_m . Každému vrcholu grafu G odpovídá jeden řádek matici B a každé hraně grafu G jeden sloupec matici B . Prvek b_{ij} matici B nabývá hodnoty 1 právě tehdy, když vrchol v_i je incidentní s hranou e_j . V opačném případě je $b_{ij} = 0$. Je snadné si uvědomit, že pro jednoduché grafy dává součet čísel v každém sloupci incidenční matici vždy 2 a součet čísel v i -té řádku dává stupeň vrcholu v_i . Incidenční matici je proto velmi rozsáhlá a řídká. Obsahuje jen $2m$ jedniček z celkového počtu mn prvků. Příklad grafu G a jeho incidenční matice je na Obrázku 1.12.



$$B(G) = \begin{pmatrix} v_1 & v_1v_2 & v_1v_3 & v_2v_3 & v_2v_4 & v_3v_4 & v_5v_6 \\ v_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obrázek 1.12.: Graf G a jeho incidenční matici.

Matice sousednosti

Úspornější využití paměti pro husté grafy získáme uložením grafu v *matici sousednosti*. Vrcholy grafu G opět označíme v_1, v_2, \dots, v_n . Matice sousednosti $A(G)$ je čtvercová matici řádu n , ve které je prvek $a_{ij} = 1$ právě když jsou vrcholy v_i a v_j sousední. V opačném případě je $a_{ij} = 0$.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jel-li } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je zřejmé, že matice $A(G)$ je pro jednoduché grafy symetrická a že součet čísel v i -té řádku (v i -té sloupci) matice $A(G)$ je roven stupni vrcholu v_i . Matice sousednosti grafu G z Obrázku 1.12. je

$$A(G) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ v_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seznam sousedů

Graf můžeme reprezentovat i pomocí seznamů sousedních vrcholů. Pro každý vrchol v_i , $i = 1, 2, \dots, n$, grafu G vytvoříme seznam (pole) vrcholů, například $\mathbf{a}_i[]$, které jsou s vrcholem v_i sousední. Každé pole bude mít $\deg(v_i)$ položek. Je vhodné vytvořit pomocné pole (například $\mathbf{deg}[]$), jehož i -tá položka bude obsahovat stupeň vrcholu v_i . Prvky $\mathbf{a}_i[1]$, $\mathbf{a}_i[2]$, \dots , $\mathbf{a}_i[\deg[i]]$ obsahují vrcholy (nebo jejich indexy) sousední s vrcholem v_i . Seznam stupňů vrcholů a seznamy sousedů vrcholů grafu G z Obrázku 1.12. jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{deg}[] &= [2, 3, 3, 2, 1, 1], & \mathbf{a}_1[] &= [v_2, v_3], \\ && \mathbf{a}_2[] &= [v_1, v_3, v_4], \\ && \mathbf{a}_3[] &= [v_1, v_2, v_4], \\ && \mathbf{a}_4[] &= [v_2, v_3], \\ && \mathbf{a}_5[] &= [v_6], \\ && \mathbf{a}_6[] &= [v_5]. \end{aligned}$$

Všimněte si, že má-li graf h hran, budou seznamy polí obsahovat celkem $2h$ položek, neboť každá hrana $v_i v_j$ se v seznamech uložena dvakrát. Jednou jako vrchol v_j v poli $\mathbf{a}_i[]$ a podruhé jako vrchol v_i v poli $\mathbf{a}_j[]$.

Jestliže implementujeme algoritmus, který bude zpracovávat obecný řídký graf, tak pro seznamy sousedů může být vhodnejší použít místo polí dynamické linkované seznamy. Výhodou je, že strukturu grafu můžeme v průběhu algoritmu snadno modifikovat. Položky seznamu můžeme vyřadit nebo do seznamu zařadit nové. Nevýhodou je časová náročnost vyhledání konkrétní hrany. Naproti tomu použijeme-li pole, můžeme (už

při vytvoření) seřadit seznamy sousedů podle pevně zvoleného klíče a pro vyhledání použít binární dělení. Nevýhodou polí je náročná úprava takové struktury v průběhu algoritmu.

Ohodnocené grafy

Pokud pracujeme s grafem, který je *ohodnocený* (tj. hranám nebo vrcholům jsou přiřazena nenulová čísla), je možné modifikovat matici sousednosti. Místo jedniček položíme každý prvek a_{ij} rovno ohodnocení hrany $v_i v_j$. Nenulová ohodnocení vrcholu v_i můžeme uložit na hlavní diagonálu v prvku a_{ii} . Stupeň vrcholu v_i je pak počet nenulových prvků v řádku (sloupci) s výjimkou prvku a_{ii} matice sousednosti. Jestliže nula je přípustná hodnota pro ohodnocení vrcholů nebo hran, tak buď použijeme druhou pomocnou matici, ve které budou na odpovídajících pozicích uloženo ohodnocení, nebo zvolíme jinou „zakázanou“ číselnou hodnotu, kterou použijeme v matici tam, kde hrana není nebo chybí ohodnocení vrcholu.

Podobně ohodnocení hran můžeme do incidenční matice uložit do nového (přidaného) řádku. Jestliže jsou ohodnocené vrcholy grafu, můžeme přidat další sloupec do incidenční matice. Pokud jsou hrany nebo vrcholy ohodnoceny více funkcemi, můžeme přidat více řádků nebo sloupčů.

V případě komplikovanějších ohodnocení už nevystačíme s jednoduchou strukturou, můžeme využít složitější datové struktury. Každý vrchol nebo hrana může být strukturovaný datový typ, jehož položky mohou sloužit k implementaci sousednosti, incidence i ohodnocení. Množina vrcholů může být uložena jako linkovaný seznam vrcholů, množina hran jako linkovaný seznam hran. Vazby mezi oběma strukturami vybereme v závislosti na konkrétní úloze tak, aby vyhledávání nebo jiné často používané operace v grafu byly co nejefektivnější.

Cvičení

1.4.1. Definujte incidenční matici a matici sousednosti multigrafu se smyčkami. Čemu se rovná součet i -tého řádku a čemu součet j -tého sloupce v incidenční matici a čemu v matici sousednosti?

1.4.2. Může mít incidenční matici jednoduchého grafu dva shodné řádky nebo sloupce? Jak je tomu u multigrafu?

1.4.3. Najděte takový souvislý graf na n vrcholech, že každá mocnina matice sousednosti bude mít nějaké nulové prvky.

Kapitola 2. Cesty a cykly v grafu

Pokud graf reprezentuje nějakou síť (silniční, železniční, elektrickou, ...), tak je přirozené zkoumat, jak je možno v grafu putovat. Mezi vrcholy grafu, který reprezentuje danou síť, je dovoleno putovat jen po hranách grafu. Dospějeme k zavedení pojmu sled, tah a cesta. V druhé části kapitoly ukážeme, jak měřit vzdálenosti v grafu. V poslední části se budeme věnovat nejmenší a největší vzdálenosti mezi dvěma vrcholy v grafu a také vztahům mezi těmito parametry.

2.1. Sledy, tahy a cesty

Definice *Sled v grafu G je taková posloupnost vrcholů a hran*

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n), \quad (3)$$

že hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1} a v_i pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$. Sled (3) se nazývá (v_0, v_n) -sled.

Sled v grafu můžeme chápat jako záznam putování nebo bloudění v grafu. Všimněte si, že vrcholy i hrany ve sledu se mohou opakovat, a to i vícekrát. Vrchol v_0 se nazývá *počáteční* a vrchol v_n *koncový* vrchol (v_0, v_n) -sledu (3). Ostatní vrcholy, pokud existují, jsou *vnitřní* vrcholy sledu. Vnitřním vrcholům sledu se někdy říká *interní*. Pokud je $v_0 = v_n$ pro kladné n , řekneme, že sled v grafu je *uzavřený*. Pro jednoduché grafy není nutné explicitně uvádět hrany sledu, protože mezi libovolnými dvěma vrcholy grafu existuje vždy nejvýše jedna hrana, která je jednoznačně určena dvojicí koncových vrcholů. Pokud nebude výslovňě řečeno jinak, omezíme se na jednoduché grafy a hrany sledu nebudeme dále vypisovat. Sled (3) pak budeme zapisovat stručně bez závorek v_0, v_1, \dots, v_n .

Délka sledu budeme rozumět počet hran, které se ve sledu vyskytují, přičemž každou hranu započítáme tolikrát, kolikrát se v posloupnosti objeví. Definice, tak jak je zformulovaná, nepřipouští sledy nekonečné délky (proč?). Na druhou stranu podle definice můžeme snadno definovat délku (v_0, v_n) -sledu (3) jako n . Obecnější definice sledu a délky sledu je ponechána jako cvičení.

Definice *Tah* je sled, ve kterém se *zádná* hrana neopakuje. *Tah s počátečním vrcholem u a koncovým vrcholem v* budeme nazývat (u, v) -tah.

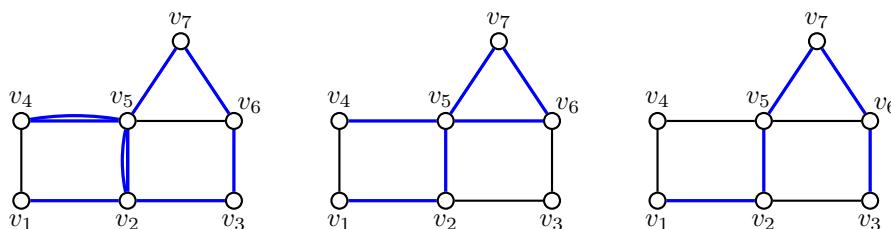
Slovo „tah“ souvisí s kreslením jedním tahem. Podrobněji se tomu tématu budeme věnovat v kapitole 10. V tahu se nemohou opakovat hrany, vrcholy se však opakovat mohou. Protože tah je speciální případ sledu, tak definice koncových, vnitřních vrcholů a uzavřeného tahu je analogická jako pro sled. *Délka tahu* je opět počet hran tahu, dokonce nemusíme uvažovat opakující se hrany.

Definice *Cesta* je sled, ve kterém se *neopakují* vrcholy. *Cestu s počátečním vrcholem u a koncovým vrcholem v* budeme nazývat (u, v) -cesta.

Některí autoři důsledně rozlišují mezi pojmy *had* jako graf a *cesta* jako podgraf nějakého grafu. V tomto textu budeme pracovat jen s termínem cesta, z kontextu bude zřejmé, o který z obou významů se jedná. Zavedení pojmu koncových vrcholů, vnitřních vrcholů a *délky cesty* v grafu je analogické. Cestu délky $n - 1$ budeme značit P_n . Sled délky 0 (neobsahuje žádnou hranu) se nazývá *triviální sled* nebo *triviální cesta*. Nejkratší netriviální cesta (hrana spolu s oběma koncovými vrcholy) je délky 1.

V cestě se nemohou opakovat ani hrany ani vrcholy. Výjimkou je, pokud hovoříme o *uzavřené cestě* v grafu, neboli o *cyklu v grafu*. Jsou-li u, v sousední vrcholy v grafu G a P_n je nějaká (u, v) -cesta v G , která neobsahuje hranu uv , pak cesta P_n spolu s hranou uv tvoří cyklus C_n v grafu G . Při popisu cyklu C_n stačí zadat jen posloupnost n vrcholů, poslední (opakující se) vrchol obvykle nezapisujeme.

V grafu na Obrázku 2.1. je vlevo příklad sledu $v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5, v_4, v_5$, uprostřed je příklad tahu $v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_5, v_4$ a vpravo je příklad cesty $v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_3$. Každá cesta je tahem a každý tah je sledem. Opačné implikace obecně neplatí.



Obrázek 2.1.: Příklad sledu, tahu a cesty v grafu.

Při důkazu řady tvrzení využijeme následující tvrzení.

Lemma 2.1. *Existuje-li v grafu G mezi dvěma vrcholy (u, v) -sled, potom v G existuje také (u, v) -cesta.*

Důkaz je ponechán jako cvičení (Cvičení 2.1.2.). Postup, kdy ze sledu nebo z tahu S vymecháme hrany a dostaneme kratší sled, res. tah S' , se často používá. Říkáme, že dostaneme *pod sled*, resp. *pod tah* S' tahu S . Hrany podsledu S' nemusí ve sledu S následovat *bezprostředně* za sebou, avšak posloupnost vrcholů a hran podsledu tvoří podposloupnost v posloupnosti vrcholů a hran sledu S v *tomto pořadí*. Například sled $S_1 = v_1, v_2, v_5, v_7, v_6, v_3, v_2, v_5, v_4, v_5$, který je vlevo na Obrázku 2.1., obsahuje cestu v_1, v_2, v_5, v_4 , kterou dostaneme vymecháním úseku v_7, v_6, v_3, v_2, v_5 a úseku v_4, v_5 . Naproti tomu sled S_1 *neobsahuje* cestu v_1, v_2, v_3 , proč?

Sledy a cykly

Pro uzavřené sledy liché délky platí následující tvrzení.

Lemma 2.2. *Každý uzavřený sled liché délky obsahuje cyklus liché délky.*

Důkaz. Tvrzení ukážeme indukcí vzhledem k počtu hran.

Základ indukce: V jednoduchém grafu je nejkratší uzavřený sled liché délky 3. V takovém sledu se nemůže žádná hrana opakovat a jedná se o cyklus.

Indukční krok: Mějme nějaký uzavřený sled S liché délky k a předpokládejme, že pro všechny sledy liché délky menší než k tvrzení platí. Pokud se v uzavřeném sledu S neopakuje žádný vrchol, je samotný sled S cyklem liché délky a tvrzení platí. Pokud se nějaký vrchol v v uzavřeném sledu S opakuje alespoň dvakrát, rozdělíme uzavřený sled S na dva uzavřené (v, v) -sledy. Protože sled S je liché délky, je jeden z těchto sledů sudé délky a druhý je liché délky. Sled liché délky je kratší než S a podle indukčního předpokladu obsahuje lichý cyklus. \square

Je zajímavé si uvědomit, že uzavřený sled sudé délky může vzniknout pouze opakováním hran (a koncových vrcholů) a nemusí obsahovat žádný cyklus. Vyskytuje-li se však v uzavřeném sledu libovolné délky některá hrana jen jednou (například v tahu), tak takový sled musí obsahovat cyklus. Důkaz tohoto tvrzení je ponechán jako Cvičení 2.1.5.

Cvičení

2.1.1. Zformulujte definici sledu tak, aby připouštěla existenci i nekonečného sledu. Pro konečné grafy by měl smysl definice zůstat zachován. Jak bude definována délka sledu?

2.1.2. Dokažte Lemma 2.1.: existuje-li v grafu G mezi dvěma vrcholy (u, v) -sled, potom v G existuje také (u, v) -cesta. Návod: Dokažte silnější tvrzení, že z každého (u, v) -sledu můžeme případným vymecháním vrcholů (a hran) dostat (u, v) -cestu.

2.1.3. Dokažte, že v jednoduchém grafu G vždy existuje cesta délky $\delta(G)$.

2.1.4.° Najděte nějaký graf G a takový uzavřený sled S v grafu G , že S neobsahuje cyklus.

2.1.5. Dokažte, že vyskytuje-li se v uzavřeném sledu S některá hrana pouze jednou, tak sled S obsahuje cyklus.

2.1.6.° Najděte příklad grafu G a vrcholu $v \in V(G)$ tak, že $\delta(G - v) > \delta(G)$.

2.1.7. Najděte příklad grafu G a vrcholu $v \in V(G)$ tak, že $\delta(G) = m$ a $\delta(G - v) = k$ pro libovolná čísla $k, m \in \mathbb{N}$, kde $k \geq m$.

2.1.8. Kolik různých cest existuje v kompletním grafu K_n mezi dvěma různými vrcholy u a v ?

2.2. Souvislost a vzdálenost v grafu

Souvislost a dosažitelnost

Jestliže vrcholy grafu reprezentují reálné objekty a hrany vztahy mezi nimi, tak je přirozené se ptát, zda graf tvoří jeden celek nebo zda se skládá z několika částí, které spolu nesouvisí. Dospějeme tak přirozeně k pojmu souvislosti.

Definice Souvislost

Řekneme, že vrchol v je *dosažitelný* z vrcholu u v grafu G , jestliže v G existuje (u, v) -sled. Graf je *souvislý*, jestliže pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V(G)$ existuje (u, v) -sled. V opačném případě je graf *nesouvislý*.

Můžeme říci, že graf je souvislý, jestliže každý vrchol v je dosažitelný z každého vrcholu u , případně z jednoho pevně zvoleného vrcholu u . V Kapitole 5. budeme dokonce rozlišovat „jak moc“ je graf souvislý. Jestliže graf není souvislý, tak je možno jej rozdělit na několik souvislých indukovaných podgrafů.

Definice Komponenta grafu

Řekneme, že L je komponenta grafu G , jestliže je L souvislý podgraf grafu G a současně pro každý souvislý podgraf W grafu G platí, že W je podgraf L a nebo vrcholové množiny W a L jsou disjunktní. Počet komponent grafu G značíme $\omega(G)$.

Na Obrázku 2.2. vlevo je souvislý graf, vpravo je nesouvislý graf se třemi komponentami.



Obrázek 2.2.: Souvislý graf a nesouvislý graf se třemi komponentami.

Zavedeme relaci *dosažitelnost* \simeq tak, že dva vrcholy v grafu jsou v relaci \simeq , jestliže jsou navzájem dosažitelné. Tato relace je relací ekvivalence (Cvičení 2.2.2.). Alternativně můžeme vrcholovou množinu každé komponenty definovat jako třídu rozkladu příslušného relaci \simeq a samotná komponenta bude podgraf indukovaný na této třídě. Graf je souvislý, má-li relace \simeq jedinou třídu rozkladu. Není těžké si rozmyslet, že obě definice jsou ekvivalentní.

Vzdálenost v grafu

V grafu, který reprezentuje komunikační síť, je velmi přirozené zjistit, jak blízko jsou jednotlivé vrcholy. Vzdálenost měříme délkou cest.

Definice Vzdálenost v grafu

Vzdálenost vrcholu u od vrcholu v (nebo vzdálenost mezi vrcholy u a v) v grafu G je délka nejkratší (u, v) -cesty. Značíme ji $\text{dist}(u, v)$, případně $\text{dist}_G(u, v)$. Jestliže vrchol v není dosažitelný z u , definujeme $\text{dist}(u, v) = \infty$.

Někdy se vzdálenost mezi vrcholy u a v značí jen $d(u, v)$. Všimněte si, že v definici můžeme nahradit slovo „cesta“ slovem „sled“ a význam definice zůstane zachován. Protože nejkratší sled je vždy cestou, je uvedená definice praktičtější. Všimněte si, že takový nejkratší (u, v) -sled existuje vždy, když existuje alespoň jeden (u, v) -sled, tj. když není $\text{dist}(u, v) = \infty$.

Metrika

V matematice je *metrika* taková funkce ρ , která přiřazuje vzdálenost každé dvojici prvků z dané množiny A . Množina A spolu s s metrikou ρ se nazývá *metrický prostor*.

Definice Metrika ρ na množině A je zobrazení $\rho : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že $\forall x, y \in A$ platí

- $\rho(x, y) \geq 0$ přičemž $\rho(x, y) = 0$ jen pro $x = y$,
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

S různými metrikami se setkáváme i v analýze (funkce absolutní hodnoty), geometrii (eukleidovská vzdálenost) a algebře (normy). Vzdálenost v grafu zavedená v Definici 2.2. je metrika. Důkaz tohoto tvrzení je ponechán jako Cvičení 2.2.4.

Cvičení

2.2.1. Ukažte, že počet různých (u_i, u_j) -sledů délky k v grafu G je roven prvku a'_{ij} (v jiném značení $[A(G)^k]_{ij}$) matice $A(G)^k$, kde $A(G)$ je matice sousednosti grafu G a $A(G)^k$ je její k -tá mocnina, $k \in \mathbb{N}$.

2.2.2. Ukažte, že relace \simeq („být dosažitelný“) zavedená v textu na straně 32 je relací ekvivalence.

2.2.3. Na straně 31 byl na definován pojem souvislosti užitím sledů a alternativně užitím tříd ekvivalence relace dosažitelnosti \simeq (zavedena na straně 32). Ukažte, že obě definice souvislosti jsou ekvivalentní.

2.2.4. Ukažte, že vzdálenost v souvislých grafech je metrika.

2.2.5. Dokažte, že $G = (V, E)$ je souvislý právě tehdy, když pro libovolný rozklad vrcholové množiny V na dvě množiny U a W existuje hrana $e = uw \in E$ taková, že $u \in U$ a $w \in W$. (Neprázdné množiny U a W tvoří rozklad V , jestliže $U \cup W = V$ a $U \cap W = \emptyset$).

2.2.6.* Kolik nejvíce hran může mít graf s n vrcholy a k komponentami? Dokažte.

2.2.7. Dokažte, že je-li $\delta(G) > \lfloor v(G)/2 \rfloor - 1$, tak graf G je souvislý.

2.2.8. Najděte takové sudé číslo n a takový nesouvislý graf G , že $n = v(G)$ a G je pravidelný graf stupně $(n/2 - 1)$.

2.2.9. Nechť u je vrchol lichého stupně v grafu G . Ukažte, že potom v G existuje (u, v) -cesta do vrcholu v , který je také lichého stupně.

2.2.10. Máme osmi litrovou nádobu s vímem a dvě prázdné nádoby – pětilitrovou a třílitrovou. Rozdělte osm litrů na čtyři a čtyři litry jen s užitím těchto nádob, bez použití odměrky. Úlohu namodelujte grafem a najděte nejkratší řešení a popište všechna přípustná řešení.

2.2.11. Změňte objem a) třílitrové b) pětilitrové nádoby tak, aby úloha ze Cvičení 2.2.10. neměla řešení. Najděte jiná než triviální řešení, kdy jsou některé dvě nádoby stejně velké.

2.2.12.* Kolik různých (u, v) -sledů délky k existuje mezi některými dvěma vrcholy u, v v grafu a) C_4 , b) C_5 , c) K_4 ?

2.3. Excentricita, poloměr a průměr grafu

Vzdálenost mezi dvěma vrcholy v grafu měříme jako délku nejkratší cesty mezi nimi. Při řešení praktických problémů má smysl se podívat na extrémní vzdálenosti v grafu. S tím souvisí následující definice.

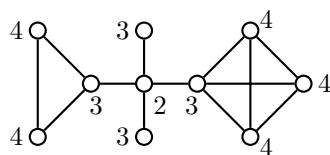
Definice Mějme graf G a vrchol $v \in V(G)$. Excentricita vrcholu v je největší ze všech vzdáleností v od ostatních vrcholů v G . Excentricitu značíme $\text{ecc}(v)$, případně $\text{ecc}_G(v)$.

Stručně můžeme zapsat

$$\text{ecc}(v) = \max_{u \in V(G)} \{\text{dist}(u, v)\}.$$

Uvědomte si, že v předchozí definici je vrchol v pevně daný, zatímco vrchol u je libovolný vrchol grafu G . Příslušné maximum je pak určeno pro každý vrchol v jednoznačně.

Excentricitě vrcholu se v literatuře říká také výstřednost vrcholu. V souvislých grafech je excentricita vrcholu v měřítkem, jak „daleko“ je k ostatním vrcholům v grafu (Obrázek 2.3.). Aby v grafu existovaly vrcholy s velkou excentricitou, musí mnoho hran v grafu chybět. Grafy s velkou excentricitou některých vrcholů jsou řídké, například stromy a cykly.



Obrázek 2.3.: Graf s vyznačenými excentricitami vrcholů.

Vrcholy s velkou excentricitou leží „na kraji“ grafu a vrcholy s malou excentricitou leží „uvnitř grafu“. Množina vrcholů, ze kterých je „blízko“ do všech ostatních vrcholů, je jakýmsi centrem grafu. Tuto vlastnost můžeme formalizovat.

Definice Centrum grafu je podgraf indukovaný na množině vrcholů s nejmenší excentricitou.

V grafu může existovat několik vrcholů, které mají nejmenší excentricitu (například v cyklu). Všimněte si, že podle uvedené definice je centrum grafu více než jen množina vrcholů, jedná se o podgraf daného grafu. V některé literatuře se centrum grafu definuje jen jako množina vrcholů s nejmenší excentricitou.

Otzázkы:

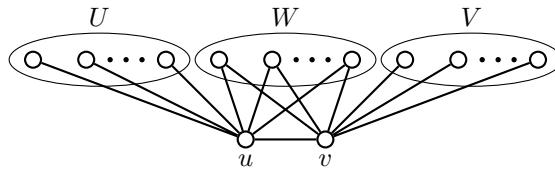
- Jaká je excentricita vrcholu v nesouvislém grafu?
- Může centrum grafu obsahovat více vrcholů, než je zbývajících vrcholů v grafu?
- Může centrum grafu G být totožné s celým grafem G ?
- Může centrum grafu být nesouvislý podgraf?
- Je rozdíl mezi vrcholem s nejmenší excentricitou a vrcholem s minimální excentricitou?

Definice Největší excentricita v grafu G se nazývá *průměr* grafu a nejmenší excentricita se nazývá *poloměr* grafu G . Průměr grafu G se značí $\text{diam}(G)$ a poloměr $\text{rad}(G)$ (*diametr a rádius*).

Průměr grafu se v některé literatuře nazývá *excentricita grafu*. Zatímco excentricita je vlastnost vrcholu, tak poloměr a průměr jsou vlastnosti grafu. Jestliže průměr grafu G je roven číslu k , tak musí v grafu G existovat takové dva vrcholy u a v , že jejich vzdálenost je k , tj. délka nejkratší (u, v) -cesty je k . Takové cestě říkáme *diametrická cesta*. Je přirozené očekávat, že čím je v grafu více hran, tím menší je průměr grafu a naopak grafy s velkým průměrem jsou řídké. Také je zřejmé, že graf a jeho doplněk nemohou oba mít „málo hran“. Následující věta pak ukazuje, že graf a jeho doplněk nemohou mít současně velké průměry.

Věta 2.3. *Je-li G graf s průměrem $\text{diam}(G) \geq 3$, pak platí $\text{diam}(\bar{G}) \leq 3$.*

Důkaz. Jestliže graf G má průměr $\text{diam}(G) > 2$, tak v G existují nesousední vrcholy u a v , které nemají v G žádného společného souseda a $\text{ecc}_G(u) = \text{ecc}_G(v) = 3$. Všechny zbývající vrcholy můžeme rozdělit do tří množin U , V a W . Do U dáme všechny vrcholy, které nejsou v G sousední s u a jsou sousední s v . Do V patří všechny vrcholy, které nejsou v G sousední s v a jsou sousední s u . A konečně do W dáme všechny vrcholy, které nejsou v G sousední ani s u ani s v . V doplňku \bar{G} jsou nyní všechny vrcholy v U sousední s u , u je sousední s v a všechny vrcholy z V jsou sousední s v . Vrcholy z W jsou v doplňku \bar{G} sousední s oběma vrcholy u a v (Obrázek 2.4.). Některá z množin může být i prázdná, a proto $\text{diam}(\bar{G}) \leq 3$. \square



Obrázek 2.4.: Průměr doplňku \bar{G} .

Ve Cvičení 2.3.8. ukážeme, že je-li průměr grafu alespoň 4, tak průměr doplňku je dokonce nejvýše 2. Následující věta ukazuje, že poloměr a průměr splňují nerovnosti, které bychom mohli nazvat intuitivní.

Věta 2.4. *V každém grafu G platí $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \text{ rad}(G)$.*

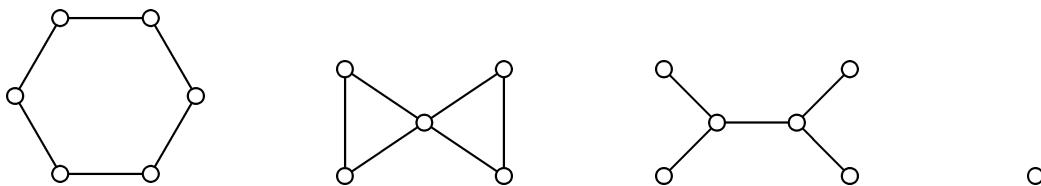
Důkaz. První nerovnost plyne ihned z definice poloměru a průměru grafu. Při důkazu druhé nerovnosti využijeme, že vzdálenost v grafu je metrika (Cvičení 2.2.4.).

Mějme libovolný vrchol c z centra grafu. Podle definic centra a poloměru je jeho excentricita $\text{ecc}(c) = \text{rad}(G)$. Průměr je největší z excentricit vrcholů a tato excentricita je realizována nějakou dvojicí vrcholů u, v . Pro libovolnou dvojici vrcholů u, v v grafu G však platí (s využitím trojúhelníkové nerovnosti)

$$\text{dist}(u, v) \leq \text{dist}(u, c) + \text{dist}(c, v) \leq \text{ecc}(c) + \text{ecc}(c) = 2 \text{ rad}(G)$$

a proto $\text{diam}(G) \leq 2 \text{ rad}(G)$. \square

Pro každou z nerovností ve Větě 2.4. (případně žádnou nebo i obě) může nastat rovnost. Příklady takových grafů jsou na Obrázku 2.5. Ve Cvičení 2.3.3. ukážeme, že obě hodnoty $\text{rad}(G)$ a $\text{diam}(G)$ mohou nabývat libovolných hodnot v mezích stanovených Větou 2.4.



Obrázek 2.5.: Příklady grafů s různými vztahy mezi poloměry a průměry.

Cvičení

- 2.3.1. Ukažte, že doplněk nesouvislého grafu je souvislý.
- 2.3.2. Určete poloměr a průměr následujících grafů: a) grafy na Obrázku 2.5., b) kompletní graf K_n , c) Q_n hyperkrychle řádu n .
- 2.3.3. Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla n, m , která splňují podmínu $n \leq m \leq 2n$, existuje takový graf G , že $\text{rad}(G) = n$ a $\text{diam}(G) = m$.
- 2.3.4. Mějme dáno přirozené číslo k . Najděte příklad grafu, ve kterém má centrum k komponent.
- 2.3.5. Mějme dáno přirozené číslo d . Najděte příklad grafu G , ve kterém je centrum tvořeno dvěma vrcholy jejichž vzdálenost v grafu G je d .
- 2.3.6.^\diamond Ukažte, že je-li graf H podgrafem grafu G , tak pro každé dva vrcholy z $V(H)$ platí $\text{dist}_G(u, v) \leq \text{dist}_H(u, v)$.
- 2.3.7.^\diamond Najděte takový příklad grafu G a jeho podgrafa H , že a) $\text{diam}(G) < \text{diam}(H)$, b) $\text{diam}(G) > \text{diam}(H)$.
- 2.3.8. Ukažte, že je-li G graf s průměrem $\text{diam}(G) \geq 4$, tak potom platí $\text{diam}(\overline{G}) \leq 2$.
- 2.3.9. Ukažte, že je-li G graf s poloměrem $\text{rad}(G) \geq 3$, tak potom platí $\text{rad}(\overline{G}) \leq 2$.
- 2.3.10. Ukažte, že excentricita dvou sousedních vrcholů se liší nejvýše o jedna.
- 2.3.11. Platí některá z následujících implikací? a) Je-li graf pravidelný, pak všechny jeho vrcholy mají stejnou excentricitu. b) Mají-li všechny vrcholy daného grafu stejnou konečnou excentricitu, pak se jedná o pravidelný graf.
- 2.3.12. Máme dán graf G . Najděte takový jeho nadgraf N , že G je centrem grafu N .

Kapitola 3. Stromy a cykly

Stromy patří ke strukturám, se kterými se setkáváme nejen v přírodě, ale i v řadě aplikací: třídící a rozhodovací algoritmy, rodokmeny, ... Všechny příklady mají jedno společné: příslušná struktura neobsahuje (nebo by neměla obsahovat) objekty spojené „v kruhu“. Takový „uzavřený kruh“ nebo „cyklus“ by odpovídal nekonečné smyčce v algoritmu, incestu v rodině, a podobně.

3.1. Stromy

V této kapitole se budeme věnovat strukturám, které neobsahují cyklus. Ukážeme, že právě tato jednoduchá podmínka stačí, abychom popsali strukturu „stromu“.

Definice Graf se nazývá *acyklický*, jestliže žádný jeho podgraf není cyklus. Souvislý acyklický graf se nazývá *strom*. Acyklický graf se nazývá *les*.

Strom budeme obvykle označovat T , případně T_n , pokud budeme chtít zdůraznit, že se jedná o strom na n vrcholech.

Podle definice je les graf, jehož každá komponenta je stromem. To je snadné si zapamatovat. Definici bychom mohli alternativně vyslovit takto: acyklický graf je les, souvislý les je strom⁵, což se pamatuje jen o málo hůř.

Ačkoli je definice stromu poměrně jednoduchá, jeho struktura je natolik zajímavá, že můžeme vyslovit celou řadu netriviálních tvrzení. Začneme dvěma jednoduchými pozorováními, které využijeme při (indukčních) důkazech celé řady dalších tvrzení.

Lemma 3.1. *Každý strom s alespoň dvěma vrcholy má nejméně jeden vrchol stupně 1.*

Důkaz. Důkaz povedeme sporem. Vezměme nějakou nejdelší cestu $P = v_1, v_2, \dots, v_k$ v grafu T_n . Pokud by T_n neobsahoval žádný vrchol stupně 1 (a protože má alespoň dva vrcholy, tak ani stupně 0), musí být koncový vrchol v_k cesty P stupně alespoň 2. Vrchol v_k má tedy kromě vrcholu v_{k-1} ještě jednoho souseda mezi vrcholy v_1, v_2, \dots, v_{k-2} , jinak by nebyla P nejdelší. Označme jej v_ℓ . Potom ale $v_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_k, v_\ell$ tvoří cyklus v T_n , což je ve sporu s definicí stromu. □

Strom s jediným vrcholem se nazývá *triviální strom*. V opačném případě budeme strom nazývat *netriviální*. Vrchol stupně 1 v grafu se nazývá *list*. Triviální strom je natolik výjimečný, že někteří autoři jej za strom nepovažují, protože celá řada tvrzení platí pro všechny stromy s výjimkou triviálního stromu. Lemma 3.1. můžeme přeformulovat: v každém netriviálním stromu existuje alespoň jeden list. Ve Cvičení 3.1.1. ukážeme, že v každém netriviálním stromu existují dokonce alespoň dva listy.

Lemma 3.2. *Odebráním libovolného listu z netriviálního stromu na n vrcholech dostaneme strom na $n - 1$ vrcholech.*

Důkaz. Budě v libovolný list netriviálního stromu T_n . Označíme $T_{n-1} = T_n - v$. List v se jistě nenachází na žádné cestě, která spojuje nějaké dva jiné vrcholy x, y stromu T_n . Proto je každá (x, y) -cesta v T_n také v T_{n-1} a T_{n-1} souvislý. Navíc odebráním jednoho vrcholu a jedné hrany jistě nevznikne cyklus. Ukázali jsme, že graf T_{n-1} je souvislý a acyklický a je proto stromem na $n - 1$ vrcholech. □

Definice stromu je sice výstižná, není ale šikovná pro algoritmické ověření, zda daný graf je nebo není strom. Existenci cyklu v grafu není snadné pro velké grafy vyvrátit. Následující věta udává další čtyři podmínky, které jsou ekvivalentní definici stromu. Jedná se o šikovný arzenál podmínek pro ověřování, zda nějaký graf je nebo není strom.

Věta 3.3. *Nechť T_n je graf na n vrcholech. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- (i) T_n je strom,
- (ii) T_n je acyklický a souvislý,

5

Některé druhy stromů mají několik kmenů, které vyrůstají ze společného kořenového systému. Jednotlivé stromy (kmeny) jsou proto geneticky identické a je možno je považovat za jeden organismus. Největší známá taková kolonie je osika ve státě Utah, které se říká „Pando“. Tento „souvislý les“ roste na rozloze přibližně 0.43 km^2 . Odhaduje se, že celková váha živé hmoty je asi 6 000 tun.

Viz také http://en.wikipedia.org/wiki/Largest_organism.



- (iii) T_n je acyklický a má $n - 1$ hran,
 (iv) T_n je souvislý a má $n - 1$ hran,
 (v) T_n je souvislý a vynecháním libovolné hrany se souvislost poruší.

Důkaz. Tvrzení (i) a (ii) jsou ekvivalentní, protože se jedná o definici stromu. Dále ukážeme platnost implikací (ii) \Rightarrow (iii), (iii) \Rightarrow (iv), (iv) \Rightarrow (ii) a nakonec (ii) \Rightarrow (v) a (v) \Rightarrow (ii). Tím bude důkaz kompletní (proč?).

„(ii) \Rightarrow (iii)“ Stačí ukázat, že strom má $n - 1$ hran. Tvrzení dokážeme indukcí vzhledem k počtu vrcholů.
Základ indukce: Triviální strom má $n - 1 = 0$ hran.

Indukční krok: Netriviální strom T_n na n vrcholech musí obsahovat list v (podle Lemmatu 3.1.) a jeho odebráním (a odebráním jediné incidentní hrany) dostaneme podle Lemmatu 3.2. strom $T_{n-1} = T_n - v$ na $n - 1$ vrcholech, který má dle indukčního předpokladu $n - 2$ hran. Strom T_n má proto $n - 2 + 1 = n - 1$ hran a tvrzení platí.

„(iii) \Rightarrow (iv)“ Stačí ukázat, že acyklický graf s $n - 1$ hranami je souvislý. Předpokládejme, že T_n má k komponent S_1, S_2, \dots, S_k . Každá komponenta je souvislá a podle předpokladu také acyklická a je proto strom. Počet vrcholů komponenty S_i označíme n_i , kde $i = 1, 2, \dots, k$. Podle již dokázané implikace (ii) \Rightarrow (iii) víme, že každá komponenta S_i obsahuje $n_i - 1$ hran. Sečteme všechny hrany v grafu T_n

$$\sum_{i=1}^k |E(S_i)| = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = \left(\sum_{i=1}^k n_i \right) - \sum_{i=1}^k 1 = n - k.$$

a porovnáme s počtem hran v grafu T_n , kterých je $n - 1$. Dostaneme $k = 1$, proto má graf T_n jedinou komponentu, což znamená, že je souvislý.

„(iv) \Rightarrow (ii)“ Ukážeme sporem, že T_n je acyklický. Pokud by T_n obsahoval cyklus, tak vynecháním libovolné hrany uv cyklu neporušíme souvislost (obsahovala-li nějaká cesta mezi dvěma vrcholy v grafu T_n hrannu uv , stačí v ní tuto hranu nahradit (u, v) -sledem). Odebírání hran opakujeme, dokud nedostaneme souvislý acyklický graf (strom), který má nejvýše $n - 2$ hran (alespoň jednu jsme odebrali!). To je však ve sporu s již dokázanými implikacemi (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv), podle kterých má T_n právě $n - 1$ hran.

„(ii) \Rightarrow (v)“ Nepřímo ukážeme, že odebráním libovolné hrany souvislého acyklického grafu se poruší souvislost. Jestliže odebráním hrany uv se souvislost neporuší, tak (u, v) -cesta v grafu $T_n - uv$ spolu s hranou uv tvoří cyklus v T_n a proto T_n není acyklický a není strom.

„(v) \Rightarrow (ii)“ Postupujeme opět nepřímo. Pokud graf T_n není acyklický, obsahuje cyklus C a vynecháním libovolné hrany uv cyklu C souvislost grafu neporušíme, protože hranu uv můžeme nahradit (u, v) -cestou z cyklu C . \square

Všimněte si, že ze tří vlastností: souvislost, acykličnost a mít $n - 1$ hran, kterékoliv dvě definují strom. Navíc stromy mají výsadní postavení na hranici souvislosti a acykličnosti.

- ze stromu už nemůžeme žádnou hranu vynechat: porušila by se souvislost.
- do stromu nemůžeme žádnou hranu přidat: porušila by se acykličnost.

Díky souvislosti víme, že ve stromu existuje mezi každými dvěma vrcholy cesta, naproti tomu acykličnost stromu zajistí, že putování ve stromu je velmi omezené. Následuje další nutná a postačující podmínka pro to, aby graf byl strom.

Věta 3.4. *Graf je strom právě tehdy, když mezi každými dvěma jeho vrcholy existuje právě jedna cesta.*

Důkaz. Věta má tvar ekvivalence, musíme dokázat obě implikace.

„ \Rightarrow “ Nepřímo: pokud mezi některými dvěma vrcholy grafu G existují alespoň dvě různé cesty P_1, P_2 (liší se alespoň jednou hranou), tak jejich spojením dostaneme uzavřený sled. Vyskytuje-li se v tomto uzavřeném sledu například hrana uv jen jednou, tak odebráním hrany uv dostaneme ze sledu otevřený (u, v) -sled. Podle Lemmatu 2.1. můžeme případným vynecháním vrcholů z (u, v) -sledu dostat (u, v) -cestu. Tato (u, v) -cesta neobsahuje hranu uv . Nyní je zřejmé, že hrana uv spolu s (u, v) -cestou tvoří cyklus v grafu G a proto G není strom.

„ \Leftarrow “ Opět nepřímo: Pokud graf není strom, potom buď není souvislý a mezi některými dvěma vrcholy neexistuje ani jedna cesta, nebo obsahuje cyklus a potom mezi každými dvěma vrcholy cyklu existují alespoň dvě různé cesty. \square

Věta 3.5. *Mějme nějaký strom T na alespoň třech vrcholech. Přidáním jedné hrany do stromu T vznikne právě jeden cyklus.*

Důkaz. Tato věta je jednoduchým důsledkem Věty 3.4. Protože mezi libovolnými dvěma vrcholy u, v v stromu T existuje právě jedna (u, v) -cesta, tak přidáním hrany uv dostaneme cyklus. Naopak, pokud by přidáním hrany uv vznikly alespoň dva cykly (liší se alespoň jednou hranou, ale nemusí být nutně hranově disjunktní), oba musí obsahovat hranu uv a odebráním uv z každého cyklu bychom dostali různou (u, v) -cestu ve stromu T , což není možné. \square

V kapitole 2.3. jsme zavedli excentricitu vrcholu, poloměr a průměr grafu. Pro stromy jsou obecné definice těchto pojmu samozřejmě stejné, avšak vzhledem ke struktuře stromů můžeme některá tvrzení zpřísnit. Ve stromu s alespoň třemi vrcholy je vždy $\text{rad}(G) < \text{diam}(G)$ (Cvičení 3.1.16.).

Na straně 33 jsme definovali centrum grafu. V rámci cvičení jsme ukázali, že centrum obecného grafu může obsahovat libovolný počet vrcholů. Pro stromy je opět situace jednodušší, jak ukazuje následující tvrzení.

Věta 3.6. *Centrum stromu je buď jediný vrchol a nebo dva vrcholy spojené hranou.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme indukcí vzhledem k počtu vrcholů.

Základ indukce: Pro graf s jedním nebo dvěma vrcholy tvrzení platí triviálně, neboť celý strom je centrem.

Indukční krok: Mějme strom T na alespoň třech vrcholech. Sestavme strom T' , který vznikne ze stromu T odstraněním všech listů (tomuto procesu se říká *holení*).

Ukážeme, že stromy T a T' mají stejně centrum. Podle Lemmatu 3.2. je T' také strom. Protože z každé cesty zůstanou vnitřní vrcholy, zůstane v T' alespoň jeden vrchol.

Pro každý vrchol v ve stromu T jsou nejvzdálenější vrcholy listy, jinak bychom mohli cestu z vrcholu v prodloužit do vzdálenějšího vrcholu. Protože jsme z grafu T odstranili všechny listy a žádná cesta mezi zbývajícími vrcholy neobsahuje list jako vnitřní vrchol, musí pro každý vrchol v ve stromu T' platit $\text{ecc}_{T'}(v) = \text{ecc}_T(v) - 1$. Navíc excentricita listu ve stromu je větší než excentricita jeho souseda (Cvičení 3.1.15.). To znamená, že vrcholy s nejmenší excentricitou stromu T' jsou stejné jako vrcholy s nejmenší excentricitou stromu T a stromy T a T' mají stejně centrum. Tvrzení plyne z principu matematické indukce. \square

Důkaz Věty 3.6. nám dává návod, jak centrum stromu najít. Máme-li triviální strom nebo strom na dvou vrcholech, je centrum celý graf. Jinak postupným holéním stromu, kdy v každém kroku odebereme všechny listy, dostaneme po $\lfloor \text{diam}(T)/2 \rfloor$ krocích centrum stromu.

Otázky:

- Je diametrická cesta ve stromu určena jednoznačně?
- Může v nějakém stromu na alespoň třech vrcholech být poloměr roven průměru?

Cvičení

3.1.1. Dokažte, že každý netriviální strom má nejméně dva listy.

3.1.2. Bez použití Věty 3.3. dokažte, že graf T_n na n vrcholech je strom právě tehdy, jestliže má $n - 1$ hran a je souvislý.

3.1.3. Bez použití Věty 3.3. dokažte, že graf T_n na n vrcholech je strom právě tehdy, jestliže má $n - 1$ hran a je acyklický.

3.1.4. Dokažte, že strom T_n na alespoň třech vrcholech je cesta právě tehdy, když $\Delta(T_n) = 2$.

3.1.5. Dokažte, že strom T_n je hvězdou (hvězda je strom, obsahující nejvíše jeden vrchol stupně vyššího, než 1) právě tehdy, když $\Delta(T_n) = n - 1$.

3.1.6. Mějme strom T_n a nechť $\Delta(T_n) = k$. Dokažte, že potom T_n obsahuje alespoň k vrcholů stupně 1.

3.1.7. Dokažte, že strom T_n je netriviální cesta právě tehdy, když obsahuje přesně dva vrcholy stupně 1.

3.1.8. Nechť F_n je les s k komponentami. Dokažte, že $h(F_n) = n - k$.

3.1.9. Charakterizujte třídu grafů, pro které platí, že každý jejich souvislý podgraf je jejich indukovaným podgrafem.

3.1.10. Nechť T_n je netriviální strom na n vrcholech a v je jeho vrchol takový, že $\deg(v) = k$. Dokažte, že $\omega(T_n - v) = k$.

3.1.11. Použijte výsledek (předcházejícího) Cvičení 3.1.10. k důkazu implikace (ii) \Rightarrow (iii) ve Větě 3.3.

3.1.12. Dokažte, že má-li graf G s alespoň jednou hranou všechny vrcholy sudého stupně, potom G obsahuje cyklus.

3.1.13. Dokažte, že je-li $\delta(G) \geq 2$, potom G obsahuje cyklus.

3.1.14. Dokažte, že je-li $\delta(G) \geq 2$, potom G obsahuje dokonce i cyklus délky alespoň $\delta(G) + 1$.

3.1.15. Ukažte, že ve stromu T s alespoň třemi vrcholy je excentricita listového vrcholu vždy větší, než excentricita sousedního vrcholu.

3.1.16. Ukažte, že ve stromu T s alespoň třemi vrcholy je vždy $\text{rad}(T) < \text{diam}(T)$.

3.2. Kostry

V minulé podkapitole jsme ukázali, že stromy mají výsadní postavení na hranici souvislosti a acykličnosti: ze stromu není možné žádnou hranu vynechat aniž by se porušila souvislost a do stromu není možné žádnou hranu přidat aniž by se porušila acykličnost. Má proto smysl hledat v souvislém grafu podgraf, který je strom. Takový podgraf zůstane souvislý a přitom vyřadíme „nadbytečné“ hrany.

Definice Faktor grafu, který je stromem, se nazývá *kostrou* grafu.

Z definice ihned vidíme, že kostra existuje pouze pro souvislé grafy, nesouvislé grafy kostru nemají. Z předchozích kapitol víme, že kostra je speciální podgraf grafu G :

- kostra je faktor (obsahuje všechny vrcholy grafu G),
- kostra je souvislá (mezi každými dvěma vrcholy grafu G existuje cesta, která obsahuje jen hrany kostry),
- pro pevně zvolenou kostru grafu G je cesta mezi dvěma vrcholy po hranách kostry určena jednoznačně,
- kostra je acyklická.

Kostry grafu využijeme například při sestavování soustavy lineárně nezávislých rovnic z Kirchhoffových zákonů. Nejprve najdeme kostru v grafu reprezentujícím elektrickou síť a potom přidáváme různé hrany tak, aby uzavřeli různé obvody a pro každý sestavíme lineární rovnici.

Mějme dán graf G . Úloha najít nějakou kostru grafu G je dobře známá. Existují algoritmy, které najdou kostru grafu s n vrcholy a m hranami v čase řádově $O(m + n)$ (Cvičení 3.2.3.). Dokonce je možno v čase $O((m+n) \log n)$ najít minimální kostru hranově ohodnoceného grafu G . Problému nalezení minimální kostry se v tomto textu nebude věnovat. Naproti tomu ukážeme, jak určit počet všech koster kompletního grafu, jestliže rozlišujeme jeho vrcholy.

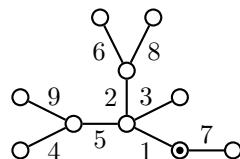
V důkazu následujícího tvrzení budeme pracovat s *kořenovým stromem*, což je dvojice (T, r) , kde T je nějaký strom a $r \in V(T)$ je *kořen* stromu T . V každém kořenovém stromu můžeme všechny hrany (dle Věty 3.4. jednoznačně) zorientovat, například od listů ke kořenům.

Věta 3.7. Cayleyho vzorec

Pro každé $n \geq 2$ je počet různých stromů na n vrcholech roven n^{n-2} .

Důkaz. Důkaz provedeme metodou dvojitého počítání. Dvěma způsoby spočítáme tzv. *povykosy* (postup výroby kořenových stromů) na n vrcholech.

Nejprve vyrobíme kořenový strom tak, že mezi vrcholy postupně nakreslíme hrany a jeden vrchol zvolíme za kořen (Obrázek 3.1.). Vezměme libovolný strom T_n na n vrcholech. Strom T_n má $n - 1$ hran, které můžeme postupně přidat v libovolném pořadí. Počet takových pořadí je $(n - 1)!$. Za kořen r můžeme vybrat libovolný z n vrcholů. Označíme-li $k(n)$ počet různých stromů na n vrcholech, tak počet různých povykosů je $n(n - 1)!k(n)$ (nezávislé volby: $k(n)$ různých koster; n možností, jak zvolit kořen; $(n - 1)!$ pořadí, jak přidat hrany).

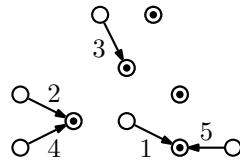


Obrázek 3.1.: Kořenový strom s n vrcholy a postupně přidanými $n - 1$ hranami.

V kořenovém stromu (T_n, r) zorientujeme hrany od listů ke kořenu. Přitom z žádného vrcholu jistě nemůže vést více než jedna hrana, příchozích hran může být libovolný počet. Povykosy můžeme sestavovat druhým způsobem, kdy přidáváme orientované hrany mezi n izolovaných vrcholů (Obrázek 3.2.). Současně dbáme ta to, aby v každé komponentě takto sestavovaného lesa byl právě jeden vrchol (kořen komponenty), ze kterého žádná orientovaná hrana nevychází. Přidáme-li v nějakém kroku novou orientovanou hranu mezi dvě komponenty, koncový vrchol hrany můžeme zvolit libovolně, ale výchozí vrchol můžeme volit pouze mezi kořeny zbývajících $i - 1$ komponent. Při konstrukci povykosu přidáme celkem $n - 1$ hran (poslední hranu přidáváme mezi dvě komponenty) a existuje proto

$$\prod_{i=2}^n n(i-1) = n^{n-1}(n-1)!$$

různých způsobů sestavení povykosů.



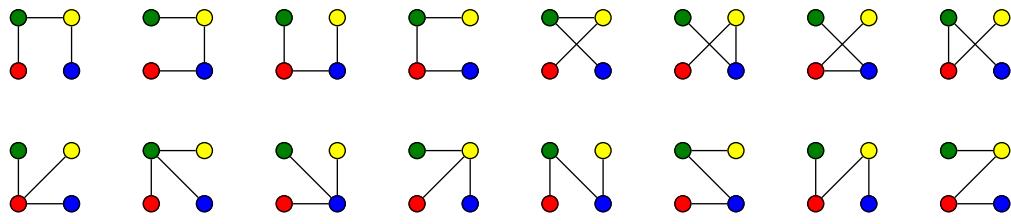
Obrázek 3.2.: Kořenový „les“ s 5 vrcholy a několika přidanými orientovanými hranami.

Dvěma různými způsoby jsme spočítali počet stejných objektů. Porovnáme oba vztahy a dostaneme

$$n(n-1)!k(n) = n^{n-1}(n-1)! \quad \Rightarrow \quad k(n) = n^{n-2}.$$

Tento důkaz z roku 1998, jehož autorem je Jim Pitman, je nejkratší ze známých důkazů Cayleyho vzorce. \square

Cayleyho vzorec udává obecný vztah pro počet koster kompletního grafu. Například graf K_4 má 16 koster, jestliže rozlišíme vrcholy čtyřmi barvami (Obrázek 3.3.). Pokud bychom vrcholy nerozlišovali, existují jen dva stromy na čtyřech vrcholech, které se liší svou strukturou: P_4 a $K_{1,3}$. Co to znamená „liší se strukturou“ rozebereme podrobně v kapitole 4.



Obrázek 3.3.: Graf K_4 má 16 různých koster.

Ze Cvičení 3.2.3. plyne, že každý souvislý graf má kostru. Snadno nahlédneme, že každý strom T_n je kostrou nějakého grafu (například sebe sama nebo kompletního grafu na $n = |V(T_n)|$ vrcholech). Následující věta dává postačující podmítku pro to, aby strom daný byl podgrafem nějakého grafu.

Věta 3.8. *Mějme strom T s k hranami a graf G . Je-li $\delta(G) \geq k$, tak T je podgrafem G .*

Důkaz tohoto tvrzení je ponechán jako Cvičení 4.1.9. Všimněte si, že opačné tvrzení neplatí. Například cesta P_6 má 5 hran a je podgrafem cyklu C_6 , přičemž $\delta(C_6) = 2 > 5$. Na druhou stranu nerovnost ve Větě 3.8. není možno zpřísnit, protože například hvězda $K_{1,k}$ má k hran, K_k má $\delta(K_k) = k - 1$, ale $K_{1,k}$ jistě není podgrafem K_k (proč?).

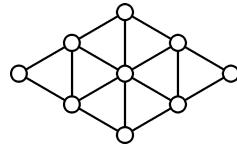
Cvičení

3.2.1. Kolik koster má unicyklický graf? (Unicyklický graf obsahuje jediný cyklus.)

3.2.2. Kolik koster má bicyklický (graf s právě dvěma cykly) graf? Nápověda: které možnosti musíme rozlišit?

3.2.3. Navrhnete algoritmus pro hledání kostry (ne nutně minimální), který pracuje se složitostí řádově $O(m + n)$.

3.2.4. Je možno graf G na Obrázku 3.4. rozložit a) na dvě kostry; b) na dvě kostry se stejnou strukturou (dvě izomorfní kostry)?



Obrázek 3.4.: Graf G na devíti vrcholech.

3.2.5. Kolik koster má kompletní graf bez jedné hrany?

3.3. Cykly a bipartitní grafy

Na straně 21 jsme nadefinovali bipartitní graf. Všimněte si, že hrany bipartitního grafu (pokud existují) mohou spojovat pouze vrcholy z různých partit, žádná hrana nespojuje dva vrcholy ve stejné partitě.

Šikovnou pomůckou při práci s bipartitními grafy jsou barvy vrcholů. Můžeme předpokládat, že vrcholy bipartitního grafu jsou obarveny dvěma barvami, všechny vrcholy v jedné partitě vždy stejnou barvou. Hrany pak spojují pouze dva vrcholy *různých* barev, nikdy dva vrcholy stejné barvy. Naopak, jestliže se nám podaří obarvit všechny vrcholy nějakého grafu G dvěma barvami tak, aby žádná hrana nespojovala dva vrcholy stejné barvy, tak víme, že graf G je bipartitní. Partity jsou určeny právě barvami.

Graf je podle definice strom právě tehdy, když neobsahuje žádné cykly. Následující věta udává nutnou a postačující podmítku pro to, aby graf byl bipartitní. Všimněte si, že omezení se tyká jen cyklů liché délky.

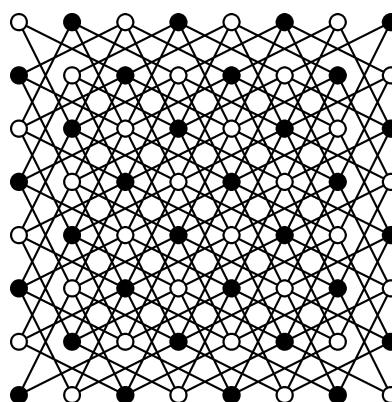
Věta 3.9. *Graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje cykly liché délky.*

Důkaz. Tvrzení je ekvivalence, musíme dokázat obě implikace.

„ \Rightarrow “ Postupujeme přímo. Mějme bipartitní graf $G = (U \cup W, E)$. Vrcholy každého sledu (a proto i každé cesty) v G jsou střídavě z množiny U a W , protože všechny hrany jsou jen mezi partitami U a W . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že první vrchol patří do množiny U , potom druhý a každý sudý vrchol sledu patří do množiny W . Všechny sledy, jejichž poslední vrchol patří do U , jsou sudé délky. Pokud je sled uzavřený, musí se „vrátit“ do partity U a musí proto obsahovat sudý počet hran. Protože cyklus je speciálním případem uzavřeného sledu, tak bipartitní graf neobsahuje cykly liché délky.

„ \Leftarrow “ Mějme graf G , který neobsahuje liché cykly. Vrcholy grafu rozdělíme do dvou partit tak, že hrany budou pouze mezi vrcholy z různých partit. Triviální komponenty můžeme přidat do libovolné partity. Je-li u libovolný vrchol netriviální komponenty L , tak pro všechny vrcholy $v \in V(L)$ určíme $\text{dist}(u, v)$. Do partity U dáme všechny takové vrcholy komponenty L , které mají sudou hodnotu $\text{dist}(u, v)$ a do partity W vrcholy s lichou hodnotu $\text{dist}(u, v)$. V rámci žádné partity není hrana vv' , protože spojením (u, v) -sledu, hrany vv' a (v', u) -sledu bychom dostali uzavřený sled liché délky, ze kterého podle Lemmatu 2.2. je možno vybrat lichý cyklus. To by byl spor s předpokladem. \square

Ukazuje se, že řadu praktických problémů můžeme popsat právě bipartitním grafem, například šachové úlohy. Bipartitnost plyne ihned z obarvení políček šachovnice (Obrázek 3.5.).



Obrázek 3.5.: Graf možných tahů koně po šachovnici je bipartitní.

Příklad 3.1. Putování koně po šachovnici

Ukažte, že putování koně po šachovnici můžeme popsat bipartitním grafem.

Sestavíme graf \check{S} , jehož vrcholy budou políčka klasické šachovnice 8×8 polí a hrany spojují vždy taková dvě políčka, mezi kterými lze táhnout koněm. Snadno nahlédneme, že \check{S} je bipartitní graf. Jedna partita je tvořena černými políčky, druhá bílými políčky. Hrany vedou pouze mezi některými „černými“ a „bílými“ vrcholy, neboť mezi dvěma políčky stejné barvy neexistuje legální tah koněm (Obrázek 3.5.). ✓

Dalším aplikacím bipartitních grafů se budeme věnovat v kapitole 6.2.

Cyklotomické číslo grafu

Je-li G graf a $\omega(G)$ počet jeho komponent, tak *cyclomatické číslo* $\mu(G) = h(G) - v(G) + \omega(G)$ udává, kolik nejméně hran je třeba z grafu odebrat, aby v grafu nezůstal žádný cyklus. Pro stromy a lesy je cyclomatické číslo rovno 0, pro kompletní grafy je cyclomatické číslo $\mu(G) = \binom{n-1}{2}$. Cyclomatické číslo je jakási míra složitosti. V souvislých grafech cyclomatické číslo $\mu(G)$ udává, jak moc se graf G „liší od stromu“. Čím větší je cyclomatické číslo $\mu(G)$, tím více cyklů graf G obsahuje.

Otzázkы:

- Udává cyclomatické číslo grafu počet cyklů v grafu?
- Co můžeme říci o grafu G , ve kterém počet cyklů je roven $\mu(G)$?

Poznámka 3.1. O grafech s pouze lichými cykly

Protože stromy neobsahují žádné cykly, bipartitní grafy neobsahují liché cykly, tak by se mohlo zdát, že má smysl uvažovat také grafy, které obsahují pouze liché cykly. Ve Cvičení 3.3.8. ukážeme, že požadavek, aby graf obsahoval jen liché cykly, je příliš omezující a množiny hran cyklů takového grafu musí být po dvou disjunktní.

Odkazy:

- Jiný důkaz Cayleyho vzorce najdete na http://en.wikipedia.org/wiki/Cayley's_formula.

Cvičení

3.3.1. [♡] Dokažte, že každý strom je bipartitní graf.

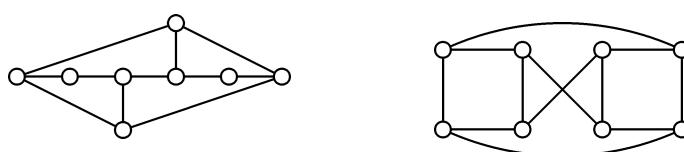
3.3.2. Nechť G je pravidelný bipartitní graf s partitami U a W a alespoň jednou hranou. Ukažte, že potom $|U| = |W|$. Je předpoklad existence alespoň jedné hranou nutný?

3.3.3. Dokažte, že každý podgraf bipartitního grafu je bipartitní.

3.3.4. Ukažte, že při putování koněm po šachovnici není možno vrátit se na výchozí políčko po lichém počtu tahů.

3.3.5. Sestavíme graf \check{S} , jehož vrcholy budou políčka klasické šachovnice 8×8 polí a hrany spojují vždy taková dvě políčka, mezi kterými lze táhnout věží. Je graf \check{S} bipartitní? Najdete v grafu \check{S} lichý cyklus?

3.3.6. V grafech na Obrázku 3.6. najděte bipartitní podgraf s co největším počtem hran. Dokažte, že tento počet je největší.



Obrázek 3.6.: Grafy, které nejsou bipartitní.

3.3.7. Ukažte, že graf G je unicyklický právě tehdy, když $\mu(G) = 1$.

3.3.8. Ukažte, že pokud graf obsahuje pouze liché cykly, tak žádné dva cykly nemohou mít společné hrany.

3.3.9. Ukažte, že souvislý k -pravidelný bipartitní graf pro $k \geq 2$ neobsahuje žádný most (most je taková hrana, že jejím odebráním dostaneme nesouvislý graf).

3.3.10. Kolik je všech cyklů v grafu K_n ?

3.3.11. Kolik je cyklů a) délky 4, b) délky 5, c) délky 6, d) všech v grafu Q_n ?

3.3.12. Kolik různých cyklů obsahuje kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$? Dva cykly považujeme za různé, pokud se liší v alespoň jedné hraně.

3.3.13. Jaké je cyklometrické číslo a) cyklu C_n b) kompletního bipartitního grafu $K_{m,n}$?

3.3.14. Najděte příklad tří grafů se stejným počtem vrcholů, se stejným cyklometrickým číslem a různým počtem cyklů.

3.3.15. Pro každé přirozené číslo k najděte příklad a) dvou grafů se stejným počtem vrcholů, stejným cyklometrickým číslem a počtem cyklů lišícím se o k , b) k grafům se stejným počtem vrcholů, stejným cyklometrickým číslem, přičemž každé dva grafy mají různý počet cyklů.

Kapitola 4. Isomorfismus grafů

4.1. Pojem isomorfismu

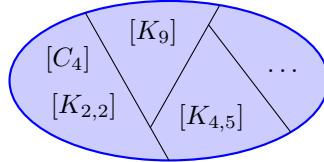
Pracujeme-li s nějakým grafem, je obvykle jedno, zda je graf označený G , \check{R} nebo třeba $@$. Důležité je, jakou má graf strukturu a zda dva grafy mají nebo nemají tuto strukturu stejnou. Pojmu mít „stejnou strukturu“ rozumíme tak, že z jednoho grafu dostaneme druhý jen přeznačením vrcholů. Následující definice je formálním popisem zmíněného přístupu.

Definice Grafy G a H se nazývají *isomorfní*, jestliže existuje bijekce $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ taková, že každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ jsou sousední právě tehdy, když jsou sousední vrcholy $\varphi(u), \varphi(v) \in V(H)$. Píšeme $G \simeq H$. Zobrazení φ se nazývá *isomorfismus*.

Isomorfismus se někdy značí i \cong nebo \sim . Pojem isomorfismu grafů je zaveden (podobně jako isomorfismus jiných objektů) proto, abychom mohli zkoumat strukturu bez závislosti na jejím označení nebo pojmenování. Dva různé grafy jsou isomorfní, jestliže mají stejnou strukturu, tj. existuje nějaký isomorfismus. V opačném případě se grafy nazývají *neisomorfní*.

Třídy isomorfních grafů

Isomorfismus φ dvou grafů, tak jak je zaveden v definici na začátku kapitoly, můžeme využít k sestavení relace ekvivalence na třídě všech grafů. Dva grafy G a H jsou v relaci \sim právě tehdy, když existuje isomorfismus $G \simeq H$. Důkaz, že \sim je relací ekvivalence, je ponechán jako Cvičení 4.1.11. To znamená, že tvrzení, které platí pro nějaký graf můžeme stejně vyslovit i pro jakýkoliv jiný graf ze stejné třídy ekvivalence (Obrázek 4.1.). Pojem „graf“ můžeme proto interpretovat také jako celou *třídu ekvivalence*. Každý prvek této třídy je uspořádaná dvojice množiny vrcholů a množiny hran. Následující tvrzení ukazuje, že dva isomorfní grafy nerozlišíme pomocí žádné z uvedených vlastností.



Obrázek 4.1.: Třídy grafů.

Věta 4.1. Mějme grafy G a H . Označme $n = |V(G)|$ a $m = |V(H)|$. Jestliže $G \simeq H$ a φ je isomorfismus $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$, tak potom

- (i) $n = m$,
- (ii) pro každý vrchol $v \in V(G)$ platí $\deg_G(v) = \deg_H(\varphi(v))$,
- (iii) platí $(g_1, g_2, \dots, g_n) = (h_1, h_2, \dots, h_m)$, kde (g_1, g_2, \dots, g_n) a (h_1, h_2, \dots, h_m) jsou nerostoucí stupňové posloupnosti grafů G a H ,
- (iv) grafy G a H mají stejný počet hran,
- (v) pro každý podgraf N grafu G existuje takový podgraf M grafu H , že $N \simeq M$.

Důkaz. Dokážeme postupně všechna tvrzení.

(i) Protože se zabýváme konečnými neprázdnými grafy, tak rovnost $n = m$ je rovností dvou přirozených čísel. Isomorfismus φ je bijekce a proto každému vrcholu v grafu G existuje právě jeden vrchol v grafu H (a naopak). To znamená, že $n = m$.

(ii) Vezměme libovolný vrchol $v \in V(G)$. Označme $v_1, v_2, \dots, v_{\deg(v)}$ všechny sousedy vrcholu v v grafu G a $v_{\deg(v)+1}, v_{\deg(v)+2}, \dots, v_{n-1}$ zbývající vrcholy v G , které nejsou sousední s v . Z definice isomorfismu φ víme, že právě vrcholy $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_{\deg(v)})$ jsou sousední s $\varphi(v)$ v grafu H a navíc zbývající vrcholy $\varphi(v_{\deg(v)+1}), \varphi(v_{\deg(v)+2}), \dots, \varphi(v_{n-1})$ nejsou v grafu H s $\varphi(v)$ sousední. Z definice stupně vrcholu je proto $\deg_G(v) = \deg_H(\varphi(v))$.

(iii) Je-li (g_1, g_2, \dots, g_n) nerostoucí stupňová posloupnost grafu G , tak podle již dokázaného bodu (i) víme, že $n = m$ a navíc podle (ii) víme, že $\deg_G(v) = \deg_H(\varphi(v))$ pro všechny vrcholy $v \in V(G)$. Proto je-li

$(g_1, g_2, \dots, g_n) = (\deg_G(v_1), \deg_G(v_2), \dots, \deg_G(v_n))$, tak $(\deg_H(\varphi(v_1)), \deg_H(\varphi(v_2)), \dots, \deg_H(\varphi(v_n))) = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ je nerostoucí grafová posloupnost.

(iv) S využitím principu sudosti a právě dokázaného bodu (iii) je

$$|E(H)| = \frac{1}{2} (h_1 + h_2 + \dots + h_m) = \frac{1}{2} (g_1 + g_2 + \dots + g_n) = |E(G)|.$$

(v) Mějme nějaký podgraf N grafu G . Podgraf M grafu H sestavíme tak, že $V(M) = \{\varphi(v) : v \in V(N)\}$ a $E(M) = \{\varphi(e) : e \in E(N)\}$. Že uvedené hrany v H existují plyne z definice isomorfismu φ , neboť $e \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(e) \in E(H)$. Abychom ukázali, že $M \simeq N$, stačí vzít isomorfismus φ' , který je restrikcí⁶ isomorfismu φ na množinu $V(N)$. \square

Všimněte si, všechny body (i)–(v) jsou nutné podmínky pro isomorfismus daných dvou grafů G a H , ale ani jeden z bodů není podmínkou postačující. Například pro $n \geq 2$ (grafy na alespoň dvou vrcholech) mají grafy $G = K_n$ a $H = nK_1$ stejný počet vrcholů n , avšak G a H nejsou isomorfní. Proto podmínka v bodu (i) není postačující, aby dva grafy byly isomorfní.

Grafy $G = P_n$ a $H = K_{1,n-1}$ mají pro $n \geq 4$ stejný počet hran i vrcholů, jistě ale nejsou isomorfní. Proto ani podmínka v bodu (iv) není postačující, aby dva grafy byly isomorfní.

Podobně pro $n \geq 6$ mají grafy $G = C_n$ a $H = C_3 \cup C_{n-3}$ stejnou stupňovou posloupnost $(2, 2, \dots, 2)$, avšak nejsou isomorfní. Ani podmínky v bodech (ii) a (iii) nejsou postačující. Grafy $G = C_n$ a $H = C_3 \cup C_{n-3}$ splňují dokonce všechny body (i)–(iv) a přitom nejsou isomorfní, protože G je a H není souvislý. A konečně ani podmínka v bodu (v) není postačující, aby dva grafy G a H byly isomorfní. Najít protipříklad není obtížné.

Otázka: Lze najít příklad takových grafů G a H , které splňují podmínu (v) ve Větě 4.1., ale nejsou isomorfní?

O rozhodování, zda dané dva grafy jsou isomorfní

Pro malé grafy můžeme zpravidla snadno rozhodnout, zda jsou isomorfní nebo ne. Pro větší grafy (stačí i méně než 20 vrcholů!) však rozhodnout na první pohled o isomorfismu nemusí být snadné, zejména pokud dané grafy jsou různě nakreslené a snadno ověřitelné podmínky (i)–(iv) ve Větě 4.1. jsou splněny. Ukazuje se, že v obecném případě není snadné rozhodnout, zda dané dva grafy jsou nebo nejsou isomorfní, protože žádný univerzální a rychlý algoritmus není znám. Jsou však známy univerzální algoritmy, které nejsou rychlé a také rychlé algoritmy, které nejsou univerzální, tj. fungují jen pro určité třídy grafů.

Následující věta sice udává nutnou a postačující podmínu pro to, aby dané dva grafy byly isomorfní, všimněte si ale, že její praktické použití je sporné. Převádí totiž otázku existence isomorfismu dvou grafů na otázku existence isomorfismu sice menších, ale mnoha různých grafů.

Věta 4.2. *Grafy G a H jsou isomorfní právě tehdy, když pro každý podgraf N grafu G existuje podgraf M grafu H takový, že $M \simeq N$, a pro každý podgraf M grafu H existuje podgraf N grafu G takový, že $N \simeq M$.*

Důkaz. Stačí si uvědomit, že za podgraf N můžeme vzít celý graf G . Protože pracujeme s konečnými grafy, tak $|V(G)| \leq |V(H)|$ a z opačné implikace vyjde $|V(H)| \leq |V(G)|$ a proto můžeme předpokládat, že oba grafy mají stejný počet vrcholů $|V(G)| = |V(H)| = n$.

Podle předpokladu existuje takový podgraf M grafu H , že $G \simeq M$ při isomorfismu $\varphi : V(G) \rightarrow V(M)$. Vzhledem k isomorfismu φ můžeme předpokládat, že G je podgrafem H , tj. každá hrana G leží v H . Podobně dostaneme, že H je podgrafenem G , tedy neexistuje hrana grafu H , která by nebyla v grafu G . Dostáváme tak, že zobrazení φ je nejen isomorfismus mezi G a H , ale dokonce isomorfismus $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$, protože $uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$. \square

Předchozí tvrzení jsme ukázali pro konečné grafy. Pro nekonečné grafy nemůžeme použít argument o stejném počtu vrcholů a proto pro nekonečné grafy tvrzení Věty 4.2. neplatí.

Otázka: Najdete takové dva nekonečné grafy G a H , které splňují předpoklady Věty 4.2. týkající se existence podgrafů M a N , a přitom G a H nejsou isomorfní?

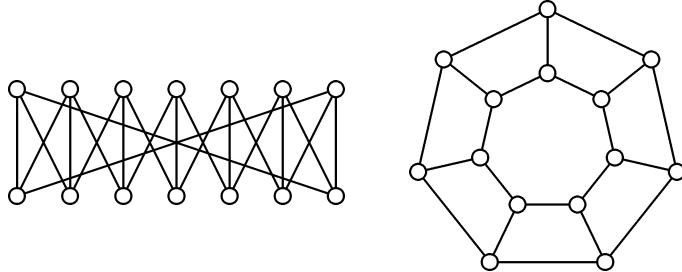
Pro některé třídy grafů (například pro stromy) existují algoritmy, které umí o isomorfismu dvou grafů z dané třídy rozhodnout v čase, který roste v závislosti na velikosti grafu pomalu (polynomiálně s malým stupněm polynomu). V obecném případě

⁶ Restrikce je nadefinována na straně 11.

- 1) ověříme nutné podmínky (i)–(v) Věty 4.1. (podmínce (v) neověřujeme pro všechny podgrafy, ale podle intuice pro vhodné podgrafy),
- 2) pokusíme se najít isomorfismus, případně systematickým probráním všech možností ukážeme, že isomorfismus neexistuje.

Všimněte si, že užitím Věty 4.1. je snadné isomorfismus dvou grafů vyvrátit nikoli dokázat. Pokud k některé z podmínek (i)–(v) najdeme protipříklad, tak víme, že dané dva grafy nejsou isomorfní. Naproti tomu najít isomorfismus nemusí být snadné, protože existuje $n!$ různých bijekcí $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$. Tento počet může být pro konkrétní dvojici grafů G a H výrazně menší, ale pro každou bijekci je potřeba ověřit podmínu $\forall e \in E(G) : e \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(e) \in E(H)$.

Příklad 4.1. Rozhodněte, zda dva grafy na Obrázku 4.2. jsou nebo nejsou isomorfní.



Obrázek 4.2.: Grafy G a H .

Snadno ověříme, že grafy G a H splňují podmínky (i)–(iv) ve Větě 4.1. Oba mají 14 vrcholů, jsou 3-pravidelné a mají proto 21 hran. Naproti tomu graf H obsahuje cyklus C_7 jako podgraf, ale graf G neobsahuje žádný lichý cyklus, protože je bipartitní. Grafy G a H proto nejsou isomorfní. ✓

Počet neisomorfních grafů

V kapitole 3.2. jsme ukázali, že pokud rozlišujeme jednotlivé vrcholy, tak kompletní graf K_n má n^{n-2} koster. Je přirozené se ptát, kolik *neisomorfních* koster má K_n . Odpovídá to situaci, kdy nerozlišujeme vrcholy, což je složitější otázka. A další otázka je, kolik existuje neisomorfních grafů na n vrcholech. Přesný výpočet počtu neisomorfních grafů na n vrcholech je obtížný. Naproti tomu jednoduše můžeme udělat odhad takového počtu.

Označíme-li $p(n)$ počet neisomorfních grafů na n vrcholech, tak $p(n)$ jistě není větší než $2^{\binom{n}{2}}$, což je počet všech různých grafů na n vrcholech. Proto platí

$$p(n) \leq 2^{\binom{n}{2}}.$$

Naproti tomu podle definice isomorfismu nemůže na n vrcholech být více než $n!$ navzájem isomorfních grafů, protože na n -prvkové množině existuje nejvýše $n!$ bijekcí (a tedy i potenciálních isomorfismů). Proto jistě platí

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \leq p(n).$$

Označíme horní odhad $p_{\max} = 2^{\binom{n}{2}}$ a dolní odhad $p_{\min} = \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$. Ukážeme, že tento odhad je sice hrubý (i asymptoticky), ale na logaritmické stupnici při základu 2 jsou obě funkce asymptoticky srovnatelné.

Pro velká n je relativní chyba $(p_{\max}(n) - p_{\min}(n)) / p_{\min}(n)$ velká. Přesněji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{\max}(n) - p_{\min}(n)}{p_{\min}(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_{\max}(n)}{p_{\min}(n)} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{\binom{n}{2}}}{\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n! - 1) = +\infty.$$

Avšak po zlogaritmování při základu 2 (porovnáme tak exponenty odhadů p_{\max} a p_{\min}) a s využitím $n! \leq n^n$ dostaneme

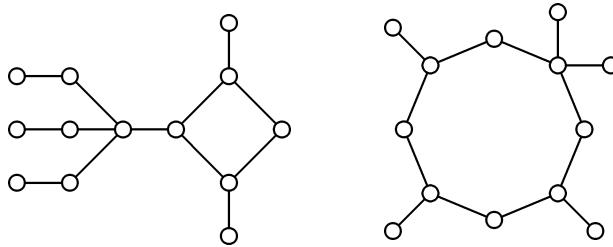
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(p_{\max}(n)) - \log_2(p_{\min}(n))}{\log_2(p_{\min}(n))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_2(p_{\max}(n))}{\log_2(p_{\min}(n))} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_2 2^{\binom{n}{2}}}{\log_2 \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}} - 1 \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{2} - \log_2 n!} - 1 \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{2} - n \log_2 n} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{\log_2 n}{n}} - 1 \right) = \frac{1}{1 - 0} - 1 = 0.$$

Poznámka 4.1. Při různých nakresleních grafu je každému vrcholu přiřazen bod v rovině, což je informace, která není zahrnuta ve struktuře grafu (V, E) . Proto pro různě nakreslené grafy můžeme dostat různá tvrzení, která souvisí s nakreslením grafu (například počet křížení hran). Tématu kreslení grafů se se budeme věnovat v kapitole 9.

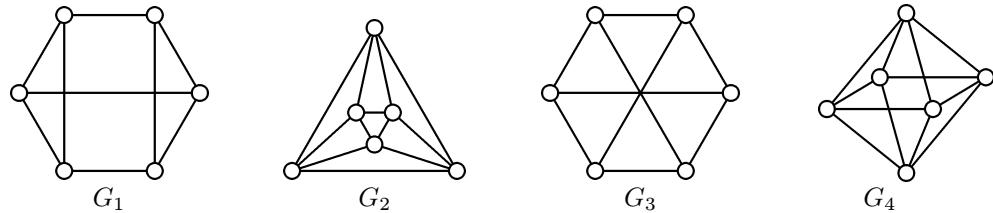
Cvičení

4.1.1. [♡] Ukažte, že grafy na Obrázku 4.3. nejsou isomorfní.



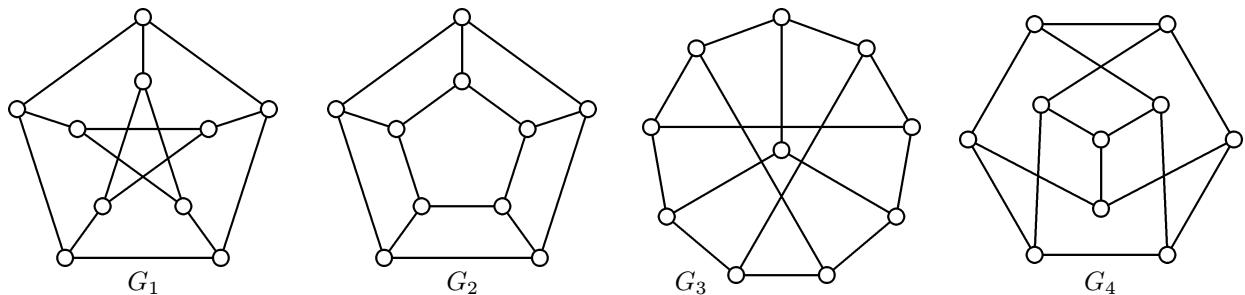
Obrázek 4.3.: Grafy G a H na třinácti vrcholech.

4.1.2. Rozhodněte, které grafy na Obrázku 4.4. jsou isomorfní.



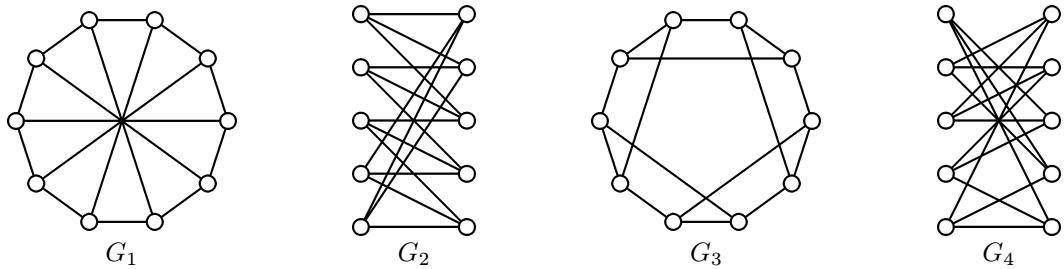
Obrázek 4.4.: Pravidelné grafy G_1, G_2, G_3 a G_4 na šesti vrcholech.

4.1.3. Rozhodněte, které z následujících grafů jsou isomorfní:



Obrázek 4.5.: Grafy G_1, G_2, G_3 a G_4 .

4.1.4. Rozhodněte, které grafy na Obrázku 4.6. jsou isomorfní.



Obrázek 4.6.: Pravidelné grafy \$G_1\$, \$G_2\$, \$G_3\$ a \$G_4\$ na deseti vrcholech.

4.1.5. Nechť \$T_n\$ a \$T'_n\$ jsou dva stromy na \$n\$ vrcholech pro které platí \$\Delta(T_n) = \Delta(T'_n) = n - 2\$. Ukažte, že potom \$T_n \simeq T'_n\$.

4.1.6. Dokažte že pro libovolné \$n \geq 6\$ existují vždy přesně tři neisomorfní stromy \$T_n\$ takové, že \$\Delta(T_n) = n - 3\$.

4.1.7. Ukažte, že existuje 11 navzájem neisomorfních grafů na čtyřech vrcholech.

4.1.8. Ukažte, že každý graf \$G\$ na \$n\$ vrcholech je isomorfní nějakému podgrafu \$K_n\$.

4.1.9. Nechť \$T_n\$ je libovolný strom na \$n\$ vrcholech a \$G\$ je libovolný graf takový, že \$\delta(G) \geq n - 1\$. Ukažte, že potom \$G\$ má podgraf, isomorfní s \$T_n\$.

4.1.10. Ukažte, že a) pokud v předchozím Cvičení 4.1.9. bude \$\delta(G) = n - 2\$, tak tvrzení nemusí platit, a b) pokud místo \$T_n\$ vezmeme libovolný graf s alespoň jedním cyklem, tak tvrzení nemusí platit.

4.1.11. Ukažte, že relace \$\sim\$ zavedená na straně 44 je relací ekvivalence na třídě všech grafů.

4.1.12. **Najděte co největší třídu navzájem neisomorfních grafů na \$n\$ vrcholech \$v_1, v_2, \dots, v_n\$. Třída by měla obsahovat alespoň \$2^{kn}\$ různých grafů pro nějaké \$k \in \mathbb{Q}\$, kde \$k > 0\$.

4.1.13. Najděte příklad grafů \$G\$ a \$H\$, které splňují podmínky (i)–(v) ve Větě 4.1., ale nejsou isomorfní. Ná pověda: hledané grafy nejsou konečné.

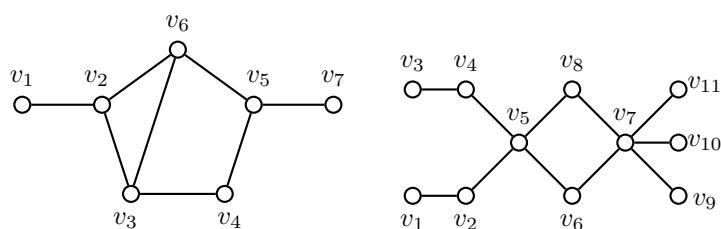
4.1.14. Existuje více neisomorfních grafů se stupňovou posloupností \$(1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6)\$ nebo grafů se stupňovou posloupností \$(3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8)\$?

4.2. Automorfismus grafů

Každý graf je triviálně isomorfní sám se sebou. Za isomorfismus můžeme vzít identické zobrazení \$\iota : V(G) \rightarrow V(G)\$. Takový isomorfismus nemusí být jediný, například Petersenův graf jich má 120 (Cvičení 4.2.14.).

Definice Isomorfismus \$f : V(G) \rightarrow V(G)\$ se nazývá *automorfismus* grafu \$G\$.

Graf \$H\$ na Obrázku 4.7. má kromě triviálního automorfismu \$\iota\$ například také automorfismus \$f\$, ve kterém se zobrazí \$f(v_1) = v_3\$, \$f(v_2) = v_4\$, \$f(v_3) = v_1\$, \$f(v_4) = v_2\$, \$f(v_{10}) = v_{11}\$, \$f(v_{11}) = v_{10}\$ a zbývající vrcholy na sebe. Naproti tomu graf \$G\$ má pouze triviální automorfismus (proč?).



Obrázek 4.7.: Graf \$G\$ s jediným automorfismem a graf \$H\$ s více automorfismi.

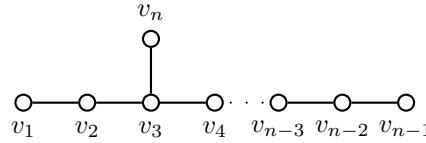
Čím více je graf „symetrický“, tím více má automorfismů. Počet různých automorfismů je proto jakousi mírou symetrie grafu. Kompletní graf K_n má $n!$ automorfismů (všechny možné automorfismy), cyklus C_n má $2n$ automorfismů.

Otázka: Jaké jsou všechny grafy na n vrcholech, které mají právě všechny $n!$ automorfismů?

Protože složením dvou automorfismů φ_1 a φ_2 grafu G dostaneme zobrazení $\varphi_2 \circ \varphi_1 : G \rightarrow G$, které je opět automorfismem grafu G (složením bijekcí dostaneme bijekci a definice isomorfismu zůstane splněna), tak se dá ukázat, že množina všech automorfismů Φ libovolného grafu G tvoří grupu s operací skládání zobrazení \circ . Tato grupa $\text{Aut}(G) = (\Phi, \circ)$ se nazývá *grupa automorfismů* daného grafu G . Zjednodušeně můžeme říci, že čím bohatší je grupa automorfismů, tím „symetričtější“ je graf a naopak.

Grafy s malým počtem automorfismů

Grafy, které mají pouze triviální automorfismus ι se nazývají *strnulé* grafy. Triviální graf má pouze triviální automorfismus, pro každé $n \geq 6$ (Cvičení 4.2.10.) je možno najít strnulý graf. Například pro $n \geq 7$ stačí vzít cestu P_{n-1} s vrcholy v_1, v_2, \dots, v_{n-1} a přidat vrchol v_n a hranu v_3v_n (Obrázek 4.8.). Výsledný graf je jistě strnulý, protože cesta P_{n-1} má pro $n \geq 7$ pouze dva automorfismy (oba listy se musí zobrazit na listy). Přidáním vrcholu v_n jsme zvýšili stupeň vrcholu v_3 , zatímco stupeň vrcholu v_{n-3} zůstal 2. Tím jsme zajistili, že v_3 se musí zobrazit na sebe, v_n se v libovolném automorfismu musí zobrazit na v_n (jediný jeho soused je stupně 3) a v_2 se musí zobrazit na v_2 , protože to je jediný vrchol, který má jednoho souseda stupně 3 a druhého souseda stupně 1. Podobně se vymutí obrazy zbývajících vrcholů a výsledný strom T_n je strnulý.



Obrázek 4.8.: Strnulý strom T_n pro $n \geq 7$.

Grafy s velkým počtem automorfismů

Na druhé straně spektra co do počtu automorfismů jsou grafy, které mají bohatou grupu automorfismů (kompletní grafy, kompletní bipartitní grafy, hyperkrychle). Při řešení problémů na grafech se někdy nevyhneme probrání velkého počtu možností, které je třeba vyšetřit. Má-li graf velký počet automorfismů, může se obvykle významným způsobem snížit počet případů, které je třeba vyšetřit, neboť víme, že zbývající případy budou odpovídat isomorfní instanci grafu.

Definice Graf G se nazývá *vrcholově tranzitivní*, jestliže pro libovolné dva vrcholy $u, v \in V(G)$ existuje v grafu G takový automorfismus φ , že $\varphi(u) = v$. Podobně se graf G nazývá *hranově tranzitivní*, jestliže pro libovolné dvě hrany $xy, uv \in E(G)$ existuje v grafu G takový automorfismus φ , že $\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \{u, v\}$.

Například kompletní grafy K_n , hyperkrychle Q_n nebo Petersenův graf jsou vrcholově i hranově tranzitivní. Kompletní bipartitní graf $K_{m,n}$ pro $m \neq n$ je hranově tranzitivní, ale není vrcholově tranzitivní (proč?). Otázka grafu, který je vrcholově tranzitivní, ale není hranově tranzitivní je ponechána jako Cvičení 4.2.17.

Cvičení

4.2.1. Ukažte, že vrcholově tranzitivní graf musí být pravidelný. Platí, že hranově tranzitivní graf musí být pravidelný?

4.2.2. Nalezněte netriviální automorfismus grafu H z Obrázku 4.7., který je různý od automorfismu uvedeného v textu na straně 48.

4.2.3. Kolik automorfismů má graf a) C_n ; b) P_n ; c) $K_{m,n}$; d)*hyperkrychle Q_n ?

4.2.4. Nechť $G \simeq H$ a nechť existuje k různých isomorfismů z G do H . Co můžeme říci o počtu automorfismů grafu G ?

4.2.5. Najděte nejméně tři nekonečné třídy vrcholově tranzitivních grafů.

4.2.6. Určete počet různých automorfismů vrcholově tranzitivního grafu na n vrcholech.

4.2.7. Ukažte, že je-li graf G strnulý, tak potom i \overline{G} je strnulý graf.

4.2.8. Ukažte, že je-li graf G vrcholově tranzitivní, tak potom i \overline{G} je vrcholově tranzitivní.

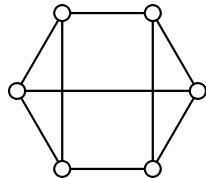
4.2.9. Platí, že je-li graf G hranově tranzitivní, tak potom i \overline{G} je hranově tranzitivní? Pokud ano, dokažte a pokud ne, najděte protipříklad.

4.2.10. Najděte nejmenší netriviální graf a nejmenší netriviální strom, který má pouze triviální automorfismus. Ukažte, že nalezený příklad je nejmenší.

4.2.11. Kolik automorfismů mají všechny grafy na čtyřech vrcholech. Čeho si můžeme všimnout, abychom ušetřili polovinu práce?

4.2.12. Najděte příklad netriviálního grafu, který je pravidelný, ale není vrcholově tranzitivní.

4.2.13. Je graf na Obrázku 4.9. a) vrcholově tranzitivní? b) hranově tranzitivní?



Obrázek 4.9.: 3-pravidelný graf G .

4.2.14.* Ukažte, že Petersenův graf (Obrázek ??) má přesně 120 automorfismů.

4.2.15. Najděte příklad grafu, který má právě k automorfismů pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

4.2.16.^ Najděte graf, který je hranově tranzitivní, ale není vrcholově tranzitivní. Pokud takový graf neexistuje, pečlivě zdůvodněte.

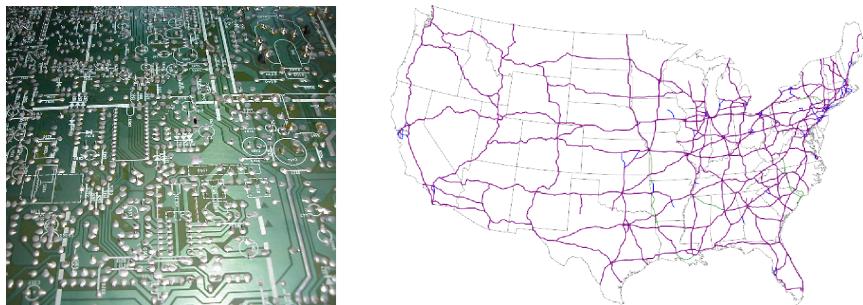
4.2.17. Najděte graf, který je vrcholově tranzitivní, ale není hranově tranzitivní. Pokud takový graf neexistuje, pečlivě zdůvodněte.

4.2.18.* Najděte příklad strnulého 3-pravidelného grafu na dvanácti vrcholech.

4.2.19. Ukažte, že graf G a jeho doplněk \overline{G} mají stejnou grupu automorfismů.

Kapitola 5. Vrcholová a hranová souvislost

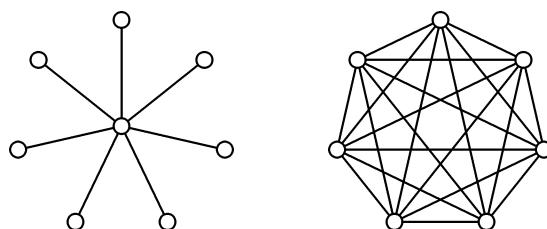
Jestliže nějaký graf reprezentuje komunikační síť, dopravní nebo i virtuální síť, je důležité vědět, jak odolná je taková síť vůči poruchám, které mohou narušit komunikaci nebo transport v síti. Výpadky mohou být dvojího druhu: porucha může nastat jednak v rámci každého spojení, které odpovídá hraně grafu, nebo v křižovatkách/uzlech sítě, které odpovídají vrcholům grafu. V této kapitole si ukážeme, jak takovou souvislost grafu měřit a že souvislost grafu je možno popsat číselným parametrem.



Obrázek 5.1.: Elektrická síť a dopravní síť (Eisenhowerův systém dálnic).

5.1. Míra souvislosti grafu

V kapitole 2.2. jsme zavedli pojem souvislosti grafu. Přestože oba grafy na Obrázku 5.2. jsou souvislé, tak je intuitivně zřejmé, že kompletní graf vpravo je „souvislejší“. Po odebrání libovolné hrany bude graf $K_{1,7}$ jistě nesouvislý, neboť se jedná o strom. Naproti tomu dokonce po odebrání libovolných pěti hran zůstane graf K_7 souvislý.



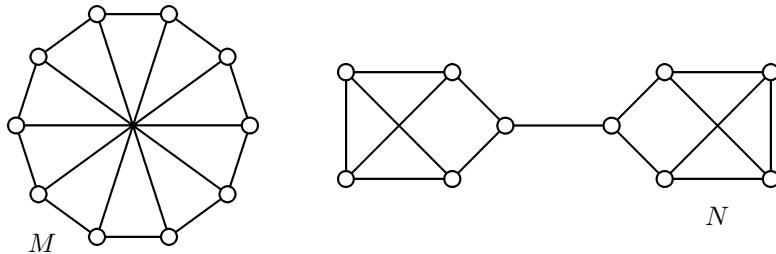
Obrázek 5.2.: Grafy $K_{1,7}$ a K_7 .

Dle Obrázku 5.2. by se na první pohled mohlo zdát, že vyšší nebo nižší souvislost je určena počtem hran grafu nebo nejmenším stupněm vrcholu v grafu. Není to pravda. Například grafy M a N na Obrázku 5.3. mají stejný počet vrcholů, jsou 3-pravidelné a podle principu sudosti (Věta 1.1.) tak mají také stejný počet hran. Po odebrání libovolných dvou vrcholů zůstane graf M souvislý, zatímco z grafu N stačí odebrat jeden (vhodně zvolený) vrchol a dostaneme nesouvislý graf. Podobně po odebrání libovolných dvou hran zůstane graf M souvislý, zatímco odebráním jediné (vhodně zvolené) hrany z grafu N dostaneme nesouvislý graf. Než si ukážeme, jak souvislost „měřit“, zavedeme několik pojmu.

Definice Vrcholová souvislost

Vrcholová souvislost (stručně jen *souvislost*) grafu je takový nejmenší počet vrcholů, které je třeba z grafu G vyněchat, abychom dostali nesouvislý graf nebo triviální graf. Vrcholovou souvislost grafu G značíme $\kappa(G)$. Řekneme, že graf G je *vrcholově k -souvislý* (stručně k -souvislý) pro $k \in \mathbb{N}$, jestliže $k \leq \kappa(G)$. Nesouvislý graf budeme považovat za 0-souvislý.

Všimněte si, jaký je rozdíl mezi pojmem vrcholové souvislosti grafu a pojmem vrcholové k -souvislosti grafu. Vrcholová souvislost je číslo, které je každému grafu přiřazeno jednoznačně, zatímco vrcholová k -souvislost je vlastnost, kterou graf buď má nebo nemá. Oba pojmy jsou takto zavedené proto, aby odpovídaly

Obrázek 5.3.: Dva 3-pravidelné grafy M a N .

přirozenému očekávání, že například každý 7-souvislý graf je také 6-souvislý, 5-souvislý atd. Je-li vrcholová souvislost grafu G rovna číslu $k \geq 1$, tak potom je G vrcholově k -souvislý, je ale také $(k-1)$ -souvislý, $(k-2)$ -souvislý, ..., 1-souvislý. Naproti tomu vrcholovou souvislost grafu G bychom mohli definovat (v některé literatuře je takto pojem vrcholové souvislosti definovaný) jako největší číslo k takové, pro které je graf G vrcholově k -souvislý. Pro netriviální souvislé grafy platí, že vynecháním libovolných $k-1$ vrcholů z k -souvislého grafu zůstane výsledný graf souvislý.

Definice Hranová souvislost

Hranová souvislost grafu je takový nejmenší počet hran, které je třeba z grafu G vynechat, abychom dostali nesouvislý graf nebo triviální graf. Hranovou souvislost grafu G značíme $\kappa'(G)$. Řekneme, že graf G je hranově k -souvislý pro $k \in \mathbb{N}$, jestliže $k \leq \kappa'(G)$. Nesouvislý graf budeme považovat za hranově 0-souvislý.

Hranovou souvislost grafu G je můžeme opět chápat jako největší číslo k takové, že graf G je hranově k -souvislý. Každý hranově k -souvislý graf je také hranově $(k-1)$ -souvislý, hranově $(k-2)$ -souvislý, atd. Pro netriviální souvislé grafy platí, že jsou hranově k -souvislé jestliže vynecháním libovolných $k-1$ hran zůstane výsledný graf souvislý.

Podle definice je vrcholová i hranová souvislost nesouvislého grafu rovna 0. Po krátkém rozmyšlení je jasné, proč je v definici vrcholové i hranové souvislosti explicitně zmíněn triviální graf. Pokud bychom vynechávali vrcholy z kompletního grafu, nikdy nedostaneme nesouvislý graf a vrcholová souvislost kompletního grafu by nebyla definována. A pokud bychom vynechali triviální graf z definice hranové souvislosti a měřili hranovou souvislost triviálního grafu, tak vynecháním žádného počtu hran nedostaneme nesouvislý graf a jeho hranová souvislost by nebyla definována. Zahrnutím triviálního grafu do definice nejenže je souvislost úplného grafu definována, ale má i hodnotu, kterou bychom přirozeně očekávali.

Otzázkы:

- Je každý graf, jehož a) vrcholová souvislost b) hranová souvislost je rovna 0, nesouvislý?
- Proč je kompletní graf K_n podle definice také $(n-1)$ -souvislý?
- Proč podle definice vrcholové k -souvislosti není kompletní graf K_n také n -souvislý?

Řezy

Při zkoumání souvislosti budeme odebírat různé množiny vrcholů a hran. Takovým množinám budeme říkat řezy.

Definice Vrcholový řez

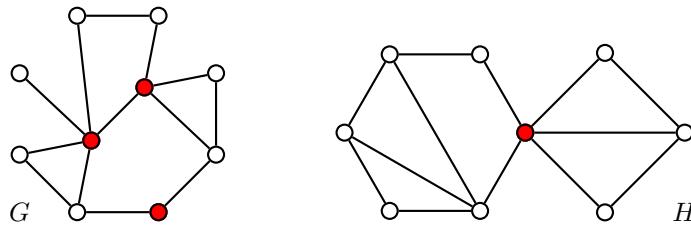
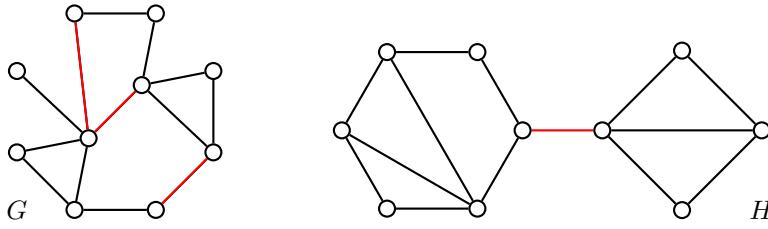
Každou množinu vrcholů, jejímž vynecháním dostaneme z grafu G nesouvislý graf a nebo triviální graf, nazýváme *vrcholový řez* (stručně jen *řez*) grafu G . Vrcholový řez, který obsahuje jediný vrchol, se nazývá *artikulace*.

Pojem artikulace můžeme rozšířit i pro nesouvislé grafy. Artikulací bude každý jednoprvkový vrcholový řez nějaké komponenty grafu.

Definice Hranový řez

Každou množinu hran, jejímž vynecháním dostaneme z grafu G nesouvislý graf a nebo triviální graf, nazýváme *hranový řez* grafu G . Hranový řez, který obsahuje jedinou hranu, se nazývá *most*.

Poznámka 5.1. Všimněte si, že když graf G obsahuje dvě komponenty, tak odebráním všech vrcholů jedné komponenty dostaneme souvislý graf. Taková množina vrcholů podle definice *není* vrcholovým řezem.

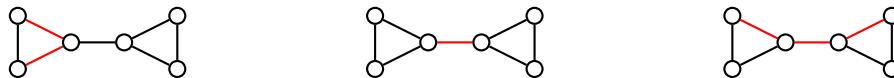
Obrázek 5.4.: Vrcholový řez grafu G a artikulace grafu H .Obrázek 5.5.: Hranový řez grafu G a most grafu H .

Naproti tomu i jiné než *nejmenší možné* množiny vrcholů, jejichž odebráním zůstane graf nesouvislý, definici splňují.

Poznámka 5.2. Minimální a nejmenší řez v grafu

V běžné řeči obvykle nevnímáme rozdíl mezi pojmy minimální a nejmenší, případně maximální a největší (oba pojmy jsme zavedli na straně 8). V matematice naopak rozlišujeme, zda pracujeme s nejmenší množinou, kdy máme obvykle na mysli velikost (počet prvků) nějaké množiny, nebo s minimální množinou, kdy danou množinu porovnáváme v inkluzi s jinými množinami.

Například hranový řez na Obrázku 5.6. vlevo je minimální, ale není nejmenší, uprostřed je hranový řez, který je minimální i nejmenší a hranový řez na obrázku vpravo není ani minimální ani nejmenší.



Obrázek 5.6.: Minimální hranový řez, minimální i nejmenší hranový řez a obecný hranový řez.

Odebereme-li všechny hrany incidentní s některým pevně zvoleným vrcholem, dostaneme nesouvislý graf. Podobně, odebereme-li z grafu všechny sousedy nějakého pevně zvoleného vrcholu, dostaneme nesouvislý graf nebo triviální graf. Následující věta ukazuje, že mezi hranovou souvislostí, vrcholovou souvislostí a nejmenším stupněm vrcholu je jednoznačný vztah.

Věta 5.1. *V libovolném grafu G platí $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.*

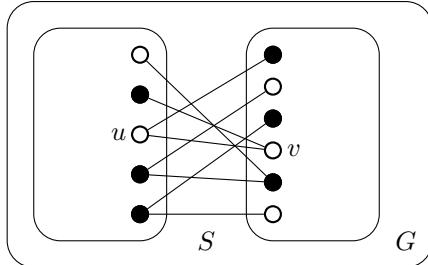
Důkaz. V triviálním grafu obě nerovnosti jistě platí, protože $\kappa(G) = \kappa'(G) = \delta(G) = 0$. I v nesouvislém grafu jsou obě nerovnosti splněny, neboť $0 = \kappa(G) = \kappa'(G) \leq \delta(G)$. V dalším můžeme předpokládat, že graf G je souvislý a netriviální.

Je zřejmé, že druhá nerovnost platí v každém grafu G . Vždy můžeme odebrat hrany incidentní s vrcholem, jehož stupeň je $\delta(G)$, proto hranová souvislost $\kappa'(G)$ nemůže být větší než $\delta(G)$. První nerovnost ukážeme indukcí vzhledem k počtu hran.

Základ indukce: Souvislý graf G s nejmenším počtem hran na daném počtu vrcholů je strom. Pro každý netriviální strom T tvrzení jistě platí, protože $\kappa(T) = 1 = \kappa'(T)$. Stačí odebrat hrany incidentní s listem nebo jediný vrchol sousední s listem a dostaneme nesouvislý graf, případně triviální graf, pokud $T \simeq T_2$.

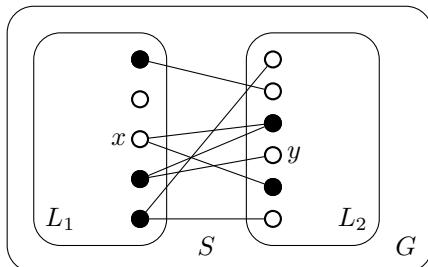
Indukční krok: Nyní předpokládejme, že věta platí pro libovolný graf s t hranami. Mějme graf G s $t+1$ hranami a označme S nějaký nejmenší hranový řez grafu G (Poznámka 5.2.). Podle definice hranové souvislosti je $\kappa'(G) = |S|$. Označme $G' = G - uv$, kde uv je libovolná hrana řezu S . Všimneme si, že jistě platí, že $S' = S \setminus \{uv\}$ je nejmenší hranový řez grafu G' , jinak by S' byl i hranovým řezem grafu G menším než S . Podle indukčního předpokladu platí $\kappa(G') \leq \kappa'(G') = |S'|$. Jestliže vrátíme hrani uv do grafu $G - S$, dostaneme souvislý graf (proč?), ve kterém je hrana uv mostem. Nyní zvolme pro každou hranu z množiny $S \setminus \{uv\}$ jeden koncový vrchol různý od u i od v (takový vrchol jistě existuje, proč?) a vynecháme ho z grafu G (na Obrázku 5.7. jsou vyznačeny plnými kolečky). Dostaneme graf H . Je-li H nesouvislý, potom $\kappa(G) \leq \kappa'(G') < \kappa'(G)$ a tvrzení platí. Je-li H souvislý, je buď $H \simeq K_2$ a nebo alespoň jeden z vrcholů u ,

v je artikulací (H má alespoň 3 vrcholy a mezi u a v nevede v H kromě hrany uv žádná cesta). V obou případech stačí odebrat jeden z vrcholů u , v abychom dostali nesouvislý graf nebo triviální graf. Proto je $\kappa(G) \leq \kappa(G') + 1 \leq \kappa'(G)$, protože $\kappa(G') < \kappa'(G)$, a tudíž $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$. \square

Obrázek 5.7.: Graf G s hranovým řezem S .

Jiný důkaz. Hrany incidentní s vrcholem stupně $\delta(G)$ tvoří hranový řez, a proto je druhá nerovnost splněna triviálně.

První nerovnost ukážeme přímo. Z definice vrcholové souvislosti je zřejmé, že $\kappa(G) \leq v(G) - 1$ (po odebrání vrcholů zůstane alespoň triviální graf). Označme S množinu hran nejmenšího hranového řezu, který rozdělí graf na dvě komponenty L_1 , L_2 . Pokud jsou všechny vrcholy v L_1 sousední se všemi vrcholy v L_2 , tak $\kappa'(G) = |S| = |L_1| \cdot |L_2| \geq v(G) - 1 \geq \kappa(G)$ a tvrzení platí. V opačném případě zvolme dva nesousední vrcholy $x \in V(L_1)$ a $y \in V(L_2)$.

Obrázek 5.8.: Graf G s hranovým řezem S spolu s grafem $G - S$ s komponentami L_1 a L_2 .

Nyní sestavíme množinu vrcholů T , která bude obsahovat všechny vrcholy z $L_1 - x$, které jsou sousední s některým vrcholem z komponenty L_2 , a všechny vrcholy v komponentě L_2 , které jsou sousední s vrcholem x (na Obrázku 5.8. jsou vrcholy v T vyznačeny plnými kolečky). T je vrcholový řez, neboť každá cesta z L_1 do L_2 obsahuje některý vrchol z T . Platí $|T| \leq |S|$, protože S obsahuje všechny hrany z x do vrcholů v $T \cap V(L_2)$ a všechny hrany z $V(L_1 - x)$ do $V(L_2)$ (ke každému vrcholu v T najdeme alespoň jednu různou hranu v S). Proto $\kappa(G) \leq |T| \leq |S| = \kappa'(G)$ a tím je věta dokázána. \square

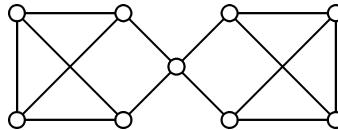
Je zajímavé si uvědomit, jaký praktický význam má tvrzení Věty 5.1. Pro zajištění souvislosti musíme dbát na vrcholovou souvislost, hranová souvislost bude automaticky splněna. Pozorování můžeme i obrátit. Pokud záškodník chce narušit souvislost síť, tak vyřazením vrcholů grafu dosáhne svého cíle obvykle snadněji, než přerušením spojení. A proto i ochrana by se měla soustředit na vrcholy hranových řezů malé velikosti.

Obě nerovnosti ve Větě 5.1. mohou být neostré, přičemž rozdíl stran v každé z nich může být velký. Například v grafu G , ve kterém dva kompletní grafy K_x sdílí jediný vrchol, je $\kappa(G) = 1$ a $\kappa'(G) = x - 1 = \delta(G)$. Na druhou stranu v nesouvislém grafu H , který má dvě komponenty K_x , je $\kappa(H) = \kappa'(H) = 0$, $\delta(H) = x - 1$.

Otzáka: Proč nestačí v induktivním důkazu Věty 5.1. zvolit za základ indukce graf $T = K_2$?

Následující věta ukazuje, že pro některé speciální třídy grafů rozdíly velké být nemohou. Důkaz je ponechán jako Cvičení 5.1.8. Další podobné omezení je diskutováno ve Cvičení 5.1.6.

Věta 5.2. V každém 3-pravidelném grafu G platí $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

Obrázek 5.9.: Graf G , pro který platí $\kappa(G) < \kappa'(G) < \delta(G)$.

Na Obrázku 5.9. je příklad grafu G , ve kterém jsou obě nerovnosti ve Větě 5.1. ostré: $\kappa(G) < \kappa'(G) < \delta(G)$. V G je $\kappa(G) = 1$, $\kappa'(G) = 2$ a $\delta(G) = 3$. Všimněte si, že uvedený příklad grafu neodporuje Větě 5.2., protože G není 3-pravidelný (jeden jediný vrchol je stupně jiného než 3).

V některých knihách se rozlišuje mezi pojmem *separující množina vrcholů*, což je libovolná množina vrcholů S taková, že $G - S$ má alespoň dvě komponenty a mezi *vrcholovým řezem*, což je pak nějaká nejmenší separující množina vrcholů. Podobně se rozlišuje *separující množina hran* a *hranový řez*. Následující věta pak platí nejen pro mosty, ale je možno ji zobecnit pro libovolný *minimální hranový řez*, ale ne pro obecnou separující množinu hran.

Věta 5.3. *Hrana e je most v souvislém grafu G právě tehdy, když $G - e$ není souvislý a má právě dvě komponenty.*

Důkaz. Jedná se o ekvivalenci, dokážeme obě implikace.

„ \Rightarrow “ Jestliže hrana e je most v grafu G , tak podle definice mostu $G - e$ není souvislý graf. Není možné, aby graf $G - e$ měl více než dvě komponenty, protože hrana e má právě dva koncové vrcholy z nejvýše dvou komponent. Pokud by graf $G - e$ měl více než dvě komponenty, tak vrácením hrany e do $G - e$ by nevznikl souvislý graf.

„ \Leftarrow “ Jestliže graf G je souvislý a graf $G - e$ není souvislý, tak $\{e\}$ je hranový řez s jedinou hranou (mostem) grafu G . \square

Cvičení

5.1.1. *Ukažte, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ $2k$ -pravidelný graf neobsahuje most.*

5.1.2. *Označme $\kappa'(G) = k$, kde $k > 0$ a nechť F je libovolná množina nějakých k hran z $E(G)$. Ukažte, že potom $\omega(G - F) \leq 2$.*

5.1.3. *Pro každé $k > 0$ nalezněte k -souvislý graf G a takovou množinu vrcholů $V' \subseteq V(G)$, $|V'| = k$, že $\omega(G - V') > 2$.*

5.1.4. *Pro každé $k > 0$ a $r > 1$ nalezněte k -souvislý graf G a takovou množinu vrcholů $V' \subseteq V(G)$, $|V'| = k$, že $\omega(G - V') > r$.*

5.1.5. *Dokažte, že pro každý hranově k -souvislý graf $G = (V, E)$ platí $|E| \geq k|V|/2$.*

5.1.6. *Nechť v grafu G platí $\delta(G) \geq |V(G)| - 2$. Ukažte, že potom platí $\kappa(G) = \delta(G)$. Najděte graf G' , pro který platí $\delta(G') = |V(G')| - 3$ a $\kappa(G') < \delta(G')$.*

5.1.7. *Nechť v grafu G platí $\delta(G) \geq |V(G)|/2$. Ukažte, že potom platí $\kappa'(G) = \delta(G)$. Najděte graf G' , pro který je $\delta(G') = \lfloor (|V(G')|/2) - 1 \rfloor$ a $\kappa'(G') < \delta(G')$.*

5.1.8. *Dokažte Větu 5.2., tj. že v každém 3-pravidelném grafu G platí $\kappa(G) = \kappa'(G)$.*

5.1.9. *Ukažte, že graf je strom právě tehdy, když každá jeho hrana je most. Platí, že graf je strom právě tehdy, když každý jeho vrchol je artikulace?*

5.1.10. *Dokažte, že souvislý graf G je unicyklický právě tehdy, když $|V(G)| = |E(G)|$.*

5.1.11. *Dokažte, že hrana souvislého grafu je most právě tehdy, když neleží v žádném cyklu.*

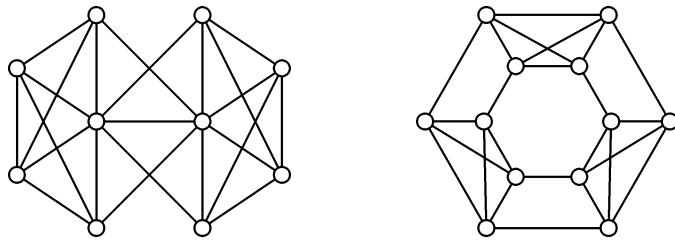
5.1.12. *Nechť G je k -souvislý a nechť H je graf, který vznikne z G přidáním vrcholu v a k hran vv_i , $i = 1, 2, \dots, k$, kde v_i jsou navzájem různé vrcholy grafu G . Ukažte, že H je k -souvislý. Mohl by být $(k+1)$ -souvislý?*

5.1.13. *Nechť G je k -souvislý graf na n vrcholech a nechť H je graf, který vznikne z G přidáním vrcholu v a n hran vv_i , $i = 1, 2, \dots, n$, kde v_i jsou navzájem různé vrcholy grafu G . Ukažte, že H je $(k+1)$ -souvislý.*

5.1.14. *Pro libovolná přirozená čísla a, b, c taková, že $0 < a \leq b \leq c$, sestrojte graf G , pro který platí $\kappa(G) = a$, $\kappa'(G) = b$ a $\delta(G) = c$.*

5.1.15. Nechť pro graf G platí $\kappa(G) \geq 1$, $\kappa'(G) \geq 1$. Jaké jsou možné hodnoty $\kappa(G-v)$, $\kappa(G-e)$, $\kappa'(G-v)$, $\kappa'(G-e)$?

5.1.16. Určete $\kappa(G)$, $\kappa'(G)$ a $\delta(G)$ grafů G a H na Obrázku 5.10.

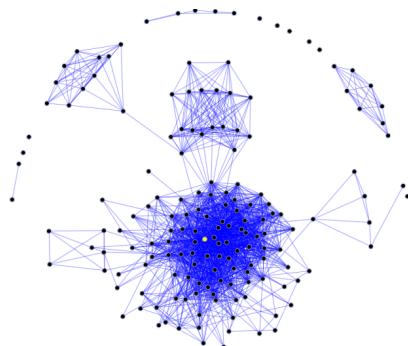


Obrázek 5.10.: Grafy G a H .

5.1.17. Ukažte, že každý souvislý 3-pravidelný bipartitní graf je vrcholově 2-souvislý.

5.2. Bloky a artikulace grafů

Při zkoumání vrcholové souvislosti grafů, které reprezentují komunikační nebo sociální sítě, se často setkáme s grafy, které jako celek mají malou vrcholovou souvislost $\kappa(G)$, ale některé části grafu jsou naopak „velmi souvislé“, tj. existují podgrafy s vysokou souvislostí. Na Obrázku 5.11. je příklad takového grafu, který reprezentuje vztahy v určité skupině lidí (v obrázku je vyznačen žlutě). V dalším textu se pokusíme zmíněný jev formalizovat.



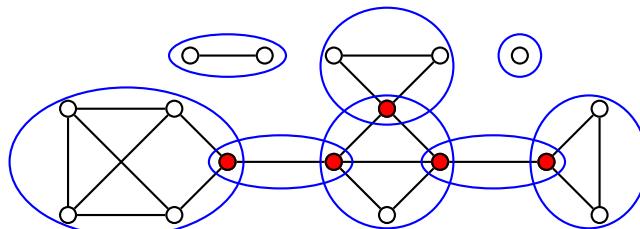
Obrázek 5.11.: Příklad grafu, který reprezentuje vztahy v určité skupině lidí.

Definice Blok grafu je maximální souvislý podgraf daného grafu, který nemá artikulaci. Souvislý graf, který nemá artikulaci, se nazývá blok.

Alternativně bychom definici bloku mohli vyslovit popisem vlastnosti (bez užití pojmu artikulace).

Definice Blok grafu je maximální 2-souvislý podgraf daného grafu nebo K_2 . Graf se nazývá blok, jestliže je 2-souvislý nebo K_2 .

Připomeňme, že slovo „maximální“ v definici bloku neznamená „největší“, ale vztahuje se k inkluzi: je-li B blok grafu G , tak neexistuje jiný takový blok B' grafu G , aby blok B byl vlastním podgrafem bloku B' (viz také strana 8). Na Obrázku 5.12. jsou znázorněny bloky grafu. Podgraf K_1 může být blokem grafu jen je-li v triviální komponentě grafu. Podgraf K_2 (hrana) může být blokem grafu jen v případě, že hrana je mostem v daném grafu, protože každá hrana, která leží na nějakém cyklu je součástí bloku, který tento (2-souvislý) cyklus obsahuje.



Obrázek 5.12.: Graf G , ve kterém jsou zvýrazněny bloky a artikulace.

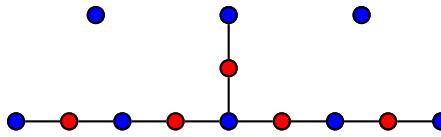
Věta 5.4. *Každé dva bloky grafu G sdílí nejvýše jeden společný vrchol. Takový společný vrchol je artikulace grafu G .*

Důkaz. Tvrzení ukážeme sporem. Pokud by dva bloky B_1 a B_2 daného grafu G obsahovaly alespoň dva společné vrcholy x, y , tak sjednocením bloků $B_1 \cup B_2$ dostaneme souvislý podgraf bez artikulace. Vskutku, odebráním libovolného vrcholu z bloku B_1 nebo B_2 neporušíme souvislost, protože B_1 i B_2 jsou bloky. Také po odebrání jednoho společného vrcholu x zůstane podgraf $(B_1 \cup B_2) - x$ souvislý, protože libovolný (u, v) -sled mezi bloky můžeme získat spojením (u, y) -sledu a (y, v) -sledu.

Zbývá ukázat, že společný vrchol, pokud existuje, je artikulace. Pokud by společný vrchol nebyl artikulací (řezem), tak i po jeho vynechání by zůstal podgraf $(B_1 \cup B_2) - x$ souvislý a B_1 ani B_2 by nemohly být dva různé bloky. \square

Blokový–artikulační graf

Máme-li daný nějaký graf G , který reprezentuje vztahy mezi vrcholy (lidmi, objekty, …), tak Věta 5.4. může pomoci při studiu struktury grafu s vrcholovou souvislostí $\kappa(G) = 1$. Sestavíme bipartitní graf, ve kterém vrcholy jedné partity budou odpovídat artikulacím grafu G a v druhé partitě bude za každý blok B_i grafu G jeden vrchol b_i . Hranou vb_i spojíme dva vrcholy bipartitního grafu právě tehdy, když se artikulace v nachází v bloku B_i . Výsledný graf nazveme *blokový–artikulační graf* a značíme jej $\text{Blok}(G)$. Na Obrázku 5.13. je graf $\text{Blok}(G)$ grafu G z Obrázku 5.12. Ve Cvičení 5.2.3. ukážeme, že graf $\text{Blok}(G)$ je acyklický a pokud je graf G souvislý graf, tak $\text{Blok}(G)$ bude strom.



Obrázek 5.13.: *Graf $\text{Blok}(G)$, jehož modré vrcholy odpovídají blokům a červené vrcholy artikulacím grafu G z Obrázku 5.12.*

2-souvislé grafy

Každý blok grafu je 2-souvislý graf. Ukážeme, že v každém 2-souvislém grafu existují mezi každou dvojicí vrcholů dvě „nezávislé“ cesty. Nejprve formálně popíšeme, co rozumíme pod pojmem „nezávislé“ cesty.

Definice Interně disjunktní cesty

Dvě (u, v) -cesty jsou (*vrcholově*) *interně disjunktní*, jestliže nemají žádný společný vrchol s výjimkou koncových vrcholů u a v . Dvě (u, v) -cesty jsou *hranově disjunktní*, jestliže nemají žádnou společnou hranu.

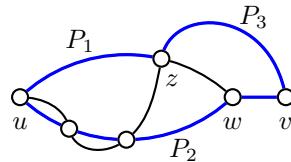
Věta 5.5. *Graf s alespoň třemi vrcholy je 2-souvislý právě tehdy, když každé dva jeho různé vrcholy jsou spojeny dvěma interně disjunktními cestami.*

Důkaz. Jedná se o ekvivalenci, proto ukážeme obě implikace.

„ \Rightarrow “ Předpokládejme, že graf G je 2-souvislý. Indukcí vzhledem ke vzdálenosti $\text{dist}(u, v)$ ukážeme, že mezi každými dvěma různými vrcholy u a v existují dvě interně disjunktní cesty.

Základ indukce: Předpokládejme nejprve, že $\text{dist}(u, v) = 1$. Potom, protože G je 2-souvislý, je i hranově 2-souvislý (dle Věty 5.1.) a hrana uv není mostem G . Podle Cvičení 5.1.11. leží hrana v nějakém cyklu. Hrana uv je jednou z uv -cest a zbyvající hrany cyklu tvoří druhou interně disjunktní uv -cestu.

Indukční krok: Označme $k = \text{dist}(u, v)$ a označme w předposlední vrchol před v na nejkratší (u, v) -cestě. Protože $\text{dist}(u, w) = k - 1$, tak podle indukčního předpokladu existují v G dvě interně disjunktní (u, w) -cesty P_1 a P_2 . Pokud v leží na některé z cest P_1 nebo P_2 , tak protože jsou interně disjunktní, dostaneme jejich spojením cyklus a z něj dvě interně disjunktní (u, v) -cesty. Pokud v neleží na $P_1 \cup P_2$, tak odebráním w z 2-souvislého grafu G dostaneme souvislý graf a v něm najdeme (u, v) -cestu P_3 (P_3 neobsahuje w). Jestliže jsou cesty P_1 , P_2 a P_3 navzájem disjunktní, tak P_1 spolu s hranou wv a cesta P_3 jsou hledané interně disjunktní (u, v) -cesty. Pokud má P_3 společný vnitřní vrchol s P_1 nebo P_2 , tak poslední takový vrchol na (u, v) -cestě P_3 označíme z (protože P_3 není kratší než P_1 nebo P_2 , tak z není sousední s v). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že z je vnitřní vrchol cesty P_1 (Obrázek 5.14.). Nyní (u, w) -cesta P_2 spolu s hranou wv a

Obrázek 5.14.: Cesty P_1 , P_2 , P_3 a dvě interně disjunktní (u, v) -cesty v grafu G .

(u, z) -podcesta cesty P_1 spolu s (z, v) -podcestou cesty P_3 tvoří dvě interně disjunktní (u, v) -cesty a tím je tvrzení dokázáno.

„ \Leftarrow “ Tato implikace je jednoduchá. Pokud jsou každé dva různé vrcholy u a v grafu G spojeny dvěma interně disjunktními cestami, tak po vynechání libovolného jednoho vrcholu (různého od u , v), jsou oba vrcholy u , v navzájem dosažitelné po alespoň jedné zbývající cestě. Proto graf G neobsahuje artikulaci a je (alespoň) 2-souvislý. \square

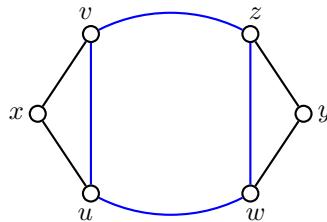
Tvrzení Věty 5.5. zobecníme i pro k -souvislé grafy v Mengerových větách na straně 58. Nyní dokážeme dvě tvrzení, která využijeme pro řadu důkazů ve cvičeních. S využitím Věty 5.1. bychom mohli obě následující věty přeformulovat i pro hranově 2-souvislé grafy.

Věta 5.6. *Každé dva vrcholy 2-souvislého grafu leží na společném cyklu.*

Důkaz. Mějme dva různé vrcholy $u, v \in G$. Protože G je 2-souvislý, tak podle Věty 5.5. existují mezi u a v dvě interně disjunktní cesty $P = (u = x_1, x_2, \dots, x_n = v)$ a $Q = (u = y_1, y_2, \dots, y_n = v)$. Spojením cest P a Q dostaneme cyklus, který obsahuje oba vrcholy u a v . \square

Věta 5.7. *Každé dvě hrany 2-souvislého grafu leží na společném cyklu.*

Důkaz. V důkazu využijeme právě dokázanou Větu 5.6. Máme nějaký 2-souvislý graf G a v něm libovolné hrany uv a wz . Do G přidáme dva nové vrcholy x a y a spojíme je hranami xu , xv a yw , yz . Dostaneme graf G' , který je také 2-souvislý (proč?).

Obrázek 5.15.: Konstrukce cyklu C , který obsahuje hrany uv a wz .

Nyní podle Věty 5.6. je graf G' 2-souvislý a vrcholy x a y leží na společném cyklu C' , který nemůže obsahovat hrany uv a wz (Obrázek 5.15.). Nyní stačí v cyklu C' nahradit cestu (u, x, v) hranou uv a cestu (w, y, z) hranou wz . Dostaneme cyklus C , který obsahuje hrany uv a wz . \square

Otzáka: Která verze Vět 5.6. a 5.7. je silnější, pro vrcholovou 2-souvislost nebo pro hranovou 2-souvislost?

Mengerovy věty

Tvrzení Věty 5.5. je možno zobecnit pro libovolný počet k interně disjunktních cest. Analogické tvrzení platí i pro hranově disjunktní cesty.

Věta 5.8. Mengerovy věty

Graf G je k -souvislý právě tehdy, když mezi libovolnými dvěma vrcholy grafu G existuje alespoň k interně disjunktních cest.

Graf G je hranově k -souvislý právě tehdy, když mezi libovolnými dvěma vrcholy grafu G existuje alespoň k hranově disjunktních cest.

Větu ponecháme bez důkazu.

Všimněte si, že hranově disjunktní cesty *mohou* sdílet vrcholy. Proto i z Mengerových vět ihned plyne, že vrcholově k -souvislý graf je současně hranově k -souvislý, avšak hranově k -souvislý graf nemusí být vrcholově k -souvislý. Můžeme tak považovat tvrzení zaručující existenci k -vrcholově disjunktních cest v k -souvislému grafu za silnější, než jeho hranovou analogii.

Cvičení

5.2.1. Graf G' nazveme rozdelením grafu G , jestliže vznikne z G přidáním vrcholů stupně 2 do jeho hran, tedy hranu uv nahradíme dvojicí hran uw a wv , kde w je nový vrchol G' , nebo dokonce (u, v) -cestou u, w_1, w_2, \dots, v (definice je na straně 89). (Graf G' potom také nazýváme homeomorfním obrazem nebo homeomorfem grafu G .) Použijte rozdelení grafu pro důkaz Věty 5.7.

5.2.2. Nechť netriviální souvislý graf G neobsahuje sudé cykly. Dokažte, že potom každý blok grafu G je buď K_2 nebo lichý cyklus.

5.2.3. Máme dán graf G . Ukažte, že graf $\text{Blok}(G)$ je acyklický a je-li G souvislý, tak $\text{Blok}(G)$ je strom.

5.2.4. Ukažte, že každý souvislý graf, který není blokem, obsahuje alespoň dva koncové bloky. Koncový blok je blok, obsahující jedinou artikulaci.

5.2.5. Můžeme v zadání předchozího Cvičení 5.2.4. vynechat požadavek souvislosti?

5.2.6. Můžeme v zadání Cvičení 5.2.4. místo souvislosti požadovat existenci alespoň jedné hrany?

5.2.7. Určete největší množství artikulací, které mohou ležet v souvislém grafu na n vrcholech.

5.2.8. Jaké je největší množství artikulací, které mohou ležet v jediném bloku konečného grafu na n vrcholech.

5.2.9. Nechť G na více než dvou vrcholech má $\kappa(G) = 1$. Ukažte, že potom G obsahuje takovou artikulaci w , že všechny bloky obsahující w s výjimkou nejvýše jednoho, jsou koncovými bloky G .

5.2.10. Ukažte, že souvislý sudý graf (sudý graf má všechny vrcholy sudého stupně) neobsahuje žádný most.

Kapitola 6. Párování a pokrytí

6.1. Párování

V této kapitole se budeme věnovat pojmu *párování*. Jak název naznačuje, budeme tvořit páry, dvojice. Párování souvisí s řadou praktických problémů. Vezmeme například skupinu pracovníků, kteří v rámci podniku často komunikují telefonem při řešení společných úkolů. Sestavíme graf, jehož vrcholy odpovídají pracovníkům a každá dvojice, která spolu pravidelně komunikuje telefonem, bude spojena hranou. Je přirozené zjistit, kolik pracovních hovorů můžeme vést současně (konferenční hovory neuvažujeme). Hledáme co největší nezávislou množinu hran v grafu. Uvědomte si, že omezení úlohy není dáno technickými možnostmi telefonní ústředny, ale strukturou grafu: kdo s kým potřebuje a kdo může komunikovat, protože každý člověk může v danou chvíli komunikovat jen s jedním dalším člověkem.

Na straně 62 popíšeme další úlohu, tzv. „přiřazovací problém“, který odpovídá hledání párování v bipartitním grafu.

Definice Párování v grafu

Nezávislá množina hran M grafu G se nazývá *párováním*. Říkáme, že koncové vrcholy hran v M jsou *spárovány*.

Párování budeme obvykle označovat písmenem M z anglického „matching“.

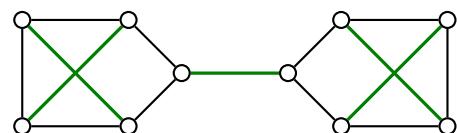
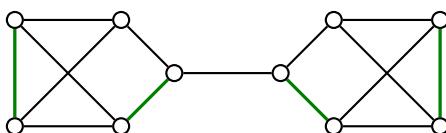
Maximální a největší párování

Definice Řekneme, že párování M je *největší*, jestliže pro každé párování M' v grafu G platí $|M| \geq |M'|$. Párování M nazveme *maximální*, jestliže pro každé párování M' takové, že $M \subseteq M'$, platí $M = M'$.

Jinými slovy, párování je maximální, pokud do něj není možné žádnou hranu přidat. Všimněte si, že největší párování je vždy maximální, ale opačná implikace neplatí. Párování M může být maximální, žádnou hranu již není možné do párování přidat, přitom však nemusí být největší. Rozdíl pojmu největší a maximální párování je ilustrován na Obrázcích 6.1. a 6.2.



Obrázek 6.1.: Cesta P_6 s maximálním párováním a s největším párováním.



Obrázek 6.2.: Graf s maximálním párováním, které není největší a stejný graf s největším párováním.

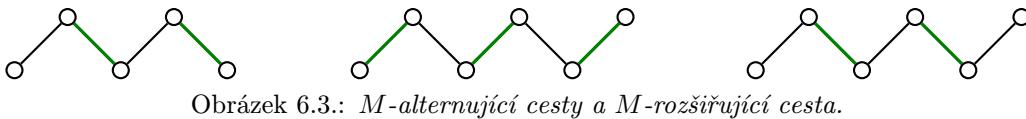
M -alternující a M -rozšiřující cesty

Ukážeme, že existuje poměrně jednoduchá nutná a postačující podmínka pro to, aby nějaké párování M grafu G bylo největší. Abychom mohli podmínu popsat zavedeme následující pojmy.

Definice Je-li M nějaké párování v grafu G , vrchol v nazveme *M -satuovaný*, jestliže je koncovým vrcholem nějaké hrany v M . Jinak se v nazývá *M -nesatuovaný*. Párování M se nazývá *úplné* (nebo též *perfektní*), jestliže je každý vrchol grafu G M -satuovaný.

Cesta P v grafu G se nazývá *M -alternující*, jestliže se na cestě P pravidelně střídají hrany, které leží v párování M a hrany, které do M nepatří. Jestliže navíc oba koncové vrcholy nějaké M -alternující cesty P jsou M -nesaturowané, říkáme, že cesta P je *M -rozšiřující cesta*.

Cesty na Obrázku 6.3. jsou M -alternující, cesta vpravo je i M -rozšiřující. V dalším textu se zaměříme na hledání největšího párování v daném grafu. Párování, které je v daném grafu největší, budeme značit

Obrázek 6.3.: *M-alternující cesty a M-rozšiřující cesta.*

M^* (všimněte si, že takových párování může existovat několik). Jestliže existuje úplné párování v nějakém grafu G , říkáme, že G má úplné párování.

Otzázkы:

- Najdete v Obrázku 6.2. *M-rozšiřující cestu*?
- Je některé párování na Obrázcích 6.1. a 6.2. úplné?

Věta 6.1. *Párování M v grafu G je největší právě tehdy, když graf G neobsahuje žádnou M -rozšiřující cestu.*

Důkaz. Jedná se o ekvivalenci, ukážeme obě implikace $P \Leftrightarrow T$.

„ \Rightarrow “ Postupujeme nepřímo. Předpokládejme, že G obsahuje nějakou M -rozšiřující cestu P . Ukážeme, že pak párování M není největší.

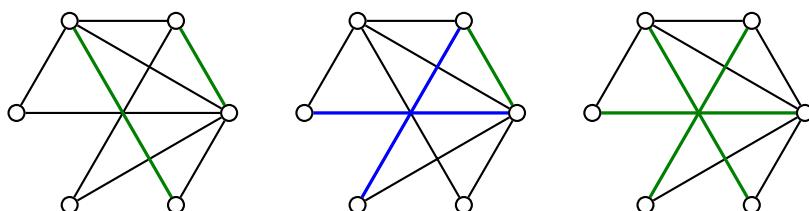
Každý vnitřní vrchol cesty P je incidentní s jednou hranou patřící do M a jednou hranou, která do M nepatří. Koncové vrcholy cesty P nejsou podle definice incidentní s žádnou hranou v M , proto můžeme z M vynechat všechny hrany, které leží na cestě P (tj. každá druhá hrana cesty P) a místo nich do M přidat všechny hrany cesty P , které do párování M nepatřily (takových hran je o jednu více, včetně první a poslední hrany). Dostaneme párování M' , které má o jednu hranu více než párování M a proto nebylo párování M největší.

„ \Leftarrow “ Opět postupujeme nepřímo. Předpokládejme, že M není největší párování, tj. existuje větší párování M' . Ukážeme, že G obsahuje nějakou M -rozšiřující cestu.

Sestavíme graf $H = (V(G), E)$, kde do E dáme všechny takové hrany, které patří jen do jednoho párování M nebo M' (E je symetrická diference množin M a M'). Protože každý vrchol grafu G je incidentní s nejvýše jednou hranou z některého párování M a M' , je $\Delta(H) \leq 2$. To znamená, že každá komponenta grafu H je buď cyklus nebo cesta. Navíc, protože se v každém takovém cyklu pravidelně střídají hrany z párování M a z párování M' , jsou všechny cykly v grafu H sudé délky.

Protože M' je větší párování než M , tak graf H musí obsahovat alespoň jednu komponentu, která má více hran z párování M' než z párování M . Každá triviální komponenta grafu H a každý sudý cyklus mají sudý počet hran, proto musí graf H obsahovat alespoň jednu cestu P liché délky takovou, že obsahuje o jednu hranu z párování M' více než z párování M . Cesta P je současně M -rozšiřující cestou v grafu G . \square

Příklad 6.1. Je párování M v grafu G na Obrázku 6.4. největší? Pokud ne, najděte největší párování.

Obrázek 6.4.: *Graf G s párováním M , M -rozšiřující cesta a párování M' .*

Protože párování M není úplné, zkuste najít M -rozšiřující cestu. Taková cesta je vyznačena na Obrázku 6.4. uprostřed: zelené hrany do párování M patří a modré hrany do párování M nepatří. Záměnou zelené hrany v množině M za modré hrany dostaneme větší párování M' , které je na Obrázku 6.4. vpravo. ✓

Věta 6.1. dává nejen nutnou a postačující podmítku, kdy je nějaké párování grafu G největší, ale navíc její důkaz dává postup, jak největší párování sestavit. Potřebujeme jen efektivní algoritmus pro hledání M -rozšiřujících cest. Jeden možný postup je následující: můžeme začít množinou nesaturovaných vrcholů a hledat všechny vrcholy (postupem do šírky nebo do hloubky) dosažitelné po alternujících cestách. Pro každý vrchol uchováme informaci o jeho předchůdci na M -rozšiřující cestě. Jakmile takový vrchol najdeme, můžeme zpětně zrekonstruovat alternující cestu a záměnou hran této cesty, které do cesty patří a které ne, zvýšit počet hran v párování.

Cvičení

6.1.1. Kolo W_{n+1} je graf, který vznikne z cyklu C_n s vrcholy v_1, v_2, \dots, v_n přidáním vrcholu v_0 a všech hran $v_0v_1, v_0v_2, \dots, v_0v_n$. Určete, pro které hodnoty n má W_{n+1} úplné párování.

6.1.2. Které úplné tripartitní grafy mají úplné párování?

6.1.3. Kolik různých úplných párování mají grafy a) K_n , b) C_n ?

6.1.4. Dokažte, že strom má nejvíše jedno úplné párování.

6.1.5. Pro každé $k > 1$ najděte příklad k -pravidelného grafu, který nemá úplné párování.

6.1.6. Pro každé $p > 0$ najděte graf G a takové jeho maximální párování M , že pro největší párování M^* v grafu G platí $|M^*| = |M| + p$.

6.1.7. [?] Pro každé $p > 0$ najděte souvislý graf G , že pro největší párování M^* v grafu G platí $|V(G)| = 2|M^*| + p$.

6.1.8. Dva hráči hrají následující hru. Střídavě obarvují vrcholy grafu G tak, že první hráč obarvuje modrou barvou, druhý hráč červenou barvou a každý musí vybarvit některý nevybarvený vrchol, který je sousední s vrcholem, jež jeho protihráč vybarvil v předchozím tahu. Ten hráč, který nemůže obarvit další vrchol podle pravidel, prohrál. Ukažte, že první hráč může vyhrát vždy, když G nemá úplné párování a druhý hráč může vždy vyhrát, když graf G má úplné párování.

6.2. Párování v bipartitních grafech

Na straně 24 bylo zavedeno okolí vrcholu v jako množina $N_G(v)$ všech vrcholů, které jsou sousední s vrcholem v v grafu G . Podobně zavedeme „ryzí“ okolí množiny bodů.

Definice Okolí množiny vrcholů

Je-li $S \subseteq V(G)$, tak okolí množiny S jsou všechny vrcholy grafu G , které jsou sousední s alespoň jedním vrcholem v S a zároveň nepatří do S . Okolí množiny S budeme značit $N_G(S)$ nebo $N(S)$.

Okolí množiny S můžeme také definovat množinovým zápisem jako

$$N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N(v) \setminus S.$$

Příklad 6.2. Úplné párování v grafu $K_{n,n}$ s partitami U a W

Na párování grafu $K_{n,n}$ se můžeme dívat jako na bijekci z partity U do partity W . Úplné párování tak přiřadí každému vrcholu partity $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ právě jeden vrchol partity W a naopak každému vrcholu partity W lze přiřadit právě jeden vrchol partity U . Protože existuje $n!$ různých bijekcí mezi n -prvkovými množinami, tak v grafu $K_{n,n}$ existuje $n!$ různých úplných párování.

Přiřazovací problém

Pojem bipartitního grafu přirozeně využívá praktických aplikací, kdy vrcholy grafu mají dva různé významy. Bipartitním grafem můžeme například modelovat situaci, kdy máme množinu úkolů, které je nutno vykonat a množinu pracovníků, kteří mohou mít různou kvalifikaci, každý pro vykonání určité podmnožiny úkolů. Hrany takového grafu spojují vždy pracovníka s několika úkoly, žádné hrany nespojují vrcholy, které odpovídají dvěma pracovníkům nebo dvěma úkolům.

Po chvíli přemýšlení si všimneme, že má-li bipartitní graf úplné párování, tak musí

- obě partity mít stejný počet vrcholů,
- každý vrchol být stupně alespoň 1 (každý vrchol z jedné partity musí být sousední s alespoň jedním vrcholem z druhé parity),
- každé dva vrcholy z jedné partity musí být sousední s alespoň dvěma vrcholy z druhé parity,
- každé tři vrcholy z jedné partity musí být sousední s alespoň třemi vrcholy z druhé parity...

Je zřejmé, že poslední dvě podmínky musí platit pro libovolnou podmnožinu vrcholů v jedné partitě. Následující věta (v anglické literatuře se jí často říká „Marriage theorem“) říká, že takováto nutná podmínka pro existenci úplného párování je zároveň postačující. Všimněte si, že věta je zformulována tak, aby platila i pro $K_{m,n}$, kde $m \neq n$.

Věta 6.2. Hallova věta

Nechť G je bipartitní graf s partitami U a W . Graf G má párování M , které saturuje všechny vrcholy množiny U právě tehdy, když $|S| \leq |N(S)|$ pro každou podmnožinu $S \subseteq U$.

Důkaz. Jedná se o ekvivalenci, ukážeme obě implikace $P \Leftrightarrow T$.

„ \Rightarrow “ První implikace je snadná. Je-li M párování, které saturuje všechny vrcholy množiny U , potom ke každému vrcholu $u \in U$ existuje právě jeden (různý) vrchol $w \in W$ takový, že $uw \in M$. Proto pro každou podmnožinu $S \subseteq U$ bude podmnožina $N(S) \subseteq W$ také obsahovat alespoň tolik vrcholů jako S a platí $|N(S)| \geq |S|$.

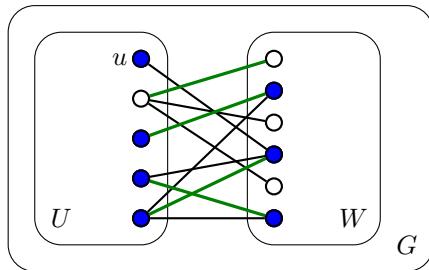
„ \Leftarrow “ Důkaz provedeme nepřímo. Ukážeme, že je-li M^* největší párování v G a M^* nesaturuje všechny vrcholy U , potom najdeme takovou množinu $S \subseteq U$, že $|N(S)| < |S|$.

Označme u některý z nesaturovaných vrcholů v množině U (podle předpokladu takový vrchol existuje). Dále označme Z množinu všech vrcholů bipartitního grafu G , které jsou dosažitelné z vrcholu u po nějaké M^* -alternující cestě. Všimneme si, že vrchol u je jediný nesaturovaný vrchol v množině Z , všechny ostatní vrcholy v Z jsou saturovány, protože jinak by M^* nebylo největší párování (dvě Věty 6.1.). Nyní označíme

$$S = Z \cap U, \quad T = Z \cap W.$$

Protože každá M^* -alternující cesta z u spáruje jeden z vrcholů v T s jedním vrcholem v $S \setminus \{u\}$, jistě platí

$$|T| = |S| - 1.$$



Obrázek 6.5.: Bipartitní graf s párováním M^* a modře vyznačenými vrcholy v množině Z .

Z konstrukce množin S a T je zřejmé, že $T \subseteq N(S)$ (Obrázek 6.5.). Ukážeme, že dokonce $T = N(S)$, neboť v $N(S) - T$ nemůže být žádný vrchol x , protože x by byl dosažitelný z u po M^* -alternující cestě liché délky a tedy M^* -nesaturovaný a párování M^* by nebylo největší. Celkem dostáváme

$$|N(S)| = |T| = |S| - 1 \Rightarrow |N(S)| < |S|.$$

Tím nepřímý důkaz končí. \square

Hallová věta se hodí k snadnému důkazu, že v daném bipartitním grafu G neexistuje úplné párování. Pokud najdeme množinu $S \subseteq W$, pro kterou platí $|S| > |N(S)|$, tak G nemá úplné párování.

Důsledek 6.3. *Každý pravidelný bipartitní graf s alespoň jednou hranou má úplné párování.*

Důkaz. Mějme pravidelný bipartitní graf G s partitami U a W . Protože všechny hrany v G spojují vždy jeden vrchol z U s nějakým vrcholem ve W a protože z U vychází celkem $k|U|$ hran a z W vychází celkem $k|W|$ hran, je $|U| = |W|$ (Cvičení 3.3.2.).

Ukážeme, že každý k -pravidelný bipartitní graf pro $k > 0$ splňuje Hallovu větu. Vezmeme libovolnou podmnožinu $S \subseteq U$. Z množiny S vede celkem $k|S|$ hran, proto do $N(S)$ vede alespoň $m = k|S|$ hran. Protože G je pravidelný, je $k|N(S)| \geq m$. Odtud je $k|S| \leq k|N(S)|$ a proto $|S| \leq |N(S)|$. Množina S byla zvolena libovolně a proto podle Hallové věty má G úplné párování. \square

Cvičení

6.2.1.* *Dokažte následující modifikaci Hallové věty: Nechť G je bipartitní graf s partitami U a W . Potom G má úplné párování M právě tehdy, když*

$$|S| \leq |N(S)| \text{ pro každou množinu } S \subseteq (U \cup W).$$

Ukažte, že podmínu bipartitnosti nelze vynechat.

6.2.2. *Neckť A_1, A_2, \dots, A_m jsou podmnožiny (ne nutně disjunktní) množiny S . Systém různých reprezentantů množin A_1, A_2, \dots, A_m je množina $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ taková, že $a_i \in A_i$ pro $1 \leq i \leq m$, kde $a_i \neq a_j$*

pro $i \neq j$. Ukažte, že množiny A_1, A_2, \dots, A_m mají systém různých reprezentantů právě tehdy, když platí, že $|\bigcup_{i \in J} A_i| \geq |J|$ pro každou množinu $J \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$.

6.2.3. Na šachovnici s 64 políčky je možno poskládat 32 dominových kostek (obdélníků o rozměru 1×2 pole) tak, že pokrývají celou šachovnici. Ukažte, že šachovnici, ze které vymecháme dvě diagonálně protilehlá rohová pole, nemůžeme pokrýt dominovými kostkami.

6.2.4. Po vymechání některých dvou polí šachovnice z předchozího Cvičení 6.2.3. je někdy možné pokrýt zbylá pole šachovnice dominovými kostkami a někdy to možné není. a) Najděte na šachovnici všechny dvojice polí, které je možno vymechat, přičemž bude možné pokrýt zbytek šachovnice dominovými kostkami. b) Ukažte, jak v úloze a) zbylá pole šachovnice pokrýt dominovými kostkami.

6.2.5. Mějme šachovnici o rozměru $n \times n$ polí pro liché $n \geq 3$. Dokažte, že je možné navštívit koněm každé políčko právě jednou, a vrátit se zpět na výchozí políčko.

6.2.6. Mějme bipartitní graf G na $2n$ vrcholech, jehož každá partita má právě n vrcholů. a) Dokažte, že pokud $\delta(G) \geq n/2$, pak G obsahuje úplné párování. b) Platí tvrzení i pro $\delta(G) \geq n/2 - 1$?

6.3. Pokrytí v bipartitních grafech

V předchozí části jsme se věnovali párování, což je množina nezávislých hran M . Vrcholy grafu pak jsou nebo nejsou M -saturowané. Nyní budeme vybírat množinu vrcholů (ne nutně nezávislých) tak, aby každá hrana byla incidentní s některým vybraným vrcholem.

Definice Pokrytí grafu G je taková podmnožina $Q \subseteq V(G)$, že každá hrana grafu G je incidentní s alespoň jedním vrcholem z Q . Říkáme, že hrana e je pokryta vrcholem $u \in Q$, jestliže hrana e je s vrcholem u incidentní.

Minimální a nejmenší pokrytí

V kapitole 6.2. jsme rozlišovali maximální a největší párování. Podobně budeme rozlišovat minimální a nejmenší pokrytí grafu.

Definice Minimální pokrytí grafu je takové pokrytí Q grafu G , že pro každé pokrytí $Q' \subseteq Q$ platí, že $Q' = Q$ (jinými slovy: každá vlastní podmnožina $Q' \subsetneq Q$ není pokrytím grafu G). Naproti tomu pokrytí Q je nejmenší jestliže pro každé pokrytí Q' grafu G platí $|Q| \leq |Q'|$.

Pokrytí Q na Obrázku 6.6. vlevo není nejmenší, ale je minimální, protože žádný vrchol nemůžeme z Q vymechat, neboť po vymechání libovolného vrcholu by se nejednalo o pokrytí. Pokrytí Q^* na Obrázku 6.6. vpravo je nejmenší, protože daný graf má průměr 3 a proto na jeho pokrytí jsou potřeba alespoň dva vrcholy.



Obrázek 6.6.: Graf G s minimálním pokrytím, které není nejmenší a graf G s nejmenším pokrytím.

Podobně jako M^* označuje nějaké největší párování v daném grafu, tak pokrytí, které je v daném grafu nejmenší, budeme značit Q^* . Zdůrazněme, že párování M^* ani pokrytí Q^* nemusí být v grafu G určeno jednoznačně, protože může existovat několik různých největších párování nebo několik nejmenších pokrytí. Symbolem M^* nebo Q^* chceme zdůraznit, že nějaké párování je největší, resp. nějaké pokrytí je nejmenší. Na Obrázku 6.7. jsou dvě různá největší párování (zelené a modré) a dvě různá nejmenší pokrytí v grafu C_6 .



Obrázek 6.7.: Dvě různá největší párování a dvě různá nejmenší pokrytí v grafu C_6 .

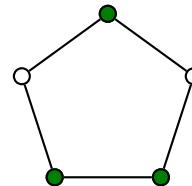
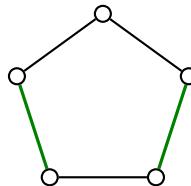
Je snadné si rozmyslet, že v každém grafu je počet vrcholů v nějakém pokrytí Q alespoň tak veliký, kolik je hran v libovolném párování M , protože alespoň jeden z koncových vrcholů každé hrany v párování M musí patřit do pokrytí Q . Platí tedy

$$|M| \leq |Q|.$$

V dalším textu využijeme zejména, že platí

$$|M^*| \leq |Q^*|. \quad (4)$$

Na druhou stranu rovnost v obecném grafu platit nemusí, protože například v cyklu C_5 platí $|M^*| = 2$, ale $|Q^*| > 2$, protože každé dva vrcholy C_5 pokryjí nejvýše čtyři různé hrany a v grafu C_5 je hran pět (Obrázek 6.8.).



Obrázek 6.8.: Maximální párování a minimální pokrytí v grafu C_5 .

Pojmy pokrytí a párování v grafu spolu úzce souvisí. Následující věta ukazuje, že v bipartitních grafech dokonce nastane v nerovnosti (4) rovnost. Větu dokázal již v roce 1931 maďarský matematik Dénes Kőnig⁷.

Věta 6.4. Königova věta

V bipartitním grafu je počet hran největšího párování roven počtu vrcholů nejmenšího pokrytí.

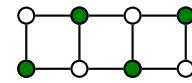
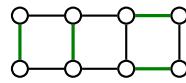
Důkaz. Podle nerovnosti (4) víme, že $|M^*| \leq |Q^*|$. Stačí ukázat, že v bipartitním grafu $G = (U \cup W, E)$ najdeme párování o velikosti $|Q^*|$. Množinu vrcholů Q^* rozdělíme na dvě části $S = Q^* \cap U$ a $T = Q^* \cap W$ podle partit bipartitního grafu G . Označíme H_1 a H_2 dva bipartitní podgrafen grafu G , kde graf H_1 je indukovaný podgrafem grafu G na vrcholech v množině $S \cup (W \setminus T)$ a graf H_2 je indukovaný na vrcholech v množině $T \cup (U \setminus S)$.

Protože $S \cup T = Q^*$ je pokrytí grafu G , tak v G není žádná hrana z partity $U \setminus S$ do $W \setminus T$. Nyní pro každou podmnožinu $X \subseteq S$ je $N_G(X) \subseteq (W \setminus T)$. Pokud by platilo $|N_G(X)| < |X|$, tak bychom mohli X nahradit v pokrytí Q^* množinou $N_G(X)$ a dostali bychom menší pokrytí, protože $N_G(X)$ pokryje všechny hrany incidentní s vrcholy v množině X , které nejsou pokryty množinou T . To není možné, protože Q^* je nejmenší pokrytí. Podle Hallové věty víme, že graf H_1 má párování, které saturuje všechny vrcholy v množině S .

Podobně ukážeme, že graf H_2 má párování, které saturuje všechny vrcholy v množině T . A protože jsou grafy H_1 a H_2 disjunktní, tak graf G má párování o velikosti $|S| + |T| = |Q^*|$, což je dokazované tvrzení. \square

Otzáka: Platí analogické tvrzení k Větě 6.4., že v bipartitních grafech je počet hran maximálního párování roven počtu vrcholů minimálního pokrytí?

Zdůrazněme, že Věta 6.4. platí jen pro bipartitní grafy. Graf G na Obrázku 6.9. je bipartitní a proto podle Věty 6.4. je $|M^*| = |Q^*| = 4$. Na druhou stranu pro grafy, které nejsou bipartitní, věta neříká nic. Například graf C_5 jistě není bipartitní a v grafu C_5 platí $|M^*| < |Q^*|$ (Obrázek 6.8.). Naproti tomu kompletní graf K_4 není bipartitní, přesto v grafu K_4 platí $|M^*| = |Q^*| = 2$.



Obrázek 6.9.: Bipartitní graf, ve kterém $|M^*| = |Q^*| = 4$.

⁷ Všimněte si, že zatímco „ö“ v Königově jméně se správně (maďarsky) píše s dvojitým akutním znaménkem, tak v Königově větě se „ö“ obvykle píše s přehláškou.

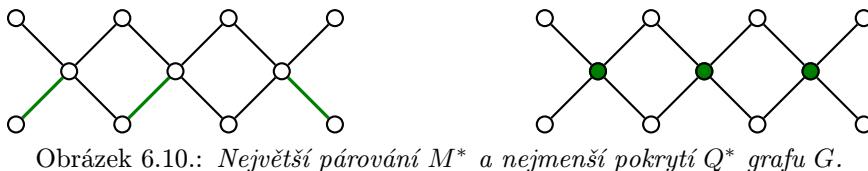
Všimněte si, že pokud najdeme takové párování M a takové pokrytí Q bipartitního grafu G , že $|M| = |Q|$, tak podle Věty 6.4. víme, že M je největší párování a Q nejmenší pokrytí.

Poznámka 6.1. Minimaxová podmínka

Dvojice takových problémů, kdy vždy optimální řešení R_1 jednoho problému maximalizuje nějaký parametr p_1 (obvykle mohutnost nějaké množiny) a optimální řešení R_2 druhého problému minimalizuje nějaký jiný parametr p_2 na stejně množině grafů, přičemž $p_1 \leq p_2$, tvoří tzv. *minimaxovou podmíncu*. Pokud v takovém případě najdeme dvojici řešení R_1 a R_2 , ve které parametry obou řešení nabývají stejné hodnoty $p_1 = p_2$, tak jsme *dokázali*, že obě řešení jsou optimální.

Minimaxové podmínky jsou cenným pomocníkem při hledání optimálních řešení. Zatímco algoritmy pro optimální řešení problémů R_1 a R_2 mohou být komplikované i NP -úplné, tak mohou existovat jednoduché heuristické algoritmy, které však nemusí dát optimální řešení. Jen na základě výsledku heuristiky *nemůžeme poznat*, zda řešení je optimální. Pokud ale platí rovnost $p_1 = p_2$ zmíněných parametrů, tak díky minimaxové podmínce je *dokázáno*, že nalezené řešení je optimální.

Příklad 6.3. Například párování v bipartitním grafu na Obrázku 6.10. je největší (má tři hrany), protože nejmenší pokrytí má tři vrcholy. A naopak, pokrytí třemi vrcholy je nejmenší, protože máme párování se třemi hranami.



Obrázek 6.10.: Největší párování M^* a nejmenší pokrytí Q^* grafu G .

Otzáka: Může být libovolný rozdíl mezi velikostí největšího párování a nejmenšího pokrytí? Pokud ano, zkuste najít obecnou konstrukci takového grafu.

6.4. Úplné párování v obecných grafech

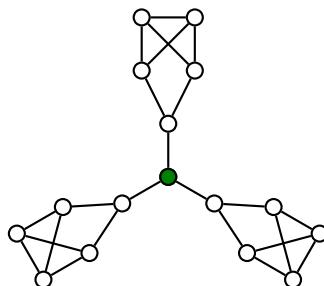
V minulé části jsme se zaměřili na párování a pokrytí v bipartitním grafu. Následující větu, která udává nutnou a dostatečnou podmíncu pro existenci úplného párování v obecném grafu, dokázal Tutte v roce 1947. Každou komponentu daného grafu, která má lichý počet vrcholů, budeme nazývat *lichou komponentou*.

Věta 6.5. Tutteova věta

Graf G má úplné párování právě tehdy, když počet lichých komponent v grafu $G - S$ je menší nebo roven počtu vrcholů množiny S pro každou množinu $S \subseteq V(G)$.

Důkaz věty je rozsáhlý a nebudem ho zde uvádět.

Například graf na Obrázku 6.11. nemá úplné párování. Odebráním vyznačeného vrcholu vzniknou tři liché komponenty a proto podle Tutteovy věty graf G nemá úplné párování. Naproti tomu například v Petersenově grafu (Obrázek ??) nenajdeme takovou množinu vrcholů S , aby graf $G - S$ měl více než $|S|$ komponent liché velikosti, proto podle Tutteovy věty má Petersenův graf úplné párování (takové párování snadno najdete sami). Bohužel Tutteova věta se hodí spíš pro vyvrácení existence úplného párování v daném grafu, protože ověření počtu lichých komponent grafu $G - S$ pro všechny podmnožiny $G - S$ je náročné. Pro některé speciální třídy grafů platí jednodušší podmínky. Například následující tvrzení plyne přímo z Tutteovy věty, historicky však bylo dokázáno dříve, už v roce 1891 Petersenem.



Obrázek 6.11.: Graf G s vyznačenou artikulací v a třemi lichými komponentami v grafu $G - v$.

Důsledek 6.6. Druhá Petersenova věta

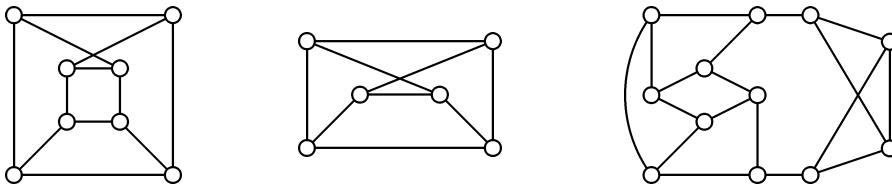
Každý kubický graf bez mostů má úplné párování (1-faktor).

Důkaz. Nechť G je kubický (3-pravidelný) graf bez mostů. Ukážeme že takový graf splňuje předpoklad Tutteovy věty.

Pro libovolnou podmnožinu vrcholů $S \subseteq V(G)$ prozkoumáme počet hran mezi vrcholy v S a lichými komponentami grafu $G - S$. Počet takových hran označíme p . Protože je G kubický, je každý vrchol v S incidentní s nejvýše třemi takovými hranami a platí $p \leq 3|S|$.

Součet stupňů vrcholů v každé liché komponentě H grafu $G - S$ je $3v(H) - m$, kde m je počet hran mezi H a S . Podle Věty 1.1. je součet stupňů všech vrcholů v komponentě H sudý, a protože $v(H)$ je liché číslo, tak $m = 3v(H) - \sum_{v \in H} \deg(v)$ musí být liché číslo. Graf G neobsahuje podle předpokladu most, je tedy m větší než jedna a proto $m \geq 3$. Ze všech ℓ lichých komponent grafu $G - S$ vychází proto alespoň 3ℓ hran do S a dostáváme, že $p \geq 3\ell$. Celkem dostáváme $3\ell \leq p \leq 3|S|$ a proto pro počet lichých komponent grafu $G - S$ platí $\ell \leq |S|$, což podle Tutteovy věty znamená, že G má úplné párování. \square

Všimněte si, že Druhá Petersenova věta (Věta 6.6.) dává jen postačující podmínku pro existenci úplného párování kubického grafu. Kubický graf s mostem může (například graf na Obrázku 6.2.), ale nemusí (například graf na Obrázku 6.11.) mít úplné párování. Naproti tomu kubické grafy na Obrázku 6.12. jsou hranově 2-souvislé a podle Druhé Petersenovy věty mají úplné párování (zkuste v každém grafu úplné párování najít). Stejně tak grafy na Obrázcích 4.2., 4.5. a ?? mají úplné párování.



Obrázek 6.12.: Kubické grafy bez mostů.

Má-li daný graf G úplné párování, tak hrany párování spolu s vrcholovou množinou $V(G)$ tvoří 1-faktor. Podobně, je-li nějaký faktor daného grafu 2-pravidelný, říkáme mu 2-faktor, a jestliže faktor grafu je k -pravidelný, říkáme mu k -faktor.

Větě 6.6. se říká „Druhá“, protože byla spolu s následující větou publikována Petersenem v roce 1891. Následující známé a silné tvrzení dokážeme s využitím Věty 6.3.

Věta 6.7. Petersenova věta

Každý pravidelný graf sudého stupně s alespoň jednou hranou má 2-faktor.

Důkaz. Mějme $2k$ -pravidelný graf G s vrcholy v_1, v_2, \dots, v_n . Každá jeho komponenta je souvislý graf. Později, v Kapitole 10.1., si ukážeme, že v souvislém grafu, ve kterém jsou všechny vrcholy sudého stupně, existuje uzavřený tah, který obsahuje všechny hrany grafu. Buď T takový uzavřený tah grafu G , který obsahuje všechny hrany grafu G . Sestrojíme bipartitní graf $H = (U \cup W, E)$ tak, že $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ a $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$. Hrana $u_i w_j$ bude v množině E právě tehdy, když vrchol v_j bezprostředně následuje za vrcholem v_i v tahu T . Protože v tahu T se objeví každý vrchol přesně k krát, bude bipartitní graf H k -pravidelný.

Podle Důsledku 6.3. má graf H úplné párování. Každá hrana incidentní s vrcholem $u_i \in U$ odpovídá hrani, která vychází z vrcholu $v_i \in V$ a každá hrana incidentní s vrcholem $w_i \in W$ odpovídá hrani, která vychází do vrcholu $v_i \in V$. Proto úplné párování grafu H odpovídá 2-pravidelnému grafu v grafu G .

V každé komponentě původního grafu G takto sestrojíme 2-faktor. \square

Podle Petersenovy věty můžeme dokonce každý $2k$ -pravidelný graf G rozložit na k 2-faktorů, protože odebráním jednoho 2-faktoru zaručeného Větou 6.7. dostaneme graf, který opět splňuje předpoklady Petersenovy věty, a nebo dostaneme graf bez hran.

Odkazy:

- Petersenův článek z roku 1891 <http://www.springerlink.com/index/B53G50P5J001J465.pdf>

Cvičení

6.4.1. *Bez využití důkazu Věty 6.5. dokažte speciální případ Tutteovy věty: Strom T má úplné párování právě tehdy, pokud počet lichých komponent grafu $T - v$ je roven jedné pro každý vrchol $v \in V(T)$.*

6.4.2. *Na daném počtu vrcholů najděte a) graf s největším počtem hran, který nemá úplné párování, b)? souvislý graf s největším počtem hran, který nemá úplné párování. Využijte Tutteovu větu.*

6.4.3. *Jaký je největší stupeň vrcholů a) v grafu G , b) ve stromu T , který má úplné párování?*

6.4.4. *Jaký je největší stupeň vrcholů a) v grafu G , b) ve stromu T (oba na sudém počtu vrcholů), který nemá úplné párování?*

6.4.5. *Využijte Tutteovu větu k nalezení charakterizace maximálních grafů bez úplného párování.*

Kapitola 7. Hranová barvení grafů

Harmonogram pracovních úkonů

V minulé kapitole jsme při formulaci přiřazovacího problému každému pracovníkovi přiřadili jeden úkol. V praxi však můžeme řešit obtížnější úlohu, kdy u jednoho stroje anebo u jednoho obrobku se má vystrídat několik pracovníků. Pochopitelně budeme chtít, aby každý pracovník pracoval v daném okamžiku u každého stroje sám. Takovou úlohu můžeme modelovat následujícím způsobem. Budeme mít bipartitní graf jehož jedna jeho partita odpovídá pracovníkům a druhá strojům nebo výrobkům. Hranou spojíme každou takovou dvojici vrcholů x a y , kdy pracovník x má vykonat nějakou činnost u stroje y . Budeme chtít, aby

- v daný časový úsek u stroje pracoval vždy jen jeden pracovník,
- nakonec byly vykonány všechny činnosti,
- soubor všech činností byl dokončen v co nejkratším čase.

Pro modelování uvedeného problému zavedeme pojem hranového barvení bipartitního grafu.

Rozvrhy

Podobný model můžeme použít při sestavování rozvrhů. Máme bipartitní graf, ve kterém jednu partitu tvoří studijní skupiny a druhou vyučované předměty. Stejnou barvou obarvíme všechny hrany, které odpovídají výuce ve stejnou dobu. Pochopitelně nám půjde o takové hranové barvení, ve kterém hrany jedné barvy tvoří nezávislou množinu – párování. Budeme hledat příslušné hranové barvení s co nejmenším počtem barev. Protože na každé učebně může v danou chvíli probíhat výuka jedné skupiny a jedného předmětu (s daným vyučujícím), bude obarvení hran různými barvami odpovídat rozvrhu hodin. Počet barev bude odpovídat celkové délce vyučování.

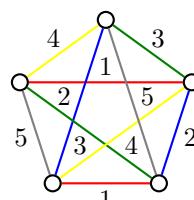
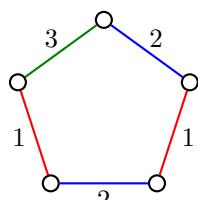
Otzážka: Uvedený model rozvrhu předpokládá, že máme k dispozici neomezený počet učeben. Jak by bylo možné model upravit, aby bylo možno vzít v úvahu, že počet učeben je omezený?

7.1. Hranová barvení a chromatický index grafu

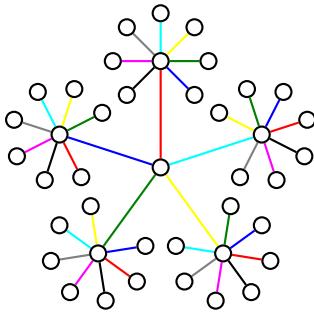
Definice *Hranové barvení* grafu G je zobrazení c hranové množiny $E(G)$ do množiny barev S . Obvykle je $S = \{1, 2, \dots, k\}$. Je-li $|S| = k$, budeme zobrazení c nazývat *hranové k -barvení* grafu G . Řekneme, že hrana e je *obarvena barvou i* jestliže $c(e) = i$. Číslu i říkáme *barva hrany*. Hranové barvení se nazývá *dobré*, jestliže žádné dvě sousední hrany nejsou obarveny stejnou barvou.

Všimněte si, že definice hranového barvení nevyžaduje, aby zobrazení $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ bylo surjektivní. Z praktických důvodů je však rozumné předpokládat, že když hovoříme o hranovém k -barvení c , tak v barvení c je všech k barev použito, neboť jinak bychom mohli nepoužité barvy vynechat a barvy přečíslovat tak, abychom dostali hranové l -barvení, kde $l < k$.

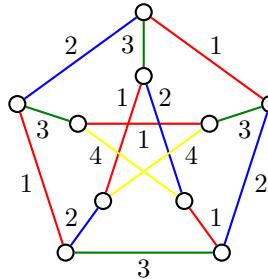
Podle definice dobrého hranového barvení grafu jsou všechny hrany jedné barvy nezávislé a tvoří párování. Graf dobře obarvený k barevami má k párování, která jsou po dvou disjunktní. Příklady dobrých hranových barvení grafů jsou na Obrázcích 7.1., 7.2. a 7.3.



Obrázek 7.1.: Dobré barvení cyklu C_5 a kompletního grafu K_5 .



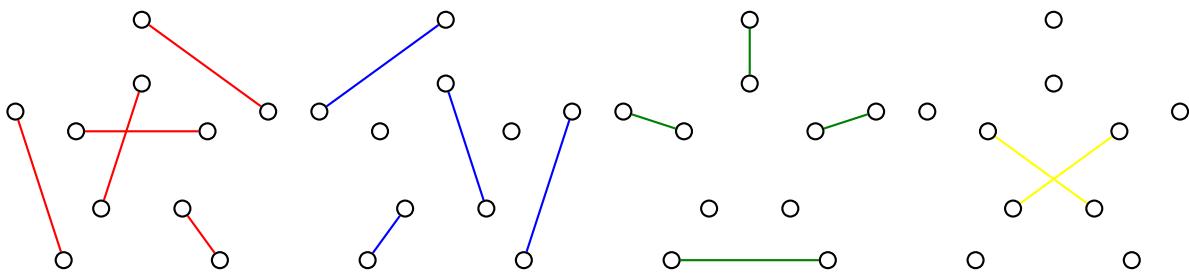
Obrázek 7.2.: Dobré hranové barvení stromu.



Obrázek 7.3.: Dobré hranové barvení Petersenova grafu čtyřmi barvami.

Barevné třídy

Dobrá hranová barvení je možno definovat i pomocí rozkladů hranové množiny grafu G na nezávislé podmnožiny. Rozklady byly zavedeny na straně 9. *Rozkladem hranové množiny $E(G)$* rozumíme takový systém neprázdných podmnožin E_1, E_2, \dots, E_k množiny $E(G)$, že $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k = E(G)$ a $E_i \cap E_j = \emptyset$ pro $i, j = 1, 2, \dots, k$, kde $i \neq j$. Jestliže máme libovolný rozklad množiny $E(G)$, můžeme sestavit hranové barvení grafu G tak, že všem hranám z třídy E_i přiřadíme barvu i . Takové barvení bude dobré, jen pokud je každá třída rozkladu množinou nezávislých hran. Třídě rozkladu říkáme *barevná třída*, protože se jedná o množinu hran stejné barvy. Protože všechny barevné třídy jsou neprázdné, tak v grafu je použito všech k barev. Na Obrázku 7.4. jsou všechny čtyři barevné třídy dobrého hranového barvení Petersenova grafu z Obrázku 7.3. Vrcholy jsou na obrázku uvedeny pro lepší orientaci, do barevných tříd však nepatří!



Obrázek 7.4.: Čtyři barvené třídy dobrého hranového barvení Petersenova grafu z Obrázku 7.3.

Hrubý odhad počtu barev

Každý graf s m hranami lze triviálně dobře obarvit m barvami a je zřejmé, že počet různých barev použitých při obarvení grafu G nemůže být větší než m . Naproti tomu všechny hrany grafu můžeme obarvit stejnou barvou. Obsahuje-li však graf alespoň dvě sousední hrany (cestu délky alespoň 2), takové barvení nebude dobré. Při řešení praktických úloh (například v souvislosti s motivační úlohou) se ptáme, jaký je *nejmenší* nutný počet k barev, abychom našli dobré hranové k -barvení. Zavedeme následující pojem.

Definice Řekneme, že graf G je *hranově k -obarvitelný*, jestliže existuje jeho dobré hranové barvení k barvami. Nejmenší číslo k takové, že graf G je hranově k -obarvitelný, se nazývá *chromatický index* grafu G a značí se $\chi'(G)$. Graf G se nazývá *hranově k -chromatický*, je-li $k = \chi'(G)$.

Všimněte si, že je-li daný graf hranově k -obarvitelný, je také hranově l -obarvitelný pro každé $k \leq l \leq |E(G)|$.

Přesné omezení počtu barev

Snadno nahlédneme, že v každém grafu G platí $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ (viz například Obrázek 7.2.). V některých grafech, jako je například cyklus C_5 nebo graf K_5 na Obrázku 7.1., je potřeba více barev, než jaký je nejvyšší

stupeň v grafu. Následující významný a překvapivý výsledek říká, že počet barev potřebný na dobré hranové barvení libovolného jednoduchého grafu G je téměř jednoznačně určen nejvyšším stupněm grafu. Pokud nestačí $\Delta(G)$ barev, tak jistě bude stačit $\Delta(G) + 1$ barev.

Věta 7.1. Vizingova věta

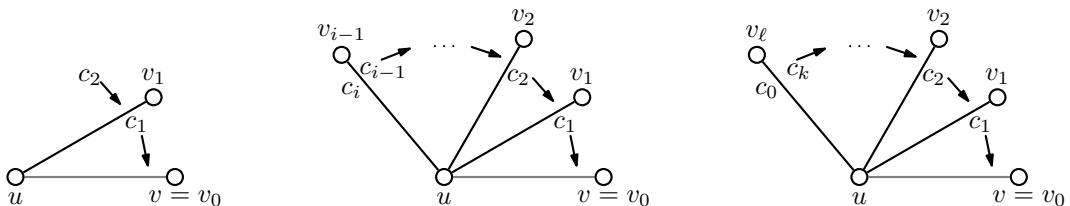
Pro libovolný graf G platí $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Důkaz. První nerovnost platí triviálně, protože každé dvě hrany incidentní s vrcholem stupně $\Delta(G)$ musí mít různou barvu. Důkaz druhé nerovnosti bude konstruktivní, ukážeme algoritmus, jak dobré hranové $(\Delta(G) + 1)$ -barvení grafu G najít.

Mějme graf G a nějaký jeho obarvený podgraf G' , který má dobré $(\Delta(G) + 1)$ -barvení. Graf G' může mít i prázdnou množinu hran. Je-li $G' = G$, jsme s důkazem hotovi. V opačném případě označme e nějakou hranu uv grafu G , která nepatří do $E(G')$ (není obarvena žádnou barvou). Ukážeme, jak obarvit hranu e jednou z nejvýše $\Delta(G) + 1$ dostupných barev tak, aby výsledné obarvení grafu $(V(G), E(G') \cup \{e\})$ bylo dobré. Opakováním tohoto postupu dostaneme hledané dobré hranové $(\Delta(G) + 1)$ -barvení grafu G .

Všimněte si, že v každém $(\Delta(G) + 1)$ -barvení existuje pro každý vrchol x alespoň jedna barva, která se nevyskytuje na hranách incidentních s tímto vrcholem. Každou takovou budeme nazývat *volnou* barvou vrcholu x .

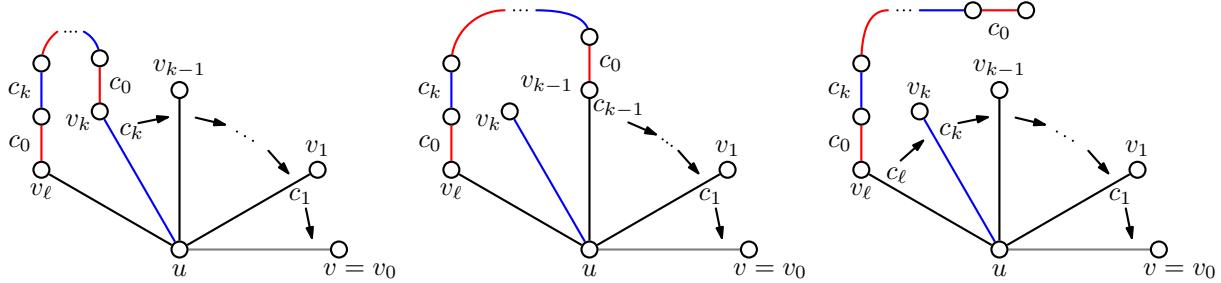
- 1) Jestliže oba koncové vrcholy u, v hrany e mají volnou barvu c , tak můžeme hranu uv obarvit barvou c a dostaneme hledané dobré hranové barvení grafu $(V(G), E(G') \cup \{e\})$. V dalším textu můžeme předpokládat, že taková neobarvená hrana $e = uv$, aby její koncové vrcholy u, v měly společnou volnou barvu, v grafu G' už není.
- 2) Označme c_1 nějakou volnou barvu vrcholu $v = v_0$. Předpokládáme, že c_1 není volnou barvou vrcholu u a proto barvou c_1 je obarvena některá hrana uv_1 (Obrázek 7.5.). Dále označme c_2 volnou barvu vrcholu v_1 . Jestliže c_2 je volná barva vrcholu u , tak přebarvíme hranu uv_1 barvou c_2 a hranu uv_0 obarvíme barvou c_1 (Obrázek 7.5. vlevo). Pokud c_2 je volná barva vrcholu u , tak barvou c_2 je obarvena některá hrana uv_2 a a volnou barvu vrcholu v_2 označíme c_3 . Postup opakujeme. Podle volné barvy c_i vrcholu v_{i-1} budeme vybereme hranu uv_i s touto barvou a c_{i+1} označíme volnou barvu vrcholu v_i nebo, pokud je c_i také volnou barvou vrcholu u , posuneme barvy: přebarvíme barvou c_i hranu uv_{i-1} a barvou c_{i-1} hranu uv_{i-2} , atd. Vždy barvou c_j posuneme na hranu uv_{j-1} pro $1 \leq j \leq i - 1$ (Obrázek 7.5. uprostřed).
- 3) Jestliže se takto podaří obarvit všechny hranы grafu, algoritmus končí.



Obrázek 7.5.: Posun barev v důkazu Vizingovy věty.

- 3) Protože k dispozici je $\Delta(G) + 1$ barev a nejvyšší stupeň vrcholu v grafu je omezen, tak nejvýše po $\Delta(G)$ krocích se některá barva zopakuje. Označme ℓ nejmenší takový index, že barva chybějící u vrcholu v_ℓ se již objevila v posloupnosti volných barev c_1, c_2, \dots, c_ℓ . Barvu označíme c_k . Místo abychom na hranu e přidali novou barvu $\Delta(G) + 2$, využijeme opakování barvy c_k a přebarvíme graf G' tak, aby bylo možno hranu e obarvit jednou z daných $\Delta(G) + 1$ barev.
Všimněte si, že barva c_k je volná barva vrcholu v_ℓ i vrcholu v_{k-1} a hrana uv_k má barvu c_k . Je-li c_0 volná barva vrcholu u i v_ℓ , tak můžeme posunout barvy od vrcholu v_ℓ a barvou c_0 obarvit hranu uv_ℓ (Obrázek 7.5. vpravo). Dále můžeme předpokládat, že barva c_0 není volná barva vrcholu v_ℓ .
- 4) Označíme P nějakou maximální (není možné ji prodloužit) alternující cestu s barvami c_0 a c_k , která začíná u vrcholu v_ℓ hranou obarvenou c_0 . Cesta P je určena jednoznačně, protože u každého vrcholu je nejvýše jedna hrana každé barvy. Neobarvené hranы nás nyní nezajímají. Podle toho, kde cesta P bude končit, provedeme posun barev a vzájemně prohodíme alternující obarvení hran cesty P . Rozlišíme několik možností.
 - Jestliže cesta P prochází vrcholem v_k (Obrázek 7.6. vlevo), tak poslední hrana této cesty je $v_k u$ obarvená barvou c_k a vrcholem u cesta P končí, protože c_0 je volná barva vrcholu u . Nyní stačí posunout barvy od vrcholu v_k a prohodit alternující obarvení hran cesty P (Obrázek 7.6. vlevo).

- Jestliže cesta P prochází vrcholem v_{k-1} (Obrázek 7.6. uprostřed), tak ve vrcholu v_{k-1} končí a poslední hrana této cesty je obarvená barvou c_k , protože c_k je volná barva vrcholu v_{k-1} . Nyní stačí posunout barvy od vrcholu v_{k-1} a prohodit alternující obarvení hran cesty P (Obrázek 7.6. uprostřed).
- Jestliže cesta P neprochází vrcholy v_k ani v_{k-1} , tak neprochází ani vrcholy u (do u může přijít jedině přes vrchol v_k) ani v_ℓ (ve vrcholu v_ℓ začíná). Cesta P může procházet některým z vrcholů v_j , kde $1 \leq j < k-1$ a poslední hrana může být obarvena barvou c_0 nebo c_k . Vždy však stačí posunout barvy od vrcholu v_ℓ a prohodit alternující obarvení hran cesty P (Obrázek 7.6. vpravo).

Obrázek 7.6.: Cesta P a posun barev.

Ve všech případech jsme dostali dobré hranové $(\Delta(G) + 1)$ -barvení grafu $(V(G), E(G') \cup \{e\})$ a důkaz končí. \square

Důkaz Vizingovy věty je sice komplikovaný, ale je konstruktivní. Dává návod, jak najít dobré hranové $(\Delta(G) + 1)$ -barvení libovolného grafu G .

Grafy třídy 1 a 2

Podle Vizingovy věty rozdělujeme grafy na *grafy třídy 1*, pro které je $\chi'(G) = \Delta(G)$ a na *grafy třídy 2*, pro které je $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Toto dělení spolu s dalšími parametry pak hráje roli při řešení celé řady jiných problémů. Například pravidelné grafy třídy 1 (s alespoň jednou hranou) mají vždy úplné párování (Cvičení 7.1.1.), zatímco grafy třídy 2 úplné párování mít mohou (Petersenův graf) nebo nemusí (graf na Obrázku 6.11.).

Definice *Vrcholové číslo nezávislosti* udává největší počet nezávislých vrcholů v grafu G . *Vrcholové číslo nezávislosti* značíme $\alpha(G)$. Podobně *hranové číslo nezávislosti* udává největší počet nezávislých hran v grafu G . *Hranové číslo nezávislosti* značíme $\alpha'(G)$.

Všimněte si, že hranové číslo nezávislosti není nic jiného než velikost největšího párování v grafu G , tj. platí $\alpha'(G) = |M^*|$.

Vizingova věta neumožnuje snadno poznat, zda na dobré hranové barvení grafu je potřeba $\Delta(G)$ nebo $\Delta(G) + 1$ barev. Následující věta, která je důsledkem Vizingovy věty, dává jedno kriterium, které pomůže rozpozнат grafy, pro které $\Delta(G)$ barev nestačí.

Důsledek 7.2. *Jestliže pro počet hran grafu G platí $|E(G)| > \Delta(G)\alpha'(G)$, potom $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.*

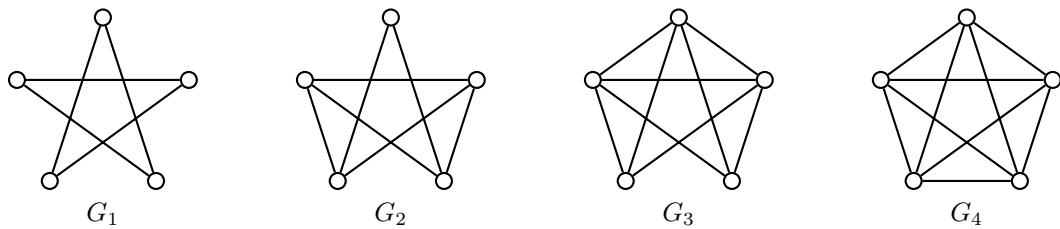
Důkaz. Postupujeme nepřímo. Nechť $\chi'(G) = \Delta(G)$. Protože každá barevná třída (množina hran stejné barvy) tvoří párování a obsahuje nejvíce $|M^*| = \alpha'(G)$, dostaneme pro počet hran v grafu $|E(G)| \leq \Delta(G)\alpha'(G)$. To je negace předpokladu věty a důkaz končí. \square

Otzáka: Kde se v důkazu Důsledku 7.2. použila Vizingova věta (Věta 7.1.)?

Cvičení

7.1.1. *Ukažte, že každý pravidelný graf třídy 1 s alespoň jednou hranou má úplné párování.*

7.1.2. *Najděte a) příklad grafu, b)* nekonečně mnoho grafů, c)? všechny grafy, které jsou třídy 1, avšak přidáním libovolné hraně se stanou třídy 2.*

Obrázek 7.7.: Grafy G_1 , G_2 , G_3 a G_4 na pěti vrcholech.

7.1.3. Určete chromatický index grafů na Obrázku 7.7.

7.1.4. Ukažte, že v každém pravidelném grafu G s lichým počtem vrcholů a alespoň jednou hranou je $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

7.1.5. Najděte příklad grafu G , který nesplňuje předpoklad Důsledku 7.2. a přitom $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

7.1.6. Nalezněte algoritmus hranového $(\Delta(G) + 1)$ -barvení libovolného grafu G .

7.1.7. Dokažte nebo vyvrátěte: $\chi'(G \cup H) \leq \chi'(G) + \chi'(H)$.

7.1.8. Najděte dobré hranové barvení grafu Q_n (hyperkrychle řádu n) a dokažte, že $\chi'(Q_n) = \Delta(Q_n)$.

7.1.9. Ukažte, že v libovolném grafu G platí $\alpha(G) \geq |V(G)|/(\Delta(G) + 1)$.

7.2. Hranová barvení některých speciálních tříd grafů

Rozhodnout, zda daný graf G je třídy 1 nebo třídy 2 není jednoduché. Obvykle to znamená najít dobré hranové $\Delta(G)$ -barvení grafu G nebo ukázat, že $\Delta(G)$ barev nestačí. Při určování chromatického indexu daného grafu G třídy 1 stačí najít dobrá $\Delta(G)$ -barvení grafu G . Při určování chromatického indexu nějakého grafu G třídy 2 můžeme naopak s výhodou využít Důsledek 7.2. Všimněte si, že podle algoritmu z důkazu Věty 7.1. obecně nemůžeme rozhodnout, zda daný graf je třídy 1 nebo 2, neboť algoritmus je navržený tak, aby hledal dobré hranové $(\Delta(G) + 1)$ -barvení grafu i v případě, kdy daný graf je třídy 1. V této kapitole se budeme věnovat chromatickému indexu několika obecných i speciálních tříd grafů.

Chromatický index bipartitních grafů

Následující větu dokázal Kőnig již v roce 1916. Říká, že všechny bipartitní grafy (a speciálně i stromy) jsou třídy 1. Důkaz věty ponecháme jako Cvičení 7.2.2.

Věta 7.3. Pro každý bipartitní graf G platí $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Hranová barvení lichých cyklů

Chromatický index cyklů C_n určíme snadno. Pro sudé n na dobré hranové barvení stačí pravidelně se střídající dvě barvy. Protože $\Delta(C_n) = 2$, tak podle Vizingovy věty víme, že chromatický index nemůže být menší a tak $\chi'(C_n) = \Delta(C_n) = 2$.

Pro liché n podle Cvičení 7.1.4. víme, že liché cykly jsou třídy 2, protože $\chi'(C_n) = \Delta(C_n) + 1 = 3$. Všimněte si, že vztah pro chromatický index můžeme shrnout

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} \Delta(G) + 1 & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \Delta(G) & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Přehlednější je zápis s explicitně uvedenými hodnotami chromatického indexu.

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{pro } n \text{ liché}, \\ 2 & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$$

Otázky:

- Platí tvrzení, že všechny grafy, které obsahují lichý cyklus, jsou třídy 2?
- Mějme graf G na n vrcholech. Platí $\chi'(G) + \chi'(\overline{G}) = \Delta(K_n) + 1$?

Hranová barvení komplettních grafů

Ve Cvičení 7.2.4. ukážeme, že pro hranová barvení kompletních grafů platí (podobně jako v předchozím odstavci)

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} \Delta(G) + 1 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \Delta(G) & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Můžeme také psát

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n & \text{pro } n \text{ liché,} \\ n - 1 & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Edge_coloring

Cvičení

7.2.1. Dokažte, že $\chi'(K_{n,m}) = \Delta(K_{n,m})$.

7.2.2. Ukažte, že každý bipartitní graf G má $\Delta(G)$ -pravidelný bipartitní nadgraf. Pomocí tohoto tvrzení a Důsledku 6.3. dokažte Větu 7.3.

7.2.3. Nalezněte algoritmus hranového $\Delta(G)$ -barvení bipartitního grafu G .

7.2.4. Dokažte, že $\chi'(K_{2n-1}) = \chi'(K_{2n}) = 2n - 1$.

7.2.5. Najděte chybu v následujícím důkazu Věty 7.3.:

Nejprve ukážeme, že každý bipartitní graf $G = (U \cup W, E)$ je podgrafem nějakého $\Delta(G)$ -pravidelného bipartitního grafu. Pokud nejsou partity U a W stejné velikosti, přidáme do menší partity tolik vrcholů, aby byly obě partity stejné velikosti. Dále, protože součet stupňů vrcholů v každé partitě je stejný, najdeme ke každému vrcholu $u \in U$ stupně menšího než $\Delta(G)$ vrchol $w \in W$ stupně menšího než $\Delta(G)$. Jestliže $uw \notin E$, tak spojíme u a w hranou. Pokud však $uw \in E$, tak najdeme nějaké další dva jiné vrcholy $u' \in U$ a $w' \in W$, které jsou sousední, ale w' není sousední s u a u' není sousední s w . Takové vrcholy jistě existují, protože $\deg(u) < \Delta(G)$ a $\deg(v) < \Delta(G)$. Nejprve odebereme hranu $u'w'$ a potom přidáme hranu uw' a $u'w$. Tím se zvýší stupeň vrcholů u a w a stupeň vrcholů u' a w' se nezmění.

Je-li výsledný graf pravidelný, důkaz končí, jinak opakujeme uvedený postupu dokud výsledný nadgraf nebude pravidelný.

7.3. Rozklady grafů

V předchozí podkapitole jsme studovali rozklad hranové množiny kompletního grafu na systém podmnožin nezávislých hran. Jedná se o speciální případ obecnějšího postupu.

Definice Rozklad grafu G je takový systém podgrafů G_1, G_2, \dots, G_k , kde každé dva různé podgrafy jsou hranově disjunktní a sjednocením všech podgrafů dostaneme právě graf G . Jestliže navíc jsou všechny podgrafy isomorfní $G_1 \simeq G_2 \simeq \dots \simeq G_k \simeq H$, tak hovoříme o H -rozkladu. Pokud je navíc každý podgraf faktorem grafu G , tak hovoříme o H -faktORIZACI grafu G .



Obrázek 7.8.: Rozklad grafu K_6 na podgrafi $C_3, C_3, K_{3,3}$ a C_7 -faktORIZACE grafu K_7 .

Na Obrázku 7.8. vlevo máme rozklad grafu K_6 na dva podgrafy C_3 a jeden faktor $K_{3,3}$. Vpravo je příklad C_7 -faktorizace grafu K_7 . Všimněte si, že do každého rozkladu daného grafu G můžeme přidat libovolný počet triviálních podgrafů a dostaneme opět rozklad grafu G . Proto budeme dále předpokládat, že všechny podgrafy jsou netriviální.

Některé vybrané rozklady grafů

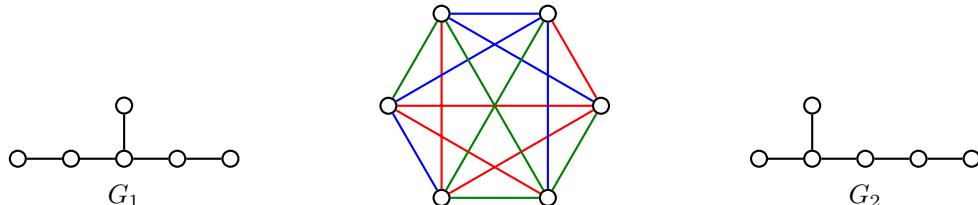
V předchozích kapitolách jsme narazili na několik úloh, jejichž řešení můžeme zformulovat jako rozklad nějakého grafu. V kapitole 6.4. jsme uvedli, že opakováním užitím konstrukce z důkazu Druhé Petersenovy věty (Věta 6.6.) můžeme pravidelný graf sudého stupně rozložit na 2-pravidelné faktory. Každý z těchto faktorů je sestaven z jednoho nebo více cyklů a proto každý pravidelný graf sudého stupně je možno rozložit na cykly. Jiný způsob konstrukce rozkladu pravidelného grafu sudého stupně na cykly zmíníme v kapitole 10.1.

Věta 7.3. říká, že pro každý k -pravidelný bipartitní graf G existuje dobré hranové k -barvení. Je zřejmé, že podgraf indukovaný hranami každé barevné třídy je 1-pravidelný faktor grafu G . Proto podle Věty 7.3. existuje rozklad grafu G na 1-pravidelné faktory.

Nutné podmínky existence rozkladu grafů

Snadno nahlédneme, že ne každý rozklad grafu na zvolené podgrafy může existovat. Některé nutné podmínky si snadno rozmyslíme, například počet hran rozkládaného grafu musí být roven součtu hran v jednotlivých podgrafech. Ve Cvičení ?? jsme ukázali, že rozklad grafu K_{6v+5} na trojúhelníky K_3 neexistuje, protože počet hran grafu K_{6v+5} je $(3v+2)(6v+5)$ a $3 \nmid (3v+2)(6v+5)$. Pro rozklady pravidelného grafu G na pravidelné podgrafy H musí navíc stupeň grafu G být násobkem stupně grafu H . Například kompletní graf K_{2n} jistě není možno rozložit na cykly, neboť stupeň každého vrcholu grafu K_{2n} je liché číslo a stupeň každého vrcholu v rozkládajícím podgrafu je sudý.

Všechny zmíněné nutné podmínky jsou jednoduché, bohužel nejsou postačující. Pro obecný graf G a jeho podgraf H nejsou známy žádné nutné a postačující podmínky, jejichž splnění by zajistilo, že existenci H -rozkladu grafu G . Takové podmínky nejsou známy ani v nejjednodušším případě, kdy $G = K_n$. Existence H -faktorizace obvykle velmi závisí na struktuře daného grafu. Například kompletní graf K_4 jistě není možné rozložit na dvě kopie grafu $K_{1,3}$ (proč?). Ještě zajímavější je, že kompletní graf K_6 je možno faktorizovat na tři kopie grafu G_1 na Obrázku 7.9. vlevo, rozklad je uveden uprostřed. Ačkoliv graf G_2 (na obrázku vpravo) má stejnou stupňovou posloupnost, tak se dá ukázat, že G_2 -faktorizace grafu K_6 neexistuje.



Obrázek 7.9.: Graf G_1 , G_1 -faktorizace grafu K_6 a graf G_2 , který kompletní graf K_6 rozkládá.

Postačující podmínky existence rozkladu grafů

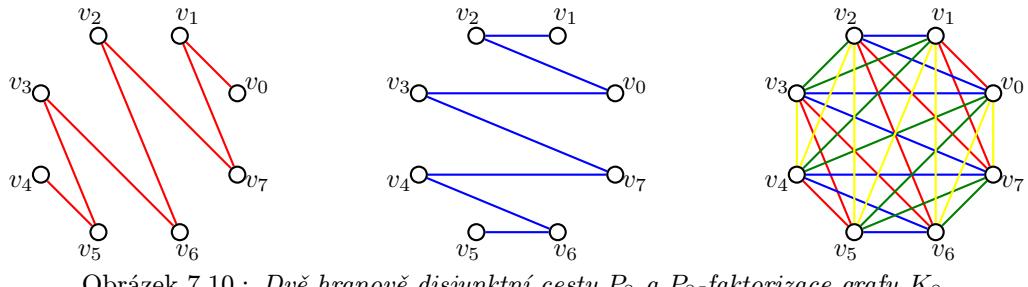
Postačující podmínky existence rozkladů nebo faktorizací se v obecném případě jsou obvykle konstruktivní. Popíšeme, jak nějaký konkrétní rozklad sestrojit. Takové konstrukce, zejména H -rozkladů, jsou známy především pro některé pravidelné grafy.

Pro velmi speciální grafy jsou známy i některé existenční podmínky, například existence 1-faktorizace bipartitních grafů z Hallové věty (Věta 6.2.). Následující příklad ukazuje, jak může popis konstrukce rozkladu vypadat.

Příklad 7.1. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje P_{2n} -faktorizace kompletního grafu K_{2n} .

Vrcholy kompletního grafu označme $v_0, v_1, \dots, v_{2n-1}$. Sestavíme cestu $v_0v_1v_{2n-1}v_2v_{2n-2}\dots v_{n+1}v_n$ (Obrázek 7.10.). Přičtením čísla 1 počítáno v modulární aritmetice s modulem $2n$ dostaneme jinou hranově disjunktní cestu P_{2n} . Obecně se dá ukázat, že cesty

$$v_i v_{1+i} v_{2n-1+i} v_{2+i} v_{2n-2+i} \dots v_{j+i} v_{2n-j+i} \dots v_{n+1+i} v_{n+i}$$

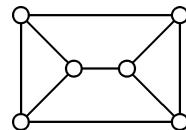
Obrázek 7.10.: Dvě hranově disjunktní cesty P_8 a P_8 -faktorizace grafu K_8 .

pro $i = 0, 1, \dots, n - 1$ jsou navzájem hranově disjunktní a tvoří rozklad grafu K_{2n} . Pro $n = 8$ je tvrzení zřejmé z Obrázku 7.10. ✓

V další části postup z Příkladu 7.1. zobecníme. Ukážeme, jak využít ohodnocení grafu H pro nalezení H -rozkladu grafu $G = K_n$.

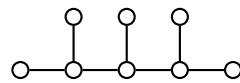
Cvičení

7.3.1.° Rozložte graf G na Obrázku 7.11. na tři cesty P_4 . Pokud to není možné, pečlivě zdůvodněte.

Obrázek 7.11.: Graf G .

7.3.2. Rozložte Petersenův graf na čtyři cesty libovolné délky. Pokud to není možné, pečlivě zdůvodněte.

7.3.3. Ukažte, že neexistuje H -rozklad kompletního grafu K_8 , kde H je graf na Obrázku 7.12.

Obrázek 7.12.: Graf H , který nefaktorizuje kompletní graf K_8 .

7.3.4.* Ukažte, že každý kubický graf bez mostů je možno rozložit na kopie grafu P_4 . (Návod: využijte Větu 6.6.)

7.3.5. Ukažte, že pokud je možno kubický graf G rozložit na P_4 , tak G má úplné párování.

Kapitola 8. Vrcholová barvení grafů

V minulé kapitole jsme barvili hrany grafu. V této kapitole budeme barvit vrcholy grafu a ukážeme několik překných praktických motivací.

Skladovací problém

Ve skladu je uloženo mnoho druhů potravin. Podle předpisů řada druhů potravin nemůže být skladována společně, musí být skladovány v oddělených prostorách. Například ovocné saláty nesmí být skladovány společně s čerstvými syrovými vejci nebo krájené salámy nesmí být skladovány společně se syrovým masem. Jaký je nejmenší počet oddělených místností, který ve skladu potřebujeme? Ukážeme, že řešení problému můžeme řešit užitím grafového modelu, ve kterém vrcholy budou odpovídat jednotlivým skladovaným komoditám a hrany budou spojovat vždy ty dva vrcholy, jestliže odpovídající komodity nemohou být skladovány společně.

Plánování zkouškových termínů

Při plánování zkouškových termínů není vhodné, aby se kryly termíny zkoušek dvou kurzů, které mají mnoho společných studentů. Navíc na vysokých školách v některých zemích je jen jeden pokus na vykonání závěrečné zkoušky a zkoušku je možno vykonat jen v jednom pevně stanoveném termínu. V takovém případě je nutné, aby žádné dva kurzy se společným studentem neměly závěrečnou zkoušku ve stejnou dobu.

Sestavíme graf, ve kterém vrcholy odpovídají jednotlivým kurzům a hranou spojíme každé dva kurzy s alespoň jedním společným studentem. Takové obarvení vrcholů grafu, ve kterém žádné dva sousední vrcholy nemají společnou barvu, odpovídá možnému rozvrhu závěrečných zkoušek, přičemž různé barvy odpovídají různým dnům i časům zkoušek. Je sice možné každý vrchol obarvit jinou barvou (v daný čas bude probíhat vždy jen jedna zkouška), to ale není ekonomické. Pochopitelně se budeme snažit minimalizovat počet různých barev vrcholů grafu.

Další úloze, která odpovídá vrcholovému barvení nějakého grafu, se budeme věnovat v kapitole 9.4.

8.1. Vrcholové barvení a chromatické číslo grafu

Definice *Vrcholové barvení* grafu G je zobrazení c vrcholové množiny $V(G)$ do množiny barev S . Obvykle je $S = \{1, 2, \dots, k\}$. Je-li $|S| = k$, budeme zobrazení c nazývat *vrcholové k -barvení* (nebo jen *k -barvení*) grafu G . Řekneme, že vrchol v je *obarven barvou i* jestliže $c(v) = i$. Číslu i říkáme *barva vrcholu*. Vrcholové barvení se nazývá *dobré*, jestliže žádné dva sousední vrcholy nejsou obarveny stejnou barvou.

Všimněte si, že numerická hodnota barvy nehraje roli. Při popisu barvení konkrétních grafů proto upřednostňujeme pojmenování barev. Naproti tomu při popisu barvení, kdy není ještě znám počet potřebných barev nebo při implementaci barev v počítači používáme přirozená čísla.

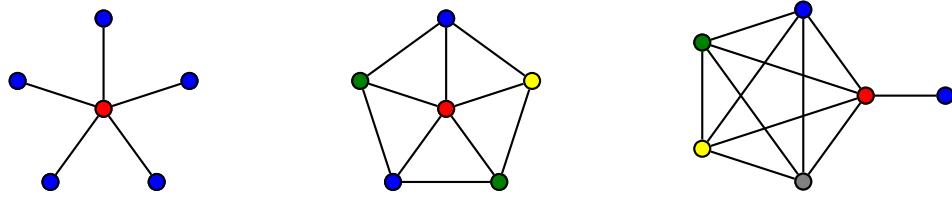
Barevné třídy

Podobně jako u hranového barvení grafu má smysl zavést vrcholové barvení grafu také pomocí rozkladu vrcholové množiny grafu G na nezávislé podmnožiny. Pro některé problémy muže být taková formulace vhodnější. Rozkladem vrcholové množiny $V(G)$ rozumíme takový systém neprázdných podmnožin V_1, V_2, \dots, V_k množiny $V(G)$, že $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V(G)$ a $V_i \cap V_j = \emptyset$ pro $i, j = 1, 2, \dots, k$, $i \neq j$. Libovolný rozklad množiny $V(G)$ je současně vrcholovým barvením grafu G . Třídě rozkladu říkáme *barevná třída*, protože se jedná o množinu vrcholů stejné barvy. Protože všechny barevné třídy jsou neprázdné, je v grafu použito všech k barev. Jsou-li navíc v každé množině V_i každé dva vrcholy nezávislé, jedná se o dobré barvení grafu G .

Definice Řekneme, že graf G je *vrcholově k -obarvitelný* (nebo jen *k -obarvitelný*), jestliže existuje jeho dobré vrcholové barvení k barevami. Nejmenší číslo k takové, že graf G je vrcholově k -obarvitelný, se nazývá *chromatické číslo* grafu G a značí se $\chi(G)$. Graf G se nazývá *vrcholově k -chromatický*, je-li $k = \chi(G)$.

Definice, podobně jako definice hranové k -obarvitelnosti v předchozí kapitole, je zformulována tak, že vrcholově k -obarvitelný graf, je také vrcholově l -obarvitelný pro každé $k \leq l \leq |V(G)|$.

Všimněte si, že na rozdíl od hranového barvení grafu vysoký stupeň $\Delta(G)$ vrcholů v grafu nevynutí vysoký počet barev dobrého vrcholového barvení. Ani malý stupeň $\delta(G)$ nezaručí malý počet barev dobrého vrcholového barvení. Například pro grafy na Obrázku 8.1. platí $\chi(K_{1,5}) = 2$, přičemž $\delta(K_{1,5}) = 1$ a

Obrázek 8.1.: Dobré vrcholové barvení hvězdy $K_{1,5}$, kola W_{1+5} a lízátka $L_{5,1}$.

$\Delta(K_{1,5}) = 5$, dále $\chi(W_{1+5}) = 4$, přičemž $\delta(W_{1+5}) = 3$ a $\Delta(W_{1+5}) = 5$ a konečně $\chi(L_{5,1}) = 5$, přičemž $\delta(L_{5,1}) = 1$ a $\Delta(L_{5,1}) = 5$.

Otázky:

- Najdete příklad grafu G , pro který je $\chi(G) < \delta(G)$?
- Najdete příklad grafu G , pro který je $\chi(G) > \Delta(G)$?

Následující věta říká, že pro dobrá barvení komplettních bipartitních grafů a sudých cyklů stačí dvě barvy.

Věta 8.1. Je-li $G \simeq K_{m,n}$ nebo $G \simeq C_{2n}$, potom $\chi(G) = 2$.

Důkaz. Protože komplettní bipartitní graf obsahuje alespoň jednu dvojici sousedních vrcholů (proč?), tak na jeho dobré vrcholové barvení potřebujeme alespoň dvě barvy. Označme U a W parity komplettního bipartitního grafu $K_{m,n}$. Obarvíme-li všechny vrcholy U barvou 1 a všechny vrcholy W barvou 2, dostaneme dobré vrcholové barvení grafu $K_{m,n}$, neboť žádné dva vrcholy nejsou obarveny stejnou barvou. Proto $\chi(K_{m,n}) = 2$.

Podobně, na dobré barvení sudého cyklu C_{2n} s vrcholy v_1, v_2, \dots, v_{2n} jsou jistě potřeba alespoň dvě barvy, neboť cyklus obsahuje alespoň dva sousední vrcholy. Dvě barvy stačí, neboť obarvíme-li všechny vrcholy s lichým indexem $i = 1, 3, \dots, 2n-1$ barvou 1 a vrcholy se sudým indexem $i = 2, 4, \dots, 2n$ obarvíme barvou 2, dostaneme dobré vrcholové barvení, protože každý vrchol se sudým indexem je sousední jen s vrcholy s lichým indexem a naopak. \square

Ve Cvičení 8.1.4. ukážeme, že všechny bipartitní grafy, nejen komplettní bipartitní grafy, jsou 2-obarvitelné a bipartitní grafy s alespoň jednou hranou jsou dokonce 2-chromatické. Také pro komplettní grafy a liché cykly umíme chromatické číslo určit snadno.

Věta 8.2. Je-li $G \simeq K_n$ nebo $G \simeq C_{2n+1}$, potom $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že $\chi(K_n) = n = \Delta(G) + 1$. Každé dva vrcholy komplettního grafu musí mít jinou barvu, neboť každé dva vrcholy jsou spojeny hranou a proto nemohou být obarveny stejně. Proto $\chi(K_n) = n = \Delta(G) + 1$.

Na dobré barvení lichého cyklu C_{2n+1} s vrcholy $v_1, v_2, \dots, v_{2n+1}$ jsou jistě potřeba alespoň dvě barvy, neboť cyklus obsahuje alespoň jednu hranu. Ukážeme, že dvě barvy nestačí na dobré barvení a tři barvy stačí. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vrchol v_1 je obarven barvou 1 a proto vrchol v_2 musí být obarven jinou barvou, řekněme barvou 2. Vrcholy s lichým indexem $i = 1, 3, \dots, 2n-1$ pak budou obarveny barvou 1 a vrcholy se sudým indexem $i = 2, 4, \dots, 2n$ barvou 2. Avšak vrchol v_{2n+1} nemůže být obarven barvou 1, protože je sousední s vrcholem v_1 a nemůže být obarven ani barvou 2, protože je sousední s v_{2n} . Dostáváme, že na obarvení lichého cyklu je třeba nejméně tři barvy a $\chi(C_{2n+1}) = 3 = \Delta(C_{2n+1}) + 1$. \square

Otázky:

- Najdete příklad grafu G různého od C_{2n+1} a K_n tak, aby $\chi(G) = \Delta(G) + 1$?
- Najdete příklad bipartitního grafu na jehož dobré vrcholové barvení stačí jediná barva?
- Platí $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = |V(G)|$?

Dolní odhad chromatického čísla

V kapitole 7.1. jsme na straně 72 zavedli vrcholové číslo nezávislosti $\alpha(G)$. Následující lemma je analogií Důsledku 7.2.

Lemma 8.3. Pro každý graf G platí $|V(G)| \leq \chi(G)\alpha(G)$.

Důkaz. Protože každá barevná třída grafu G tvoří v dobrém vrcholovém barvení množinu nezávislých vrcholů, tak G obsahuje od každé z $\chi(G)$ barev nejvýše $\alpha(G)$ vrcholů. \square

Všimněte si, že Věta 8.2. plyne také z Lemmatu 8.3. Protože $\alpha(K_n) = 1$, tak $\chi(K_n) \geq n$ a více než n barev nemůžeme použít. Podobně $\alpha(C_{2n+1}) = \lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor = n$ a proto $\chi(C_{2n+1}) \geq \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2$.

Z příkladů na Obrázku 8.1. je zřejmé, že obsahuje-li graf G podgraf K_c , tak na libovolné jeho dobré obarvení je potřeba alespoň c barev. Následující definice zavádí číslo c formálně.

Definice *Klikové číslo grafu G značíme $c(G)$. Jedná se o počet vrcholů největšího kompletního grafu (kliky), který je podgrafem G .*

Například grafy na Obrázku 8.1. mají kliková čísla $c(K_{1,5}) = 2$, $c(W_{1+5}) = 3$ a $c(L_{5,1}) = 5$. Následující lemma plyne ihned z definice klikového čísla.

Lemma 8.4. *Pro libovolný graf G platí $\chi(G) \geq c(G)$.*

Všimněte si, že ani klikové číslo nedává přesný odhad chromatického čísla. Graf W_{1+5} má klikové číslo 3 (proč?) a přitom $\chi(W_{1+5}) = 4$. Tvrzení Lemmatu 8.4. je speciálním případem obecnějšího tvrzení ze Cvičení 8.1.11.: Je-li H podgrafem grafu G , tak $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Horní odhady chromatického čísla

Dobré vrcholové k -barvení grafu G se nazývá *optimální*, jestliže $k = \chi(G)$. Snadno ukážeme, že na dobré vrcholové barvení libovolného grafu stačí vždy nejvýše $\Delta(G)+1$ barev. Takové obarvení nemusí být optimální.

Lemma 8.5. *Pro libovolný graf G platí $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Důkaz. Důkaz je konstruktivní, popíšeme algoritmus dobrého vrcholového $(\Delta(G) + 1)$ -barvení libovolného grafu G . Na začátku máme graf G a libovolný jeho vrchol obarvíme některou z $\Delta(G)+1$ barev. Protože každý vrchol je sousední s nejvýše $\Delta(G)$ vrcholy, tak každý neobarvený vrchol v je sousední s vrcholy nejvýše $\Delta(G)$ různých barev. Vždy najdeme alespoň jednu barvu, která se na vrcholech okolí vrcholu v nevyskytuje a tu můžeme použít na obarvení vrcholu v . Po $|V(G)|$ krocích máme graf G dobře vrcholově $(\Delta(G) + 1)$ -obarvený a dokazované tvrzení platí. \square

Pro některé grafy (například pro liché cykly a kompletní grafy) dostaneme tímto jednoduchým hladovým algoritmem optimální vrcholové barvení. V obecném případě však uvedený algoritmus nemusí dát barvení s nejmenším možným počtem barev. Budeme-li nejprve obarvovat vrcholy malých stupňů, tak se může stát, že při obarvení vrcholů s vysokým stupněm budeme pak muset vybírat z omezeného počtu barev a bude použito mnohem více barev, než $\chi(G)$. Je proto žádoucí obarvovat nejprve vrcholy vysokých stupňů. Toto pozorování můžeme shrnout do následujícího lemmatu.

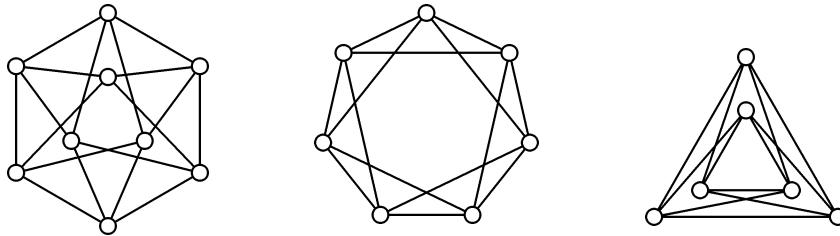
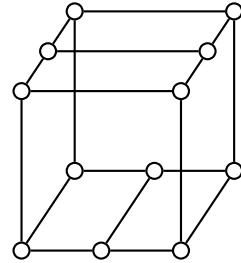
Lemma 8.6. *Pro libovolný graf G na n vrcholech s nerostoucí stupňovou posloupností $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ platí*

$$\chi(G) \leq 1 + \max_{i=1,2,\dots,n} \{\min\{d_i, i-1\}\}.$$

Důkaz. Důkaz je analogický jako důkaz Lemmatu 8.5. s tím, že vrcholy obarvujeme v pořadí podle jejich stupně d_i . Vrchol stupně d_i označíme v_i . Nejprve obarvíme vrchol v_1 stupně d_1 barvou 1. V obecném kroku obarvíme vrchol v_i , který je sousední s nejvýše $\min\{d_i, i-1\}$ již obarvenými vrcholy a stačí proto vybrat některou nepoužitou barvu mezi barvami $1, 2, \dots, 1 + \min\{d_i, i-1\}$. Tak můžeme obarvit libovolný vrchol a proto stačí nejvýše $1 + \max_{i=1,2,\dots,n} \{\min\{d_i, i-1\}\}$ barev. \square

Algoritmus popsáný v důkazu Lemmatu 8.6. najde dobré vrcholové barvení s nejmenším počtem barev všech grafů na Obrázku 8.1. Bohužel v obecném případě nemusí najít dobré vrcholové barvení, které je optimální vzhledem k počtu použitých barev (Cvičení 8.1.9.). V další podkapitole horní odhad chromatického čísla ještě zpřesníme.

Cvičení

Obrázek 8.2.: Grafy G , H a R .Obrázek 8.3.: Graf B .

8.1.1. Určete chromatické číslo grafů na Obrázku 8.2.

8.1.2. Určete chromatické číslo a najděte příslušné dobré vrcholové barvení následujících grafů a) Peterse-nův graf (Obrázek ??), b) Grötzschův graf (Obrázek 9.16.), c) graf B na Obrázku 8.3.).

8.1.3.^\diamond Jaké je chromatické číslo cyklu C_n ?

8.1.4. Určete chromatické číslo bipartitního (ne nutně kompletního) grafu G .

8.1.5.^\diamond Určete chromatické číslo grafu P_n .

8.1.6. Jaké je chromatické číslo stromu T_n ?

8.1.7. Určete $\chi(W_{n+1})$.

8.1.8. Určete chromatické číslo grafu Q_n (hyperkrychle řádu n).

8.1.9. Najděte příklad grafu, pro který algoritmus popsáný v důkazu Lemmatu 8.6. nenajde dobré vrcholové barvení s nejmenším počtem barev.

8.1.10. Najděte příklad grafu G a jeho vrcholu v tak, aby platilo $\chi(G - v) < \chi(G)$ a $\chi(\overline{G} - v) < \chi(\overline{G})$.

8.1.11. Ukažte, že je-li H podgrafem grafu G , tak $\chi(H) \leq \chi(G)$. Platí, že je-li H vlastním podgrafem grafu G , tak $\chi(H) < \chi(G)$?

8.2. Brooksova věta

V této kapitole ukážeme další silný výsledek teorie grafů. Následující věta, kterou dokázal Brooks v roce 1941, ukazuje, že mezi souvislými grafy jsou to právě jen liché cykly a kompletní grafy (Věta 8.2.), které mají chromatické číslo vyšší než nejvyšší stupeň vrcholů v grafu.

Věta 8.7. Brooksova věta

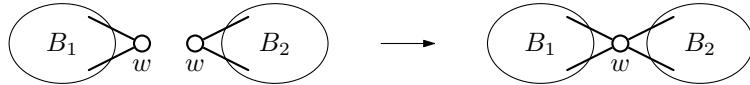
Nechť G je souvislý graf různý od kompletního grafu takový, že $\Delta(G) \geq 3$. Potom platí $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Důkaz. Uvedeme důkaz, který našel Lovász v roce 1975 a který je jednodušší než původní Brooksův důkaz. Označme $k = \Delta(G)$ v libovolném souvislém grafu G . Podle předpokladu platí $k \geq 3$.

Předpokládejme nejprve, že G obsahuje nějaký vrchol stupně menšího než k . Označíme jej v_n . Nyní prohledáním grafu G (do šířky nebo do hloubky) označíme postupně všechny vrcholy grafu G s indexy v sestupném pořadí. Každý vrchol v_i , $i = 1, 2, \dots, k-1$, má tak alespoň jednoho souseda s indexem vyšším než i a tudiž má nejvýše $k-1$ sousedů s indexem menším než i . Algoritmus dobrého hranového barvení popsáný v důkazu Lemmatu 8.6. obarví vrcholy grafu G v pořadí v_1, v_2, \dots, v_n nejvýše k barvami.

Dále předpokládejme, že G je k -pravidelný. Pokud G obsahuje artikulaci w , tak v každém bloku grafu G (komponenta $G-w$ spolu s vrcholem w a příslušnými hranami) je vrchol w stupně menšího než k a podle výše

uvedeného postupu můžeme každý blok dobře obarvit k barvami. Případnou permutací barev výsledného obarvení v jednotlivých blocích můžeme zařídit, aby w měl v každém bloku stejnou barvu a tak dostaneme dobré obarvení grafu G k barvami (Obrázek 8.4.).



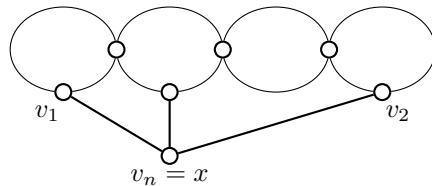
Obrázek 8.4.: Barvení grafu G získáme z vrcholového barvení bloků.

V dalším můžeme předpokládat, že G je k -pravidelný a vrcholově 2-souvislý graf. Aby bylo možno použít hladový algoritmus vrcholového barvení z důkazu Lemmatu 8.6., stačí zaručit, že alespoň dva vrcholy sousední s v_n budou obarveny stejnou barvou. Jestliže nějaké dva vrcholy v_1 a v_2 sousední s v_n nejsou spojeny hranou, můžeme je obarvit stejnou barvou a zbývající vrcholy grafu $G - \{v_1, v_2\}$ opět uspořádáme prohledáváním od vrcholu v_n . Stačí ukázat, že v každém k -pravidelném 2-souvislém grafu G najdeme takovou trojici vrcholů v_1, v_2, v_n .

Označme x libovolný vrchol grafu G . Je-li vrcholová souvislost $\kappa(G - x) \geq 2$, označíme $v_1 = x$ a v_2 bude libovolný vrchol, který je ve vzdálenosti 2 od vrcholu v_1 (takový existuje, protože G je regulární, ale není kompletní). Konečně za v_n zvolíme nějakého společného souseda vrcholů v_1 a v_2 . Tak máme zajištěno, že graf $G - \{v_1, v_2\}$ bude souvislý a prohledáváním z vrcholu v_n objevíme a označíme všechny vrcholy.

Je-li $\kappa(G - x) = 1$, označíme $v_n = x$. Graf $G - x$ obsahuje alespoň jednu artikulaci a alespoň dva bloky. Vrchol x má v grafu G alespoň jednoho souseda v každém koncovém bloku grafu $G - x$ (jinak by G nebyl 2-souvislý, proč?). Označíme dva z nich v_1 a v_2 (podle Cvičení 5.2.4. víme, že koncové bloky existují v každém grafu alespoň dva). Tyto vrcholy jistě nejsou sousední, neboť každý leží v jiném bloku a žádný není artikulací grafu $G - x$, jinak by musel být i artikulací grafu G . Uvědomíme si, že $G - \{v_1, v_2\}$ je souvislý, protože žádný blok grafu $G - x$ neobsahuje artikulaci (každý blok je 2-souvislý podgraf) a také vrchol x je stupně alespoň 3 (proč?) a je proto sousední s nějakým dalším vrcholem grafu $G - \{v_1, v_2\}$ (Obrázek 8.5.).

Nyní užitím algoritmu z Lemmatu 8.6. vždy obarvíme všechny vrcholy grafu G pomocí nejvýše k barev. □



Obrázek 8.5.: Výběr trojice vrcholů v_1, v_2, v_n .

Všimněte si, že z Brooksovy věty ihned plyne i Lemma 8.5. Brooksovou větu bychom mohli také přefor- mulovat tak, že je-li G takový graf, že $3 \leq c(G) \leq \Delta(G)$, tak $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Existuje celá řada zpřesňujících odhadů pro některé speciální třídy grafů, některá zmíníme v následující podkapitole. Existuje i celá řada zobecnění pojmu vrcholového barvení, jejich rozbor však překračuje poslání tohoto textu.

Otázky:

- Najdete příklad souvislého grafu G různého od C_{2n+1} a K_n tak, aby $\chi(G) = \Delta(G) + 1$?
- Podle Věty 8.2. víme, že horní odhad $\chi(G) \leq \Delta(G)$ neplatí pro liché cykly a kompletní grafy. Jak se toto omezení projevilo v důkazu Brooksovy věty (Věty 8.7.)?

Cvičení

8.2.1. Máme dána přirozená čísla n a r , kde $n > r \geq 3$. Najděte příklad grafu G na n vrcholech, jehož chromatické číslo je $\chi(G) = \Delta(G) = r$.

8.2.2. Najděte příklad grafu, který neobsahuje trojúhelník a přitom na jeho obarvení jsou potřeba alespoň čtyři barvy.

8.2.3. Pro každou dvojici přirozených čísel k a l , kde $2 \leq k \leq l + 1$, najděte příklad grafu G tak, aby $\chi(G) = k$ a $\Delta(G) = l$.

8.2.4. Ukažte, že vrcholově k -chromatický graf má alespoň $\binom{k}{2}$ hran.

8.3. Další meze chromatického čísla

Připomeňme, že hlavním problémem vrcholového barvení je určení chromatického čísla a nalezení nějakého optimálního vrcholového barvení. Určení přesné hodnoty chromatického čísla je náročné, někdy se spokojíme jen s přibližnou hodnotou. V literatuře můžeme najít celou řadu horních odhadů chromatického čísla. Zmíníme a dokážeme jen některé z nich. Pro jisté třídy grafů mohou dát lepší odhad než Brooksova věta (Věta 8.7.) nebo Lemmata 8.5. a 8.6.

Definice Graf G se nazývá barevně k -kritický (nebo jen k -kritický), jestliže $\chi(G) = k$ a pro každý jeho vlastní podgraf H platí $\chi(H) < \chi(G)$.

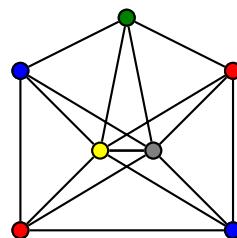
Otzázká: Kolik existuje barevně 2-kritických grafů?

Ukážeme, že barevně k -kritické grafy nemohou mít žádný vrchol stupně výrazně menšího než k .

Lemmatum 8.8. Je-li G barevně k -kritický graf, tak $\delta(G) \geq k - 1$.

Důkaz. Označme x libovolný vrchol grafu G . Protože G je barevně k -kritický graf, tak $\chi(G - x) \leq k - 1$. Dále postupujeme sporem. Předpokládejme, že $\deg_G(x) < k - 1$. Pokud $\deg_G(x) < k - 1$, tak $|N_G(x)| < k - 1$ a nepoužitou barvu mezi $k - 1$ barvami použijeme na obarvení vrcholu x . Dostaneme tak dobré $(k - 1)$ -barvení grafu G , což je spor s předpokladem, že $\chi(G) = k$. \square

Příkladem barevně k -kritického grafu je kompletní graf K_n pro $n > 1$, protože $\chi(K_n) = n$ a odebráním libovolného vrcholy nebo libovolné hrany dostaneme graf, na jehož dobré vrcholové barvení stačí méně než n barev. Další příklad barevně 5-kritického grafu G je na Obrázku 8.6. Pečlivě si rozmyslete, že vynecháním libovolného vrcholu nebo libovolné hrany dostaneme 4-chromatický graf. Potom i chromatické číslo každého vlastního podgrafa H grafu G bude menší než $\chi(G)$ (proč?).



Obrázek 8.6.: Barevně 5-kritický graf.

Odebíráním vrcholů a hran grafu můžeme chromatické číslo jen zmenšit, proto každý vrcholově k -chromatický graf má nějaký k -kritický podgraf i k -kritický faktor. Následující věta říká, že chromatické číslo grafu můžeme omezit i největší hodnotou nejmenšího stupně podgrafů daného grafu.

Věta 8.9. Pro každý graf G platí $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(H) : H$ je podgraf grafu $G\}$.

Důkaz. Označme $k = \chi(G)$ a označme H' nějaký k -kritický podgraf grafu G . Platí $\chi(G) - 1 = \chi(H') - 1$, což je podle Lemmatu 8.8. menší než $\delta(H')$ a to je menší, než $\max\{\delta(H) : H$ je podgraf grafu $G\}$. \square

Mohlo by se zdát, že odhad ve Větě 8.9. je lepší než v Brooksově větě, neboť maximální stupeň je nahrazen minimálním stupněm. V obecnosti je použití tohoto odhadu omezené, neboť probrání všech podgrafů je obvykle náročné, protože různých podgrafů může existovat příliš mnoho. Je potřeba mít na paměti, že je-li H podgraf grafu G , tak může nastat případ, kdy $\delta(H) > \delta(G)$. Například na Obrázku 8.1. je kompletní graf $H = K_5$ podgrafenem lízátka $G = L_{5,1}$ a přitom $\delta(H) = 4 > 1 = \delta(G)$. Použití „triviálního“ odhadu $\chi(G) \leq 1 + \delta(G)$ je proto chybné! Pro pravidelné grafy dává odhad ve Větě 8.9. shodnou mez jako Brooksova věta.

Další horní odhad chromatického čísla ukazuje, že pro grafy na velkém počtu vrcholů závisí chromatické číslo v podstatě jen na počtu hran m . Odhad uvedeme bez důkazu.

Věta 8.10. Nechť graf G má n vrcholů a m hran. Potom $\chi(G) \leq 1 + \sqrt{2m(n-1)/n}$.

Když říkáme „pro velké grafy“, rozumíme tím grafy s velkým počtem vrcholů. Horní odhad pak můžeme zjednodušit. Přestože pro každou pevnou hodnotu n platí $(n-1)/n < 1$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$. Pro velké

grafy stačí psát $\chi(G) \leq 1 + \sqrt{2m(n-1)/n} < 1 + \sqrt{2m}$, neboť číselně vychází (celočíselný!) zjednodušený odhad pro většinu grafů stejně.

Následující odhad je sice velmi jednoduchý, obecně však není příliš dobrý.

Věta 8.11. *Délku nejdelší cesty v libovolném grafu G označme m(G). Platí $\chi(G) \leq 1 + m(G)$.*

Důkaz. Označíme V_0 největší nezávislou množinu vrcholů grafu G. Dále označíme V_1 největší nezávislou množinu vrcholů grafu $G - V_0$. Podobně označíme V_j největší nezávislou množinu vrcholů grafu

$$G - \bigcup_{i=0}^{j-1} V_i.$$

Po konečném počtu kroků dostaneme rozklad

$$V(G) = \bigcup_{i=0}^k V_i$$

pro nějaké přirozené číslo k. Vrcholy v každé z množin V_j můžeme obarvit stejnou barvou, neboť jsou nezávislé. Graf G proto můžeme dobře obarvit $k+1$ barvami.

Zbývá ukázat, že $k+1 \leq 1 + m(G)$. Nejprve v grafu G najdeme cestu v_0, v_1, \dots, v_k délky k takovou, že $v_i \in V_i$. Označme v_k libovolný vrchol v množině V_k . Vrchol v_k je jistě sousední s některým vrcholem v množině V_{k-1} . Pokud by nebyl sousední s žádným vrcholem z V_{k-1} , byla by $V_{k-1} \cup \{v_k\}$ nezávislá množina. Označíme v_{k-1} libovolný z vrcholů v množině $N(v_k) \cap V_{k-1}$. Dále najdeme vrchol $v_{k-2} \in V_{k-2}$, který je sousední s vrcholem v_{k-1} . Podobně postupujeme až v množině V_0 nejdeme vrchol sousední s vrcholem v_1 . Vrcholy v_0, v_1, \dots, v_k tvoří cestu v G, protože každá z hran $v_{i-1}v_i$ pro $i = 1, 2, \dots, k$ patří do $E(G)$. Našli jsme cestu délky k v grafu G a proto je jistě $k \leq m(G)$ a také $k+1 \leq 1 + m(G)$. Víme již, že v grafu G existuje dobré vrcholové barvení $k+1$ barvami a proto

$$\chi(G) \leq k+1 \leq 1 + m(G).$$

Tím je tvrzení věty dokázáno. \square

Otzázká: Jak se v důkazu Věty 8.11. využívá předpoklad, že množina V_i je největší nezávislá množina?

Souvislost s multipartitními grafy

V kapitole 1. jsme na straně 21 zavedli pojem bipartitního grafu, ve kterém byla vrcholová množina rozložena na dvě nezávislé množiny. Tuto definici můžeme zobecnit.

Definice Multipartitní graf

Kompletní r-partitní graf K_{n_1, n_2, \dots, n_r} je graf, jehož vrcholová množina V se skládá z $r \geq 1$ navzájem disjunktních neprázdných podmnožin V_i , $i = 1, 2, \dots, r$, kde $|V_i| = n_i$ pro $i = 1, 2, \dots, r$, a hranová množina E obsahuje právě ty hrany, jejichž koncové vrcholy leží v různých množinách V_i a V_j , kde $i \neq j$. Každý podgraf (V, E') , kde $E' \subseteq E$, úplného r-partitního grafu se nazývá r-partitní graf, případně multipartitní graf.

Multipartitní grafy úzce souvisí s chromatickým číslem grafu. Na r-partitní grafy je možno pohlížet, jako na grafy dobře obarvené r barvami. Všimněte si, že obecně v nerovnosti $\chi(G) \leq r$, kde G je nějaký r-partitní graf, nemusí nastat rovnost. Například každý strom T_n je současně multipartitní graf s n partitami a přitom $\chi(T_n)$ není větší než 2, neboť T_n je současně bipartitní. Naproti tomu pro kompletní multipartitní grafy platí $\chi(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}) = r$ (proč?).

Cvičení

8.3.1. Popište všechny barevně 3-kritické grafy.

8.3.2. Ukažte, že barevně k-kritický graf a) je souvislý, b) neobsahuje artikulaci.

8.3.3. Dokažte Větu 8.11. indukcí.

8.3.4. Pro libovolné přirozené číslo $n \geq 3$ najděte příklad grafu s n vrcholy, pro který je $a)^\diamond \chi(G) < 1 + m(G)$, b) $\chi(G) = 1 + m(G)$, kde $m(G)$ je délku nejdelší cesty v grafu G.

8.3.5. Ukažte, že jestliže libovolné dva liché cykly grafu G mají společný vrchol, potom $\chi(G) \leq 5$.

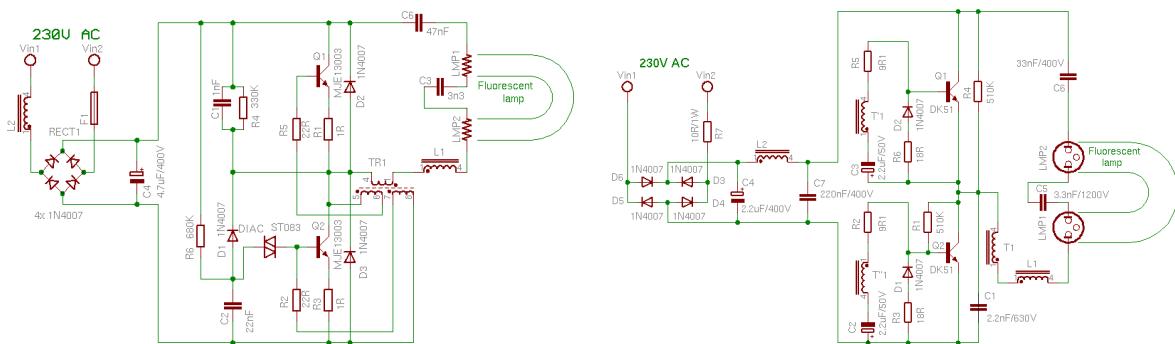
- 8.3.6. Dokažte nebo vyvraťte: $\chi(G \cup H) \leq \chi(G) + \chi(H)$.
- 8.3.7. Najděte alespoň čtyři nekonečné třídy barevně k -kritických grafů pro nějakou hodnotu k .
- 8.3.8. Najděte nekonečnou třídu barevně k -kritických grafů pro každé přirozené číslo $k > 1$.
- 8.3.9. Mějme graf G s maximálním stupněm 3. Dokažte, že jeho vrcholy lze obarvit dvěma barvami (ne nutně dobrým barvením) tak, že nevznikne jednobarevná cesta se třemi vrcholy.

Kapitola 9. Planární grafy a neplanární grafy

V této kapitole se budeme věnovat nejen struktuře grafu, ale i různým nakreslením daného grafu. Ukážeme, že takové nakreslení, ve kterém se hrany zbytečně „nekříží“ je nejen přehlednější, ale je motivováno praktickými aplikacemi.

Návrh tištěných spojů

Přirozeným požadavkem při navrhování tištěných spojů je, aby v návrhu bylo co nejméně nevodivých křížení. Taková místa křížení je třeba „přemostit“ drátem a nebo je potřeba použít vícevrstevní tištěný spoj. Schéma na Obrázku 9.1. vpravo obsahuje jediné křížení, kterému je navíc možno se vyhnout⁸. Schéma vlevo obsahuje celou řadu nevodivých křížení a na první pohled rozhodně není zřejmé, zda je možno schéma překreslit bez křížení hran. Ukážeme si, jak využít nástrojů teorie grafů při návrhu a rozboru tištěných spojů. Pěkné využití Věty o čtyřech barvách, jednoho z nejnámějších výsledků teorie grafů, pro hledání výrobních vad procesorů je podrobně popsáno na straně 94.



Obrázek 9.1.: Dvě různá schémata tištěných spojů úsporných zářivek.

Otzáka: Je možno nakreslit schémata na Obrázku 9.1. tak, aby se vodiče nekřížily?

Tři domy a tři studny

Z rekreační matematiky je známa následující úloha, která také souvisí s kreslením grafu do roviny:

Podle pověsti žily v Temném hvozdě tři čarodějnici. Každá bydlela ve své vlastní slunci a každá potřebovala k provozování své živnosti vodu z každé ze tří studánek: s živou vodou, s mrтvou vodou a s pitnou vodou. Jenomže cestou ke studánkám se čarodějnici nesmí potkat, ani zkřížit vyšlapanou cestičku jiné čarodějnici. Ptáme se, jak mohla vypadat mapa lesa se slujemi, studnami a cestičkami? Ukážeme, že taková mapa neexistuje (nelze ji nakreslit na čtvrtku papíru).

9.1. Rovinné a planární grafy

V dalším textu budeme pracovat s pojmem křivky v rovině, v některé literatuře se jí říká *oblouk*. Vystačíme s intuitivní definicí křivky. O něco korektněji můžeme říci, že máme-li nějaké spojité zobrazení $\gamma : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$, tak *křivka* je podmnožina roviny \mathbb{R}^2 ve tvaru

$$k = \gamma(\langle 0, 1 \rangle) = \{\gamma(t) : t \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

Koncovým bodům $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$ křivky k budeme říkat *výchozí* a *koncový* bod. Pečlivé vybudování pojmu křivky a dalších příbuzných pojmu spadá do matematické disciplíny topologie. Precizní vybudování není tak jednoduché, jak by se na první pohled mohlo zdát. Všimněte si, že uvedená definice pěkně popisuje proces kreslení křivky. Budeme-li proměnnou t chápát jako čas v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, tak $\gamma(t)$ popisuje pohyb hrotu tužky podél křivky mezi výchozím bodem $\gamma(0)$ a koncovým bodem $\gamma(1)$.

Připomeňme⁹, že graf můžeme chápat nejen algebraickou jako uspořádanou dvojici množiny vrcholů a množiny hran (některých dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů), ale také jako diagramy (nakreslení

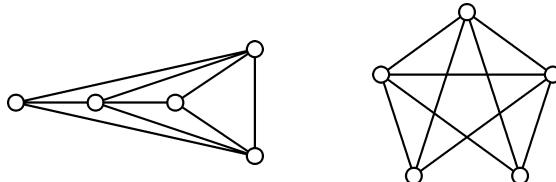
⁸ V usměrňovači s Graetzovým zapojením se obvykle přívody diod zakreslují tak, že se vodiče kříží v nevodivém spojení. Tomuto křížení se při samotné realizaci tištěného spoje snadno vyhneme vhodným umístěním kontaktu zdroje napětí.

⁹ O zadávání grafů jsme psali v kapitole 1.1. na straně 21.

grafu v rovině), kde vrcholy grafu odpovídají různým bodům v rovině a každá hrana uv odpovídá nějaké křivce mezi body, které odpovídají vrcholům u a v . Nyní můžeme vyslovit následující definici.

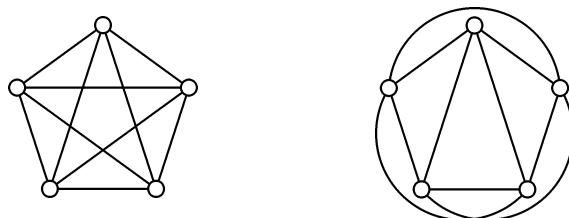
Definice Graf je *rovinný*, jestliže máme dáno jeho nakreslení do roviny takové, že žádné dvě křivky, které odpovídají hranám, nemají společné body kromě koncových vrcholů. Dále graf je *planární*, jestliže je možné jej zakreslit do roviny tak, aby žádné dvě hrany neměly jiné společné body, než koncové.

Všimněte si, že rovinnost je vlastnost nakreslení grafu, zatímco planarita je vlastnost grafu. Každý graf, který má rovinné zakreslení, je současně planární. Avšak i planární graf můžeme zakreslit tak, že nakreslení není rovinné (Obrázek 9.2.).



Obrázek 9.2.: Graf K_5 – e jako rovinný graf i jako planární graf.

Ukážeme, že graf K_5 není planární. Pro důkaz tohoto (a některých jiných) tvrzení užijeme dva zcela odlišné přístupy. V kapitole 9.2. se zaměříme na přístup s využitím pojmu z topologie a v kapitole 9.3. se budeme věnovat témuž s využitím algebraického přístupu. Protože K_5 bez jedné hrany je planární graf (Obrázek 9.2. vlevo), tak K_5 je nejmenší graf, který není planární (Cvičení 9.1.4.).



Obrázek 9.3.: Graf K_5 a nakreslení grafu K_5 s jediným křížením hran.

Otázky:

- Najdete menší graf než K_5 , který není rovinný?
- Najdete menší graf než K_5 , který není planární?

Cvičení

9.1.1. Dokažte nebo vyvraťte: Pro každé přirozené číslo n existuje a) 4-pravidelný planární graf, b) 5-pravidelný planární graf, které mají alespoň n vrcholů. Existují takové souvislé grafy?

9.1.2. Ukažte, že graf $K_{3,3}$ – e je planární.

9.1.3. Dokažte, že každý podgraf planárního grafu je planární.

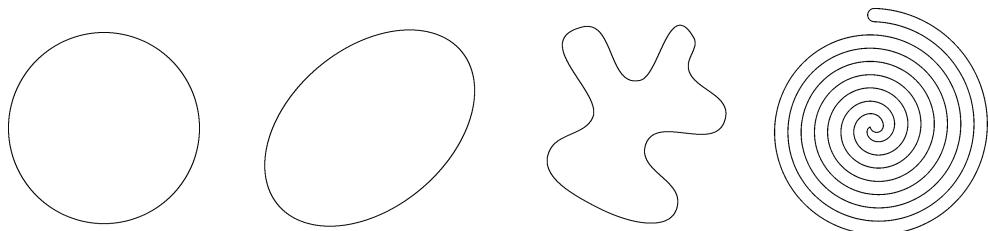
9.1.4. Ukažte, že K_5 je nejmenší neplanární graf co do počtu vrcholů a $K_{3,3}$ je nejmenší neplanární graf co do počtu hran.

9.2. Topologický přístup

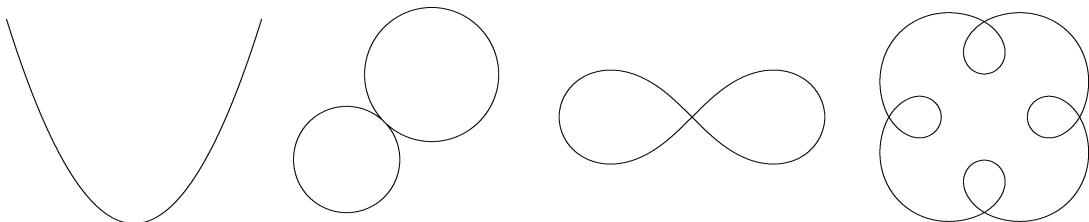
Zavedeme několik pojmu z topologie, které souvisí s kreslením grafů do roviny.

Definice Jordanovská křivka

Uzavřená Jordanovská křivka nebo stručně *Jordanovská křivka* je taková křivka, která má totožný výchozí a koncový bod (vrchol) a jinak neprotíná sama sebe.



Obrázek 9.4.: Jordanovské křivky.



Obrázek 9.5.: Křivky, které nejsou Jordanovské.

Kružnice, elipsa a další křivky na Obrázku 9.4. jsou Jordanovské křivky. Přímka ani parabola nejsou Jordanovské křivky, protože nejsou uzavřené. Lemniskáta či „osmička“ z dvojice dotýkajících se kružnic (Obrázek 9.5.) také nejsou Jordanovské křivky, neboť protínají samy sebe.

Oblasti roviny

Každá Jordanovská křivka dělí rovinu na dvě části, vnitřní a vnější, které má smysl odlišit. Tento pojem si zavedeme formálně.

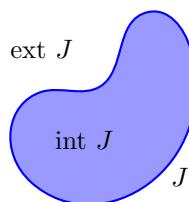
Definice Oblast roviny

Otevřená množina je taková podmnožina $A \subseteq \mathbb{R}^2$, že pro každý bod $p \in A$ platí, že existuje takové jeho okolí \mathcal{O} , že $\mathcal{O} \subseteq A$. Oblast roviny je taková otevřená množina B roviny \mathbb{R}^2 , že pro každé dva body $p, q \in B$ najdeme křivku $k \subset B$ s koncovými body p, q .

Všimněte si, že u křivek na Obrázku 9.4. je na rozdíl od křivek na Obrázku 9.5. zřejmé, co je vnitřní a co vnější část (Obrázek 9.6.). V následující definici tuto vlastnost popišeme formálně.

Definice Interiér a exteriér Jordanovské křivky

Uzavřená Jordanovská křivka J rozděluje rovinu na dvě oblasti. Tyto otevřené množiny nazýváme *interiér* J (*vnitřek* J) a *exteriér* J (*vnějšek* J) a značíme je $\text{int } J$, resp. $\text{ext } J$. Uzávěrem uvedených množin budeme rozumět příslušnou oblast včetně hraniční křivky J , uzávěr interiéru značíme $\text{Int } J$ a uzávěr exteriéru $\text{Ext } J$.

Obrázek 9.6.: Interiér a exteriér Jordanovské křivky J .

Všimněte si, že zatímco $\text{int } J$ Jordanovské křivky J je na Obrázku 9.6. vyznačen modrou a $\text{ext } J$ bílou barvou, tak $\text{Int } J$ a $\text{Ext } J$ obsahují navíc černě nakreslenou křivku J .

Otzázky:

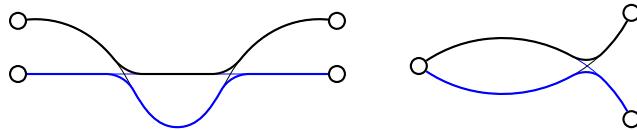
- Popište $\text{int } J \cap \text{ext } J$.
- Popište $\text{Int } J \cap \text{Ext } J$.

Lemma 9.1. Věta o Jordanovských křivkách

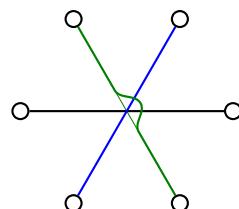
Nechť J je nějaké Jordanovská křivka v rovině a nechť p, q jsou nějaké body takové, že $p \in \text{int } J$ a $q \in \text{ext } J$. Potom každá křivka s koncovými vrcholy p, q protíná křivku J v alespoň jednom bodě.

Důkaz vynecháme, je možno jej najít v učebnicích topologie.

Můžeme předpokládat, že v libovolném nakreslení mají každé dvě hrany nejvýše jedno křížení. Případný větší počet křížení v nakreslení snadno odstraníme postupem naznačeným na Obrázku 9.7. Navíc předpokládáme, že v žádném bodě se nekříží více než dvě hrany. Případný větší počet křížících se hran v nakreslení eliminujeme postupem naznačeným na Obrázku 9.8. Avšak v grafu na Obrázku 9.9. není možné zabránit křížení všech hran současně.



Obrázek 9.7.: Převod více křížení na nejvýše jedno.



Obrázek 9.8.: Odstranění křížení více než dvou hran.

S využitím právě zavedených pojmu ukážeme, že graf K_5 nelze v rovině zakreslit tak, aby se žádné dvě hrany nekřížily.

Věta 9.2. Graf K_5 není planární.

Důkaz. Graf K_5 jistě obsahuje cyklus C_5 , který obsahuje všechny vrcholy (na Obrázku 9.9. je vyznačen modře). Uzavřenou Jordanovskou křivku tohoto cyklu C_5 označíme J . Ze zbývajících pěti hran můžeme bez protínání nakreslit vždy nejvýše dvě v int J a nejvýše dvě v ext J , protože mezi pěti vrcholy cyklu najdeme nejvýše tři vrcholy tak, aby mezi nimi byly dvě nesousední dvojice vrcholů. Proto zbývající hrana, která neprotne křivku J , protne vždy alespoň jednu z „úhlopříčných“ hran. \square



Obrázek 9.9.: Neplanárnost grafu K_5 .

Analogicky se ukáže následující věta. Důkaz je ponechán jako Cvičení 9.2.1.

Věta 9.3. Graf $K_{3,3}$ není planární.

Příklad 9.1. Tři domy a tři studny

Nyní snadno zdůvodníme, že motivační úloha ze strany 85 nemá řešení. Pokud by řešení existovalo, tak mapa Temného hvozdu by odpovídala rovinnému nakreslení grafu $K_{3,3}$, což podle Věty 9.3. není možné.

Otzáka: Existuje řešení úlohy „Tři domy a tři studny“ pokud se neomezíme na grafy v rovině?

Rozdělení grafu

Snadno nahlédneme, že nahradíme-li v grafu G nějakou hranu cestou nebo naopak indukovaný podgraf izomorfní s cestou délky alespoň 2 nahradíme jedinou hranou, tak nový graf G' dopadne vzhledem k planárnosti stejně. Následující definice umožní popsat tuto vlastnost formálně.

Definice Rozdělení grafu

Mějme dán graf G s hranou uv a vrchol x , který do grafu G nepatří. Řekneme, že graf G' je *rozdelením grafu G* , jestliže G' vznikne přidáním vrcholu x na nějakou hranu. Přesněji $V(G') = V(G) \cup \{x\}$ a $E(G') = E(G) \setminus \{uv\} \cup \{ux, xv\}$. Podobně můžeme rozdělit více hran.

V literatuře se rozdelení grafu někdy říká *subdivize* grafu. Všimněte si, jak souvisí rozdelení grafu a jeho nakreslení. Máme-li planární graf, tak rozdelení tohoto grafu je opět planární graf a naopak (Cvičení 9.2.2.). Pěkným přirovnáním je, že nové vrcholy navlékáme na hrany jako korálky.

Neplanárních grafů existuje nekonečně mnoho. Podle následující věty však všechny musí obsahovat jeden ze dvou podgrafů (nebo jejich rozdelení), které neplanaritu způsobí.

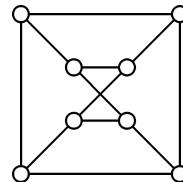
Věta 9.4. Kuratowského věta

Graf G je planární právě tehdy, když neobsahuje jako podgraf žádné rozdelení grafu K_5 ani $K_{3,3}$.

Důkaz vynecháme.

Cvičení

- 9.2.1. Dokažte Větu 9.3.
- 9.2.2. Dokažte, že každé rozdelení neplanárního grafu je neplanární.
- 9.2.3. Určete všechny planární úplné tripartitní grafy.
- 9.2.4. Určete všechny planární úplné r -partitní grafy pro $r > 3$.
- 9.2.5. Je graf G na Obrázku 9.10. planární?

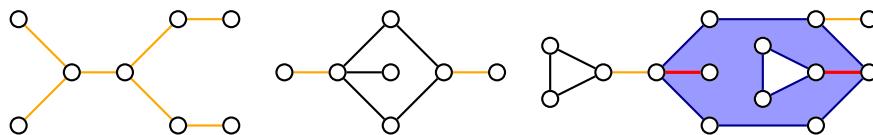


Obrázek 9.10.: Graf G .

- 9.2.6. Je Möbiův žebřík planární graf?
- 9.2.7. Ukažte, že Petersenův graf (Obrázek ??) není planární.

9.3. Algebraický přístup a Eulerův vzorec

Mějme nějaké rovinné nakreslení grafu G . *Oblastí grafu G* budeme rozumět takovou oblast roviny, která je ohrazena křivkou cyklu tak, že žádná hraná ani vrchol grafu neleží v interiéru křivky. Za oblast grafu budeme někdy považovat také část roviny, která je ohrazena uzavřeným sledem, případně několika sledy (přičemž žádná hraná ani vrchol neleží v interiéru příslušné křivky). Například rovinná nakreslení stromů mají jedinou oblast, jejíž hranice evidentně není cyklem. Podobně hranice modré oblasti na Obrázku 9.11. není Jordanovskou křivkou. Červeně jsou vyznačeny hrany, které se na hranici vyskytují dvakrát a hranice proto je uzavřeným sledem. Žlutě jsou vyznačeny hrany, které se vyskytují dvakrát na hranici vnější oblasti. Všimněte si, že v grafu se třemi komponentami (Obrázek 9.11.) je hranice vnější oblasti tvořena třemi uzavřenými sledy.



Obrázek 9.11.: Hranice vnější oblasti ani modré oblasti nejsou cyklem v grafu.

Označme $o(G)$ počet oblastí grafu G v nějakém jeho rovinném nakreslení. Všimněte si, že oblast grafu a počet oblastí grafu definujeme pouze pro *rovinné* grafy. Pokud máme takové nakreslení grafu, ve kterém se nějaké hrany kříží, nemá pojem oblasti smysl a nemůžeme proto ani určit počet oblastí. Následující věta patří k nejstarším výsledkům teorie grafů.

Věta 9.5. Eulerův vzorec

Pro libovolný souvislý rovinný graf G platí $v(G) - h(G) + o(G) = 2$.

Důkaz. Postupujeme indukcí vzhledem k počtu oblastí.

Základ indukce: Souvislý graf s jedinou oblastí neobsahuje žádný cyklus, který by odděloval dvě oblasti, proto je takový graf stromem. Podle Věty 3.3. má strom s $v(G)$ vrcholy právě $v(G) - 1$ hran a proto

$$v(G) - h(G) + o(G) = v(G) - (v(G) - 1) + 1 = 2.$$

Indukční krok: Mějme souvislý rovinný graf G s alespoň dvěma oblastmi. Předpokládejme, že pro každý souvislý rovinný graf s méně než $o(G)$ oblastmi Eulerův vzorec platí. Zvolme libovolnou hranu e grafu G , která odděluje dvě oblasti (taková hrana podle předpokladu existuje). Odebráním hrany e z grafu G dostaneme graf $G' = G - e$, který má o jednu oblast méně, neboť odstraněním hrany e se obě oddělené oblasti spojí v jedinou oblast. Podle indukčního předpokladu pro graf G' Eulerův vzorec platí, proto

$$2 = v(G') - h(G') + o(G') = v(G) - (h(G) - 1) + o(G) - 1 = v(G) - h(G) + o(G),$$

což je dokazované tvrzení. \square

Eulerův vztah je velmi silným tvrzením o planárních grafech. Ukážeme, že řadu tvrzení můžeme získat jako důsledky Věty 9.5. Jedním z nich je pozorování, které říká, že pro planární (nejen rovinné!) grafy můžeme určit počet oblastí rovinného nakreslení, aniž takové nakreslení známe!

Důsledek 9.6. *Všechna rovinná nakreslení souvislého planárního grafu mají v rovině stejný počet oblastí.*

Důkaz. Každé nakreslení planárního grafu G má stejný počet vrcholů $v(G)$ a stejný počet hran $h(G)$. Podle Věty 9.5. má každé nakreslení $2 - v(G) + h(G)$ oblastí a počet oblastí je proto vždy stejný. \square

Otzázkы:

- Proč nemá smysl definovat počet oblastí pro grafy, které nejsou rovinné dokonce ani když jsou planární?
- Proč je součástí tvrzení Důsledku 9.6. „v rovině“?

Důsledek 9.7. *Pro každý planární graf G s více než dvěma vrcholy platí $h(G) \leq 3v(G) - 6$.*

Důkaz. Můžeme předpokládat, že graf G je souvislý. Pro nesouvislé grafy plyne platnost tvrzení z platnosti nerovnosti pro každou komponentu. Pro grafy s jedinou oblastí a alespoň třemi vrcholy tvrzení platí s využitím Věty 3.3. (proč?).

Předpokládejme, že graf má alespoň dvě oblasti. Hranice každé oblasti je v jednoduchém grafu tvořena alespoň třemi hranami. Proto sečteme-li všechny hrany, které leží na hranici nějaké oblasti a oddělují dvě oblasti, dostaneme číslo alespoň $3o(G)$. Každá hrana, která leží na hranici, je v tomto součtu započítána dvakrát – alespoň¹⁰ jednou za každou oblast, které odděluje. Proto v každém takovém grafu platí $h(G) \geq \frac{3}{2}o(G)$, tj. $o(G) \leq \frac{2}{3}h(G)$.

Z Eulerova vzorce (Věta 9.5.) pak plyne

$$2 = v(G) - h(G) + o(G) \leq v(G) - h(G) + \frac{2}{3}h(G).$$

Odtud je

$$2 = v(G) - \frac{1}{3}h(G).$$

Vynásobením číslem 3 a úpravou dostaneme dokazované tvrzení

$$h(G) \leq 3v(G) - 6.$$

¹⁰ Dobře si rozmyslete, proč říkáme „alespoň jednou“. Ověřte své pozorování na Obrázku 9.11.

□

Důsledek 9.7. je možno chápout jako pozorování, že „v planárním grafu není mnoho hran.“ Zatímco v kompletém grafu roste počet hran s druhou mocninou počtu vrcholů, tak v planárním grafu je počet hran menší než trojnásobek počtu vrcholů.

Otázky:

- Všimněte si, že ani v jednoduchém grafu nemusí hrany na hranici oblasti tvořit cyklus. Jak je to možné? Zdůvodňte na příkladu.
- Jaký je počet oblastí stromu? Jak vypadá hranice?
- Jak se v důkazu Věty 9.7. použilo, že tvrzení platí pro grafy s více než dvěma vrcholy?

Důsledek 9.8. *Pro každý planární graf G platí $\delta(G) \leq 5$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme přímo. Pro grafy s jedním nebo dvěma vrcholy tvrzení jistě platí. Pro grafy s větším počtem vrcholů dostaneme dle Věty 1.1.

$$2h(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq v(G)\delta(G)$$

a užitím Důsledku 9.7. můžeme psát

$$\begin{aligned} 2h(G) &\leq 6v(G) - 12 \\ v(G)\delta(G) &\leq 6v(G) - 12 \\ \delta(G) &\leq 6 - \frac{12}{v(G)} \\ \delta(G) &< 6. \end{aligned}$$

Protože nejmenší stupeň grafu $\delta(G)$ je jistě celé číslo, dostáváme dokazované tvrzení $\delta(G) \leq 5$. □

Důsledek 9.9. *Pro každý planární graf G bez trojúhelníků a s alespoň třemi vrcholy platí $h(G) \leq 2v(G) - 4$.*

Důkaz je ponechán jako Cvičení 9.3.4. Podobně důkaz následujícího tvrzení je Cvičení 9.3.5.

Důsledek 9.10. *Pro každý planární graf G bez trojúhelníků platí $\delta(G) \leq 3$.*

Následující důsledek jsme již dokázali ve Větách 9.2. a 9.3. S využitím Důsledků 9.7. a 9.9. (tj. s využitím Eulerova vzorce) lze najít jiný elegantní důkaz (Cvičení 9.3.6. a 9.3.7.).

Důsledek 9.11. *Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou planární.*

Eulerův vzorec můžeme snadno zobecnit i pro nesouvislé grafy. V rovinném grafu s více komponentami samozřejmě platí Eulerův vzorec pro každou komponentu. Důkaz je ponechán jako Cvičení 9.3.2. Při počítání oblastí v nesouvislém grafu nesmíme zapomenout, že jednotlivé komponenty sdílí jednu společnou „vnější“ oblast.

Věta 9.12. Eulerův vzorec pro nesouvislé grafy

Pro libovolný rovinný graf G s $\omega(G)$ komponentami platí $v(G) - h(G) + o(G) = 1 + \omega(G)$.

Otázka: Které z vět a důsledků v této podkapitole platí i pro multigrafy (grafy s násobnými hranami)?

Cvičení

9.3.1. *Dokažte Eulerův vzorec indukcí vzhledem k počtu hran.*

9.3.2. *Dokažte Eulerův vzorec pro nesouvislé grafy třemi různými způsoby.*

9.3.3. *Najděte příklad grafu G , ve kterém každá oblast je ohrazena hranami nejvíce dvou komponent, přičemž a) G má alespoň tři komponenty, b) G má právě k komponent, pro každé $k \geq 2$.*

9.3.4. *Dokažte Důsledek 9.9.*

9.3.5. *Dokažte Důsledek 9.10.*

9.3.6. Nalezněte alternativní důkaz neplanárnosti grafu K_5 .

9.3.7. Nalezněte alternativní důkaz neplanárnosti grafu $K_{3,3}$.

9.3.8. Obvod grafu G je délka nejkratšího cyklu v grafu G . Ukažte, že čím je obvod g planárního grafu G větší, tím méně může mít graf G hran.

9.3.9. S využitím Eulerova vzorce (Věta 9.5.) dokažte, že Petersenův graf na Obrázku ?? není planární, víte-li že obvod Peteresenova grafu je 5.

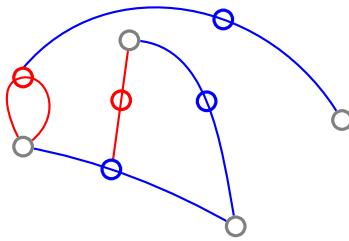
9.3.10. Dokažte, že planární graf G s více než třemi vrcholy a $\delta(G) \geq 3$ má alespoň 4 vrcholy stupně 5 nebo menšího.

9.3.11. Nechť G má alespoň 11 vrcholů. a) Dokažte, že buď G nebo jeho komplement \overline{G} je neplanární. b) Najdete příklad grafu G' , který má 8 vrcholů a G' i \overline{G}' jsou planární? c)** Najdete příklad grafu G' , který má 10 vrcholů a G' i \overline{G}' jsou planární?

9.3.12. Najdete příklad grafu a dvou jeho nakreslení (a) do roviny b) a na jinou plochu) tak, aby se hrany neprotínaly a obě nakreslení měla jiný počet oblastí? Vysvětlete!

9.3.13. Najděte příklad planárního grafu, pro který neplatí vztah z Důsledku 9.7., tj. pro který platí $h(G) > 3v(G) - 6$.

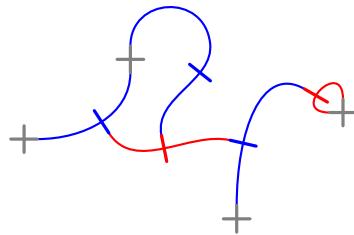
9.3.14. Hra „šprouti“ (z anglického „sprouts“, „výhonky“). Na papíře je nakresleno n puntíků. Hra je zajímavá už pro malá n , třeba 5. Hráči se střídají, kdo nemůže udělat další tah, prohrál. V každém tahu spojí hráč křivkou dva puntíky tak, aby nezkřížil žádnou jinou křivku a na křivku nakreslí nový puntík. Puntík se smí použít jako konec nové křivky jen pokud z něj vedou nejvýše dvě další křivky. Ukažte, že pro n počátečních puntíků má hra nejvýše $3n - 1$ tahů. Na Obrázku 9.12. jsou pro přehlednost tahy obou hráčů odlišeny barevně.



Obrázek 9.12.: Rozehraná hra se čtyřmi výchozími puntíky, kdy je na tahu červený hráč.

9.3.15.* Ukažte, že hra šprouti (Cvičení 9.3.14.) pro n počátečních puntíků má vždy alespoň $2n$ tahů.

9.3.16.* Hra „podvodní šprouti“. („Brussels sprouts“) Místo puntíků budeme kreslit křížky. Nové křivky se připojují pouze k rámci křížků. Nový křížek vytvoříme vždy přeskrtnutím křivky nakreslené v daném tahu. Ukažte, že hra má vždy právě $5n - 2$ tahů. Na Obrázku 9.13. jsou pro přehlednost tahy obou hráčů odlišeny barevně.



Obrázek 9.13.: Rozehraná hra se čtyřmi výchozími křížky, kdy je na tahu červený hráč.

9.3.17. **Hrana se, v nějakém pevně zvoleném nakreslení, nazývá sudá, jestliže protíná jiné hrany grafu v sudém počtu průsečíků (ne koncových bodů). Ukažte, že pokud existuje takové nakreslení grafu G , ve kterém je každá hrana sudá, tak je G planární.

9.3.18. **Označme S množinu všech bodů s celočíselnými souřadnicemi v rovině. Mějme libovolný n -úhelník, jehož vrcholy patří do množiny S (n -úhelník může být i nekonvexní). Označme u počet všech bodů z S , které leží uvnitř n -úhelníka a h počet všech bodů z S , které leží na hranici n -úhelníka.

a) Předpokládejme, že každý trojúhelník, jehož žádný vnitřní bod a kromě vrcholů ani žádný bod na hranici nepatří do S má obsah $\frac{1}{2}$. Ukažte, že obsah n -úhelníka je $u + \frac{h}{2} - 1$.

b) Uměli byste ukázat, že každý trojúhelník, jehož žádný vnitřní bod a kromě vrcholů ani žádný bod na hranici nepatří do S má obsah $\frac{1}{2}$?

9.4. Duální grafy a barvení planárních grafů

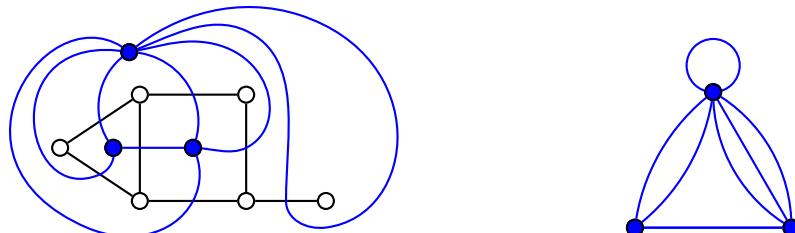
V následující podkapitole budeme pracovat s pojmem obecného grafu, připustíme existenci smyček a násobných hran. Nemí těžké si rozmyslet (Cvičení 9.4.4.), že pokud je jednoduchý graf G planární, tak graf G' , který získáme z grafu G tak, že nahradíme některé hrany násobnými hranami a u některých vrcholů přidáme smyčky, je také planární. Naopak, z obecného planárního grafu G' jistě můžeme získat jednoduchý planární graf G vynecháním smyček a násobných hran.

Definice Duální graf

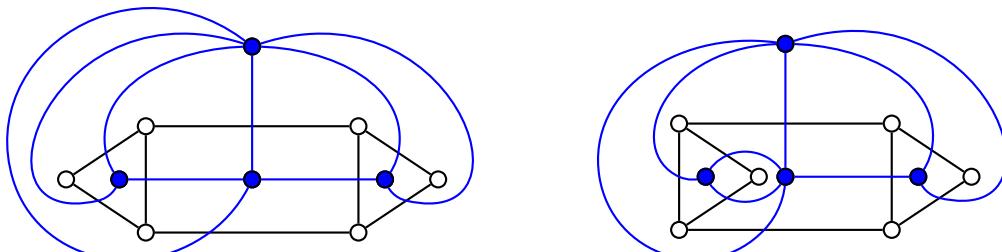
Mějme rovinný graf G s množinou hran e_1, e_2, \dots, e_p a množinou oblastí o_1, o_2, \dots, o_q . *Duální graf* G^* grafu G je graf s množinou vrcholů $V(G^*) = \{o_1^*, o_2^*, \dots, o_q^*\}$ a množinou hran $E(G^*) = \{e_1^*, e_2^*, \dots, e_p^*\}$, kde dva vrcholy o_i^*, o_j^* budou spojeny hranou e_k^* , jestliže hrana e_k je na hranici oblastí o_i a o_j .

Všimněte si, že i v případě, že G je jednoduchý graf, může být graf G^* se smyčkami nebo násobnými hranami (Obrázek 9.14.). Je-li například G strom, je G^* graf s jediným vrcholem a $|E(G)|$ smyčkami. Obecně každá hrana, která neodděluje dvě oblasti, ale je součástí hranice jediné oblasti, odpovídá smyčce multigrafu G^* .

Konstrukce duálního grafu je definována jen pro rovinné grafy a dá se ukázat, že duální graf G^* k rovinnému grafu G je opět rovinný graf (Cvičení 9.4.1.). Z definice snadno nahlédneme, že duálním grafem ke grafu G^* je opět původní graf G (Cvičení 9.4.2.). Je zajímavé si uvědomit, že struktura duálního grafu závisí na příslušném nakreslení grafu G . Stejný graf může mít několik neisomorfních duálních grafů (Obrázek 9.15., Cvičení 9.4.16.).



Obrázek 9.14.: Graf G a jeho duální multigraf G^* .



Obrázek 9.15.: Dva neisomorfní duální grafy téhož grafu G .

Směřujeme k formulaci problému čtyř barev, jednoho z nejznámějších problémů, který byl vyřešen pomocí teorie grafů. Francis Guthrie si v roce 1852 všiml, že při obarvování oblastí map stačí vždy nejvýše čtyři barvy. De Morgan a Arthur Cayley problém popularizovali. Nikdo tvrzení neuměl ani dokázat ani vyvrátit (nalezením protipříkladu) a tak se zrodil jeden z věhlasných problémů, o jehož řešení se více než sto let pokoušela celá řada významných matematiků. Konečně v roce 1976 Kenneth Appel a Wolfgang Haken podali důkaz založený jednak na teoretickém rozboru a jednak na vyšetření mnoha stovek jistých grafů.

Věta 9.13. Věta o čtyřech barvách

Pro libovolný rovinný graf G platí $\chi(G) \leq 4$.

Důkaz pochopitelně vynecháme.

Pro rovinné grafy bez trojúhelníků (například bipartitní rovinné grafy, ale nejen je) umíme snadno dokázat následující větu (Cvičení 9.4.3.).

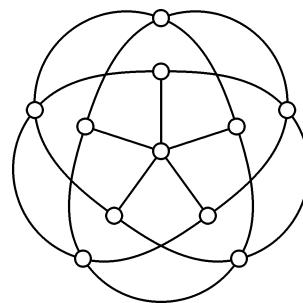
Věta 9.14. Pro každý planární graf G bez trojúhelníků platí $\chi(G) \leq 4$.

Německý matematik Herbert Grötzsch dokázal v roce 1959 ještě silnější související výsledek.

Věta 9.15. Grötzschova věta

Pro každý planární graf G bez trojúhelníků platí $\chi(G) \leq 3$.

Důkaz nebudeme uvádět. Grötzschův původní důkaz byl složitý a všechny dodnes známé důkazy jsou poměrně komplikované nebo využívají jiná silná tvrzení. Poznamenejme ještě, že je možno ukázat o něco silnější tvrzení: každý rovinný graf, který obsahuje nejvýše tři trojúhelníky, má chromatické číslo 3. Na druhou stranu existují planární grafy se čtyřmi trojúhelníky, na jejichž dobré vrcholové barvení tři barvy nestačí. Současně existují neplanární grafy bez trojúhelníků (například Grötzschův graf na Obrázku 9.16.) na jejichž dobré vrcholové barvení jsou potřeba alespoň čtyři barvy.



Obrázek 9.16.: Grötzschův graf.

Otzáka: Jaký je příklad rovinného grafu se čtyřmi trojúhelníky, na jehož dobré vrcholové barvení jsou potřeba právě čtyři barvy?

Kontrola tištěných spojů

Vědci z AT&T Bellových laboratoří navrhli metodu kontroly tištěných spojů, která je pěknou praktickou aplikací Věty o čtyřech barvách. Vodivé spoje v jedné vrstvě tištěného spoje (i uvnitř procesoru) můžeme chápout jako oblasti v rovině. Obvykle požadujeme co nejmenší rozlohy tištěného spoje a proto je jejich výroba náhylná k chybám, které se projeví zkratem mezi různými vodiči (oblastmi). Kdybychom měli testovat krátké spojení mezi každými dvěma vodiči tištěného spoje se stovkou vodičů nebo (někdy se jim říká „sítě“), bude potřeba prověřit řádově 5000 možných zkratů, což je nepraktické. Typický počet sítí se pohybuje v rádu 500 a v takovém případě může zkrat nastat mezi více než 120 tisíci různými dvojicemi sítí. Při testu máme za úkol pouze zjistit *zda* je tištěný spoj vadný, není důležité *kde* přesně zkrat nastal.

Pěknou aplikací barvení grafů je možnost rychlého testu nejběžnějších vad ve výrobním procesu, které se projeví zkratem mezi *sousedními* sítěmi, tj. sítěmi, které spolu na tištěném spoji sousedí. Protože celé schéma jedné vrstvy vodivých spojení můžeme chápout jako rovinný graf, existuje podle Věty o čtyřech barvách dobré obarvení vodivých oblastí sítí (vrcholy grafu odpovídají sítím) čtyřmi barvami. V takovém barvení nikdy nejsou sítě jedné barvy sousední. Místo příkládání dvojice testovacích sond postupně k různým dvojicím sítí, je možno pro výrobní linku sestavit jakési „supersondy“, kdy každá bude přiložena současně ke všem sítím odpovídajícím jedné barvě. Stačí se omezit na hledání zkratu mezi sítěmi různých barev, místo tisíců testů stačí prověřit $\binom{4}{2} = 6$ dvojic.

Počet testů můžeme zredukovat dokonce na pouhé dva testy, když čísla použitých čtyř barev zakódujeme v binárním kódru a jedna dvojice testovacích supersond bude odpovídat barvám s první binární číslicí 0 resp. 1 a druhá dvojice barvám s druhou binární číslicí 0 resp. 1. Pokud tištěný spoje obsahuje zkrat mezi vrcholy (odpovídají vodičů či sítím) dvou různých barev a protože čísla každých dvou barev se liší v alespoň jednom bitu, tak bude zkrat při alespoň jednom testu objeven.

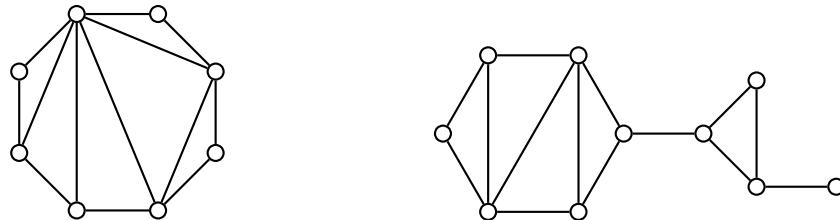
Oboustrannému tištěnému spoji, který se v praxi vyskytuje nejčastěji, by odpovídal graf tloušťky 2 (tloušťka je zavedena na straně 98) a dá se ukázat, že na dobré obarvení takového grafu potřebujeme nejvíše 12 barev. Analogicky jako v předchozím odstavci můžeme témto dvanácti barvám přiřadit čtyřbitové binární kódy a pro každý bit sestavit dvojici sond, vždy jedna bude současně přiložena ke všem vodičům s hodnotou 0 a druhá s hodnotou 1 příslušného bitu. Budou tak stačit čtyři testy na objevení nejběžnější výrobní vady, oproti tisícům obvyklých testů. Podrobnější popis najdete v knize [S].

Vnějškově planární grafy

Rovinné grafy, které dostaneme zakreslením několika hran do vnitřní oblasti cyklu, mají mezi planárními grafy výjimečné postavení, právě díky poměrně jednoduché struktuře.

Definice Planární graf se nazývá *vnějškově planární*, jestliže existuje takové jeho rovinné nakreslení, že všechny jeho vrcholy leží na hranici vnější oblasti.

Grafy na Obrázku 9.17. jsou vnějškově planární. Všimněte si, že podle definice nemusí všechny vrcholy vnějškově planárního grafu ležet na cyklu ani když je souvislý. Například graf na Obrázku 9.17. vpravo je vnějškově planární, avšak jistě neobsahuje cyklus procházející všemi vrcholy.



Obrázek 9.17.: Příklady vnějškově planárních grafů.

Jiná situace nastane pro 2-souvislé grafy, jak ukazuje následující lemma. Ve Cvičení 9.4.20. dokonce ukážeme, že takový cyklus existuje právě jeden.

Lemma 9.16. *Hranice vnější oblasti 2-souvislého vnějškově planárního grafu tvoří cyklus, který prochází všemi vrcholy.*

Důkaz. Víme, že hranice obsahuje všechny vrcholy grafu. Pokud by tato hranice nebyla cyklem, byla by sledem a to znamená, že prochází některým vrcholem dvakrát. Takový vrchol by tvořil artikulaci a graf by nebyl 2-souvislý. \square

Ve Cvičení 9.4.18. ukážeme, že grafy K_4 a $K_{2,3}$ nejsou vnějškově planární. Je zajímavé, že tyto dva grafy mají pro vnějškově planární grafy podobný význam jako grafy K_5 a $K_{3,3}$ pro planární grafy. Dá se ukázat, že graf je vnějškově planární právě tehdy, když neobsahuje rozdělení grafu K_4 ani $K_{2,3}$.

Věta 9.17. *Každý vnějškově planární graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 2.*

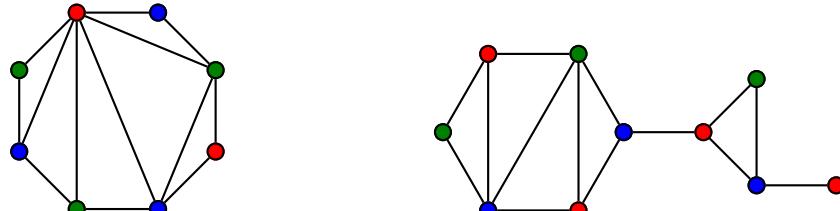
Důkaz. Omezíme se na souvislé grafy, protože tvrzení platí pro každou komponentu. V grafu s méně než čtyřmi vrcholy je každý vrchol stupně nejvýše 2. Pro grafy s alespoň čtyřmi vrcholy povedeme důkaz indukcí vzhledem k počtu vrcholů a dokážeme dokonce, že v každém vnějškově planárném grafu jsou dva nesousední vrcholy stupně nejvýše 2.

Základ indukce: Graf K_4 není vnějškově planární, neboť v každém cyklu, který prochází všemi vrcholy, najdeme dvě hrany (*chordály*, což jsou hrany mezi nesousedními vrcholy cyklu), jejichž koncové vrcholy se pravidelně střídají podél cyklu a nemohou být zakresleny současně ve stejné oblasti. Ostatní grafy na čtyřech vrcholech mají alespoň dva nesousední vrcholy stupně nejvýše 2.

Indukční krok: Mějme vnějškově planární graf G s alespoň pěti vrcholy. Předpokládejme, že každý vnějškově planární graf s méně vrcholy obsahuje dva nesousední vrcholy stupně 2. Jestliže graf G obsahuje artikulaci, pak najdeme (podle Cvičení 5.2.4.) dva koncové bloky (koncový blok obsahuje jedinou artikulaci). Bloky jsou vnějškově planární grafy a podle předpokladu najdeme v každém alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 2, přičemž tyto vrcholy jsou v grafu G nesousední.

V 2-souvislém grafu G najdeme podle Lemmatu 9.16. cyklus C , který prochází všemi vrcholy. Pokud graf G neobsahuje kromě hran cyklu C žádnou další hranu, jsou všechny vrcholy v G stupně 2. Je-li xy nějaká chordální cyklu C , tak každá ze dvou (x,y) -cest cyklu C spolu s chordálou xy tvoří cyklus, jehož vrcholy indukují vnějškově planární podgraf grafu G . Každý tento podgraf splňuje indukční předpoklad a obsahuje nějaký vrchol stupně nejvýše 2 různý od x a y . Máme tak hledané dva vrcholy a nespojuje je žádná hrana, neboť by musela buď protnout hranu xy nebo být zakreslena v oblasti ohraničené cyklem C , což není možné. \square

Pomocí předchozí věty snadno ukážeme, že každý vnějškově planární graf lze dobré barvit třemi barvami (Cvičení 9.4.19.). Na Obrázku 9.18. je dobré vrcholové barvení grafů z Obrázku 9.17. třemi barvami.



Obrázek 9.18.: Dobrá vrcholové 3-barvení vnějškově planárních grafů.

Vnějškově planární graf se nazývá maximální, pokud do něj není možno přidat žádnou hranu aniž by se porušila vlastnost být vnějškově planární. Na straně ?? definujeme Catalanova čísla. Všimněte si, že pokud rozlišujeme označení vrcholů, tak počet maximálních vnějškově planárních grafů na n vrcholech je dán Catalanovým číslem C_{n-2} .

Otázky:

- Je Věta 9.17. silnější než Věta 9.15.? Nebo naopak?
- Existuje vnějškově planární graf, který neobsahuje žádný vrchol stupně 2?
- Existuje vnějškově planární graf, který neobsahuje žádný vrchol stupně 1 ani 2?

Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Grötzsch_graph
- http://en.wikipedia.org/wiki/Outerplanar_graph.

Cvičení

9.4.1. Mějme libovolný rovinný graf G . Ukažte, že duální multigraf G^* je planární.

9.4.2. Mějme libovolný rovinný graf G . Ukažte, že duálním grafem k duálnímu grafu G^* je opět původní graf G .

9.4.3. Dokažte Větu 9.14.: pro každý planární graf G bez trojúhelníků platí $\chi(G) \leq 4$.

9.4.4. Ukažte, že pokud je jednoduchý graf G planární, tak graf G' , který vznikne z grafu G nahrazením některých hran násobnými hranami a přidáním smyček k některým vrcholům, je také planární.

9.4.5. Mějme nějaké rovinné nakreslení grafu G . Nadefinujte oblastní barvení grafu a dobré oblastní barvení grafu G . Zavedete oblastní chromatické číslo $\chi_o(G)$.

9.4.6. Najděte příklad rovinného grafu, který neobsahuje K_4 jako podgraf, ale na jeho dobré vrcholové barvení jsou potřeba alespoň čtyři barvy.

9.4.7. Najděte příklad (nerovinného) grafu, který neobsahuje a) graf K_5 jako podgraf, ale na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň pět barev, b) graf K_n jako podgraf, ale na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň n barev.

9.4.8. Dokažte slabší verzi věty o čtyřech barvách: pro každý planární graf G je $\chi(G) \leq 6$.

9.4.9. Najděte jiný důkaz, že pro každý planární graf G platí $\chi(G) \leq 6$ (použijte Větu 8.9.).

9.4.10.* Dokažte, Větu o 5 barvách, tj. že pro každý planární graf G je $\chi(G) \leq 5$.

9.4.11. Najděte chybu v následujícím důkazu:

Mějme takový graf G , že na jeho dobré vrcholové barvení je potřeba alespoň 5 barev. V grafu G musí být nějaké vrcholy stupně alespoň 4, které jsou sousední s vrcholy čtyř ostatních barev, jinak bychom je mohli přebarvit a použít méně než 5 barev. Dále jistě najdeme takovou množinu pěti vrcholů různé barvy, které tvoří podgraf K_5 , protože na dobré vrcholové obarvení každého podgrafa K_5 – e stačí podle Brooksovy Věty 8.7. jen 4 barvy. V roviném grafu podle Kuratowského věty neexistuje podgraf izomorfní s K_5 a proto (podle předchozího zdůvodnění) na obarvení rovinného grafu budou stačit vždy čtyři barvy.

9.4.12. \diamond Ukažte, že duálním grafem kola W_{n+1} je kolo W_{n+1} .

9.4.13. Podle Věty 9.4. víme, že graf K_6 není planární. Ukažte, že existuje takový planární graf G , jehož vrcholy je možno obarvit šesti barvami (ohodnotit) 1, 2, ..., 6 tak, že každý vrchol obarvený barvou i je sousední s vrcholy všech zbyvajících pěti barev.

9.4.14. Najděte dobré vrcholové barvení planárního grafu z předchozího příkladu pomocí čtyř barev.

9.4.15. Ukažte, že tvrzení ze Cvičení 9.4.13. není možné zesílit, tj. neexistuje roviný graf G , jehož vrcholy je možno obarvit sedmi barvami (ohodnotit) 1, 2, ..., 7 tak, že každý vrchol i je sousední s vrcholy všech zbyvajících šesti barev.

9.4.16. Pro každé přirozené číslo k najděte příklad planárního grafu G a alespoň k takových jeho různých roviných nakreslení, že pro každé nakreslení dostaneme jiný (neisomorfní) duální a) multigraf G^* b) graf G^* .

9.4.17. Najděte všechny maximální vnějškově planární grafy na a) pěti vrcholech, b) šesti vrcholech. Maximální vnějškově planární jsou zavedeny na straně 96.

9.4.18. Ukažte, že grafy K_4 a $K_{2,3}$ jsou planární, ale nejsou vnějškově planární.

9.4.19. Ukažte, že chromatické číslo vnějškově planárních grafů je nejvýše 3.

9.4.20. Ukažte, že každý 2-souvislý vnějškově planární graf obsahuje právě jeden cyklus, který prochází všemi vrcholy (hamiltonovský cyklus).

9.5. Neplanární grafy

V předchozí podkapitole jsme se věnovali planárním grafům. Má však smysl studovat i neplanární grafy a v této souvislosti je rozumné položit si otázku „jak moc“ je daný graf neplanární. Míru neplanarity je možné popsat několika způsoby. Některé z nich zmíníme.

Pokud daný graf G není planární, tak neexistuje jeho rovinné nakreslení. V dalším budeme předpokládat, že máme takové nakreslení neplanárního grafu, že

- 1) žádná hrana neprotíná sama sebe,
- 2) dvě závislé hrany se neprotínají,
- 3) dvě nezávislé hrany se protínají nejvýše jednou,
- 4) v jednom bodě roviny se protínají nejvýše dvě hrany.

Pokud by tomu tak nebylo, umíme se příslušnému křížení vždy vyhnout vhodným překreslením daného grafu (Obrázky 9.7. a 9.8.).

Průsečíkové číslo

Mírou neplanarity může být například nejmenší nutný počet křížení v nějakém nakreslení daného grafu.

Definice Průsečíkové číslo grafu G je nejmenší počet průsečíků hran mezi všemi takovými nakresleními grafu G do roviny, ve kterých se v žádném bodě neprotínají více než dvě hrany. Průsečíkové číslo grafu G se značí $\nu(G)$.

Podle definice je graf G planární, právě když $\nu(G) = 0$. Je zřejmé, že je-li H podgrafem grafu G , tak platí $\nu(H) \leq \nu(G)$. Navíc je-li H rozdelením grafu G , jistě platí $\nu(H) = \nu(G)$.

Průsečíkové číslo je známo jen pro velmi málo obecných tříd grafů. I pro velké kompletní a kompletní bipartitní grafy jsou známý jen horní odhad, které vyplývají z konstrukce konkrétního nakreslení. Pro ilustraci uvedeme následující dvě tvrzení.

Věta 9.18. Pro úplný graf K_n platí

$$\nu(K_n) \leq \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor,$$

přičemž pro $1 \leq n \leq 11$ nastává rovnost.

Věta 9.19. Pro úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ platí

$$\nu(K_{m,n}) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor,$$

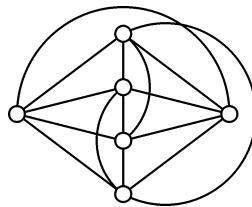
přičemž pro $\min\{m, n\} \leq 6$ nastává rovnost.

Polský matematik Kazimierz Zarankiewicz vyslovil v roce 1954 hypotézu, že ve Větě 9.19. nastává vždy rovnost. Zatím se podařilo tuto hypotézu dokázat jen pro $\min\{m, n\} \leq 6$ a několik málo dalších hodnot.

Při určování průsečíkového čísla konkrétního grafu s pravidelnou strukturou můžeme využít Eulerova vzorce a jeho důsledky. Mějme dán graf G . Označme r nejmenší počet hran, který je nutné z grafu G odstranit, aby byl dostal planární graf H . Jistě platí $r \leq \nu(G)$. V jednoduchém rovinném grafu H je každá oblast ohraničena alespoň třemi hranami, a tak jsme v Důsledku 9.7. ukázali, že $h(H) \leq 3v(H) - 6$. Nyní protože $v(H) = v(G)$ a $h(G) - r = h(H)$ odvodíme

$$\begin{aligned} h(H) &\leq 3v(H) - 6 \\ h(G) - r &\leq 3v(G) - 6 \\ r &\geq h(G) - 3v(G) + 6 \\ \nu(G) &\geq h(G) - 3v(G) + 6. \end{aligned}$$

Například pro graf K_6 je proto $\nu(K_6) \geq 15 - 18 + 6 = 3$ a protože existuje takové nakreslení grafu K_6 , ve kterém jsou pouze tři průsečíky (Obrázek 9.19.), tak víme, že $\nu(K_6) = 3$. Podobně lze určit průsečíkové číslo pro řadu speciálních grafů (Cvičení 9.5.5.), avšak určení průsečíkového čísla obecného grafu není tímto přístupem možné.



Obrázek 9.19.: Nakreslení grafu K_6 se třemi průsečíky.

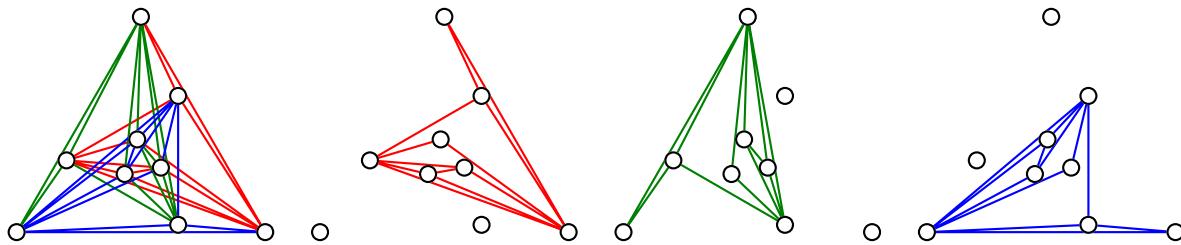
Otzážka: Proč nemá smysl použít dolní odhad $\nu(G) \geq h(G) - 3v(G) + 6$ pro všechny grafy?

Tloušťka grafu

Jiným způsobem charakterizace neplanarity je „tloušťka grafu,“ která přímo souvisí s navrhováním vícevrstevních tištěných spojů (viz také strana 94).

Definice *Tloušťka grafu G je nejmenší počet planárních faktorů, na které je možno graf G rozložit. Tloušťka grafu se značí $\theta(G)$.*

Na Obrázku 9.20. je rozklad neplanárního kompletního grafu K_9 na tři planární faktory. Proto jistě je $\theta(K_9) \leq 3$.



Obrázek 9.20.: Rozklad grafu K_9 na tři rovinné faktory.

Určit tloušťku obecného grafu není snadné. Avšak odhadnout minimální počet planárních faktorů není těžké. Důkaz následující věty je ponechán jako Cvičení 9.5.6.

Věta 9.20. *Pro tloušťku grafu G platí $\theta(G) \geq \left\lceil \frac{h(G)}{3v(G)-6} \right\rceil$.*

Tlušťka kompletních grafů a několika dalších tříd grafů, je známa přesně. Následující tvrzení uvedeme bez důkazu.

Věta 9.21. *Pro úplné grafy K_n , kde $n \neq 9, 10$ platí $\theta(K_n) = \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$ a pro grafy K_9 a K_{10} platí $\theta(K_9) = \theta(K_{10}) = 3$.*

Všimněte si, že z uvedeného výsledku vyplývá, že rozklad na Obrázku 9.20. je nejlepší možný a platí tedy $\theta(K_9) = 3$.

Cvičení

9.5.1. Určete $\nu(K_{3,3})$ bez použití Věty 9.19.

9.5.2. Určete $\nu(K_{2,2,2})$.

9.5.3. Určete $\nu(K_{1,2,3})$.

9.5.4. Existuje relace uspořádání mezi čísly $\nu(G)$ a $\theta(G)$ pro všechny grafy G ? Jestliže ano, nalezněte nějakou. Jestliže ne, uveděte protipříklad.

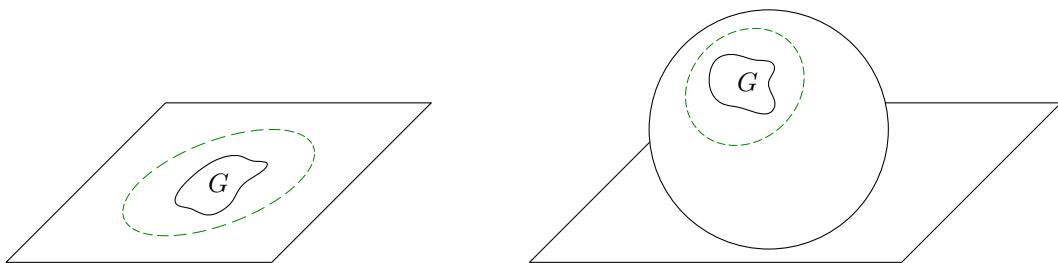
9.5.5. Určete průsečíkové číslo Petersenova grafu.

9.5.6. Dokažte Větu 9.20., že tloušťka grafu G je alespoň $\left\lceil \frac{h(G)}{3v(G)-6} \right\rceil$.

9.5.7. Bez užití Věty 9.21. ukažte, že a) $\theta(K_8) = 2$, b) $\theta(K_{11}) = 3$, c) $\theta^*(K_{12}) = 3$.

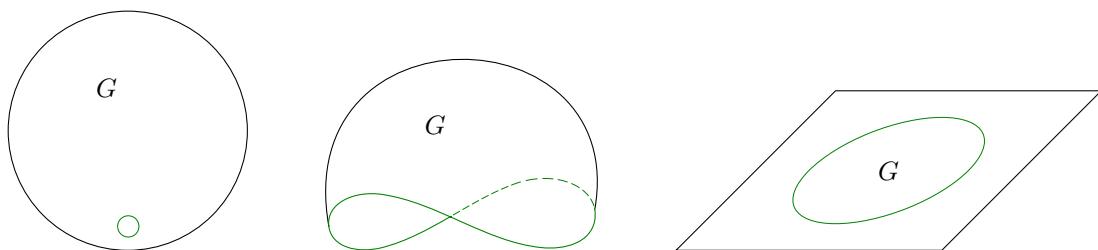
9.6. Rod grafu

Je zajímavé si uvědomit, že co se průsečíků týká, je kreslení grafu do roviny totožné s kreslením grafu na sféru. Neformálně si může představit, že pro kreslení máme rovinu (i sféru) vyrobenou z pružného materiálu. Zakreslíme-li konečný graf do roviny, zabírá vždy konečnou část a tak můžeme vyříznout dostatečně velkou oblast, kterou „zabalíme a nafoukneme“ nebo jen mírně natáhneme a přiložíme na kouli, přičemž nakreslení grafu se jen malinko zdeformuje (Obrázek 9.21.). Jistě tak nezmění struktura grafu ani nevzniknou žádná nová křížení hran.



Obrázek 9.21.: Transformace rovinného nakreslení grafu na sféru.

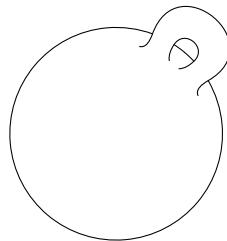
Naopak, máme-li graf nakreslený na sféře, tak vždy můžeme vyříznout část nějaké oblasti (stačí i jediný bod) tak, abychom neodstranili žádný vrchol ani bod křivky hran. Opět „rozbalením“ a natažením okrajů vyříznuté části můžeme sféru natáhnout do roviny, přičemž struktura zakresleného grafu zůstane nezměněna (Obrázek 9.22.).



Obrázek 9.22.: Transformace nakreslení grafu ze sféry do roviny.

Pro formální popis ekvivalence obou nakreslení můžeme najít spojité bijektivní zobrazení mezi rovinou a povrchem koule, například stereografickou projekci. Avšak existují složitější topologické plochy, na kterých můžeme nakreslit bez průsečíků hran i některé grafy, které nejsou planární. Všimněte si, že planární grafy můžeme bez průsečíků nakreslit na libovolnou plochu, postupovat můžeme podobně jako na Obrázku 9.21. Například grafy K_5 a $K_{3,3}$ můžeme bez protínání hran zakreslit na torus (Obrázek 9.25., Cvičení 9.6.1.), avšak grafy K_8 nebo $K_{4,5}$ nikoliv. S tím souvisí poslední parametr neplanarity, tzv. *rod*. Souvisí přímo s topologickým pojmem *rod plochy*.

Rovina i sféra jsou plochy rodu nula. Neformálně zavedeme rod plochy jako počet „uší“, která můžeme ke sféře připojit. Jestliže je graf G nakreslený na ploše tak, aby se hrany neprotínaly, tak říkáme, že G je do plochy *vnořen* (Obrázek 9.23.). Není těžké si rozmyslet, že každý graf můžeme vnořit do plochy dostatečně vysokého rodu. Proto má následující definice smysl.



Obrázek 9.23.: *Plocha rodu 1 – kulová plocha s jedním přidaným uchem.*

Definice Rod grafu

Rod grafu G je nejmenší rod plochy, do které je možno graf G vnořit (zakreslit tak, aby se hrany neprotínaly). Rod grafu G budeme značit $\gamma(G)$.

Zmíníme dva výsledky týkající se kompletních a kompletních bipartitních grafů. Jejich důkaz je nad rámec tohoto textu.

Věta 9.22. *Pro $n \geq 3$ platí*

$$\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil.$$

Věta 9.23. *Pro $n \geq 3$ platí*

$$\gamma(K_{m,n}) = \left\lceil \frac{(n-2)(m-2)}{4} \right\rceil.$$

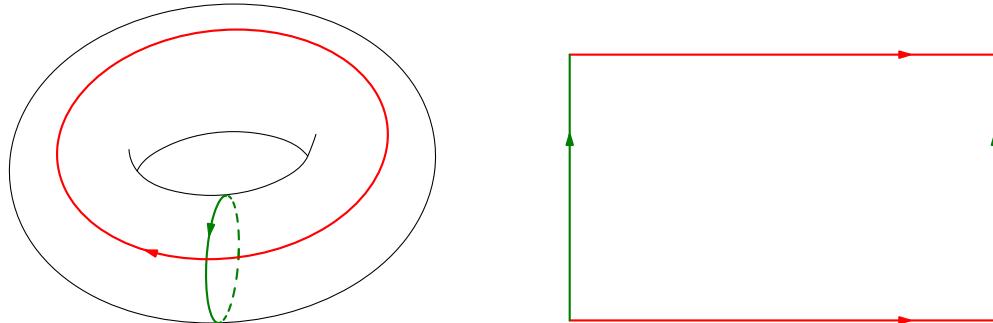
Vnoření grafu do jiných ploch než do roviny.

Na straně 86 jsme nadefinovali rovinné grafy, o zakreslování do roviny a na sféru jsme psali na straně 9.1. a na začátku této podkapitoly (strana 9.6.). Máme-li takové nakreslení grafu na plochu, ve kterém se hrany nekříží, říkáme, že graf je do plochy *vnořen* a nakreslení grafu se nazývá také *vnoření*.

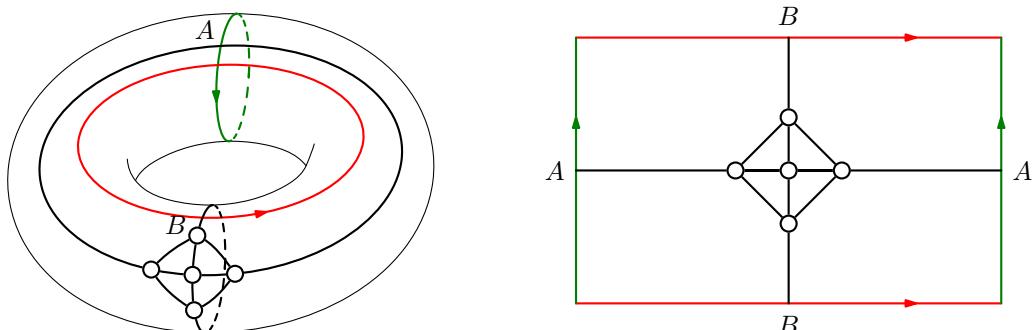
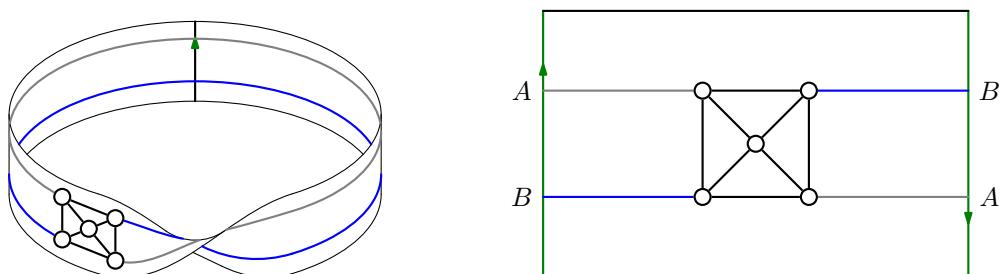
Když při kreslení na torus, Möbiův list nevystačíme s představivostí, nemusíme mít k dispozici trojrozměrný model. Využijeme tzv. *rozvinutí* do roviny. Představme si, že máme torus vyrobený z pružného materiálu. Rozřízneme-li torus napříč (řez je označen zelenou šipkou na Obrázku 9.24.) a podél (řez podle červené šipky), dostaneme plochu, kterou můžeme „rozvinout“ (natáhnout a vyrovnat) do obdélníku v rovině, přičemž hranice obdélníku odpovídají okrajům řezu (Obrázek 9.24.). S výhodou využijeme, že ve skutečnosti je čára řezu jen myšlená a každý bod na hranici vpravo odpovídá nějakému bodu na hranici vlevo. Podobně při kreslení „přes horní okraj“ pokračujeme na dolním okraji. Při kreslení na Möbiův list vystačíme s jediným řezem (Obrázek 9.26.). Kreslíme-li více průsečíků (bodů) na hranici musíme na odpovídajících stranách dodržet jejich pořadí vzhledem k orientaci šipek řezů (Obrázky 9.25. a 9.26.).

Je třeba zdůraznit že při každém kreslení do roviny i na Möbiův list chápeme plochu jako *rovinný útvar*. Podstatné je, že zakreslený bod nebo křivka leží *v ploše*, poněkud nepřesně bychom mohli říci, že leží „současně na obou stranách“ plochy. Tento fakt je významný zejména při kreslení na Möbiův list (Obrázek 9.26.), neboť na rozdíl od toru, sféry či roviny se nejedná o orientovatelnou plochu. Kreslíme-li na orientovatelnou plochu jako torus, sféru nebo na rovinu, tak vystačíme s (nesprávnou!) představou, že malujeme na povrch nějakého třírozměrného objektu, neboť vždy umíme rozlišit „horní“ a „dolní“ stranu plochy. U Möbiova listu je však taková představa zavádějící. Můžete si vyzkoušet, že při kreslení obyčejnou

tužkou na stočený a slepený papírový proužek (Obrázek ??) se nepodaří zakreslit graf K_5 bez křížení hran. Problémem je, že při kreslení na papírový model leží zakreslený bod nebo křivka vždy na jedné straně papíru. Můžeme kreslit souvislou čáru a „doputovat“ na opačnou stranu papíru, kde křivka zakreslena není. Všimněte si, že takový model vlastně neodpovídá interpretaci rozvinutého Möbiova listu na Obrázku 9.26. vpravo. Správná interpretace je malování „prosakujícím“ inkoustem, kdy každý zakreslený bod nebo křivka leží v ploše Möbiova listu a je „vidět“ z obou stran plochy.



Obrázek 9.24.: Rozvinutí toru do roviny pro přehledné kreslení.

Obrázek 9.25.: Nakreslení grafu K_5 na torus a příslušné rozvinutí toru do roviny.Obrázek 9.26.: Nakreslení grafu K_5 na Möbiův list a příslušné rozvinutí do roviny.

Pro plochy rodu g platí obecnější verze Eulerova vzorce. Mějme graf G vnořen do plochy rodu g tak, že každá jeho oblast je topologicky ekvivalentní otevřenému disku (tj. hranice oblasti je Jordanovská křivka a oblast neobsahuje žádná „ucha“ ani „díry“ na rozdíl od toru, pláště válce nebo Möbiova pásku a podobně). Potom lze dokázat, že pro každé takové vnoření grafu G platí

$$v(G) - h(G) + o(G) = 2 - 2g.$$

Cvičení

- 9.6.1. Nakreslete vnoření a) grafu $K_{3,3}$ do toru, b) grafu $K_{4,4}$ do toru.
- 9.6.2. Nakreslete vnoření a) grafu K_5 na Möbiův pásek, b) grafu $K_{3,3}$ na Möbiův pásek.
- 9.6.3. Nakreslete vnoření a) grafu K_6 do toru, b) grafu K_7 do toru.

9.6.4. Ukažte, že pro plochy rodu většího než 0 obecně nemá smysl definovat bez dalšího omezení počet oblastí grafu nakresleného (vnořeného) na takovou plochu.

9.6.5. Ukažte, že pro graf vnořený do toru platí $v(G) - h(G) + o(G) \geq 0$.

9.6.6. Užitím vztahu ze Cvičení 9.6.5. ukažte, že pro graf G vnořený do toru musí platit $h(G) \leq 3v(G)$.

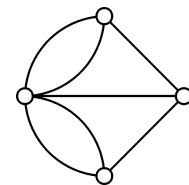
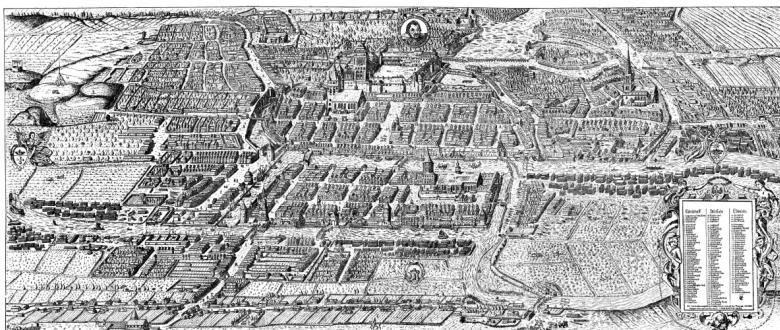
9.6.7. Ukažte, že kompletní graf K_8 není možno vnořit do toru.

9.6.8. Ukažte, že chromatické číslo grafu, který lze vnořit do toru, je nejvýše 7.

Kapitola 10. Eulerovské a hamiltonovské grafy

Sedm mostů města Královce

Historicky první úlohou, která byla vyřešena s pomocí pojmu teorie grafů, byla *úloha sedmi mostů města Královce*. Pruské město Královec leží na řece Pregole. Řeka vytváří dva ostrovy, které byly v 18. století spojeny s oběma břehy i navzájem celkem sedmi mosty. Měšťané řešili problém, zda je možno všechny mosty přejít tak, aby se vstoupili na každý most pouze jednou. Leonhard Euler v roce 1736 dokázal, že to není možné. Při formulaci problému použil abstraktní strukturu odpovídající pojmu graf a současně tak zavedl novou matematickou disciplínu – teorii grafů. Grafum, které je možno celé projít (všechny jejich hrany) jedním uzavřeným tahem, se dnes říká eulerovské.



Obrázek 10.1.: Město Královec v roce 1613 a sedm mostů přes řeku Pregolu.

Jedním tahem

Pojem eulerovského grafu úzce souvisí s kreslením jedním tahem. Jako praktické aplikace pro kreslení jedním tahem můžeme zmínit návrh trasy popelářského nebo kropícího vozu, optimalizace řezání vodního paprsku nebo robotické svařování, případně plánování tras sněžných pluhů na silnicích.

10.1. Eulerovské grafy

Na straně 30 jsme zavedli pojem tahu. Připomeňme, že tah je takový sled v grafu, ve kterém se neopakuje žádná hrana, zatímco vrcholy se mohou opakovat.

Definice Eulerovský graf

Uzavřený tah v grafu G , který obsahuje všechny hrany a všechny vrcholy grafu G , se nazývá *uzavřený eulerovský tah* nebo *eulerovský tah*. Tah v grafu G , který obsahuje všechny hrany grafu G a výchozí vrchol se liší od koncového vrcholu, se nazývá *otevřený eulerovský tah*. Graf, ve kterém existuje uzavřený eulerovský tah, se nazývá *eulerovský graf*.

Je zřejmé, že v nesouvislém grafu žádný netriviální eulerovský tah nemůže existovat. Hledáme-li v grafu eulerovský tah, tak je přirozené požadovat, aby zkoumaný graf byl souvislý. Proto jsou následující tvrzení formulována jen pro souvislé grafy. Všimněte si, že v definici požadujeme, aby eulerovský tah obsahoval jak všechny hrany, tak i vrcholy daného grafu (proč?). Nejprve zavedeme jednu důležitou třídu grafů.

Definice Graf nazveme *sudý*, jestliže má všechny vrcholy sudého stupně. Podobně budeme mluvit o sudých multigrafech a jestliže smyčku budeme do stupně vrcholu počítat dvakrát (jednou za každý „koncový“ vrchol), tak i o sudých pseudografech.

Graf na Obrázku 10.1. vpravo je multigraf, který není sudý. Všechny kompletní grafy s lichým počtem vrcholů a hyperkrychle sudého rádu jsou sudé grafy. Kompletní bipartitní grafy jsou sudé právě tehdy, když obě partity mají sudý počet vrcholů. Petersenův graf (Obrázek ??), Hoffman-Singletonův (Obrázek ??) i všechny netriviální stromy nejsou sudé grafy.

Následující věta dává pěknou a současně jednoduchou nutnou a postačující podmítku existence eulerovského tahu v daném grafu.

Věta 10.1. *Souvislý graf G je eulerovský právě tehdy, když je sudý.*

Důkaz.

„ \Rightarrow “ Uzavřený eulerovský tah v grafu G při každém průchodu vrcholem v obsahuje dvě hrany incidentní s v . Navíc první a poslední hrana uzavřeného tahu je incidentní se stejným vrcholem, proto stupeň každého vrcholu v grafu G je násobek dvojky. Každý eulerovský graf G je proto sudý.

„ \Leftarrow “ Postupujeme indukcí vzhledem k počtu hran.

Základ indukce: Nejménší graf splňující podmínky věty je triviální graf, který obsahuje triviální uzavřený sled s jediným vrcholem.

Indukční krok: Mějme nějaký netriviální souvislý sudý graf G . Předpokládejme, že všechny souvislé sudé grafy s menším počtem hran obsahují eulerovský tah. Protože graf G má všechny vrcholy stupně alespoň 2 (vrchol stupně menšího by byl triviální komponentou), tak podle Lemmatu 3.1. obsahuje graf G nějaký cyklus C . V grafu $G' = G - E(C)$ zůstane každý vrchol sudého stupně, neboť odebereme vždy 0 nebo 2 hrany incidentní s každým vrcholem. Proto každá komponenta L_i grafu G' je souvislý sudý graf s méně hranami než G a podle indukčního předpokladu obsahuje komponenta L_i uzavřený eulerovský tah. Navíc každá komponenta L_i obsahuje nějaký vrchol cyklu C , jinak by původní graf nebyl souvislý (detaily jsou ponechány jako Cvičení 10.1.3.). V každé komponentě L_i označme jeden takový vrchol v_i . Nyní postupujeme podle cyklu C a vždy, když narazíme na nějaký vrchol v_i , tak navázeme uzavřený tah komponenty L_i a dále pokračujeme po cyklu C . Sestavíme tak uzavřený tah, který bude obsahovat všechny hrany cyklu C i všech komponent grafu $G - E(C)$, proto se jedná o eulerovský tah v grafu G . \square

Uvedený důkaz je konstruktivní. Podává návod na rekurzívní algoritmus nalezení eulerovského tahu v libovolném souvislému sudém grafu.

Otzážka: Jak by se změnilo tvrzení Věty 10.1., kdybychom v definici nepožadovali, aby eulerovský tah obsahoval všechny vrcholy?

Důkaz následujícího tvrzení je ponechán jako Cvičení 10.1.1., neboť vtipnou úvahou můžeme tvrzení Důsledku 10.2. snadno převést na tvrzení Věty 10.1.

Důsledek 10.2. Souvislý graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě tehdy, když obsahuje právě dva vrcholy lichého stupně.

Také důkaz následujícího tvrzení je ponechán jako Cvičení 10.1.4. Všimněte si, že když máme jeden otevřený tah nebo více než jeden hranově disjunktní tah, neříkáme jim eulerovské.

Důsledek 10.3. Souvislý graf G lze nakreslit k hranově disjunktními otevřenými tahy, přičemž počáteční a koncové vrcholy každých dvou tahů jsou navzájem různé, právě tehdy, když G obsahuje $2k$ vrcholů lichého stupně.

Tvrzení Věty 10.1. (i Důsledků 10.2. a 10.3.) můžeme zobecnit dokonce pro multigrafy (grafy s násobnými hranami).

Důsledek 10.4. Souvislý multigraf G lze nakreslit jedním uzavřeným tahem právě tehdy, když v multigrafu G jsou všechny vrcholy sudého stupně.

Důkaz.

„ \Rightarrow “ Jestliže uzavřený tah obsahuje všechny hrany multigrafu T , pak je multigraf G jistě souvislý a každý jeho vrchol sudého stupně ze stejného důvodu jako v důkazu Věty 10.1.

„ \Leftarrow “ Mějme souvislý multigraf G . Přidáním nového vrcholu z do každé hrany xy dostaneme jednoduchý graf G' (proč?). Podle Věty 10.1. existuje v grafu G' uzavřený eulerovský tah T . Každý přidaný vrchol z je v grafu G' a proto i v tahu T sousední pouze s vrcholy x, y a nahradíme-li v tahu T vždy příslušnou část x, z, y tahu T hranou xy , tak dostaneme uzavřený tah v multigrafu G . \square

V následující kapitole na straně 127 zobecníme tvrzení Věty 10.1. i pro orientované grafy.

Otzážky:

- Stačí v důkazu Důsledku 10.3. spárovat k dvojic vrcholů lichého stupně k novými hranami v grafu G , dále s využitím Věty 10.1. najít uzavřený eulerovský tah a z něj dostat k otevřených tahů vynecháním k přidaných hran?
- Vysvětlete, jakou roli hraje požadavek souvislosti v tvrzení Věty 10.3.?
- Jak by se musel upravit důkaz Věty 10.1., aby platil i pro pseudografy?

Odkazy:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg
- <http://www.amt.canberra.edu.au/koenigs.html>

Cvičení

10.1.1. Dokažte Důsledek 10.2.: Souvislý graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě tehdy, když obsahuje právě dva vrcholy lichého stupně.

10.1.2. Nechť G je souvislý graf a S je jeho hranový řez. Ukažte, že potom každá komponenta grafu $G' = G - S$ obsahuje vrchol, který je koncovým vrcholem některé hrany řezu S .

10.1.3. S využitím Cvičení 10.1.2. dokažte tvrzení použité v důkazu Věty 10.1.: Máme-li souvislý graf G a v něm cyklus C , tak v každé komponentě grafu $G - E(C)$ existuje vrchol, který leží v grafu G na cyklu C .

10.1.4. Dokažte Větu 10.3.: Souvislý graf G lze nakreslit k hranově disjunktními otevřenými tahy, přičemž počáteční a koncové vrcholy každých dvou tahů jsou navzájem různé, právě tehdy, obsahuje-li $2k$ vrcholů lichého stupně.

10.1.5. Ukažte, že ve Cvičení 10.1.4. není možné vynechat požadavek souvislosti.

10.1.6. Zkuste Cvičení 10.1.4. zobecnit i pro nesouvislé grafy.

10.1.7. Nakreslete eulerovský graf se sudým počtem vrcholů a lichým počtem hran. Pokud to není možné, zdůvodněte to.

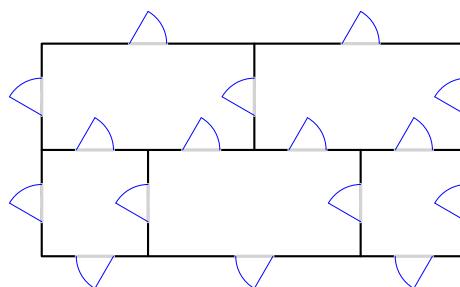
10.1.8. Najděte chybu v následujícím důkazu: Ukážeme, že neexistuje eulerovský graf se sudým počtem vrcholů a lichým počtem hran. Podle Věty 10.1. je souvislý graf eulerovský právě tehdy, když má všechny vrcholy sudého stupně. Eulerovský graf se sudým počtem vrcholů a lichým počtem hran neexistuje, protože součet sudého počtu $2k$ sudých čísel $2l_i$ pro $i = 1, 2, \dots, 2k$ je dělitelný 4. Využijeme, že součet sudého počtu lichých čísel l_i je sudý, tj. $\sum_{i=1}^{2k} l_i = 2m$.

$$\sum_{i=1}^{2k} 2l_i = 2 \sum_{i=1}^{2k} l_i = 2 \cdot 2m = 4m.$$

Podle Věty 1.1. je součet stupňů roven dvojnásobku počtu hran $|E|$. Nyní $4m = 2|E|$ protože $|E| = 2m$, musí být v eulerovském grafu se sudým počtem vrcholů vždy sudý počet hran.

10.1.9. Ukažte, že každý sudý graf bez izolovaných vrcholů je možno rozložit na cykly.

10.1.10. Je možno projít dům, jehož půdorys na Obrázku 10.2., tak, abychom každými dveřmi prošli právě jednou?



Obrázek 10.2.: Půdorys domu s vyznačenými dveřmi.



Obrázek 10.3.: Různé varianty Hamiltonovy hry.

10.1.11. Existuje eulerovský graf, který má nejvýše dva vrcholy stejného stupně?

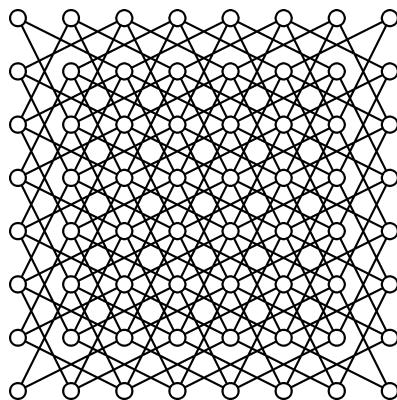
10.2. Hamiltonovské grafy

V této podkapitole se budeme věnovat problému procházení všech vrcholů v daném grafu, přičemž požadujeme, abychom každý vrchol navštívili právě jednou. Takovému problému se říká hledání „hamiltonovské cesty“ podle hry, kterou vymyslel v roce 1857 William Rowan Hamilton. Jednalo se o nalezení takové cesty po hranách dvacetistěnu, abychom každý vrchol navštívili jen jednou a vrátili se do původního vrcholu. Příklady hry¹¹ jsou na Obrázku 10.3.

Na první pohled by se mohlo zdát, že úloha nalezení hamiltonovského cyklu je jen modifikací úlohy hledání eulerovského tahu. Není tomu tak. Zatímco pro existenci eulerovského tahu máme jednoduchou nutnou a postačující podmínku (Věta 10.1.), tak rozhodnout, zda grafu existuje cyklus, který obsahuje všechny vrcholy grafu, je obtížné a žádná nutná a postačující podmínka pro obecný graf není známa.

Další úlohy, které je možné přeformulovat na stejný problém teorie grafů, jsou například úlohy obchodního cestujícího nebo klasická úloha jezdce na šachovnici. Máme za úkol koněm objet celou šachovnici tak, abychom každé políčko navštívili právě jednou a nakonec se vrátili na výchozí políčko. Na Obrázku 10.4. je graf, ve kterém hledáme takový cyklus, který obsahuje všechny vrcholy grafu.

Samořejmě se můžeme pokusit řešit uvedené úlohy hrubou silou (probráním všech možností), ale již pro malé grafy může být takový postup zdlouhavý a řešení se nemusí podařit najít v rozumném čase ani s využitím výpočetní techniky.



Obrázek 10.4.: Graf možných tahů koně po šachovnici.

¹¹ Obrázky byly převzaty z <http://puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm>

Definice Hamiltonovský graf

Cyklus, který prochází všemi vrcholy grafu G , se nazývá *hamiltonovský cyklus* v grafu G . Graf, který obsahuje hamiltonovský cyklus, se nazývá *hamiltonovský graf*. Podobně cesta, která prochází všemi vrcholy grafu G , se nazývá *hamiltonovská cesta* v grafu G .

Otzázkы:

- Je každý hamiltonovský graf současně eulerovský?
- Je každý hamiltonovský graf na lichém počtu vrcholů současně eulerovský?
- Je každý eulerovský graf současně hamiltonovský?

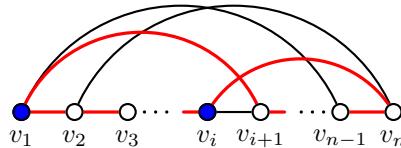
Postačující podmínky

Přirozeně se dá očekávat, že hamiltonovský cyklus najdeme spíše v hustém grafu než v grafu s malým průměrným stupněm. Několik následujících tvrzení toto očekávání potvrzuje.

Věta 10.5. Oreho věta

Mějme graf G na n vrcholech, kde $n \geq 3$. Jestliže pro každé dva nesousední vrcholy u, v grafu G platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n$, tak graf G je hamiltonovský.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že existují grafy na n vrcholech ($n \geq 3$), které neobsahují hamiltonovský cyklus a přitom splňují podmínu, že pro každé dva nesousední vrcholy u, v platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n$. Pro spor mezi nimi vybereme takový graf G , který má největší počet hran. Nyní si uvědomíme, že graf G obsahuje hamiltonovskou cestu v_1, v_2, \dots, v_n , jinak by bylo možné (každou) nejdélší cestu prodloužit přidáním vhodné hrany, aniž by byla porušena neexistence hamiltonovského cyklu. Vrcholy v_1 a v_n jistě nejsou sousední. Označme M množinu všech vrcholů grafu G , které leží na hamiltonovské cestě v_1, v_2, \dots, v_n bezprostředně před nějakým vrcholem sousedním s v_1 (na Obrázku 10.5. jsou vyznačeny modře). Všimněte si, že $|M| = \deg(v_1)$ a například $v_1 \in M$, $v_n \notin M$.



Obrázek 10.5.: Hamiltonovská cesta v grafu G a vynucený hamiltonovský cyklus.

Nyní vrchol v_n není sousední s vrcholem v_1 (a pochopitelně ani s vrcholem v_n), avšak je sousední s alespoň $n - \deg(v_1)$ vrcholy grafu G . Podle Dirichletova principu je vrchol v_n sousední s alespoň jedním vrcholem v_i v množině M , neboť vrcholů různých od v_n , které nepatří do M , je $n - 1 - \deg(v_1)$ (Obrázek 10.5.). To však znamená že cyklus $v_1, v_2, \dots, v_i, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}$ je hamiltonovský cyklus v grafu G (na obrázku je vyznačen červeně), což je hledaný spor s výběrem grafu G . \square

Větu 10.5. dokázal Norský matematik Øystein Ore v roce 1960. Dříve, v roce 1952 dokázal Evropský matematik Gabriel Andrew Dirac následující speciální případ.

Věta 10.6. Diracova věta

Mějme graf G na n vrcholech, kde $n \geq 3$. Je-li $\delta(G) \geq n/2$, tak graf G je hamiltonovský.

Diracova věta je důsledkem Oreho věty a nebudeme ji proto dokazovat. Ještě obecnější je následující věta z roku 1962, kterou dokázal Maďarský matematik Lajos Pósa (vyslovuje se „póša“) když mu bylo 22 let.

Věta 10.7. Pósova věta

Mějme graf G na n vrcholech, kde $n \geq 3$. Jestliže pro každé přirozené číslo $j < n/2$ obsahuje graf G méně než j vrcholů stupně menšího nebo rovného j , tak graf G je hamiltonovský.

Důkaz Pósovy vynecháme. Vynecháme i důkaz následující věty, kterou dokázal matematik českého původu Václav Chvátal.

Věta 10.8. Chvátalova věta

Mějme graf G na n vrcholech, kde $n \geq 3$. Označme vrcholy grafu G v_1, v_2, \dots, v_n tak, aby platilo $\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \dots \leq \deg(v_n)$. Jestliže pro každé $i < n/2$ platí $\deg(v_i) > i$ nebo $\deg(v_{n-i}) \geq n - i$, tak graf G je hamiltonovský.

Není těžké si uvědomit, že Diracova věta je speciálním případem Oreho věty a Oreho věta je speciálním případem Pósovy věty (Cvičení 10.2.17.). Podobně lze ukázat, že Pósova věta je speciálním případem Chvátalovy věty.

Otzázkы:

- Najdete příklad grafu, který splňuje podmínky Oreho Věta, ale nesplňuje podmínky Diracovy Věty?
- Najdete příklad grafu, který splňuje podmínky Pósovy Věta, ale nesplňuje podmínky Oreho Věty?

Nutné podmínky

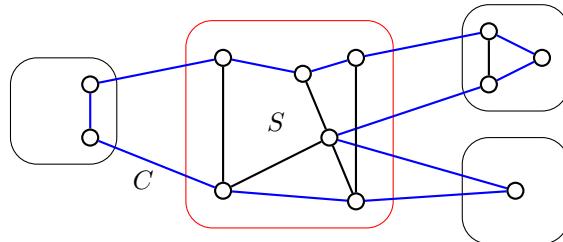
Je zřejmé, že každý hamiltonovský graf je souvislý. Snadno dokážeme, že každý hamiltonovský graf je dokoncě alespoň 2-souvislý, tj. hamiltonovský graf neobsahuje artikulaci (Cvičení 10.2.1.). Silnější souvislost však není zaručena, ani v případě, kdy v grafu existuje několik hranově disjunktních hamiltonovských cyklů (Cvičení 10.2.20.).

Otzázkа: Je každý 2-souvislý graf hamiltonovský?

Následující věta udává další obecnou vlastnost každého hamiltonovského grafu.

Věta 10.9. Je-li G hamiltonovský graf, tak pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu S vrcholové množiny $V(G)$ platí $\omega(G - S) \leq |S|$.

Důkaz. Mějme nějakou neprázdnou nevlastní podmnožinu $S \subseteq V(G)$. Hamiltonovský cyklus C grafu G prochází postupně všemi vrcholy grafu G . Každá hrana cyklu C , která odchází z nějaké komponenty grafu $G - S$ musí vést do nějakého vrcholu množiny S , jinak by se nejednalo o komponentu grafu $G - S$ (Obrázek 10.6.).



Obrázek 10.6.: Hamiltonovský cyklus C , množina S a komponenty grafu $G - S$.

Z každé komponenty vede hrana do jiného vrcholu množiny S , proto množina S obsahuje alespoň tolik vrcholů jako je komponent grafu $G - S$. \square

Otzázkы:

- Proč v tvrzení Věty 10.9. požadujeme, aby S byla neprázdná množina?
- Proč v tvrzení Věty 10.9. požadujeme, aby S byla vlastní podmnožina $V(G)$?

Podmínka ve Větě 10.9., je nutná, ale není postačující. Například v Petersenově grafu pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu vrcholů S platí $\omega(G - S) \leq |S|$, a přitom Petersenův graf není hamiltonovský (Cvičení 10.2.8.). Další příklad grafu, který není hamiltonovský a přesto splňuje nutnou podmínku Věty 10.9., je na Obrázku 10.7. vlevo. Abychom ukázali, že uvedený graf není hamiltonovský, všimneme si, že takový cyklus by musel obsahovat všechny hrany incidentní s vrcholy stupně 2, avšak prostřední vrchol by v hamiltonovském cyklu musel být stupně alespoň 3.



Obrázek 10.7.: Dva grafy, které nejsou hamiltonovské.

Každý hamiltonovský bipartitní graf má parity stejné velikosti (Cvičení 10.2.4.). Naproti tomu ne každý bipartitní graf, který má parity stejné velikosti, je hamiltonovský (Obrázek 10.7. vpravo).

Otázky:

- Proč graf na Obrázku 10.7. splňuje nutnou podmíinku Věty 10.9.?
- Proč není graf na Obrázku 10.7. vpravo hamiltonovský?

Nutné a postačující podmínky

Je třeba upozornit, že není známa žádná podmínka, na základě které bychom pro libovolný graf uměli v krátkém čase rozhodnout o existenci hamiltonovského cyklu. Srovnejte následující tvrzení s nutnou a postačující podmínkou pro existenci eulerovského tahu ve Větě 10.1. Nejprve zavedeme uzávěr grafu.

Definice Uzávěr grafu

Mějme dán graf G na n vrcholech. Graf, který vznikne postupným přidáním všech hran uv pro každou dvojici nesousedních vrcholů u, v takovou, že součet stupňů u a v je alespoň n , se nazývá *uzávěr grafu G* a značí se $C(G)$.

Všimněte si, jak z definice uzávěru grafu plyne, že přidáváme hrany tak dlouho, dokud existují nesousední vrcholy, jejichž součet stupňů je alespoň n . Z definice není zřejmé, že uzávěr grafu je jednoznačně definován. Proto dokážeme následující lemma.

Lemma 10.10. *Jestliže $C(G)$ a $C'(G)$ jsou dva libovolné uzávěry grafu G , tak $C(G) = C'(G)$.*

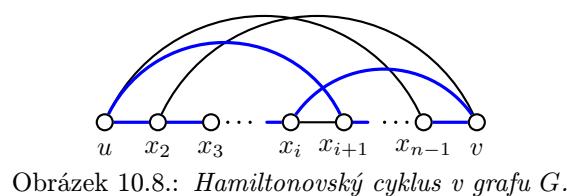
Důkaz. Tvrzení ukážeme přímo. Označme e_1, e_2, \dots, e_r posloupnost hran přidaných do grafu G při konstrukci uzávěru $C(G)$ a označme f_1, f_2, \dots, f_s posloupnost hran přidaných do grafu G při konstrukci uzávěru $C'(G)$. Protože před přidáním hrany $e_1 = uv$ do uzávěru $C(G)$ musí být součet stupňů koncových vrcholů alespoň n , tak se hrana uv musí nacházet také v uzávěru $C'(G)$. Podobně, jestliže po přidání hrany e_1, e_2, \dots, e_{i-1} můžeme přidat hranci e_i do uzávěru $C(G)$, tak musí být součet stupňů koncových vrcholů alespoň n a hrana uv se musí nacházet také v uzávěru $C'(G)$. Proto žádná hrana z posloupnosti e_1, e_2, \dots, e_r nechybí v posloupnosti f_1, f_2, \dots, f_s a naopak, tj. oba uzávěry $C(G)$ a $C'(G)$ jsou shodné. \square

Hledání hamiltonovského cyklu v obecném grafu je komplikované. Uzávěr grafu může pomoci při rozhodnutí, zda takový cyklus existuje. Jestliže ukážeme, že graf nebo jeho uzávěr je dostatečně hustý, tak existence hamiltonovského cyklu plyne z postačujících podmínek. Nejprve dokážeme pomocné tvrzení.

Lemma 10.11. *Mějme dvojici nesousedních vrcholů u, v grafu G , jejichž součet stupňů u a v je alespoň n . Pak graf $G + uv$ je hamiltonovský právě tehdy, když je graf G hamiltonovský.*

Důkaz. Jedná se o důkaz ekvivalence, jejiž jedna implikace je zřejmá: jestliže graf G obsahuje hamiltonovský cyklus, tak jistě i graf $G + uv$ obsahuje hamiltonovský cyklus.

Zbývá ukázat implikaci „ \Rightarrow “, že když graf $G + uv$ obsahuje hamiltonovský cyklus a součet stupňů vrcholů u, v je alespoň n , tak i graf G obsahuje hamiltonovský cyklus. Podle předpokladu ihned vidíme, že graf G obsahuje hamiltonovskou (u, v) -cestu P (proč?). Vrcholy cesty P označíme $u = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = v$. Vrchol u je sousední s vrcholem x_2 a dalšími $k - 1$ vrcholy mezi x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Na cestě P existuje právě k vrcholů, které leží bezprostředně před některým vrcholem sousedním s vrcholem u , počítáno od vrcholu u . Jejich množinu označme M . Mezi vrcholy množiny M není vrchol v (ale vrchol u ano).



Obrázek 10.8.: *Hamiltonovský cyklus v grafu G .*

Nyní vrchol v je sousední s alespoň $n - k$ vrcholy cesty P (nejsou mezi nimi vrcholy u a v). Proto, podle Dirichletova principu, musí být vrchol v sousední s alespoň jedním vrcholem x_i z množiny M . To však znamená, že v grafu G existuje hamiltonovský cyklus $u = x_1, x_2, \dots, x_i, v = x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1}$ (Obrázek 10.8.). \square

Následující tvrzení má formu nutné a postačující podmínky, která je nutná a postačující pouze na první pohled, neboť převádí určení hamiltonicity jednoho grafu na určení hamiltonicity jiného grafu.

Věta 10.12. *Graf G je hamiltonovský právě tehdy, když je hamiltonovský jeho uzávěr $C(G)$.*

Důkaz.

„ \Rightarrow “ První implikace je zřejmá. Jestliže graf G obsahuje hamiltonovský cyklus, tak jeho uzávěr $C(G)$, který vzníme případným přidáním několika hran, je také hamiltonovský.

„ \Leftarrow “ Předpokládejme, že uzávěr $C(G)$ obsahuje hamiltonovský cyklus. Uzávěr vznikl postupným přidáváním hran mezi dvojice vrcholů, jejichž součet stupňů je alespoň $n = |V(G)|$.

Budeme-li nyní hrany v opačném pořadí užávěru odebírat, tak opakováním použitím Lemmatu 10.11. vidíme, že i původní graf G je hamiltonovský. Konstrukce z důkazu Lemmatu 10.11. navíc dává postup, jak takový hamiltonovský cyklus v každém kroku najít. Proto známe-li hamiltonovský cyklus v uzávěru grafu $C(G)$, tak najdeme i hamiltonovský cyklus původního grafu G . \square

Důsledek 10.13. *Je-li uzávěr grafu s více než dvěma vrcholy kompletní graf, tak je G hamiltonovský.*

Větu 10.12. a její Důsledek 10.13. můžeme využít při zkoumání hamiltonicity daného grafu G tak, že najdeme uzávěr grafu $C(G)$, což je úloha dobře algoritmicky řešitelná. Pokud je uzávěr kompletní graf a nebo jinak poznáme, že uzávěr je hamiltonovský graf, tak současně víme, že hamiltonovský musí být i původní graf G . Samotné nalezení hamiltonovského cyklu Věta 10.12. ani Důsledek 10.13. neřeší, neboť důkaz Věty 10.12. je existenční.

Odkazy:

- <http://www.math.uwaterloo.ca/navigation/ideas/articles/honsberger/index.shtml>
- <http://www.ams.org/journals/proc/1966-017-02/S0002-9939-1966-0188103-0/S0002-9939-1966-0188103-0.pdf>

Cvičení

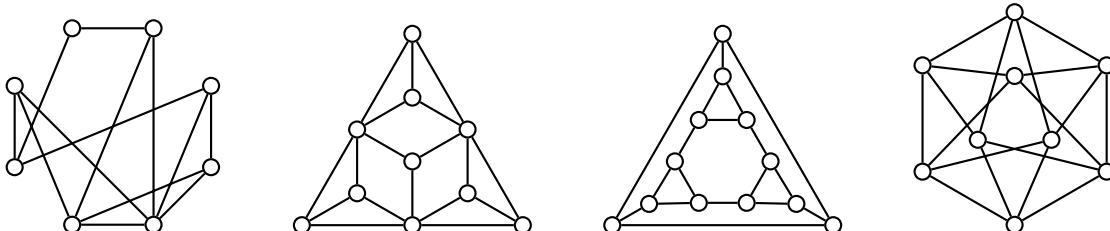
10.2.1. *Dokažte, že každý hamiltonovský graf je nejméně 2-souvislý.*

10.2.2. *Najděte nějaký 2-souvislý pravidelný bipartitní graf s partitami stejné velikosti, který není hamiltonovský.*

10.2.3. *Dokažte nebo vyvrátěte: má-li graf G dva navzájem hranově disjunktní hamiltonovské cykly, potom je G 3-souvislý.*

10.2.4. *Dokažte, že každý bipartitní hamiltonovský graf má partity stejné velikosti.*

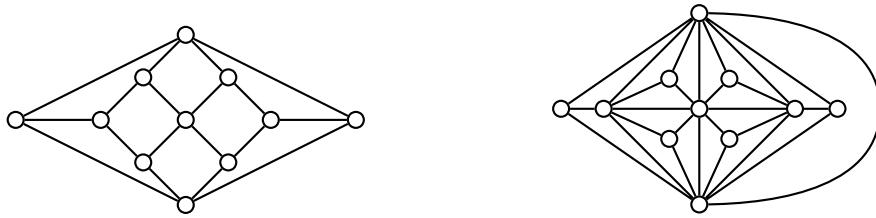
10.2.5. *Nalezněte uzávěry grafů na Obrázku 10.9. Které z uvedených grafů jsou hamiltonovské?*



Obrázek 10.9.: Grafy G , H , F a I .

10.2.6. *Dokažte Diracovu větu bez použití Oreho věty.*

10.2.7. *Rozhodněte, zda a) Herschelův graf na Obrázku 10.10. vlevo nebo b) Goldnerův–Hararyův graf na Obrázku 10.10. vpravo jsou hamiltonovské.*



Obrázek 10.10.: Herschelův graf a Goldnerův–Hararyův graf.

10.2.8. Ukažte, že Petersenův graf není hamiltonovský.

10.2.9. Graf G se nazývá hypohamiltonovský, jestliže není hamiltonovský, avšak graf $G - v$ je hamiltonovský pro každý vrchol v v grafu G . Ukažte, že Petersenův graf je hypohamiltonovský.

10.2.10. Dokažte, že kolo W_{n+1} je hamiltonovský graf pro libovolné $n \geq 3$.

10.2.11. Ukažte, že podmínka $\delta(G) \geq n/2$ v Diracově větě nemůže být nahrazena podmínkou $\delta(G) \geq (n-1)/2$.

10.2.12. Ukažte, že v definici uzávěru grafu na straně 109 nemůžeme nahradit podmínu $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ za podmínu $\deg(u) + \deg(v) \geq n-1$.

10.2.13. Dokažte, že pro každé $n \geq 1$ je úplný tripartitní graf $K_{n,2n,3n}$ hamiltonovský, zatímco $K_{n,2n,3n+1}$ není hamiltonovský.

10.2.14. Jednání u kulatého stolu je přítomno $n \geq 4$ osob, přičemž každé dvě z nich dohromady znají všech $n-2$ ostatních. Ukažte, že mohou okolo stolu sedět tak, že každá osoba sedí mezi dvěma lidmi, které zná.

10.2.15. Ukažte, že každý k -pravidelný graf na $2k-1$ vrcholech je hamiltonovský.

10.2.16. Ukažte, že v každém grafu G , který obsahuje hamiltonovskou cestu, pro každou vlastní podmnožinu S množiny $V(G)$ platí $\omega(G-S) \leq |S|+1$.

10.2.17. Ukažte, že a) Diracova věta je speciálním případem Oreho věty, b) Oreho Věta je speciálním případem Pósovy věty.

10.2.18. Ukažte, že všechny grafy platonických těles jsou hamiltonovské.

10.2.19. Ukažte, že hyperkrychle Q_n řádu $n \geq 2$ je hamiltonovská.

10.2.20. Pro libovolné přirozené číslo k najděte příklad grafu, který obsahuje k hranově disjunktních hamiltonovských cyklů a jehož vrcholová souvislost je 2.

10.2.21. Ukažte, že není možné putovat koněm po šachovnici $4 \times n$ polí, navštívit každé poličko právě jednou, a vrátit se zpět na výchozí poličko.

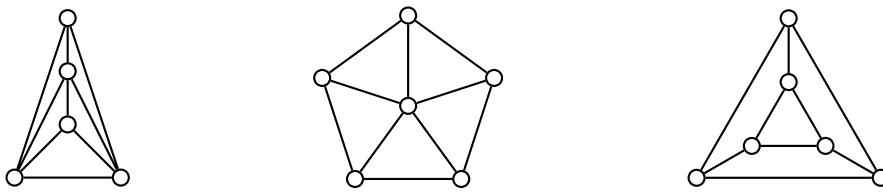
10.3. Další výsledky

Bez důkazu uvedeme několik výsledků, které souvisí s hamiltonovskými cestami a cykly v grafech.

Definice Řekneme, že graf G je hamiltonovsky souvislý, jestliže pro každou dvojici různých vrcholů $u, v \in V(G)$ existuje v G hamiltonovská cesta mezi vrcholy u a v .

Každý hamiltonovsky souvislý graf je samozřejmě současně souvislý, avšak ne každý souvislý graf je i hamiltonovsky souvislý. Například všechny stromy s alespoň třemi vrcholy neobsahují hamiltonovskou (u, v) -cestu, jestliže alespoň jeden z vrcholů u, v není listem. Ani bipartitní grafy s alespoň třemi vrcholy nejsou hamiltonovsky souvislé (Cvičení 10.3.3.).

Snadno nahlédneme, že každý hamiltonovsky souvislý graf s alespoň třemi vrcholy je i hamiltonovský. Jestliže u, v jsou nějaké sousední vrcholy v hamiltonovsky souvislém grafu G , tak hamiltonovská (u, v) -cesta nemůže obsahovat hranu uv (proč?). Protože podle definice hamiltonovsky souvislého grafu najdeme



Obrázek 10.11.: Hamiltonovsky souvislé grafy.

mezi oběma vrcholy hamiltonovskou (u, v) -cestu, tvoří tato cesta spolu s hranou uv hamiltonovský cyklus v grafu G . Graf G je proto hamiltonovský. Naproti tomu ne každý hamiltonovský graf je současně hamiltonovsky souvislý. Na Obrázku 10.11. je několik hamiltonovsky souvislých grafů.

Otázky:

- Najděte příklad grafu, který je hamiltonovský, ale není hamiltonovsky souvislý.
- Najděte všechny grafy, které jsou hamiltonovsky souvislé, ale nejsou hamiltonovské.

Následující tvrzení je analogií Oreho Věty 10.5. pro hamiltonovsky souvislé grafy.

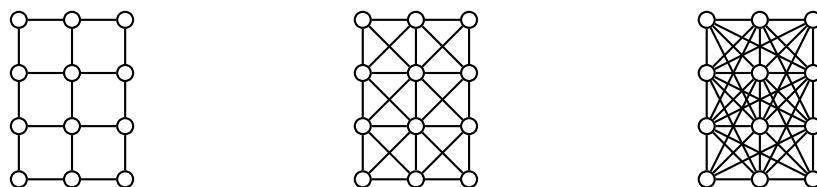
Věta 10.14. *Mějme graf G na n vrcholech, kde $n \geq 3$. Jestliže pro každé dva nesousední vrcholy u, v platí $\deg(u) + \deg(v) \geq n + 1$, tak G je hamiltonovsky souvislý.*

Podle Cvičení 10.3.8. umíme v souvislém grafu zaručit existenci cest, jejichž délka závisí na nejmenším stupni. Následuje ještě obecnější tvrzení o existenci dostatečně dlouhých cest v daném grafu.

Věta 10.15. *Nechť G je souvislý graf s alespoň třemi vrcholy a m přirozené číslo. Jestliže pro každé dva nesousední vrcholy u, v platí $\deg(u) + \deg(v) \geq m$, tak v G existuje cesta délky m .*

Mocnina grafu

Nyní n -tou mocninou grafu (nikoliv kartézskou) budeme rozumět graf, který vznikne z grafu G přidáním všech hran uv , jestliže v grafu G existuje (u, v) -cesta délky nejméně n . Druhou mocninu grafu budeme značit G^2 , n -tou mocninu pak G^n . Na Obrázku 10.12. je příklad grafu G (který je současně svou první mocninou) spolu s jeho druhou a třetí mocninou.

Obrázek 10.12.: Graf G a jeho mocniny G^2 a G^3 .

Následující dvě tvrzení uvedeme bez důkazu.

Věta 10.16. *Mějme souvislý graf G , potom G^3 je hamiltonovsky souvislý graf.*

Věta 10.17. *Mějme 2-souvislý graf G , potom G^2 je hamiltonovský graf.*

Odkazy:

- <http://mathworld.wolfram.com/Hamilton-ConnectedGraph.html>
- <http://mathworld.wolfram.com/GraphPower.htm>

Cvičení

10.3.1. Ukažte, že hamiltonovsky souvislý graf na více než třech vrcholech má všechny vrcholy stupně nejméně 3.

10.3.2. Ukažte, že grafy na Obrázku 10.11. jsou hamiltonovsky souvislé.

10.3.3. Ukažte, že bipartitní grafy s alespoň třemi vrcholy nejsou hamiltonovsky souvislé.

10.3.4. Nechť H je libovolné rozdělení grafu $K_{2,3}$. Dokažte, že graf H není hamiltonovský, avšak graf H^2 je hamiltonovský.

10.3.5. Nalezněte příklad 2-souvislého grafu, který není hamiltonovský, a ukažte, že jeho druhá mocnina je hamiltonovská.

10.3.6. Pro které z úloh a) Hamiltonova hra, b) jezdec na šachovnici je možno rozhodnout o existenci řešení užitím některých vět z této kapitoly?

10.3.7. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?

- a) každý graf obsahující uzavřený eulerovský tah je vrcholově 2-souvislý.
- b) každý graf obsahující uzavřený eulerovský tah je hranově 2-souvislý.
- c) každý graf obsahující hamiltonovský cyklus je vrcholově 2-souvislý.

10.3.8.* Ukažte, že každý souvislý graf G obsahuje buď hamiltonovskou cestu nebo cestu délky alespoň $2\delta(G)$. Lze vynechat požadavek souvislosti?

10.3.9. Najdete souvislý kubický graf, který má takové dobré hranové 3-barvení, ve kterém hrany libovolných dvou barev indukují hamiltonovskou cestu? Najdete nekonečně mnoho takových grafů?

Kapitola 11. Orientované grafy

Na straně 20 jsme zmínili několik zobecnění jednoduchého grafu a mezi nimi i orientovaný graf. S orientovanými grafy se přirozeně setkáme při řešení různých praktických problémů. Modelujeme-li silniční síť grafem, tak se obvykle jedná o orientovaný graf, neboť v silniční síti mohou být jednosměrky. V potrubní síti bez čerpadel teče kapalina vždy jen jedním směrem (dolů), v elektrické síti a v produktovodech se dopravuje energie od zdroje ke spotřebičům. Také schémata konečných automatů jsou orientované grafy.

11.1. Základní pojmy

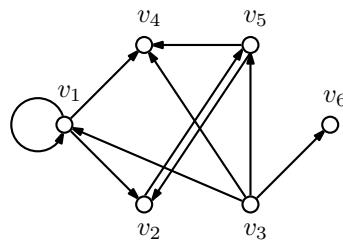
Nejprve podáme formální definici orientovaného grafu.

Definice Mějme neprázdnou množinu vrcholů V . Dvojice (V, A) , kde A je nějaká podmnožina kartézského součinu $V \times V$ (množina uspořádaných dvojic prvků z V), se nazývá *orientovaný graf* D nebo stručně *digraf*¹² D .

Prvkům množiny A říkáme *orientované hrany*, stručně *hrany* případně *šípy*. Jsou-li u, v dva různé vrcholy digrafu D , tak orientovanou hranu (u, v) budeme značit stručně uv . Vrchol u se nazývá *výchozí* nebo *počáteční* a v *koncový* vrchol hrany uv . Hrany uv a vu se nazývají *opačné orientované* nebo jen *opačné hrany*.

Všimněte si, že uvedená definice připouští existenci (orientovaných) smyček, ale nepřipouští násobné hrany. V některých knihách se důsledně rozlišují orientované grafy (jak jsme je zavedli v naší definici) a digrafy, které mohou obsahovat násobné orientované hrany. Definici obecného grafu, který může obsahovat násobné orientované i neorientované hrany jsme uvedli na straně 20. Dvojici opačných hran nepovažujeme za násobné hrany. Graf, ve kterém navíc nejsou smyčky (ani násobné orientované hrany), bývá v literatuře označován jako *jednoduchý* orientovaný graf.

Digraf D na Obrázku 11.1. má množinu vrcholů $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ a množinu orientovaných hran $E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_1, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_1), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_3, v_6), (v_5, v_4)\}$. Protože digraf D obsahuje smyčku (v_1, v_1) , tak se nejedná o jednoduchý orientovaný graf.



Obrázek 11.1.: Orientovaný graf D .

Otázky:

- Jak by vypadala definice orientovaného grafu, který může obsahovat i násobné orientované hrany?
- Jak by mohla vypadat definice smíšeného grafu, který obsahuje orientované i neorientované hrany ale neobsahuje násobné hrany?

Množinu vrcholů a množinu orientovaných hran digrafu D budeme značit $V(D)$ a $A(D)$, analogicky jako u jednoduchého grafu. Počet orientovaných hran (včetně smyček) digrafu D budeme značit $h(D)$.

Pojmy *incident*, *sousednost* a *nezávislost* se zavedou analogicky jako pro jednoduché grafy. Upozorníme na jeden důležitý detail. Jestliže digraf obsahuje orientovanou hranu uv a neobsahuje opačnou hranu vu , tak vrchol v považujeme za sousední s vrcholem u , ale vrchol u není sousední s vrcholem v . *Nezávislé* vrcholy nejsou spojeny žádnou orientovanou hranou (v libovolné orientaci) a nezávislé orientované hrany nemají žádný společný vrchol. Přesná definice je ponechána jako Cvičení 11.1.4. Stejně tak v dalším textu přirozeně rozšíříme použití i dalších pojmu pro digrafy: *podgraf* *digrafu*, *isomorfismus* *digrafů* a podobně. Přesnou definici opět ponecháme jako cvičení.

¹² Termín *digraf* je z anglického „directed graph“. Označení A pro množinu orientovaných hran digrafu pochází z anglického termínu „arc“ pro orientovanou hranu.

Jestliže se omezíme na jednoduché digrafy a nerozlišujeme isomorfní digrafy, tak existuje jediný jednoduchý(!) orientovaný graf s jedním vrcholem, tři jednoduché orientované grafy se dvěma vrcholy a šestnáct různých jednoduchých orientovaných grafů se třemi vrcholy (Cvičení 11.1.1.). Na čtyřech vrcholech je jednoduchých digrafů 218 a na deseti vrcholech dokonce 341260431952972580352 (více než 341 triliónů). Jejich počet je znám pro libovolný počet vrcholů.

Jestliže rozlišujeme vrcholy digrafu (například označením), tak je také snadné určit počet různých digrafů s daným počtem vrcholů (Cvičení 11.1.2.).

Poznámka 11.1. Množina orientovaných hran digrafu $D = (V, A)$ je podmnožina V^2 a jedná se vlastně o relaci na množině V . Přesto se zavádí oba pojmy a s každým se pracuje v trochu jiných souvislostech.

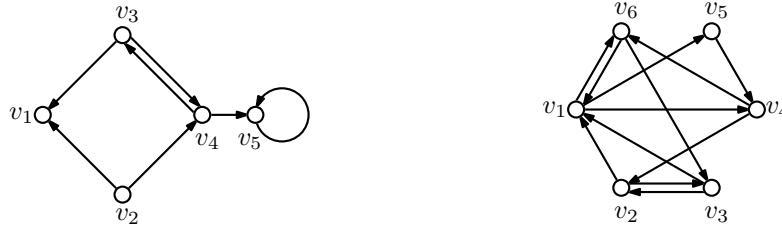
Stupně vrcholů v orientovaném grafu

Na rozdíl od jednoduchého grafu rozlišujeme v orientovaných grafech několik variant pojmu stupeň.

Definice Počet hran, se kterými je vrchol v v digrafu D incidentní, se nazývá celkový stupeň vrcholu, stručně stupeň vrcholu a značí se $\deg(v)$, případně $\deg_D(v)$.

Je-li vrchol v počátečním vrcholem hran vu , nazývá se vu odchozí hrana z vrcholu v a počet odchozích hran z vrcholu v se nazývá odchozí nebo vnější stupeň vrcholu v a značí se $\text{odeg}(v)$. Podobně je-li vrchol v koncovým vrcholem hran uv , nazýváme uv příchozí hranou do vrcholu v a počet příchozích hran do vrcholu v se nazývá příchozí nebo vnitřní stupeň vrcholu v a značí se $\text{ideg}(v)$. Smyčku počítáme mezi příchozí i odchozí hranou daného vrcholu.

Jestliže pro každý vrchol v digrafu D platí, že $\text{ideg}(v) = \text{odeg}(v)$, říkáme, že digraf D je vyvážený.



Obrázek 11.2.: Orientovaný graf s odchozími stupni 0, 2, 2, 2, 1, s příchozími stupni 2, 0, 1, 2, 2 a vyvážený orientovaný graf.

Všimněte si, že vyvážený digraf nemusí mít všechny celkové stupně stejně! Různé vrcholy na Obrázku 11.2. vpravo mají různé celkové stupně, avšak příchozí stupeň každého vrcholu je roven jeho odchozímu stupni. Analogicky jako v Kapitole 1. můžeme zavést nejmenší a největší odchozí a příchozí stupně digrafu D . Značit je budeme $\delta^-(D)$, $\delta^+(D)$, $\Delta^-(D)$ a $\Delta^+(D)$.

Věta 11.1. Je-li D orientovaný graf s n vrcholy v_1, v_2, \dots, v_n a $h(D)$ hranami, tak platí

$$\sum_{i=1}^n \text{odeg}(v_i) = \sum_{i=1}^n \text{ideg}(v_i) = h(D).$$

Důkaz je snadný a je ponechán jako Cvičení 11.1.3.

Otázky:

- Platí Věta 11.1. i pro orientované grafy s násobnými hranami?
- Existuje netriviální orientovaný graf, ve kterém každý vrchol má jiný odchozí stupeň?

Cvičení

11.1.1.^\diamond a) Najděte všechny neisomorfní digrafy s jedním nebo dvěma vrcholy. Které z nich jsou jednoduché?
a) Najděte všechny neisomorfní jednoduché digrafy se třemi vrcholy.

11.1.2.^\diamond Předpokládejme, že rozlišujeme vrcholy digrafu D (například označením). a) Kolik existuje různých digrafů na n vrcholech? b) Kolik existuje různých jednoduchých digrafů na n vrcholech?

11.1.3.^\diamond Dokažte Větu 11.1.

11.1.4. \heartsuit Definujte pojmy incidence vrcholu a hrany, sousednost vrcholů a nezávislost vrcholů i hran pro orientované grafy.

11.1.5. \heartsuit Definujte pro orientované grafy další pojmy, které jsme definovali pro neorientované grafy: podgraf, faktor, indukovaný podgraf, vnější a vnitřní stupňová posloupnost orientovaného grafu.

11.1.6. \heartsuit Definujte a) incidenční matici, b) matici sousednosti orientovaného grafu. V čem se liší od analogických matic pro neorientované grafy?

11.1.7. Ukažte, že v kompletním digrafu D platí $\sum_{v \in V(D)} \text{odeg}^2(v) = \sum_{v \in V(D)} \text{ideg}^2(v_i)$. Je možno turzení zobecnit i pro jiné než kompletní digrafy?

11.1.8. Najdete příklad jednoduchého orientovaného digrafu na n vrcholech, ve kterém má každý vrchol jiný odchozí stupeň.

11.2. Cesty, cykly, dosažitelnost

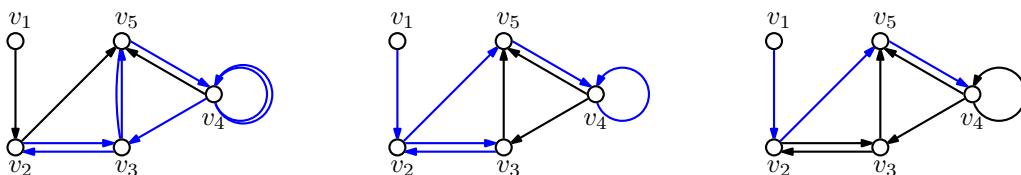
Orientované sledy, tahy a cesty v digrafu zavedeme analogicky jako pro jednoduché grafy v Kapitole 2.

Definice Orientovaný sled v digrafu D je taková posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n), \quad (5)$$

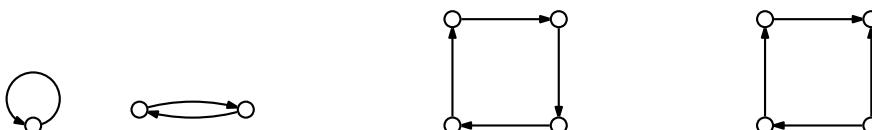
ve které každá orientovaná hrana e_i má počáteční vrchol v_{i-1} a koncový vrchol v_i pro $i = 1, 2, \dots, n$. Sled (5) nazýváme orientovaný (v_0, v_n) -sled. Orientovaný sled, ve kterém se neopakuje žádná hrana, nazýváme orientovaný tah. Orientovaný sled, ve kterém se neopakuje žádný vrchol, nazýváme orientovaná cesta.

Orientované sledy, tahy a cesty chápeme jako popis putování v digrafu, při kterém dodržujeme orientaci hran, nikdy neputujeme proti naznačenému směru. V digrafu, který modeluje nějakou reálnou situaci, odpovídají taková omezení obvykle nějakým přirozeným požadavkům (jednosměrky, spádování potrubí, klesání potenciálu a podobně). Všimněte si, že v orientovaném grafu jsou orientovaný sled, tah i cesta jednoznačně určeny posloupností vrcholů. Proto budeme v dalším textu orientované sledy, tahy i cesty zadávat jen posloupností vrcholů. Na Obrázku 11.3. vlevo je orientovaný sled $v_3, v_5, v_4, v_4, v_3, v_2, v_3, v_5$, uprostřed je orientovaný tah $v_1, v_2, v_3, v_2, v_5, v_4, v_4$ a vpravo pak je orientovaná cesta v_1, v_2, v_5, v_4 .

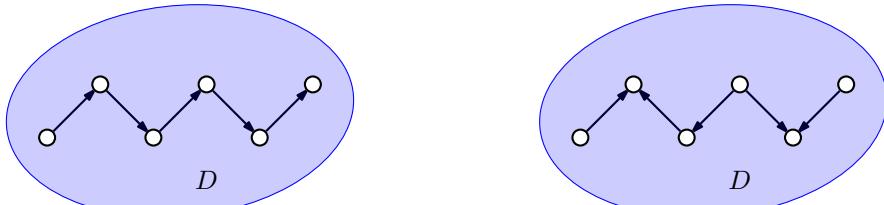


Obrázek 11.3.: Sled, tah a cesta v digrafu.

Délkou orientovaného (v_0, v_n) -sledu budeme rozumět počet hran sledu. Naprostě analogicky chápeme délku (v_0, v_n) -tahu nebo (v_0, v_n) -cesty. Triviální orientovaný sled, který obsahuje jediný vrchol, je současně orientovaný tah i cesta. Orientovaný cyklus je takový orientovaný sled, ve kterém se neopakují hrany ani vrcholy s výjimkou prvního a posledního vrcholu. Všimněte si, že smyčka v digrafu je cyklem délky 1, na rozdíl od jednoduchých neorientovaných grafů, ve kterých nejkratší cyklus má délku 3. V digrafech existují samozřejmě i cykly délky 2, stačí vzít dvojici opačně orientovaných hran (Obrázek 11.4. vlevo).



Obrázek 11.4.: Orientované cykly délky 1, 2 a 4 a cyklus délky 4, který není orientovaný.

Obrázek 11.5.: Orientovaná cesta a polocesta v digrafu D .

Někdy může být vhodné zeslabit pojem orientované cesty (případně sledu) a odhlédnout od orientace hran. Například cyklus na Obrázku 11.4. vpravo sice není orientovaným cyklem, ale nahradíme-li orientované hrany neorientovanými, dostaneme cyklus C_4 .

Definice Neorientovaná cesta nebo polocesta v digrafu D je taková posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n),$$

ve které každá orientovaná hrana e_i má buď počáteční vrchol v_{i-1} a koncový vrchol v_i nebo počáteční vrchol v_i a koncový vrchol v_{i-1} , pro $i = 1, 2, \dots, n$.

Na Obrázku 11.5. vidíme příklad orientované a neorientované cesty v nějakém digrafu. Cesta pochopitelně nemusí být komponentou ale jen podgrafem digrafu.

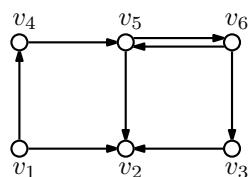
Všimněte si, že na rozdíl od orientované cesty, není polocesta v digrafu určena jednoznačně jen posloupností vrcholů (proč?). Podobně jako orientovanou a neorientovanou cestu můžeme nadefinovat *orientovaný* i *neorientovaný cyklus*.

Otzázká: Je v jednoduchém (ne obecném) digrafu polocesta určena jednoznačně jen posloupností vrcholů?

Dosažitelnost a souvislost v orientovaném grafu

Definice Řekneme, že vrchol v je v digrafu D dosažitelný z vrcholu u , jestliže v D existuje orientovaná (u, v) -cesta. Řekneme, že vrcholy u a v jsou vzájemně dosažitelné, jestliže v D existují obě cesty: orientovaná (u, v) -cesta i orientovaná (v, u) -cesta.

Je dobré si uvědomit, že dosažitelnost v orientovaných grafech obecně není symetrická vlastnost, jako tomu je u neorientovaných grafů. Pro daný digraf D můžeme na množině vrcholů $V(D)$ definovat relaci dosažitelnosti tak, že vrcholy u a v jsou v relaci (v tomto pořadí), pokud je vrchol v dosažitelný z vrcholu u . Taková relace obecně není relací ekvivalence, neboť není symetrická. Například v grafu na Obrázku 11.6. je vrchol v_3 dosažitelný z vrcholu v_4 , avšak vrchol v_4 není dosažitelný z vrcholu v_3 . Z vrcholu v_1 jsou dosažitelné dokonce všechny ostatní vrcholy, ale v_1 není dosažitelný z žádného jiného vrcholu.

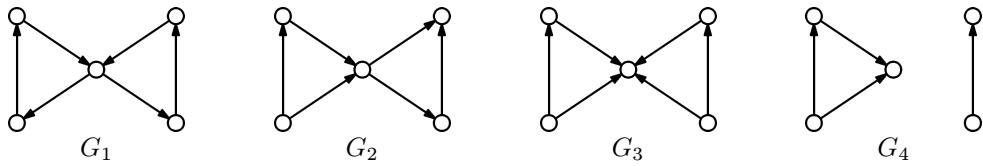
Obrázek 11.6.: Digraf D .

Protože relace dosažitelnosti není symetrická, je zavedení souvislosti komplikovanější než u jednoduchých grafů. Můžeme rozlišit několik druhů souvislosti, které zavedená terminologie charakterizuje „silou“.

Definice Řekneme, že digraf D je

- slabě souvislý, jestliže mezi každými dvěma vrcholy v digrafu D existuje polocesta,
- jednostranně souvislý, jestliže mezi každými dvěma vrcholy u, v v digrafu D existuje alespoň jedna ze dvou orientovaných cest: (u, v) -cesta nebo (v, u) -cesta,
- silně souvislý, jestliže mezi každými dvěma vrcholy u, v v digrafu D existuje orientovaná (u, v) -cesta.

Všimněte si, jak z definice silné souvislosti plyne, že každé dva různé vrcholy digrafu D jsou navzájem dosažitelné. Na Obrázku 11.7. jsou příklady grafů, které jsou (po řadě zleva doprava) silně, jednostranně,

Obrázek 11.7.: Silně (G_1), jednostranně (G_2), slabě (G_3) souvislý a nesouvislý (G_4) digraf.

slabě souvislé a úplně vpravo je nesouvislý digraf. Z definice vyplývá, že každý silně souvislý graf je současně jednostranně i slabě souvislý a každý jednostranně souvislý graf je i slabě souvislý.

Vzdálenost v orientovaném grafu

Definice Orientovaná vzdálenost vrcholu v od vrcholu u v digrafu je délka nejkratší orientované (u, v) -cesty. Jestliže orientovaná (u, v) -cesta v daném digrafu neexistuje, definujeme vzdálenost vrcholů u a v rovnou ∞ .

Orientovanou vzdálenost vrcholu v od vrcholu u budeme značit $\text{dist}(u, v)$, stejně jako v neorientovaném grafu. Značení $\text{dist}_D(u, v)$ použijeme, když budeme chtít zdůraznit ve kterém digrafu D vzdálenost měříme.

Všimněte si, že vzdálenost není symetrická vlastnost a proto rozlišujeme vzdálenost vrcholu v od vrcholu u a naopak. I když vzdálenost vrcholu v od vrcholu u je rovna nějakému celému číslu k , tak vzdálenost vrcholu u od vrcholu v může být různá od k a dokonce může být i ∞ . Například v digrafu D na Obrázku 11.6. je $\text{dist}(v_4, v_3) = 3$ a přitom $\text{dist}(v_3, v_4) = \infty$.

Otázky:

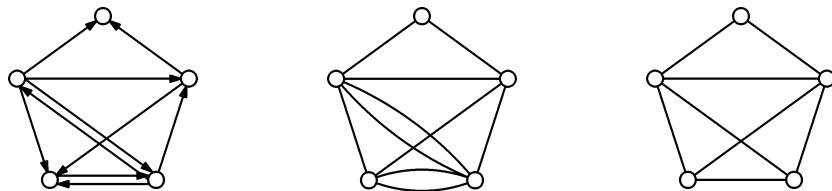
- Existuje takový digraf D , že pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V(D)$ platí, že $\text{dist}(u, v) = 1$ a $\text{dist}(v, u) = \infty$ (nebo naopak)?
- Existuje takový digraf s více než jedním vrcholem, ve kterém žádné dvě dvojice různých vrcholů nemají stejnou vzdálenost?

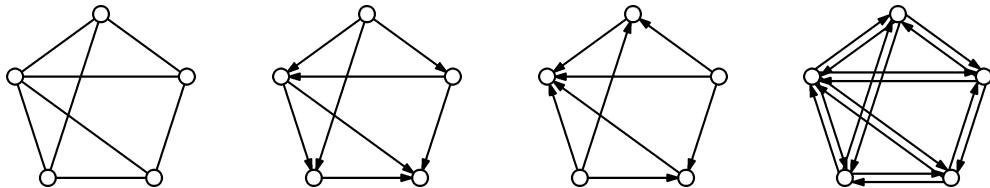
Příbuzné orientované a neorientované grafy

Z orientovaného grafu lze několika způsoby získat neorientovaný graf. Nejjednodušší je „zapomenout“ orientaci hran. Přitom musíme dobře uvážit, jak naložit s dvojicemi opačně orientovaných hran.

Definice Neorientovaný multigraf, který vznikne z digrafu D nahrazením každé orientované hrany neorientovanou hranou, se nazývá *deorientace* digrafu D a značí se $U(D)$. Neorientovaný graf, který vznikne z digrafu bez smyček D nahrazením každé orientované hrany nebo dvojice opačně orientovaných hran jednou neorientovanou hranou, se nazývá *symetrizace* digrafu D a značí se $\text{sym}(D)$.

Všimněte si, že pokud bychom v definici symetrizace vynechali větu o dvojici opačně orientovaných hran, tak $\text{sym}(D)$ nemusí být jednoduchý graf. Každá dvojice opačně orientovaných hran dává v deorientaci dvojnásobnou neorientovanou hranu (Obrázek 11.8.).

Obrázek 11.8.: Orientovaný graf D , jeho deorientace $U(D)$ a symetrizace $\text{sym}(D)$.

Obrázek 11.9.: Neorientovaný graf G , dvě jeho orientace $D(G)$ a asociovaný orientovaný graf $B(G)$.

Také naopak, když máme nějaký neorientovaný graf, můžeme několika způsoby sestavit odpovídající orientovaný graf.

Definice Máme jednoduchý neorientovaný graf G . Graf, ve kterém je každá neorientovaná hrana nahrazena jednou ze dvou možných orientovaných hran, se nazývá *orientace* grafu G a značí se $D(G)$. Graf, ve kterém je každá neorientovaná hrana nahrazena dvojicí opačně orientovaných hran, se nazývá *asociovaný orientovaný graf* a značí se $B(G)$.

Otzázkы:

- Máme jednoduchý graf G a sestrojíme nějakou jeho orientaci $D(G)$. Platí $\text{sym}(D(G)) \simeq G$?
- Máme jednoduchý graf G a sestrojíme nějakou jeho orientaci $D(G)$. Platí $U(D(G)) \simeq G$?
- Jak se změní odpovědi na předchozí dvě otázky, když místo orientace $D(G)$ budeme pracovat s asociovaným orientovaným grafem $B(G)$?
- Existují grafy, pro které platí $U(B(G)) \simeq G$?
- Pro jaké orientované grafy D platí $U(D) \simeq \text{sym}(D)$?

Zmíníme jakousi analogii silné souvislosti digrafů a 2-souvislosti neorientovaných grafů. Kdybychom v následující větě výslově nepracovali s jednoduchými digrafy, tak bychom museli uvážit, jak při deorientaci naložit se smyčkami.

Věta 11.2. Je-li D jednoduchý silně souvislý digraf, tak jeho deorientace $U(D)$ je hranově 2-souvislý (multi)graf.

Důkaz. Postupujeme sporem. Předpokládejme, že digraf D je silně souvislý a jeho deorientace $U(D)$ není hranově 2-souvislá. Všimněte si, že orientace grafu není definována pro multigrafy. Snadno bychom však mohli definici orientace rozšířit. Proto můžeme říci že digraf D je vždy nějakou orientací své deorientace $U(D)$.

Pokud by deorientace $U(D)$ byl nesouvislý (multi)graf, tak každá jeho orientace je nesouvislá, což podle předpokladu není možné. Pokud by deorientace $U(D)$ byla 1-souvislá, tak obsahuje nějaký most, který v digrafu odpovídá nějaké orientované hraně uv . Digraf $D - uv$ je proto nesouvislý a vrcholy u, v leží v různých komponentách.

Podle předpokladu je digraf D silně souvislý a obsahuje nějakou orientovanou (v, u) -cestu. Taková cesta jistě neobsahuje hranu uv a proto tuto cestu obsahuje i digraf $D - uv$. Vrcholy u, v leží ve stejně komponentě digrafu $D - uv$. Dostáváme hledaný spor. \square

Připomeňme, že v definici orientace grafu není nespecifikováno, jakou orientaci hrany zvolíme. Následující definice a věta ukazují, že u hranově 2-souvislých grafů tuto volnost můžeme využít. Například síť ulic většiny měst by mohla sestávat pouze z jednosměrných cest a přitom lze zajistit dostupnost každého místa. Řada městských čtvrtí ve Spojených státech má „streets“ a k nim kolmé „avenues“ jednosměrné, což přispívá k plynulosti a bezpečnosti provozu.

Definice Řekneme, že graf G je *silně orientovatelný*, jestliže existuje taková jeho orientace $D(G)$, která je silně souvislá.

Ulice velké části měst odpovídají planárním grafům. Všimněte si, že následující věta však platí pro libovolné hranově 2-souvislé grafy.

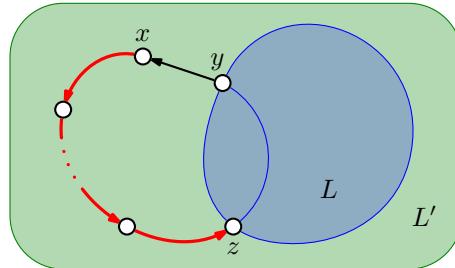
Věta 11.3. Každý hranově 2-souvislý graf je silně orientovatelný.

Důkaz. Tvrzení ukážeme přímo a důkaz bude konstruktivní. Ukážeme, jak takovou silnou orientaci najít.

Máme hranově 2-souvislý graf G na alespoň třech vrcholech a proto podle Věty 5.1. je každý vrchol stupně alespoň 2. To však současně znamená (například s využitím Lemmatu 3.1.), že v grafu G existuje nějaký cyklus v_1, v_2, \dots, v_k , kde $3 \leq k \leq |V(G)|$. Hrany cyklu zorientujeme tak, aby bychom dostali orientovaný

cyklus a případné další hrany mezi vrcholy tohoto cyklu zorientujeme libovolně. Dostaneme tak silně souvislý podgraf L výsledného digrafu.

Pokud $V(L) = V(G)$, algoritmus (a důkaz) končí. V opačném případě zvolíme libovolný vrchol x , který nepatří do $V(L)$ a který je sousední s nějakým vrcholem y v množině $V(L)$. Takový vrchol x jistě existuje, neboť graf G je dokonce hranově 2-souvislý a proto kromě hrany xy obsahuje graf G ještě (x, y) -cestu, která hrani xy neobsahuje. Označme z první vrchol na (x, y) -cestě, který patří do množiny $V(L)$ (Obrázek 11.10.).



Obrázek 11.10.: Digraf L , vrchol x , (x, y) -cesta a (x, z) -cesta v grafu G .

Nyní zorientujeme hranu yx (v tomto pořadí) a všechny hrany (x, z) -cesty jako na Obrázku 11.10. (mohli bychom zvolit i opačnou orientaci). Případné další hrany grafu G , jejichž koncové vrcholy patří do $V(L)$ nebo leží na (x, z) -cestě, zorientujeme libovolně. Nyní celý orientovaný podgraf označíme L' a ukážeme, že graf L' je silně souvislý. Mějme libovolné dva vrcholy $u, v \in V(L')$. Rozlišíme tři případy.

- 1) Jsou-li $u, v \in V(L)$, existují podle uvedené konstrukce v podgrafu L dvě cesty: orientovaná (u, v) -cesta i orientovaná (v, u) -cesta.
- 2) Je-li jeden z vrcholů (bez újmy na obecnosti třeba vrchol u) vnitřním vrcholem (x, z) -cesty, tak její část: (u, z) -cesta spolu s (z, v) -cestou v digrafu L tvoří (u, v) -cestu v grafu L' . Podobně (v, y) -cesta v digrafu L spolu s orientovanou hranou yx a (x, u) -cestou, která je částí (x, z) -cesty, tvoří (v, u) -cestu v digrafu L' .
- 3) Konečně, jsou-li u, v dva různé vnitřní vrcholy (x, z) -cesty (bez újmy na obecnosti v tomto pořadí), tak (u, v) -cesta je částí (x, z) -cesty a (v, u) -cestu v digrafu L' sestavíme z (v, z) -cesty jako úseku (x, z) -cesty, (z, y) -cesty v digrafu L , hrany yx a (x, u) -cesty jako úseku (x, z) -cesty.

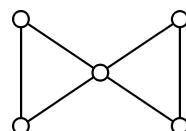
Ve všech případech jsme našli obě cesty: orientovanou (u, v) -cestu i orientovanou (v, u) -cestu. Digraf L' je proto silně souvislý. Položíme $L = L'$. Pokud graf G obsahuje ještě jiné vrcholy, kromě $V(L)$, celý postup zopakujeme, jinak algoritmus i důkaz končí. \square

V Kapitole 5. jsme ukázali, že hranová souvislost je slabší než vrcholová souvislost. Ihned tak můžeme vyslovit následující důsledek.

Důsledek 11.4. *Každý 2-souvislý graf je silně orientovatelný.*

Důkaz. Podle Věty 5.1. pro každý graf G platí $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$, tj. každý 2-souvislý graf je také hranově 2-souvislý. Podle Věty 11.3. je proto G také silně orientovatelný. \square

Tvrzení Věty 11.3. je silnější než tvrzení Důsledku 11.4. Věta 11.3. platí i pro grafy, které jsou pouze hranově 2-souvislé a nejsou vrcholově 2-souvislé. Příklad takového grafu je na Obrázku 11.11. a jedna jeho silná orientace je na Obrázku 11.7. vlevo.



Obrázek 11.11.: Příklad grafu, který je silně orientovatelný, ale není 2-souvislý.

Otázka: Najdete příklad grafu, který je silně orientovatelný, ale není hranově 2-souvislý?

Cvičení

11.2.1. \heartsuit Dokažte nebo vyvraťte vrcholovou verzi Věty 11.2.

11.2.2. Vysvětlete, která z následujících tvrzení jsou pravdivá. a) Pro každý digraf D platí $D(\text{sym}(D)) \simeq D$, b) Existuje digraf D , pro který platí $D(\text{sym}(D)) \simeq D$, c) Pro každý digraf D platí $B(\text{sym}(D)) \simeq D$, d) Existuje digraf D , pro který platí $B(\text{sym}(D)) \simeq D$. Jak se změní odpovědi na předchozí otázky, když místo symetrizace $\text{sym}(D)$ budeme pracovat s deorientací $U(D)$?

11.2.3. Nechť D je digraf, který neobsahuje žádný orientovaný cyklus. Ukažte, že potom $\delta^+(D) = 0$.

11.2.4. \heartsuit Orientovaný digraf D° , který vznikne změnou orientace všech hran orientovaného digrafa D , nazveme opačným digrafem k digrafu D . Ukažte, že $\text{ideg}_{D^\circ}(v) = \text{odeg}_D(v)$ pro každý vrchol $v \in D$.

11.2.5. Nechť D je orientovaný graf, neobsahující žádný orientovaný cyklus. Ukažte s pomocí výsledku předchozího Cvičení 11.2.4., že $\delta^-(D) = 0$.

11.2.6. Ukažte, že jednoduchý digraf D , ve kterém platí $\delta^+(D) = k > 0$, obsahuje orientovaný cyklus délky nejméně $k + 1$.

11.2.7. Odvodte a dokažte nutnou a postačující podmítku pro existenci uzavřeného orientovaného tahu v digrafu D .

11.2.8. Ukažte, že každý graf G má takovou orientaci $D(G)$, že pro všechny vrcholy $v \in G$ platí

$$|\text{ideg}_{D(G)}(v) - \text{odeg}_{D(G)}(v)| \leq 1.$$

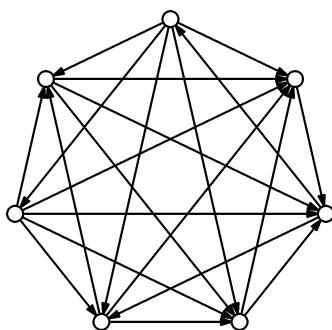
11.2.9. Dokažte nebo vyvraťte: Pro každé $n > 1$ existuje takový jednoduchý digraf D na n vrcholech, že $\text{ideg}_D(u) = \text{ideg}_D(v)$ a $\text{odeg}_D(u) = \text{odeg}_D(v)$ pro každé dva různé vrcholy $u, v \in D$.

11.2.10. Dokažte nebo vyvraťte: Počet vrcholů lichého vnějšího (vnitřního) stupně v orientovaném grafu musí být sudý.

11.3. Turnaje

Máme n týmů nebo hráčů, kteří budou hrát turnaj, například tenisový. Každé dva týmy se spolu utkají v jednom zápase. Protože v tenise neexistuje remíza, můžeme výsledek každého zápasu znázornit orientovanou hranou v kompletním grafu. V této podkapitole se budeme věnovat právě takovým grafům (Obrázek 11.12.).

Definice Turnaj je orientovaný graf, ve kterém pro každou dvojici různých vrcholů u, v existuje právě jedna z hran uv nebo vu .



Obrázek 11.12.: Turnaj.

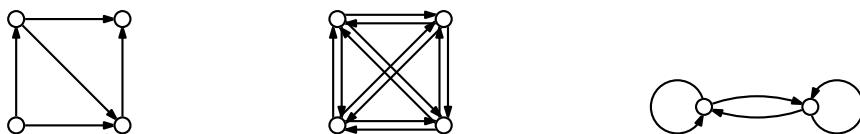
Turnaj získáme jako orientaci $D(K_n)$ (neorientovaného) kompletního grafu K_n . Symetrizace turnaje je jednoduchý kompletní graf, neobsahuje žádnou násobnou hranu.

Tranzitivní a acyklické turnaje

Souvislost grafových turnajů se sportovními turnaji, ve kterých neexistují remízy, je nasnadě. Nejprve zavedeme dvě přirozené vlastnosti turnaje.

Definice Řekneme, že turnaj je *tranzitivní*, jestliže pro každou dvojici orientovaných hran uv a vw obsahuje také hranu uw . Turnaj se nazývá *acyklický*, jestliže neobsahuje žádný orientovaný cyklus.

Obecně existují acyklické digrafy, které nejsou tranzitivní (Obrázek 11.13. vlevo) a tranzitivní digrafy, které nejsou acyklické (Obrázek 11.13. vpravo).



Obrázek 11.13.: Digrafy D_1 , D_2 a D_3 .

Otázky:

- Proč není digraf D_1 na Obrázku 11.13. vlevo tranzitivní?
- Proč není digraf D_2 na Obrázku 11.13. uprostřed tranzitivní?
- Najděte nejmenší jednoduchý tranzitivní digraf, který není acyklický.

Následující věta dává výsledek, který je možná na první pohled poněkud překvapivý. Říká, že pro turnaje jsou pojmy acykličnost a tranzitivita ekvivalentní. Pokud bychom pracovali pouze s turnaji, tak by stačilo zavést jen jeden z obou pojmu!

Věta 11.5. *Turnaj je tranzitivní právě tehdy, když je acyklický.*

Důkaz.

„ \Rightarrow “ První implikaci ukážeme sporem. Předpokládejme, že turnaj D je tranzitivní a obsahuje orientovaný cyklus v_1, v_2, \dots, v_k (a jeho orientované hrany). Protože digraf D obsahuje orientované hrany v_1v_2 a v_2v_3 , tak z tranzitivity plyne, že obsahuje i orientovanou hranu v_1v_3 . Obecně, z tranzitivity turnaje D plyne, že když obsahuje orientované hrany v_1v_i a v_iv_{i+1} , tak obsahuje i orientovanou hranu v_1v_{i+1} . Opakováním postupu ukážeme, že turnaj D obsahuje i hranu v_1v_k , což je spor, neboť v cyklu leží orientovaná hraná v_kv_1 . Ukázali jsme, že tranzitivní turnaj D je acyklický.

„ \Leftarrow “ Opačnou implikaci ukážeme přímo. Předpokládejme, že turnaj D je acyklický. Pro každou dvojici orientovaných hran uv , vw obsahuje turnaj také právě jednu ze dvou hran uw a wu . Protože digraf D je acyklický, nemůže obsahovat orientovanou hranu wu a proto obsahuje orientovanou hranu uw . Tím je důkaz tranzitivity ukončen. \square

Je zřejmé, že turnaj na čtyřech vrcholech, který je na Obrázku 11.14. vlevo, je tranzitivní. Snadno ověříme, že turnaj na Obrázku 11.14. vpravo je acyklický. Podle předchozí věty víme, že oba turnaje jsou isomorfní (Cvičení 11.3.1.).



Obrázek 11.14.: Tranzitivní turnaj a acyklický turnaj na čtyřech vrcholech.

Další věta ukazuje, že o tranzitivních (a tedy ani acyklických) turnajích pro daný počet vrcholů vlastně nemá smysl hovořit v množném čísle. Jestliže lze výsledek sportovního turnaje popsat acyklickým orientovaným grafem, je struktura výsledků celého turnaje určena jednoznačně až na pořadí hráčů.

Věta 11.6. *Pro každé přirozené číslo n existuje jediný tranzitivní turnaj na n vrcholech (až na izomorfismus).*

Důkaz věty je ponechán jako Cvičení 11.3.2.

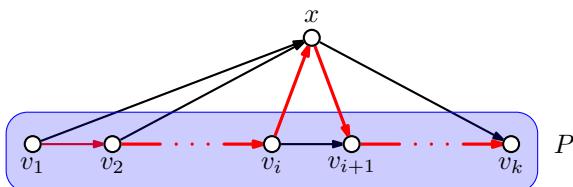
Další vlastnosti turnajů

I v případě, kdy turnaj není tranzitivní, můžeme vyslovit zajímavá tvrzení. V libovolném turnaji například vždy můžeme seřadit všechny hráče tak, že každý další hráč porazil předchozího hráče v posloupnosti.

Věta 11.7. *Každý turnaj obsahuje orientovanou hamiltonovskou cestu.*

Důkaz. Označme $P = v_1, v_2, \dots, v_k$ nějakou nejdelší orientovanou cestu v daném turnaji D na n vrcholech. Jestliže $k = n$, tvrzení platí a důkaz končí.

Předpokládejme nyní pro spor, že $k < n$. To znamená, že v turnaji D existuje vrchol x , který neleží na cestě P . Kdyby hrana xv_1 patřila do turnaje D , tak by orientovaná cesta x, v_1, v_2, \dots, v_k byla delší než P , což podle předpokladu není možné. Proto v turnaji D leží orientovaná hrana v_1x .



Obrázek 11.15.: Prodloužení orientované cesty P v turnaji D .

Označme nyní v_i poslední takový vrchol na cestě P , že orientovaná hrana v_ix patří do hranové množiny turnaje D . Jistě $i < k$, neboť kdyby hrana v_kx patřila mezi hrany turnaje, tak orientovaná cesta v_1, v_2, \dots, v_k, x je delší než P , což podle předpokladu není možné. Nyní však snadno nahlédneme, že orientovaná cesta $v_1, v_2, \dots, v_i, x, v_{i+1}, \dots, v_k$ (na Obrázku 11.15. je vyznačena červeně) je delší orientovaná cesta v turnaji D , než nejdelší cesta P a máme hledaný spor. \square

Říká se, že dobrý dealer s ojetými vozy umí přesvědčit zákazníka, který váhá nad koupí konkrétního vozu. Postupně srovnává další a další dvojice vozů, vždy zvolí pro kupce výhodnější variantu, projdou tak všechna auta v prodejně a nakonec skončí u předem zvoleného vozu. Věta 11.7. ukazuje, že takové tvrzení má reálný základ. Stačí jen vhodně zvolit kritérium, podle kterého budeme porovnávat.

Věta 11.8. *Turnaj obsahuje hamiltonovský cyklus právě tehdy, když je silně souvislý.*

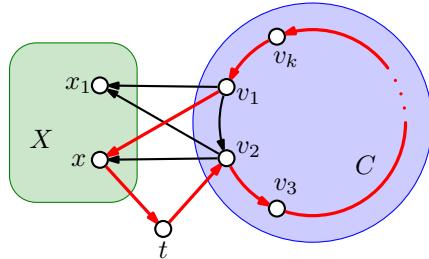
Důkaz. Jedná se o tvrzení ve tvaru ekvivalence, ukážeme obě implikace.

„ \Rightarrow “ První implikace je zřejmá. Protože každé dva vrcholy u, v turnaje leží na (orientovaném) hamiltonovském cyklu, tak příslušný úsek cyklu mezi vrcholy u a v tvoří orientovanou (u, v) -cestu.

„ \Leftarrow “ Nejprve nepřímo ukážeme, že silně souvislý turnaj D obsahuje cyklus. Podle Věty 11.5. je každý acyklický turnaj tranzitivní a v tranzitivním turnaji mohou být všechny vrcholy seřazeny zleva doprava tak, že každá hrana směruje doprava (Obrázek 11.14. vlevo). V acyklickém turnaji proto nenajdeme orientovanou cestu zprava doleva a tak acyklický turnaj není silně souvislý.

Označme $C = v_1, v_2, \dots, v_k$ nějaký nejdelší cyklus v silně souvislém turnaji D na n vrcholech. Jestliže $k = n$, tak C je hamiltonovský cyklus a důkaz končí.

Předpokládejme pro spor, že $k < n$ a tedy že v turnaji D existují vrcholy mimo cyklus C . Protože turnaj D je silně souvislý, tak obsahuje hrani z nějakého vrcholu cyklu C do nějakého vrcholu x_1 , který do C nepatří. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že se jedná o hrani v_1x_1 (Obrázek 11.16.). Kdyby hrana x_1v_2 patřila do D , tak cyklus $v_1, x_1, v_2, \dots, v_k$ byl delší než cyklus C a proto do turnaje D patří

Obrázek 11.16.: Prodloužení cyklu C přes vrchol množiny X a přes vrchol t .

hrana v_2x_1 . Opakováním téhož argumentu snadno nahlédneme, že všechny hrany mezi vrcholy cyklu C a vrcholem x_1 směřují do x_1 (Obrázek 11.16.).

Označme X množinu všech vrcholů mimo cyklus C , do kterých směřuje hrana z vrcholu v_2 (!). Analogicky jako v předchozím odstavci zdůvodníme, že všechny hrany z vrcholů cyklu C mají koncový vrchol v množině X .

Protože ale turnaj D je silně souvislý, musí existovat také cesty z vrcholů množiny X do vrcholů cyklu C . Proto musí turnaj D obsahovat nějaký vrchol $t \notin X$, do kterého vede hrana z nějakého vrcholu $x \in X$. Víme, že hrana mezi t a v_2 končí ve vrcholu v_2 , jinak by vrchol t patřil do množiny X . Nyní dostáváme hledaný spor, neboť orientovaný cyklus $C' = v_1, x, t, v_2, v_3, \dots, v_k$ je delší, než cyklus C a důkaz končí. \square

Všimněte si, že uvedený důkaz je konstruktivní. Popisuje algoritmus, který umí libovolný orientovaný cyklus délky menší než n v daném turnaji prodloužit a proto opakováním uvedeného postupu můžeme hamiltonovský cyklus zkonztruovat.

Král turnaje

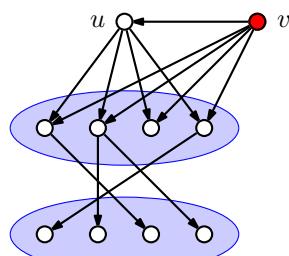
Posloupnosti odchozích stupňů orientovaného (a někdy i neorientovaného) grafu se říká *skóre*, protože v modelu soutěží odpovídá počtu vyhraných zápasů. Všimněte si, že turnaj nemusí mít jednoznačného vítěze, pokud více vrcholů má stejný nejvyšší odchozí stupeň (skóre). Je zajímavé si uvědomit, že v tranzitivních turnajích je podle Věty 11.6. pořadí určeno jednoznačně, přičemž každý hráč má jiné skóre. Nyní ukážeme, že v každém turnaji musí existovat hráči (týmy), kteří porazili všechny ostatní hráče přímo a nebo nepřímo „přes“ jediný vrchol turnaje tak, že hráč x porazil hráče y hráč a y porazil hráče z .

Definice Řekneme, že vrchol u je *králem* v digrafu D , jestliže každý jiný vrchol v je dosažitelný z u po nějaké orientované cestě délky nejvýše 2.

V obecném orientovaném grafu král může a nemusí existovat. Následující věta však říká, že v turnaji takový vrchol existuje vždy.

Věta 11.9. *V každém turnaji existuje král.*

Důkaz. Důkaz je konstruktivní. Ukážeme, jak krále v turnaji najít. Označme u libovolný vrchol turnaje D . Jestliže vrchol u je králem (každý vrchol je dosažitelný z u po orientované cestě délky nejvýše 2), tvrzení platí. Pokud vrchol u není králem, musí existovat vrchol v , který není dosažitelný z u po orientované cestě délky nejvýše 2 (Obrázek 11.17.). Protože D je orientace kompletního grafu, tak pro každý vrchol w dosažitelný z vrcholu u cestou délky 1 (jedinou hranou) je vrchol w také koncovým vrcholem hrany vw , jinak by vrchol v byl dosažitelný z vrcholu u cestou u, w, v délky 2. Ze stejného důvodu je navíc vrchol u koncovým vrcholem hrany vu . Proto jistě platí $\text{odeg}(v) > \text{odeg}(u)$.

Obrázek 11.17.: Hledání krále turnaje D .

Z Obrázku 11.17. je současně zřejmé, že všechny vrcholy dosažitelné z vrcholu u cestou délky nejvýše 2 jsou dosažitelné stejně dlouhou případně kratší cestou i z vrcholu v . Jestliže nalezený vrchol v je králem, tvrzení platí. Pokud v není králem, označíme jej u a najdeme jiný vrchol v s ještě vyšším odchozím stupněm. Protože D je konečný graf, tak nemůžeme do nekonečna nacházet vrcholy s vyšším odchozím stupněm a dříve nebo později najdeme takový vrchol v , který je králem v turnaji D . \square

Otázky:

- Najděte příklad digrafu, který nemá krále.
- Najděte příklad digrafu na alespoň třech vrcholech, který má právě dva krále.
- Najděte příklad digrafu na alespoň třech vrcholech, ve kterém je každý vrchol králem.

Příliš mnoho králů

Je dobré si uvědomit, že koncept krále, tak jak byl zaveden na straně 124, nemá vlastnosti, které bychom od „krále“ čekali. Podle Věty 11.9. víme, že krále budeme umět najít v každém turnaji. Intuitivně bychom čekali, že král bude jaksi výjimečným vrcholem v turnaji a že králů nebude mnoho. Opak je pravdou! Dá se ukázat, že ve většině turnajů bude téměř každý vrchol králem, což samotný pojem krále devaluje.

Vrchol u nazveme *imperátorem* turnaje D , jestliže každý jiný vrchol v turnaje D je dosažitelný z vrcholu u cestou délky 1 (je koncovým vrcholem orientované hrany uv). První vrchol na Obrázku 11.14. vlevo je imperátor, ale například v turnaji na Obrázku 11.12. imperátor neexistuje. Analogicky bychom mohli zavést imperátora digrafu. Pochopitelně, v každém turnaji existuje nejvýše jeden imperátor (proč?).

Tým, který v turnaji porazí všechny ostatní týmy, by bezesporu byl jediným králem turnaje a současně imperátorem. Avšak imperátory v turnajích najdete jen zřídka. Skoro vždy každý tým alespoň jeden zápas prohraje a v turnaji pak žádný imperátor není. Právě proto byl zaveden pojem krále. První užitečné pozorování je, že každý tým, který byl poražen, byl poražen nějakým králem.

Lemma 11.10. *Ke každému vrcholu v s kladným příchozím stupněm najdeme v turnaji D alespoň jednoho takového krále u , že hrana $uv \in A(D)$.*

Důkaz je ponechán jako Cvičení 11.3.5. Následující věta ukazuje, že turnaj bez imperátora nemůže mít jediného krále.

Věta 11.11. *Vrchol v je jediným králem turnaje právě tehdy, když v je imperátorem turnaje D .*

Důkaz.

„ \Rightarrow “ První implikaci ukážeme nepřímo. V turnaji D najdeme krále v dle Věty 11.9. Jestliže král v není imperátem, tak v D existuje alespoň jedna hrana uv . Podle Lemmatu 11.10. najdeme v turnaji D ještě jiného krále.

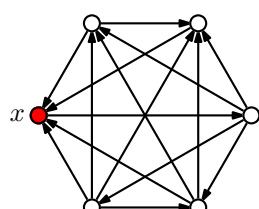
„ \Leftarrow “ Opačná implikace plyne ihned z definice imperátora a krále. \square

Následující tvrzení je zajímavé nejen na první pohled. Pokud v turnaji D není imperátor, tak podle Věty 11.9. sice v D najdeme krále, ale dvojvládí nemůže nikdy nastat! Králů proto musí existovat více než dva.

Věta 11.12. *Žádný turnaj nemá právě dva krále.*

Důkaz je ponechán jako Cvičení 11.3.6. Dále ve Cvičení 11.3.7. ukážeme, že v každém turnaji bez imperátora s více než dvěma vrcholy existují alespoň tři králové. Kolik? To závisí na struktuře daného turnaje. A konečně ve Cvičení 11.3.10. pak ukážeme, že libovolný počet králů v turnaji (až na dvě malé výjimky) je možný.

Je dobré si také uvědomit, že král turnaje nemusí nutně odpovídat vrcholu s velkým odchozím stupněm. Například v turnaji na Obrázku 11.18. je vrchol x králem (třebaže ne jediným králem), i když jeho skóre je 1 a ve sportovní terminologii bychom řekli, že uzavírá tabulku.



Obrázek 11.18.: Turnaj, ve kterém je vrchol x králem.

Naše pozorování můžeme shrnout tak, že ačkoliv zavedení pojmu krále bylo přirozené, nepodařilo se tím najít pěknou charakteristiku „nejlepších“ hráčů turnaje. Vlastnost „být nejlepší“ není snadno uchopitelná a snad právě proto ani nějaká všeobecně uznávaná charakteristika neexistuje. V řadě soutěží tak zůstává prostor pro diskuze, jak by se pořadí nejlepších týmů změnilo při jiném uspořádání soutěže. Na druhou stranu je tu příležitost pro různé playoff systémy s atraktivními zápasy.

Odkazy:

- <http://mathworld.wolfram.com/Tournament.html>
- král a matice sousednosti <http://aix1.uottawa.ca/~jkhouri/graph.htm>
- článek rozebírající omezení pojmu krále <http://www.jstor.org/pss/2689952>

Cvičení

11.3.1. Najděte isomorfismus obou turnajů na Obrázku 11.14.

11.3.2. Dokažte Větu 11.6.

11.3.3. Najděte příklad silně souvislého digrafu, ve kterém neexistuje král.

11.3.4. Ukažte, že vyvážený turnaj na n vrcholech existuje právě tehdy, když n je liché.

11.3.5. Dokažte Lemma 11.10., že ke každému vrcholu v s kladným příchozím stupněm najdeme v turnaji D alespoň jednoho krále u , že $uv \in A(D)$.

11.3.6. Dokažte Větu 11.12., že žádný turnaj nemá právě dva krále.

11.3.7. Mějme takový turnaj D , že $\Delta^-(D) > 0$. Ukažte, že turnaj D obsahuje alespoň tři krále.

11.3.8. Ukažte, že neexistuje turnaj na čtyřech vrcholech, ve kterém je každý vrchol králem.

11.3.9. Pro každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, kde $n \geq 2, 4$ najděte příklad turnaje na n vrcholech, ve kterém je každý vrchol králem.

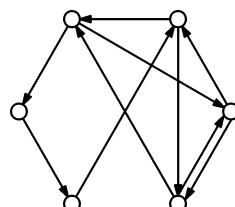
11.3.10. Mějme dvě přirozená čísla $k, n \in \mathbb{N}$, kde $n \geq k$, $k \neq 2$ a neplatí současně $n = k = 4$. Najděte příklad turnaje na n vrcholech, který má právě k králů.

11.3.11. Sestavte algoritmus, který v daném turnaji D na n vrcholech najde hamiltonovskou cestu. Složitost algoritmu by měla být nejvýše $O(n^2)$.

11.4. Orientované eulerovské grafy

Podobně jako v Kapitole 10.1. jsme definovali neorientované eulerovské grafy, můžeme definovat i orientované eulerovské grafy.

Definice Orientovaný eulerovský tah je takový orientovaný tah, který obsahuje všechny orientované hrany daného grafu. Orientovaný eulerovský graf nebo eulerovský digraf je takový digraf, ve kterém existuje uzavřený eulerovský orientovaný tah.



Obrázek 11.19.: Orientovaný eulerovský graf.

Nejprve ukážeme, že i pro digrafy platí analogie Eulerovy věty (Věta 10.1.).

Věta 11.13. Orientovaný graf je eulerovský právě tehdy, když je vyvážený a jeho symetrizace je souvislý graf.

Důkaz.

„ \Rightarrow “ Orientovaný eulerovský graf D je jistě souvislý a souvislá je proto i jeho symetrizace. Protože každý vrchol digrafu je koncovým vrcholem jedné hrany a počátečním vrcholem následující hrany uzavřeného eulerovského tahu, tak počet příchozích a odchozích hran každého vrcholu je stejný. To znamená, že digraf D je i vyvážený.

„ \Leftarrow “ Mějme vyvážený orientovaný graf $D = (V, A)$, jehož symetrizace je souvislý graf. Označme $T = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$ nějaký maximální tah v digrafu D , jeho délka je k . Je lehké zdůvodnit, že tah je uzavřený, tj. $v_0 = v_k$, neboť jinak do vrcholu v_k přichází více orientovaných hran tahu T , než z něj odchází, a protože $\text{odeg}(v_k) = \text{ideg}(v_k)$, bylo by možné tah T prodloužit. To by byl spor.

Označme V' množinu všech vrcholů tahu T a A' množinu všech hran tahu T . Sporem ukážeme, že platí $V' = V$ a $A' = A$ a že nalezený tah je eulerovský. Rozlišíme dva případy:

- 1) Jestliže $V' \neq V$, tak v digrafu D jistě najdeme hranu $e = v_i x$, kde $v_i \in V'$ a $x \in (V \setminus V')$, protože digraf D má souvislou symetrizaci. Pak ale tah

$$v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_k, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_i, e, x$$

je delší tah v digrafu D , než tah T , což je spor.

- 2) Pokud $A' \neq A$, tak zvolme libovolnou hranu $e \in (A' \setminus A)$, kde $e = v_i v_j$. Pak opět dostáváme spor, protože v digrafu D najdeme tah

$$v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \dots, v_k, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_i, e, v_j,$$

který je delší než je tah T .

Ukázali jsme, že tah T je uzavřený a obsahuje všechny vrcholy i orientované hrany digrafu D a jedná se proto o eulerovský tah a D je orientovaný eulerovský tah. \square

Otázky:

- Proč je v Tvrzení Věty 11.13. požadavek, aby symetrizace digrafu byla souvislá?
- Jak by se změnily vlastnosti orientovaného eulerovského grafu, kdybychom v definici orientovaného eulerovského tahu nepožadovali, aby obsahoval všechny vrcholy?
- Musí být eulerovský digraf silně souvislý?

Eulerovy větu pro orientované grafy (Větu 11.13.) můžeme přeformulovat do následujícího tvrzení. Důkaz je ponechán jako Cvičení 11.4.2.

Důsledek 11.14. Orientovaný graf je eulerovský právě tehdy, když je vyvážený a silně souvislý.

Cvičení

11.4.1. Ukažte, že pro každý neorientovaný sudý graf (má všechny vrcholy sudého stupně) existuje jeho vyvážená orientace.

11.4.2. Dokažte Větu 11.14.: ukažte, že digraf je eulerovský právě tehdy, když je vyvážený a silně souvislý.

11.4.3. Zformulujte a dokažte nutnou a postačující podmítku pro to, aby digraf bylo možno nakreslit jedním otevřeným orientovaným eulerovským tahem.

11.4.4. Ukažte, že vyvážený orientovaný graf je slabě souvislý právě tehdy, když je silně souvislý.

11.4.5. Sejf se otvírá digitální klávesnicí, přičemž sejf se otevře při zadání správné posloupnosti bez ohledu na předchozí stisknuté klávesy. Je-li například 1234 heslo otvírající sejf, tak pro otevření můžeme zadat **1234**, nebo **81234** nebo klidně **63825431234**.

K prolomení kódu můžeme postupně zadat všechna čísla od 0000 do 9999. Avšak to bychom museli naťukat celkem $4 \cdot 10000 = 40000$ cifer, což by trvalo zbytečně dlouho. Jaký je nejmenší počet cifer, který zajistí prolomení kódu? Jak sestrojit příslušnou posloupnost čísel?

11.4.6. Zobecněte a vyřešte úlohu ze Cvičení 11.4.5. i pro n -ciferná čísla s číslicemi $1, 2, \dots, q$.

Rejstřík

- k*-faktor, 67
- k*-kritický graf, 82, 83
- k*-souvislost
 - hranová, 52
 - vrcholová, 51
- acyklický graf, 36
- algoritmus
 - dobrého vrcholového $(\Delta(G) + 1)$ -barvení, 79
 - hladový, 79
- antiřetězec, 8
- anuloid, 1, 100, 100
- artikulace, 52, 59, 59, 80, 83, 108
- asociativita, 18
- asociovaný orientovaný graf, 119
- automorfismus, 48
- axiomy grupy, 18
- barevná třída, 70, 77
- barevně *k*-kritický graf, 82, 83
- barva
 - hrany, 69
 - volná, 71
 - vrcholu, 77
- barvení
 - hranové, 69
 - oblastní, 96
 - vrcholové, 77
- bezprostřední následovník, 8
- bicyklický graf, 40
- bijekce, 44
- biklika, 21
- binární
 - operace, 4, 12
 - operátor, 4, 10, 10
 - relace, 6, 7
- binární operace, 18
- bipartitní graf, 21, 41, 46, 62, 65, 78, 80, 83
- blok, 56, 56
 - koncový, 59, 81, 95
- blok grafu, 56, 56, 80
- blokový–artikulační graf, 57, 59
- Catalanova čísla, 96
- Cayleyho vzorec, 39
- celá čísla
 - interval, 2
- celkový stupeň, 115
- centrum, 33
- cesta, 21, 30, 80
 - M*-alternující, 60
 - M*-rozšiřující, 60
 - diametrická, 34
- hamiltonovská, 113
- nejdelší, 83, 83
- neorientovaná, 117
- orientovaná, 116
- triviální, 21, 30
- uzavřená, 30
- v grafu, 27
- cesty
 - hranově disjunktní, 57
 - vrcholově disjunktní, 57
- cyklomatičné číslo, 42
- cyklus, 21, 30, 41, 43, 73, 78, 78
 - hamiltonovský, 107
 - lichý, 31, 41, 73
 - neorientovaný, 117
 - orientovaný, 116, 117
 - v grafu, 27
- částečné uspořádání, 7
- čísla
 - Catalanova, 96
- číslo
 - klikové, 79
 - průsečíkové, 97
 - přirozené, 1
- číslo nezávislosti
 - hranové, 72
 - vrcholové, 72
- člen, 2
- definiční obor, 11, 11
- dělitelnost, 7
- délka
 - cesty, 30
 - sledu, 30
 - tahu, 30
- deorientace digrafu, 118
- De Morganova pravidla, 4
- diagram, 19
 - hasseovský, 8
 - Vennův, 3
- diametr, 34
- diametrická cesta, 34
- digraf, 114
 - deorientace, 118
 - eulerovský, 126
 - isomorfismus, 114
 - jednoduchý, 119
 - jednostranně souvislý, 117
 - opačný, 121
 - silně souvislý, 117
 - slabě souvislý, 117
 - symetrizace, 118

- vyvážený, 115
 Diracova věta, 107
 Dirac G.A., 107
 Dirichletův princip, 14
 dolní celá část, 18
 domino, 13
 doplněk grafu, 22
 doplněk množiny, 3
 dosažitelnost, 31
 dosažitelný vrchol, 32, 117
 Druhá Petersenova věta, 67
 duální graf, 93

 ekvivalence, 9, 44, 117
 třída, 9, 44
 eulerovský
 digraf, 126
 graf, 103
 orientovaný, 126
 otevřený tah, 103
 tah, 103
 orientovaný, 126
 Eulerův vzorec, 98
 Euler L., 103
 excentricita, 33
 excentricita grafu, 34
 exteriér křivky, 87

 faktor, 26, 39, 67
 faktORIZACE, 74
 funkce, 2

 Goldner–Hararyův graf, 110
 graf, 19, 44
 k-kritický, 82, 83
 acyklický, 36
 barevně k-kritický, 82, 83
 bicyklický, 40
 bipartitní, 21, 41, 46, 62, 65, 78, 80, 83
 blok, 56, 56
 blokový–artikulační, 57, 59
 duální, 93
 eulerovský, 103
 excentricita, 34
 faktor, 39
 Goldner–Hararyův, 110
 Grötzschův, 80, 94
 hamiltonovský, 107
 hamiltonovsky souvislý, 111
 Herschelův, 110
 holení, 38, 38
 hranově k-chromatický, 70
 hranově k-obarvitelný, 70
 hranově tranzitivní, 49
 hustý, 22, 28, 109
 hvězda, 21
 hypohamiltonovský, 111
 IMPLEMENTACE, 27

 isomorfni, 44
 jednoduchý, 19, 20, 20, 118
 kompletní, 20, 74, 78
 kompletní bipartitní, 21, 78
 kompletní multipartitní, 83
 kostra, 39
 kubický, 22, 67
 mocnina, 112
 multipartitní, 83, 89
 nakreslení, 19, 90
 nesouvislý, 31, 103
 obecný, 20
 oblast, 89
 obvod, 92
 ohodnocený, 29
 orientace, 119, 119
 orientovaný, 20, 114, 114
 Petersenův, 49, 50, 66, 80, 99, 108, 111, 111
 planární, 86
 pokrytí, 64
 pravidelný, 22, 67, 72, 81, 82
 regulární, 22
 rod, 100, 100
 rovinný, 86
 rozdělení, 59, 89
 rozklad, 74, 98
 řídký, 34
 se smyčkami, 20
 silně orientovatelný, 119
 souvislý, 31, 32, 59, 59, 83, 108
 strnulý, 49
 subdivize, 89
 sudý, 59, 103, 105, 127
 tloušťka, 95, 98
 triviální, 20, 75
 unicyklický, 40, 55
 uzávěr, 109
 vnějškově planární, 95, 97, 97, 97, 97
 vnoření, 100, 100
 vrcholově k-chromatický, 77
 vrcholově k-obarvitelný, 77
 vrcholově tranzitivní, 49
 grafová posloupnost, 24
 Grötzschův graf, 80, 94
 grupa, 18
 grupa automorfismů, 49
 grupoid, 18
 grupy
 axiomy, 18

 had, 30
 hamiltonovská
 cesta, 107, 113
 hamiltonovský
 cyklus, 107
 graf, 107
 hamiltonovsky souvislý graf, 111
 Handshaking problem, 1, 25

- hasseovský diagram, 8
 Herschelův graf, 110
 holení grafu, 38, 38
 homeomorf, 59
 homeomorfní obraz, 59
 horní celá část, 18
 hra
 podvodní sprouti, 92
 sprouti, 92, 92
 hrana, 19
 obarvení, 69
 odchozí, 115
 opačná, 114
 orientovaná, 114
 pokrytá, 64
 příchozí, 115
 sudá, 93
 hranová k -souvislost, 52
 hranová souvislost, 52
 hranové barvení, 69
 dobré, 69
 hranové číslo nezávislosti, 72
 hranové disjunktní cesty, 57
 hranové k -barvení, 69
 hranově tranzitivní graf, 49
 hranový řez, 52, 55
 hrany
 nezávislé, 20, 70
 hry na grafech, 92
 hustý graf, 22, 109
 hvězda, 21, 38, 40
 hypergraf, 20
 hyperkrychle, 49, 73, 80
 hypohamiltonovský graf, 111

 chordála, 95, 96
 chromatické číslo, 77, 97
 chromatický index, 70
 Chvátal V., 107

 imperátor
 digrafu, 125
 turnaje, 125
 implementace grafů, 27
 incidence, 19, 114
 incidenční zobrazení, 20
 indexová množina, 9
 indukovaný podgraf, 26
 interiér křivky, 87
 interní vrcholy, 30
 interval celých čísel, 2
 inverzní prvek, 18
 isomorfismus, 41, 44, 74, 93
 digrafů, 114
 isomorfní grafy, 44
 izolovaný vrchol, 22

 jednoduchý digraf, 119

 jednoduchý graf, 20, 118
 jednostranně souvislý digraf, 117
 Jordanovská křivka, 86

 kartézská mocnina množiny, 5
 kartézský součin množin, 5
 Kőnig D., 73
 Kirchhoff G., 39
 klika, 20, 79
 v grafu, 27
 klikové číslo, 79
 kolo, 62
 kombinace
 bez opakování, 14
 s opakováním, 15
 kombinatorické pravidlo součinu, 13
 kombinatorické pravidlo součtu, 13
 kompletní bipartitní graf, 21, 78
 kompletní graf, 20, 74, 78
 kompletní multipartitní graf, 83
 komponenta, 32, 52
 lichá, 66
 koncový blok, 59, 81, 95
 koncový bod, 85
 koncový vrchol, 19, 30, 114
 Kőnigova věta, 65
 kořenový strom, 39
 kostra grafu, 39
 král
 digrafu, 124
 turnaje, 124, 125, 126, 126, 126, 126
 kružnice, 21
 křivka, 85
 exteriér, 87
 interiér, 87
 Jordanovská, 86
 křížení hran, 85
 kubický graf, 22, 67

 lemniskáta, 87
 les, 36
 lichá komponenta, 66
 lineární usporádání, 7
 list, 36, 38
 lízatko, 78

 magma, 18
 matice
 incidenční, 28
 sousednosti, 28, 29
 maximální
 párování, 60
 prvek, 8
 Mengerovy věty, 58
 metrický prostor, 32
 metrika, 32, 32, 34
 minimální
 prvek, 8

- minimální pokrytí, 64
- minimaxová podmínka, 66
- Množina, 2
- množina
 - barev, 69, 77
 - doplňek, 3
 - indexová, 9
 - kartézská mocnina, 5
 - mohutnost, 2
 - multimnožina, 2
 - nezávislých vrcholů, 19
 - obrazů, 11
 - operace, 3, 4
 - otevřená, 87
 - podmnožina, 2
 - potenční, 5
 - prázdná, 2
 - rozklad, 9
 - vzorů, 11
- množiny
 - kartézský součin, 5
 - operace, 12
 - průnik, 4
 - rozdíl, 4
 - sjednocení, 4
 - symetrická differenze, 4
 - systém, 5
- Möbiův list, 100, 100
- mocnina grafu, 112
- mohutnost množiny, 2
- most, 42, 52, 55, 55, 55, 55, 59
- multigraf, 20, 104
 - sudý, 103
- multimnožina, 2, 15
- multipartitní graf, 83, 89
- nadgraf, 27, 74
- nakreslení grafu, 19, 90
- následovník, 6, 11
- neisomorfní grafy, 44
- nejdelší cesta, 83, 83
- nejmenší
 - pokrytí, 64
 - prvek, 8
- největší
 - párování, 60
 - prvek, 8
- neorientovaná cesta, 117
- neorientovaný cyklus, 117
- neporovnatelné prvky, 7
- nesouvislý graf, 31, 103
- netriviální
 - strom, 36
- neuspořádaná množina, 8
- neutrální prvek, 18
- nezávislá množina, 19
 - maximální, 19
 - největší, 19
- nezávislé
 - hrany, 20, 70
 - vrcholy, 19, 114
- nezávislost, 114
- nulární operace, 12
- nutná a postačující podmínka, 37, 41, 45, 60, 66, 109, 110, 121, 127
- nutná podmínka, 45, 62, 75, 108, 108, 109
- oblast grafu, 89
- oblastní barvení, 96
- oblast roviny, 87
- oblouk, 85
- obor
 - definiční, 11
 - hodnot, 11
- obor hodnot, 11
- obraz, 11, 11
- obvod grafu, 92
- odebrání hran, 26
- odebrání vrcholu, 26
- odchozí hrana, 115
- odchozí stupeň, 115
- ohodnocený graf, 29
- okolí množiny, 62
- okolí vrcholu, 24, 62
- opačná hrana, 114
- opačný digraf, 121
- operace
 - binární, 4, 12, 18
 - na množině, 3, 4, 12
 - nulární, 12
 - unární, 12
- operátor, 10, 10
 - binární, 4
- Oreho věta, 107, 112
- Ore O., 107
- orientace grafu, 119, 119, 122
- orientovaná cesta, 116
- orientovaná hrana, 114
- orientovaná vzdálenost, 118
- orientovaný
 - eulerovský graf, 126
 - orientovaný cyklus, 116, 117
 - orientovaný graf, 114, 114
 - asociovaný, 119
 - orientovaný sled, 116
 - orientovaný tah, 116
 - otevřená množina, 87
 - otevřený eulerovský tah, 103
- párování, 60, 60, 64, 65, 69, 69
 - maximální, 60
 - největší, 60
 - perfektní, 60
 - úplné, 60, 63, 66, 72
- partita, 21
- perfektní párování, 60

- Petersenův graf, 49, 50, 66, 80, 99, 108, 111, 111
 planární graf, 86
 počáteční vrchol, 30, 114
 počet komponent, 32
 podgraf, 26, 45, 74
 digrafu, 114
 indukovaný, 26
 nevlastní, 26
 vlastní, 26
 podmínka
 minimaxová, 66
 nutná, 45, 62, 75, 108, 108, 109
 nutná a postačující, 37, 41, 45, 60, 66, 109, 110, 121, 127
 postačující, 40, 67, 75, 107, 109
 podmnožina, 2
 vlastní, 2, 108, 111
 podsled, 31
 podtah, 31
 pokrytí, 65
 minimální, 64
 nejmenší, 64
 pokrytí grafu, 64
 polocesta, 117, 117
 poloměr, 34
 Pósa L., 107
 poset, 8
 posloupnost, 2
 prázdná, 2
 Pósova věta, 107
 postačující podmínka, 40, 67, 75, 107, 109
 potenční množina, 5, 22
 povykos, 39
 pravidelný graf, 22, 67, 72
 prázdná množina, 2
 prázdná posloupnost, 2
 prázdná suma, 3
 princip
 Dirichletův, 14
 inkluze a exkluze, 15, 16
 nezávislých výběrů, 13
 sudosti, 23
 průměr grafu, 34
 průměrný stupeň, 23
 průnik množin, 4
 průsečíkové číslo, 97
 prvek, 2, 2
 inverzní, 18
 maximální, 8
 minimální, 8
 nejmenší, 8
 největší, 8
 neutrální, 18
 První Petersenova věta, 67
 předchůdce, 6
 příchozí hrana, 115
 příchozí stupeň, 115
 přirozená čísla, 1
- pseudograf, 20
 sudý, 103
 rádius, 34
 regulární graf, 22
 relace
 antisymetrická, 7
 asymetrická, 7
 binární, 6, 7
 částečné uspořádání, 7
 dělitelnosti, 7
 ekvivalence, 9, 117
 ireflexivní, 7
 lineární, 7
 mezi množinami, 6
 na množině, 6
 neporovnatelné prvky, 7
 reflexivní, 7
 symetrická, 7
 tranzitivní, 7
 úplná, 7
 relace dosažitelnosti, 32
 relační symbol, 6, 10
 restrikce, 11, 45
 rod
 grafu, 100, 100
 plochy, 100
 rovina, 85
 oblast, 87
 rovinný graf, 86
 rozdělení grafu, 59, 89
 rozdíl množin, 4
 rozklad
 grafu, 74, 98
 množiny, 9, 12, 33, 70, 77, 83
 rozvrh, 69
 řetězec, 8
 řez, 52
 hranový, 52, 55
 vrcholový, 52, 55
 řídký graf, 34
 separující množina
 hran, 55
 vrcholů, 55
 sféra, 99
 silně orientovatelný graf, 119
 silně souvislý digraf, 117
 sjednocení množin, 4
 skladovací problém, 77
 skóre grafu, 124
 slabě souvislý digraf, 117
 sled, 30
 orientovaný, 116
 triviální, 30
 uzavřený, 30
 smyčka, 20

- součet, 2
- součin, 3, 3
- sousední vrcholy, 19
- sousednost, 114
- souvislost, 51
 - hranová, 52
 - vrcholová, 51
- souvislý graf, 31, 32, 59, 59, 83, 108
- spárované vrcholy, 60
- spor, 23
- strnulý graf, 49
- strom, 36, 55, 80, 91
 - kořenový, 39
 - netriviální, 36
 - triviální, 36
- stupeň
 - celkový, 115
 - nejmenší, 22
 - největší, 22
 - odchozí, 115
 - příchozí, 115
 - vnější, 115
 - vnitřní, 115
 - vrcholu, 22, 79
- stupňová posloupnost, 24, 79
- subdivize, 89
- sudá hrana, 93
- sudý graf, 59, 103, 105, 127
- sudý multigraf, 103
- sudý pseudograf, 103
- suma, 2
 - prázdná, 3
- sumační znaménko, 2
- supergraf, 27
- symbol relace, 10
- symetrická diference, 61
- symetrická diference množin, 4
- symetrizace digrafu, 118
- systém množin, 5
- systém reprezentantů, 63
- šachy, 41
- šíp, 114
- sprouti, 92, 92
 - podvodní, 92
- tah, 30, 103
 - eulerovský, 103
 - orientovaný, 126
 - orientovaný, 116
 - otevřený eulerovský, 103
 - uzavřený, 30
- tištěný spoj, 85
- tloušťka grafu, 95, 98
- topologie, 85, 86
- torus, 1, 100, 100
- tranzitivní turnaj, 122
- tripartitní graf, 89
- triviální
 - strom, 36
- triviální automorfismus, 49
- triviální graf, 20, 75
- trojúhelníková nerovnost, 34
- třída
 - barevná, 70, 77
 - ekvivalence, 9, 44
- třída 1, 72, 72, 73
- třída 2, 72, 73, 73
- turnaj, 121
 - tranzitivní, 122
- Tutteova věta, 66
- unární operace, 12
- unicyklický graf, 40, 55
- univerzum, 3
- úplně neuspořádaná množina, 8
- úplné párování, 60, 63, 66, 72
- uspořádání
 - abecední, 7
 - antiřetězec, 8
 - částečné, 7
 - lexikografické, 7, 11
 - lineární, 7
 - řetězec, 8
- uzávěr grafu, 109
- uzavřená cesta, 30
- uzavřená Jordanovská křivka, 86
- uzavřený sled, 30
- uzavřený tah, 30
- variace
 - bez opakování, 14
 - s opakováním, 14
- Vennův diagram, 3
- věta
 - Brooksova, 80
 - Cayleyho vzorec, 39
 - Diracova, 107
 - Eulerův vzorec, 90
 - Grötzschova, 94
 - Havla–Hakimiho, 24
 - Königova, 65
 - Kuratowského, 89
 - Mengerova, 58
 - Oreho, 107, 112
 - o čtyřech barvách, 94, 94
 - o Jordanovských křivkách, 87
 - Petersenova druhá, 67
 - Petersenova první, 67
 - Pósova, 107
 - princip sudosti, 23
 - Tutteova, 66
 - Vizingova, 71
 - vlastní podmnožina, 2, 108, 111

vnějšek křivky, 87
vnější stupeň, 115
vnějkově planární graf, 95, 97, 97, 97, 97
vnitřek křivky, 87
vnitřní stupeň, 115
vnitřní vrcholy, 30
vnoření grafu, 100, 100, 102
volná barva, 71
vrchol, 19
 M-nesaturovaný, 60
 M-saturovaný, 60
 dosažitelný, 31, 32, 117
 interní, 30
 izolovaný, 22
 koncový, 19, 30, 114
 obarvení, 77
 počáteční, 30, 114
 vnitřní, 30
 výchozí, 114
vrcholová *k*-souvislost, 51
vrcholová souvislost, 51
vrcholové barvení, 77
 dobré, 77
 optimální, 79
vrcholové číslo nezávislosti, 72
vrcholově disjunktní cesty, 57
vrcholové *k*-barvení, 77
vrcholově tranzitivní graf, 49, 50

vrcholový řez, 52, 55
vrcholy
 nesousední, 19
 sousední, 19
 spárované, 60
 vzájemně dosažitelné, 117
 závislé, 19
výběr, 12
 bez opakování, 12
 neuspořádaný, 12
 s opakováním, 12
 uspořádaný, 12
výchozí bod, 85
výchozí vrchol, 114
výstřednost, 33
vyvážený digraf, 115
vzájemně dosažitelné vrcholy, 117
vzdálenost, 32
 orientovaná, 118
vzor, 11, 11
závislé vrcholy, 19
zobrazení, 85
 incidenční, 20
 množiny, 11
 obraz, 11
 vzor, 11
 z množiny, 11

Literatura

- [F] D. Fronček, Úvod do teorie grafů, Slezská univerzita Opava, (1999), ISBN 80-7248-044-8.
- [G] J.A. Gallian, Contemporary Abstract Algebra, Houghton Mifflin Company, Boston MA (2002), ISBN 0-618-122141.
- [HKS] J. Herman, R. Kučera, J. Šimša, metody řešení matematických úloh I a II, Masarykova univerzita brno, (1996 a 2004), ISBN 80-210-1202-1 a ISBN 80-210-3528-5.
- [LR] C.C. Lindner, C.A. Rodger, Design Theory, CRC Press, Boca Raton FL, (1997), ISBN 0-8493-3986-3.
- [MN] J. Matoušek, J. Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Karolinum Praha, (2000), ISBN 80-246-0084-6.
- [R] K.H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications – 6th ed., McGraw-Hill, New York NY, (2007), ISBN-10 0-07-288008-2.
- [T] A. Tucker, Applied Combinatorics – 3rd ed., John Wiley & Sons, (1995), ISBN-10 0-471-59504-7.
- [S] I. Stewart, Jak rozkrájet dort, Dokorán, (2009), ISBN-987-80-7362-187-1.
- [W] D.B. West, Introduction to graph theory – 2nd ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ, (2001), ISBN 0-13-014400-2.

Přehled použitých symbolů

Symboly

| | | | |
|------------------------------|--|-----------------------|--|
| 2^X | potenční množina množiny X (str. 5) | $\gamma(G)$ | rod grafu G (str. 100) |
| $A(G)$ | matice sousednosti grafu G (str. 28) | $\delta(G)$ | nejmenší stupeň v grafu G (str. 22) |
| $\text{Aut}(G)$ | grupa automorfismů grafu G (str. 49) | $\Delta(G)$ | největší stupeň v grafu G (str. 22) |
| $B(G)$ | incidentní matice grafu G (str. 28) | $\theta(G)$ | tloušťka grafu G (str. 98) |
| $\text{Blok}(G)$ | blokový–artikulační graf G (str. 57) | $\kappa(G)$ | vrcholová souvislost grafu G (str. 51) |
| $c(G)$ | klikové číslo grafu G (str. 79) | $\kappa'(G)$ | hranová souvislost grafu G (str. 52) |
| $C(G)$ | uzávěr grafu G (str. 109) | $\nu(G)$ | průsečíkové číslo grafu G (str. 97) |
| $D(G)$ | orientace grafu G (str. 119) | $\mu(G)$ | cyklotomické číslo grafu G (str. 42) |
| $\deg(v)$ | stupeň vrcholu v v grafu (str. 22) | $\chi(G)$ | chromatické číslo grafu G (str. 77) |
| $\text{diam}(G)$ | průměr grafu G (str. 34) | $\chi'(G)$ | chromatický index grafu G (str. 70) |
| $\text{dist}(u, v)$ | vzdálenost vrcholů u a v v grafu (str. 32) | $\omega(G)$ | počet komponent grafu G (str. 32) |
| $\text{ecc}(v)$ | excentricita vrcholu v v grafu (str. 33) | G^n | n -tá mocnina grafu G (str. 112) |
| $\text{ext } J$ | exteriér křivky J (str. 87) | $G \simeq H$ | isomorfní grafy G a H (str. 44) |
| $E(G)$ | množina hran grafu G (str. 19) | | |
| $\overline{G}, \overline{A}$ | doplňek grafu G (str. 22) nebo množiny A (str. 3) | $\prod_{i=1}^n a_i$ | součin prvků posloupnosti $(a_i)_{i=1}^n$ (str. 3) |
| G^* | duální graf grafu G (str. 93) | $\sum_{i=1}^n a_i$ | součet prvků posloupnosti $(a_i)_{i=1}^n$ (str. 2) |
| $h(G)$ | počet hran grafu G (str. 23) | \emptyset | prázdná množina (str. 2) |
| $\text{int } J$ | interiér křivky J (str. 87) | $x \in A$ | prvek x množiny A (str. 2) |
| $k(n)$ | počet stromů na n vrcholech (str. 39) | $A \subseteq A$ | podmnožina A množiny B (str. 2) |
| $N_G(v)$ | okolí vrcholu v v grafu G (str. 24) | $A \subset A$ | vlastní podmnožina A množiny B (str. 2) |
| $N_G(S)$ | okolí množiny S vrcholů v G (str. 62) | $A \cap B$ | průnik množin A a B (str. 4) |
| $o(G)$ | počet oblastí grafu G (str. 90) | $A \cup B$ | sjednocení množin A a B (str. 4) |
| $\text{rad}(G)$ | poloměr grafu G (str. 34) | $A \setminus B$ | rozdíl množin A a B (str. 4) |
| $\text{sym}(D)$ | symetrizace digrafu D (str. 118) | $A \triangle B$ | symetrická differenze množin A a B (str. 4) |
| $U(D)$ | deorientace digrafu D (str. 118) | $A \times B$ | kartézský součin množin A a B (str. 5) |
| $V(G)$ | množina vrcholů grafu G (str. 19) | \preceq | relace částečného uspořádání (str. 7) |
| $v(G)$ | počet vrcholů grafu G (str. 23) | \simeq | relace ekvivalence (str. 9) |
| $\alpha(G)$ | vrcholové číslo nezávislosti grafu G (str. 72) | $A \wedge B$ | logická konjunkce („ A a současně B “) |
| $\alpha'(G)$ | hranové číslo nezávislosti grafu G (str. 72) | $A \vee B$ | logická disjunkce („ A nebo B “) |
| | | $A \Rightarrow B$ | implikace („jestliže platí A , tak platí B “) |
| | | $A \Leftrightarrow B$ | ekvivalence („ A platí právě, když B “) |

Třídy grafů

| | |
|-----------|--|
| C_n | cyklus na n vrcholech (str. 21) |
| P_n | cesta na n vrcholech (str. 21) |
| K_n | kompletní graf na n vrcholech (str. 20) |
| $K_{m,n}$ | kompletní bipartitní graf na $m + n$ vrcholech (str. 21) |