

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

ДОКЛАД

По теме: «Модель заражения SIR»

дисциплина: Математическое моделирование

Студент: Еременко А.Г.

Группа: НПИбд-01-18

МОСКВА

2021 г.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Сделать обзор эпидемиологической модели SIR

Выполнение работы

ВВЕДЕНИЕ

Эпидемии издавна угрожали человечеству, и только в XX веке были разработаны эффективные средства борьбы с инфекциями. К числу этих средств принадлежат и системы дифференциальных уравнений — математика помогает моделировать распространение эпидемий и помогает понять, как следует с ними бороться.

Изучение механизмов развития и распространения эпидемий является важным способом борьбы с заболеваниями наряду с поиском новых лекарств, вакцинацией и профилактическими мерами. На помощь медикам пришли математики — для этого им пришлось объединить дифференциальные уравнения и теорию вероятности.

Первую попытку использовать математический аппарат для исследования механизмов распространения заболеваний предпринял Даниил Бернулли, ранее открывший первые законы гидродинамики. Следующий шаг сделал Уильям Фарр, применивший в 1840 году нормальное распределение к анализу смертности от оспы.

Наконец, опираясь на работы большого числа предшественников, британские ученые Андерсон Кермак и Уильям Маккендрик разработали широко применяемую сегодня модель SIR. Эта аббревиатура происходит от английских слов *Susceptible* — *Infected* — *Recovered*, буквально означающих «восприимчивые — инфицированные — выздоровевшие». Под «восприимчивыми» тут подразумеваются еще не инфицированные организмы. Под «выздоровевшими» подразумеваются люди, у которых сформировался устойчивый иммунитет.

В рамках этой модели с помощью систем дифференциальных уравнений (при условии непрерывности времени и большой популяции) или разностных уравнений (при дискретном времени и ограниченной популяции) описывается динамика распространения заболевания.

Модель SIR

SIR–модель получила заслуженную популярность в силу простоты построения и использования. Ее применение позволяет точно моделировать эпидемии гриппа и других заболеваний в больших городах, вводить новые параметры и анализировать разные сценарии.

Система уравнений SIR:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta IS}{N}, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I.\end{aligned}$$

где

- $S(t)$ — численность восприимчивых индивидов в момент времени t ;
- $I(t)$ — численность инфицированных индивидов в момент времени t ;
- $R(t)$ — численность переболевших индивидов в момент времени t ;
- β — коэффициент интенсивности контактов индивидов с последующим инфицированием;
- γ — коэффициент интенсивности выздоровления инфицированных индивидов.
- N — общее количество индивидуумов в популяции.

Первое уравнение системы означает, что изменение числа здоровых (и при этом восприимчивых к заболеванию) индивидуумов уменьшается со временем пропорционально числу контактов с инфицированными. После контакта происходит заражение, восприимчивый переходит в состояние инфицированного.

Второе уравнение показывает, что скорость увеличения числа заразившихся растет пропорционально числу контактов здоровых и инфицированных и уменьшается по мере выздоровления последних.

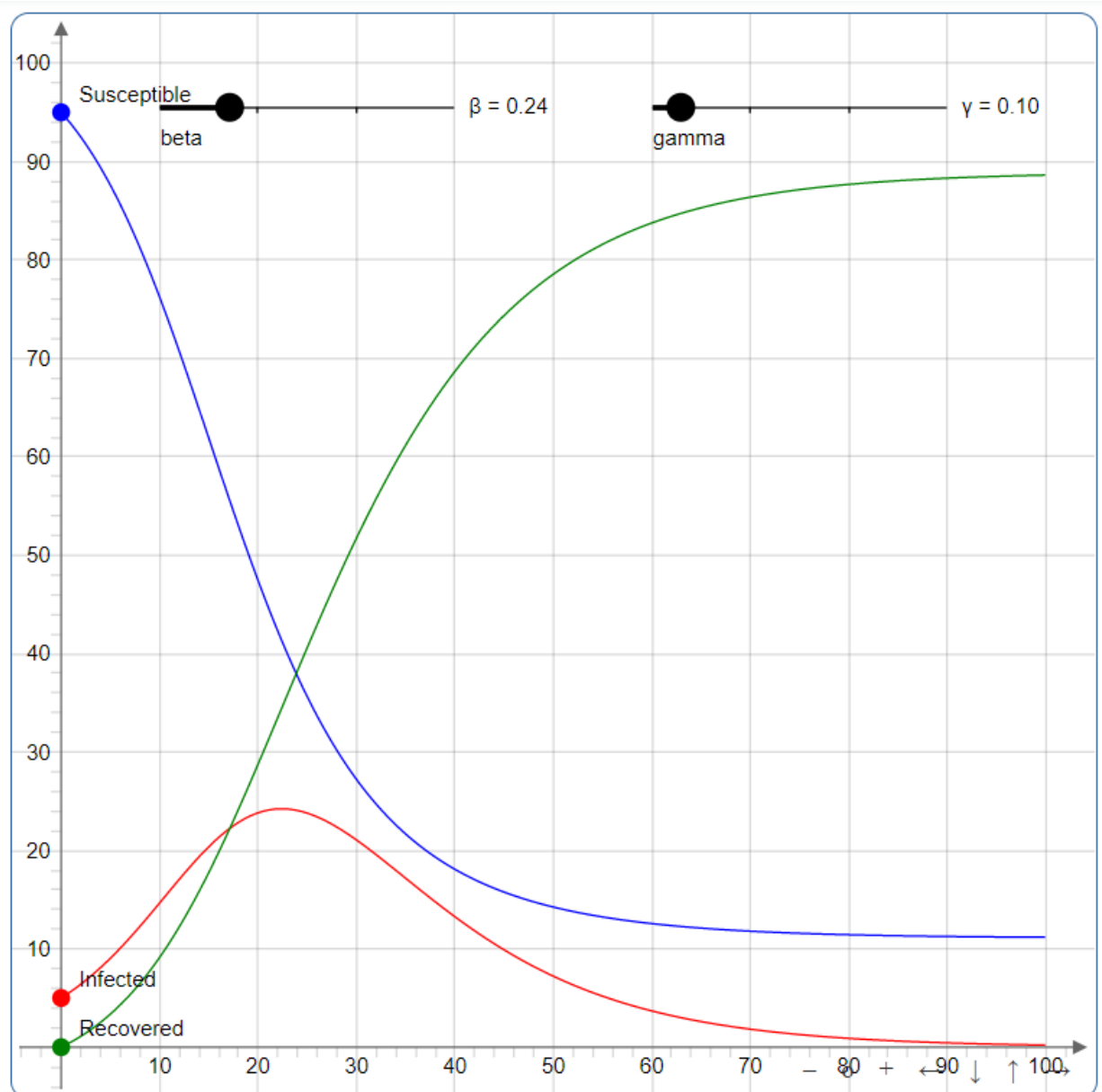
Третье уравнение демонстрирует, что число выздоровевших в единицу времени пропорционально числу инфицированных. Иначе говоря, каждый заболевший через некоторое время должен поправиться.

Таким образом, мы видим, что заболевание в модели SIR развивается по схеме «восприимчивые становятся инфицированными, потом выздоравливают». Условие

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0,$$

описывает неизменность численности популяции (и не учитывает случаи смерти от заболевания).

Графики решения выглядят так



Здесь синяя линия — число восприимчивых индивидов, красная — инфицированных, зеленая — переболевших.

Красный график интенсивности эпидемии, показывающей количество одномоментно болеющих индивидов, определяется параметром:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma},$$

Эта величина получила название «базовый коэффициент воспроизведения». Данное соотношение рассчитывается как ожидаемое количество новых инфекций (эти новые инфекции иногда называют вторичными инфекциями) от одной инфекции в популяции, где все субъекты восприимчивы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

SIR-модель перестает работать в случае необходимости учитывать неоднородность популяции (например, различную плотность населения в разных районах), разные пути передачи инфекции и факторы случайности, значимые в малых популяциях и на начальной фазе распространения заболевания.

Развитием модели SIR стали, в частности, следующие модели:

- **SIRS** — «восприимчивые — инфицированные — выздоровевшие — восприимчивые»: модель описания динамики заболеваний с временным иммунитетом (выздоровевшие индивиды со временем снова становятся восприимчивыми);
- **SEIR** — «восприимчивые — контактные (*Exposed*) — инфицированные — выздоровевшие»: модель для описания распространения заболеваний с инкубационным периодом;
- **SIS** — «восприимчивые — инфицированные — восприимчивые»: модель для распространения заболевания, к которому не вырабатывается иммунитет;
- **MSEIR** — «наделенные иммунитетом от рождения (*Maternally derived immunity*) — восприимчивые — контактные — инфицированные — выздоровевшие»: модель, учитывающая иммунитет детей, приобретенный внутриутробно.

ИСТОЧНИКИ

1. Compartmental models in epidemiology
https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology#Bio-mathematical_deterministic_treatment_of_the_SIR_model
2. Моделирование эпидемий: модель SIR.
<https://polit.ru/article/2020/05/06/sir/>