Отчёт по лабораторной работе №4

дисциплина: Математическое моделирование

Ерёменко Артём Геннадьевич, НПИбд-02-18

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

Цель работы

Построить модель гармонических колебаний с помощью Julia.

Задание

Вариант 4 Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев:

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 15x = 0$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 10\dot{x} + x = 0$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 3\dot{x} + x = \sin(3t)$

На интервале $t \in [0; 55]$ (шаг 0,05) с начальными условиями $x_0 = 0, y_0 = 2$

Выполнение лабораторной работы

1. Колебания без затуханий и без действий внешней силы

1.1. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Изучил начальные условия. Первая формула - это уравнение осциллятора, при котором в системе нет потерь

, поэтому, $\gamma = 0$. Частота колебаний $\omega = \sqrt{15}$. $x_0 = 0, y_0 = 2$. Правая часть уравнения $f(t) = 0$.

1.2. Ввёл начальные условия в код на Julia:

w1 = 15^0.5

g1 = 0*0.5

par1 = [w1,g1]

x0 = [0.0,2.0]

1.3. Решение ищу на интервале $t \in [0; 55]$ (шаг не получается задать, так как в ODEProblem(prob, v0, t, p) t обязательно должно быть парой (t0,tmax)), значит, $t_0 = 0$ – начальный момент времени, $t_{max} = 55$ – предельный момент времени.

1.4. Добавил в программу условия, описывающие время:

t0 = 0.0

```
tmax = 55.0


t = (t0,tmax)
```

1.5. Представил заданное уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка:

```
function dx1(dv,v,p,t)
    w,g = p
    x1,x2 = v
    dv[1] = x2;
    dv[2] = -w.* w.* x1;
end
```

1.6. Поместил начальные условия в решатель системы уравнений:

```
x1 = ODEProblem(dx1,x0,t,par1)
sol1 = solve(x1)
```

1.7. Переписал отдельно x в $y11$, а $\dot{x}$ в $y21$:

```
n1 = size(sol1,2)


y11 = Array{Float16}(undef, n1)
y21 = Array{Float16}(undef, n1)
for i = 1: n1
    y11[i] = sol1[1, i]
    y21[i] = sol1[2, i]
end
```

1.8. Построил фазовый портрет:

```
plot(y11,y21)
```

2. Колебания с затуханием и без действий внешней силы

2.1. Изучила начальные условия. $\gamma = 5$ - потеря энергии. Собственная частота колебаний $\omega = \sqrt{1}$. x_0 и y_0 остались такими же. Правая часть уравнения такая же, как и в п. 1.1.

2.2. Начальные значения переменных одинаковы для всех пунктов задачи. Остальные начальные условия оформил в код на Julia:

```
w2 = 1^0.5
g2 = 10*0.5


par2 = [w2,g2]
```

2.3. Интервал решения такой же.

2.4. Представил заданное уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка:

```
function dx2(dv,v,p,t)
    w,g = p
    x1,x2 = v
    dv[1] = x2;
    dv[2] = -w.* w.* x1 - 2*g.* x2 ;
end
```

2.5. Поместил начальные условия в решатель системы уравнений:

```
x2 = ODEProblem(dx2,x0,t,par2)
sol2 = solve(x2)
```

2.6. Переписал отдельно x в $y11$, а $\dot{x}$ в $y21$:

```
n2 = size(sol2,2)


y12 = Array{Float16}(undef, n1)
```

```
y22 = Array{Float16}(undef, n1)
for i = 1: n2
    y12[i] = sol2[1, i]
    y22[i] = sol2[2, i]
end
```

2.7. Построил фазовый портрет:

```
plot(y12,y22)
```

3. Колебания с затуханием и под действием внешней силы

3.1. Изучила начальные условия. $\gamma = 1.5$ - потеря энергии. Собственная частота колебаний $\omega = \sqrt{1}$. x_0 и y_0 остались такими же. Правая часть уравнения $f(t) = \sin(3t)$.

2.2. Начальные значения переменных одинаковы для всех пунктов задачи. Остальные начальные условия оформил в код на Julia:

```
w3 = 1^0.5
g3 = 3*0.5


par3 = [w3,g3]


function f(t)
    return sin(3 * t)
end
```

2.3. Интервал решения такой же.

2.4. Представил заданное уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка:

```
function dx3(dv,v,p,t)
    w,g = p
```

```
    x1,x2 = v
    dv[1] = x2;
    dv[2] = -w.* w.* x1 - 2*g.* x2 - f(t);
end
```

2.5. Поместил начальные условия в решатель системы уравнений:

```
x3 = ODEProblem(dx3,x0,t,par3)
sol3 = solve(x3)
```

2.6. Переписал отдельно x в $y11$, а $\dot{x}$ в $y21$:

```
n3 = size(sol3,2)


y13 = Array{Float16}(undef, n1)
y23 = Array{Float16}(undef, n1)
for i = 1: n2
    y13[i] = sol3[1, i]
    y23[i] = sol3[2, i]
end
```

2.7. Построил фазовый портрет:

```
plot(y13,y23)
```

4. Сборка программы

4.1. Код целиком:

```
using DifferentialEquations, Plots
#Параметры осциллятора
#x'' + 2*g* x' + w^2* x = f(t)
#w - частота
#g - затухание
```

```
w1 = 15^0.5
g1 = 0*0.5

w2 = 1^0.5
g2 = 10*0.5

w3 = 1^0.5
g3 = 3*0.5



#Правая часть уравнения f(t)
function f(t)
    return sin(3 * t)
end
#/Вектор-функция f(t, x)
#/для решения системы дифференциальных уравнений
#/x' = y(t, x)
#/где x - искомый вектор
function dx1(dv,v,p,t)
    w,g = p
    x1,x2 = v
    dv[1] = x2;
    dv[2] = -w.* w.* x1;
end
function dx2(dv,v,p,t)
    w,g = p
    x1,x2 = v
    dv[1] = x2;
    dv[2] = -w.* w.* x1 - 2*g.* x2 ;
```

```
end
function dx3(dv,v,p,t)
    w,g = p
    x1,x2 = v
    dv[1] = x2;
    dv[2] = -w.* w.* x1 - 2*g.* x2 - f(t);
end
#Точка, в которой заданы
#начальные условия
par1 = [w1,g1]
par2 = [w2,g2]
par3 = [w3,g3]

t0 = 0.0
tmax = 55.0
#Вектор начальных условий
#x(t0) = x0
x0 = [0.0,2.0]
#Интервал на котором будет
#решаться задача
t = (t0,tmax)
#Решаем дифференциальные уравнения
#с начальным условием x(t0) = x0
#на интервале t
#с правой частью, заданной y
#и записываем решение в матрицу x
x1 = ODEProblem(dx1,x0,t,par1)
sol1 = solve(x1)
#Количество столбцов в матрице
```

```
n1 = size(sol1,2)
#Переписываем отдельно
#x в y1, x' в y2
y11 = Array{Float16}(undef, n1)
y21 = Array{Float16}(undef, n1)
for i = 1: n1
    y11[i] = sol1[1, i]
    y21[i] = sol1[2, i]
end
#Рисуем фазовый портрет: зависимость x(x')

plot(y11,y21)

x2 = ODEProblem(dx2,x0,t,par2)
sol2 = solve(x2)
#Количество столбцов в матрице
n2 = size(sol2,2)
#Переписываем отдельно
#x в y1, x' в y2
y12 = Array{Float16}(undef, n2)
y22 = Array{Float16}(undef, n2)
for i = 1: n2
    y12[i] = sol2[1, i]
    y22[i] = sol2[2, i]
end
#Рисуем фазовый портрет: зависимость x(x')

plot(y12,y22)

x3 = ODEProblem(dx3,x0,t,par3)
sol3 = solve(x3)
```

```
#Количество столбцов в матрице
n3 = size(sol3,2)
#Переписываем отдельно
#x в y1, x' в y2
y13 = Array{Float16}(undef, n3)
y23 = Array{Float16}(undef, n3)
for i = 1: n3
    y13[i] = sol3[1, i]
    y23[i] = sol3[2, i]
end
#Рисуем фазовый портрет: зависимость x(x')

plot(y13,y23)
```

4.2. Получил фазовые портреты гармонического осциллятора (см. рис. @fig:001, @fig:002 и @fig:003):

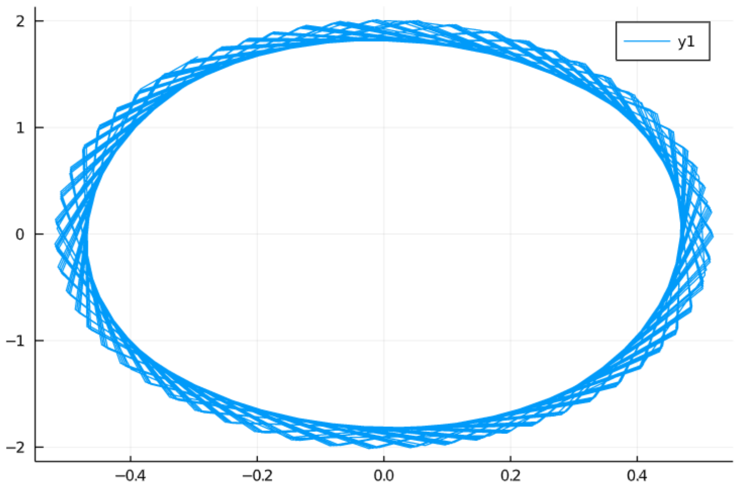

Рис. 0.1: Колебания без затуханий и без действий внешней силы

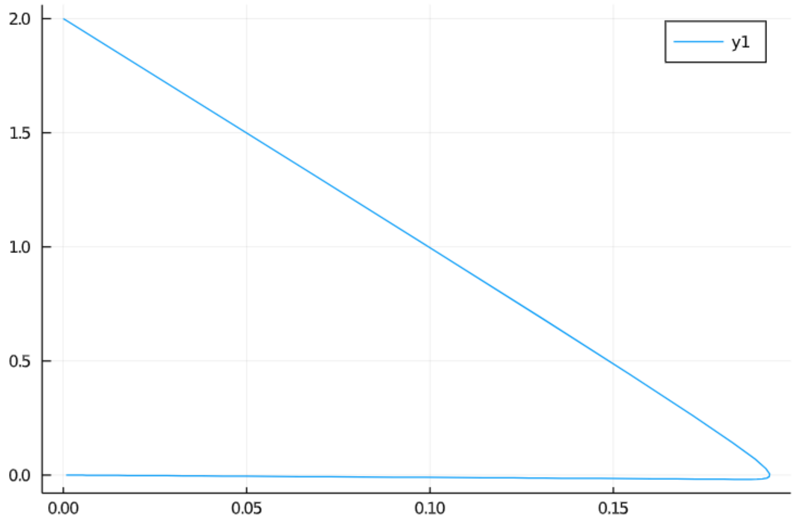

Рис. 0.2: Колебания с затуханием и без действий внешней силы

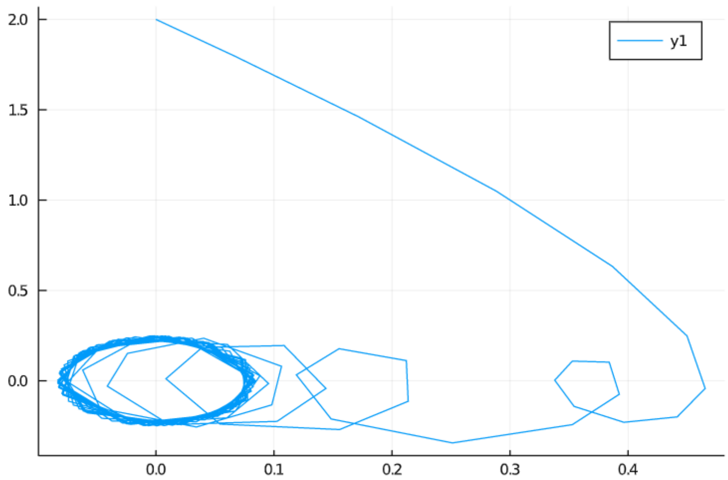

Рис. 0.3: Колебания с затуханием и под действием внешней силы

Выводы

Построил модель гармонических колебаний с помощью Julia.

Ответы на вопросы к лабораторной работе

1. Запишите простейшую модель гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

2. Дайте определение осциллятора

Осциллятор — система, совершающая периодичные колебания.

3. Запишите модель математического маятника

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{g}{L} sin\alpha = 0$$

4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

От дифференциального уравнение 2-го порядка:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Делаем замену:

$$y = \dot{x}$$

Получаем систему уравнений:

$$y = \dot{x}$$

$$\dot{y} = -\omega_0^2 x$$

5. Что такое фазовый портрет и фазовая траектория?

Фазовый портрет — зависимость величин друг от друга. Эти величины также описывают состояние системы.

Фазовая траектория — график нарисованный точками состояний.