UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

"Midtveis"-eksamen i AST1100, 6. oktober 2015, 15.00 – 18.00

Oppgavesettet inkludert formelsamling er på 10 sider

Tillatte hjelpemidler: 1) Angel/Øgrim og Lian: Fysiske størrelser og enheter 2) Rottman: Matematisk formelsamling 3) Elektronisk kalkulator av godkjent type

Konstanter og formelsamling finner du bakerst
Merk: Figurene til oppgavene er ofte på en annen side en selve oppgaven

Hver av de 10 oppgavene i eksamenssettet kan totalt gi 10 poeng slik at maksimal poengsum er 100 poeng.

Vær nøye med å forklare formlene du bruker: når du bruker formler fra formelsamlingen, forklar veldig kort hvorfor du bruker denne formelen og nevn hva symbolene i formelen står for. Selv om svaret er riktig, gies det ikke poeng på en oppgave hvis man ikke viser at man har forstått fysikken bak (dette gjelder spesielt oppgaver hvor svaret er oppitt). Hvis du bruker formler som ikke er oppgitt og som ikke er grunnleggende fysiske formler (dette skulle ikke være nødvendig) så må formlene utledes.
Spørmålene kan besvares på enten bokmål, nynorsk eller engelsk. You may answer these questions in either Norwegian or English.

- **OPPGAVE 1:**
  - Anta at $\vec{r}$ er posisjonsvektoren til Andromedagalaksen med Melkeveien som origo **(se figur neste side)**, altså en vektor som peker fra Melkeveien til Andromeda.
  - Anta at $\vec{e}_r$ er en enhetsvektor som går langs $\vec{r}$ og $\vec{e}_\theta$ en enhetsvektor som er ortogonal på $\vec{r}$.
  - Anta at v_r og v_θ er hastighetskomponentene til Andromeda (i Melkeveiens referansesystem) langs disse enhetsvektorene.
  - Anta videre at vinkelen θ er vinkelen mellom $\vec{r}$ og en eller annen fast referansevektor.

  Finn hastighetskomponentene v_r og v_θ uttrykt kun ved r, θ og de tidsderiverte av disse (**Merk:** $r = |\vec{r}|$). **Hint:** Uttrykk $\vec{r}$ ved enhetsvektorene og finn $\vec{v}$ fra dette. Du kan bruke at

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

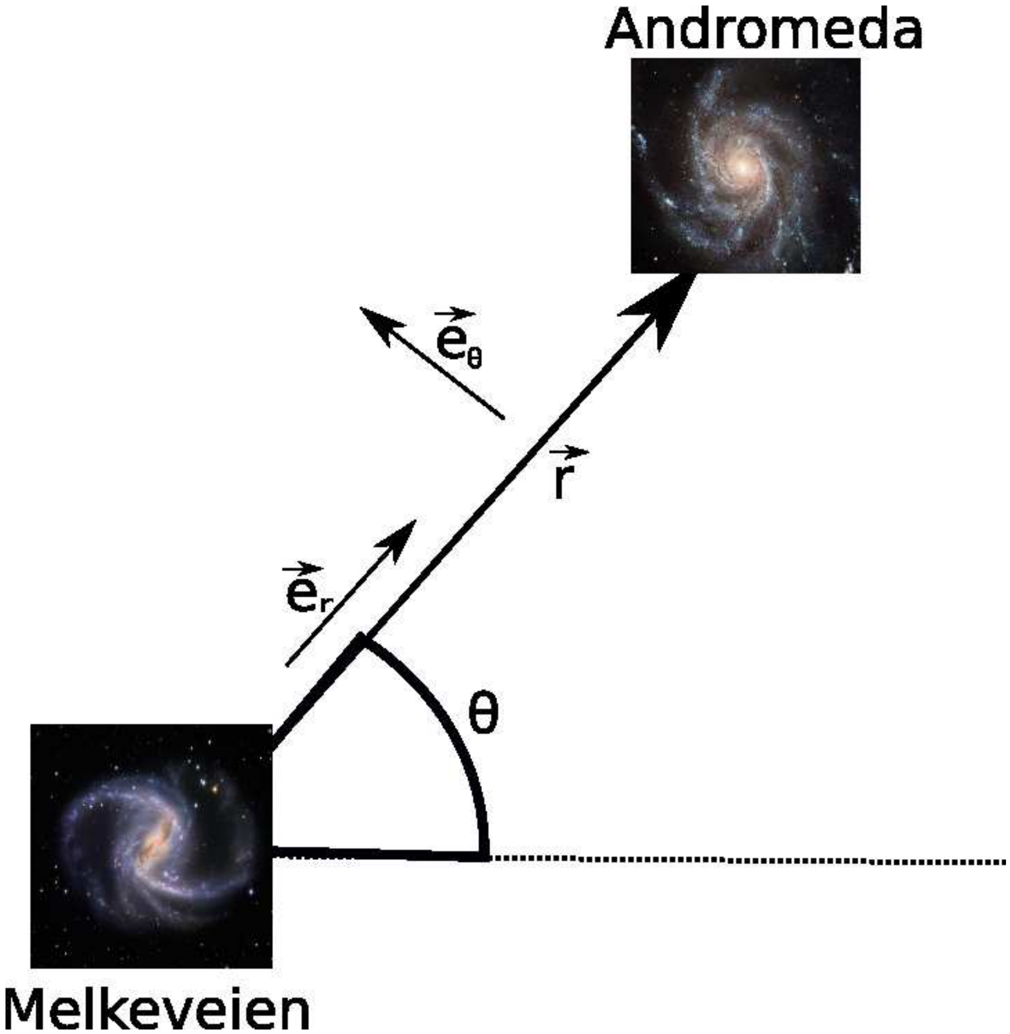

Figure 1: Til oppgave 1 (Merk: bildene er kun for å illustrere oppgaven, ikke faktiske bilder av Melkeveien og Andromeda

- **<u>OPPGAVE 2:</u>** I figur 2 ser vi målinger av radialhastighetene (hastighetskomponenten v_r) (som definert i forrige oppgave) til gass-skyer i økende avstand fra sentrum av Andromeda (vi ser kun den ene siden av galaksen). Den beste modellkurven er også tegnet inn.

  Bruk figuren til å anslå Andromedagalaksens hastighet i forhold til oss og angi om Andromeda er på vei mot oss eller fra oss

  (Forklar hvordan du resonnerer for å komme frem til hastigheten og retningen. For retningen så er det ikke nok å bare nevne fortegnet, det må kort forklares hvorfor et gitt fortegn betyr at at bevegelsen er fra/mot oss).

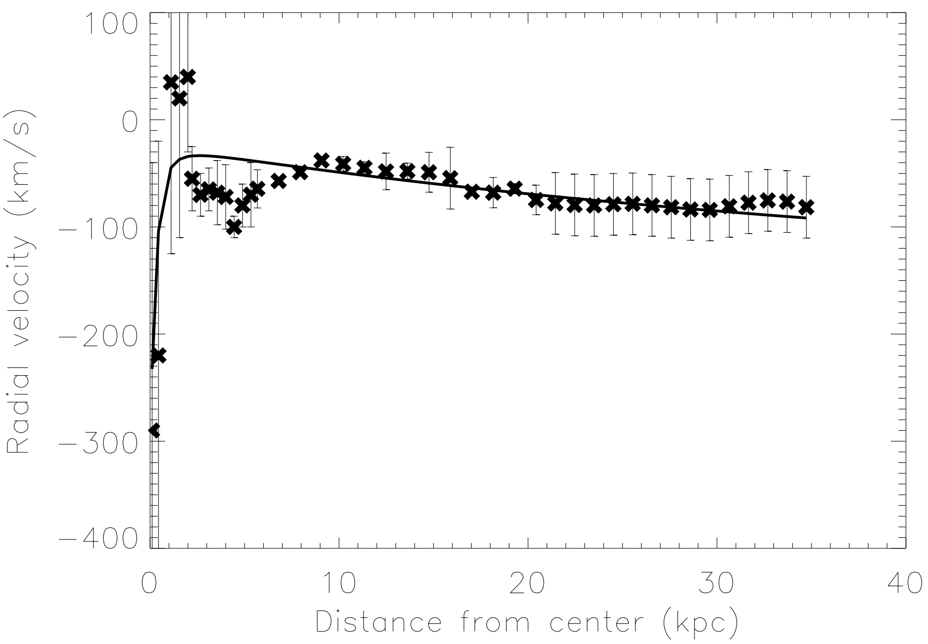

Figure 2: Til oppgave 2

- **<u>OPPGAVE 3:</u> Bruk denne figuren samt figur 3** (som viser stjernetetthet som funksjon av avstand til sentrum av galaksen) **til å forklare hvordan vi kan slutte at det eksisterer mørk materie i Andromedagalaksen.**

  Bruk maksimalt 5 setninger på forklaringen (inkluder formler/utledninger hvis nødvendig). **Merk:** du trenger ikke å forstå i detalj hva enhetene på y-aksen i figur 3 er for å kunne forklare, det holder å vite at det er et mål på stjernetetthet.

- **<u>OPPGAVE 4:</u>** Bruk det siste punktet på hastighetskurven i figur 2 til å gjøre et enkelt anslag av totalmassen til Andromedagalaksen. Anta at de radielle hastighetene i plottet er totalhastigheter (altså at vi ikke har noen tangensiell bevegelse eller inklinasjon)

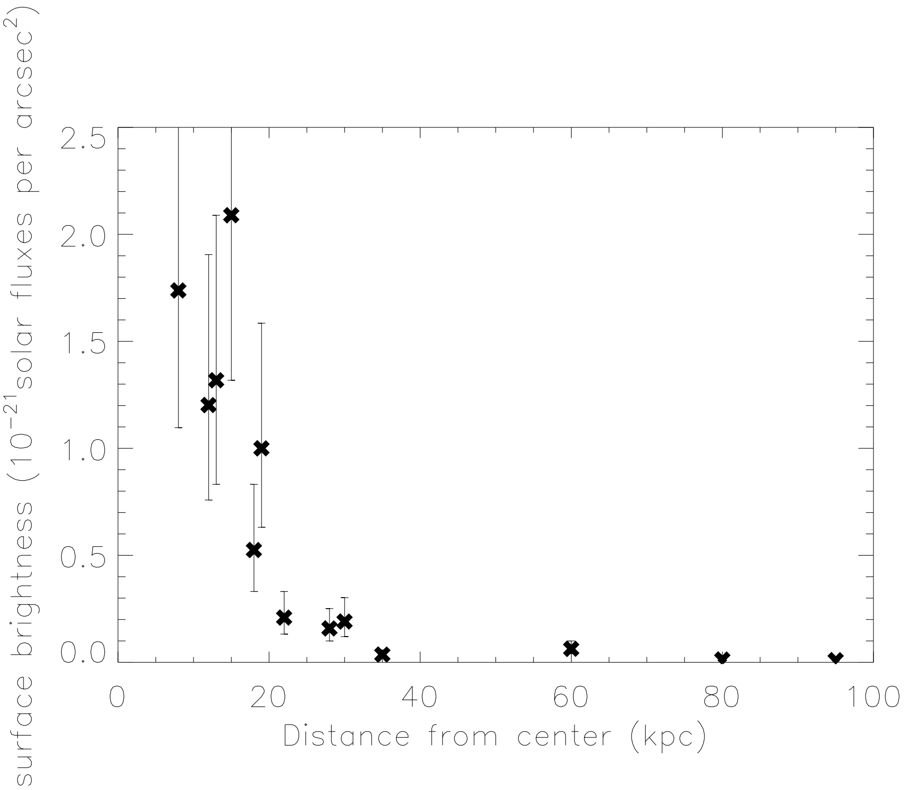

Figure 3: Til oppgave 3

- **<u>OPPGAVE 5:</u>** Diameteren til Andromedagalaksen er omkring 220.000 lysår og avstanden til Andromeda er 2.5 millioner lysår. **Hvor stor utstrekning kan vi se at Andromedagalaksen har på himmelen hvis vi bruker et veldig kraftig teleskop? Gi svaret i bueminutter.** (til sammenlikning: fullmånen har en diameter på himmelen på omkring 30 bueminutter. **Merk:** du vil bli overrasket over svaret)

- **<u>OPPGAVE 6:</u>** Anta at Andromedagalaksen har omkring 2×10^{11} stjerner og hver stjerne i middel har en luminositet som tilsvarer 1/10 av solas luminositet. **Hva er den tilsynelatende lysstyrken (apparent magnitude) til Andromedagalaksen?**

  To korte oppfølgerspørsmål:

1. Med denne lysstyrken så skulle Andromeda (a) kun være synlig med teleskop, (b) såvidt være synlig uten teleskop, (c) være lett synlig uten teleskop, (d) lyse like kraftig som de kraftigste stjernene på himmelen eller (e) lyse kraftigere enn de mest lyssterke stjernene på himmelen? Svar a, b, c, d, eller e utifra tallet du fikk for lysstyrken.
2. Vi vet at i virkeligheten så er Andromeda så vidt synlig uten teleskop. Hvis dette ikke stemmer overens med svaret du fikk, har du noen forslag til hvorfor?

- **OPPGAVE 7:** Du skal nå betrakte Melkeveien og Andromeda som et to-legeme-system og skrive et dataprogram som simulerer hvordan disse galaksene kommer til å bevege seg i fremtiden. Det er mye som tyder på at de kommer til å kollidere og du skal lage en kode som finner betingelsen for om dette skjer.

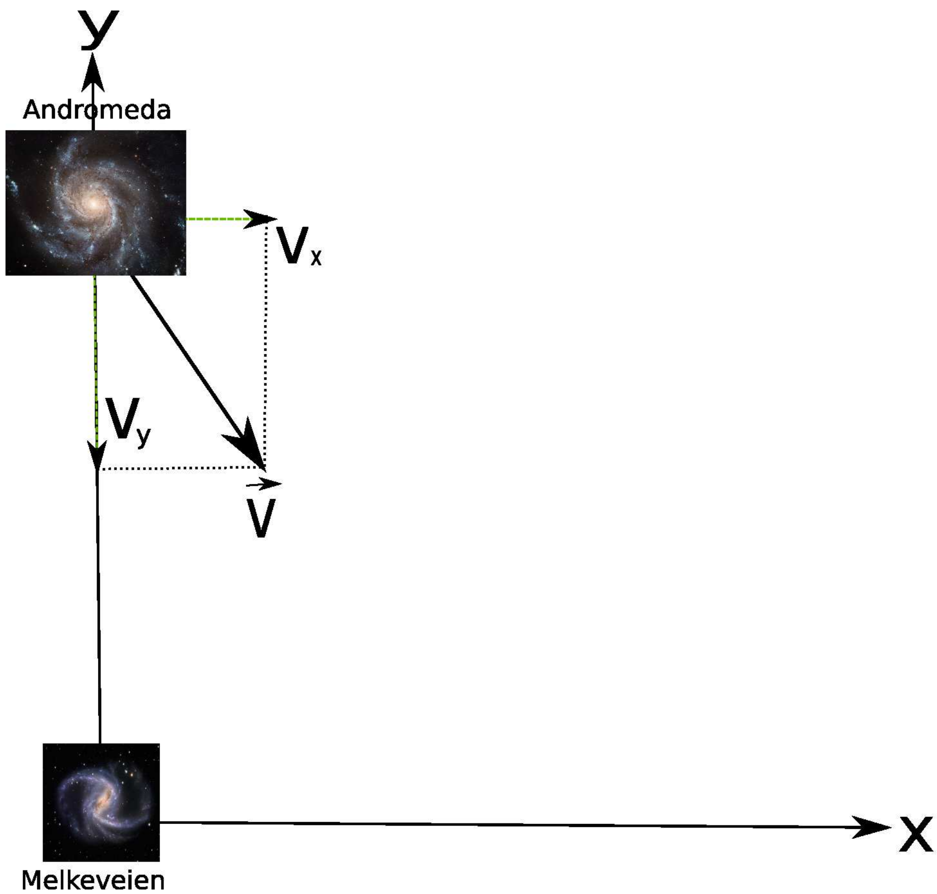

Figure 4: Til oppgave 7

Vi setter nå Melkeveien i origo og Andromeda på den positive y-aksen (se figur 4). Vi antar at all bevegelse skjer i xy-planet. Hastighetskomponenten v_y tilsvarer det som vi tidligere kalte v_r og hastighetskomponenten i x-retning tilsvarer det som vi tidligere kalte v_θ. Vi kjenner ganske godt til v_y, men om det blir kollisjon eller ikke avgjøres av komponenten v_x. Anta at massene til Melkeveien og Andromeda er kjent. Du skal nå finne den største mulige verdien for v_x for at de to galaksene kommer til å berøre hverandre. Anta at begge galakseskivene er sirkulære med diameter på 100.000 lysår for Melkeveien og 220.000 lysår for Andromeda.

Fyll ut de manglende bitene (merket med DEL X) i koden under eller skriv kode fra scratch hvis du foretrekker det: (du kan bruke et hvilket som helst programmeringsspråk eller enkel pseudo-kode)

```
MM = masse_melkevei
MA = masse_andromeda
DM=100000 ly (diameter til melkeveien)
DA=220000 ly (diameter til andromeda)
rx_M = 0 ly (init x-pos melkevei)
ry_M = 0 ly (init y-pos melkevei)
rx_A = 0 ly (init x-pos andromeda)
ry_A = 2.5*10^6 ly (init y-pos andromeda)
vy_A = init_hastighet_vy_Andromeda
vx_A_array = array_av_mulige_vx_verdier_Andromeda
vx_M = 0 init_hastighet_Melkevei
vy_M = 0 init_hastighet_Melkevei
max_t = 5*10^9 yr (tiden vi skal simulere)
G=grav-const
!!! HER KAN DU DEFINERE VEKTORER OG ANDRE STRRELSER HVIS DU OENSKER/TRENGER DET (DEL 1)!!
for vx_A in vx_A_array
!!! KANSKJE TRENGER DU NOE HER? (DEL 2)!!!
    for t = 0, max_t
!!!HER SKAL DU SKRIVE NOEN LINJER KODE (DEL 3)!!!
    endfor t
!!!HER SKAL DU OGSAA SKRIVE LITT KODE(DEL 4)!!!
endfor vx
!!!HER SKAL DU SKRIVE LITT KODE (DEL 5)!!!
!!!her printer du vx-grenseverdien
```

Merk at ikke alle kommer til å trenge å fyll ut alle delene, det avhenger helt av hvordan du strukturerer koden din.

- **OPPGAVE 8:**
  - En rakett blir sendt opp fra Melkeveien (fra jorda) og fra en planet et sted i Andromeda-galaksen.
  - Raketten fra Melkeveien har kurs rett mot Andromeda og raketten fra Andromeda har kurs rett mot Melkeveien.
  - Sett ifra en observatør i Melkeveisystemet så ble begge rakettene sendt opp samtidig.
  - Ved rakettoppskytingene ble klokkene på jorda og klokkene på planeten i Andromeda satt til 0.
  - Bruk den hastigheten v_r som du tidligere fant for Andromeda som hastigheten til Andromedasystemet (fikk du ikke til den oppgaven så bruk en hastighet på 500 km/s som er feil svar).
  - Bruk også at avstanden mellom Melkeveien og Andromeda i det de to rakettene ble skutt opp som $L = 2.5 \times 10^6$ lysår målt fra Melkeveisystemet.

  Målt på klokkene på planeten i Andromeda, når ble raketten på jorda sent ut? Du skal bruke invarians av tidromsavstanden til å løse denne oppgaven. **Du trenger kun å finne absoluttverdien for tidspunktet, ikke fortegnet.**

  Du får en tilleggsopplysning: Målt i Andromedasystemet, så var avstanden mellom Andromeda og Melkeveien i det raketten fra jorda ble skutt opp, $L/\sqrt{1 - v_r^2}$.

- **OPPGAVE 9** Vi kan definere en 4-akselerasjon som

$$A_\mu = \frac{dV_\mu}{d\tau},$$

  hvor V_μ er 4-hastighet. **Forklar kort hvilke egenskaper en 4-vektor må ha og vis kort matematisk hvorfor 4-akselerasjonen faktisk er en 4-vektor.**

- **OPPGAVE 10** Vis at 4-akselerasjonen kan uttrykkes med den vanlige 3-dimensjonale akselerasjonen $\vec{a}$ som

$$A_\mu = \gamma^2[\gamma^2(\vec{v} \cdot \vec{a}), \gamma^2(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{v} + \vec{a}],$$

  hvor $\vec{v}$ er vanlig 3-dimensjonal hastighet og $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$.

Konstanter og uttrykk som kan være nyttige:

Lyshastigheten: $c = 3.00 \times 10^8$ m/s
Plancks konstant: $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s
Gravitasjonskonstanten: $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2
Boltzmanns konstant: $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Stefan Boltzmann konstant: $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$W/m^{2}K^4.
Elektronets hvilemasse: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg
Protonets hvilemasse: $m_p = 1.6726 \times 10^{-27}$ kg
Nøytronets hvilemasse: $m_n = 1.6749 \times 10^{-27}$ kg
Wiens forskyvnigslov: $\lambda_{max} T = 0.0029$ m K
1 eV (elektronvolt) = 1.60×10^{-19} J
Solmassen: $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg
Jordmassen: $M_{jord} = 6 \times 10^{24}$ kg
Solradien: $R_\odot = 6.98 \times 10^8$ m.
Solas tilsynelatende magnitude: $m = -26.7$
Solas luminositet: $L_\odot = 3.827 \times 10^{26}$W
Massen til Saturn: 5.68×10^{26} kg
Middelavstand til Saturn: 1.433×10^{12} m
Temperaturen på solens overflate: 5780 K
Astronomisk enhet: 1AU = 1.5×10^{11} m
Hubblekonstanten: $H_0 = 71$ km/s/Mpc
lysår: 1 ly = 9.47×10^{15} m
parsec: 1 pc = 206 265 AU = 3.27 ly

Formler vi har brukt/utledet i kurset:

$$P^2 = a^3$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

$$\ddot{\vec{r}} + m\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}$$

$$m = G(m_1 + m_2)$$
$$p = h^2/m$$
$$E = \frac{1}{2}\hat{\mu}v^2 - G\frac{m_1 m_2}{r}$$
$$\hat{\mu} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
$$E = \frac{G m_1 m_2}{2p}(e^2 - 1)$$
$$p = a(1 - e^2) \quad \text{(ellipse)}$$
$$p = a(e^2 - 1) \quad \text{(hyperbel)}$$
$$p = 1/2a \quad \text{(parabel)}$$
$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = M\vec{R}$$
$$m_p \sin i = \frac{m_*^{2/3} v_{*r} P^{1/3}}{(2\pi G)^{1/3}}$$
$$\frac{m_p}{m_*} = \frac{v_*}{v_p}$$
$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$
$$\rho(r) = \frac{v^2(r)}{4\pi G r^2}$$
$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + (r/R)^2}$$
$$< K >= -\frac{1}{2} < U >$$
$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$
$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$
$$I(\nu) = \frac{dE}{cos\theta d\Omega dA dt d\nu}$$
$$L = \frac{dE}{dt}$$

$$F = \frac{dE}{dAdt}$$

$$F = \sigma T^4$$

$$n(v)dv = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/(2kT)} 4\pi v^2 dv$$

$$\Delta\lambda_{FWHM} = \frac{2\lambda_0}{c}\sqrt{\frac{2kT\ln 2}{m}}$$

$$m_1 - m_2 = -2.5\log_{10}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$m - M = 5\log_{10}\left(\frac{d}{10\text{pc}}\right)$$

$$\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1\right)$$

$$c_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{rel}} & -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ -v_{\text{rel}}\gamma_{\text{rel}} & \gamma_{\text{rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$V_\mu = \gamma(1, \vec{v})$$

$$< E_K >= \frac{3}{2}kT$$

$$N = \frac{M}{\mu m_H}$$

$$M_J = \left(\frac{5kT}{G\mu m_H}\right)^{3/2}\left(\frac{3}{4\pi\rho}\right)^{1/2}.$$