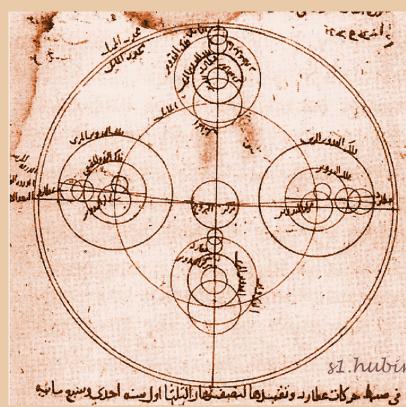


media4.obspm.fr



$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t}$$

5. Fourieranalyse

Fouriertransformasjon og fourieranalyse har klare likhetstrekk med middelalderens bruk av episykler for å beregne hvordan planeter og sola beveget seg i forhold til hverandre. Det forteller oss litt om hvor slagkraftig fourieranalyse er, men samtidig minner det oss om at fourieranalyse iblant kan stenge for en dypere forståelse av fenomenene rundt oss. Flere senere kapitler i denne boka bygger på en god forståelse av fouriertransformasjon.

Kapitlet tar opp følgende temaer: Tidsbilde og frekvensbilde av en funksjon, fouriertransformasjon av en harmonisk, en periodisk og en ikke-periodisk funksjon, kontinuerlig og diskret fouriertransformasjon, omvendt fouriertransformasjon, samplingsteoremet, folding, tid-båndbredde-teoremet. Lesetips finnes på websiden med hjelpefiler til boka.

5.1 Innledende eksempler

5.1.1 Én harmonisk funksjon

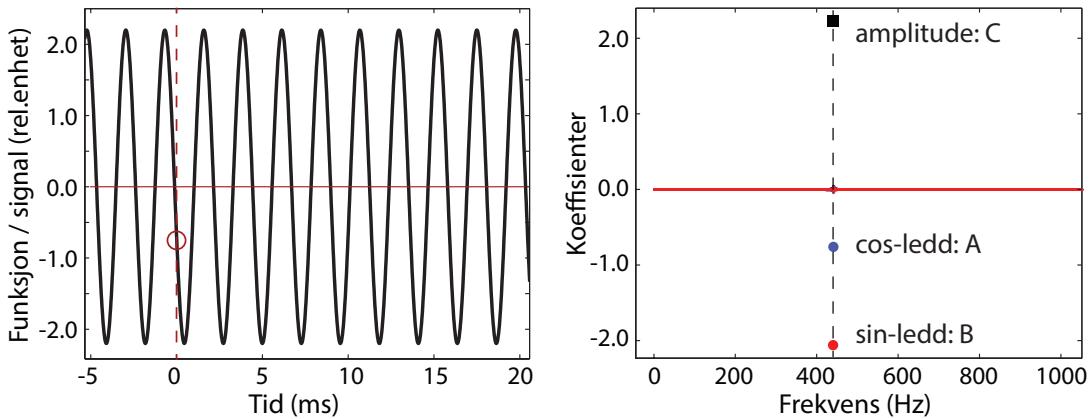
Før vi går løs på detaljer om fouriertransformasjon, er det nyttig å ta et tilbakeblikk på kapittel 2. Vi så der at en harmonisk funksjon kan skrives på flere ulike måter:

$$z(t) = C \cos(\omega t + \phi) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = \Re \{ \mathcal{D} e^{i\omega t} \} \quad (5.1)$$

$\Re \{ \}$ betyr at vi tar realdelen av det komplekse uttrykket i parantesen, og \mathcal{D} er et komplekst tall.

I venstre del av figur 5.1 har vi plottet et utsnitt av en tilfeldig harmonisk funksjon av tid. Amplituden C er 2.2 i en eller annen enhet, og frekvensen $f = 440$ Hz, noe som kommer til uttrykk ved at perioden $T \approx 2.27$ ms $\approx 1/440$ s. Vi valgte faseshiftet $\phi = 110^\circ$. Dette fører til at funksjonen verken er null eller har sin maksimale verdi ved tiden $t = 0$.

De tre parametrerne C , $\omega = 2\pi f$ og ϕ angir funksjonen $z(t) = C \cos(\omega t + \phi)$ entydig. Ved hjelp av omregningsreglene i kapittel 2, kan denne funksjonen også beskrives som $A \cos(\omega t) +$



Figur 5.1: Venstre del viser et utsnitt av en harmonisk funksjon som funksjon av tid ("tidsbilde") og til høyre som funksjon av frekvens ("frekvensbilde"). Se tekst for øvrige detaljer.

$B \sin(\omega t)$. I så fall er $A = C \cos \phi \approx -0.76$ og $B = -C \sin \phi \approx 2.06$. De tre parametrene som da angir funksjonen fullstendig, er A , B og ω .

Vanligvis plotter vi en funksjon av tid slik vi har gjort i venstre del av figur 5.1. Vi kan imidlertid angi funksjonen grafisk også på en helt annen måte, som vist i høyre del av figuren. Her har vi *frekvens* langs x-aksen og koeffisientene A og B langs y-aksen. Hva som er A og hva som er B må vi holde rede på gjennom fargekoding. Siden vi har *tid* langs x-aksen i venstre del av figur 5.1, kaller vi en slik fremstilling for et "tidsbilde" av funksjonen. For høyre del er det frekvens langs x-aksen, og vi kaller derfor denne fremstillingen for et "frekvensbilde". Det er (gitt visse antakelser) nøyaktig samme informasjon i begge bildene. På engelsk brukes betegnelsene "time domain" og "frequency domain".

I frekvensbildet har vi også tegnet inn C . I blant er vi interessert bare i amplituder og ikke faser. Da er $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ nyttig, og C er alltid positiv (eller null). C og ω alene er imidlertid ikke tilstrekkelig for å bestemme funksjonen entydig - faseinformasjonen mangler.

Bruker vi siste versjon i ligning (5.1), kan vi angi funksjonen også på følgende måte:

$$z(t) = \Re \{ \mathcal{D} e^{i\omega t} \} \quad (5.2)$$

Det er viktig å huske at \mathcal{D} er et komplekst tall og at $\mathcal{D} = A - iB$ slik at \mathcal{D} er den detaljen i ligning (5.2) som ivaretar informasjon om fasen til den harmoniske funksjonen.

Dersom du ikke husker alle detaljer fra kapittel 2 ved overgang mellom de ulike skrivemåtene i ligning (5.1), anbefales det at du repeterer den delen nå. Vi kommer i resten av kapittelet i høy grad til å bruke skrivemåten gitt i ligning (5.2), og da er det svært viktig å gjennomskue dette uttrykket fullt ut.

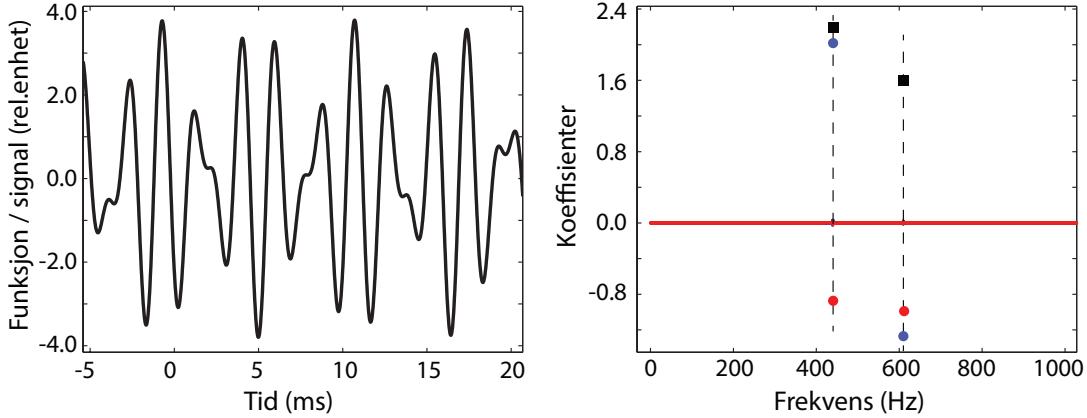
Foreløpig har vi bare forholdt oss til matematikken i kapittel 2. Vi skal om litt vise at vi kan generere diagrammet i høyre del av figur 5.1 helt automatisk ved hjelp av en såkalt fouriertransformasjon. Hensikten med denne innledende delen er først og fremst å få fram hva vi mener med et "tidsbilde" og et "frekvensbilde".

5.1.2 To harmoniske funksjoner

La oss nå se hvordan det går når vi har en sum av to harmoniske funksjoner. Tidsbildet er gitt i venstre del av figur 5.2. Siden vi har generert denne funksjonen selv, vet vi at den er beskrevet ved

$$z(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2). \quad (5.3)$$

der vi kjenner alle seks parametrene som inngår.



Figur 5.2: Utsnitt av en sum av to harmoniske funksjoner med frekvens 440 og 610 Hz, til venstre som funksjon av tid ("tidsbilde") og til høyre som funksjon av frekvens ("frekvensbilde"). Fargekodingen er den samme som i forrige figur. Se tekst for øvrige detaljer.

Vi kan lett skrive funksjonen også på formen

$$z(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t) \quad (5.4)$$

hvor A_1 , A_2 , B_1 og B_2 beregnes ut fra C_1 , ϕ_1 , C_2 og ϕ_2 , og siden vi allerede kjenner ω_1 og ω_2 , kan vi lage et frekvensbilde som svarer til denne funksjonen. Dette er gjort i høyre del av figuren.

En som ikke kjente til hvordan funksjonen ble generert og bare kunne vurdere den ut fra tidsbildet i venstre del av figur 5.2, ville vanskelig kunne si med sikkerhet at det bare er en sum av to harmoniske signaler. Det ville vært krevende å bestemme amplituder og faser.

Ved hjelp av fouriertransformasjon, som er tema for dette kapitlet, vil vi imidlertid ut fra tidsbildet alene kunne beregne, helt automatisk, A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , ω_1 og ω_2 , og vi får bekreftet at det ikke er andre bidrag til signalet. Du aner kanskje nå hvor nyttig fourieranalyse kan være!

Vi minner igjen om skrivemåten basert på Eulers formel og komplekse koeffisienter. For to harmoniske funksjoner ville denne se slik ut:

$$z(t) = \Re \{ \mathcal{D}_1 e^{i\omega_1 t} + \mathcal{D}_2 e^{i\omega_2 t} \} \quad (5.5)$$

Det er viktig å innse at de tre skrivemåtene i ligningene (5.3), (5.4) og (5.5) alle er ekvivalente.

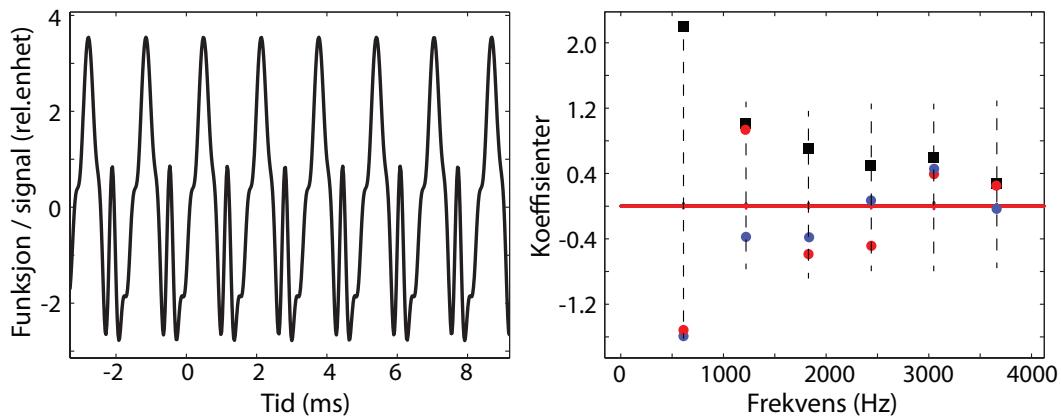
Siden koeffisientene \mathcal{D}_1 og \mathcal{D}_2 kan bestemmes ved fouriertransformasjon, kalles de gjerne for *fourierkoeffisientene* til funksjonen $z(t)$.

5.1.3 Periodiske, ikke-harmoniske funksjoner

I forrige eksempel var signalet ikke-periodisk. I mange deler av fysikken har vi med periodiske funksjoner å gjøre. Et eksempel er vist i figur 5.3. Ved å betrakte denne funksjonen i tidsbildet er det vanskelig å skjønne at et slikt signal kan beskrives på relativt enkelt vis.

Siden vi har generert signalet selv, vet vi hvordan det er bygd opp. Signalet er laget som en sum av seks harmoniske funksjoner, hver av disse beskrevet av et sett med $[A_i, B_i, \omega_i]$ -verdier. For å få et periodisk signal, er de ulike ω_i et heltall n multiplisert med laveste verdi ω_0 kalt ”den fundamentale frekvensen”. I vårt tilfelle var $\omega_0 = 610$ Hz og n hadde verdiene 1, 2, 3, 4, 5 og 6. Høyre del av figur 5.3 viser hvordan frekvensbildet i dette tilfellet ser ut.

Det morsomme er at også i dette tilfellet kunne vi analysert signalet $z(t)$ direkte ved hjelp av en fouriertransformasjon, og funnet alle detaljene om hvordan signalet er bygd opp. Det ville vært nesten umulig å gjøre denne analysen i praksis uten fouriertransformasjon, siden det her er 18 ulike parametere som må bestemmes. Vi kommer tilbake til detaljer om litt.



Figur 5.3: ”Tidsbildet” til venstre viser et utsnitt av en periodisk, ikke-harmonisk funksjon og til høyre er den vist som funksjon av frekvens (”frekvensbildet”). Se tekst for øvrige detaljer.

Det viser seg at jo mer et periodisk signal er forskjellig fra en ren sinus, jo flere harmoniske funksjoner (høyere n -verdier) må benyttes i beskrivelsen.

Vi minner igjen om skrivemåten basert på Eulers formel og komplekse koeffisienter. For en *periodisk* funksjon ville denne se slik ut:

$$z(t) = \Re \left\{ \sum_{n=1}^N D_n e^{in\omega_0 t} \right\}$$

I vårt tilfelle er $N = 6$.

5.1.4 Ikke harmoniske, ikke periodiske funksjoner

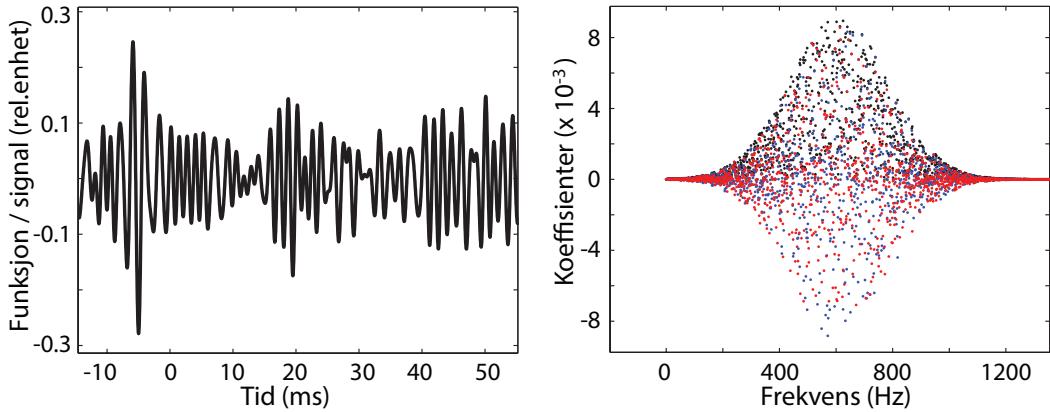
Til slutt tar vi med en pussighet. Vi har sett i de tre forgående eksemplene at det er mulig å lage mange ulike signaler ved å legge sammen harmoniske funksjoner med ulike amplituder og faser. Som vi straks skal se, kan faktisk en *vilkårlig* funksjon, inkludert ikke-harmoniske og

ikke-periodiske funksjoner, skrives som en sum av harmoniske funksjoner, slik:

$$z(t) = \sum_{n=1}^N C_n \cos(\omega_n t + \phi_n) = \Re \left\{ \sum_{n=1}^N D_n e^{i\omega_n t} \right\} \quad (5.6)$$

for en eller annen stor N . I blant må vi ta i bruk et svært stort antall frekvenser i beskrivelsen for å kunne beskrive en funksjon. Vi erstatter da gjerne summasjonen med et integral med en kontinuerlig funksjon $\mathcal{D}(\omega)$ som angir koeffisientene:

$$z(t) = \Re \left\{ \int_{\omega=0}^{+\infty} \mathcal{D}(\omega) e^{i\omega t} \right\} \quad (5.7)$$



Figur 5.4: ”Tidsbildet” til venstre viser en ikke-periodisk, ikke-harmonisk funksjon og til høyre er det vist ”frekvensbildet” av samme funksjon. Se tekst for øvrige detaljer.

I figur 5.4 har vi laget et signal som er bygget opp ved å legge sammen mer enn 3000 harmoniske funksjoner med frekvenser i et bredt bånd sentrert rundt 610 Hz. Amplituden varierer tilfeldig, men de største amplitudene forekommer bare for frekvenser i det brede området nær 610 Hz. Fasene er tilfeldige. Sum-signalet er da både ikke-harmonisk og ikke-periodisk, som indikert i tidsbildet til venstre. En analyse liknende den vi har gjort i de forgående eksemplene gir koeffisienter (og amplituder) som angitt i høyre del av figuren.

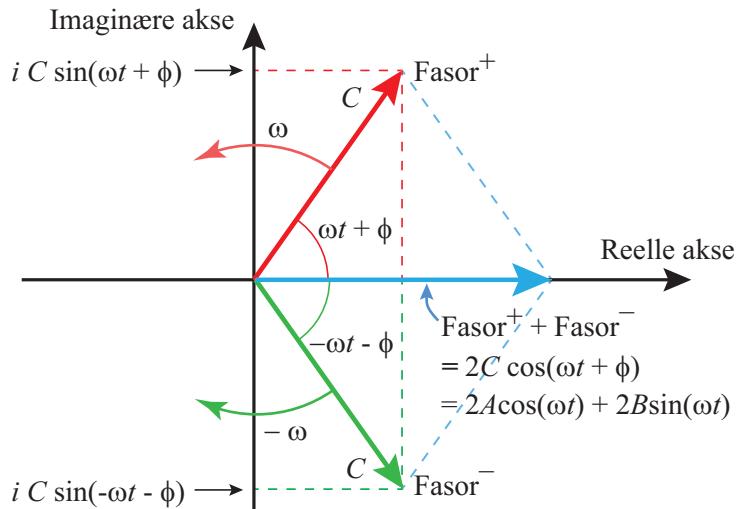
5.2 Reelle verdier, negative frekvenser

Det er et irritasjonsmoment når vi bruker skrivemåten gitt i ligning (5.2), at vi alltid må finne realverdien \Re av det komplekse uttrykket inni parantesen på høyre side. Det finnes et nyttig triks for å slippe unna dette.

Grunnstrukturen i denne ligningen er eksponential-leddet $e^{i\omega t}$ og Eulers formel $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$. Denne relasjonen illustreres ofte med fasorer.

Funksjonen $z(t) = C \cos(\omega t + \phi)$ kan beskrives ved en fasor som ved tiden t har en orientering som vist i figur 5.5. Fasoren roterer i positiv dreieretning med vinkelhastigheten ω , og det er alltid komponenten langs x-aksen (den reelle aksen) som angir verdien til $z(t)$.

Dersom vi nå lager en vektor med samme lengde C , men alltid speilet omkring x-aksen i forhold til den forrige, og roterer med *negativ* rotasjonsretning, vil alltid summen av denne fasoren og den forrige ligge langs x-aksen. Det blir ikke noe imaginært bidrag!



Figur 5.5: Vanlig fasorbeskrivelse (i rødt) av en harmonisk funksjon $C \cos(\omega t + \phi)$ ved tiden t . Det er også tegnet inn en fasor (i grønt) som roterer motsatt vei og alltid er lik den opprinnelige fasoren speilet om x -aksen. Summeres disse vektorene, får vi en vektor (blå) som alltid ligger langs den reelle aksen, men som har dobbelt så stor lengde som det vi er interessert i.

Maksimalt vil summen av de to vektorene være lik $2C$, så vi må inn med en faktor $1/2$ for å korrigere for dette. Sumvektoren har maksimum hver gang $\omega t + \phi$ er et heltalls multippel av 2π .

Vi har da langt på vei vist at

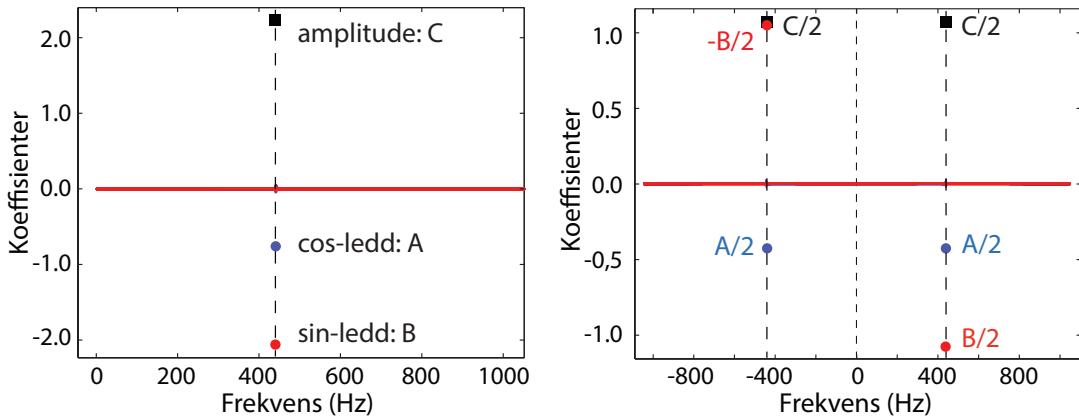
$$C \cos(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} \{ \mathcal{D} e^{i\omega t} + \mathcal{D}^* e^{-i\omega t} \} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{D} e^{i\omega t} + c.c. \} \quad (5.8)$$

hvor stjernen i \mathcal{D}^* og "c.c." står for "complex conjugate".

Vi ser da at ved å innføre "negative frekvenser", kan vi unngå å måtte ta realverdien av den komplekse funksjonen $\mathcal{D} e^{i\omega t}$.

I fourieranalyse brukes sammenhengen gitt i ligning (5.8), slik at det vi sa i de innledende eksemplene var halv-sannheter. Dersom vi faktisk gjør en fourieranalyse av den første harmoniske funksjonen vi så på, vil frekvensbildet se ut som vist i høyre del av figur 5.6. Vi får bidrag både fra +440 og -440 Hz. Koeffisientene foran cos-leddet har samme verdi for positiv og negativ frekvens, men bare halvparten av koeffisienten A i ligning (5.1). Koeffisientene foran sin-leddet, som svarer til den imaginære aksen i fasordiagrammene, har imidlertid skiftet fortegn når vi går fra positiv til negativ frekvens. Også her kommer faktoren $1/2$ inn. Det samme gjelder da selvfølgelig også for C -ene siden $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Alle fourier-analyser av reelle signaler har i prinsippet denne todelingen med positiv og negativ frekvens, der koeffisientene er kompleks konjugerte av hverandre. Litt senere, under overskriften "folding", vil vi se at de negative frekvensene dukker opp på en litt pussig måte i såkalt "Fast Fourier Transform" (FFT).



Figur 5.6: *Frekvensbildet når vi bare opererer med positive frekvenser til venstre. I så fall må vi selv trekke ut realdelen av uttrykket i ligning (5.5) dersom vi bruker denne representasjonen. Ved vanlig fouriertransformasjon av reelle signaler blir koeffisientene $\mathcal{D}(\omega)$ fordelt med halvparten på frekvensen ω og den andre halvparten på frekvensen $-\omega$. Koeffisienten ved negativ frekvens er dessuten den kompleks konjugerte av den tilsvarende koeffisienten ved positiv frekvens.*

5.3 Fouriertransformasjon i matematikken

Vi har hittil i dette kapitlet sett flere eksempler på at kontinuerlige signaler eller funksjoner av tid, kan skrives som en sum (eller integral) av harmoniske funksjoner. Dette gjelder faktisk helt generelt, noe som ble vist av den franske matematikeren og fysikeren Joseph Fourier (1768-1830).¹

Vi skriver gjerne Fourier's relasjon på følgende måte:

La $f(t)$ være en integrerbar funksjon med t (gjerne tid) som kontinuerlig parameter. I fysikk er $f(t)$ ofte en reell funksjon, men matematisk sett kan den gjerne være kompleks. Funksjonen $f(t)$ kan da beskrives som et integral (dvs en slags sum) av harmoniske funksjoner:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.9)$$

Her svarer $F(\omega)$ til fourierkoeffisientene og kalles gjerne den "fouriertransformerte til f ". $F(\omega)$ danner det såkalte frekvensbildet av funksjonen, mens $f(t)$ utgjør tidsbildet.

Sammenligner vi med ligningene (5.6), (5.7) og (5.8) ser vi at vi nå har endret notasjon idet $z(t) \rightarrow f(t)$ og $\mathcal{D}(\omega) \rightarrow F(\omega)$ og vi har utnyttet trikset med å bruke negative frekvenser ved å la integrasjonen gå fra minus til pluss uendelig. Dersom $f(t)$ er en reell funksjon vil $F(\omega) = F^*(-\omega)$.

Utfordringen nå er å finne $F(\omega)$, og det er her Fourier kommer oss til stor hjelp. Fourier introduserte fouriertransformasjonen i analytisk matematikk:

¹Fourier er forøvrig kjent for å ha påvist/forklart drivhuseffekten for global oppvarming i 1824.

Med basis i $f(t)$ kan det beregnes en ny funksjon $F(\omega)$ (den fouriertransformerte til f), på følgende måte:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (5.10)$$

Parameteren ω er vinkelfrekvens dersom t representerer tid. Både t og ω er kontinuerlig variable.

Du har muligens møtt fouriertransformasjon i matematikken tidligere. I matematikken er transformasjonen gjerne knyttet opp til indreprodukt mellom to funksjoner, og vi definerer en basis av sinus og cosinusfunksjoner og anvender Gram-Schmidt på en funksjon for å finne dens Fouriertransformerte. Vi velger en mer praktisk tilnærming i vår sammenheng.

Det kan synes vanskelig å forstå at ligning (14.1) vil fungere som vi ønsker, men la oss da se på noen grunnleggende egenskaper i analytisk matematikk:

De harmoniske funksjonene $\sin(\omega t)$ og $\cos(\omega t)$ danner tilsammen et fullstendig sett integrerbare funksjoner som kan beskrive en hvilken som helst annen integrerbar funksjon. Funksjonen $\sin(\omega_1 t)$ er ortogonal med alle andre $\sin(\omega t)$ der $\omega \neq \omega_1$, og alle $\sin(\omega t)$ er ortogonale med alle $\cos(\omega t)$. Dette kommer til uttrykk gjennom et vanlig uttrykk for delta-funksjonen:

$$\delta(\omega_1 - \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1 - \omega)t} dt \quad (5.11)$$

Vi lar nå $f(t)$ f.eks. være den enkle harmoniske funksjonen i ligning (5.1), men dropper for enkelhets skyld detaljene med å finne realverdien. Vi skriver da:

$$f(t) = \mathcal{D}e^{i\omega_1 t}$$

Setter vi denne inn i ligning (14.1), får vi:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}e^{i\omega_1 t} e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \mathcal{D} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 - \omega)t} dt$$

Vi gjenkjenner den siste delen som deltafunksjonen, og resultatet er at $F(\omega)$ er null overalt unntatt når $\omega_1 = \omega$ hvor $F(\omega_1) = \mathcal{D}$. Vi ser altså at ligning (14.1) fungerer som ønsket i dette tilfellet.

Ligning (14.1) angir det vi kaller den fouriertransformerte av funksjonen $f(t)$. I vår sammenheng gir den oss overgangen fra et tidsbilde til et frekvensbilde av en funksjon.

Ligning (14.2) angir det vi kaller en *invers* fouriertransformasjon. Den gir oss overgangen fra et frekvensbilde tilbake til et tidsbilde av en funksjon.

Legg merke til at i en fouriertransformasjon integrerer vi over tid og det er minustegn i eksponentleddet. I den inverse transformasjonen integrerer vi over frekvens og det er ikke noe minustegn i eksponenten. Legg også merke til at faktoren $1/2\pi$ bare brukes i den ene transformasjonen slik vi har valgt å angi de to ligningene som på sett og vis hører sammen.

Kommentar: Det er flere grunner til at fouriertransformasjon er blitt populær innen matematikk og fysikk. Det finnes mange enkle matematiske relasjoner for harmoniske funksjoner. Det betyr at dersom vi har med en brysom funksjon $f(t)$ å gjøre og ikke vet hvordan vi kan håndtere den direkte, kan vi bruke fouriertransformasjon i en form for mellomregning. Ved å fouriertransformere den brysomme funksjonen ender vi opp med en lineær sum (integral) av rene harmoniske funksjoner. Vi kan så foreta matematiske operasjoner på denne beskrivelsen, og bruke en invers fouriertransformasjon på resultatet for å komme tilbake til det resultatet vi opprinnelig ønsket oss. Fouriertransformasjon brukes derfor i stor utstrekning innen analytisk matematikk, bl.a. ved løsning av differensiellligninger.

Vi vet fra matematikken at det finnes flere komplette sett med funksjoner (f.eks. polynomer), og i ulike deler av fysikken velger vi gjerne et basissett som er mest egnet for de systemene vi betrakter. Fouriertransformasjon er antakelig det aller mest benyttede basissettet av funksjoner (blir dessverre også benyttet i situasjoner hvor det ikke er spesielt gunstig).

5.3.1 Fourierrekker

Et spesialtilfelle innen fouriertransformasjon har særskilt interesse, ikke minst når vi i kapittel 7 skal analysere lyd fra musikkinstrumenter. Dersom $f(t)$ er en periodisk funksjon med periode T , kan fouriertransformasjonen gjøres mer effektiv enn i den generelle transformasjonen i ligning (14.1). Transformasjonen kan angis ved en uendelig, men diskret tallrekke, såkalte fourierkoeffisienter, $\{c_k\}$, der indeksen k er et naturlig tall mellom minus og pluss uendelig (!).

Fourierkoeffisientene beregnes ved å kun integrere over én periodetid T :

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-ik\omega_1 t} dt \quad (5.12)$$

hvor $\omega_1 = 2\pi \frac{1}{T}$, det vil si den vinkelfrekvensen som svarer til en funksjon som har nøyaktig én periode innenfor tiden T . k er et heltall.

Siden $f(t)$ i dette tilfellet er periodisk, kan startpunktet t_0 for integrasjonen i prinsippet velges fritt. Det antas at $f(t)$ er stykkevis glatt og kontinuerlig, og at $\int |f(t)|^2 dt < +\infty$ når integralet går over et intervall med lengde T .

Den inverse transformasjonen er da gitt ved:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega_1 t} \quad (5.13)$$

hvor igjen $\omega_1 \equiv 2\pi/T$ og svarer til frekvensen som har nøyaktig en sinusperiode innenfor intervallet T .

Dersom $f(t)$ er reell, kan det på grunn av symmetrien i sinus- og cosinusfunksjoner enkelt vises at

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)\} \quad (5.14)$$

hvor

$$a_k = c_k + c_{-k} = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(k\omega_1 t) dt \quad (5.15)$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(k\omega_1 t) dt \quad (5.16)$$

Legg merke til faktoren 2 i de to siste uttrykkene! Årsaken til denne faktoren er den enkle erkjennelsen at middelverdien av \cos^2 er $1/2$ i kombinasjon med en faktor 2 som ble forklart da vi ovenfor omtalte bruken av negative frekvenser.

Ligning (5.14) sammen med uttrykkene (5.15) og (5.16) er gull verdt! De viser at ethvert *periodisk signal* med periode T kan skrives som en sum av harmoniske signaler *med eksakt et heltalls svingninger innenfor periodetiden T* .

5.4 Frekvensanalyse

Hittil har det blitt svært mye matematikk og lite fysikk i dette kapitlet. Det er derfor på høy tid å gi et par eksempler på praktisk bruk av fouriertransformasjon.

Fouriertransformasjon brukes mye til såkalt frekvensanalyse hvor vi bestemmer hvilke frekvenskomponenter som finnes i et signal. Frekvensbildet kaller vi da ofte for et “frekvensspekter”. Frekvensspekteret er nyttig fordi det ofte gir et “fingeravtrykk” av de fysiske prosessene som ligger bak signalet vi betrakter.

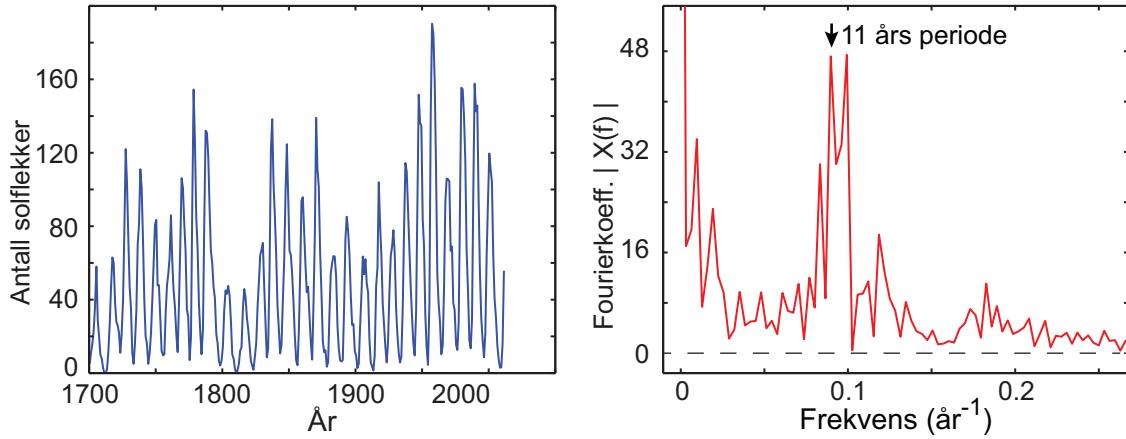
Mengden av solflekker varierer med en periodetid på 11 år blir vi ofte fortalt. Hva er grunnlaget for en slik påstand? Vi kan plotte antall solflekker per år i løpet av en del år. Vi får da en kurve som i venstre del av figur 5.7 der kurven svarer til funksjonen $g(t)$ i teorien ovenfor. Dette er det såkalte “tidsbildet”.

I høyre del av figur 5.7 er det vist et utdrag av resultatene etter en fouriertransformasjon av dataene i venstre del. Egentlig er resultatene etter en fouriertransformasjon komplekse tall. Men dersom vi ikke er interessert i å få ut informasjon av typen $A \cos(\omega t)$ og $B \sin(\omega t)$ hver for seg for de ulike frekvensene, men heller er interessert i amplituden $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, velger vi å plotte absoluttverdien av de komplekse tallene. Det er absoluttverdiene som er plottet i høyre del av figur 5.7.

Toppene omrent midt i figuren svarer til en harmonisk funksjon med frekvens om lag 0.09 eller 0.10 per år. Siden en frekvens på 0.09 - 0.10 per år svarer til en periodetid på omrent 10 - 11 år, får vi en fin stadfestning på at solflekkene i de 300 årene som er analysert, har en betydelig periodisitet ved 10 - 11 års periodetid. Samtidig viser støyen i diagrammet at det er en betydelig dårligere definert periodetid enn det vi f.eks. finner i bevegelsen til en pendel!

I denne boka bruker vi ofte fouriertransformasjon for å analysere lyd. Eksempelvis viser figur 5.8 et tidsbilde og et frekvensspekter for et lydsignal fra en tverrfløyte. Også i denne figuren er relative amplituder i frekvensspekteret angitt. Vi mister da faseinformasjonen, men “styrken” på ulike frekvenskomponenter kommer godt fram.

Spekteret består i hovedsak av en rekke topper med litt ulik høyde. Toppenes plassering har en viss lovmessighet. Det finnes en frekvens f_0 (burde kanskje heller vært kaldt f_1), den såkalte *grunntonen*, slik at de resterende linjene i en gruppe av linjer tilnærmet har frekvensene



Figur 5.7: Venstre del viser antall solflekker som dukket opp hvert år gjennom de siste tre hundre år. Høyre del viser et utdrag fra den tilsvarende fouriertransformerte funksjonene (absoluttverdiene av $\{X_k\}$). Solflekk-dataene er hentet 30.1.2012 fra <http://sidc.be/DATA/yearssn.dat>

$k f_0$, der k er et heltall. Vi sier at frekvensene $k f_0$ for $k > 1$ er *harmoniske av grunntonen*, og vi omtaler dem som "overtoner".

Frekvensspekteret viser at når vi spiller fløyte, vil lufta ikke svinge på en harmonisk måte (som en ren sinus). Signalet er periodisk, men har et annet tidsforløp (form) enn en ren sinus. Et periodisk signal som ikke er sinusformet (harmonisk) vil automatisk føre til overtoner i frekvensspekteret. Det er et resultat av ren matematikk.

Grunnen til at det ikke blir en ren sinus er at den fysiske prosessen som er involvert når lyden dannes er komplisert og turbulens inngår. Det er ingen grunn til at denne prosessen skulle ende opp i et matematisk perfekt harmonisk lydsignal. For periodiske svingninger med et tidsforløp svært ulik en ren sinus, blir det mange overtoner. Øret vil fange opp dette som at lyden har en annen klang enn om det var få overtoner.

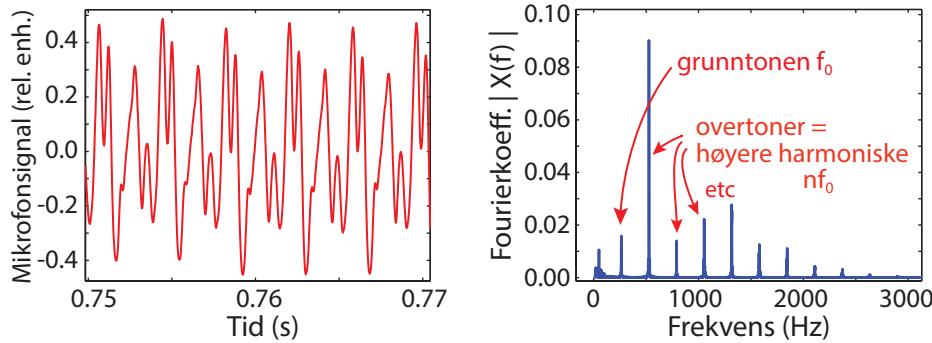
Ulike instrumenter kan karakteriseres ved frekvensspekteret av lyden de genererer. Noen instrumenter gir lite overtoner/harmoniske, mens andre (f.eks. obo) gir mange!

Frekvensspekteret kan benyttes som utgangspunkt også ved syntese av lyd: Siden vi kjenner intensitetsfordelingen i frekvensspekteret til fløyta, kan vi i prinsippet starte med denne fordelingen og foreta en invers fouriertransformasjon for å generere lyd som høres ut omtrent som en fløyte.

Det må likevel bemerkes at vårt inntrykk av lyd ikke bare bestemmes av frekvensspekteret for et vedvarende lydsignal, men også av hvordan lyden starter og dør ut. I den sammenhengen er fouriertransformasjon til lite hjelp. Wavelettransfomasjon av den typen vi tar opp senere i boka, er mye mer egnet for en slik analyse.

En liten detalj til slutt: I figur 5.8 ser vi også en linje ved en frekvens nær null. Det er en topp ved 50 Hz, som er nettfrekvensen på lysnettet. Dette signalet har på et eller annet vis sneket seg inn sammen med lyden fra fløyta, kanskje ved at elektronikken har plukket opp elektriske eller magnetiske felter et sted i signalgangen.

Det er viktig å kunne identifisere linjer i et frekvensspekter som svarer til grunntone og harmoniske, og hvilke linjer som ikke passer inn i et slikt løp.



Figur 5.8: Eksempel på et tidsbilde og et frekvensbilde (frekvensspekter) av lyd fra en tverrfløyte. I frekvensbildet er amplitudeverdier vist (absoluttverdier av $\{X_k\}$).

5.5 Diskret fouriertransformasjon

En generell fouriertransformasjon innen analytisk matematikk gitt i ligning (14.1) er basert på en kontinuerlig funksjon $f(t)$ og en kontinuerlig fourier-koeffisient-funksjon $F(\omega)$.

I vår moderne tid er eksperimentelle og computergenererte data bare kvari-kontinuerlige. Vi sampler en kontinuerlig funksjon, og ender opp med en funksjon bare beskrevet gjennom et endelig antall datapunkter. Både solflekkdataene og lyd-dataene vi nettopp behandler, var basert på et endelig antall datapunkter. Anta at dette er N datapunkter registrert (“samplet”) etter hverandre med en fast tidsdifferanse Δt . Total tid for datasamplingen er T og samplingsfrekvensen er $f_s = 1/\Delta t$. Datapunktene har verdiene x_n hvor $n = 0, \dots, N - 1$. Tidspunktene som svarer til disse datapunktene er da gitt som:

$$t_n = \frac{T}{N}n \text{ for } n = 0, 1, \dots, (N - 1)$$

Ut fra de N tallene vi startet ut med, kan vi ikke generere mer enn N antall lineært uavhengige tall gjennom en fouriertransformasjon. Integralene i ligning (14.1) og (14.2) må da erstattes med sumasjonstegn og sumasjonen går over et endelig antall datapunkter både i tidsbildet og frekvensbildet.

En bieffekt av diskret fouriertransformasjon er at når vi fouriertransformerer N punkter x_n som er beskrevet for tidene t_0, t_1, \dots, t_{N-1} , blir resultatet i praksis det samme som om vi hadde et periodisk signal som var definert fra minus til pluss uendelig, med periodetid T .

Vi har sett i teorien for fourierrekker at for periodiske signaler inngår bare diskrete frekvenser i beskrivelsen. Disse er:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T}k \text{ for } k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Når vi bare beskriver funksjonen i N tidspunkt, er det som nevnt ikke lenger dekning for å beskrive frekvenser for uendelig mange diskrete frekvenser. Det er bare mulig å operere med N frekvenser, nemlig

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T}k \text{ for } k = -(N-1)/2, -(N-1)/2 + 1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, (N-1)/2$$

Merk at den høyeste frekvensen som inngår er

$$f_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi} = \frac{1}{2} \frac{N-1}{T} = \frac{1}{2} \frac{N-1}{N} f_s \approx \frac{f_s}{2}$$

for store N . Her er f_s samplingsfrekvensen.

I den opprinnelige fouriertransformasjonen inngikk $e^{-i\omega t}$ i integranden. Ved N diskrete datapunkter blir dette ifølge detaljene ovenfor erstattet med følgende uttrykk:

$$-i\omega t \rightarrow -i\omega_k t_n = -i \frac{2\pi}{T} k \cdot \frac{n}{N} T = -i \frac{2\pi k n}{N} \quad (5.17)$$

Den diskrete fouriertransformasjonen er da gitt ved:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi}{N} kn} \quad (5.18)$$

for $k = 0, \dots, N-1$. Dersom settet x_n består av verdier gitt i tidsdomenet, vil X_k være tilsvarende sett verdier i frekvensdomenet.

Merk at vi her antyder at k går fra 0 til $N-1$, som svarer til frekvenser fra 0 til $\frac{N-1}{N} f_s \approx f_s$, mens vi ovenfor lot k være mellom $-(N-1)/2$ og $+(N-1)/2$ svarende til frekvenser fra $\approx -f_s/2$ til $\approx +f_s/2$. Siden vi opererer bare med sinus- og cosinusfunksjoner med et helt antall bølgelengder, blir det faktisk hipp som happ om vi bruker det ene settet eller det andre. Vi kommer tilbake til dette siden når vi omtaler folding (speiling).

Merk også faktoren $1/N$ i dette uttrykket. Denne faktoren er gunstig ved varianten av fouriertransformasjon vi skal bruke, for da får vi en enkel sammenheng mellom fourierkoeffisienter og amplituder som i de innledende delene av kapitlet.

Gjennom uttrykket i ligning (5.17) har vi da vist at uttrykket for den diskrete fouriertransformasjonen i ligning (5.18) rett og slett er basert på det samme uttrykket som vi hadde i den opprinnelige fouriertransformasjonen. Forskjellen er at vi i det diskrete tilfellet opererer med en funksjon beskrevet i N punkter, og at bare N frekvenser inngår i beskrivelsen.

Den inverse (omvendte) diskrete fouriertransformasjonen ser da naturlig nok slik ut:

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi}{N} kn} \quad (5.19)$$

for $n = 0, \dots, N-1$.

5.5.1 Fast Fourier Transform (FFT)

Diskret fouriertransformasjon er vårt valg når fouriertransformasjon brukes i denne boka. Vi kunne ha skrevet et program selv for å gjennomføre prosedyren gitt i ligning (5.18) og (5.19), men det skal vi ikke gjøre. Det ville bli et lite effektivt program dersom vi brukte uttrykkene direkte. Det finnes i dag en svært effektiv algoritme for diskret fouriertransformasjon som benytter symmetrien i sinus og cosinus på en særdeles effektiv måte for å redusere antall regneoperasjoner. Effektiviteten har medvirket sterkt til at fouriertransformasjon blir brukt mye i mange fag, ikke minst fysikk.

Algoritmen ble visstnok oppdaget allerede i 1805 av Carl Friedrich Gauss, men ble glemt (den var ikke så interessant så lenge vi ikke hadde datamaskiner). Algoritmen ble i 1965 lansert av J.W.Cooley og J.Tukey som da arbeidet ved Princeton University. Deres fire sider artikklet: "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series." i Math.Comput. 19 (1965) 297-301, hører til de "klassiske" artiklene som forandret fysikken.

I Matlab og Python bruker vi Cooley og Tukey's algoritme når vi anvender *fft* ("Fast Fourier Transform") eller *ifft* ("Invers Fast Fourier Transform"). Ved denne metoden er det en fordel at antall punkter N er eksakt et av tallene 2^n hvor n er et heltall. Da får vi benyttet fullt ut symmetrien i sinus- og cosinusfunksjonene.

5.5.2 Speiling / folding

Ved bruk av FFT må vi passe på en spesiell detalj. Vi så tidligere at det var gunstig å innføre negative frekvenser i fouriertransformasjon. For en kontinuerlig fouriertransformasjon av en reell funksjon $f(t)$ så vi at $F(\omega_0) = F^*(-\omega_0)$, det vil si at den fouriertransformerte ved en vinkelfrekvens er den kompleks konjugerte av den fouriertransfomerte ved den negative vinkelfrekvensen. Det samme gjelder egentlig også ved FFT. Datapunktene etter en fouriertransformasjon med FFT er likevel ordnet annerledes. Den nederste halvdelen av frekvensaksen, den som representerer negative frekvenser, er rett og slett flyttet slik at den ligger over (til høyre for) de positive punktene langs frekvensaksen (se figur 5.9).

Når vi foretar en invers fouriertransformasjon med IFFT, forventes det at de negative frekvensene er plassert på akkurat samme måte som de er etter en enkel FFT.

5.6 Konkrete viktige detaljer

5.6.1 Hvert enkelt punkt

I ligning (5.18) er det matematisk sett bare snakk om et sett $\{x_n\}$ med N tall som kan transformeres til et nytt sett X_k med N tall og tilbake igjen. Alle tallene er ubenevnte.

Det er vi som brukere som må knytte fysikk til tallene. La oss utforske hva indeksene k , n og størrelsen N representerer.

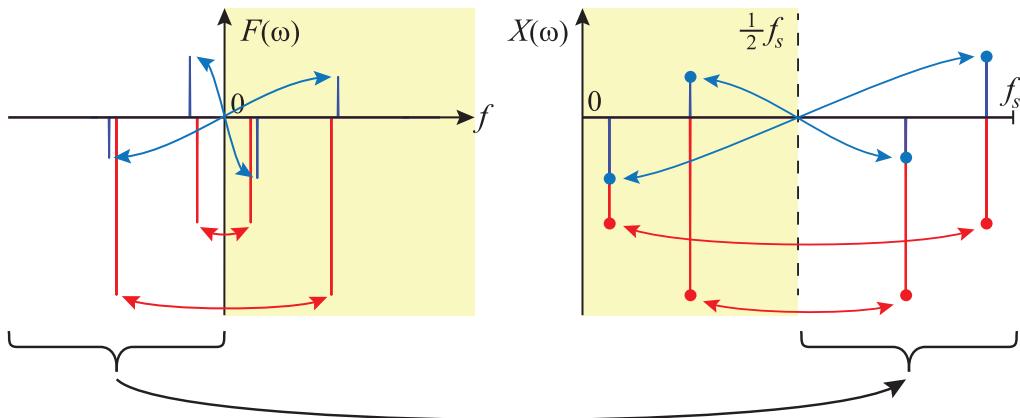
Vi tenker at vi foretar N registreringer av en fysisk størrelse x_n over en begrenset tid T (et enkelt eksempel er gitt i venstre del av figur 5.10). Dersom registreringene foretas med et mellomrom i tid lik Δt , sier vi at *samplingsfrekvensen* er $f_s = 1/\Delta t$. Sammenhengen mellom størrelsene er som følger:

$$N = T f_s = T / \Delta t.$$

Dette er en viktig relasjon som vi bør kunne utenat!

Merk at hver sampling svarer til et helt lite tidsintervall Δt . I vår figur er det signalet i *begynnelsen* av hvert tidsintervall som registreres.

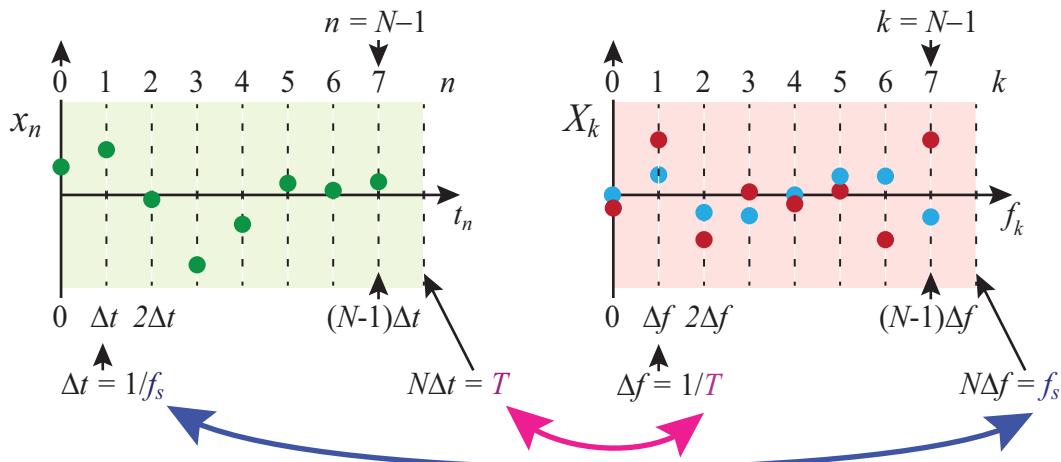
Fouriertransformasjonen i ligning (5.18) gir oss frekvensbildet (høyre del av figur 5.10). Frekvensbildet består av N komplekse tall, og vi må kjenne til hva disse representerer for å kunne utnytte fouriertransformasjon ordentlig! *Her følger viktige detaljer:*



Venstre del: Et fourierspekter ved kontinuerlig fouriertransformasjon av et signal som varer ved i det uendelige, inneholder alle frekvenser mellom $-\infty$ og $+\infty$, men det er en "speiling/folding" og kompleks konjugering omkring frekvensen null. Reell del av den fouriertransformerte funksjonen er markert i rødt, den imaginære i blått. (Vi har forskjøvet de reelle i forhold til de imaginære punktene noe i venstre del for at stavene skulle bli lett synlig.)

Høyre del: Ved diskret fouriertransformasjon av et signal er informasjonen for negative frekvenser (venstre del av figuren) flyttet opp til området over halve samplingsfrekvensen. På grunn av symmetrier i sinus og cosinusfunksjoner, svarer dette faktisk også til signaler med frekvensene $f_s - |f_{negativ}|$. Av denne grunn får vi også ved FFT en speiling/folding og kompleks konjugering ved analyse av reelle signaler, men denne gang omkring halve samplingsfrekvensen $f_s/2$. Den delen av diagrammene som har en lett bakgrunnsfarge, inneholder all informasjon i det fouriertransformerte signalet av en reell funksjon siden den øvrige halvparten bare er den kompleks konjugerte av den første.

- Den første frekvenskomponenten angir *middelverdien* av alle målingene (svarer til frekvensen 0). Imaginærverdien er alltid null (dersom f er reell).
- Den andre frekvenskomponenten angir hvor mye vi har av en harmonisk bølge med periodetid T lik hele samplingstiden. Komponenten er kompleks som gjør at vi kan finne amplitude og fase for denne frekvenskomponenten.
- Amplituder beregnet kun ved å bruke nedre halvpart av frekvensspekteret må multipliseres med 2 (pga foldingen) får å gi korrekt resultat. Dette gjelder ikke for første komponent (middelverdien, frekvens null).
- De neste frekvenskomponentene angir bidrag fra harmoniske bølger med nøyaktig 2, 3, 4, ... perioder innenfor den totale samplingstiden T .
- De forrige punktene forteller oss at forskjellen i frekvens fra ett punkt i et frekvensspekter til nabopunktet er $\Delta f = 1/T$.
- Forutsatt at antall samlinger N er et partall, vil første komponent etter midten av alle komponenene være rent reell. Dette er komponenten som svarer til en harmonisk svingning med $N/2$ hele perioder i løpet av den totale samplingstiden T . Dette svarer til en frekvens lik halvparten av samplingsfrekvensen f_s nevnt ovenfor.



Figur 5.10: En funksjon samplet i $N = 8$ tidspunkt (til venstre) sammen med fouriertransforsjonen til funksjonen (til høyre) som består av $N = 8$ komplekse tall. Realverdiene er gitt ved røde sirkelskiver og imaginærverdiene ved blå. Hvert punkt svarer til et lite tids- og frekvensintervall (hhv i venstre og høyre del). Merk sammenhengen mellom samplingsfrekvensen f_s og Δt og i særdeleshet sammenhengen mellom T og Δf . For å få en høy oppløsning i frekvensangivelsen i frekvensspekteret, må vi altså sample et signal i tilstrekkelig lang tid T .

- Alle de resterende frekvenskomponentene er kompleks konjugerte av komponenter med lavere frekvens (forutsatt at $f(t)$ er reell). Det er en “speiling”/“folding” omkring punktet like over midten av tallene (speiling omkring halve samplingsfrekvensen). Vi får ikke noe ny informasjon fra disse tallene, og vi pleier derfor ofte å droppe dem fra frekvensspekteret.
- Siden speilingen skjer om punktet like *etter* midten, blir ikke første punkt speilet (punktet som svarer til gjennomsnittsverdien, frekvensen 0).
- Den siste frekvensen i et frekvensspekter er $f_s(N - 1)/N$ siden også frekvensintervallene er halvåpne.

Man kan lure på hvorfor vi overhodet regner ut de øverste $N/2 - 1$ frekvenskomponentene. Men disse svarer til “negative frekvenser” i den opprinnelige formalismen (ligning (14.1)). Så lenge f er reell, er disse komponentene av liten / ingen verdi for oss.

Dersom f derimot var kompleks, slik noen bruker fouriertransformasjon, har disse siste nær halvparten av komponenter like stor verdi for oss som de øvrige.

Dette har sammenheng med Eulers formel og fasorer. Så lenge vi bare ser på realverdien av en fasor, svarer det til $\cos(\omega t + \phi)$ -leddet, og det er identisk uansett om ω er positiv eller negativ. Vi kan bare skjelne mellom positiv og negativ rotasjons hastighet for en fasor dersom vi tar med både real- og imaginærdelen av et komplekst tall.

5.6.2 Samplingsteoremet

Som nevnt ovenfor svarer den øverste halvparten av fourierkoeffisientene til negative frekvenser i den opprinnelige formalismen. Vi antydet likevel at det på grunn av symmetriene i sinus- og cosinusfunksjonene også er mulig å betrakte disse øverste koeffisientene som koeffisienter for frekvenser over halve samplingsfrekvensen (bortsett fra at vi da får problemer med faktoren

1/2 nevnt tidligere).

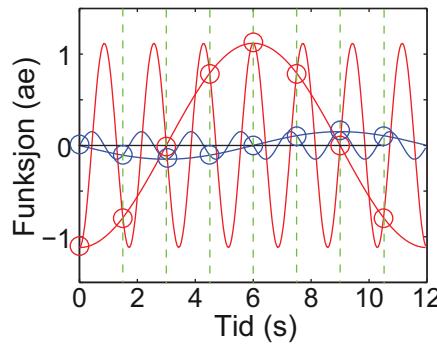
Vi kan illustrere dette ved å plukke ut to sett fourierkoeffisienter fra en fouriertransformasjon av et vilkårlig signal. Vi har valgt å ta med de reelle koeffisientene for $k = 1$ (røde kurver) sammen med $k = N - 1$ og de imaginære koeffisientene for $k = 1$ og $k = N - 1$ (blå kurver). Resultatet er vist i figur 5.11.

Funksjonene er tegnet ved “alle” tidspunkt, men *tidspunktene der den opprinnelige funksjonen faktisk er definert* er markert med vertikale stiplede linjer. Vi ser da at funksjonene med svært forskjellig frekvens likevel har nøyaktig samme verdi i disse tidspunktene, selv om verdiene utenfor disse tidspunktene er vidt forskjellige. Dette er i samsvar med ligning

$$e^{i\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-i\frac{2\pi}{N}k(N-n)} \quad (5.20)$$

for k og $n = 1, \dots, N - 1$ i det tilfelle at disse indeksene generelt går fra 0 til $N - 1$.

De to funksjonene $\cos(\omega_1 t)$ og $\cos((N - 1)\omega_1 t)$ er altså identiske i de diskrete tidspunktene $t \in \{t_n\}$ beskrivelsen vår er gyldig (ω_1 svarer til én periode i løpet av tiden vi har samplet signalet.). Tilsvarende gjelder for $\cos(2\omega_1 t)$ og $\cos((N - 2)\omega_1 t)$ og videre for $\cos(3\omega_1 t)$ og $\cos((N - 3)\omega_1 t)$ osv. Da er det egentlig liten vits i å ta med den øvre delen av et fourierspekter, siden all informasjonen egentlig ligger i den nedre halvparten. (Husk likevel at dette gjelder bare når vi transformerer en reell funskjon.)



Figur 5.11: De harmoniske funksjonene med frekvensene f_k og f_{N-k} (her: $k = 1$) har nøyaktig samme verdi akkurat i de tidspunktene den opprinnelige funksjonen var definert (forutsatt at $k = 0, 1, \dots, N - 1$). Vi kan derfor ikke skille mellom de to for den samplingsfrekvensen som er brukt. For å kunne skille funksjoner med ulik frekvens, må samplingsfrekvensen være minst dobbelt så stor som høyeste frekvenskomponent. Betrakter du nøyne kurvene med høyest frekvens på figuren, ser du at det er mindre enn to samplinger per periode for disse.

Snur vi litt på argumentasjonen ser vi at ved den gitte samplingshastigheten ville vi få nøyaktig samme resultat ved en sampling av kontinuerlig signal $\cos((N - m)\omega_1 t)$ som om det kontinuerlige signalet var $\cos(m\omega_1 t)$ (m er et heltall). Etter samplingen kunne vi ikke ane om det opprinnelige signalet var den ene eller den andre av disse to mulighetene - med mindre vi har en tilleggsopplysning.

Tilleggsopplysningen vi trenger må vi selv sørge for å ordne! Vi må rett og slett være sikre på at det ikke finnes bidrag med frekvenser over halve samplingsfrekvensen i det signalet vi sampler. I så fall kan vi være trygge på at at signalet vi samplet var $\cos(m\omega_1 t)$ og ikke $\cos((N - m)\omega_1 t)$. Dette svarer til at vi må sample minst to (2.0) ganger hver periode for den høyeste frekvensen som forekommer i signalet (se figur 5.11).

Dette er et eksempel på et generelt prinsipp:

Skal vi representere en harmonisk funksjon på en entydig måte ved et begrenset antall målinger, må måletettheten (målefrekvensen, samplingsfrekvensen) være så stor at vi får minst to målinger innen hver periode på det harmoniske signalet. "Nyquist-Shannons samplingsteorem" sier dette på en mer kompakt måte:

Samplingsfrekvensen må være minst dobbelt så stor som høyeste frekvenskomponent i et signal for at et samplet signal skal gi et entydig bilde av signalet.

Dersom det kan forekomme høyre frekvenser i det opprinnelige signalet, må disse filtreres bort før sampling for at resultatet skal bli entydig.

Det anbefales sterkt at du gjennomfører den andre oppgaven blant "Regneoppgaver" bak i kapitlet. Da kan du utforske hvordan folding arter seg i praksis og hvordan vi kan bli grundig lurt dersom vi ikke passer godt nok på.

5.7 Fouriertransformasjon av tidsbegrenset signal

Fra ligning (14.1) går det fram at en fouriertransformasjon kan sees på som en sum (integrasjon) av produktet mellom signalet som skal transformeres og en ren sinus eller cosinus:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

Uten at vi uttrykte det eksplisitt antok vi at signalet vi analyserte varte uendelig lenge. Slike signaler finnes ikke i fysikken. Det er derfor nødvendig å utforske karakteristiske trekk for fouriertransformasjon når et signal varer en begrenset tid.

Vi velger et signal som gradvis blir sterkere, når en maksimal verdi og så dør ut igjen. Nærmere bestemt velger vi at amplitude-endringen følger en såkalt *gaussisk omhyllingskurve*. Figur 5.12 viser med røde kurver to ulike signaler, et som varer ved svært kort tid, og et annet som varer ved betydelig lengre tid. Matematisk er signalet gitt som:

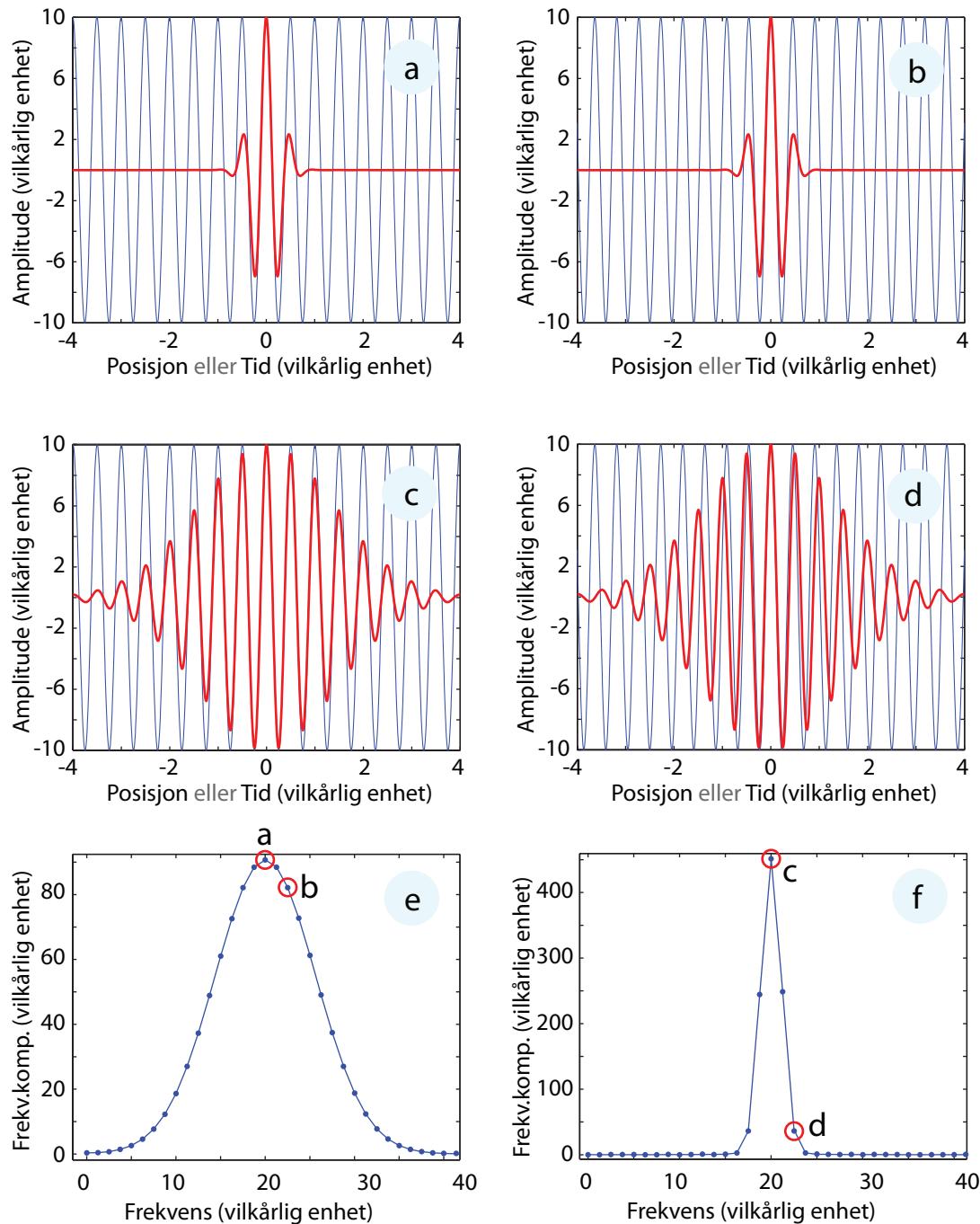
$$f(t) = C \cos(\omega(t - t_0)) e^{-(t-t_0)/\sigma^2}$$

hvor σ angir varigheten på signalet (fra amplituden har hatt sin maksimale verdi til amplituden har sunket til $1/e$ av max). ω er vinkelrekvensen til den underliggende cosinusfunksjonen, og t_0 er tiden der signalet har maksimal amplitude (toppen av signalet forekommer ved tiden t_0).

I a og b i figur 5.12 er signalet kortvarig (σ liten), mens i c og d varer signalet noe lengre tid (σ fem ganger så stor som i a og b).

I a og c har vi i tillegg til signalpulsen i rødt, tegnet inn cosinussignalet med frekvens eksakt lik $\omega/2\pi$ med blå tynnere strek. I b og d har cosinussignalet 10 % høyere frekvens, noe som svarer til at vi vil beregne X_k ved to nærliggende frekvenser.

Vi ser at integralet (summen) av produktet mellom den røde og blå kurven i a og i b vil være omrent det samme. Derimot ser vi at det tilsvarende integralet for d må være betydelig mindre enn integralet for c siden signalet vi analyserer og cosinussignalet kommer i motfase litt vekk fra sentrum av pulsen i d. Der de er i motfase blir jo produktet negativt, og integreringen når vi beregner fourierkoeffisienten blir mindre.



Figur 5.12: Fouriertransformasjon av et cosinussignal som er konvolutert med en gaussisk funksjon. Bare en liten del av det totale frekvensspekteret er vist. Se teksten for detaljer.

Dersom vi foretar en fouriertransformasjon (“alle frekvenser”) av selve den røde kurven i a (det kortvarige signalet), og tar absoluttverdien av fourierkoeffisientene, blir resultatet som i e. Fouriertransformasjonen av signalet i c (signalet som varer litt lenger), er vist i figurens nedre høyre hjørne f. Vi ser at fouriertransformasjonen fanger opp de prediksjonene vi kunne gjøre ut fra visuelle betraktninger av figurene a til d.

Merk at det kortvarige signalet ga et bredt frekvensspekter, mens signalet med flere perioder i den underliggende cosinus-funksjonen, ga et smalere frekvensspekter. Dette er på ny en manifestasjon av prinsippet vi har vært borti tidligere, og som har klare likheter med Heisenbergs uskarphetsrelasjon. I klassisk fysikk går dette under navnet *tid-båndbredde-teoremet*, eller *tid-båndbredde-produktet*: Produktet av bredden (varigheten) til et signal i tidsbildet og bredden av samme signal i frekvensbildet er en konstant, og avhenger av formen på omhyllingskurven til signalet.

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq 1$$

Tallet 1 avhenger av hvordan vi definerer breddene Δt og Δf . Vi vil senere i kapitlet finne samme relasjon med tallet 1 erstattet med $1/2$, men da bruker vi en annen definisjon for Δ -ene.

Figur 5.12 illustrerer viktige trekk ved fourieranalyse av et signal. Mer presist gjelder følgende:

I en frekvensanalyse kan vi bare skille mellom to signalbidrag med frekvenser f_1 og f_2 dersom *signalene* varer lenger enn tiden $T = 1/(|f_1 - f_2|)$.

Selv for signaler som varer svært lenge, vil vi i eksperimentelle situasjoner måtte *begrense registreringen av signalet* til en tid T . Foretar vi analyse av dette signalet, vil vi bare kunne skille mellom frekvenskomponenter som har en forskjell i frekvens på minst $1/T$.

Forskjellen vi snakker om svarer i begge tilfeller til at det må minst være én periodes forskjell innenfor den tiden vi analyserer (eller den tiden signalet selv varer) for at vi skal kunne fange opp to ulike signalbidrag i en fouriertransformasjon. Anta at vi har N_1 perioder av det ene signalet i tiden T og N_2 perioder av det andre signalet. Skal vi ha mulighet for å skille mellom frekvensene til de to signalene, må $|N_1 - N_2| \geq 1$. [Utledes lett fra relasjonen $T = 1/(|f_1 - f_2|)$.]

5.8 Til ettertanke

De relasjonene i tids- og frekvensbildene vi ser i figur 5.12 kan lett føre til alvorlige feiltolkninger. I a ser vi at svingningen varer kun en meget kort tid (få periodetider). Resten av tiden er utslaget rett og slett null (eller vi kunne satt den eksakt lik null med ingen nevneverdig forskjell i frekvensspekteret).

Hva viser fouriertransformasjonen? Fra delfigur e kan vi se at det er om lag 30 frekvenskomponenter som er klart forskjellig fra null. Det betyr at vi må ha i størrelsесorden 30 ulike sinus- og cosinus-funksjoner *som varer ved HELE tiden* (også når signalet er null) for å beskrive det opprinnelige signalet. Det ser vi dersom vi skriver ut den omvendte fouriertransformasjonen

på en måte som vi nå bør kjenne godt igjen:

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} (\Re(X_k) \cos(\omega_k t_n) - \Im(X_k) \sin(\omega_k t_n)) \quad (5.21)$$

for $n = 0, \dots, N - 1$. \Re og \Im står som før for realdelen og imaginærdelen.

Noen trekker da den slutning at *egentlig* så er svingningen ikke null der den ser ut for å være null, men rett og slett summen av om lag 30 ulike sinus- og 30 ulike cosinusfunksjoner overalt i hele tiden. Dette er vrøvl!

Det er korrekt at vi kan beskrive den tidsbegrensete svingningen i delfigur a ved hjelp av alle disse sinus- og cosinusfunksjonene, men det er en ren matematisk greie og har lite med fysikk å gjøre. Ikke for det, det er en del fysikk og fysiske realiteter som samvarierer med bredden på frekvensspekteret. Men det finnes andre metoder å få fram dette poenget på uten at det impliserer at det er noe fysisk til stede den tiden svingningen faktisk er lik null. Vi skal i kapittel 14 ta for oss såkalt wavelet-transformasjon, og da vil dette komme bedre fram.

[♣ ⇒ I mitt eget forskningsfelt, kvanteoptikk, ser vi hvor uheldig denne type kortslutning er. Noen sier at vi må “bruke mange ulike fotoner” for å skape en lyspuls, og at hvert foton må ha energien $E = hf$ hvor h er Plancks konstant og f frekvensen. Da tillegges det en fysisk virkelighet til hver enkelt fourierkoeffisient, mens det burde vært mer fokus på hva som er fysikk og hva som er matematikk. ← ♣]

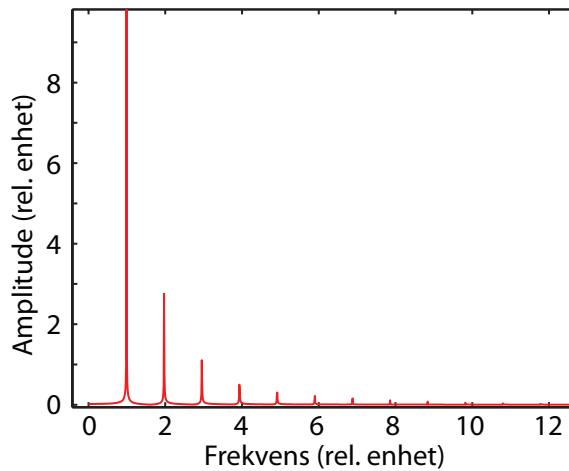
Et vesentlig poeng her er at all tidsinformasjon om et signal forsvinner så snart vi tar absoluttverdien av fourierkoeffisientene. Så lenge vi beholder komplekse fourierkoeffisienter, er tidsinformasjonen intakt, men den er ofte svært godt gjemt. Tidsinformasjonen er nemlig spredt ut over hele fourierspekteret. Det er bare en full tilbaketransformasjon (med komplekse fourierkoeffisienter!) fra frekvensbildet til tidsbildet som gir oss tidsinformasjonen tilbake. Fouriertransformasjon har derfor begrenset verdi for signaler som er null i enkelte tidsperioder eller som på annet vis helt endrer karakter i løpet av samplingstiden.

Også i en annen sammenheng kan en fourieranalyse føre til uheldige konklusjoner. Figur 5.13 viser en fouriertransformasjon for en periodisk bevegelse. På sett og vis ligner denne figuren på figur 5.8 som viste frekvensspekteret av lyd fra en tverrfløyte, med grunntone og overtoner. I den anledning sa vi at grunnen til vi får overtoner er at signalet er periodisk, men ikke er en ren sinus.

Noen omtaler høyere harmoniske på en annen måte. De kan f.eks. si at “når vi spiller fløyte, vil lufta ikke bare svinge ved én bestemt frekvens, men ved flere frekvenser samtidig”. En slik formulerig er vanlig, men problematisk.

Sier vi at “flere frekvenser finnes samtidig” i bevegelsen som ligger bak fourierspekteret i figur 5.13, passer utsagnet dårlig i forhold til fysikken som ligger bak! Figuren ble nemlig laget slik: Vi beregnet først en planets bane rundt Sola. Banen ble beskrevet ved et sett koordinater som funksjon av tid $[x_i(t), y_i(t)]$. Figur 5.13 er da rett og slett den fouriertransformerte av $\{x_i(t)\}$ for en tid som er mange runder rundt sola for den aktuelle planeten.

Grunnen til at vi får en rekke “harmoniske” i dette tilfellet, er at planetbevegelsen er periodisk, men ikke en ren sinus. Vi vet at fouriertransformasjon er basert på harmoniske



Figur 5.13: Fouriertransformasjon av en periodisk bevegelse. Se teksten for forklaring.

basisfunksjoner, og disse svarer til sirkelbevegelser. Men tenker vi i retning av “flere frekvenser finnes samtidig”, er det ensbetydende med at planetbevegelsen må beskrives med flere sirkelbevegelser samtidig! I så fall er vi tilbake til Middelalderen!

Onde tunger sier at dersom vi hadde hatt datamaskiner på Keplers tid og fouriertransformasjonen var tilgjengelig, ville vi fortsatt operert med middelalderens *episykler* den dag i dag. For fourieranalysen vår i figur 5.13 viser nettopp at vi kan erstatte ellipsen med en rekke sirkelbevegelser med passe amplituder (og faser). De fleste vil imidlertid være enige i at det er bedre å bruke en beskrivelse av planetbevegelse basert på ellipser og ikke sirkler. Jeg skulle ønske at vi var like åpne for å droppe matematisk formalisme basert på fourieranalyse også i enkelte andre sammenhenger.

Fourieranalyse kan gjennomføres for praktisk talt alle fysiske tidsvariable systemer, siden settet med sinus- og cosinusfunksjoner som inngår i analysen danner et fullstendig sett med funksjoner. Pass på at du *ikke* av dette trekker slutningen at “når noe er mulig, så er det også gunstig”. I kapitlet om wavelet-transformasjon vil vi komme tilbake til denne problemstillingen, siden vi i waveletanalyse kan velge et helt annet basissett av funksjoner enn sinuser og cosinuser som varer ved fra minus til pluss uendelig.

Kort oppsummert kan vi si:

Fouriertransformasjon er et meget godt hjelpemiddel, men har mer eller mindre samme basis som Middelalderens episykel-beskrivelse av planetbevegelser. Det er fullt mulig å beskrive planetbevegelser ved hjelp av episykler, men det er lite fruktbart å bruke en slik analyse. På tilsvarende vis er det en rekke fysiske fenomener som i dag beskrives ved formalisme basert på fourieranalyse, der denne formalismen egentlig er lite egnert. Den kan føre til fysiske bilder som villeder mer enn de er til hjelp for oss. Eksempler finnes bl.a. i kvanteoptikk.

5.9 Programmeringstips

5.9.1 Indekser; forskjeller mellom Matlab og Python

En tallrekke så som $\{x_n\}$ og $\{X_k\}$ beskrives som arrays i numeriske metoder. Det er da viktig å huske at i Python starter indeksene med 0, mens i Matlab starter de med 1. I $\{X_k\}$ vil

$k = 0$ og 1 henholdsvis svare til frekvensen 0 (konstant) og frekvensen $1/T$. I Matlab er det indeksene 1 og 2 som svarer til dette.

Uttrykket for en diskret fouriertransformasjon i Python blir da som følger:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi}{N} kn} \quad (5.22)$$

for $k = 0, \dots, N - 1$.

Uttrykket for en diskret fouriertransformasjon i Matlab blir imidlertid som følger:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n e^{-i \frac{2\pi}{N} (k-1)(n-1)} \quad (5.23)$$

for $k = 1, \dots, N$.

For den omvendte diskrete fouriertransformasjonen får vi tilsvarende endringer.

5.9.2 Fouriertransformasjon, eksempel på et dataprogram

```
% Enkelt eksempelprogram for å vise hvordan fouriertransformasjon
% kan gjennomføres i praksis i Matlab. Eksemplet er en modifikasjon
% av et eksempelprogram på hjelpesidene i Matlab.

Fs = 1000; % Samplingsfrekvens
delta_t = 1/Fs; % Tid mellom hver sampling
N = 1024; % Antall samplinger
t = (0:N-1)*delta_t; % Tidsvektor

% Lager her et kunstig signal som en sum av et 50 Hz sinussignal
% og en 120 Hz cosinus, pluss legger til et random signal:
x = 0.7*sin(2*pi*50*t) + cos(2*pi*120*t);
x = x + 1.2*randn(size(t));

plot(Fs*t,x) % Plotting av signalet i tidsbilete
title('Opprinnelig signal (tidsbildet)')
xlabel('tid (millisekunder)')

X = fft(x,N)/N; % Fouriertransformasjon

frekv = (Fs/2)*linspace(0,1,N/2); % Frekvensvektor (for plot)

% Plotter bare lengden på frekvenskomponentene i frekvensspekteret.
% Velger å bare ta med frekvenser opp til halve samplingsfrekvensen.
figure; % Hindrer overskriving av forrige figur
plot(frekv,2*abs(X(1:N/2))) % Plotter halvparten av fourierspekteret
title('Absolutt-verdier av frekvensspekteret')
xlabel('Frekvens (Hz)')
ylabel('|X(frekv)|')
```

5.10 Vedlegg: Nyttig betraktningsmåte

Det er stor forskjell oss fysikere imellom hvordan vi bruker og leser innholdet i matematiske uttrykk. I dette vedlegget ønsker jeg å gi et eksempel på en betraktningsmåte som har vært nyttig for meg nettopp når jeg har vurdert hvorfor enkelte fourierspektre ser ut som de gjør.

Vi starter med et matematisk uttrykk så som:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (5.24)$$

eller den diskrete varianten av det samme uttrykket:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos(\omega_k t_n) - i \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin(\omega_k t_n) \quad (5.25)$$

hvor $\omega_k = \frac{2\pi}{T}k$ og $t_n = \frac{T}{N}n$ der T er total samplingstid. Da har vi rett og slett med en sum av enkelt-produkter $x_n \cos(\omega_k t_n)$ (eller sinus) å gjøre for mange n . Integralet eller summen får vi ved å legge sammen en masse slike tall (med en eller annen skalering som vi ikke går inn på her).

Dersom nå $\{x_n\}$ rett og slett er en cosinusfunksjon som har samme frekvens og fase som $\cos(\omega_k t_n)$, vil disse to leddene multiplisert med hverandre alltid bli større eller lik null, slik det jo er for en \cos^2 -funksjon. Da vil summen bli stor og positiv.

Dersom $\{x_n\}$ er en cosinusfunksjon med ulik frekvens enn $\cos(\omega_k t_n)$, vil de to cosinusfunksjonene iblant være i fase og produktet positivt, men iblant i motfase og produktet negativt.

På grunn av faktoren $\frac{1}{N}$ vil summen av alle produktleddene gå mot null dersom vi får mange perioder med positive og negative bidrag totalt sett.

Ut fra denne argumentasjonen får vi fram at en fouriertransformasjon av en enkel harmonisk funksjon når vi har integrasjon med grenser pluss minus uendelig, blir å regne som en δ -funksjon. Men hva vil skje når funksjonen vi analyserer rett og slett er null overalt unntatt i et begrenset tidsrom med lengde T der funksjonen er en enkel harmonisk funksjon?

I figur 5.14 er det vist et utsnitt av funksjonen

$$f(t) = \cos(\omega_a t) \quad \text{for } t \in [0, T] \quad \text{og 0 ellers.} \quad (5.26)$$

I figuren er $T = 2/3$ s.

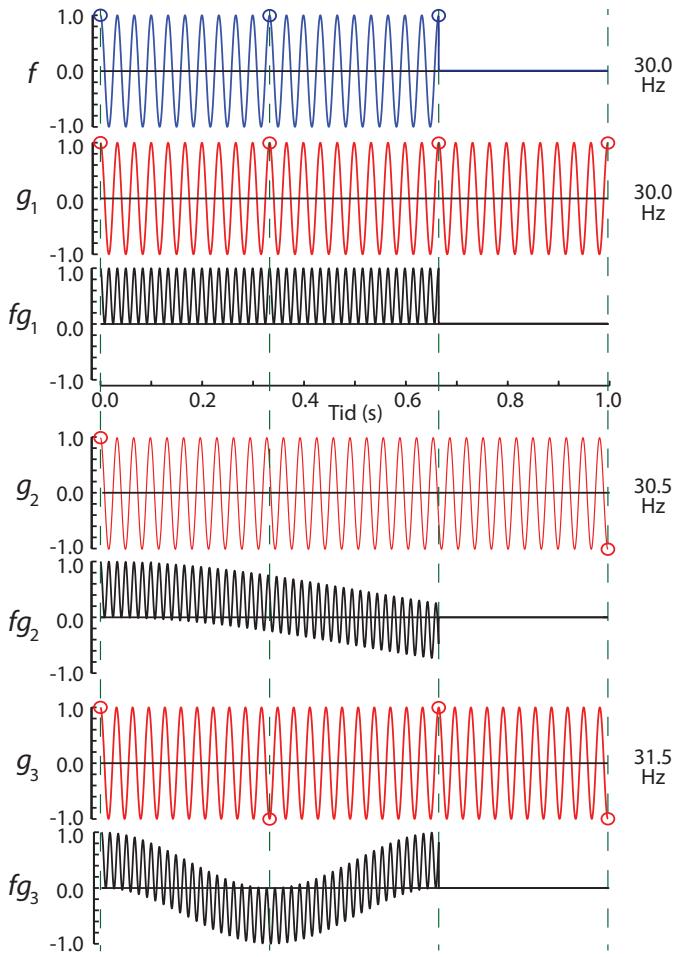
Tidsintervallet T i figuren er såvidt tilstrekkelig til å få inn hele det partiet hvor $f(t)$ er forskjellig fra null i figuren. Det er også tegnet inn $g(t) = \Re\{e^{-i\omega_k t}\} = \cos(\omega_k t)$ for tre ulike valg av analysefrekvens ω_k . Produktfunksjonene $f(t)g(t)$ er også tegnet inn for de tre tilfellene.

Integralet av produktfunksjonen får nå bare bidrag akkurat i det tidsintervallet hvor f er forskjellig fra null. Vi får full uttelling innen hele intervallet når $\omega_k = \omega_a$. Vi ser at integralet (summen av alle verdier av produktfunksjonen) også blir positiv i det mellomste tilfellet der forskjellen mellom ω_k og ω_a er såpass liten i forhold til tidsintervallets lengde at fasen til f og fasen til $\cos(\omega_k)$ hele tiden er mindre enn π .

I det nederste tilfellet har vi valgt en analysefrekvens ω_k som er slik at

$$(\omega_k - \omega_a)T = 2\pi$$

På grunn av symmetrien ser vi at integralet her blir lik null, men innser at vi ville fått en viss positiv eller negativ verdi dersom vi ikke traff så kontant med frekvensforskjellen i forhold til T slik vi gjorde i dette tilfellet.



Figur 5.14: De to funksjonene som inngår i integranden i fourierintegralet ligning (14.13). Funksjonen f som skal analyseres er gitt i blått. Den er forskjellig fra null bare i et begrenset tidsrom. $g_k(t)$, som svarer til $\Re\{e^{-i\omega_k t}\}$, er gitt i rødt, og produktet av de to funksjonene i sort. Tre ulike frekvenser ω_k er valgt. Se tekst for kommentarer.

Hva har dette eksemplet vist oss? I første del av kapittelet forklarte vi at når $f(t) = \cos(\omega_a t)$ for alle t , vil fourierintegralet bli null i absolutt alle tilfeller der $\omega_k \neq \pm\omega_a$. I figur 5.14 ser vi at når funksjonen vi analyserer bare varer ved en begrenset tid T , kan de to frekvensene gjerne være litt forskjellige og likevel vil vi kunne få bidrag fra fourierintegralet. Bidraget vil være størst når $(\omega_k - \omega_a)T < \pi$.

Det kan bemerkes at vi kan døpe om størrelsene slik: $(\omega_k - \omega_a) \equiv 2\pi\Delta f$ og $T \equiv \Delta t$. I så fall får vi at fourierintegralet har betydelig verdi så lenge

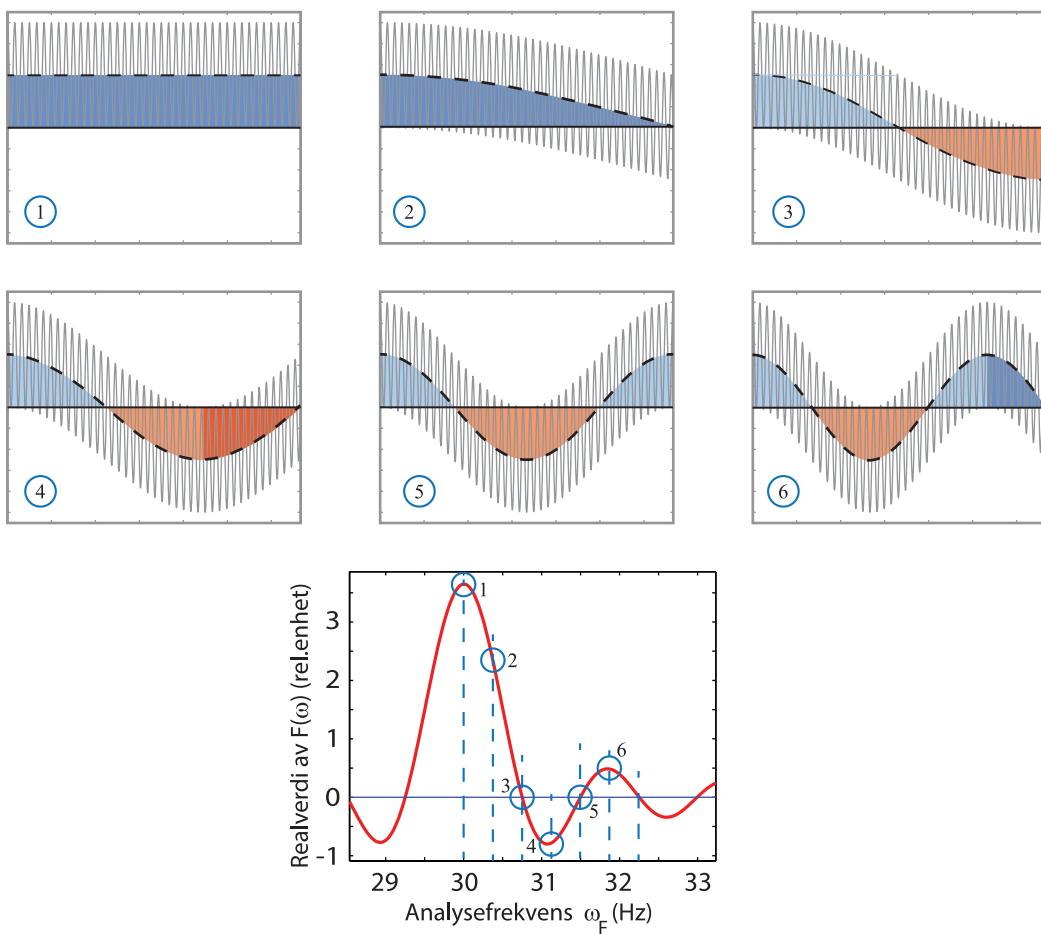
$$\Delta f \cdot \Delta t < 1/2$$

Dette er igjen en relasjon som har analogier til Heisenbergs uskarphetsrelasjon.

Det hører med å nevne at den fouriertransformerte også får et imaginært bidrag. Det er ikke

tatt med her, men kommer automatisk inn på en liknende måte som den reelle komponenten.

Vi kan gjenta samme type beregninger for mange forskjellige ω_k relativt til ω_a og summere opp positive og negative bidrag over tiden T vi skal integrere over. Ytterligere eksempler på slike beregninger er vist i figur 5.15. Når de to frekvensene er identiske, blir arealet under middelverdikurven maksimalt, noe som svarer til toppverdien i (realdelen) av fourierspekteret. Arealet kan være positivt eller negativt alt etter om middelverdien ligger over eller under null. Positive areal er markert med blå bakgrunnsfarge, og negative areal med rød bakgrunnsfarge. I tilfelle 3 og 5 er totalt areal lik null (like mye positivt som negativt), mens i tilfelle 4 er totalt areal negativt.



Figur 5.15: Integranden i realdelen av fourier-beregningene for ulike valg av analysefrekvens. Realdelen av en del av fourierspekteret til funksjonen gitt i ligning (5.26) er gitt nederst. Se forøvrig teksten for detaljer.

Det er markert med litt ekstra sterkt rød- eller blå-farge de arealene som ikke blir balansert av tilsvarende areal med motsatt fortegn. Vi ser da at det kraftigst rødmerkede arealet i tilfelle 4 er større i absoluttverdi enn det kraftigst blåmerkede arealet i tilfelle 6, noe som reflekterer at toppen i området nær 6-markeringen i nedre del av figuren er mindre enn (absoluttverdien) av toppen i området nær 4-markeringen.

Figur 5.15 tyder på at frekvensspekteret av en bit av en harmonisk funksjon har en bred og kraftig topp i midten, og karakteristiske oscillasjoner med mindre og mindre amplitude jo lengre vekk fra toppen man kommer.

[♠ ⇒ Kommentar: Vi skal i kapittel 13 se at frekvensspekteret vi aner i figur 5.15 dukker opp igjen når vi betrakter diffraksjonsbildet som fremkommer når vi sender en laserstråle med synlig lys gjennom en smal spalt. Innen optikk er det en egen retning som kalles fourier-optikk. ← ♠]

5.10.1 Program for bruk til å visualisere gjennomsnitt av sin-cos-produkter

```
function sincosdemo
% For FYS2130-bruk i FT-kapitlet.

N = 2000; % Antall punkter
T = 1.0; % Tiden vi beskriver et signal
t = linspace(0,T*(N-1)/N,N); % Lager tallrekken t
freq1 = 100.0; % La gjerne denne være fast
freq2 = 100.0; % 1) Varier denne fra 102 til f.eks. 270
                % 2) Sjekk også for |freq2-freq1|< 2.0
omega1 = 2*pi*freq1; % Gjør om til vinkelfrekvens
omega2 = 2*pi*freq2;
f = cos(omega1*t); % Prøv gjerne med sin også
g = cos(omega2*t);

plot(t,f.*g,'-b'); % Plotter produktet av f og g
xlabel('Tid (s)');
ylabel('Signal (rel.enhet)');
null = zeros(N,1);
hold on;
plot(t,null,'-r'); % Tegner også nulllinjen

integral = sum(f.*g); % Har doppet normering 1/N
integral % Skriver ut "integralet" (summen) på skjerm
```

5.11 Læringsmål

Etter å ha jobbet deg gjennom dette kapitlet bør du vite at:

- En integrerbar tidsavhengig kontinuerlig funksjon kan transformeres ved kontinuerlig fouriertransformasjon til et “frekvensbilde”, som siden entydig kan transformeres med en invers fouriertransformasjon tilbake til utgangspunktet.
- En diskret funksjon kan transformeres ved en diskret fouriertransformasjon til et “frekvensbilde”, som siden entydig kan transformeres med en diskret invers fouriertransformasjon tilbake til utgangspunktet.
- Det er bare rene tall (uten benevninger) som inngår i en matematisk/numerisk gjennomføring av en fouriertransformasjon. Vi må selv manuelt holde rede på tider for samplingene og hvilke frekvenser elementene i fourierspekteret tilsvarer. Normering av tallverdiene (f.eks. hvorvidt vi skal dividere/multiplisere tallene etter en transformasjon med N eller ikke) må vi også selv passe på blir korrekt, siden ulike systemer håndterer dette på ulikt vis.
- Frekvensbildet i en diskret fouriertransformasjon består av komplekse tall hvor realdelen representerer cosinus-bidrag ved de ulike frekvensene, mens imaginærdelen representerer sinus-bidragene. Absoluttverdien til de komplekse tallene gir amplituden på bidraget ved den aktuelle frekvensen. Arkustangens av forholdet mellom imaginær og realdel angir fasen til den aktuelle frekvenskomponenten (relativt til en $\cos(\omega t + \phi)$ -beskrivelse).
- For et reelt signal er siste halvpart av fourierkoeffisientene kompleks konjugerte av den første halvparten, og “speiling” forekommer. Vi tar derfor oftest bare vare på den første halvparten av frekvensspekteret.
- I en diskret fouriertransformasjon svarer første element i tallrekken X_k til et konstantledd (null frekvens), andre element til frekvensen $1/T$, tredje til frekvensen $2/T$ osv. Her er T total tid funksjonen/signalet vi starter ut med er beskrevet over (total samplingstid). Det er nødvendig å sample over lang tid dersom vi skal få høy oppløsning i frekvensbildet.
- Dersom et signal “samples” med en samplingsfrekvens f_s , vil vi bare kunne behandle signaler med frekvenser under halve samplingsfrekvensen på en entydig måte.
- For å unngå problemer med “folding”, må derfor et lavpassfilter benyttes for å fjerne signalkomponenter som kan ha høyere frekvens enn halve samplingsfrekvensen. Ved numeriske beregninger må vi selv passe på at “samplingsfrekvensen” er høy nok for signalet vi behandler.
- Fouriertransformasjon er et ypperlig hjelpemiddel ved studier av stasjonære tidsvariable fenomener i store deler av fysikken. Eksempelvis er fouriertransformasjon i utstrakt bruk ved analyse og syntese av lyd.
- Fouriertransformasjonen er mulig å gjennomføre (nesten) alltid, men det betyr ikke at fouriertransformasjoner er nyttige i enhver sammenheng!
- Fouriertransformasjon egner seg (nesten) bare for å analysere signaler som har har mer eller mindre samme karakter i hele samplingstiden. For transiente signaler som endrer karakter kraftig i løpet av samplingstiden, kan iblant et fourierspekter være mer villedende enn til hjelp.
- Normalt når fouriertransformasjon foretas numerisk bruker vi ferdige funksjoner innenfor det programmeringsspråket vi bruker. Lager vi koden selv, tar beregningene ulidelig lang tid (med mindre vi faktisk koder selve fast fourier transform "algoritmen"). Beregningene er mest effektive dersom antall punkter i beskrivelsen er 2^n .

5.12 Oppgaver

Forståelses- / diskusjonsspørsmål

- Hvordan kan vi ved å ta utgangspunkt i et frekvensspekter lage en syntetisk lyd? Vil en slik lyd lyde som et ordentlig instrument?
- For CD lyd er samplingsfrekvensen 44.1 kHz. Ved lydinnspilling må vi ha et lavpassfilter mellom mikrofonforsterker og samplingskretsene som fjerner alle frekvenser over ca 22 kHz. Hva ville kunne skje med lyden ved avspilling dersom vi ikke tok denne regelen høytidelig?
- Etter en fouriertransformasjon (FFT) bruker vi ofte bare å plotte en del av alle dataene som produseres. Nevn eksempler på hva som kan påvirke vårt valg.
- Dersom du fourieranalyserer lyd fra en CD-innspilling av et instrument og finner at grunntonen har frekvensen 440 Hz. Hvor finner du da den foldete frekvensen?
- Dersom funksjonen g i den innledende beskrivelsen ikke var en *ren* sinus, hvordan ville vi kunne se dette fra frekvensspekteret etter en diskret fouriertransformasjon? (Drøft gjerne også forskjellen på periodisk og ikke-periodisk signal.)
- Forsøk med egne ord å beskrive *hvorfor* den fouriertransformerte til en cosinusfunksjon som bare varer ved et begrenset tidsrom T er helt annerledes enn dersom cosinusfunksjonen hadde vart ved fra minus til pluss uendelig.
- Betrakt figur 5.16 og fortell hva den forteller oss.

Regneoppgaver

- Vis både matematisk og ved et eget programmeringseksempel at første punkt i en digital fouriertransform av et signal er lik gjennomsnittsverdien til signalet vi startet ut med.
- Bruk dataprogrammet gitt i "eksempel på dataprogram" noen sider foran denne for å utforske hvordan folding fungerer i praksis. Erstatt de to linjene som starter med "x = " (litEN x) med følgende kode:

```
freq = 100.0; % Frekvens i hertz
x = 0.8 * cos(2*pi*freq*t); % Signal en enkel cosinus
```

og kjør programmet. Pass på å zoome inn så mye at du kan sjekke at frekvensen i frekvensspekteret kommer riktig ut.

Kjør så programmet med (etter tur) freq lik 200, 400, 700, 950, 1300 (Hz). Finner du et system i hvor linjene kommer ut i frekvensspekteret?

- Noen hevder at månefasene virker inn på alt fra vær til humøret til oss mennesker. Sjekk om du kan finne holdepunkter for at temperaturen (maksimums- og/eller minimumstemperaturen hvert døgn) varierer litt med månefasene (i tillegg til all annen variasjon).

Data kan du hente ned fra api.met.no for det stedet du er interessert i og for det tidsrommet du er interessert i. Alternativt kan du bruke en allerede nedhentet og litt forenklet fil *tempblindern10aar.txt* på kurswebsidene. Filen gir temperaturen på Blindern i tiden 1. januar 2003 til og med 31. desember 2012. Fjerde kollonne i filen gir minimumstemperaturene, mens femte kollonne gir max-verdiene.

Forklar nøyde hvordan du kan trekke en sluttning om hvorvidt månefasen virker inn på temperaturen eller ikke.

Nedenfor er noen linjer Matlab-kode som viser hvordan data kan leses inn fra vår fil til et Matlabprogram (filen har fem kolonner):

```

filnavn = 'tempBlindern10aar.txt';
fileID = fopen(filnavn, 'r');
A = fscanf(fileID, '%d %d %f %f %f',[5,inf]);
minT = A(4,:);
maxT = A(5,:);
plot(minT,'-r');
hold on;
plot(maxT,'-b');

```

11. Hent opp solflekk-data fra web og lag en oppdatert figur lignende vår figur 5.7. Vær spesielt oppmerksom på å få korrekte verdier langs aksene i fourierspekteret. Er det samsvar mellom høydene i toppene i tidsbildet og amplitudene i frekvensspekteret? Nedenfor er noen linjer Matlab-kode som viser hvordan data kan leses inn i et Matlabprogram (to kolonner):

```

filnavn='soldata.txt';
fileID = fopen(filnavn, 'r');
A = fscanf(fileID,'%f %f', [2,inf]);
plot(A(1,:),A(2,:),'-b');

```

12. Anta at du skal lage et frekvensspekter liknende det i figur 5.8 for en lydsnutt du henter fra en CD. Samplingsfrekvensen er 44.1 kHz. Du lagrer $2^{14} = 16384$ datapunkter og foretar en “fast fourier transform” og ender opp med 16384 nye datapunkter som representerer frekvensspekteret. Hvordan skal du i programmet ditt gjøre om fra punkt-nummer til frekvens langs x-aksen når frekvensspekteret skal plottes?
13. Hva blir oppløsningen langs x-aksen i plottet i forgående oppgave? Sagt med andre ord: Hvor stor endring i frekvens får vi ved å gå fra ett punkt i frekvensspekteret til det neste? Ville oppløsningen vært den samme selv om vi bare brukte 1024 punkter som utgangspunkt for fouriertransformasjonen?
14. Skriv et program i Python eller Matlab (eller hvilket som helst programmeringsspråk) som lager et harmonisk signal med eksakt 13 perioder innenfor 512 punkter. Bruk den innebygde fft-funksjonen for å beregne et frekvensspekter. Blir dette som du forventet? La signalet være et rent sinussignal eller et kombinert sinus- og cosinussignal.
15. Modifiser programmet såvidt slik at signalet nå får 13.2 perioder innenfor de 512 punktene. Hvordan ser frekvensspekteret ut nå? Beskriv så godt du kan!
16. Modifiser programmet slik at du får 16 hele perioder med *FIRKANTsignal* innenfor $2^{14} = 16384$ punkter. Hvordan ser frekvensspekteret ut nå? Finn på internett et uttrykk for hvordan amplituden for ulike frekvenskomponenter skal være for et firkantsignal, og verifiser at du får omtrent det samme fra dine numeriske beregninger.
17. Modifiser programmet slik at du får 16 hele *sagtenner* (trekantsignal) innenfor de 1024 punktene. Beskriv også dette frekvensspekteret!
18. I et eksempel i kapittel 4 beregnet vi vinkelutslaget til en fysisk pendel ved store utslag. Gjennomfør disse beregningene for 3-4 ulike vinkelutslag og foreta en fourieranalyse av bevegelsen i hvert tilfelle. Kommenter resultatene.
19. AM-radio (AM: Amplitude-Modulert). Beregn hvordan signalet som sendes fra en AM-sender ser ut, og finn frekvensspekteret av signalet. Det er enklest å gjøre dette for et radiosignal på langbølge-båndet (153 - 279 kHz). La bærebølgen ha frekvensen $f_b = 200$ kHz, og velg at talesignalet er en enkel sinus med frekvens (etter tur) $f_t = 440$ Hz og 4400 Hz. Signalet bør samples med en samplingsfrekvens $f_s = 3.2$ MHz og det kan være passe å bruke $N = 2^{16} = 65536$ punkter. AM-signalet er gitt ved:

$$f(t) = (1 + A \sin(2\pi f_s t)) \cdot \sin(2\pi f_b t)$$

hvor A angir normert amplitude på lydsignalet (for den aller sterkeste lyden som kan sendes uten forvrengning er $A = 1.0$. Bruk en litt mindre verdi, men test gjerne ut hvordan signalet påvirkes av A .)

Plott AM-signalet både i tidsbildet og frekvensbildet. Velg ut passe utsnitt i forhold til det fulle datasettet for å få fram det du ønsker å vise. Husk å sette på korrekte tidsangivelser langs x-aksen i tidsbildet og korrekte frekvensangivelser langs x-aksen i frekvensbildet.

Hver radiostasjon på mellombølge og langbølge får bare strekke seg ut over et frekvensbånd på 9 kHz totalt. Hvilke følger har dette for kvaliteten på lyden som overføres?

20. FM-radio (FM: Frekvens-Modulert). Beregn hvordan signalet som sendes fra en FM-sender ser ut, og finn frekvensspekteret av signalet. Bruk samme parametre som i forrige oppgave (selv om det ikke i praksis brukes FM på langbølge). FM-signalet kan gis på følgende måte:

```
f(t) = sin(fase(t)); % Prinsipielt, implementeres litt annerledes i Matlab
```

hvor fasen integreres opp i en løkke på følgende måte:

```
fase(1) = 0.0;
for i=1:(N-1)
    fase(i+1)=fase(i) + omega_b*delta_t*(1.0 + A*sin(omega_t*t(i)));
end;
```

hvor "omega_b" og "omega_t" er vinkelfrekvensen for bærebølgen og talesignalet henholdsvis. Tidssstrengen "t(i)" antas å være beregnet på forhånd (avstand mellom punktene er "delta_t", som bestemmes av samplingsfrekvensen).

A er igjen en normert amplitude for lydsignalet hvor også en såkalt modulasjonsgrad inngår. Du kan velge etter tur f.eks. $A = 0.2$ og 0.7 og se hvordan dette påvirker både tidsbildet og frekvensbildet.

Plott FM-signalet både i tidsbildet og frekvensbildet etter samme retningslinjer som i forrige oppgave. (Hint: Det kan være enklest å plotte tilfellet hvor talefrekvensen er 4400 Hz og at $A = 0.7$.)

Er det noen klare forskjeller i hvordan frekvensbildet fremstår for FM-signaler sammenlignet med AM-signaler?

21. Bruk invers fouriertransformasjon for å generere en enkel sinus, og spill av lyden på datamaskinen. Helt konkret anbefales følgende: Bruk CD-samplingsfrekvensen $F_s = 44100$ Hz og $2^{16} = 65536$ punkter. Verdiene av signalet f bør ligge strengt innenfor intervallet $[-1, +1]$. Bruk den innebygde funksjonen *sound*. Forsøk å lage lyd med frekvensene 100 Hz, 440 Hz, 1000 Hz og 3000 Hz. Du kan gjerne lage et signal som består av flere samtidige sinuser også? Husk å skalere totalsignalet før vi bruker wavplay eller sound.
22. Les lydfilen "transient.wav" og foreta fouriertransformasjon for å få fram frekvensspekteret. Lydfilen er tilgjengelig fra kursets websider, samplingsfrekvensen er $f_s = 44100$ Hz. Bruk gjerne 2^{17} punkter i analysen. En aktuell Matlabfunksjon er

```
s = 'lydfil1.wav'; % Sett selv inn riktig navn
[f,fs] = audioread(s, [nstart nslutt]); % Velg f.eks. [1,2^17]
g = f(:,1); % Henter ut ett monosignal fra stereosignalet f
```

Dersom du lytter til lyden og dernest betrakter frekvensbildet, håper jeg at du reflekterer over det du har gjort. Fourieranalyse blir iblant misbrukt. Hva er problemet med analysen som er foretatt for det aktuelle lydsignalet?

23. a) Foreta frekvensanalyse for lyd fra en tuba og fra en piccolofløyte (lydfiler tilgjengelig fra kursets websider). Samplingsfrekvensen er 44100 Hz. Bruk f.eks. 2^{16} punkter i

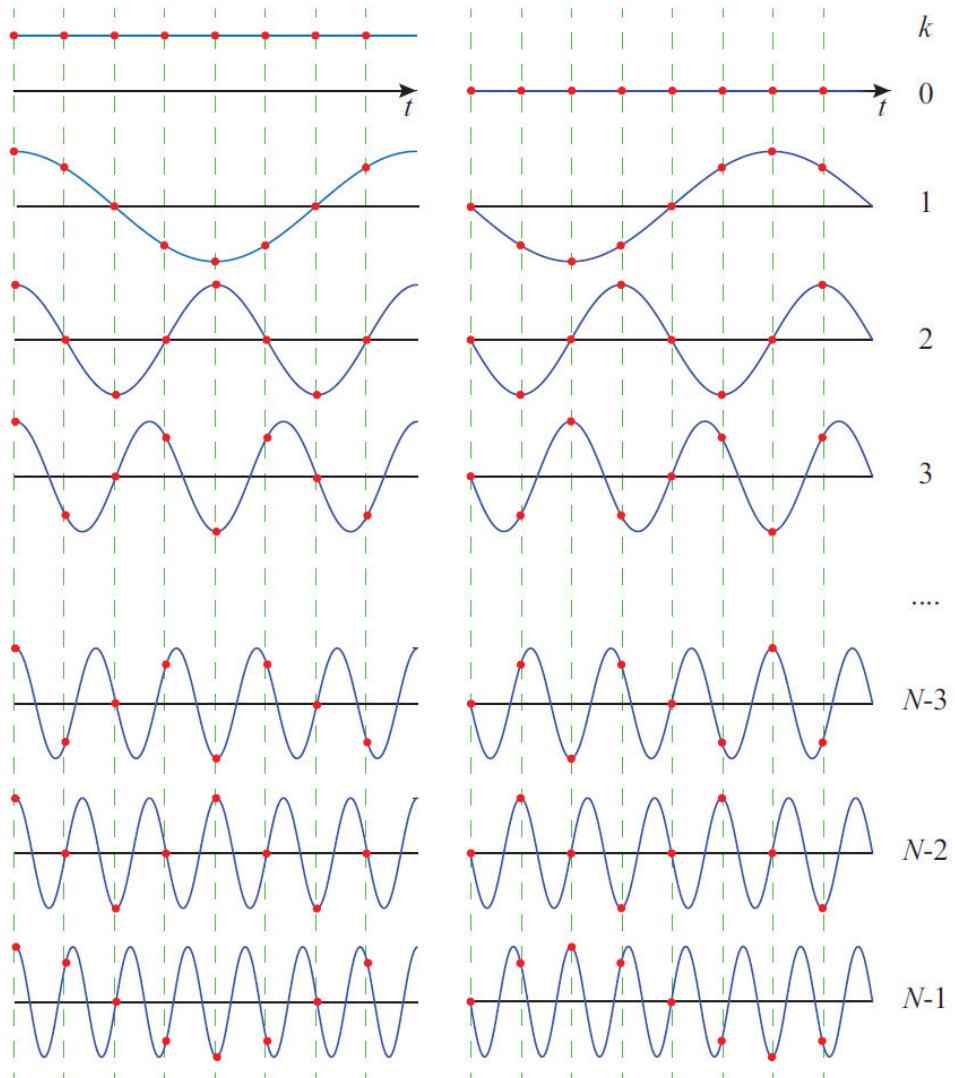
analysen. Plot absoluttverdien av frekvensspekteret (se programsnutt nedenfor). Bestem tonens plassering i en temperert skala ved å bruke figur 5.17. Husk å få korrekte verdier langs frekvensaksen når du plotter frekvensspekteret, og zoom inn for å få en nokså nøyaktig avlesning av frekvens for grunntonen.

- b)** Frekvensspekteret viser i varierende grad overtoner slik det er beskrevet i dette kapitlet (vi kommer tilbake til dette i senere kapitler). Zoom inn i tidssignalet så mye at du får fram noen få perioder. Ser signalet omtrent ut som et harmonisk signal, eller er det langt mer uregelmessig enn en sinus? (Sammenligningen må gjøres bare når du betrakter 3-8 perioder i lydsignalet.) Synes det å være en slags sammenheng mellom hvor nær tidssignalet er en ren sinus og antall overtoner i frekvensspekteret?
- c)** Forsök å ta med data kun for et så lite tidsintervall at det bare er plass til én periode i signalet. Gjennomfør fouriertransformasjonen for dette lille området (behøver ikke ha 2^n -te punkter). Finner du en sammenheng mellom fourierspekteret her sammenlignet med fourierspekteret da du brukte en lang tidsstreg som inneholdt mange perioder i lydsignalet?
- d)** For en av lydfilene ber vi deg teste at en invers fouriertransformasjon av den fouriertransformerte fører oss tilbake til det opprinnelige signalet igjen. Husk at vi da må beholde den fouriertransformerte som komplekse tall når den inverse transformasjonen gjennomføres. Plot resultatene.
- e)** Gjennomfør en invers fouriertransformasjon på *absoluttverdien* til den fouriertransformerte av signalet. Beskriv forskjellen mellom den inverse fra den fulle komplekse fouriertransformerte og den du fant nå. Forsök å angi årsaken til at det blir forskjell.

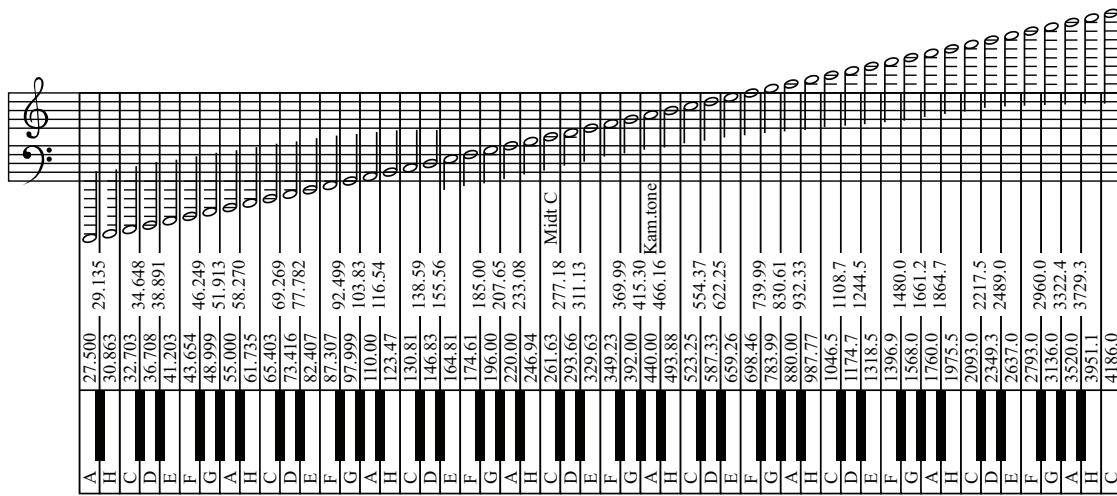
Her er en kodesnutt som viser hvordan du kan lese data fra en lydfil i Matlab:

```
s = 'piccoloHigh.wav'; % Filnavn (fil må ligge i din arbeidsmappe)
N = 2^16;
nstart = 1; % Første elementnr du vil bruke i lydfilen
nslutt = N; % Siste elementnr du vil lese fra lydfilen
[f,Fs] = audioread(s, [nstart nslutt]);
% sound(f,Fs); % Spiller av lyden igjen dersom man vil
g = f(:,1); % Henter ut ett monosignal fra stereosignalet f
X = (1.0/N)*fft(g); % FastFourierTransform av lydsignalet
Xa = abs(X); % Finner absoluttverdien av fourierspekter
```

24. “Åpen oppgave” (Det vil si at svært få føringer og tips er gitt): Fouriertransformasjon kan brukes i digital filtrering. Forklar prinsippet og hvordan dette kan gjennomføres i praksis. Lag et lite program som foretar selvvalgt digital filtrering av en virkelig lydfil, hvor det er mulig å lytte til lyden både før etter filtrering. (Vær litt omhyggelig i beskrivelsen av detaljer i det du gjør!)



Figur 5.16: Bruk denne figuren i oppgave 7.



Figur 5.17: Toneskalaen for en temperert skala slik vi finner den på et piano. Frekvenser for tonene er gitt.