



8. Dispersjon og bølger på vann

Dette kapitlet tar opp følgende temaer: Numerisk beregning av tidsutvikling til en bølge, dispersjon og forskjell mellom fase- og gruppehastighet, numerisk modellering av dispersjon, bølger på vann, diskusjon av ulike fenomener basert på en formel for fasehastighet for bølger på vann. Lesetips finnes på websiden med hjelpefiler til boka.

8.1 Innledning

Bølger på vann og hav har fascinert mennesker til alle tider. Det finnes et eventyrlig spekter av bølgeformer, og fysikken bak er så kompleks at det selv i dag er nesten umulig å gjøre beregninger på ville bølger, som illustrert gjennom en av Katsuhhika Hokusai's berømte tegninger av bølger ovenfor. Bølgene vi behandler i dette kapitlet er uhyre enkle til sammenligning. Likevel håper vi at selv våre enkle beskrivelser kan gi deg en langt dypere forståelse av *fenomenet bølger* enn det du hadde tidligere. Kapitlet har tre hovedtemaer: Numerisk beregning av tidsutviklingen til en bølge, dispersjon inklusiv forskjeller mellom fase- og gruppehastighet, og en gjennomgang av gravitasjonsdrevne bølger på vann.

Før vi går litt grundigere til verks tar vi en kort rekapsulasjon om svingninger og bølger generelt. En fellesnevner for alle slike fenomen er at:

- Det finnes en likevektsstilling for systemet når svingninger og bølger har dødd ut.
- Det finnes en "gjenopprettende kraft" ("restoring force" på engelsk) som forsøker å dra systemet tilbake mot likevektsstillingen når det ikke er der.
- Det finnes en "treghetskraft" som gjør at systemet svinger forbi likevektsstillingen selv om kraften her er lik null.

For en svingende pendel er det gravitasjon, og for bølger på en streng er det strammingen i strengen som er den gjenopprettende kraften. For lydbølger i luft eller væske er det trykkforskjeller som er gjenopprettende kraft pga sammentrykking av deler av volumet. "Treghetskraften" i alle disse eksemplene er den som kommer til uttrykk i Newtons første lov. For overflatebølger på vann er det *to* gjenopprettende krefter, nemlig gravitasjon og

overflatespenning.

8.2 Numerisk beregning av tidsutvikling for en bølge.

Det er svært vanskelig å forstå mekanismene som ligger bak tidsutviklingen av en bølge bare ved å ta utgangspunkt i bølgeligningen innen analytisk matematikk. Dersom du bare har analytisk matematikk tilgjengelig, vil du ha vanskelig for å forstå hvorfor initialbetingelsene er helt avgjørende for hvordan en bølge utvikler seg – og hvordan randbetingelsene påvirker tidsutviklingen av bølgen i detalj. Vi vil i stedet bruke numeriske metoder for å gjennomskue mekanismene bak en bølgeutvikling etter som tiden går.

Vi har flere hensikter med en slik gjennomgang. Aller viktigst er å få fram den underliggende algoritmen fordi den kan gi en bedre forståelse for bølgebevegelse generelt.

Utgangspunktet er en generell en-dimensjonal bølgeligning uten dispersjon (forklaries senere i kapitlet):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

I en numerisk løsning beskrives løsningen bare i diskrete posisjoner og tidspunkt:

$$u(x, t) \rightarrow u(x_i, t_j) \equiv u_{i,j}$$

hvor

$$x_i = x_0 + i\Delta x$$

der $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, og

$$t_j = t_0 + j\Delta t$$

der $j = 0, 1, 2, \dots, M - 1$.

Figur 8.1 illustrerer hvordan en bølge beskrives numerisk. For hvert tidspunkt beskriver en tallrekke utslaget i de valgte posisjonene vi betrakter. I figuren er deler av posisjonsdatapunktene vist for tre ulike tidspunkt.

I kapitlet om numeriske metoder tidligere i boka, ble det vist at den andre deriverte kan uttrykkes på differens-form som følger:

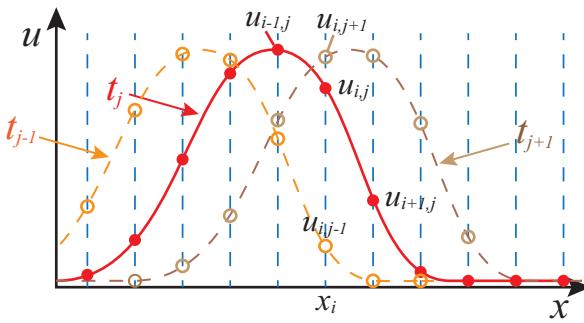
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\equiv u_{xx}(x_i, t_j) = \\ &\frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

På kortform kan dette skrives slik:

$$u_{xx,i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (8.1)$$

På tilsvarende måte kan vi angi den dobbeltderiverte med hensyn på tid:

$$u_{tt,i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta t^2} \quad (8.2)$$



Figur 8.1: Ved bruk av numeriske metoder beskrives en bølge bare i diskrete posisjoner i rommet og i diskrete tidspunkt. Her er en og samme bølge angitt i tre ulike tidspunkt. Første indeks angir posisjonsnummer, og andre indeks angir tidspunkt-nummer i beskrivelsen.

Hele bølgeligningen får da formen:

$$u_{tt,i,j} = v^2 u_{xx,i,j} \quad (8.3)$$

Ligning (8.2) settes inn i ligning (8.3), og leddene ordnes. Resultatet er:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + (u_{i,j} - u_{i,j-1}) + (\Delta t v)^2 u_{xx,i,j}$$

Uttrykket viser at dersom vi kjenner bølgen i ett tidpunkt og i det forrige, kan vi beregne utslaget til bølgen ved neste tidspunkt i vår beskrivelse. Dette er en viktig formel som vi skal dvele en del ved:

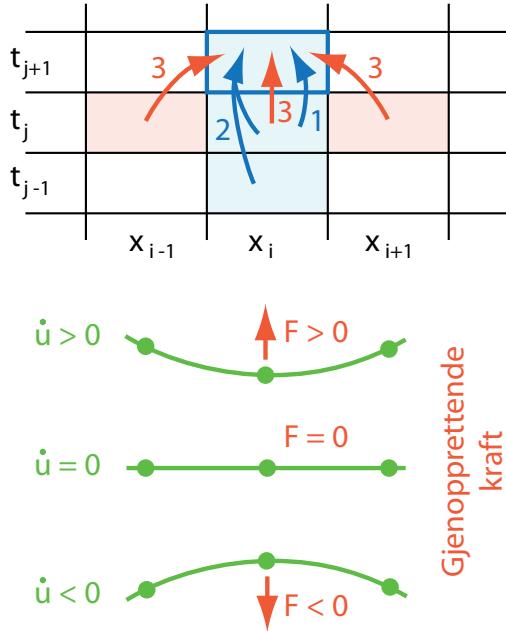
Algoritmen for å beregne hvordan en bølge utvikler seg i tid og rom, er gitt ved ligningen:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + (u_{i,j} - u_{i,j-1}) + (\Delta t v)^2 u_{xx,i,j} \quad (8.4)$$

Disse leddene er faktisk ganske enkle å forstå:

- Første ledd til høyre for likhetstegnet sier at vi må ta utgangspunkt i nåværende utslag til et punkt i bølgen når vi skal beregne utslaget i neste tidspunkt.
- Andre ledd svarer til at vi antar at den tidsderiverte til utslaget i vårt gitte punkt på bølgen vil være omtrent den samme i neste tidssteg som den var i det forrige. Dette er “treghetsleddet” svarende til Newtons første lov.
- Tredje ledd sier at dersom bølgen i vårt gitte punkt buer (ofte: Buler vekk fra likevektstilstanden), finnes det en “gjenopprettende kraft” som forsøker å dra systemet tilbake mot likevektstilstanden. Se figur 8.1. Denne gjenopprettende kraften har en nær sammenheng med fasenhastigheten til bølgen. I uttrykket inngår fasenhastigheten i annen potens. Fasenhastigheten er derfor bestemt av hvor kraftig naboområdet påvirker bevegelsene til et vilkårlig valgt punkt i bølgen. Algoritmen kan anskueliggjøres slik det er gjort i figur 8.2

Algoritmen i ligning (8.4) viser at dersom vi kjenner til bølgen i alle posisjoner i ett tidspunkt t_j og bølgen slik den var et lite tidssteg før dette tidspunktet, t_{j-1} , så kan vi beregne bølgen slik den vil være i det kommende tidspunktet t_{j+1} . Det er utfordringer som må løses med hensyn til initialbetingelser og grensebetingelser, men det kommer vi tilbake til straks.



Figur 8.2: Illustrasjon av den sentrale og svært viktige algoritmen som kan brukes for å beregne tidsutviklingen til en en-dimensjonal bølge når vi kjenner initialbetingelser og randbetingelser. Nytt utslag i et punkt bestemmes av 1: utslaget “nå” i samme punkt, 2: at hastigheten til punktet i første tilnærming vil være den samme i neste tidssteg som i det forrige, og 3: at den gjenopprettende kraften fra naboen til punktet vil øke eller minne endringen i posisjon alt etter fortegnet til krumningen av den gjenopprettende kraften.

Ligning (8.4) er vel det enkleste uttrykket å ta utgangspunkt i når vi skal *forstå* grunnlaget for en beregningsalgoritme. Uttrykket egner seg ikke så godt for utformingen av selve programkoden. Da er det en fordel å sette ligning (8.1) inn i ligning (8.4), og resultatet blir med litt ordning av leddene:

$$u_{i,j+1} = 2 \left(1 - \left(\frac{\Delta t v}{\Delta x} \right)^2 \right) u_{i,j} - u_{i,j-1} + \left(\frac{\Delta t v}{\Delta x} \right)^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \quad (8.5)$$

Problem ved kantene av beregningsområdet:

Ligning (8.5) er det sentrale uttrykket vi bruker for å beregne hvordan en bølge utvikler seg i tid, men uttrykket inneholder noen viktige detaljer vi må se nærmere på. Når vi skal starte beregningene, har vi antatt at vi kjenner initialbetingelsene langs den delen av bølgen vi beskriver ved start av beregningene. For eksempel er utslaget ved tidspunktet $j = 0$ gitt ved $\{u_{i,0}\}$ for $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Men i ligning (8.5) inngår også $x_{i+1,0}$ og $x_{i-1,0}$. Punktene $x_{-1,0}$ og $x_{N+1,0}$ eksisterer ikke, så algoritmen vår må gjøre noen kunstgrep for å behandle

disse leddene. Vi må med andre ord angi såkalte "randbetingelser" for beregningsområdet vårt (engelsk: "boundary conditions"). Dette problemet gjelder ethvert tidspunkt i beregningene - også ut over initialbetingelsene.

I praksis kan det være nærliggende å finne randbetingelser som er perfekte for beregningene vi ønsker å gjøre. Mest vanlige randbetingelser er "åpen rand" og "fullstendig reflekterende rand". I det første tilfellet setter vi $x_{-1,j} = x_{0,j}$ og $x_{N+1,j} = x_{N,j}$, i siste tilfellet setter vi f.eks. $x_{-1,j} = x_{N+1,j} = 0$. For en konkret beregning må vi selv velge hvordan vi skal angi randbetingelsene, og svaret avhenger i mange tilfeller sterkt av det fysiske systemet vi forsøker å beskrive.

For en bølge med null utslag ut mot randen, kan vi uten feil betrakte tidsutviklingen til bølgen helt til bølgen har brent seg til kanten av beregningsområdet. Ved å gjøre beregningsområdet stort nok, og begrense oss i hvor lenge vi betrakter bølgeutviklingen, kan beregninger av lokaliserte bølger bli bra selv uten å bekymre seg for randeffekter.

Problem med start-tidspunkt

Et annet ledd i ligning (8.5) som skaper problemer, er leddet $u_{i,j-1}$. Dersom vi starter beregningene ved tiden $t = 0$, eksisterer det ikke noe $u_{i,-1}$. Vi får derfor problemer med å starte selve beregningene.

På den annen side må vi ved alle differensialligninger ta utgangspunkt i initialbetingelsene (eller tilsvarende) for å komme fram til den spesielle løsningen vi søker. For en bølge betyr det at initialbetingelsene f.eks. kan være angitt som utslag i alle posisjoner ved $t = 0$, sammen med den tidsderiverte av utslaget i alle posisjoner ved samme tidspunkt. Ut fra disse opplysningene kan vi regne oss fram til posisjoner ved starttidspunktet og tilnærmete posisjoner ett tidssteg før starttidspunktet.

Det er også andre måter å angi initialbetingelser på, og prosedyrer som kan følges for å utnytte initialbetingelsene. Vi holder oss bare til utslag og den tidsderiverte av utslaget, begge som funksjon av posisjon.

Den tidsderiverte av utslaget i et punkt i kan angis på følgende måte:

$$\dot{u}_{i,j} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta t}$$

Følgelig:

$$u_{i,j-1} = u_{i,j} - \Delta t \dot{u}_{i,j} \quad (8.6)$$

For $j = 0$ får vi:

$$u_{i,-1} = u_{i,0} - \Delta t \dot{u}_{i,0} \quad (8.7)$$

Samlet

Anta at initialbetingelsene er gitt ved utslag $\{u_{i,0}\}$ i alle posisjoner langs bølgen og den tidsderiverte av utslaget $\{\dot{u}_{i,0}\}$ i alle posisjoner langs bølgen ved starttidspunktet. Da kan ligning (8.5) i kombinasjon med ligning (8.7) brukes for første tidssteg i beregningene. Dernest kan ligning (8.5) brukes for de resterende tidsstegene så mange tidssteg vi måtte ønske. Underveis må det tas hensyn til randbetingelsene.

Vi har ikke her laget såkalte dimensjonsløse uttrykk slik vi ofte finner i numeriske beregninger. Grunnen er som nevnt i kapittel 4, at for fenomenene som tas opp i denne boka er de aktuelle måleenhetene såpass nær opp til SI-enheter at faren for tap av numerisk presisjon er mindre enn f.eks. i kjernefysikk/elementærparikkelfysikk på den ene siden og kosmologi på den andre.

Det er også en annen bevisst grunn i vår sammenheng å beholde ligningene slik de er, uten å bruke dimensjonsløse uttrykk. Det er enklere å gjennomskue hva de ulike leddene i ligningene (8.4) og (8.5) representerer når vi unngår å bruke dimensjonsløse uttrykk.

8.2.1 Et bølge-eksempel

La oss som et eksempel beregne hvordan en gaussisk klokkeformet bølge beveger seg på en streng. Initialbetingelsene er et øyeblikksbilde av bølgen slik den er i ett tidspunkt (både mhp posisjon og hastighet!), og vi skal så følge den videre utviklingen i tid.

Utslaget som funksjon av posisjon langs strengen er gitt analytisk ved:

$$u(x, t) = Ae^{-\left(\frac{x-vt}{2\sigma}\right)^2} \quad (8.8)$$

Den tidsderiverte av utslaget er da:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv \dot{u} = Ae^{f(x,t)} \frac{df}{dt} = Ae^{-\left(\frac{x-vt}{2\sigma}\right)^2} (-2)\left(\frac{x-vt}{2\sigma}\right)\left(-\frac{v}{2\sigma}\right) = \frac{(x-vt)v}{2\sigma^2} Ae^{-\left(\frac{x-vt}{2\sigma}\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \equiv \dot{u} = \frac{v}{2\sigma^2}(x-vt)u \quad (8.9)$$

Vi velger å beskrive bølgen på en streng som er lang i forhold til bredden på klokkefunksjonen, og vi velger å følge bølgen bare så lenge at vi ikke støter nevneverdig mot endene av beregningsområdet vårt. Vi bruker i programmet en fullstendig fastlåsing av endepunktene underveis i beregningene.

Vi velger følgende parametre $A = 1.0$, $\sigma = 2.0$, $v = 0.3$, og lar x dekke området fra og med -20 til og med +20 i 400 ekvidistante steg. Vi forsøker oss med en Δt lik 0.1 og følger bevegelsen i 300 tidssteg. Ingen enheter er gitt, men vi antar at alle enheter er SI-enheter.

Et dataprogram skrevet i Matlab er gitt nedenfor. Programmet foretar beregningene ut fra de uttrykkene som er gitt ovenfor.

```

function bolgeanimasjonX

% Genererer posisjonsarray
delta_x = 0.1;
x = -20:delta_x:20;
n = length(x);

% Genererer posisjoner ved t=0
sigma = 2.0;
u = exp(-(x/(2*sigma)).*(x/(2*sigma))); % Gaussisk form
plot(x,u,'r');
figure;

% Genererer div parametre og tidsderivert av utslag ved t=0
v = 0.5;delta_t = 0.1;
faktor = (delta_t*v/delta_x)^2;
dudt = (v/(2*sigma*sigma))*x.*u;

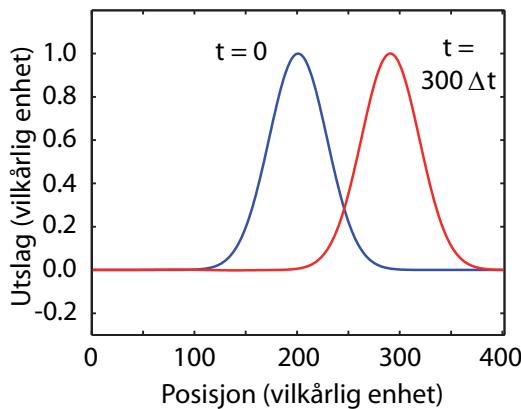
% Angir effektive initialbetingelser:
u_jminus1 = u - delta_t*dudt;
u_j = u;

for t = 1:1000
    u_jplus1(2:n-1) = (2*(1-faktor))*u_j(2:n-1) - ...
        u_jminus1(2:n-1) + faktor.*((u_j(3:n)+u_j(1:n-2));
    % Håndtering av randproblemet, dvs setter u_j(-1) = u_j(n+1) = 0
    u_jplus1(1) = (2*(1-faktor)).*u_j(1) - u_jminus1(1) + faktor.*u_j(2);
    u_jplus1(n) = (2*(1-faktor)).*u_j(n) - u_jminus1(n) + faktor.*u_j(n-1);

    plot(u_j);
    axis([0 n+1 -0.3 1.2])
    drawnow;

    u_jminus1 = u_j;
    u_j = u_jplus1;
end;

```



Figur 8.3: Eksempel på bølgen ved start av beregningene og 300 tidssteg senere.

Figur 8.3 viser bølgen ved startpunktet for tid og 300 tidssteg senere. Vi ser at bølgen

beveger seg mot høyre (positiv v) og at bølgens form beholdes uforandret.

I en oppgave sist i kapittelet blir du bedt om å undersøke hvordan bølgen utvikler seg dersom vi bruker en \dot{u} som enten er for liten eller for stor i forhold til hva den burde vært ifølge ligning (8.9). Vi ber også i enda en oppgave om at du modifiserer koden slik at du kan håndtere et tilfelle der bølgen treffer på et grensesjikt mellom to medier med ulik impedans (ulik fasehastighet). Det anbefales sterkt at du gjennomfører disse oppgavene, siden det kan gi en betydelig bedre forståelse av bølger.

En ekstra utfordring til slutt: Når vi spiller på gitar, trekker vi strengen ut slik at den danner en skjev trekant (med rette kanter) i forhold til likevektstillingen, og slipper så strengen. Bruk tankegangen og algoritmen som ligger bak figur 8.2 til å foreslå hvordan strengen vil bevege seg videre! Det vil avsløre om du har forstått algoritmen eller ikke! Du vil kanskje bli overrasket over resultatet!

8.3 Dispersjon: Fase- og gruppehastighet

I forrige delkapittel studerte vi mekanismene bak tidsutviklingen for en endimensjonal bølge. Vi sa da innledningsvis at beregningene var basert på at vi ikke hadde *dispersjon*. “Ingen dispersjon” betyr at en bølge beveger seg med samme hastighet uansett hvilken bølgelengde bølgene har. I beregningene var bølgehastigheten v en konstant.

For mange fysiske bølgefenomener vil den gjenopprettende kraften endre seg med bølgelengden. Vi sier da at mediet er *dispersivt*. Fargespekteret vi får når vi sender hvitt lys gjennom et glassprisme er et eksempel på fenomenet *dispersjon*. Spekteret skyldes at lys med ulike bølgelengder har ulik hastighet gjennom glasset. Dette er glassets dispersjonsegenskap for lys.

La oss se litt nærmere på dette. Vi vet at brytningsindeksen til glass varierer med bølgelengden for lys (se figur 8.4 for ulike typer glass). Brytningsindeksen øker når frekvensen øker (bølgelengden avtar).

I kapittel 9 vil vi vise at fasehastigheten til elektromagnetiske bølger (lys) i glass er gitt ved

$$v_f = c_{glass} = c_0/n(\lambda)$$

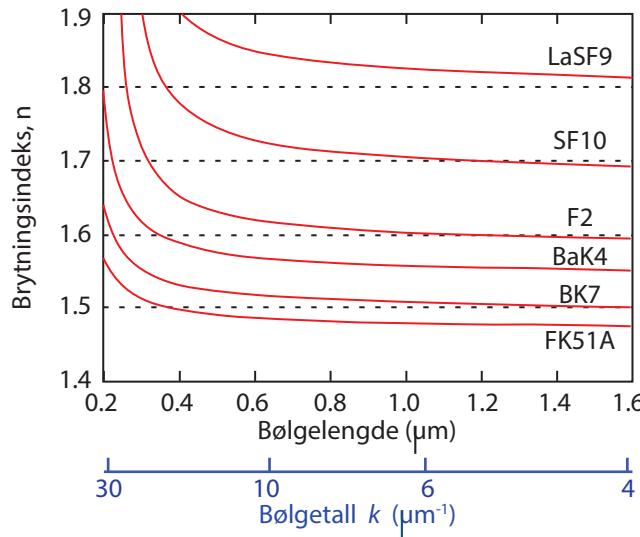
hvor c_0 er lyshastigheten i vakuum, $c_{glass} = v_f$ er lyshastigheten i glass, som per definisjon er fasehastigheten til lys i glass. $n(\lambda)$ er brytningsindeksen som altså er bølgelengdeavhengig.

Fasehastigheten er den hastigheten en konstant laserstråle vil ha når den brer seg gjennom et medium.

For lys i glass i figur 8.4 betyr dette at fasehastigheten avtar når frekvensen øker. En slik sammenheng kaller vi *normal dispersjon*.

En litt annen grafisk fremstilling blir ofte brukt for å få fram lovmessigheter ved dispersjon. I et slikt diagram angis vinkelfrekvensen ω som funksjon av bølgetallet k . For en vanlig monokromatisk bølge $A \cos(kx - \omega t)$ er hastigheten (dvs fasehastigheten) gitt ved:

$$v_f = \frac{\omega}{k}$$



Figur 8.4: Brytningsindeksen for lys i ulike former for glass. Figuren er basert på en figur tilgjengelig på Wikipedia under “Refractive Index” (pr 11. nov. 2016), men noe modifisert.

Dersom vi skal sende informasjon fra et sted til et annet, kan vi ikke bare sende en konstant laserstråle. Vi må gjøre endringer i strålen, og informasjonen blir formidlet gjennom endringene.

I en optisk fiber sender vi ofte en rekke lyspulser etter hverandre. Ved radiotelekomunikasjon lager vi også variasjoner i radiobølgen som fører til at bølgen kan sees på som ulike “grupper” av bølger som kommer etter hverandre. Det merkelige er da at disse pulsene eller bølgegruppene forplanter seg gjennom fiberen eller atmosfæren med en litt annen hastighet enn en konstant laserstråle ville forplantet seg med. Pulsene eller bølgegruppene forplanter seg med en hastighet kalt *gruppehastigheten*.

Det er oftest liten forskjell på fasehastighet og gruppehastighet for elektromagnetiske bølger. Når vi kaster en stein i et blikkstille vann vil imidlertid gruppehastigheten bare være halvparten av den hastigheten vannbølger hadde beveget seg på dersom det var en bølgemaskin som laget kontinuerlige bølger med omtrent samme bølgelengde som vi så i ringene etter steinen traff vannet. Det er derfor viktig å skille mellom fasehastighet og gruppehastighet!

Det er dispersjon som ligger bak forskjell i fase- og gruppehastighet. Sammenhengen mellom fasehastighet v_f , (vinkel)frekvens ω og bølgetall k er:

$$\omega = v_f k$$

Når det ikke er noen dispersjon, er v_f uavhengig av k og plotter vi ω som funksjon av k får vi en rett linje.

Ved dispersjon vil imidlertid v_f være en funksjon av bølgelengden og dermed k . Vi kan da skrive:

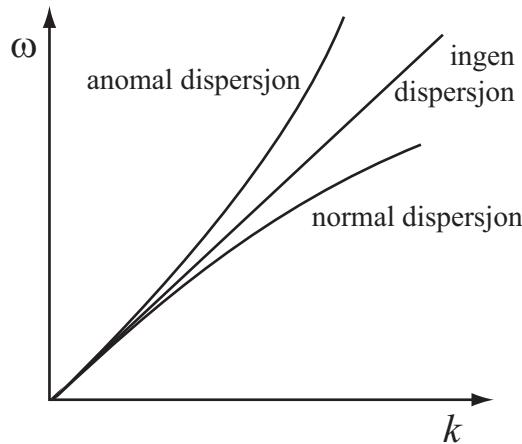
$$\omega(k) = \mathcal{F}(k)$$

hvor \mathcal{F} er en eller annen funksjon. Da vil et plot av ω som funksjon av k ikke lenger være en rett linje.

Vi kaller \mathcal{F} , som gir oss sammenhengen mellom $\omega(k)$ og k , for *dispersjonsrelasjonen* for det aktuelle mediet. For dispersive medier vil kurven i et ω versus k diagram være en krum linje, slik som vist i figur 11.6. Når kurven krummer nedover avtar fasehastigheten med bølgetallet (når bølgelengden blir mindre). Dette kalles *normal dispersjon*. Når kurven krummer oppover, øker fasehastigheten med bølgetallet (når bølgelengden blir mindre). Dette kalles *anomal dispersjon*.

Det kan vises at gruppehastigheten bestemmes av stigningstallet av dispersjonsrelasjonen på det området som inneholder de bølgetallene (bølgelengdene) som finnes i signalet:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (8.10)$$



Figur 8.5: Sammenhengen mellom vinkelfrekvensen ω og bølgetallet k for et gitt medium, kalles dispersjonsrelasjonen for mediet. Vi skiller mellom tre ulike klasser av medier, som angitt i figuren. Merk: De tre kurvene representerer helt ulike fysiske virkningsmekanismer, slik at de tre kurvene slett ikke behøver å være sammenfallende for lave k -verdier. Det er formen (krumningen) som er viktig!

Det kan vises matematisk at en slik definisjon faktisk svarer til hastigheten til "omhyllingskurven" til en sammensatt bølgepakke, i alle fall der omhyllingskurven har en gaussisk form. Det svarer til nettopp det vi forbinder med "gruppehastighet". For mer kompliserte "omhyllingskurver" er det ikke alltid så lett å angi en gruppehastighet presist, siden selve formen for omhyllingskurven vil endre seg etter som den beveger seg.

Det at gruppehastigheten er den deriverte av dispersjonsrelasjonen $\omega(k)$ åpner opp for interessante sammenhenger. Det vil vi benytte oss av flere ganger i denne boka.

La oss f.eks. finne et uttrykk for hvordan gruppehastigheten varierer med brytningsindeksen. Utgangspunktet er da relasjonen:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c_0}{n(\omega)}$$

Herav følger:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = -\frac{c_0}{n^2} \frac{\partial n}{\partial k} + \frac{c_0}{n}$$

$$v_g = v_f(\omega) \left(1 - \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial k}\right) \quad (8.11)$$

Ved normal dispersjon er $\frac{dn}{d\omega} > 0$ hvilket innebærer at $v_g < v_f$, dvs at gruppehastigheten er mindre enn fasehastigheten. Bruker vi dataene fra figur 8.4 ser vi at det er svært liten forskjell mellom fasehastighet og gruppehastighet når vi sender lys gjennom glass, - i alle fall så lenge bølgelengden er større enn 400 nm (synlig lys og IR). Derimot blir dispersjon fort et stort problem dersom vi forsøker å sende lys med kortere bølgelengde gjennom glass.

I moderne kommunikasjon bruker vi optiske fibre og bølgelengder i IR-området hvor brytningsindeksen nesten er helt uavhengig av bølgelengden. Da er dispersjonen svært liten, og det gjør det mulig å bruke korte pulser som sikrer en høy overføringshastighet for data.

8.3.1 Hvorfor er lyshastigheten i glass mindre enn i vakuum?

Det kan her være på sin plass med et lite sidesprang, siden det i praksis har vist seg at relativt få vet hvorfor lyshastigheten er mindre i glass enn i vakuum. En klar indikasjon får vi ved å granske uttrykket for lyshastigheten gjennom et medium. Dette uttrykket gis gjerne i bøker i generell elektromagnetisme, og blir også gjennomgått i detalj i kapittel 9 i vår bok. Uttrykket er:

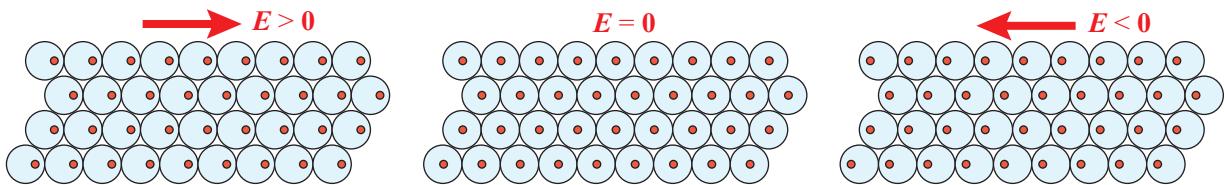
$$c = c_0/n = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

hvor c_0 er lyshastigheten i vakuum, n er brytningsindeksen, ϵ_0 er permittiviteten i det tomme rom, ϵ_r er den relative permittiviteten, μ_0 er den magnetiske permeabiliteten til vakuum, og μ_r er den relative magnetiske permeabiliteten. I glass, som er diamagnetisk, er μ_r tilnærmet lik 1, og vi får:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0}} = c_0 \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

Når vi da husker at ϵ_r er et mål for hvor mye polarisering (forskyvning av positive og negative ladninger i hver sin retning) vi kan oppnå når vi putter et materiale inn i et elektrisk felt, skjønner vi at polarisering av glass er grunnen til at lys går saktere gjennom glass enn i vakuum.

Figur 8.6 indikerer hva som skjer når en elektromagnetisk bølge passerer gjennom glass. Det elektriskefeltet vil veksle på en harmonisk måte, og iblant ha en verdi i én retning (på tvers av lysets bevegelsesretning), iblant null, og iblant motsatt retning av den førstnevnte. Elektronene i glassatomene vil bli påvirket av det elektriskefeltet, og hele "elektronskyen" rundt hver atomkjernen vil forflytte seg litt i forhold til kjernen slik det er indikert i figuren. I virkeligheten er forskyvningen ytterst liten, siden det elektriskefeltet fra den elektromagnetiske



Figur 8.6: Når en elektromagnetisk bølge passerer et stykke glass, vil det elektriske feltet i bølgen få elektronene i elektronskyen rundt hver atomkjernen til å forskyve seg slik det forventes ut fra Coulomb-kraften.

bølgen normalt er lite i forhold til de elektriske kreftene mellom kjerne og elektron.¹ Likevel vil det selv ved svakt lys bli en kollektiv forflytning av elektronene i forhold til kjernene som faktisk har betydning.

Den kollektive forflytningen resulterer i at glasset nærmest kan ansees som en antenn med oscillatorende strømmer. Denne oscillasjonen i ladninger fører til at det sendes ut elektromagnetiske bølger med samme frekvens som bølgen som startet det hele. Vi har imidlertid sett i kapittel 3 (tvungne svingninger) at det generelt sett er en faseforskjell mellom bevegelsen og den påtrykte kraften. Det er *kombinasjonen av den opprinnelige bølgen og den faseforskjøvne reemitterte bølgen fra de oscillatorende elektronskyene*, som sørger for at lyshastigheten i glass er mindre enn i vakuum.

Det sier seg selv da, at når den elektromagnetiske bølgen har passert glasset og kommer ut i luft (nær vakuum i vår sammenheng), vil det ikke være noe nevneverdig polarisering av mediet, og bølgen vil ikke bli forsinket av den reemitterte bølgen. Lyshastigheten går da selvfølgelig igjen tilbake til (nær) lyshastigheten i vakuum.

Dersom vi igjen tenker tilbake på kapittel 3 og tvungne svingninger, husker vi også resonansfenomenet. Ved visse frekvenser ble utslaget ekstra stort som følge av den påtrykte kraften. Dersom du gransker figur 8.4 kan du se klare antydninger til at noe spesielt skjer for bølgelengder litt under 200 nm ($0.2 \mu\text{m}$). Da er vi inne i UV-området, og vi nærmer oss resonans i elektronoscillasjonene rundt kjernene. Ved å tenke på resonanskurvens form i kapittel 3, kan du da forhåpentligvis også forestille deg hva som skjer dersom vi passerer resonans og kommer til enda kortere bølgelengder. Da vil kurver i et diagram likende figur 8.4 ha helling motsatt vei, og vi får såkalt anomal dispersjon. For enkelte materialer vil resonansfrekvensen ligge ved mye lengre bølgelengder, og da kan vi oppnå anomal dispersjon til og med for vanlig synlig lys.

Dette er ett av mange sider av fysikken der de enkle lovemessighetene i de første kapitlene i boka dukker opp. Enkle prinsipper er ofte en del av forklaringen også ved mer kompliserte fenomener.

[♣ ⇒ En liten, morsom, historisk fortelling i denne sammenheng:

I Newtons partikkelmodell for lys ("corpuscular model of light") ble brytingen av lys forklart ved at partiklene gikk *raskere* gjennom glass enn i luft, mens bølgebeskrivelsen gir motsatt prediksjon. Måling av lyshastigheten i glass ble derfor i en periode ansett som en viktig test på hvorvidt en bølgemodell eller partikkelmodell samsvarer best med eksperimenter. Vi kan imidlertid ikke måle lyshastigheten i en sammenhengende, monokromatisk bølge. Vi må ha en "struktur" i bølgen som vi kan gjenkjenne for å kunne måle lyshastigheten. Dette tilsvarer

¹I et eksperiment med kraftig pulset laser i Tyskland i 2013, er likevel det elektriske feltet så kraftig at det river mange elektronene helt løst fra kjernen. Da omdannes glasset fra å være en isolator til en god elektrisk leder i løpet av femtosekunder!

at vi måler gruppehastigheten.

Det var imidlertid ingen som var i stand til å måle lyshastigheten til lys på denne måten på 1700-tallet og begynnelsen av 1800-tallet. Foucault var den første som gjennomførte eksperimentet. Det var i 1850, og resultatet viste at lyshastigheten var mindre i glass enn i luft, noe som støttet bølgemodellen for lys. På dette tidspunktet hadde imidlertid de fleste fysikere motvillig gått bort fra Newtons partikkelmanndel for lys. Eksperimenter av Thomas Young (dobbeltspalteksperimentet i 1801) og et arbeid til Fresnel omkring 1820 (som først ble imøtegått av Poisson, men siden styrket av et eksperiment gjennomført av Arago), hadde etter hvert overbevist fysikerne om at bølgemodellen for lys ga en bedre beskrivelse enn partikkelmanndelen. Les gjerne om "Aragos flekk" (Arago spot på engelsk) på Wikipedia. ← ♠]

8.3.2 Numerisk modellering av dispersjon

Vi bruker ofte ordet "bølge" temmelig ukritisk, og tenker ofte ikke over at en virkelig fysisk bølge *må* ha en begrenset utstrekning i tid og rom. Det betyr at når vi beskriver en bølge f.eks. med følgende uttrykk:

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

er dette i beste fall bare en *tilnærmet beskrivelse* av virkeligheten innenfor et begrenset intervall i tid og rom. Hastigheten en slik bølge beveger seg med er fasehastigheten $v = \omega/k$. En fourieranalyse av en slik bølge ville gitt én skarp topp i frekvensbildet.

Dersom vi fourieranalyserer en mer realistisk matematisk beskrivelse av en bølge med *begrenset utstrekning i tid og rom*, vil frekvensspekteret bre seg ut over et helt område langs frekvensaksen. Dersom fasehastigheten er den samme for alle frekvenskomponentene, er det ingen dispersjon. Men dersom fasehastigheten varierer blant de frekvenskomponentene som bidrar nevneverdig til bølgen, har vi dispersjon. La oss se på et konkret eksempel basert på numerisk modellering for å få konkretisert både betingelser og følger av dispersjon. Da kommer forskjellen mellom fase- og gruppehastighet fram på en klar måte.

Programkoden (i Matlab) for vår modellering er gjengitt bak i dette kapitlet. Vi anbefaler sterkt at du kopierer koden og kjører animasjonene for å se detaljer som vanskelig kan gjengis uten å følge en nærmest kontinuerlig tidsutviklingen.

Vi tar utgangspunkt i en modellert fysisk bølge, det vil si en bølge som endrer karakter (form) fra et område i rom-tid til et annet område. Vi har valgt å ta utgangspunkt i en bølgepakkesom er dannet ved en harmonisk bølge konvolert av en gaussisk funksjon.

$$z(x) = \cos(k(x - x_r)) \cdot e^{-\left(\frac{x-x_r}{\sigma_x}\right)^2} \quad (8.12)$$

Dette er bølgen slik vi tenker oss den er ved tiden $t = 0$. Her er x_r posisjonen der bølgepakken har sitt maksimum, og bredden på omhyllingskurven er gitt med σ_x . k er bølgetallet for den underliggende harmoniske bølgen. Bølgetallet er lik 2π multiplisert med en romlig frekvens x_{freq} .

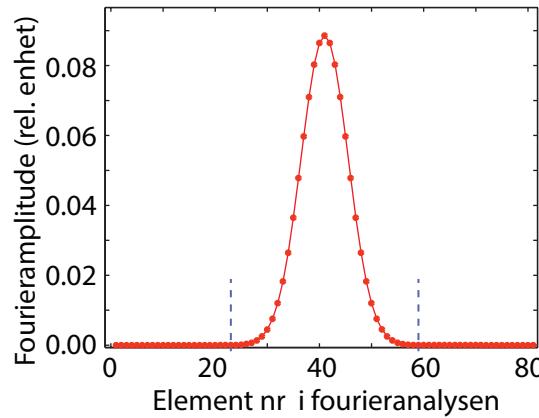
Det kan virke forvirrende å snakke om romlig frekvens, men det er ikke noe mystisk. Vi kjenner fra tidligere at vi kan beskrive en bølge på én fast posisjon i rommet etter som tiden går. I så fall får vi tid langs x-aksen i et tidsbilde, og vi får (tids)frekvenser langs x-aksen i et fourierspekter. (Tids)frekvenser er de inverse av tilsvarende periodetider.

Vi kan like godt beskrive bølgen som funksjon av posisjon i rommet ved ett tidspunkt (svarte til et blitz-bilde som vi har omtalt tidligere). I så fall vil tidsbildet bli erstattet av et

romlig bilde med posisjon langs x-aksen. En fourieranalyse av et slikt signal vil gi oss romlige frekvenser (inverse av bølgelengder).

For vårt valg av parametre er bølgen i utgangspunktet ($t = 0$) vist øverst til venstre i figur 8.9.

Siden bølgen er begrenset i utstrekning, vil en fourieranalyse av $z(x)$ gi utslag på en rekke (romlige) frekvenser. For vårt valg av parametre ble resultatet som illustrert i figur 8.7. Komponentene med indeks 23 til og med 59 (markert med blå vertikale streker) inneholder alle komponentene som er nevneverdig forskjellig fra null (sammenlignet med verdien til den kraftigste komponenten). De ulike indeksene svarer til hver sin (romlige) frekvens (slik det er forklart i detalj i kapitlet om fourieranalyse).



Figur 8.7: Frekvensanalyse av bølgepakken vår (absoluttverdier). Kun det lille området der koeffisientene er klart forskjellig fra null er vist. Langs x-aksen er det bare gitt elementnummer, for vi er her bare interessert i å plukke ut de indeksene vi er interessert i.

Fourieranalysen gir oss (romlig) frekvens, amplitude og fase til hver av komponentene vi er interessert i.

$$k(i) = (i - 1) \frac{2\pi x_{max}}{N} \quad A(i) = 2\text{abs}(Z(i)) \quad \theta = \text{atan2}(\text{imag}(Z(i)), \text{real}(Z(i)))$$

hvor $Z(i)$ er i-te element i den fouriertransformerte av $z(x)$, x_{max} og N er henholdsvis største verdi av posisjon og antall punkter i vår beskrivelse. To-tallet i A kommer av at vi bruker bare nedre halvpart av fourierspekteret (ikke den foldete delen). Uttrykkene 'abs', 'atan2', 'imag' og 'real' er alle Matlab-funksjoner.

Vi vet da fra kapitlet om fouriertransfomasjon at vi kan beskrive samme funksjon som i ligning (8.12) ved en 'omvendt fouriertransfomasjon':

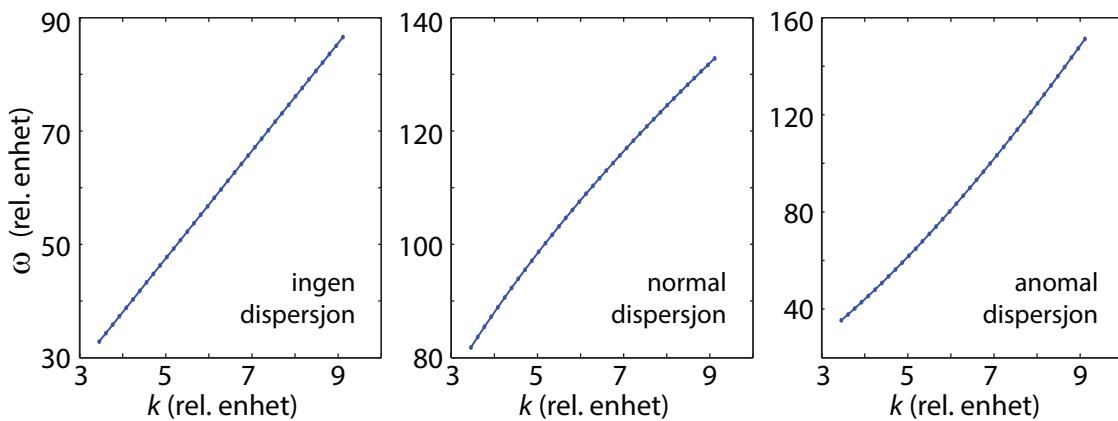
$$z(x) = \sum_{i=23}^{59} A(i) \cos(k(i)x + \theta(i)) \tag{8.13}$$

hvor vi bare har tatt med de komponentene som betyr nevneverdig for resultatet. Plotter vi $z(x)$ beregnet med ligning (8.13) og sammenligner med et plot basert på ligning (8.12), vil vi ikke kunne se noen forskjell visuelt.

Merk at i ligning (8.13) adderer vi cosinusfunksjoner, der hvert bidrag har samme amplitud over *hele området* vi gjør beregningen for. Det inngår ingen spesifikk opplysning om hvor toppunktet for bølgepakken skal være eller hvor bred den er. Alt dette er informasjon som ligger skjult i amplituder og faser på de ulike frekvenskomponentene som inngår.

Både ligning (8.12) og (8.13) beskriver bølgen ved tiden $t = 0$. Ligning (8.13) er mest nyttig i vår sammenheng fordi den egner seg godt for å beskrive hvordan bølgen vil *utvikle seg* med tiden når vi har dispersjon. Da durer ikke den algoritmen vi brukte først i kapitlet, fordi det finnes ingen enkel bølgeligning når ikke fasehastigheten er en konstant.

Bruker vi ligning (8.13) får vi inn tidsutvikling ganske enkelt ved å erstatte $\cos(k(i)x + \theta(i))$ med $\cos(k(i)x - \omega(i)t + \theta(i))$. Dette demonstrerer hvorfor fourieranalyse i blant er svært nyttig! Utfordringen blir imidlertid å bestemme $\omega(i)$.



Figur 8.8: Sammenhengen mellom frekvens og bølgetall brukt i våre beregninger for neste figur.

Vi har valgt følgende tre varianter:

$$\omega(k) = v_f k \text{ hvor } v_f \text{ er konstant} \quad \text{Ingen dispersjon}$$

$$\omega(k) = \text{param}_n \sqrt{k} \quad \text{Normal dispersjon}$$

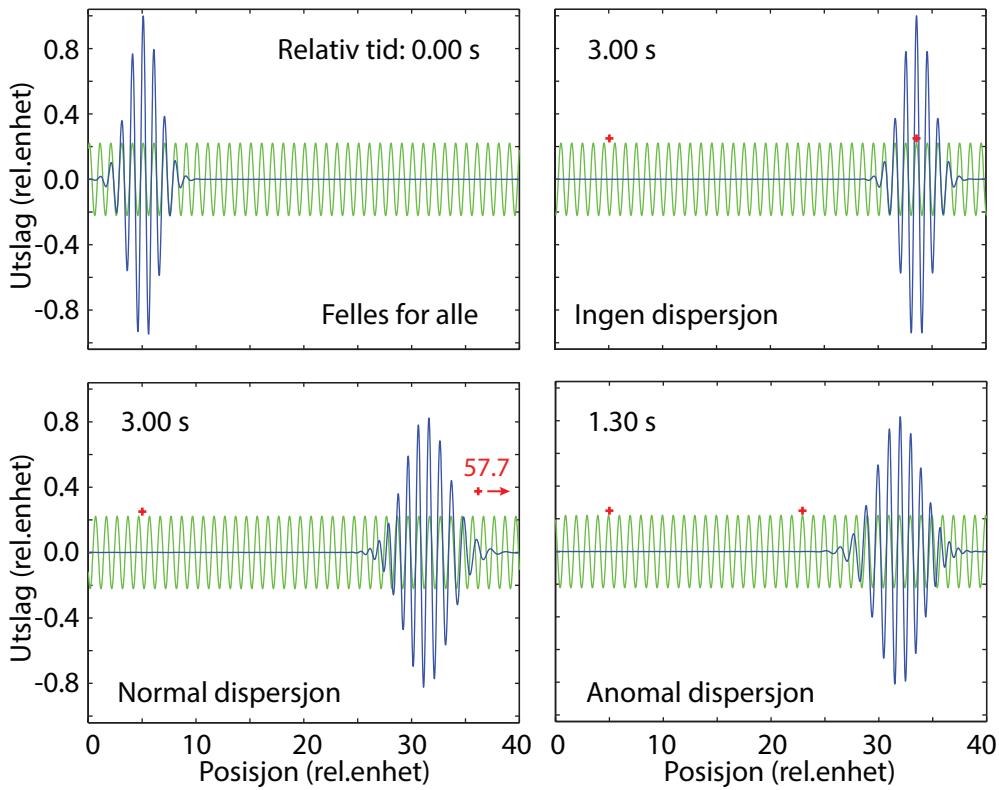
$$\omega(k) = \text{param}_a k^{3/2} \quad \text{Anomal dispersjon}$$

Senere i kapitlet vil vi omtale fysiske bølgefenomener hvor de valgte lovmessighetene gjelder.

Figur 8.8 viser vårt valg av hvordan ω varierer med bølgetallet k . Vi har valgt konstantene param_n og param_a og tidssteg i animeringen ved prøving og feiling for å få passe plot.

En detalj kan være verd å nevne: Dersom tidsstegene og/eller gruppehastigheten er for stor, vil bølgepakken gli utenfor plotteområdet mot høyre. Imidlertid, på grunn av periodisiteten som følger av enhver fast fourier transform, vil alt som har forsvunnet ut over høyre kant, dukke opp igjen fra venstre. Følger vi med på animasjonen og teller hvor mange ganger et slikt tilbakehopp skjer, kan vi studere hvordan bølgepakken utvikler seg ved betydelig lengre tid enn det vi har vist i vår figur. Det kan anbefales å f.eks. øke tidsstiget til det doble av det vi nå har valgt, for å se enda tydeligere hvordan bølgepakken flyter utover ettersom tiden går.

Resultatene av vår animering er gitt i tre av de fire plottene i figur 8.9. Det er en rekke detaljer som kommer ut av modelleringen/animeringen:



Figur 8.9: *Bølgepakken vi har har bruk i vår modellering. Øverst til venstre: Bølgepakken ved start av tidsutviklingen, de tre neste viser bølgepakken etter at den har vandret 3.0 s. Se teksten for detaljer.*

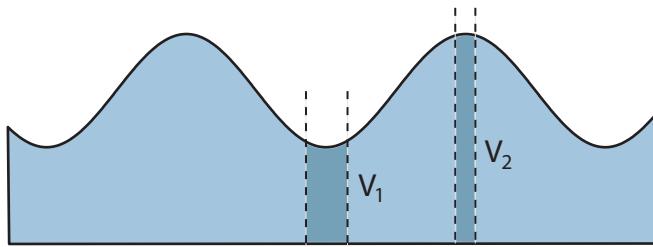
Figuren 8.9 viser viktige særtrekk ved dispersjon:

- Bølgeformen endres ikke med tiden når det ikke er dispersjon.
- Ved dispersjon “flyter bølgepakken ut”, formen endres, og maksimum amplitude avtar.
- Bølgepakken (“gruppen”) beveger seg med en annen hastighet enn fasehastigheten til den største komponenten i frekvensanalysen av bølgepakken (posisjon som svarer til denne bevegelsen er markert med et rødt plussstegn i figuren).
- Gruppehastigheten er lik fasehastigheten ved ingen dispersjon, dvs $v_g = v_f$.
- Gruppehastigheten er mindre enn fasehastigheten ved normal dispersjon, nærmere bestemt $v_g = \frac{1}{2}v_f < v_f$.
- Gruppehastigheten er større enn fasehastigheten ved anomal dispersjon, nærmere bestemt $v_g = \frac{3}{2}v_f > v_f$.
- Gruppehastighetene er nettopp som forventet ut fra ligning (8.10).
- Ved normal dispersjon er fasehastigheten for små bølgelengder, dvs lange bølgelengder, større enn fasehastigheten for korte bølgelengder. Da vil bølgepakkeformen endre seg slik at de største bølgelengdene vil dominere den raskeste delen av gruppen og de minste bølgelengdene vil dominere den siste (sakteste) delen av gruppen.
- For anomal dispersjon er det de korteste bølgelengdene som utgjør første del av gruppen og de lengste bølgelengdene siste del av gruppen.
- Ved animering vil vi kunne se at de individuelle bølgene under omhyllingskurven vil bevege seg forover eller bakover i forhold til omhyllingskurven.

8.4 Bølger i vann

Nå er tiden inne for å beskrive bølger på overflaten til vann. Vi vil imidlertid starte med kvalitative beskrivelser før vi tar tak i en matematisk beskrivelse hvor det er mulig å gå mer i detalj.

Vi utledet bølgeligningen for bølger på en streng og bølger i et medium i kapittel 6. Det hadde vært fint å gå gjennom en tilsvarende utledning for overflatebølger i vann, men det er en såpass omfattende oppgave at den er utekort i denne boka. Det henviser i stedet til bøker i hydrodynamikk eller geofysikk. Vi vil likevel ta med noen detaljer. I figur 8.10 er det vist én mulig modell det er mulig å ta utgangspunkt i (modellen er utgangspunkt for utledningen i f.eks. boka til Persson, referanse 4 bak).



Figur 8.10: Én modell for bølger går ut på at vertikale volumsnitt langs bølgefronten beholder sitt volum uansett om vi er i en bølgedal eller bølgetopp. Overflaten til snittene vil endres, men det ser vi bort fra i første omgang.

Her tenker vi oss at et vertikalt volumelement parallellt med bølgefronten har samme volum uansett om det befinner seg i en bølgedal eller bølgetopp. I figuren vil det si at $V_1 = V_2$. Men siden trykket er lik lufttrykket over vannoverflaten (tilnærmet det samme over alle volumelement), og trykket øker med dybden inne i vannet, er trykket i en gitt høyde over bunnen høyere i volumelementet som svarer til bølgetoppen sammenlignet med det i bølgedalen. På denne måten kan vi anse bølgen som en longitudinal trykkbølge som beveger seg med bølgehastigheten.

I kapittel 6 ble lydbølger i luft og vann beskrevet som trykkbølger. Modellen i figur 8.10 ligner litt på den beskrivelsen, men er likevel ganske forskjellig!

For lydbølger anså vi gassen eller væsken som kompressible, det vil si at dersom vi øker trykket, vil volumet gå ned. Kompressibilitetsmodulen stod svært sentralt i utledningen. Gravitasjon var imidlertid ikke inni bildet overhodet.

Når overflatebølger på vann modelleres, ser vi helt bort fra kompressibiliteten. Vi antar tvert om at vannet er ikke-kompressibelt. Uansett trykkendringer beholder et volumelement samme volum.

I overflatebølger vil stort trykk svare til at volumelementet er trykt sammen på tvers av bølgefronten, det vil si i et volumelement under en bølgetopp.

Vi kan undre oss over hvorvidt det er rimelig å operere med helt forskjellige modeller for lydbølger og overflatebølger, og selvfølgelig finnes det overgangssoner hvor disse beskrivelsene vil måtte gå over i hverandre. Imidlertid, det er fysisk sett gode grunner til å operere med ulike modeller.

Når det gjelder lydbølger er vi mest interessert i frekvenser i det hørbare området (og evt ultralyd). Det vil si fra ca 20 Hz og oppover. Periodetiden er 50 millisekunder eller mindre (til dels mye mindre). Dersom lyd skulle ført til overflatebølger slik vi skal beskrive i dette kapitlet, måtte vi forflytte betydelige vannmengder opp til flere meter i løpet av 25 millisekunder eller mindre! Det ville kreve enorme krefter (ifølge Newtons annen lov).

Derimot kan vi forflytte store vannmengder noen få mikrometer innen 25 millisekunder slik det kreves ved lydbølger, og til og med enda kortere tider (høyere lydfrekvenser). De kreftene som skal til i denne sammenhengen er oppnåelige.

Overflatebølger på vann har en langt lavere frekvens (i alle fall for store bølgehøyder). Da får vi tid til å flytte store mengder vann fra en bølgebunn til en bølgetopp med de kreftene som er tilgjengelig.

Det er altså tidsskalaen og Newtons annen lov som medfører at vi opererer med helt forskjellige modeller for lydbølger i vann og gravitasjonsdrevne overflatebølger på vann.

En bedre modell

Modellen gitt i figur 8.10 gir ikke noe god beskrivelse av overflatebølger når alt kommer til alt. For bedre beskrivelse tar vi gjerne utgangspunkt i en av basisligningene for fluid mekanikk, nemlig Navier-Stokes ligning:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathcal{T} + \vec{\mathcal{B}}$$

hvor ρ er massetetthet, \vec{v} er strømingshastigheten, p hydrostatisk trykk, \mathcal{T} er en stressfaktor (kan for eksempel inkludere overflatespenning), og $\vec{\mathcal{B}}$ er volumkrefter ("body forces" på engelsk) som virker per enhetsvolum i væsken. ∇ er del-operatoren.

Det kan være nyttig å se nøyne på Navier-Stokes ligning og gjenkjenne at den i det store og hele er en videreutvikling av Newtons annen lov for et veske-kontinuum.

Navier-Stokes ligning er ikke-lineær, noe som betyr at løsninger av denne ligningen ikke nødvendigvis følger superposisjonsprinsippet. Dersom to funksjoner hver for seg er løsninger av ligningen, vil ikke nødvendigvis summen av disse funksjonene være løsning av ligningen. Et annet karakteristisk trekk ved ikke-lineære ligninger er at de kan ha kaotiske løsninger, det vil si løsninger hvor vi ikke kan forutsi hvordan løsningen vil utvikle seg i tid (på en rent deterministisk måte). Enhver liten endring i initialbetingelser eller randbetingelser, vil kunne føre til at løsningen etter en tid vil kunne ha svært forskjellige verdier. Dette kalles gjerne "sommerfugleffekten". En sommerfugls bevegelse kan føre til at værutviklingen etter en stund er helt annerledes enn om sommerfuglen ikke hadde fløyet som den gjorde.

[♣] Det er en del morsomme rent matematiske utfordringer knyttet til Navier-Stokes ligning den dag i dag, men det skal vi ikke ta opp her.

Hoverpoenget mitt er å påpeke at det er et vell av ulike fenomener knyttet til bevegelse i fluider, og utrolig mange fysikere og matematikere har vært interessert i vannbølger. Her kan nevnes Newton, Euler, Bernoulli, Laplace, Lagrange, de la Coudraye, Gerstner, Cauchy, Poisson, Fourier, Navier, Stokes, Airy, Russel, Boussinesq, Koertweg, de Vries, Zabusky, Kruskal, Beaufort, Benjamin, Feir og flere. Vi snakker om monsterbølger, tsunamier, solitære bølger osv. Her er det en lang tradisjon, også i norske forskningsmiljøer, og fortsatt masse å ta fatt i!

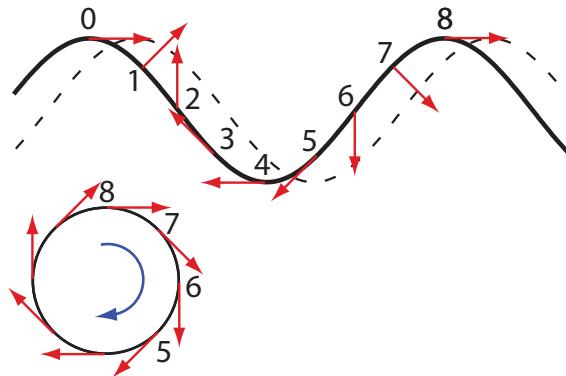
I vår tid har datamaskinene blitt så slagkraftige, og det er utviklet så mange numeriske metoder for bruk innen matematikk og fysikk, at vi nå kan ta tak i bølgebeskrivelser på en helt annen måte enn vi kunne få få decennier tilbake. Som et eksempel på den utviklingen som har foregått, kan det nevnes at professor Ron Fedkiw (født 1968) som arbeidet med Computer Sciences ved Standford University, fikk en Oscar-pris i

2008 for sitt arbeid med å animere realistiske vannbølger for bruk i filmindustrien (bl.a. i filmen "Poseidon"). For dere som er studenter i dag og som blir vant til å bruke numeriske metoder i løsning av matematiske og fysiske problemstillinger, er jo dette ekstra morsomt. Dere vil etter studiet ha ferdigheter som gjør at også dere med overkommelig innsats kan ta tak i realistiske animeringer av liknende omfang som Ron Fedkiw! (Interesserte kan lese mer om Ron Fedkiw på Wikipedia, hvor det også er lenker til Oscar-utdelingene og til Fedkiw's hjemmeside). $\Leftarrow \spadesuit$

8.4.1 Sirkelbeskrivelse

La oss nå gi en tegner-og-forteller beskrivelse av selve bølgene. Figur 8.11 viser et vertikalt snitt på tvers av bølgefrontene. Den heltrukne bølgen viser bølgen i ett øyeblikk, den stippled bølgen viser bølgen en kort tid etter. Bølgen beveger seg altså mot høyre.

I figuren er det tegnet inn piler som viser hvilken retning vannet må bevege seg for å komme fra bølgen slik den er nå, til slik den skal bli. Pilene i øvre halvdel er nokså naturlige å forstå, mens pilene i nedre halvdel kanskje er vanskeliger å henge på. Vi husker imidlertid at bølgen tross alt ikke medfører en netto transport av vann i bølgens retning, følgelig må vann som beveger seg forover i en del av bølgen, bevege seg bakover i en annen del av bølgen. Og vann som beveger seg oppover i en del av bølgen må bevege seg nedover i en annen del. Tar vi utgangspunkt i disse kjennsgjerningene, faller pilenes retning på plass rimelig greit.



Figur 8.11: Øvre del indikerer hvilken retning vannet i overflaten beveger seg når bølgen ruller mot høyre. I nedre del er det tegnet inn posisjon og hastighet til ett og samme volumelement idet en bølgetopp passerer. Det aktuelle bølgeelementet er det som er ved posisjon 8 i starten, men som i neste øyeblikk befinner seg i på den delen av bølgen som er inndikert med punkt 7 i øvre del. I neste øyeblikk har den en plassering i bølgebildet som svarer til punkt 6, osv. Resultatet er at volumelementet vi følger synes å bevege seg med i urettningen etter som tiden går.

Merk at vannet må bevege seg både langs bølgens utbredelsesretning og på tvers av denne. Det betyr at bølgen er en blanding av en longitudinal og en transversal bølge.

Tegner vi inn bevegelsesretning og relativ posisjon for ett og samme lille volumelement ved ulike tidspunkt mens en bølgetopp passerer, får vi et diagram som i nederste del av figuren. Det synes altså som om vannet i overflaten beveger seg langs en vertikal sirkel på tvers av bølgefronten.

Lenger ned i vannet vil sirkelbevegelsen gå over fra å være nær sirkelformet (som i

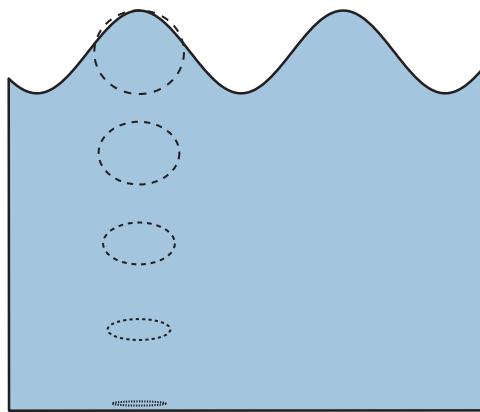
overflaten) til å bli en mer og mer flatklemt ellipse, som vist i figur 8.12. Helt nede ved bunnen er bevegelsen nesten en ren horisontal bevegelse fram og tilbake. Det kan vi se når vi snorkler på bunnen av sjøen. Tare og andre vekster svinger litt dovent fram og tilbake etter som bølger passerer på overflaten.

Denne beskrivelsen gjelder imidlertid bare for grunt vann, det vil si for vann som ikke er svært mye dypere enn bølgelengden mellom bølgetoppene.

For dypere vann vil bølgene på overflaten bare forplante seg et stykke nedover, men nær bunnen merkes ikke bølgene på overflaten overhodet.

Det er mulig å se den sirkulære bevegelsen ved å sprute små dråper med farget olje inn i vannet, forutsatt at massettetheten til disse dråpene er omrent som for vann. Vi kan da i vannbølgetanker, som i kjelleren på Abels hus ved UiO og i Sintefs bølgetanker, følge bevegelsen til dråpene. Jeg er imidlertid blitt fortalt at det er vanskeligere å vise disse sirkulære bevegelsene enn vi får inntrykk av gjennom lærebøker.

Når vi tegner inn sirkler og ellipser i ulike dyp, er det også en beskrivelse som lett kan misoppfattes. Hvordan skal vi se for oss sirklene og ellipsene for etterfølgende volumelementer i bølgerettingen? Her må det være en form for synkronisering som ikke kommer fram av figuren og som nødvendigvis må gi en mer utfyllende beskrivelse enn enkle skisser viser.



Figur 8.12: Når vi skal inndikere hvordan vannet beveger seg mellom overflaten og bunnen, brukes enkle skisser som denne. Imidlertid gir skisser som dette et vel enkelt bilde av hva som skjer.

Sinusformen er forresten ikke den beste modellen for overflatebølger på vann. Ofte er bølgetoppene spissere enn bunnene, slik som indikert i figur 8.13. Jo høyere amplitude, desto spissere blir bølgetoppen. Det er imidlertid en grense for denne utviklingen. Når bølgetoppen blir større enn om lag 1/7 av bølgelengden, blir bølgen gjerne ustabil og kan f.eks. gå over til en brytende bølge. Ved grensen er vinkelen mellom oppadgående og nedadgående del av bølgetoppen om lag 120 grader (en vinkel som selvfølgelig ikke gjelder helt inn på selve toppunktet).

8.4.2 Fasehastigheten til vannbølger

Selv om vi ikke har vist hvordan bølgeligningen faktisk vil se ut for overflatebølger, kan vi sette opp et tilnærmet uttrykk for én egenskap ved løsningene, nemlig fasehastigheten til vannbølger. Uttrykket er:

$$v_f^2(k) = \left[\frac{g}{k} + \frac{T k}{\rho} \right] \tanh(kh) \quad (8.14)$$

hvor k er bølgetallet, g tyngdens akselerasjon, T overflatespenningen, ρ massetettheten og h dybden på vannet. Formelen gjelder for en praktisk talt flat bunn (sammenlignet med bølgelengden).

Det første leddet inni parenteser angir gravitasjonens bidrag til den gjenopprettende kraften, mens siste leddet angir overflatespenningens bidrag. Første leddet svarer altså til såkalte "gravitasjonsdrevne bølger", mens siste leddet svarer til hva vi kaller "kapillærerbølger".

Siden bølgetallet k inngår i nevneren i det ene leddet og i telleren i det andre, betyr det at gravitasjonsleddet vil dominere for små bølgetall (dvs for lange bølgelengder), mens overflatehinne-leddet vil dominere for høye bølgetall (små bølgelengder). Det kan være interessant å finne den bølgelengden der de to leddene er omtrent like store. Vi setter da:

$$\frac{g}{k_c} = \frac{T k_c}{\rho}$$

Indeksen c indikerer et "kritisk" bølgetall hvor de to bidragene er like. Resultatet er:

$$\frac{1}{k_c^2} = \frac{T}{g\rho}$$

Siden $k = 2\pi/\lambda$ følger endelig:

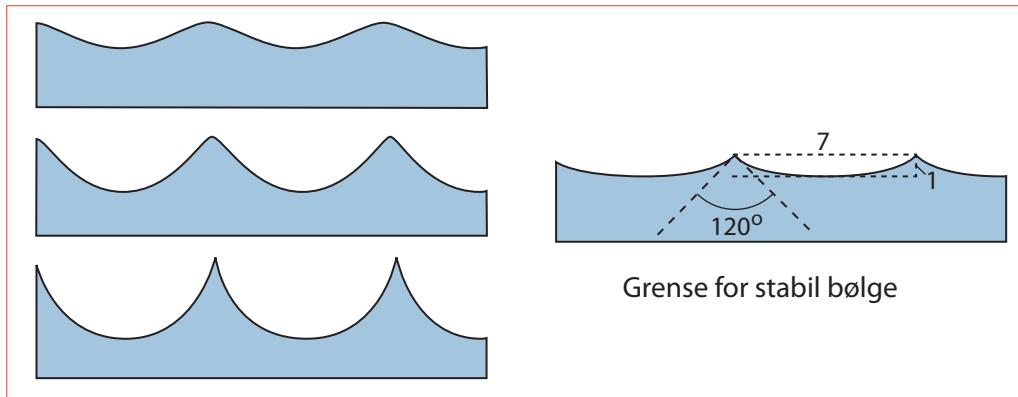
$$\lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{T}{g\rho}}$$

For rent vann ved omtrent 25 grader C og 1 atmosfære er $T = 7.197 \cdot 10^{-2}$ N/m. Da blir den kritiske bølgelengden:

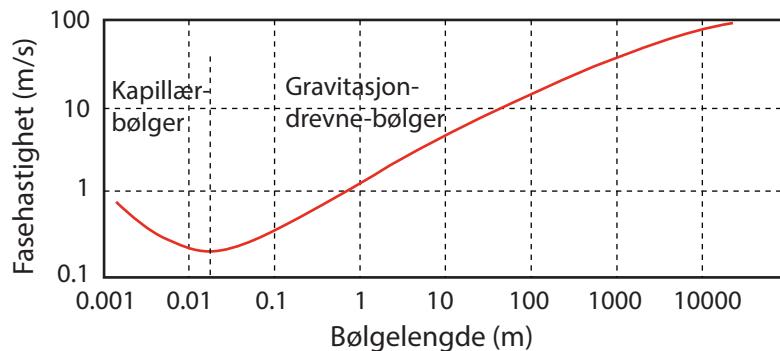
$$\lambda_c \approx 1.7 \text{ cm}$$

Med andre ord vil overflatehinnen dominere fasehastigheten for bølger med bølgelengde godt mindre enn 1.7 cm, mens gravitasjon vil dominere for bølgelengder godt større enn 1.7 cm.

Fasehastigheten er faktisk minst når bølgelengden er om lag 1.7 cm. Den er da bare 0.231 m/s. Både for mindre og større bølgelengder øker fasehastigheten, og ved svært lange bølgelengder kan fasehastigheten komme opp i over 100 m/s. Figur 8.14 viser beregnet fasehastighet for bølgelengder fra 1 mm til 10 km. Beregningene er stort sett basert på at vanndybden er stor i forhold til bølgelengden (noe som ikke lett lar seg gjøre i praksis her på Jorda for de lengste bølgelengdene!).



Figur 8.13: Bølgeformen er gjerne slik at toppen er spissere enn bunnen. Effekten blir tydeligere etter som amplituden øker. Når topp-til-topp amplituden er $1/7$ av bølgelengden, får vi en grenseverdi hvor ytterligere økning av amplitud gir ustabil bølge.



Figur 8.14: Fasehastigheten for overflatebølger på vann, forutsatt at dybden er betydelig større enn bølgelengden (ikke lett å realisere i praksis for øvre del av diagrammet). Figuren er omarbeidet etter en figur hentet fra <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/waves/watwav2.html> i februar 2014.

Vi skal straks se nærmere på uttrykket for fasehastighet, men vil først minne om noen særtrekk ved tangenshyperbolikus-funksjonen. Hele spekteret av hyperbole trigonometriske funksjoner kan defineres på en nokså analog måte som vanlig sinus, cosinus osv (som alle kan beskrives ved eksponentifunksjoner med komplekse eksponenter). For hyperbolikusfunksjonene ser uttrykkene slik ut:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

I fortsettelsen konsentrerer vi oss om hvordan tangenshyperbolikus oppfører seg når argumentet

er mye mindre eller mye større enn 1. Da gjelder:

$$\tanh(x) \approx x \text{ for } |x| < 1$$

$$\tanh(x) \approx 1 \text{ for } x > 1$$

I ligning (8.14) er argumentet for tanh lik hk . Argumentet kan også skrives

$$hk = \frac{2\pi h}{\lambda}$$

Det er da naturlig å skille mellom “grunt vann” karakterisert ved $h < \lambda/20$ og “dypt vann” karakterisert ved at $h > \lambda/2$. Disse grensene fører nemlig til at grunt vann betingelsen svarer til:

$$hk < \frac{2\pi\lambda}{20\lambda} = \frac{\pi}{10} < 1.0$$

og dypt vann betingelsen svarer til:

$$hk > \frac{2\pi\lambda}{2\lambda} = \pi > 1.0$$

Tiden er da inne for å drøfte noen hovedtrekk i ligning (8.14). For grunt vann først, og bølgelengder godt over 1.7 cm (slik at vi ser bort fra overflatehinne-leddet) følger:

$$v_f^2(k) = \frac{g}{k} \tanh(kh) \approx \frac{g}{k} kh = gh$$

$$v_f(k) = \sqrt{gh}$$

Vi ser at fasenhastigheten er uavhengig av bølgelengden (bølgetallet). Videre merker vi oss at fasenhastigheten avtar når dybden avtar.

Dette gir en artig effekt. Når bølger kommer fra storhavet inn mot en langgrunn strand, vil bølger som kommer på skrå innover bevege seg raskest i den delen der dybden er størst. Det vil si den delen av bølgen som er lengst ute vil gå raskere enn den delen av bølgen som er lenger inne. Vanligvis fører dette til at bølgefrontene etter hvert blir temmelig parallelle med strandlinjen, uansett hvilken retning bølgene hadde før de nærmet seg stranda.

For en kyst med dypt vann helt inn til fjellklippene ned mot vannet, er det ikke noe tilsvarende effekt, og bølgene kan komme inn mot klippene i hvilken som helst retning.

For bølger på dypt vann er fasehastigheten (under forutsetning at overflatespenningen spiller en negligerbar rolle):

$$v_f^2(k) = \frac{g}{k} \tanh(kh) \approx \frac{g}{k} 1 = \frac{g\lambda}{2\pi}$$

$$v_f(k) = \sqrt{\frac{g}{2\pi}} \sqrt{\lambda} \approx 1.25 \sqrt{\{\lambda\}} \text{ m/s}$$

hvor $\{\lambda\}$ betyr måltallet for λ (uten benevning) målt i antall meter.

På dypt vann vil altså fasehastigheten endre seg med bølgelengden (bølgetallet). En slik sammenheng er tidligere i kapitlet kalt *dispersjon*.

Øker bølgelengden med to dekader i vårt tilfelle, vil fasehastigheten øke med en dekade. Dette gjenspeiles omtrentlig i figur 8.14.

Noe å tenke på

Det kan være artig å vite at havbølgen med størst bølgelengde her på Jorda har en bølgelengde på hele 20 000 kilometer. Den ruller og går hele tiden. Kan du gjette hvilken bølge det da er snakk om? Vil du karakterisere den som en overflatebølge som er gravitasjonsdrevet? I så fall, faller den inn under beskrivelsen vår ovenfor, og vil den ha en bølgehastighet som er gitt ut fra våre formler? Du kan tenke litt på det!

[♣ ⇒ Da vi behandlet ligning (8.14), sa vi at for bølgelengder godt over ca 1.7 cm, dominerte gravitasjon ved bølgebevegelsen. For kapillaerbølger med bølgelengde klart mindre enn 1.7 cm, dominerte overflatehinnen. Disse tallene gjelder ved jordoverflaten.]

En vanndråpe vil ha en form som bestemmes av både gravitasjon og overflatehinnen. Når gravitasjonen effektivt forsvinner, så som f.eks. i vektløs tilstand i Spacelab, er det mulig å lage vanndråper som er nærmest perfekt kuleformede, selv med en diameter opp mot 10 cm. Bølger på overflaten av slike vannkuler vil i vektløs tilstand være dominert av overflatespenningen selv ved bølgelengder større enn 1.7 cm. ← ♣]

8.4.3 Gruppehastigheten til vannbølger

Vi har tidligere i ligning (8.14) gitt et uttrykk for fasehastigheten til overflatebølger i vann, men gjengir formelen på ny som en oppfriskning.

$$v_f^2(k) = \left[\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho} \right] \tanh(kh)$$

Her er k som vanlig bølgetallet, g tyngdens akselerasjon, T overflatespenningen, ρ masse-tettheten og h er dybden på vannet. Uttrykket kan utledes dersom vi starter med bare å ta hensyn til gravitasjon og overflatespenning, og vi ser bort fra viskositet, vind, og en liten, men endelig kompressibilitet til vannet.

Vi har tidligere funnet uttrykk for fasehastigheten for gravitasjonsdrevne bølger for grunt og dypt vann. Nå tar vi for oss også gruppehastighet og beskriver tre av de fire mulige enkle spesialtilfellene litt mer inngående:

1. **Tyngdedrevne bølger med liten dybde relativt til bølgelengden, dvs produktet $hk \ll 1$:**

Bølgelengden antas å være stor relativt til den kritiske (1.7 cm), og fra ligning (8.14) følger:

$$v_f^2(k) \approx \frac{g}{k} h k$$

$$v_f \approx \sqrt{gh}$$

Dette har vi vist tidligere, men la oss også se på gruppehastigheten. Vi bruker da relasjonen $v_f = \omega/k$ og får:

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}$$

$$\omega = \sqrt{gh} k$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gh} = v_f$$

Altså:

$$v_g = v_f$$

Dette er enbetydende med at det ikke er noen dispersjon.

2. Gravitasjonsdrevne bølger på dypt vann.

I dette tilfellet fant vi:

$$v_f^2(k) \approx \frac{g}{k}$$

Setter på ny inn $v_f = \omega/k$, og får:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k}$$

Dette gir følgende dispersjonsrelasjon:

$$\omega \approx \sqrt{gk}$$

Gruppehastigheten blir da:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$v_g \approx \frac{1}{2} v_f \quad (8.15)$$

Vi ser altså at gruppehastigheten er omtrent lik halvparten av fasenhastigheten.



Figur 8.15: Foto av en båt med bølger som danner en vifte bak seg. Se videre omtale i neste delkapittel. Fotografiet er hentet fra en masteroppgave til de Vries i 2007.

Skipsbølger faller ofte inn i denne kategorien. Enkeltbølgene synes å rulle forttere enn ”plogen” eller ”viften” som følger etter båten (se figur 8.15). Det fører til at enkeltbølgene ruller på en måte forbi ”viften” og blir borte like etterpå. Vi skal se nærmere på dette om litt.

3. Korte rippler i dypt vann.

Her er bølgelengden på bølgene liten relativt til den kritiske bølgelengden på 1.7 cm. Samtidig er bølgelengden mye mindre enn dybden på vannet. Da får vi overflatespenning-drevne bølger og

$$v_f^2(k) \approx \frac{Tk}{\rho} \cdot 1 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

Dispersjonsrelasjonen blir da:

$$\omega \approx \left(\sqrt{\frac{T}{\rho}} \right) k^{\frac{3}{2}}$$

Gruppehastigheten i dette tilfellet blir:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\sqrt{\frac{T}{\rho}} \right) \frac{3}{2} k^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{Tk}{\rho}}$$

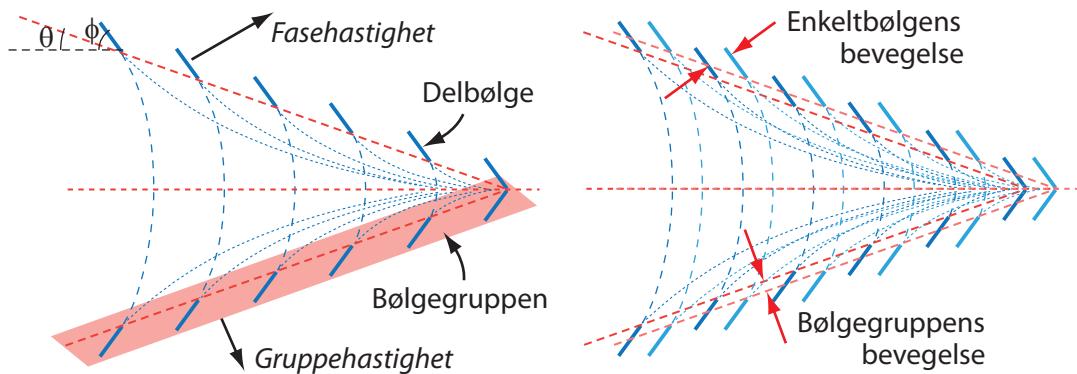
$$v_g = \frac{3}{2} v_f$$

I dette tilfellet er faktisk gruppehastigheten større enn fasenhastigheten (svarer til anomal dispersjon). I dette tilfellet vil liksom de enkelte bølgene synes å dukke opp fra intet på

forsiden av gruppen av bølger, og så bevege seg "bakover" gjennom gruppen. Relativt til vannet vil likevel også enkeltbølgene hele tiden forplante seg vekk fra kilden som skapte bølgene (så lenge vi ikke har refleksjon), men illusjonen om å vandre bakover kommer av at gruppehastigheten er enda større enn fasehastigheten.

8.4.4 Skipsbølger, et eksempel

Mange er ikke vant til å identifiesere hva som menes med en gruppe med bølger og hva som menes med enkeltbølger. Venstre del av figur 8.16 forsøker å vise dette. Figuren henviser til fotografiet i figur 8.15. Viften med mange enkeltbølger som går litt på tvers av ytterkanten av viften, danner gruppen. Denne viften brer seg utover med en hastighet som er gruppehastigheten. Hver enkeltbølge vil imidlertid vandre i en annen retning enn viften som sådan, og med en annen bølgehastighet som nå er fasehastigheten.



Figur 8.16: Til venstre: Identifisering av gruppen som beveger seg med gruppehastighet og enkeltbølger som beveger seg med fasehastighet i bølger fra en båt. Figuren er en videreføring av en figur i masteroppgaven til de Vries. Til høyre: Detalj som viser hvor langt bølgegruppen og hvor langt en enkeltbølge har beveget seg på tvers av hver sine bølgefronter i løpet av en viss tid. Figuren viser klart at gruppehastigheten er lavere enn fasehastigheten for disse vannbølgene.

Vi har tidligere utledet at for bølger på dypt vann, er gruppehastigheten om lag halvparten av fasehastigheten (se ligning (8.15)). Det betyr at enkeltbølgene beveger seg raskere enn gruppen. Enkeltbølgene synes derfor bare å oppstå nærmest av ingenting på innsiden av gruppen, og rulle tvers gjennom gruppen, og forsvinner nesten på uforståelig vis når de når ytterkanten til gruppen.

Dersom du har padlet i kano og sett med litt nervøsitet hvor raskt enkelbølger nærmer seg kanoen etter at en båt har passert, har du kanskje undret deg over at de bølgene som så så skumle ut bare liksom ble borte av seg selv før de nådde fram til kanoen. Først mye senere enn vi først fikk inntrykk av, når bølgene kanoen. Bølgene når kanoen først når selve *gruppen* når fram, og gruppen vandler bare halvparten så fort som enkeltbølgene. Dette tidsforløpet kommer nydelig fram i animasjonen av hvordan en bølgepakke utvikler seg i tid ved å bruke dataprogrammet omtalt tidligere i kapitlet (listet bak, like før læringsmål).

I høyre del av figur 8.16 er bølgene tegnet inn ved ett tidspunkt og en litt senere tid. Da kommer det klart fram at gruppen har vandret en mye kortere avstand enn enkeltbølgene i den perioden vi studerer. Det hører med til historien at bølgebildet bak båten er stasjonært i

forhold til båten. Når båten har beveget seg 10 meter framover, har også hele bølgemønsteret etter båten beveget seg 10 meter framover.

[♣ ⇒ Tilleggskommentar for de mest interesserte:

Det er skjedd mye på forskningsfronten når det gjelder fase og gruppehastighet siden ca 1980. Mye av dette er knyttet til lys.

I februar 2015 publiserte Ciovanni og medarbeidere en artikkel i Science som viser at lyshastigheten i vakuum ikke nødvendigvis er c slik Einsteins relativitetsteori tilslører. Lyshastighet lik c gjelder bare for lys i form av plane bølger. For enkelte andre bølgekonfigurasjoner, som forfatterne betegner som “spatially structures photons” er lyshastigheten i vakuum litt lavere enn c (ikke store forskjellen, men beviselig mindre).

Vi har i lang tid visst at når lys går gjennom glass (eller en vanndråpe for den saks skyld), går lys med ulike bølgelengder med ulik hastighet. Brytningsindeksen er bølgelengdeavhengig, $n(\lambda)$, noe som igjen er uttrykk for dispersjon. Lys i glass viser normal dispersjon.

De siste få decennier er det imidlertid utviklet en rekke spesielle materialer, og noen av disse har svært varierende fasenhastighet for lys med ulike bølgelengder. Vi kan derfor få svært varierende fase- og gruppehastigheter, og det er til og med materialer hvor fasenhastigheten har én retning, og gruppehastigheten går i motsatt retning.

Det er også laget materialer og eksperimentelle forhold der vi kan bremse ned lys kollosalt, til og med “stoppe” det for kortere perioder, for så å starte det opp igjen (søk på Lene Hau ved Harvard University, så får du innblikk i et spennende forskningsfelt. Lene er dansk og er en yndling for dansk presse).

I enkelte materialer mener noen å vise at en lyspuls kan gå raskere gjennom materialet enn lys i vakum, og at vi i prinsippet truer Einsteins relativitetsteori i så måte. Når vi ser nærmere på hva som skjer, ser vi at påstanden om “raskere enn lyshastigheten i vakuum” kan diskuteres. Det kommer helt an på hvordan vi definerer ting og tang, men Einsteins relativitetsteori står ikke akkurat i fare ut fra disse eksperimentene, generelt sett. Hva fremtiden vil bringe, er det vanskeligere å ha noe formening om!

Dispersjon er også aktuell for materiebølger i kvantefysikken. Gruppehastighet er definert ut fra dispersjonsrelasjoner hvor $\omega(k)$ er beskrevet og vi anvender $v_g = d\omega/dk$. For materiebølger er bølgelengden gjennom de Broglie-relasjonen knyttet til bevegelsesmengden, og frekvensen til energi. For materiebølger har vi derfor dispersjon dersom energien ikke øker som forventet med bevegelsesmengden.

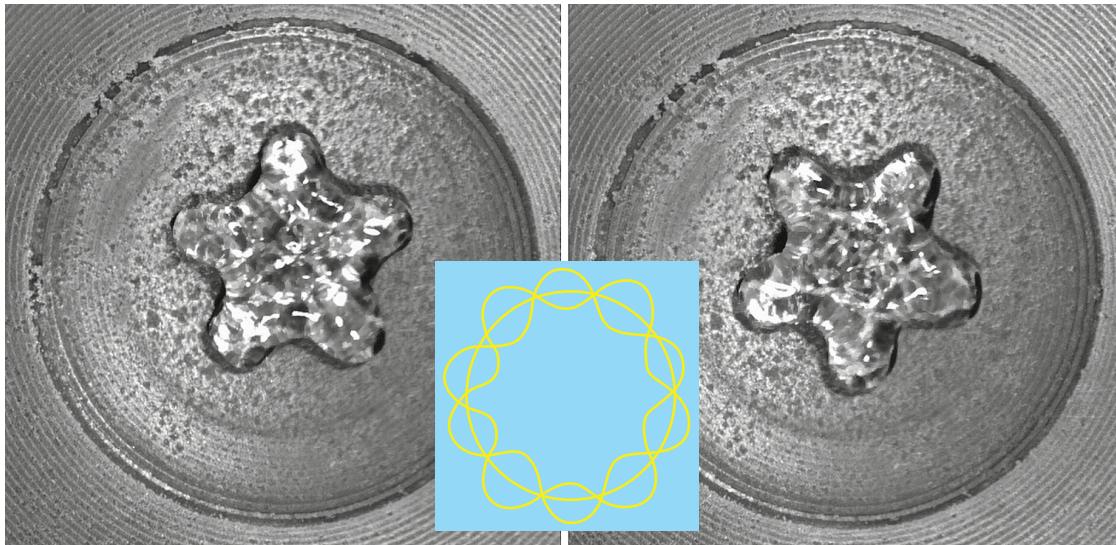
Dispersjon har nær sammenheng mellom andre grunnleggende deler av fysikken, blant annet gjennom den såkalte Kramers-Kronig relasjonen som viser at dispersjon er relatert til hvor stor absorpsjonen er for ulike bølgelengder i mediet. Til en viss grad er dette knyttet til tvungne svingninger og Q-verdier, som vi har omtalt tidligere, men vi får ikke tid til å gå mer i dybden på dette. ← ♣]

8.4.5 Overflatehinne-drevne bølger

Bølger på havet kjenner vi alle til. Mindre kjent er oscillasjoner i små vanndråper hvor overflatespenningen er den dominerende gjenopprettende kraften. Når en dråpe drypper fra en kran, vil den oscillere mens den faller. Eksempler på dette finner du i referanse 1 og 2 bakerst i kapitlet.

Stående bølger i en vanndråpe kan vi observere når vi heller litt vann i gropen på en gammeldags elektrisk komfyr, forutsatt at platen er så varm at dråpen flyter på toppen av en luftpute (damp-pute) som danner seg. Vi kan få nydelige kvantiserte oscillasjoner med en stjerneform hvor et heltall antall utposninger svinger fram og tilbake (se figur 8.17). Litt variasjon i varme eller størrelse på dråpen kan føre til at den nokså plutselig endrer svingemønster fra f.eks. en femarmet til en firearmet stjerne. Armene skytes ut og trekkes tilbake på en slik måte at vi vil oppfatte en åttekantet stjerne med øynene (siden vi ikke kan følge den raske vekslingen med øynene alene).

Hensikten med denne beskrivelsen er å minne om at klassisk fysikk er full av kvantiserte tilstander, på en analog måte til hva som finnes i atomær skala beskrevet i kvantefysikken. Vi har allerede i tidligere kapitler sett andre eksempler på kvantisering i makroskopisk skala, så



Figur 8.17: Bilder av en oscillerende vanndråpe. Bildet til venstre er tatt noen få millisekund før bildet til høyre. De to bildene viser ytterpunktene i oscillasjonen til denne dråpen. Bevegelsen kan anses som en stående bølge i dråpen. Bildene er utvalgt fra en video tatt med høyhastighetskamera ved Fysisk institutt (M. Baziewich og A.I. Vistnes, 2014)

som svingninger på en streng, lydbølger i et musikkinstrument osv.

Grunnen til kvantisering ligger i at vi har med bølger å gjøre, og randbetingelsene for systemet. For bølger på en gitarstreng kommer kvantiseringen av at amplituden i endepunktene må være lik null. Dette er helt analogt til kvantiseringer for bølgefunksjonen i kvantefysikken (f.eks. for en “partikkelen i boks”).

8.5 Program-listing

Her følger et Matlab-program som kan brukes for å utforske hvordan dispersjon påvirker tidsutviklingen av en bølgepakke (en bølge-gruppe). Programmet består av et hovedprogram som kaller på fire funksjoner. Man må selv finne fram til hvilke parametere som skal endres når vi ønsker å skifte mellom ingen dispersjon, normal dispersjon og anomal dispersjon. Det er naturlig å endre på flere av funksjonene dersom man ønsker å legge inn riktige parametere for å modellere helt konkrete fysiske bølgefenomener. Det kreves imidlertid at man forstår de delene av programmet som ønskes endret, ellers kan resultatet bli meningsløst.

[♠ ⇒ Programmet tallasjoner. ← ♠]

```

function fg3

% Program for å illustrere forskjell mellom fasehastighet og gruppehastighet.
% Versjon: 12.nov.2016, aiv

% NB: Pga periodisiteten i en FFT vil bølger som vandrer ut over gitt posisjonsområde,
% dukke opp fra venstre igjen. Dette svarer til en posisjon lik den angitte langs aksen
% pluss max posisjon langs aksen. Dette kan gjentas i det uendelige. Programmet må ikke
% brukes med hodet under armen! :)

% Velger først:
disp = -1.0; % -1,0,+1: normal, ingen, anomal dispersjon

% Lager så en bølgepakke i rommet (!)
N = 4000;
xmax = 40.0;
xlambda = 1.0; % (Romlig) bølgelengde
xsigma = 2.0; % Bredde i fordelingen
[x,z] = fg_bpakke(N,xmax,xlambda,xsigma);
plot(x,z,'-b');

% Romlig frekvensanalyse, finner amplitude og fase som funksjon av bølgetall k
[A,fase,k] = fg_fft(z,N,xmax);

% Plukker manuelt ut punkter med høy amplitude fra frekvensplot (fg_fft siste del)
imin = 23;
imax = 59;

% Finner omega(k) ut fra dispersjonsrelasjonen
[omega,deltat] = fg_omega(imin,imax,k,disp);

% Animerer bølgebevegelsen
[xavt] = fg_animer(x,deltat,N,A,fase,k,omega,imin,imax,xmax,disp);
xavt; % Skriver evt ut til skjerm posisjon som markerer posisjonen til der "den
      % sentrale bølgelengden" har beveget seg (startpunktet var xmax/8).

```

```

function [x,z] = fg_bpakke(N,xmax,xlambda,xsigma)

% Lager en bølgepakke i rommet (!) 5. nov. 2016.
% Inputparametre: N: punkter, xmax: x er i |0,xmax>, xlambda: (romlig) bølgelengde
% (midtpunkt i fordeling), xsigma: bredde i fordelingen (gaussisk omhylling).

x = linspace(0,xmax*(N-1)/N,N);
xr = xmax/8.0; % Midtpunkt i bølgepakken
xfreq = 1/xlambda; % Romlig frekvens
y = cos((x-xr)*2*pi*xfreq);
convol = exp(-((x-xr)/xsigma).*((x-xr)/xsigma));
z = y.*convol;

```

```

function [A,theta,k] = fg_fft(z,N,xmax)

% Frekvensanalyse av en bølgepakke i rommet (!) 5. nov. 2016.
% Inputparametre: z: bølgepakken (i rommet), N: punkter, xmax: x er i |0,xmax>,
% Returnerer amplitude A og fase (theta) i frekvensanalysen, som funksjon av
% bølgetallet k

Zf = fft(z)/N;
A = 2.0*abs(Zf); % Dropper særbehandling av Xf(1)
theta = atan2(imag(Zf),real(Zf));
xsamplf = N/xmax; % Romlig samplingsfrekvens
xfreq = linspace(0,xsamplf*(N-1)/N,N); % Romlig frekvens
k = zeros(1,N);
k = 2.0*pi*xfreq;

%figure;
%plot(A,'.-r'); % Brukes for å plukke punkter
%plot(xfreq,A,'.-r'); % Alternative plot
%plot(xfreq,fase,'.-k');

```

```

function [omega,deltat] = fg_omega(imin,imax,k,disp)

% Generering av omega(k) for bølgen. 6.11.2016
% imin, imax: minste og største indeks som brukes i funksjonen som lager animasjonen.
% disp: -1, 0 eller +1 ved normal, ingen og anomal dispersjon.
% deltat og omegafaktor justert til passe plot.

if (disp== -1) % Normal dispersjon (her vg = vf/2)
    deltat = 0.015;
    omegafaktor = 44.0;
    for i = imin:imax
        omega(i) = omegafaktor*sqrt(k(i));
    end;
end;

if (disp== 0) % Ingen dispersjon (her vf = konst)
    deltat = 0.015;
    omegafaktor = 9.5;
    for i = imin:imax
        omega(i) = omegafaktor*k(i);
    end;
end;

if (disp== 1) % Anomal dispersjon (her vg = 3vf/2)
    deltat = 0.0065;
    omegafaktor = 5.5;
    for i = imin:imax
        omega(i) = omegafaktor*(k(i)^1.5);
    end;
end;

figure;
plot(k(imin:imax),omega(imin:imax),'.-b');
xlabel('k (rel. enhet)');
ylabel('omega (rel.enhet)');

```

```

function [zrecon] = fg_bolge(x,t,N,A,fase,k,omega,imin,imax)

% Generering av romlig signal ut fra fourierkoeff. 5. nov. 2016.
% Inputparametre: x: posisjon (i rommet), t: tidspunkt (en verdi), N: punkter,
% [A, fase, k]: hhv amplitude, fase og bølggetall i frevensanalysen, omega: omega(k),
% imin, imax: minste og største indeks som vil bli brukt av arrayene A,k og fase.

zrecon = zeros(1,N);
for i = imin:imax % Sum over fourierelementer
    arg = k(i)*x - omega(i)*t + fase(i);
    zrecon = zrecon + A(i)*cos(arg);
end;

function [xavt] = fg_animer(x,deltat,N,A,fase,k,omega,imin,imax,xmax,disp)

% Animering av bølgepakken vs tid, sammen med bølgen med bølgelengde svarende
% til toppen i frekvensfordelingen. Inputparametre forklart annetsteds.
% Returnerer hvor langt denne spesielle bølgen har beveget seg i løpet av
% beregningene (gir fasenhastighet).

figure;
count=1;
% Løkke for animering
for n = 1:200
    % Beregner BØLGEN ved tiden t (manuell
    % invers fouriertransformasjon :)
    t = deltat*n;
    [zrecon] = fg_bolge(x,t,N,A,fase,k,omega,imin,imax);
    % Beregner også bølgen med senterfrekvens i fordeling
    imean = round((imin+imax)/2.0);
    [zrecon0] = fg_bolge(x,t,N,A,fase,k,omega,imean,imean);
    % Markering av startpunkt og sluttspunkt for forflytning med fasenhastigheten
    x00 = xmax/8.0;
    xavt = x00 + t*omega(imean)/k(imean);
    % Plotter alt dette
    plot(x,2.5*zrecon0,'-g', x,zrecon,'-b', x00,0.25,'+r',xavt,0.25,'+r');
    xlabel('Posisjon (rel)');
    ylabel('Utslag (rel)');
    axis([0,xmax,-1.04,1.04])
    title('Bevegelse til en bølgepakke');
    S = sprintf('Tiden: %.2f s',t);
    text(3.0, 0.8,S);
    S = sprintf('Xref: %.2f',xavt);
    text(3.0, 0.65,S);
    S = sprintf('Dispersjonskode: %.1f',disp);
    text(3.0, -0.8,S);
    M(count)=getframe;
    count=count+1;
    M(count)=getframe;
    count=count+1;
end;
% Spiller av animasjonen (1 x 20 frames per sec)
movie(M,1,20);

```

8.6 Referanser

1. R.E.Apfel, Y.Tian et al. : *Free Oscillations and Surfactant Studies of Superdeformed Drops in Microgravity*. Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 1912-1915. (Stor vanndråpe analysert i romferjen Columbia.)
2. H.Azuma og S.Yoshihara: *Three-dimentional large-amplitude drop oscillations: Experiments and theoretical analysis*. J.Fluid Mech. 393 (1999) 309-332.
3. For oscillerende dråper, se et elegant arbeide fra: C-T.Chang, S.Daniel, P.H.Steen: *Excited sessile drops dance harmonically*,
www.youtube.com/watch?v=TXSWnHg8_PE , Cornell University (tilgjengelig 2. mars 2016). Også beskrevet i Phys.Rev.E 88 (2013) 023015.
For et system som ligner litt mer på vårt, se f.eks.
<http://www.youtube.com/watch?v=YcF009w4HEE> (Het Leidenfrost-effect: de dansende drappel (versie 2)) eller siste halvpart av videoen på
<http://www.youtube.com/watch?v=b7KpHGgfHkc> (JuliusGyula_HotPot 1.3). Begge var tilgjengelig på web 2. mars 2016.
Vi har også laget våre egne høyhastighetsfilmer av oscillerende vanndråper, og et par av disse er tilgjengelig på websidene til kurset FYS2130 våren 2015. Filmene er tatt opp av Michael Baziljevich og Arnt Inge Vistnes 2014.
4. Jonas Persson: Vågrörelselära, akustik och optik. Studentlitteratur 2007.

8.7 Læringsmål

Etter å ha jobbet deg gjennom dette kapitlet bør du kunne:

- Gjennomføre numeriske beregninger av tidsforløpet for en en-dimensjonal bølge (med vilkårlig form) når det ikke er dispersjon.
- Gjøre rede for algorimens innhold ved slike beregninger.
- Gjøre rede for forskjellen på fase- og gruppehastighet generelt og vite hvordan begge beregnes.
- Gjøre rede for hvordan vi kan animere tidsutviklingen av en bølgepakke.
- Kjenne til typiske særtrekk for hvordan en bølgepakke utvikler seg med tiden ved ingen-, normal- og anomal dispersjon.
- Gi eksempler på dispersive fysiske systemer, både system med normal dispersjon og anomal dispersjon.
- Gjennomføre numeriske beregninger av tidsforløpet for en en-dimensjonal bølge.
- Gjøre rede for algorimens innhold ved slike beregninger.
- Gjøre rede for forskjeller i overflatedrevne bølger på vann og lydbølger gjennom vann.
- Gjøre rede for de to forskjellige "gjenopprettende krefter" ved overflatebølger på vann.
- Angi et omtrentlig kriterium for hvorvidt det er overflatespenningen eller gravitasjonen som dominerer i et gitt tilfelle.
- Gi eksempler på overflatespenningsdrevne bølger og gravitasjonsdrevne bølger.
- Gjøre rede for en modell hvor vi forklarer/beskriver bølger ved at vannmolekyler følger en sirkulær bevegelse.
- Finne tilnærmede uttrykk for fasehastigheten og gruppehastighet til bølger både på grunt og dypt vann ved å ta utgangspunkt i formelen

$$v_f^2(k) = \left[\frac{g}{k} + \frac{Tk}{\rho} \right] \tanh(kh)$$

- Gjengi hovedtrekkene i figur 8.14.

8.8 Oppgaver

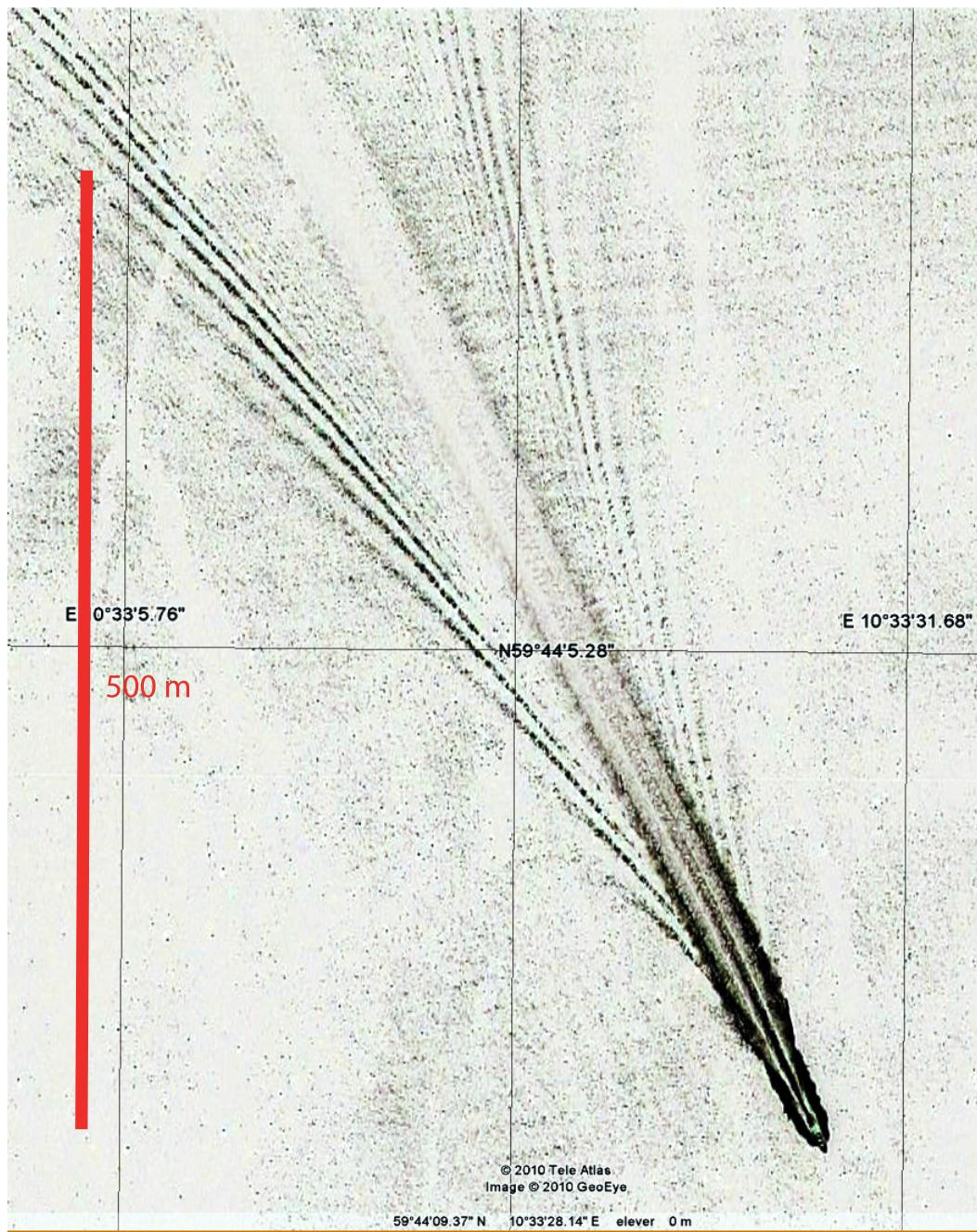
Forståelses- / diskusjonsspørsmål

1. Hva mener vi med et dispersivt medium? Hvordan vil dispersjon påvirke bølgebevegelsen til a) en harmonisk bølge, og b) en ikke-harmonisk bølge?
2. Hva er forskjellen mellom normal og anomal dispersjon?
3. Hva kjennetegner dispersjon? Hva er en dispersjonsrelasjon? Er det dispersjon som ligger bak fenomenet at bølger ofte kommer inn tilnærmet parallellt med en sandstrand?
4. Tegn opp hvordan en gitarstreng ser ut (utslag vs posisjon) like før vi slipper strengen. Benytt algoritmen gitt i figur 8.2 for å fortelle hvilke deler av strengen som vil bevege seg i første tidssteg, andre tidssteg og tredje tidssteg. Kanskje du kan gjette hvordan strengen faktisk vil svinge?
5. Svingemønsteret vi kommer fram til i forrige oppgave (og i våre beregninger basert på programmet *bolgeanimasjonX*) svarer til en virkelig bevegelse til en gitarstreng de første få svingningene. Etter hvert forsvinner skarpe overganger. Kan du tenke deg hvilke fysiske egenskaper til strengen som vi ikke har tatt hensyn til, og som påvirker svingningene ganske raskt? (Hint: Videoer på YouTube som viser en bevegelse helt i tråd med våre beregninger, bruker gjerne en strikk enn en ordentlig gitarstreng for å få fram det spesielle svingeforløpet vi finner ved våre beregninger.)
6. En vanlig misoppfatning om hvorfor lys går saktere gjennom glass enn i vakuum, er at fotonene blir bremset opp av glasset. Problemet med en slik oppfatning kommer til syne når vi skal forklare at lyshastigheten går tilbake til den i luft så snart lyset har passert glasset. Hvorfor er dette vanskelig å forklare med den nevnte forklaringsmodellen?
7. Hvorfor bruker vi en bølgepakke i beregningene som gir oss animasjon av dispersjon?
8. Kan du gi en slags forklaring på at bølgelengden er forskjellig i starten av en bølgepakke sammenliknet med bølgelengden i slutten av pakken dersom vi har normal - eller anomal dispersjon?
9. Er overflatebølger på vann transversale eller longitudinale bølger? Forklar.
10. Forsök å begrunne hvorfor vi ikke merker noe effekt av overflatebølger på vann i en dybde som er stor i forhold til bølgelengden.
11. Forklar hvorfor bølger ruller inn med bølgetoppene parallelt med vannkanten på en langgrunn strand.
12. Se videoen til Chang og medarbeidere i referanse 3 ovenfor. Finn videre fram et diagram fra web som viser elektron-orbitaler for hydrogenatomet. Sammenlign diagrammene fra Chang et al.'s arbeider med kvantefysikkens beskrivelser for atomorbitaler. Kommenter likheter og ulikheter (Hint 1: 2D vs 3D; Hint 2: Kvantefysikken opererer med *bølgefunksjoner*; Hint 3: Kvantisering).

Regneoppgaver

13. Sett opp et matematisk uttrykk (basert på bølgetall og vinkelfrekvens) for en plan, monokromatisk harmoniske bølge. Angi fasehastighet og gruppehastighet i den grad de er definert.
14. Lag ditt eget program for å beregne numerisk løsninger av bølgeligningen. Ta gjerne utgangspunkt i programmet gjengitt under punkt 8.2.1 ovenfor. Test at en bølge beskrevet ved ligningene (8.8) og (8.9) kommer ut som vist i figur 8.3. Gjør så følgende endringer:

- a) Endre den tidsderiverte av utslaget i startøyeblikket til den negative av hva det skulle ha vært. Gjennomfør beregningene og beskriv hva du observerer.
- b) Reduser den tidsderiverte av utslaget i startøyeblikket til det halve i forhold til hva det skulle ha vært. Gjennomfør beregningene og beskriv hva du observerer.
- c) Bruk i stedet $2x$ den tidsderiverte av utslaget i stedet for den korrekte i startøyeblikket. Gjennomfør beregningene og se hva du observerer denne gang. Vær nøyne med å peke på både amplituder og faser.
- d) Hvordan vil du lage initialbetingelsene for å simulere stående bølger? [Du kan gjerne teste dette ut, men du MÅ ikke gjøre det.]
- e) Hvilken slutning kan du trekke av alle beregningene i denne oppgaven? Ved en pendelbevegelse kan vi velge posisjon og fart helt uavhengig av hverandre, og får alltid en svingbevegelse som er lett å forstå. Er det liketan for bølger?
15. Modifisér programmet du brukte i forrige oppgave slik at det kan behandle det tilfellet at en plan en-dimensjonal bølge langs en streng møter et materiale med en annen fasehastighet. Bølgen skal kunne fortsette inn i det nye materialet og evt også bli reflektert i punktet der strengen endrer egenskap (kan svare til at strengen endrer masse per lengde). Forsök både med en 30 % økning i fasehastighet og en 30 % reduksjon i fasehastighet. Beskriv resultatene og kommenter om resultatene stemmer overens med det som er beskrevet i kapittel 7 eller ikke.
16. Lag noen enkle skisser som viser hvordan du FØR du gjør beregningene (eller hører om resultatet fra medstudenter) forestiller deg at en gitarstreng svinger. Lag *dernest* et dataprogram som beregner bevegelsen til en gitarstreng minst et par svingeperioder etter at strengen ved hjelp av et plekter eller en fingernegl er dradd ut til siden i ett punkt i en avstand ca $1/3$ av strenglengden fra en ende, og sluppet derfra (etter å ha vært i ro). Ta gjerne utgangspunkt i programmet gjengitt under punkt 8.2.1 ovenfor. Beskriv bevegelsen.
[Sjekk gjerne ETTER du har gjort beregningene, om det er samsvar mellom dine beregninger og YouTube-filmer av en gitarstreng tatt opp med meget hurtig videokamera. Best overensstemmelse med beregningene får du ved å se en video på YouTube "Slow motion: rubber string pulled and released" av Pavel Radzivilovsky. En stikk har ingen stivhet, og vi har ikke med noe ledd i våre beregninger som svarer til stivhet. Derfor blir resultatet vårt svært nært det som kan observeres som en stående bølge på en strikk.]
17. Sjekk ved egen utregning at bølgelengden er om lag 1.7 cm når overflatebølger på vann er like mye styrt av overflatespenning som av gravitasjon. Overflatespenning for rent vann ved $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ er $7.197 \cdot 10^{-2}\text{ N/m}$.
18. Bestem fasehastigheten for overflatebølger på "dypt" vann ved en bølgelengde på 1.7 cm. (Tips: Bruk info fra forrige oppgave.)
19. I figur 8.18 (siste side i dette kapitlet) er det vist et utsnitt fra et flyfoto tatt utenfor Fagerstrand i Oslofjorden (tatt fra Google Earth). Det er satt inn en stav som angir målestokken. Bildet viser bølger fra en båt. Beregn hastigheten båten kjørte med under antakelsen at det er dypt vann. Angi hastigheten i m/s, km/t og i knop. (1 knop = 1 nautisk mil per time, 1 nautisk mil = 1852 m = 1 bueminutt i nord-sør retning langs jordoverflaten.)



Figur 8.18: Bilde av bølgemønsteret bak en båt i Oslofjorden utenfor Fagerstrand. (Bildet er i negativt format for at mønsteret skal komme lettere fram.)