9. Elektromagnetiske bølger

Dette kapitlet tar opp følgende temaer: Maxwells ligninger på integralform og differensialform, utledning av bølgeligningen, plane elektromagnetiske bølger, polarisering, det elektromagnetiske spekteret, energitransport, Poynting vektor, strålingstrykk og feiloppfatninger. Lesetips finnes på websiden med hjelpefiler til boka.

9.1 Innledning

Av alle bølgefenomener som betyr noe for oss mennesker, er lydbølger og elektromagnetiske bølger i en særstilling. Teknologisk sett er det elektromagnetiske bølger som rangerer aller høyest.

Vi kommer i mange av de resterende kapitlene i denne boka til å møte elektromagnetiske bølger i litt ulike sammenehenger. Det er derfor naturlig at vi går litt i dybden i beskrivelsen av stoffet, for det er slett ikke slik at all elektromagnetisme kan reduseres til elektromagnetiske bølger. Det betyr at vi må være nøye når vi behandler dette stoffet for å unngå feilslutninger. Presisjonsnivået må være høyt!

Dette kapitlet er det mest matematiske av alle kapitlene i boka. Vi starter med Maxwells ligninger på integralform og viser hvordan de kan omformes til differensialform. Dernest vises det at Maxwells ligninger under visse forutsetninger kan lede til en enkel bølgeligning. Elektromagnetiske bølger er transverselle, det medfører at kompleksiteten er noe større enn for longitudinale lydbølger.

Kapitlet forutsetter at leseren tidligere har vært gjennom et kurs i elektromagnetisme, og kjenner til matematiske begreper så som linjeintegral og flateintegral. Det er en stor fordel å også kjenne Stokes teorem og divergensteoremet og vektorfelt-matematikken knyttet til divergens, gradient og rotasjon, og leseren bør helst kjenne til forskjellen mellom skalarfelt og vektorfelt før hun/han gir seg i kast med kapitlet.

Som nevnt er kapitlet sterkt preget av matematikk. Vi har likevel forsøkt å peke på fysikken bak matematikken, og vi anbefaler at du bruker mye tid også på den delen. Det er en utfordring å gripe lovmessigheten i Maxwells ligninger fullt ut!

Det er erfaringsmessig mange misforståelser knyttet til elektromagnetisme. En vanlig misforståelse, utrolig nok, er at en elektromagnetisk bølge er et elektron som svinger opp og ned på tvers av den retningen bølgen brer seg. Andre misforståelser er vanskeligere å rydde bort. For eksempel er det mange som tror at løsningen av bølgeligningen er "plane bølger", og at Poynting vektor alltid forteller om energitransporten i bølgen. Vi bruker en del tid på å drøfte slike misforståelser og håper at også dette stoffet kan være nyttig for noen.

Bak i kapitlet er det tatt med en huskeliste for de matematiske operasjonene som brukes såvel som en huskeliste angående hvordan elektrisk og magnetisk felt og flukstettheter forholder seg til hverandre. Det kan være nyttig lesning og oppfriskning av tidligere kunnskap.

La oss da sette i gang med Maxwells fabelaktige systematisering (og utviding) av alle kjente elektriske og magnetiske lover som fantes i 1864!

9.2 Maxwells ligninger på integralform

Fire ligninger forbinder elektriske og magnetiske felt:

1. Gauss lov for elektrisk felt:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{innenfor}}{\epsilon_r \epsilon_0} \tag{9.1}$$

2. Gauss lov for magnetfelt:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \tag{9.2}$$

3. Faraday-Henrys lov:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{innenfor} \tag{9.3}$$

4. Ampère-Maxwells lov:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_r \mu_0 \left(i_f + \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{d\Phi_E}{dt}\right)_{innenfor} \right) \tag{9.4}$$

Vi regner med at du kjenner disse lovene fra før og går derfor ikke i stor detalj om hvordan de skal oppfattes eller hva symbolene betyr. I de to første ligningene integreres fluksen ut av en lukket flate og sammenholdes med kilden i volumet innenfor (elektrisk monopol, dvs. ladning, og magnetisk monopol, som ikke finnes). Vektoren $d\vec{A}$ er positiv dersom den vender ut av volumet den lukkede flaten avgrenser.

I de to siste ligningene beregnes linjeintegralet for elektrisk eller magnetisk felt langs en linje som omspenner en åpen flate. Linjeintegralet sammenholdes med fluks av magnetisk flukstetthet eller elektrisk flukstetthet samt fluks av elektriske strømmer av frie ladninger gjennom den åpne flaten. Fortegnene er da bestemt ut fra høyrehåndsregelen (når fire fingre på høyre hånd peker i den retningen vi integrerer langs randen, peker tommelen i den retningen som svarer til positiv fluks).

Alle disse detaljene regnes som kjent.

Symmetrien kommer best fram dersom siste ligning skrives på følgende form:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \left(i_f + \left(\frac{d\Phi_D}{dt} \right)_{innenfor} \right) \tag{9.5}$$

Her er det brukt følgende relasjon mellom magnetisk feltstyrke H og magnetisk flukstetthet B:

$$\vec{H} = \vec{B}/(\mu_r \mu_0)$$

hvor μ_0 er (magnetisk) permeabilitet i vakuum og μ_r er relativ permeabilitet.

Det er også brukt følgende relasjon mellom elektrisk feltstyrke E og elektrisk flukstetthet D (også kalt "forskyvningsvektor"):

$$\vec{E} = \vec{D}/(\epsilon_r \epsilon_0)$$

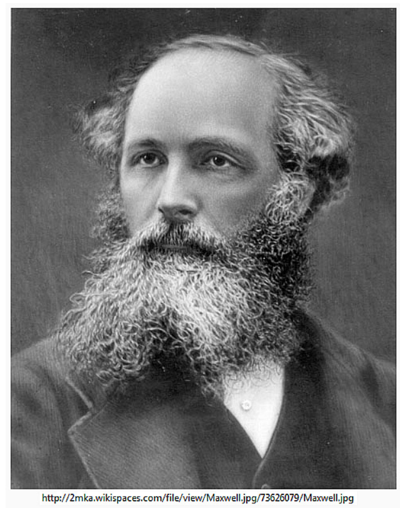
hvor ϵ_0 er (elektrisk) permittivitet i vakuum og ϵ_r er relativ permittivitet.

Venstresiden av ligningene (10.1) og (9.5) er da linjeintegraler av feltstyrker ($\vec{E}$ og $\vec{H}$), mens høyresiden er den tidsderiverte av fluksen gjennom den avgrensede flaten, pluss elektrisk strøm-fluks av frie ladninger. Fluksen er flukstettheter ($\vec{B}$ og $\vec{D}$) integrert over flaten.

Innholdet i Maxwells ligninger kan gis med ord omtrent som så:

- Det er to kilder til elektrisk felt. Den ene kilden skyldes elektriske ladninger (kan betraktes som monopoler). Elektrisk felt fra ladninger er radielt rettet bort fra eller direkte mot ladningen, alt etter ladningens fortegn. (Dette er innholdet i Gauss lov for elektrisk felt.)
- Den andre kilden for elektrisk felt er et tidsvarierende magnetfelt. Elektrisk felt som oppstår på denne måten har en rotasjon, det vil si at feltlinjene har en tendens til å danne sirkler på tvers av retningen der magnetfeltet endres i tid. Hvorvidt det blir sirkler eller en annen orientering i rommet avhenger av grensebetingelser. (Dette er innholdet i Faradays lov.)
- Det er to bidrag til magnetfelt også, men det finnes ikke magnetiske monopoler. Magnetfelt vil derfor aldri strømme ut i radiell retning fra et kildepunkt på tilsvarende måte som elektriske feltlinjer nær en elektrisk ladning. (Dette er innholdet i Gauss lov for magnetfelt.)
- Derimot kan magnetfelt oppstå omtrent som for elektrisk felt ved at et elektrisk felt varierer i tid. En alternativ måte å lage et magnetfelt på, er å ha fri ladninger i bevegelse som danner en netto elektrisk strøm. Begge disse kildene til magnetfelt gir felt som har en tendens til å danne lukkede kurver på tvers av retningen tidsvariasjonen i elektrisk felt eller netto elektrisk strøm er rettet. Hvilken form disse lukkede kurvene får i praksis er derimot helt avhengig av randbetingelsene. (Dette er innholdet i Ampère-Maxwells lov.)

Det var fysikeren og matematikeren James Clerk Maxwell (1831 - 1879, figur 9.1) som mestret å samle all kunnskap om elektriske og magnetiske lover i én helhetlig formalisme. Hans publikasjon "*A Dynamical Theory of Electromagnetic Field*" ble publisert i 1865 og viser at det er mulig å danne elektromagnetiske bølger og at disse nettopp vandrer med lyshastigheten. Hans arbeid regnes som en like stor bragd som Newtons lover og Einsteins relativitetsteori(er). (Den originale 54 siders lange artikkelen kan lastes ned fra:



Figur 9.1: *James Clerk Maxwell. (Opphav til bildet gitt med liten skrift.)*

http://en.wikipedia.org/wiki/A_dynamical_theory_of_the_electromagnetic_field tilgjengelig 89. mars 2016.)

[♠ ⇒ **Maxwell - Heaviside - Hertz:** De fire Maxwells ligninger slik vi kjenner dem i dag, er imidlertid langt fra de ligningene Maxwell selv presenterte i hans "A Treatise on Electricity and Magnetism" i 1873. Hans orginale artikkel bestod av 20 ligninger med 20 ukjente. Maxwell brukte ikke vektorfelt-formalismen vi er vant til i dag.

Oliver Heaviside (1850 - 1925) ga i 1884 ligningene omtrent den formen vi bruker i dag. Heaviside fikk bare skolegang fram til han var 17 år fordi han var av en fattig familie, og han fikk ingen formell utdanning etter dette. Likevel har han gjort en rekke viktige bidrag til fysikken. Det er fascinerende å lese om ham f.eks. på Wikipedia. (Det er visse likheter mellom Heaviside og Faraday. Heading-illustrasjonen for dette kapitlet viser Faraday på en pengeseddel fra Storbritania. Også Faraday's historie er fascinerende lesning som anbefales på det varmeste.)

Den tyske fysikeren Heinrich Hertz (1857-1894) var den første som demonstrerte hvordan vi kan sende og motta elektromagnetiske bølger. Det skjedde i 1887 da Hertz var 30 år gammel.

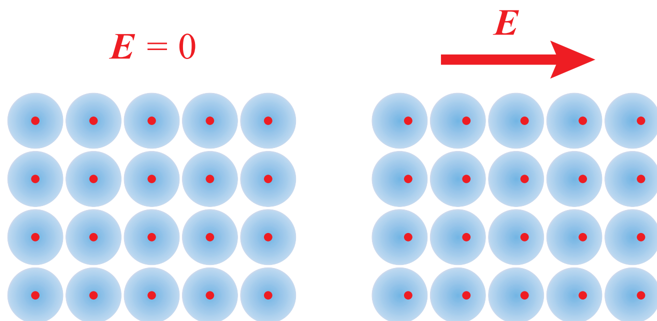
Det er interessant at Hertz er hedret på en rekke frimerker fra mange ulike land, mens Maxwell på langt nær er vist samme ære.. ⇐ ♠]

[♠ ⇒ **Repetisjon fra elektromagnetismen:**Det kan kanskje være på plass med en liten repetisjon av noen detaljer her. Vi vil senere i kurset se at magnetisk permeabilitet og i særdeleshet elektrisk permittivitet spiller en vesentlig rolle for elektromagnetiske bølger. Verdiene i vakuum μ_0 og ϵ_0 er temmelig uinteressante. De har først og fremst sammenheng med hvordan vi har valgt enheter for elektrisk og magnetisk felt.

De relative verdiene er derimot av langt mer interesse. Den relative (magnetiske) permeabiliteten har sammenheng med hvor mye magnetfelt vi genererer i et materiale når det utsettes for et ytre magnetfelt. I et diamagnetisk materiale vil det genereres et bitte lite magnetfelt i materialet, og feltet er rettet motsatt av det ytre magnetfeltet. I et paramagnetisk materiale genereres det også et bitte lite magnetfelt i materialet, men nå i samme retning som det ytre feltet. Det genererte magnetfeltet i selve materialet er bare i størrelsesorden 10^{-5} ganger det ytre magnetfeltet i begge disse tilfellene. I et ferromagnetisk materiale genereres et betydelig magnetfelt inne i materialet som følge av det ytre magnetfeltet, og i samme retning som dette. Det er mange detaljer knyttet til disse prosessene, og vi går ikke inn på disse her.

Siden de fleste stoffene vi kommer i kontakt med i dette kurset enten er diamagnetiske eller paramagnetiske, kan vi stort sett sette den relative permeabiliteten lik 1.0 og se bort fra magnetfeltets vekselvirkning med materialer i prosessene vi kommer til å diskutere.

For det elektriske felet er det annerledes. Den relative (elektriske) permittiviteten sier oss noe om hvor stort elektrisk felt som oppstår inne i et materiale når det utsettes for et ytre elektrisk felt. I figur 9.2 er det



Figur 9.2: *I et materiale, f.eks. glass, vil et ytre elektrisk felt lett kunne gi en polarisering av ladningsfordelingen i hvert enkelt atom i materialet. Denne polariseringen fører til et elektrisk felt inne i materialet som er rettet motsatt vei av det ytre elektriske feltet.*

gitt en skjematisk fremstilling av hva som skjer. Et ytre elektrisk felt vil føre til at elektronskyen omkring en atomkjerne forskyves bitte litt. Men siden atomene er små og mange og ladningen på elektronene betydelig, kan det genererte elektriske feltet inne i materialet lett komme opp i samme størrelsesorden som det ytre elektriske feltet (f.eks. halvparten så stort).

Merk at det ikke er snakk om transport av fri ladninger! Det er bare snakk om en lokal polarisering av ladningsfordelingen av hvert enkelt atom, men dette gir tross alt en polarisering av hele materialet. Merk forøvrig at vi her snakker om "polarisering" i en bestemt betydning. Vi kommer snart til å snakke om polarisering i en helt annen sammenheng, så her kreves det at man er oppmerksom for å ikke blande sammen ulike begreper med samme navn!. $\Leftarrow \spadesuit]$

9.3 Over til differensialform

Vi skal nå vise hvordan vi kan gå fra Maxwells ligninger på integralform til differensialform. Integralformen kan anvendes på makroskopiske geometrier, for eksempel for å finne magnetfelt fem meter vekk fra en rett leder der det går en netto elektrisk strøm. Differensialformen gjelder for et lite område i rommet. Hvor "lite" dette er, kan diskuteres. Maxwells ligninger ble utviklet før vi hadde noe god kunnskap om atomer og stoffers oppbygging på det mikroskopiske plan. Maxwells ligninger på differensialform anvendes ofte i praksis på *en midlere lengdeskala som er liten i forhold til den makroskopiske verden og likevel stor i forhold til atomære størrelser.*

Ved overgangen fra integral- til differensialform anvendes to matematiske relasjoner som gjelder for vilkårlige vektorfelt $\vec{G}$ generelt:

Stokes' teorem (mer korrekt Kelvin-Stokes' teorem, siden teoremet først ble kjent gjennom et brev fra Lord Kelvin. George Stokes (1819-1903) var en britisk matematiker/fysiker. Lord Kelvin (1824-1907), som egentlige het William Thomson, var en matematisk fysiker omtrent samtidig med Stokes.)

Stokes teorem:

$$\oint \vec{G} \cdot d\vec{l} = \int_A (\nabla \times \vec{G}) \cdot d\vec{A} \tag{9.6}$$

Teoremet gir en sammenheng mellom et linjeintegral av et vektorfelt og fluksen av rotasjonen til vektorfeltet gjennom flaten som linjen avgrenser.

Den andre relasjonen vi benytter er *Divergensteoremet* (som ble oppdaget av Lagrange og gjenoppdaget av flere andre siden. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) var en italiensk/fransk matematiker og astronom.:

Divergensteoremet:

$$\int \nabla \cdot \vec{G} dv = \oint_A \vec{G} \cdot d\vec{A} \tag{9.7}$$

Divergensteoremet gir sammenhengen mellom divergens til et vektorfelt i et volum og fluksen av vektorfeltet gjennom flaten som avgrenser volumet.

Gauss lov for elektrisk felt:
Vi starter med Gauss lov for elektrisk felt.

$$\epsilon_r \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q_{innenfor}$$

Bruker vi divergensteoremet, følger:

$$\oint \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int \nabla \cdot (\epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}) dv = Q_{innenfor}$$

Vi velger nå et så lite volum at $\nabla \cdot (\epsilon_r \epsilon_0 \vec{E})$ er tilnærmet konstant over hele volumet. Denne konstanten kan i så fall settes utenfor integraltegnet, og integralet over volumet gir rett og slett det lille volumet Δv vi betrakter. Følgelig:

$$\int \nabla \cdot (\epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}) dv \approx (\nabla \cdot \vec{D}) \Delta v = Q_{innenfor}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \frac{Q_{innenfor}}{\Delta v} = \rho$$

hvor ρ er ladningstettheten lokalt. Følgelig har vi kommet fram til Gauss lov for elektrisk felt på differensialform:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{9.8}$$

Gauss lov for magnetfelt:
Samme fremgangsmåte leder oss til Gauss lov for magnetetfelt på differensiell form:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{9.9}$$

Faraday-Henrys lov:
Vi vil nå omforme Faradays lov. Utgangspunktet er altså:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{innenfor}$$

Benytter vi Stokes' teorem, får vi:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{innenfor}$$

Magnetfeltfluksen gjennom flaten kan også skrives på denne måten:

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Følgelig:

$$\int_A (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt}\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$= -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

Her har vi antatt at flaten dA ikke endrer seg med tiden. Vi har i tillegg skiftet fra vanlig derivert til partiell derivert siden magnetisk flukstettehet $\vec{B}$ avhenger både av tid og romlige forhold, men vi antar at de romlige forholdene i seg selv ikke endres i tid. For små nok areal A vil igjen hovedleddet i integranden kunne settes utenfor integrasjonen, og vi ender opp med:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{9.10}$$

Dette er Faradays lov på differensiell form.

Ampère Maxwells lov:
Samme fremgangsmåte kan benyttes for å vise den siste av Maxwells ligninger på differensiell form, nemlig Ampère-Maxwells lov. Resultatet er:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{9.11}$$

hvor $\vec{j_f}$ er elektrisk strømtetthet av fri ladninger.

Einstein hadde bilder av Newton, Maxwell og Faraday på kontoret sitt, noe som indikerer hvor viktig han syntes deres arbeider var. Det er derfor ikke så rart at Fysikkforeningen ved UiO har valgt Maxwells ligninger på deres T-skjorter (se bilde 9.3) som et symbol på et høydepunkt i fysikk, et høydepunkt både mhp. hvor slagkraftig ligningene er og et høydepunkt i matematisk eleganse! (Det skal dog nevnes at den matematiske elegansen visstnok ikke var like blankpolert på Maxwells tid som den er i dag.)

Samlet:

La oss til slutt sette opp alle Maxwells ligninger på differensiell form samlet:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{9.12}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{9.13}$$

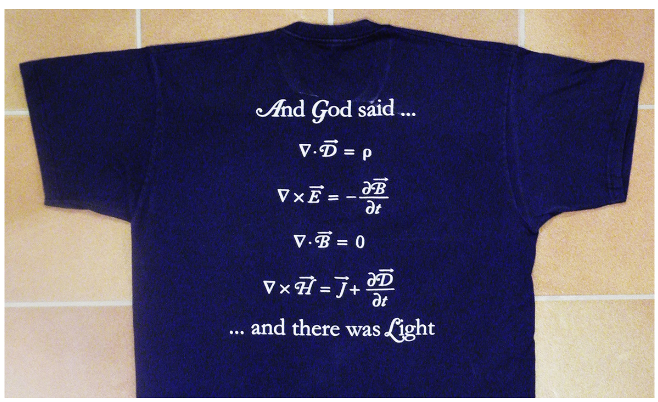
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{9.14}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j_f} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{9.15}$$

Maxwells ligninger sammen med Lorentzkraften

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

danner det fullstendige grunnlaget for klassisk elektrodynamisk teori.



Figur 9.3: *Maxwells ligninger på T-skjorte.*

9.4 Utledning av bølgeligningen

Bølgeligningen kan utledes fra Maxwells ligninger ved først og fremst å benytte de to siste ligningene sammen med en generell relasjon som gjelder for ethvert vilkårlig vektorfelt $\vec{G}$ (jamfør med f.eks. Karl Rottmann: Matematisk formelsamling):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{G}) = -\nabla^2 \vec{G} + \nabla(\nabla \cdot \vec{G}) \tag{9.16}$$

Med ord sier relasjonen at "rotasjonen til rotasjonen til et vektorfelt er lik minus Laplaceoperatoren anvendt på vektorfeltet pluss gradienten til divergensen av vektorfeltet" (pusteøvelsen slutt).

Vi anvender denne relasjonen på elektrisk felt, og får:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E})$$

Vi gjenkjenner rotasjon til elektrisk felt i uttrykket på venstre side av likhetstegnet. Denne erstattes ved Faradays lov. Samtidig bytter vi høyre og venstre side i ligningen og bytter fortegn og får:

$$\nabla^2 \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = -\nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \tag{9.17}$$

I høyresiden bytter vi rekkefølgen av derivering med hensyn på tid og derivering med hensyn på posisjon, og får:

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

Vi anvender dernest Ampère-Maxwells lov og får:

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_r \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_f \right) \right) \tag{9.18}$$

hvor det også er benyttet at:

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

For venstresiden av ligning (9.17) benyttes Gauss lov for elektrisk felt for å erstatte divergensen av elektrisk felt i det andre leddet på venstresiden med ladningstetthet ρ dividert med total permittivitet.

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\nabla \rho}{\epsilon_r \epsilon_0} \tag{9.19}$$

Ved å sette høyre side (9.19) lik venstre side (9.18), samt flytte noen ledd over på motsatt side av likhetstegnet, ender vi opp med:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\nabla \rho}{\epsilon_r \epsilon_0} + \mu_r \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_f}{\partial t} \tag{9.20}$$

Dette er en ikke-homogen bølgeligning for elektrisk felt. Kildeleddene er på høyre side av likhetstegnet.

I områder hvor gradienten til ladningstettheten ρ er lik null (altså ingen endring i elektrisk ladningstetthet), samtidig som det ikke er noen tidsvariasjon i elektrisk strømtetthet $\vec{j}_f$ av frie ladninger, reduseres den inhomogene ligningen til en enkel bølgeligning:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

eller i en mer vanlig form:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0} \nabla^2 \vec{E} \tag{9.21}$$

Vel, for å være ærlig så er ikke dette en helt vanlig bølgeligning slik vi har sett det tidligere siden vi har Laplaceoperatoren anvendt på elektrisk felt på høyresiden. I detalj har vi:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \vec{E} \;\; &= \;\; (\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2})\vec{i} && (9.22)\\
&\;\;\;\; +(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2})\vec{j} && (9.23)\\
&\;\;\;\; +(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2})\vec{k} && (9.24)
\end{aligned}$$

Vi søker nå en enklest mulig løsnig, og undersøker om det kan finnes en løsning hvor $\vec{E}$ ikke er avhengig av verken x eller y. I så fall vil alle ledd av typen $\frac{\partial^2 E_u}{\partial v^2}$ hvor $u = x, y, z$ og $v = x, y$ være lik null. Dersom en slik løsning er mulig, vil det innebære en plan bølge, som beveger seg i z-retning, siden en plan bølge nettopp er uforandret i et helt plan vinkelrett på bølgens bevegelsesretning.

Ligning (9.24) reduseres i så fall til følgende forenklede form:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2})\vec{i} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2})\vec{j} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2})\vec{k} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \tag{9.25}$$

og ligning (9.21) sammen med ligning (**??**) gir oss endelig en vanlig bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \tag{9.26}$$

hvor

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} \tag{9.27}$$

er bølgehastigheten (fasehastigheten) for bølgen.

Vi vet fra tidligere at en løsning av bølgeligningen (9.26) er

$$\vec{E} = \vec{E_0} \cos(kz - \omega t) \tag{9.28}$$

hvor $\vec{E_0}$ er en konstant vektor som i utgangspunktet kan peke i hvilken som helst retning.

La oss nå undersøke om vi også kan oppnå en bølgeligning for magnetfeltet. Vi starter også da ut med ligning (9.16), men anvender den på magnetisk flukstetthet $\vec{B}$. Første mellomresultat blir da:

$$-\nabla^2 \vec{B} + \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{B})$$

Vi bruker så Ampère-Maxwells lov for å erstatte rotasjonen til $\vec{B}$ med den tidsderiverte av elektrisk flukstetthet $\vec{D}$ pluss strømtetthet av fri ladninger. Som ved utledningen for elektrisk felt bytter vi så rekkefølge av en tidsderivasjon og en romlig derivasjon, og får et ledd hvor rotasjonen til $\vec{E}$ inngår. Vi anvender så Faradays lov, og setter også inn at divergensen til $\vec{B}$ er lik null (Gauss lov for magnetfelt) for endelig å ende opp med følgende differensialligning for $\vec{B}$:

$$\nabla^2 \vec{B} - \epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_r \mu_0 \nabla \times \vec{j}_f \tag{9.29}$$

Vi ser at magnetisk flukstetthet også tilfredsstiller en ikke homogen bølgeligning, og kildeleddet her er rotasjonen til strømtetthet av fri ladninger. I områder av rommet hvor det ikke finnes noe kildeledd, får vi en homogen bølgeligning. Vi søker etter enkleste mulig løsning av ligningen, og undersøker på samme måte som da vi behandlet elektrisk felt, om det kan finnes en planbølgeløsning for en bølge som beveger seg i z-retning. Med de samme forenklingene som i stad, får vi:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} \tag{9.30}$$

hvor bølgens hastighet c er nøyaktig den samme som gitt i ligning (9.27) som gjaldt for bølger av elektrisk felt.

Også i dette tilfellet vet vi fra tidligere at det faktisk finnes en løsning av denne bølgeligningen, og at løsningen kan skrives på formen:

$$\vec{B} = \vec{B_0} \cos(kz - \omega t) \tag{9.31}$$

hvor $\vec{B_0}$ er en konstant vektor som i utgangspunktet kan peke i hvilken som helst retning.

9.5 Én løsning av bølgeligningen

Ligningene (9.28) og (9.31) er gyldige løsninger av de to bølgeligningene (9.26) og (9.30) hver for seg. Men løsningene må også passe i Maxwells ligninger enkeltvis, i praksis Ampère-Maxwells lov og Faradays lov.

Vi starter med Faradays lov:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

og setter inn løsningen for elektrisk felt (9.28) (på determinant form):

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\{\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k}\} k \sin(kz - \omega t) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Alle ledd som inneholder partiell derivasjon med hensyn til x eller y, blir null ut fra plan-bølge-løsningen vi er interessert i. Da forenkles uttrykket slik:

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{j} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Vi merker oss allerede nå at $\vec{B}$ ikke kan ha noe komponent i z-retningen, dvs den retningen bølgen beveger seg i. En liknende analyse ved å bruke Ampère-Maxwells lov viser at heller ikke $\vec{E}$ kan ha noe komponent i z-retningen (med unntak av et statisk homogent felt, som er uten interesse i vår sammenheng).

Vi velger nå følgende løsning for $\vec{E}$:

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\vec{i} \tag{9.32}$$

hvilket betyr at $E_y = 0$ og dermed også $\frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$.

Da følger:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{j} = kE_0 \sin(kz - \omega t)\vec{j} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Denne ligningen tilfredsstilles dersom

$$\vec{B} = B_0 \cos(kz - \omega t)\vec{j} \tag{9.33}$$

Videre, siden

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \omega B_0 \sin(kz - \omega t)\vec{j}$$

og siden (fase)hastigheten til denne plane bølgen er ω/k som må være lik c fra ligning (9.27), får vi også en viktig sammenheng mellom elektrisk og magnetisk felt i en elektromagnetisk bølge:

$$E_0 = cB_0. \tag{9.34}$$

Vi har da vist at én mulig løsning av Maxwells ligninger er en plan elektromagnetisk bølge

$$\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t)\vec{i}$$

$$\vec{B} = B_0 \cos(kz - \omega t)\vec{j} \tag{9.35}$$

hvor

$$E_0 = cB_0$$

Vi må her minne om at løsninger av bølgeligninger generelt avhenger i meget stor grad av randbetingelser. I vår utledning har vi f.eks. søkt etter en løsning som gir en planbølge. Da har vi i praksis forutsatt at området vi betrakter befinner seg *langt* unna kilden til bølgen samt frie ladninger og strømmer av frie ladninger. Planbølgeløsningen er derfor i prinsippet *aldri en perfekt løsning* av Maxwells ligninger, men en eksakt løsning kan i en del tilfeller ligge temmelig nær en planbølgeløsning. Det er vår oppgave som fysikere å avgjøre om vi kan modellere virkelig feltfordeling med en planbølge-beskrivelse eller ikke i hvert enkelt tilfelle. Se omtale av nærfelt og fjernfelt nedenfor.

Siden Maxwells ligninger er lineære, kan vi likevel ha plane elektromagnetiske bølger på samme tid og sted som andre elektriske eller magnetiske felt som følger helt andre lovmessigheter. Summen av alle bidrag vil da ikke følge relasjonene som er gitt i blå-boksen ovenfor!

Figur 9.4 viser et øyeblikksbilde av en elektromagnetisk bølge med egenskaper som gitt i ligningene (9.35). En slik statisk figur gir ikke et godt bilde av bølgen. Det kan derfor være lurt å betrakte en animasjon for å få en forståelse av tidsutviklingen. Det er flere animasjoner av en enkel elektromagnetisk bølge på weben. Se f.eks. http://www.cabrillo.edu/ jmcculloug-h/Applets/Flash/Optics/EMWave.swf (tilgjengelig 9. mars 2016).

9.6 Interessante detaljer

Hva bestemmer lyshastigheten?

Vi så i utledningen av bølgeligninger for elektromagnetiske bølger at bølgene vil ha en fasehastighet

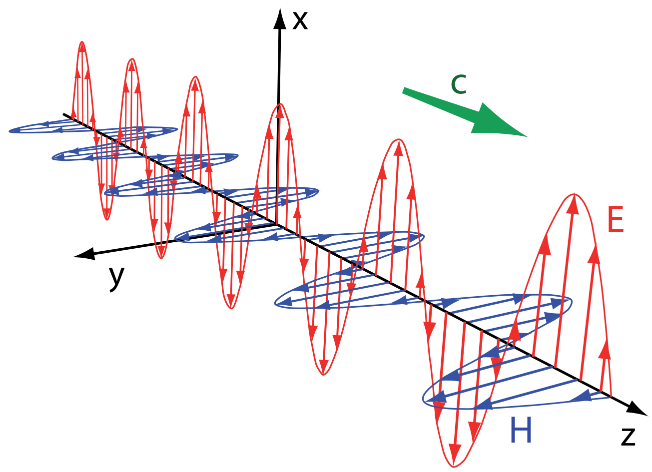
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_r \mu_0}} \tag{9.36}$$

For vakum er $\epsilon_r = 1$ og $\mu_r = 1$, og bølgehastigheten blir

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{9.37}$$

Dette er rett og slett et uttrykk for lyshastigheten i vakuum.

Det må ha vært en fantastisk opplevelse for Faraday da han først skjønte dette. Lyshastigheten var jo kjent, men ikke forbundet med noe som helst annen fysikk. Så utleder Maxwell



Figur 9.4: *Et øyeblikksbilde av den enkleste formen for elektromagnetisk bølge, nemlig en plan bølge. En slik bølge kan oppnås langt fra kildene til bølgen og langt fra materialer som kan perturbere bølgen. Figurer av denne typen gir erfaringsmessig en rekke misoppfatninger. Disse blir diskutert i siste del av dette kapitlet.*

bølgeligningen og finner at ligningene åpner opp for at det skal kunne finnes elektromagnetiske bølger, - og i så fall vil disse bølgene nettopp gå med den velkjente lyshastigheten! Overraskelsen må ha vært spesielt stor fordi lyshastigheten altså henger nøye sammen med de elektriske og magnetiske konstantene ϵ_0 og μ_0 som var bestemt ved *statiske* elektriske og statiske magnetiske fenomener.

Lyshastigheten i glass er gitt ved ligning (9.36), men for glass er μ_r praktisk talt lik 1. Det betyr at det rett og slett er den relative elektriske permittiviteten til glass, ϵ_r som fører til at lys går saktere i glass enn i vakuum. Også dette er overraskende, siden den relative permittiviteten jo kan bestemmes ved å putte en glassplate mellom to metallplater og måle endring i kapasitans mellom metallplatene. Også en slik bestemmelse kan gjøres ved statiske felt, og like fullt spiller denne størrelsen en viktig rolle for lys som oscillerer i størrelsesorden 10^{15} ganger per sekund!

Det er ingen dispersjon i vakuum, men i et dielektrisk materiale kan dispersjon forekomme fordi ϵ_r (og/eller μ_r) er bølgelengdeavhengig. Vi var inne på dette i kapittel 8 da vi diskuterte dispersjon og forskjell mellom fasehastighet og gruppehastighet.

Det kan bemerkes at når lys går gjennom glass, opererer vi med en materialkonstant kalt *brytningsindeksen* n som varierer litt fra en glasstype til en annen. Fasehastigheten til lys er lavere i glass enn i vakuum. Brytningsindeksen n kan defineres som forholdet mellom lyshastigheten i vakuum og lyshastigheten i glass: $n = c_0/c$. Ordet *brytnings*indeks vil bli forklart i detalj når vi i et senere kapittle beskriver hvordan lysstråler endrer retning ("brytes") når strålen går på skrå inn mot en grenseflate mellom luft og glass eller motsatt vei.

Glass er diamagnetisk og $\mu_r \approx 1.0$. Av uttrykkene ovenfor følger da at brytningsindeksen er tilnærmet lik kvadratroten av den relative permittiviteten:

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

Den relative permittiviteten kalles også dielektrisitetskonstanten.

PLAN bølge

Bølgen vi har beskrevet er plan fordi elektrisk felt ved et gitt øyeblikk er identisk overalt i et uendelig plan normalt på bølgeretningen z. En annen måte å si dette på er at "bølgefronten" er plan. En bølgefront kan karakteriseres som en flate i rommet hvor bølgen har identisk fase (dvs. argumentet til sinus- eller cosinusfunksjonen er identisk i et gitt øyeblikk).

Mange forveksler "plan" med det faktum at elektrisk felt peker i samme retning hele tiden ($\pm x$-retning i vårt tilfelle). Med andre ord kan vi forledes til å tro at elektrisk felt ligger i et plan. Det er imidlertid ikke tilfelle. Figurer som 9.4 gir bare feltverdier langs z-aksen og ikke i noen andre punkter! Velger vi et punkt vekk fra z-aksen vil elektrisk felt fortsatt være rettet i x-retning, men denne vektoren vil da *ikke* ligge i samme planet som vektoren som går gjennom z-aksen. Vi kommer tilbake til dette poenget om litt.

Det at elektrisk felt overalt er rettet i $\pm x$-retning er likevel et karakteristisk trekk ved den løsningen vi har kommet fram til. Vi sier at bølgen er *lineært polarisert* i x-retning. Vi kommer tilbake til polarisasjon i kapittel 10, men nevner allerede her at en annen løsning av Maxwells ligninger er en såkalt sirkulært polarisert bølge. For en slik løsning vil de elektrisk feltvektorene i et øyeblikksbilde tilsvarende figur 9.4 se ut som trinnene i en vindeltrapp, og selve pilspissene vil danne en "skrulinje" med akse i z-aksen. Også magnetfeltet vil danne en skrulinje. Også i dette tilfellet vil elektrisk felt og magnetfelt stå vinkelrett på hverandre og vinkelrett på den retningen bølgen beveger seg. Du kan finne en fin animasjon av sirkulært polariserte elektromagnetiske bølger på
http://www.cabrillo.edu/ jmccullough/Applets/Flash/Optics/EMWave.swf (tilgjengelig 9. mars 2016).

Forøvrig kommer vi senere i kapitlet tilbake til en viktig drøfting av gyldighetsområdet til de enkle elektromagnetiske bølgene vi hittil har beskrevet.

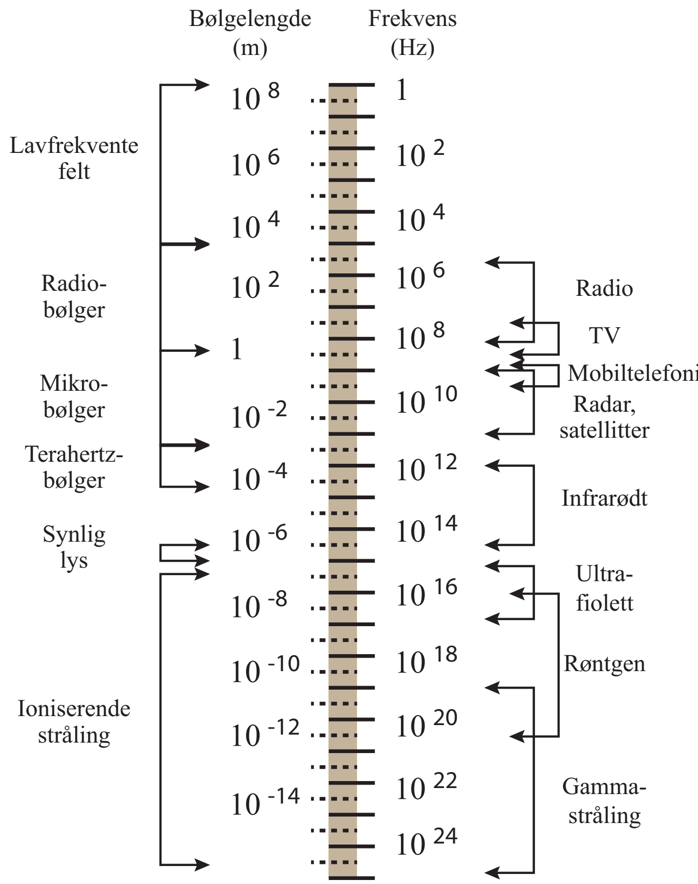
En liten påminnelse...

Merk at det ikke er noe som helst som stikker ut av en elektromagnetisk bølge. For et vilkårlig valgt punkt i rommet er det feltet i seg selv som endrer verdi. Feltet har en retning i rommet, men ingen piler skyter ut til siden og ingen sinusbuer finnes langs bølgen. Det er derfor en totalt annen situasjon enn når vi f.eks. klimprer på en gitarstreng der strengen faktisk beveger seg på tvers av lengderetningen.

9.7 Det elektromagnetiske spekteret

I utledning av bølgeligningen for elektromagnetiske bølger, hadde vi (i første omgang) ingen begrensinger i hvilke frekvenser og bølgelengder vi opererte med. I prinsippet kunne mer eller mindre "alle" frekvenser komme på tale med de tilsvarende bølgelengdene.

Det viser seg også i praksis at vi kan generere elektromagnetiske bølger for et vidt spekter av frekvenser (og bølgelengder). Figur 9.5 viser en omtrentlig oversikt over hvilke frekvensområder / bølgelengdeområder vi opererer i, hva vi kaller bølgene ved ulike frekvenser, og hva slike bølger brukes til. Vi sier at figurer som 9.5 presenterer "det elektromagnetiske spekteret".



Figur 9.5: *Elektromagnetiske bølger kan eksistere i et imponerende variasjonsområde av frekvenser (og tilsvarende bølgelengder). Oversikter som dette kan imidlertid gi inntrykk av en større grad av likhet mellom ulike fenomener enn det er i praksis. Vi kommer tilbake til dette blant annet når vi omtaler forskjellen på nærfelt og fjernfelt senere i kapitlet.*

Figurer av denne type må tas med en stor klype salt. Mange tror at det er snakk om pene, pyntelige plane bølger ved hver av de angitte frekvensene, men det er det ikke. Bølgenes utbredelse i tid og rom, energitransport (eller mangel på sådan) og flere andre faktorer varierer mye fra en frekvens til en annen. Vi kommer tilbake til dette litt senere i dette kapitlet.

9.8 Energitransport

Da vi diskuterte lyd så vi at en lydbølge kunne frakte energi bort fra kilden, selv om molekylene som bidro bare svingte i størrelsesorden en mikrometer fram og tilbake omkring samme punkt (når vi ser bort fra den Brownske diffusjons-bevegelsen til molekylene).

På en lignende måte kan en elektromagnetisk bølge frakte med seg energi, noe vi alle kjenner til når vi slikker sol på påskefjellet eller på en badestrand om sommeren.

Et elektrisk felt har en energitetthet gitt ved:

$$u_E(z,t) = \frac{1}{2}E(z,t)D(z,t)$$

På samme måte er energitettheten til et magnetfelt gitt ved:

$$u_H(z,t) = \frac{1}{2}H(z,t)B(z,t)$$

Når en plan elektromagnetisk bølge (slik vi har beskrevet den foran) passerer oss, vil den momentane energitettheten bli:

$$u_{tot}(z,t) = \frac{1}{2}E(z,t)D(z,t) + \frac{1}{2}H(z,t)B(z,t)$$

$$= \frac{1}{2}E_0 \cos() \cdot \epsilon E_0 \cos() + \frac{1}{2}B_0 \cos() \cdot \frac{B_0}{\mu} \cos()$$

Vi har her droppet å skrive ut innholdet inni parantesen for cosinusfunksjonen (for å spare plass).

Men vi vet at $E_0 = cB_0$. Dessuten ønsker vi å se på *tidsmidlet* energitetthet, og vi vet at middelverdien av $\cos^2()$ er lik en halv. Følgelig finner vi for tidsmidlet energitetthet:

$$\bar{u}_{tot} = \frac{1}{4}\epsilon E_0^2 + \frac{1}{4\mu}\left(\frac{E_0}{c}\right)^2$$

Energitetthet er energi per volum. Hvor mye energi vil da passere en flate A vinkelrett på bølgens bevegelsesretning i løpet av en tid Δt? En slik størrelse definerer vi som bølgens (tidsmidlete) intensitet:

$$I = \text{intensitet} = \frac{\text{Energi passert}}{\text{Areal Tid}} = u_{tot} \cdot c$$

Uttrykket har bare relevans når vi betrakter en lang tid i forhold til den tiden en bølgelengde trenger for å passere flaten vår. Innsatt for energitettheten vi fant i stad, får vi:

$$I = \frac{1}{4}\left(c\epsilon E_0^2 + c\frac{1}{c^2\mu}E_0^2\right)$$

Men vi vet at

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Følgelig blir

$$\frac{1}{c^2\mu} = \epsilon$$

og vi ser at energibidraget fra det elektriske feltet er nøyaktig like stort som energibidraget fra magnetfeltet!

Følgelig er intensiteten i en elektromagnetisk bølge gitt ved:

$$I = \frac{1}{2}c\epsilon E_0^2 = \frac{1}{2}cE_0 D_0 \tag{9.38}$$

Ved å benytte oss av det kjente forholdstallet mellom elektrisk og magnetisk felt, kan resultatet også skrive slik:

$$I = \frac{1}{2}c\frac{1}{\mu}B_0^2 = \frac{1}{2}cH_0 B_0 \tag{9.39}$$

Dersom vi velger å angi størrelsen på elektrisk felt og magnetfelt ved å bruke effektivverdier i stedet for amplitudeverdier, kan ligningene (9.38) og (9.39) skrives på formen:

$$I = c\epsilon E_{eff}^2 = cE_{eff}D_{eff} \tag{9.40}$$

og

$$I = \frac{c}{\mu}B_{eff}^2 = cH_{eff}B_{eff} \tag{9.41}$$

Disse to uttrykkene kan være nyttige når vi skal finne elektrisk feltstyrke eller magnetisk flukstetthet (eller magnetisk feltstyrke) for en gitt intensitet.

En liten digresjon: Betegnelsen "effektivverdi" har rot i vekselstrøm i en ledning. Vi kan da angi amplitudeverdi på en harmonisk variasjon i strøm og spenning, men vi kan også angi tilsvarende verdi av likestrøm og likespenning som gir samme overførte effekt. Det er disse likestrøm/spenningsverdiene som kalles effektivverdier. I vårt tilfelle med elektromagnetiske bølger er det egentlig kunstig å trekke inn likestrømmer og denslags, men likevel anvender vi effektivverdier på tilsvarende måte som for vekselstrømmer og vekselspenninger i en ledning.

Vi kan utlede også et annet uttrykk som forbinder elektrisk og magnetisk felt for en elektromagnetisk bølge i fjernfeltet. Tar vi utgangspunkt i ligningene (9.40) og (9.41), og benytter relasjonen $B = \mu H$, får vi:

$$c\epsilon E_{eff}^2 = \frac{c}{\mu}B_{eff}^2 = c\mu H_{eff}^2$$

Herav får vi:

$$\frac{E_{eff}}{H_{eff}} = \sqrt{\mu/\epsilon}$$

I vakuum får vi da:

$$\frac{E_{eff}}{H_{eff}} = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \equiv Z_0 = 376.7\Omega \tag{9.42}$$

hvor Z_0 kalles (den iboende, indre) impedansen til det tomme rom.

Uttrykkene har et større gyldighetsområde enn det som ligger bak utledningen vår. Vi må imidlertid være varsom med å bruke uttrykkene for elektromagnetiske bølger i områder nær kilder og nær materialer som kan forstyrre bølgene. Vi omtaler såkalte nærfelt og fjernfelt litt senere i dette kapitlet.

9.8.1 Poynting vektor

Det er en mer elegant måte å angi energiflukstetthet på (svarende til intensitet) enn uttrykkene vi ga i forrige avsnitt. Det elegante er at plane elektromagnetiske bølger er transversale slik at elektrisk og magnetisk vektor er rettet vinkelrett på hverandre og vinkelrett på bølgens bevegelsesretning.

Vi så at dersom elektrisk felt var rettet i x-retning og magnetfelt i y-retning, beveget bølgen seg i z-retning. Vi vet at for kryssproduktet gjelder $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, slik at vi muligens kan utnytte denne relasjonen på en smart måte.

Vi forsøker å beregne:

$$\vec{E} \times \vec{B} = E_0 \cos()\vec{i} \times \frac{E_0}{c} \cos()\vec{j}$$

$$= \frac{cE_0^2}{c^2} \cos^2()\vec{k}$$

$$= \mu(c\epsilon E_0^2) \cos^2()\vec{k}$$

Tidsmidlet er (benytter ligning (9.38) i siste del):

$$\overline{\vec{E} \times \vec{B}} = \mu(\frac{1}{2}c\epsilon E_0^2)\vec{k} = \mu I\vec{k}$$

Når vi så vet at $B = \mu H$, følger det:

$$\vec{I} = \overline{\vec{E} \times \vec{H}} \tag{9.43}$$

Her har vi innført en intensitetsvektor som peker i samme retning som energistrømmen. Vi opererer også med en momentan energitetthetstrøm (en momentan intensitet), og kaller denne Poynting vektor. Denne betegnes gjerne med symbol S eller P. Vi velger første variant og skriver:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{9.44}$$

Den engelske fysikeren John Henry Poynting (1852-1914) kom fram til dette uttrykket i 1884, tyve år etter at Maxwell skrev sitt mest berømte verk.

Igjen minner vi om at Poynting vektor bare kan anvendes problemfritt i tilfeller der vi har en enkel plan elektromagnetisk bølge langt fra kilden og langt vekk fra forstyrrende elementer. Sagt på en annen måte: Poynting vektor angir bare en momentan intensitet (momentan energitetthetsstrøm) når det er en perfekt kobling mellom elektrisk og magnetisk felt alene, uten at det finnes noe som helst bidrag til feltet fra ladninger i nærheten (m.a.o. ved ren elektrodynamikk).

9.9 Strålingstrykk

Det elektriske og magnetiske feltet vil resultere i en kraft på partikler/gjenstander som elektromagnetiske bølger treffer. Det går an å argumentere for at det elektrisk feltet i bølgen medfører "tvungne svingninger" av ladninger, og at ladninger i bevegelse i sin tur blir påvirket at en kraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Denne kraften virker i samme retning som den elektromagnetiske bølgen beveger seg.

Det kan vises at en elektromagnetisk bølge medfører et strålingstrykk gitt ved:

$$p_{straling} = S_{midlere}/c = I/c$$

dersom bølgen blir helt absorbert av legemet som blir truffet. Dersom legemet reflekterer bølgene fullstendig, blir strålingstrykket dobbelt så stort, dvs

$$p_{straling} = 2S_{midlere}/c = 2I/c$$

I begge disse uttrykkene er $S_{midlere}$ den tidsmidlete Poynting vektor.

Det er strålingstrykket som fører med seg at støv i en komethale alltid vender vekk fra Sola. Gravitasjonen som trekker støvet mot Sola er proporsjonal med massen, som igjen er proporsjonal med radien i tredje potens. Kraften som skyldes strålingstrykket er proporsjonal med *flaten* (tverrsnittet) som kan absorbere eller reflektere bølgen, og tverrsnittet går som radien i annen potens. Dette fører med seg at gravitasjon dominerer over strålingstrykk for store partikler, mens det blir motsatt for små partikler.

Det er mulig å betrakte strålingstrykk som en strømningsrate av elektromagnetisk bevegelsesmengde. I et slikt bilde kan det sies at bevegelsesmengde per tid og flate som forflytter seg med bølgen er lik

$$S_{midlere}/c$$

som er samme uttrykk som for strålingstrykk når legemet absorberer bølgen fullstendig.

[♠ ⇒ Beskrivelsen ovenfor gjelder i det tilfellet at lys enten blir absorbert eller totalt reflektert på overflaten til et materiale. Situasjonen er annerledes for lys som går gjennom et gjennomsiktig medium. Det finnes to ulike beskrivelser av hvordan bevegelsesmengden til lys endres når lys går inn i et gjennomsiktig medium. I én beskrivelse hevdes det at bevegelsesmengden øker, i en annen beskrivelse hevdes det motsatte. Dette er et optisk dilemma som henger delvis sammen med hvorvidt lys betraktes som bølger eller som partikler. I så måte er det en klar parallell mellom det dilemmaet vi har i dag og dilemmaet som eksisterte fra 1600-tallet til ca 1850 nevnt i forrige kapittel, der vi lurte på om gruppehastigheten til lys i glass var større eller mindre enn fasehastigheten.

Har du lyst å lære litt mere om dagens dilemma, kan du starte med å lese en artikkel i Physics World (http://physicsworld.com/cws/article/news/ 41873 tilgjengelig 9. mars 2016). ⇐ ♠]

9.10 Feiloppfatninger

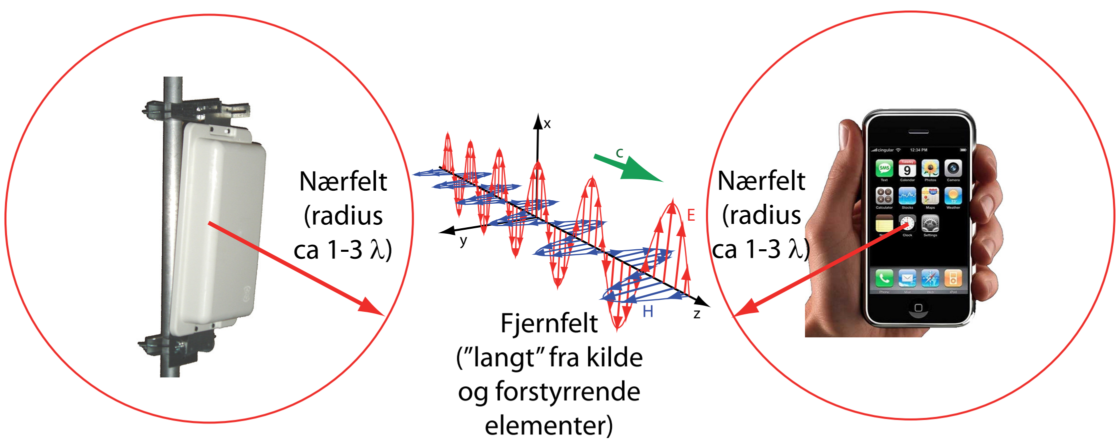
9.10.1 Nærfelt og fjernfelt

Gjentatte ganger har vi tidligere i dette kapitlet minnet om at de elektromagnetiske bølgene vi har utledet i ligningene (9.35) og illustrert i figur 9.4 er de *enkleste* bølgeløsningene som finnes av Maxwells ligninger. Disse relasjonene gjelder *normalt ikke* for tidsavhengige elektromagnetiske fenomen generelt! For å forstå dette, må vi se nøyere på detaljer i utledningen vår.

For det første endte vi opp med ikke-homogene differensialligninger i ligning (9.20) og (9.29) etter å ha kombinert Maxwells ligninger. Først da vi så bort fra kildeleddene oppnådde vi de enkle homogene bølgeligningene som var utgangspunktet for planbølgeløsningen. Men selv om det ikke finnes ladninger og strømmer akkurat på det stedet vi er interessert i, kan felter fra nærliggende områder ha en stor påvirkning.

En tommelfingerregel i denne sammenheng er at vi med "nærliggende" mener avstander opp til noen få ganger beregnet bølgelengde ($\lambda = c/f$), *eller* opp til flere ganger gjenstandens utstrekning i rommet vekk fra en gjenstanden der det finnes fri ladninger eller strømmer. I områder som blir kraftig påvirket av randbetingelser i vid forstan, sier vi at vi finner "*nærfelt*", i motsetning til "fjernfelt", som vi finner i områder hvor randbetingelser nesten ikke har noen innflytelse.

Det vil si at selv om vi er i vakuum, er det generelt sett *ikke* slik at plane elektromagnetiske bølger er løsninger av bølgeligningen for vakuum. Randbetingelsene vil påvirke løsningen til dels betydelig. For eksempel, står ikke det elektriske og det magnetiske feltet fra en 50 Hz kraftledning vinkelrett på hverandre før vi er flere jordradier unna (berenget bølgelengde er 6000 km)!



Figur 9.6: *Alle gjenstander med bevegelige ladninger vil påvirke et elektromagnetisk felt ut i en avstand i størrelsesorden en beregnet bølgelengde $\lambda = c/f$. I nærsonen er løsningen av Maxwells ligninger ofte svært forskjellig fra løsningen i fjernsonen (langt fra kilden til feltene og langt fra forstyrrende elementer). Det er statiske felt og randbetingelsene for tidsvariable felt som fører til disse forskjellene.*

Det kan være nyttig å tenke på hvor langt ut nærfeltområdet strekker seg fra ulike kilder. For en lyskilde er bølgelengden om lag 500 nm. Nærfeltområdet strekker seg noen få ganger denne avstanden vekk fra kilden, dvs. i størrelsesorden noen mikrometer (tusendedels millimetre) vekk fra kilden.

For en mobiltelefon som fungerer ved 1800 MHz, er beregnet bølgelengde om lag 16 cm. Noen få ganger denne avstanden er vi over i fjernfeltsonen.

For en kraftledning med frekvensen 50 Hz er beregnet bølgelengde om lag 6000 km. Først når vi er flere ganger denne avstanden vekk fra kraftledningen, er vi i fjernfeltsonen. I praksis kommer vi aldri over i fjernsonen i slike tilfeller.

Vi tar en oppsummering:

For *fjernfeltområdet* gjelder de relasjonene vi har vist for enkle, plane elektromagnetiske bølger, dvs.

1. Elektrisk og magnetisk felt står vinkelrett på hverandre.
2. Det er et fast forholdstall mellom elektrisk og magnetisk felt.
3. Poynting vektor gir et mål for transport av elektromagnetisk energi.
4. Energien som passerer et tverrsnitt har forlatt kilden en gang for alle og kommer (normalt) ikke tilbake igjen.
5. Det kan derfor være naturlig å bruke ordet "stråling" om energitransporten.

For *nærfeltsonen* gjelder derimot:

1. Elektrisk og magnetisk felt står normalt *ikke* vinkelrett på hverandre.
2. Det er *ikke* et fast forholdstall mellom elektrisk og magnetisk felt.
3. Poynting vektor gir *ikke* et mål for transport av elektromagnetisk energi.
4. Energi kan bygge seg opp i nærområdet til kilden i enkelte tidsperioder, men trekkes tilbake igjen i andre tidsperioder. Bare en bitte liten del av energien som går fram og tilbake til nærområdet vil forlate kilden som bølger (og denne energitransporten blir stort sett ikke synlig før vi kommer i fjernfeltsonen).
5. Det er derfor ikke naturlig å bruke ordet "stråling". Vi beskriver situasjonen mer som "felt".

9.10.2 Fotonbegrepet

Jeg ønsker her å knytte noen få kommentarer til begrepet "foton".

Majoriteten av dagens fysikere mener at lys best beskrives som elementærartikler, nemlig som fotoner.

Et foton oppfattes som en "udelelig bølgepakke eller energipakke" som har en begrenset utstrekning i tid og rom. Ordet foton ble opprinnelig tatt i bruk for synlig lys hvor bølgelengden er i størrelsesorden 500 nm (det greske ordet "phos" betyr "lys"). Det vil si at selv en bølgepakke som inneholder ganske mange bølgelengder, vil være bitte liten i forhold til makroskopiske størrelser. I *det* tilfellet er det kanskje ikke så rart at noen kan oppfatte dette som en "partikkel". Den tenkte udelelige energipakken tilordnes energien $E = h\nu$ hvor h er Plancks konstant og ν er frekvensen.

Det blir fort mer problematisk med "fotoner" ved mobiltelefoni (og radiobølger). I så fall vil en bølgepakke som består av en del bølgelengder fort få en romlig utstrekning på flere meter (opp til kilometre). Er det naturlig å anse en slik pakke som "udelelig" og at energien utveksles momentant fra pakken til og fra antenne og rommet rundt?

For kraftledninger og 50 Hz felter blir problemet enda værre. For 50 Hz ville en bølgepakke på flere ganger bølgelengden fort få like stor utstrekning i rommet som omkretsen til Jorda! Vi får da fort alvorlige problemer med å forestille oss et foton som har en utstrekning på flere ganger bølgelengden. Og tenker vi oss fotonet som små partikler i stedet for en utstrakt bølgepakke, blir det problematisk å forklare bølgelengder og en rekke andre egenskaper. Videre er fordelingen av elektriske og magnetiske felt nær kraftledninger vesentlig forskjellig fra det vi har ved lys. Dette kan bakes inn i en kvantemekanisk beskrivelse, men da må man ty til pussige spesielle varianter der den kvantemekaniske beskrivelsen egentlig bare etterligner den klassiske elektromagnetismen.

En beskrivelse basert på Maxwells ligninger gir oss en formalisme som skalerer uproblematisk helt fra STATISKE elektriske og magnetiske felt til elektromagnetiske bølger med enda høyere frekvensene enn ved synlig lys. Elektromagnetisme gir også en slagkraftig forklaring på lyshastighet og hva som påvirker den, og transformasjonene innen den spesielle relativitetsteorien kommer også naturlig ut av elektromagnetismen.

Det blir likevel problemer ved beskrivelse av vekselvirkning mellom en klassisk elektromagnetisk bølge (eller et elktromagnetisk felt) og atomære prosesser. Det henger sammen med at klassisk elektromagnetisme ikke kan brukes for å beskrive atomære overganger.

Til tross for dette er jeg en av fysikerne som mener at Maxwells ligninger og elektromagnetisme er langt å foretrekke framfor fotonbegrepet for de aller fleste aktuelle fenomene vi kjenner, bortsett fra den delen av fenomenene som innebærer atomære overganger. Min oppfatning er derfor at vi hittil ikke har gjennomskuet vekselvirkningen mellom elektromagnetiske bølger og atomære overganger i god nok detalj. Jeg representerer et mindretall, men dette mindretallet blir ikke stadig mindre, heller tvert om. Jeg mener at det ikke er gitt hvordan fysikere om femti år vil tenke.

Jeg vil i en separat tekst gjøre rede for dette problemområdet, og går ikke mer inn på det i denne boka.

9.10.3 En utfordring

Hittil har vi sett at både for svingninger og mekaniske bølger foregår det en veksling mellom to energiformer etter som svingningen/bølgen utvikler seg. De to energiformene kan f.eks. være potensiell energi og kinetisk energi. I en lydbølge er deler av bølgen karakterisert ved høyt lokalt lufttrykk (lydtrykk), mens andre deler av bølgen i samme øyeblikk er karakterisert ved en markant kollektiv hastighet av luftmolekylene. For en vandrende bølge har det skiftet mellom de to energiformene etter som tiden gikk (dersom vi betraktet bølgen på ett sted).

For en elektromagnetisk bølge er det ikke lett å se samme mønsteret. Det elektriske feltet har maksimum på samme tid og sted som magnetfeltet, i alle fall for en plan elektromagnetisk bølge. Er det noe vi overser?

Jeg har en mistanke om at noe mangler for å få en bedre forståelse av elektromagnetiske bølger og har en idé jeg vil følge opp de nærmeste årene. Kanskje dette er en utfordring også du får lyst til å se nærmere på?

9.11 Hjelpestoff

9.11.1 Nyttige matematiske relasjoner

Vi lister her opp noen nyttige matematiske relasjoner fra matematikken du forhåpentligvis har møtt tidligere:

Felles for alle uttrykk er at vi opererer med et skalarfelt:

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

og et vektorfelt

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

En gradient er da definert som:

$$\text{grad } \phi \equiv \nabla\phi \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

Divergensen er definert som:

$$\text{div } \vec{a} \equiv \nabla \cdot \vec{a} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Divergensen til en gradient er definert som:

$$\text{div grad } \phi \equiv \nabla \cdot (\nabla\phi) \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \equiv \triangle\phi$$

Rotasjon (engelsk: curl) er definert som:

$$\text{rot } \vec{a} \equiv \nabla \times \vec{a} \equiv$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y})\vec{k}$$

Merk deg hva som er vektorer og hva som er skalarfelt. Generelt gjelder:

- En gradient omdanner et skalarfelt til et vektorfelt.
- En divergens går motsatt vei.
- Div-grad starter med et skalarfelt, går via et vektorfelt og ender til slutt med et skalarfelt igjen.
- En rotasjon derimot starter med et vektorfelt og ender med et vektorfelt.

Symbolet ∇ symboliserer ulike operasjoner alt etter om den virker på et skalarfelt eller et vektorfelt, og spesielt blir det ekstra utfordrende å anvende ∇^2 på en vektor, siden vi da må anvende Laplace-operatoren på hver av komponentene i vektoren hver for seg:

$$\nabla^2\vec{a} = (\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2})\vec{i} +$$

$$(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2})\vec{j} +$$

$$(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2})\vec{k}$$

Noen nyttige relasjoner ellers er som følger:

$$\text{rot grad } \phi = \nabla \times (\nabla\phi) = 0$$

$$\text{div rot } \vec{a} = \nabla(\nabla \times \vec{a}) = 0$$

$$\text{rot(rot } \vec{a}) = \text{grad(div } \vec{a}) - \triangle\vec{a} = \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$$

9.11.2 Nyttige relasjoner og størrelser fra elektromagnetismen

Her er noen relasjoner fra elektromagnetismen som en oppfriskning av tidligere kunnskap:

Elektrisk feltstyrke $\vec{E}$ måles i V/m.
Elektrisk flukstetthet $\vec{D}$ måles i C/m^2.
Magnetisk feltstyrke $\vec{H}$ måles i A/m.
Magnetisk flukstetthet $\vec{B}$ måles i T.

Elektrisk flukstetthet betegnes også ofte som "forskyvningsvektor".

Elektrisk tomromspermittivitet ϵ_0 måles i F/m = (As)/(Vm). Den er definert eksakt som

$$\epsilon_0 \equiv \frac{1}{\mu_0 c_0^2} \approx 8.854188 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$$

Relativ permittivitet ϵ_r er normalt et tall større enn 1.0.

Magnetisk tomromspermeabilitet μ_0 måles i H/m, og er gitt eksakt:

$$\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m} \approx 1.256637 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$$

Relativ permeabilitet μ_r er oftest meget nær lik 1.0 for de fleste materialer. Unntak er ferromagnetiske materialer.

Lyshastigheten i vakuum er gitt eksakt som:

$$c_0 \equiv 299\ 792\ 458 \text{ m/s}$$

SI-grunnenhetene er nå lyshastigheten i vakuum og sekundet. Lengden 1 meter er ikke lenger en av grunnenhetene!

Sammenhengen mellom feltstyrker og flukstettheter er som følger:

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

9.12 Læringsmål

Etter å ha jobbet deg gjennom dette kapitlet bør du kunne:

- Omdanne Maxwells ligninger fra integral- til differensiell form (forutsatt at Stokes teorem og divergensteoremet er oppgitt).
- Utlede bølgeligningen for elektromagnetiske felt i vakum forutsatt at ligning (9.16) er oppgitt.
- Gjøre rede for hvilke forenklinger som brukes i utledningen av bølgeligningen for elektromagnetiske felt i vakuum.
- Gjøre rede for hvilke ledd i Maxwells ligninger som er er ansvarlig for at en elektromagnetisk bølge kan vandre gjennom det tomme rom.
- Gjøre nøye rede for forskjellen mellom "plan bølge" og polarisasjon.
- Angi hvor stor energitransport det er i en plan elektromagnetisk bølge.
- Anvende Poynting vektor og kjenne begrensinger i betraktninger som ligger bak denne størrelsen.
- Angi og anvende uttrykk for strålingstrykk i et elektromagnetisk felt i en plan bølge.
- Forklare hva vi mener med nærfelt og fjernfelt og hvorfor disse iblant er svært forskjellige.
- Gjøre rede for hvilke egenskaper til elektromagnetiske felt som er forskjellige i de to sonene.
- Gjøre rede for noen problemer med å anvende fotonbegrepet for alle elektromagnetiske felt/bølger.

9.13 Oppgaver

Forståelses- / diskusjonsspørsmål

1. Fortell kort hvordan du kan karakterisere et sted i rommet hvor divergensen av det elektriske feltet er forskjellig fra null. Tilsvarende, fortell kort hvordan du vil karakterisere et sted i rommet hvor rotasjonen til det elektriske feltet er forskjellig fra null.
2. Ved overgang fra Maxwells ligninger på integralform til differensialform bruker vi en argumentasjon som baserer seg på "en midlere" lengde- eller volum-skala. Hva mener vi med dette?
3. Anta at vi måler elektrisk og magnetisk felt i en elektromagnetisk bølge i fjernsonen. Kan vi ut fra målingene bestemme hvilken retning bølgene kom fra?
4. Vi setter en vekselspenning over en kondensator, eller vi sender en vekselstrøm gjennom en solenoide. Forsøk å finne retningen for elektrisk og magnetisk felt og relativt størrelsesforhold. Vil disse feltene følge de velkjente lovmessighetene som gjelder for elektriske og magnetiske felt for plane elektromagnetiske bølger?
5. Det sies iblant at for en elektromagnetisk bølge i vakuum er elektrisk og magnetisk felt vinkelrette på hverandre. Magnetfelt og elektrisk felt har ikke denne relasjonen til hverandre et lite stykke fra en solenoide ("spole"), selv om den er i vakuum og det er et høyfrekvent elektrisk og magnetisk felt til stede. Hva skyldes dette?
6. Er polarisering en egenskap til alle elektromagnetiske bølger, ikke bare med lys? Kan lydbølger ha en polarisering?
7. Tenk deg at du holder et sugerør opp i sollyset slik at sollyset går gjennom røret. Beskriv den elektromagnetiske bølgen i volumelement etter volumelement inne i (langs) sugerøret.
8. En elektromagnetisk bølge (f.eks. kraftig lys) kan ha et elektrisk felt på om lag 1000 V/m. Kan det føre til elektrisk sjokk dersom vi går inn i dette kraftige lyset?
9. Det magnetiske feltet i kraftig laserlys kan være opp til 100 ganger så kraftig som jordmagnetfeltet. Hva vil skje dersom vi lyser med dette laserlyset på nåla i et kompass?
10. Poynting vektor angir effekt som brer seg med en elektromagnetisk bølge. Kan vi bruke Poynting vektor for å beregne effekt som brer seg ut fra en kraftledning til beboere i nærheten? Begrunn svaret.
11. Dersom du blinker med lyset fra en lommelykt, vil du da oppleve en rekyl lignende det vi får når vi skyter med et gevær? Drøft svaret.
12. I ethvert fysisk system/fenomen ligger det innebygget en lengdeskala og en tidsskala. Hva menes med et slikt utsagn når vi betrakter elektromagnetiske bølger?
13. Det finnes mange ulike løsninger av Maxwells ligninger. Kan en av løsningene være elektromagnetiske bølger hvor vi praktisk talt bare har et elektrisk felt (og magnetfeltet er mye lavere enn E_0/c)?
14. I flere ligninger i dette kapitlet inngår den relative elektriske permittiviteten ϵ_r.
    a) Lyshastigheten er knyttet opp til denne størrelsen. Hvordan?
    b) Den relative permittiviteten forteller oss litt om hvilke fysiske prosesser som foregår når lys passerer glass. Hvilke prosesser er det vi da tenker på?
    c) Mange synes det er greit nok å forstå at lyset får redusert hastighet når det går fra luft eller vakuum til glass, men de synes det er vanskelig å forstå at lys kommer opp igjen til den opprinnelige hastigheten når lyset går ut av glasset igjen. Hva tror du er

grunnen til at mange synes dette er rart?

Regneoppgaver

15. Vis at en plan elektromagnetisk bølge i vakuum tilfredsstiller alle fire Maxwells ligninger.
16. Skriv opp Maxwells ligninger på integralform og angi riktige navn på dem. Utled i detalj Ampères lov på differensiell form.
17. Utledning av bølgeligningen fra Maxwells ligninger følger omtrent de samme triksene enten vi gjennomfører prosedyren for å komme fram til bølgeligningen for det elektriske feltet eller for magnetfeltet. Lag en liste som viser hvilke trinn/triks som benyttes (ønsker bare en relativt kort, punktvis/summarisk liste uten at man går i full detalj).
18. Finn frekvensen til gult lys med bølgelengde 580 nm. Gjør det samme med røntgenstråling med bølgelengde ca 1 nm. De raskeste oscilloskopene vi har tilgjengelig har en samplingsfrekvens i størrelsesorden 10-100 GHz. Kan vi med et slikt oscilloskop se oscillasjonene i elektrisk felt i røntgenbølgene? Hva med gult lys?
19. En elektromagnetisk bølge har et elektrisk felt gitt ved $\vec{E}(y,t) = E_0 \cos(ky - \omega t)\vec{k}$. $E_0 = 6.3\text{e}4$ V/m, og $\omega = 4.33\text{e}13$ rad/sek. Bestem bølgelengden for bølgen. Hvilken retning beveger bølgen seg? Bestem $\vec{B}$ (vektor). Gjør du noen spesielle antakelser ved beregningene, må disse angis.
20. En elektromagnetisk bølge med frekvensen 65.0 Hz går gjennom et isolerende materiale med relativ permittivitet på 3.64 og relativ permeabilitet på 5.18 for denne frekvensen. Elektrisk felt har en amplitude på 7.20e-3 V/m. Hvor stor er bølgehastigheten i dette mediet? Hva er bølgelengden i mediet? Hvor stor er amplituden for det magnetiske feltet? Hva er intensiteten til bølgen? Er beregningene du har gjort egentlig gyldige? Begrunn svaret!
21. En intens lyskilde stråler ut lys likt i alle retninger. I avstanden 5.0 m unna kilden er strålingstrykket på en flate som absorberer lyset perfekt lik 9.0e-9 Pa. Hvor stor effekt stråler lyskilden ut?
22. En måling ved jordoverflaten viser at lysintensiteten i sollyset er 0.78 kW/m^2. Estimér kraften strålingstrykket vil utøve på et 1 m^2 stort solpanel? Angi de antakelsene du gjør. For moro skyld kan vi oppgi at atmosfæretrykket er om lag 101325 Pa som er ca $1.0e5$ Pa.
23. For en elektromagnetisk bølge er det gitt at elektrisk felt ved ett tidspunkt er rettet i x-retning og magnetfelt i $-$z-retning. Hvilken retning brer bølgen seg? Hva dersom retningene var hhv $-$z og y retning? Gjør vi en antakelse når vi angir svarene?
24. En vanlig lab-helium-neon laser har en effekt på 12 mW og strålen har en diameter på 2.0 mm. Anta at intensiteten er den samme over hele tverrsnittet (hvilket er helt feil, men det kan forenkle beregningene). Hva er amplituden til det elektriske og magnetiske feltet i strålen? Hva er gjennomsnittlig energitetthet i elektrisk felt i strålen? Hva med energitettheten i magnetfeltet? Hvor mye energi har vi i en 1.0 m lang bit av strålen?
25. Noen hundre meter unna en basestasjon ble det elektriske feltet målt til 1.9 V/m og magnetfeltet 1.2 mA/m (begge ved om lag 900 MHz). En kyndig person konkluderte at målingene ikke var i overensstemmelse med hverandre. Hva tror du var grunnen til denne konklusjonen?
26. Ved bakken bare et par titalls meter fra en kraftledning ble det målt et elektrisk felt på 1.2 kV/m og "magnetfelt" på 2.6 μT (mikrotesla) (begge ved 50 Hz). Det er i praksis

ofte magnetisk flukstetthet som oppgis ved lave frekvenser, men vi kan gjøre om fra B til H og får da at 2.6 μT svarer til magnetfeltverdien 2.1 A/m. Er det samsvar mellom elektrisk felt og magnetfelt i dette tilfellet? Kommenter likheter/forskjeller mellom situasjonen i forrige oppgave og situasjonen i denne oppgaven.

27. En dag det gjøres målinger av elektrisk felt og magnetfelt samme sted nær kraftledningen som i forrige oppgave, er verdiene 1.2 kV/m og 0.04 A/m. Kan vi konkludere at det er noe feil med et av måleinstrumentene i dette tilfellet?
28. Ifølge Strålevern Info 10-11: Radiofrekvente felt i våre omgivelser (www.nrpa.no/filer/5c7f10ca06.pdf, tilgjengelig 9. mars 2016) er "strålingen" fra basestasjoner, trådløse nett, radio m.m. som oftest mindre enn 0.01 W/m^2 rundt omkring i landet vårt. Beregn elektrisk felt og magnetfelt som svarer til 0.01 W/m^2 dersom vi tenker oss at strålingen domineres av mobiltelefonkommunikasjon fra en basestasjon ved 1800 MHz.
29. Når vi bruker en mobiltelefon et sted hvor dekningen er dårlig slik at mobiltelefonen yter maksimal effekt, gir mobiltelefonen om lag 0.7 - 1.0 W effekt mens kommunikasjonen foregår. Anslå intensiteten 5 cm fra mobiltelefonen dersom du antar en isotrop intensitet omkring mobiltelefonen. Sammenlign verdien med målte intensiteter fra basestasjoner, trådløse nett osv. gitt i forrige oppgave.
30. Vanligvis oppgis ikke "strålingen" fra en mobiltelefon i form av effekttetthet (intensitet) målt i W/m^2, men i SAR (Specific Absorption Rate).
    a) Søk litt på web for å finne litt om SAR. Angi url for den kilden du bruker.
    b) Forklar hva SAR innebærer, og hva er enheten for SAR?
    c) Hva tror du er grunnen til at man har valgt en slik enhet i dette tilfellet selv om vi bruker effekttetthet fra basestasjoner og denslags, med omtrent samme frekvens som mobiltelefonen?
31. La oss betrakte interplanetarisk støv i vårt solsystem. Anta at støvet er kuleformet og har en radius r og en tetthet ρ. Anta at all stråling som treffer støvkornet blir absorbert. Sola har en total utstrålt effekt P_0 og masse M. Gravitasjonskonstanten er G. Avstanden fra Sola er R. Sett opp et uttrykk som angir forholdet mellom kraften som skyldes strålingstrykket fra solstrålene mot støvkornet, og gravitasjonskraften mellom Sola og støvkornet. Bestem radien i støvkornet når de to kreftene er like store når vi setter inn realistiske verdier for de størrelsene som inngår. (ρ = 2.5e3 kg/m^3, P_0 = 3.9e26 W, M = 1.99e30 kg, G = 6.67e-11 Nm^2/kg^2).
32. Finn forholdet mellom gravitasjonskraften som virker på Jorda fra Sola, og kraften på Jorda som skyldes strålingstrykket fra Sola. Jordas masse er 5.98e24 kg. Jordas radius kan du estimere dersom du husker at avstanden mellom en pol og ekvator er ca. 10 000 km.