

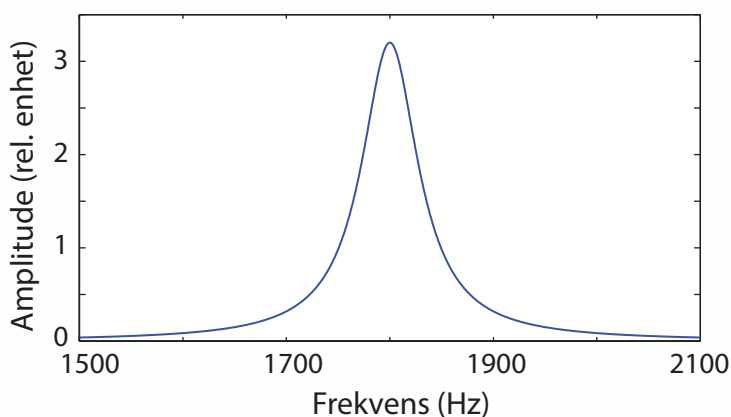
Løsningsforslag til FYS2130-eksamen våren 2016

Merk: Dette løsningsforslaget er ikke kvalitetssikret på det nåværende tidspunkt og kan lett inneholde feil. Løsningsforslaget er langt fordi det også inneholder noe stoff som går litt ut over det som inngikk i selve eksamensoppgaven. (Dette er gjort med tanke på at løsningsforslaget også blir brukt ved senere eksamensforberedelser).

Oppgave 1

Litt av hvert:

a) Vi studerer et svingesystem og påfører det en kraft med konstant amplitude, men med variabel frekvens. For hver frekvens venter vi lenge nok til at systemet har kommet til en stabil svingetilstand, og noterer amplituden. Resultatet er vist i figur 1. Bestem Q -verdien til svingekretsen.



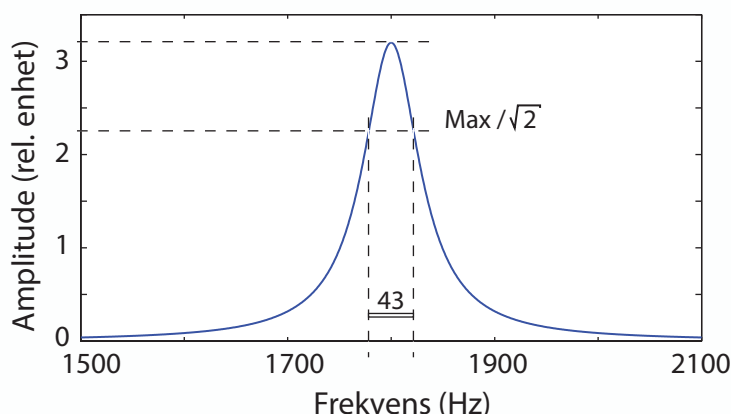
Figur 1: Amplitude på tvungne svingninger for et svingesystem som funksjon av frekvens på den påtrykte harmonisk varierende kraften.

Når vi har en resonanskurve som i figur 1 er det lett å bestemme Q -verdien. Hadde kurven hatt et energimål langs y-aksen, f.eks. amplitude i annen potens, kunne vi bare tatt halvverdbredden til kurven og brukt relasjonen $Q = f_0/\Delta f$ som forklart

i kapittel 2 i læreboka. I vårt tilfelle har vi imidlertid amplitude langs y-aksen. Da må vi bruke full bredde ved en amplitude lik $Max/\sqrt{2.0}$. Dette er markert i figur 2. Dette svarer jo nettopp til bredden vi ville fått ved $Max/2$ dersom vi hadde plottet amplitude i annen potens.

Fra figuren ser vi at resonansfrekvensen er 1800 Hz, og Max er omtrent lik 3.2. Da vil $Max/\sqrt{2.0} = 2.26$. Da følger at

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 1800/43 = 41.86 \approx 42$$



Figur 2: Markering som viser hvordan vi bestemmer bredden til en resonanskurve når det er amplitude langs y-aksen.

b) Anta at vi anvender den frekvensen som ga størst svingeamplitude i forrige oppgave og at vi plutselig kutter ut den påtrykte kraften etter at bevegelsen var blitt stabil. Lag en skisse som viser hvordan tidsutviklingen ville bli fra da av. For å få full uttelling må du angi et matematisk uttrykk og/eller tall som gir god info om tidsutviklingen.

I kapittel 2 har vi poengtert at et svingende system vil respondere ulikt i tid på en ytre påvirkning alt etter Q -verdien til systemet. Dersom systemet har blitt utsatt for en harmonisk ytre kraft (ved resonansfrekvensen), og kraften plutselig opphører, vil vi falle tilbake på samme løsning vi hadde for underkritisk demping i kapittel 1. Det vil si at vi får en svingning ved systemets resonansfrekvens, men at amplituden avtar eksponensielt mot null.

Figur 3 viser venstre del av figur 2.7 i læreboka, og vi forventer at det tegnes en skisse som nettopp svarer til siste del av figur 3. Det viktige er en eksponensielt avtakende svingeamplitude.

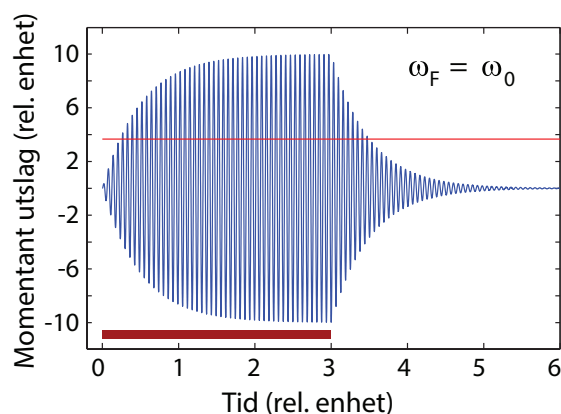
For å få full uttelling må man si noe mer. I kapittel 2 er sammenhengen mellom tidskonstant for decayen i energi gitt som:

$$E(t) = E_0 e^{-\omega_0 t / Q}$$

der energien synker til $1/e$ av opprinnelig energi etter en tid

$$\Delta t = \frac{Q}{\omega_0} = \frac{QT}{2\pi} \quad (1)$$

Dette er en formel som ikke finnes på vårt formelark, og som vi ikke forventer at man husker. MEN vi forventer at man husker at tidskonstanten er proporsjonal med Q -verdien. Vi forventer likevel ikke at vi på dette punktet skal huske at tidskonstanten for amplitude-variasjonen vs tid er en faktor 2 forskjellig fra tidskonstanten for energi-variasjon vs tid.



Figur 3: Amplitude på tvungne svingninger som funksjon av tid når systemet først er i ro og den påtrykte harmoniske kraften skrues på og virker en stund og plutselig opphører. Oppgaven vår gjelder tidsutviklingen etter at kraften er skrudd av.

Et eksempel på en løsning som ville gi fire av fem mulige poeng er da følgende:

Etter at den ytre oscillerende kraften plutselig opphører, vil systemet fortsette å svinge ved resonansfrekvensen, men amplituden vil avta eksponensielt til null. Dette er en vanlig underkritisk svingning for et svingende system. Tidskonstanten avhenger av kretsens Q -verdi. Høy Q -verdi betyr at det er lite tap per periode. Da antar jeg at tidskonstanten er proporsjonal med Q -verdien. Svingningen ville da kunne beskrives matematisk omtrent som følger:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t) e^{t/\tau}$$

hvor $\tau \propto Q$ og $t = 0$ svarer til tiden der den ytre kraften opphørte.

Full uttelling ville det bli om man forstod at tidskonstanten også måtte avhenge av periodetiden til systemet $T = 1/f_0$, og at denne avhengigheten måtte være av typen $\tau \propto QT = Q/f_0$ siden vi har i kapittel 2 antydnet at det er proporsjonalitet i antall svingninger decayen strekker seg over og Q -verdien.

En annen måte å komme fram til det samme ville være å ta utgangspunkt i den klassiske analogien til Heisenbergs uskarphetsrelasjon, som også er nevnt i kapittel 2. Vi har i denne sammenhengen

$$\Delta t \Delta f \propto 1$$

Kombinerer vi denne med relasjonen

$$Q = f_0/\Delta f$$

får vi nettopp at

$$\Delta t \propto Q/f_0$$

c) Angi to forskjellige matematiske uttrykk for en plan bølge. Fortell hva størrelsene som inngår i uttrykket står for.

Her er noen eksempler:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \vec{i}$$

$$G(y, t) = G(ky - \omega t)$$

$$B(x, t) = B_0 e^{kx - \omega t} + c.c.$$

Her er $k = 2\pi/\lambda$ bølgetallet, $\omega = 2\pi f$ er vinkelfrekvensen og f vanlig frekvens. x , y og z er posisjoner i rommet og t er tiden. Her betyr c.c. komplekskonjugert (for å få en reell løsning alt i alt.)

Vi har valgt å la én ligning beskrive et vektorfelt (E), en annen et skalarfelt (B) og sist et generelt felt som ikke behøver å være harmonisk (G).

I alle tilfeller har vi valgt at den plane bølgen beveger seg i positiv retning i rommet (mot økende posisjon etter som tiden går).

Det er fritt fram for valg, men dersom man velger bare en sinus og cosinus-variant av samme uttrykk, vil vi bare gi fire poeng.

d) Vi bruker superposisjonsprinsippet “på amplitudenivå” i stedet for “på intensitetsnivå”. Forklar hvorfor. Er superposisjonsprinsippet å betrakte som en naturlov, eller er det unntak fra prinsippet? Begrunn svaret.

Superposisjonsprinsippet brukes for å f.eks. vise hvordan interferens av to bølger med samme frekvens kan føre til at sumbølgen enkelte steder får en amplitude som er summen av hvert av delbølgene, og andre steder lik differansen av delbølgene (egentlig også her summen av delbølgene, men der fasen til den ene bølgen er motsatt av den fasen til den første). Det betyr f.eks. at vi i dobbeltspalt-eksperimentet kan få striper der amplituden er dobbelt så stor som for en spalt, men også striper med null amplitude. Intensiteten er fire ganger så høy der vi har konstruktiv interferens enn det vi hadde hatt med bare en spalt, mens intensiteten er null der vi har destruktiv interferens.

Med ‘amplitudenivå’ menes det her momentant utslag, det vi si utslaget som funksjon av tid. Dette utslaget kan være positivt og negativt. Det er dette som gjør at *summen* av to bølger både kan føre til forsterkning (samme fase) og til utsløkning (motsatt fase).

Intensiteter er alltid positive eller null. Sum av intensiteter kan ikke bli null dersom minst en av bidragene er forskjellig fra null.

Superposisjonsprinsippet kommer fra linearitet i matematikken. Dersom vi har med lineære funksjoner og medier å gjøre, vil nettopp

$$f(a + b) = f(a) + f(b).$$

Det samme gjelder *ikke* for et ikke-lineært system / medium eller for en ikke-lineær funksjon.

Når lys f.eks. går gjennom glass, er det dispersjon i glasset og lys med ulike bølgelengder vil ha ulik hastighet gjennom glasset. Ikke-monokromatisk lys vil derfor endres når det går gjennom glass. F.eks. vil lyspulser som går gjennom optiske fibre endre pulsform ettersom pulsene går gjennom fiberen.

Ikke-linearitet kan opptre på ulikt vis. F.eks. er følgen av dispersjon som allerede nevnt at bølger med ulik bølgelengde går med ulik hastighet gjennom et medium. Men ikke-linearitet kan også angå amplituden til selve påvirkningen. Sender vi en intens laserstråle gjennom et materiale, vil materialet ofte ha andre egenskaper enn om laserstrålen hadde f.eks. ti ganger lavere intensitet.

For mange formål er ikke-lineariteten så ubetydelig at vi i praksis kan bruke superposisjonsprinsippet selv om det prinsipielt ikke er gyldig.

Superposisjon er med andre ord ikke en naturlov, men er svært nyttig når systemet /mediet vi betrakter er tilstrekkelig lineært.

e) Hva mener vi med et dispersivt medium? Beskriv kvalitativt hvordan dispersjon vil påvirke bølgebevegelsen til en 1) harmonisk bølge, 2) en ikke-harmonisk bølge? Hva er forskjellen på normal dispersjon og anomal dispersjon?

Vi omtalte dispersjon allerede i forrige delspørsmål. Et dispersivt medium vil ha egenskaper som endrer seg med frekvensen til de bølgene vi sender inn i mediet. For eksempel er det vel kjent at brytningsindeksen til lys gjennom glass varierer med bølgelengden (og dermed også frekvensen).

Dersom vi opererer med en perfekt harmonisk bølge, vil ikke dispersjonen komme til syne overhodet. Men en perfekt harmonisk bølge betyr egentlig en matematisk sinus eller cosinusfunksjon som varer ved i det uendelige.

Enhver fysisk bølge vil være begrenset i tid og vil derfor ikke være perfekt harmonisk.

Det betyr at også lyspulser gjennom optiske fibre vil oppleve dispersjon og endre form etter som pulsene går gjennom en optisk fiber (også en single mode optisk fiber). Dispersjonen ville imidlertid ha en langt mindre effekt for pulset laserlys (som ofte har en ganske begrenset bredde i frekvensspekteret) enn dersom vi forsøkte å sende hvitt lys gjennom samme type glass (f.eks. i en mulitmode fiber).

For dispersive medier opererer vi med fasehastighet og gruppehastighet for bølger. Gruppehastighet er gitt ved $v_g = \partial\omega/\partial k$ hvor ω er vinkelhastigheten og k bølgetallet. Normal dispersjon har vi når gruppehastigheten er mindre enn fasehastigheten, mens anomal dispersjon er karakterisert ved at gruppehastighet (beregnet som i uttrykket vi nettopp ga) er større enn fasehastigheten.

f) Når vi beskriver lydbølger skiller vi mellom trykk og forflytning. Forklar. I en lukket orgelpipe er den ene enden lukket og den andre åpen. Anta at vi har en perfekt stående bølge i orgelpipen. På hvilke steder vil det være buker og knuter for henholdsvis forflytningsbølgen og trykkbølgen?

Lydbølger beveger seg gjennom luft ved at luftmolekyler lokalt forflytter seg i samme retning og i motsatt retning av den retningen bølgen beveger seg. I tillegg kommer Brownske bevegelser (som egentlig er mye større enn bevegelsen som skyldes lydbølgen), men vi ser bort fra Brownske bevegelser her siden den type bevegelse ikke er korrelert.

Luftmolekyler vil forflytte seg på grunn av at det stedvis er en opphopning av luftmolekyler. Det betyr at det stedvis er et forhøyet (luft)trykk. Men forhøyet lufttrykk vil føre til at molekyler tenderer til å fjerne seg fra slike områder, få større og større fart inntil de igjen opplever at det lokale lufttrykket er høyere enn gjennomsnittet. Det er en faseforskjell mellom lokal forflytningshastighet til luftmolekylene og lokalt trykk, og det er denne faseforskjellen som er nødvendig for at lyden skal vandre som en bølge med lydhastigheten.

Dersom en lydbølge treffer en massiv vegg vinkelrett på retningen bølgen vandrer, vil luftmolekylene ikke kunne flytte på veggen. Bevegelsen til luftmolekylene tett inn mot veggen vil da bli svært liten. Det betyr at like etter at lydbølgen normalt skulle ført til masse forflytning av luftmolekyler tvers over grenseflaten (dersom det ikke var noe vegg der), får vi en opphopning av de molekylene som blir hindret fra sin vandring. Da vil trykket bli stort.

I et blåseinstrument med lukket vegg i den ene enden, som f.eks. i en lukket orgelpipe, vil det derfor alltid være en knute for forflytningsbølgen og en buk for trykkbølgen på det stedet veggen er.

I den åpne enden av orgelpipen, der luften treffer kanten som fører til turbulens og derved tidsavhengige fenomener, vil forflytningsbølgen ha buk (maksimal forflytningshastighet framover eller bakover i pipen), mens trykket blir temmelik lik trykket utenfor åpningen, det vil si trykket får en knute i denne enden.

Den laveste frekvensen som svarer til disse grensebetingelsene svarer til en bølgelengde som er fire ganger så lang som orgelpipen.

Dersom vi forsøker å eksitere lydbølgen i orgelpipen på annet vis, vil vi også kunne få orgelpipen til å resonnerer ved frekvenser som svarer til følgende bølgelengder:

$$\lambda = \frac{4}{2n+1}L$$

Merk: Når det i oppgaveteksten stod “en perfekt stående bølge” var hensikten å signalere at vi ikke skulle bry oss om detaljer knyttet til overharmoniske, slik vi var opptatt av i årets prosjektoppgave.

g) Hvordan har vi brukt uttrykkene “nærfelt” og “fjernfelt” når vi har omtalt elektromagnetiske bølger? Hva karakteriserer de to tilstandene av et elektromagnetisk felt?

Vi har brukt uttrykket “nærfelt” i de tilfellene at vi har et elektromagnetisk felt som ikke er et rent elektrodynamisk felt. Med det mener vi at feltet gjerne kan ha litt av karakteren til en elektromagnetisk bølge, men at feltet domineres av felter fra nærliggende elektriske ladninger og/eller elektriske strømmer.

Betegnelsen “fjernfelt” har vi brukt i de tilfellene at vi har rene elektrodynamiske felt. Feltene vi har ett sted er da kun bestemt av elektriske og magnetiske felter og tidsvariasjonen av disse, i områdene omkring. Det er ingen (nevneverdig) bidrag fra elektriske eller magnetiske felt fra ladninger eller elektriske strømmer.

For nærfelt er i prinsippet elektrisk og magnetisk felt nesten uavhengige av hverandre. Det gjelder både i feltenes retninger og størrelser. Vanligvis er det ikke noe energitransport vekk fra systemet når vi har med nærfelt å gjøre. Felt kan bygges opp og trekkes tilbake til/fra områdene rundt kilden.

For fjernfelt gjelder det (for plane elektromagnetiske bølger i det minste) at det er et fast forholdstall mellom elektrisk og magnetisk felt ($E = cB$), og at det er en energitransport gitt av Poyntings vektor ($\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$).

Vanligvis finner vi typisk nærfelt-forhold i avstander mindre enn noen få beregnede bølgelengder vekk fra kilden, mens fjernfelt finner vi oftest i avstander større enn noen få beregnede bølgelengder unna kilden. Med “beregnet” bølgelengde menes her $\lambda = c/f$ der c er lyshastigheten og f er frekvensen til tidsvariasjonen til de elektriske og magnetiske feltene. Ordet “beregnet” er valgt for å markere at det i mange tilfeller ikke er naturlig å snakke om elektromagnetiske bølger overhodet i nærfeltområdene.

h) Lag en skisse av fargehesteskoen og indiker viktige trekk med denne. Forklar hvordan additiv fargeblanding kan visualiseres ved fargehesteskoen, og forklar hvorfor det er en rekke farger i naturen som ikke kan gjengis ordentlig på en dataskjerm.

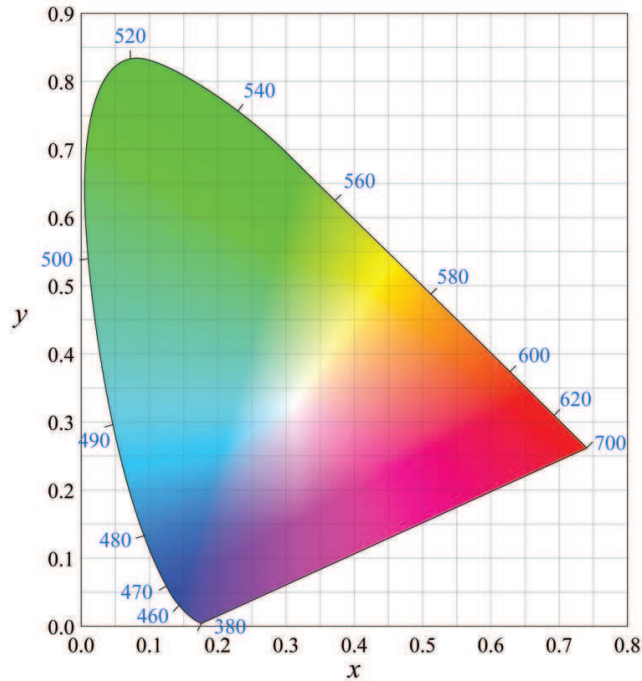
Fargehesteskoen er gitt i figur 4. Som det står i figurteksten er det ikke meningen at dere skal kunne tegne en like flott tegning til eksamen. Likevel er det visse trekk vi ønsker skal være med:

CIE fargemetrikken er basert på transformasjoner av tre fargestimuli (L, M, S) for et området på netthinnen, hvor L, M, S står for synceller (tapper) med størst følsomhet for lange, midlere og korte bølgelengder innenfor det synlige området. I CIE hesteskoen er intensitet i lyset ikke med (alle fargene skal oppleves som like intense). Fargehesteskoen representerer derfor fargeryanser innenfor samme intensitet.

De rene spektralfargene er plassert langs den krumme randen, fra dyp rødt i nedre høyre hjørne til dyp fiolett i nedre venstre hjørne. Grønne spektralfarger finnes i øvre del av fargehesteskoen.

Den rette linjen representerer purpurfargene, som er blanding av dyp rødt og dyp fiolett med ulik vekting.

Midtre del av fargehesteskoen svarer til hvitt, dvs “ingen” farge. Jo nærmere vi kommer randen, desto mer mettet blir fargen.



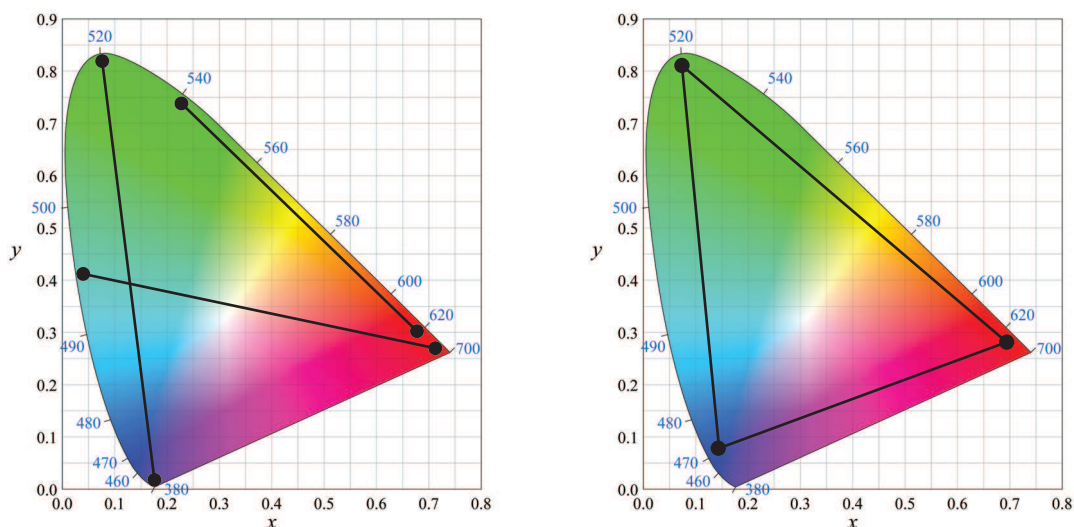
Figur 4: CIE fargehesteskoen. Det er ikke meningen at man til eksamen skal ha med seg fargeblyanter. Det er derfor tilstrekkelig å lage en skisse hvor hovedtrekkene inngår. Se teksten.

Additiv fargeblanding.

Det er her naturlig å lage enkle skisser (uten farger) som svarer til vår figur 5. Poenget er at dersom vi blander to farger som finnes i fargehesteskoen, kan vi bare lage farger som svarer til posisjoner langs ren rette linjen mellom de to fargene vi startet ut med. Posisjonen langs linjen svarer omtrent til en slags veiet middelværdi (nærmest den fargen som det er mest av). Siden CIE-diagrammet egentlig bare jobber med “lik intensitet”, er sammenhengen ikke nøyaktig lik vekting, siden vi må innom den bakenforliggende tredimensjonelle beskrivelsen for å få korrekt resultat. Men regelen er god nok for å angi hovedideen for hvordan fargehesteskoen kan brukes for å se hvordan additiv fargeblanding virker.

Ved fargefotografering og når vi viser et (digitalt) fargebilde på en skjerm, kan vi ved hjelp av tre ulike primærfarger generere alle farger som ligger innenfor trekanten i fargehesteskoen som er utspent av de tre primærfargene. Hver pixel består da av tre fargefelt; rødt, grønt og blått.

Siden fargehesteskoen er krum, og siden det ikke er enkelt å generere primærfarger som har en plassering som vi helst skulle ønske oss, finnes det mange farger som faller utenfor de som kan genereres ved additiv fargeblanding med tre primærfarger. Spesielt gjelder dette mange grønnfarger. Dessuten kan vi praktisk talt ikke gjenskape en fullstendig mettet spektralfarge. Det er derfor en opplevelse å se ekte spektralfarger i virkeligheten, siden vi ikke er i stand til å gjengi dem slik vi gjerne skulle ønske.



Figur 5: Hvilke farger vi kan få til ved additiv fargeblanding illustrert ved rette streker mellom startfargene. Se teksten.

i) Interferensmønsteret vi kan fange opp på en skjerm etter en dobbeltspalt og etter et optisk gitter har noe til felles, og likevel er det stor forskjell. Hva er felles? Hva er forskjellene?

Fra formelarket finner vi intensitetsfordelingen for en dobbeltspalt i ligning (1.58) og for mange spalter (optisk gitter) i ligningene (1.59) og (1.60).

Bruker vi likning (1.58) og vet at max får vi når uttrykket innenfor parantesen er lik $n\pi$, finner vi at vi får max intensitet for

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d}$$

Bruker vi likning (1.59) ser vi at vi får max når nevneren i parantesen er lik null. Da får vi egentlig et null-dividert-på-null-uttrykk, men brukes L'Hopitals regel finner vi at det går greit (gir bare en ekstra intensitet!). Bruker vi også likning (1.60) finner vi at vi får samme relasjon for plasseringen av de lyssterke linjene for optisk gitter som for dobbeltspalten.

Det er ikke nødvendig å utlede disse relasjonene på eksamen. Dersom man kjenner denne relasjonen, kan den settes opp direkte.

Det er altså samme (vinkel)avstand mellom maksima for dobbeltspalt som for optisk gitter.

Det er imidlertid en meget vesentlig forskjell på utseende av interferensmønsteret fra disse kildene. For dobbeltspalten følger lysintensiteten en cosinus kvadrert funksjon. Det betyr at hver linje i interferensmønsteret blir fordelt over et betydelig areal på skjermen (eller bildebrikken) der interferensmønsteret plukkes opp. Bildet blir derfor svært svakt.

For et optisk gitter vil linjene bli smalere og smalere alt etter hvor mange spalter som effektivt er i bruk. Det betyr at intensiteten midt i hver linje blir meget stor (øker som N^2 dersom jeg husker rett).

Dessuten er det mye mer lys som slipper gjennom mange spalter enn gjennom to spalter med samme spaltebredde. Dette bidrar også svært mye til at interferensstripen (eller prikkene) for et optisk gitter nærmest bestandig blir mye mer intense og får en mye bedre definert posisjon enn interferensstripene fra en dobbeltspalt.

j) Hvorfor må vi endre dimensjonene på en rektangulær bølgeleder når vi skifter frekvensen til mikrobølger som skal sendes gjennom bølgelederen?

Den gunstigste dimensjonen for en bølgeleder med rektangulært tverrsnitt er den hvor den lengste dimensjonen i tverrsnittet har en størrelse som er mellom 0.5 og 1.0 ganger bølgelengden til mikrobølene, og den korteste dimensjonen er halvparten av dette igjen. Dette gjelder for rektangulære bølgeledere der bølgemønsteret følger TE₁₀-moden (den vi har tatt utgangspunkt i vårt kapittel).

Har vi en lengre bølgelengde enn dette, får vi ikke noe mikrobølger gjennom bølgelederen (tapet per lengde blir stort). Dette kommer til uttrykk ved at det finnes en “cut off frequency” – signaler med lavere frekvens enn denne grenseverdien kommer ikke gjennom bølgelederen.

Dersom bølgelengden blir mindre enn kravet vi satte opp i sted, vil vi kunne få flere samtidige bølgemodi i bølgelederen samtidig. Det er uheldig av flere grunner, blant annet vil de ulike modiene gå med litt forskjellig hastighet, og signalet kan bli forvrengt.

Oppgave 2

Lyd, koherens:

a) Lydintensiteten utenfor en bolig nær en motorvei er målt til 0.158 mW/m². Bestem lydintensiteten i dB(SPL). Hva står forresten “SPL” for?

[Dersom du ikke husker referanseverdien, får du anta en verdi og vise hvordan du da kan beregne dB(SPL).]

Lydintensiteten i dB(SPL) finner vi f.eks. ved ligning (1.30) på formelarkene (dersom man ikke husker dem utenat). Formelen sier:

$$L_{I,abs} = (10 \text{ dB}(SPL)) \log \frac{I}{I_{spl,ref}}$$

Vi har fått oppgitt en lydintensitet i en absolutt rent fysisk skala. Referanseverdien kan være hva som helst for å få et dB-mål, men dersom vi skal ha lydintensiteten i

SPL (Sound Pressure Limit), må vi bruke $I_{spl,ref} = 1.0 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Setter vi inn for lydintensiteten fra motorveien, målt i W/m^2 , får vi:

$$L_{I,abs} = (10 \text{ dB(SPL)}) \log \frac{0.158 \cdot 10^{-3}}{1.0 \cdot 10^{-12}} = 82 \text{ dB(SPL)}$$

SPL står for Sound Pressure limit og svarer til den minste intensiteten som et menneskeøre kan oppfatte som lyd. (Lyden må i så fall ha frekvensen ca 1 kHz, men frekvens er ikke relevant for denne deloppgaven. Referansen i fysiske mål gjelder for alle frekvenser.)

b) Vanligvis angir vi ikke lydforurensing i dB(SPL), men i en lignende enhet. Hvilken? Forklar hva som er forskjellen mellom disse målene. Hvorfor er ikke dB(SPL) velegnet for å angi lydforurensing?

For å angi lydforurensing tar vi utgangspunkt i menneskets hørsel. Vi hører best frekvenser rundt 1000 - 2000 Hz, men kan høre lyder ned mot 20 Hz og opp mot 20 kHz. En lydforurensing f.eks. ved 40 kHz ville derfor neppe oppfattes som lydforurensing hos mennesker, selv om den var kraftig gitt i dB(SPL).

Vi vekter derfor bidragene til lydforurensingen (lyden) ved ulike frekvenser med en faktor som endrer seg i henhold til menneskets følsomhet for de aktuelle frekvensene. Det betyr at lyd med frekvens f.eks. 50 Hz vil telle mindre enn lyd ved 1000 Hz. Det er flere ulike former for vekting, alt etter om vi snakker om normal lydforurensing (da brukes ofte dB(A)) eller ved ekstrem kraftig lyd (da brukes gjerne dB(C) eller dB(D)).

Støy fra motorvei er en vanlig type lydforurensing, og da brukes først og fremst dB(A)-skalaen. Vi kan ikke konvertere fra dB(SPL) til dB(A) uten at vi kjenner hvordan lydintensiteten fordeler seg på ulike frekvenser.

c) Støyen fra motorveien er ikke-koherent. Hva menes med dette?

Støyen er ikke-koherent. Dersom vi f.eks. plottet lydtrykk som funksjon av tid, vil plottet vise temmelig uregelmessige svingninger (både positive og negative verdier). Vi kan forsøke å finne partier i dette plottet som viser tilnærmet en sinus-form. Det vil vi nok kunne finne, men støyen er slik at dersom vi kjenner amplitude og fase til lydbølgen ved ett tidspunkt, og forsøker å forutsi amplitude og fase ved et litt senere tidspunkt, vil vi mislykkes dersom vi forskyver oss mer enn noen få periodetider (midlere periodetid for den biten du betrakter).

Spørsmålet skiller ikke mellom romlig og tidmessig koherens. Svaret jeg nettopp ga gjelder først og fremst tidmessig koherens. Jeg vil tro at det også er kort koherenslengde også for den romlige koherensen, siden vi har med en motorvei å gjøre der kildene til støyen er biler som kjører med stor fart i begge retninger og støyen kommer fra et utstrakt område.

Dersom støyen skulle vært koherent, måtte lyden fra motorveien totalt domineres av

en og samme tonehøyde over en lang tid sammenlignet med periodetiden til denne lyden.

d) Vi skiller mellom to typer koherens. Forklar.

Her spørres det etter det vi allerede har nevnt: Forskjellen mellom tidmessig og romlig koherens. Tidmessig koherens angir hvor stor forutsigelse vi har for å angi amplitude og fase på svingningene (bølgen) etter en stund τ når vi kjenner amplitude og fase ved ett øyeblikk. Målingene for å bestemme korrelasjonen kan gjøres på to måter, enten ved én detektor (f.eks. en mikrofon) der vi tar opp tidsvariasjonen på dette stedet, eller ved to detektorer plassert etter hverandre i bølgens bevegelsesretning. Under visse betingelser (når avstanden mellom detektorene ikke blir for lang), vil signalet på den andre posisjonen omtrent svare til signalet på første posisjon, men forskjøvet i tid.

Den romlige koherensen angir korrelasjon på tvers av bølgens bevegelsesretning. Romlig koherens kan bare måles ved hjelp av to detektorer plassert ved siden av hverandre langs en retning vinkelrett på bølgens bevegelsesretning.

e) Autokorrelasjonsfunksjonen kan brukes for å beregne koherenslengder eller koherenstider. Forklar hvordan (max en halv side). Kan begge typer koherens bestemmes på denne måten? Begrunn svaret.

Autokorrelasjonsfunksjonen for en funksjon $g(t)$ er definert som:

$$C(\tau) = \frac{\int g(t)g(t+\tau)dt}{\int g^2(t)dt}$$

Vi har her antatt at vi har med et stasjonært signal å gjøre (at det ikke endrer karakter over den tiden vi betrakter). Her er τ tidsforskjellen mellom de to punktene vi sammenligner signalet i.

For $\tau = 0$ vil $C(\tau) = 1.0$. For et signal som har middels stor til lang koherenstid (i forhold til periodetiden T for det dominerende signalet), vil $C(T/2) \approx -1.0$ og $C(T) \approx 1.0$, men når τ blir stor relativt til koherenstiden, vil $C(\tau)$ gå mot null (i tallverdi). Autokorrelasjonsfunksjonen vil derfor ha en del felles trekk med tidsforløpet til en underkritisk demping.

Koherenstiden definerer vi ofte som den τ -verdien der omhyllingskurven for autokorrelasjonsfunksjonen har sunket til om lag $1/e$.

Det er mulig å definere også en koherenslengde for tidmessig koherens. Sammenhengen ligger i bølgehastigheten v på følgende måte:

Tidmessig koherenslengde = koherenstid * v

Vi kan ikke bruke autokorrelasjonsfunksjonen og bare måling med én detektor dersom vi skal bestemme den romlige koherensen. Den romlige koherensen kan bare angis som en koherenslengde. Denne koherenslengden kan vi bestemme ved å sette to detektorer

et stykke fra hverandre i en retning vinkelrett på bølgens bevegelsesretning. Dersom bølgen beveger seg i z-retning og vi plasserer to detektorer g og f ved to posisjoner (x, y, z) og $(x + \eta, y, z)$, vil vi kunne beregne en korrelasjonsfunksjon mellom de to målingene slik:

$$C(\eta) = \frac{\int g(x, y, z, t) f(x + \eta, y, z, t) dt}{\sqrt{\int g^2(t) dt \int f^2(t) dt}}$$

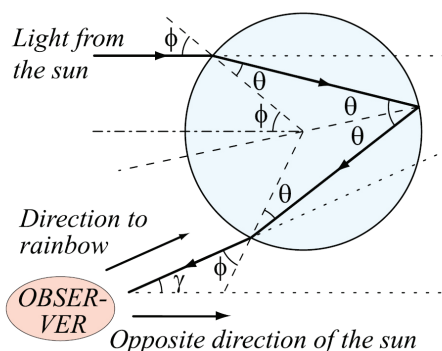
Også denne C -en vil være lik 1 når $\eta = 0$ og avta i verdi når η øker. Den verdien av η som svarer til at korrelasjonsfunksjonen har sunket til $1/e$, vil kunne defineres som den romlige koherenslengden.

Korrelasjonsfunksjonen er ikke en del av pensum i 2016, og er bare tatt med i løsningsforslaget for fullstendighetens skyld.

Oppgave 3

Refleksjon/brytning/polarisasjon/interferens:

a) Regnbuen danner en del av en sirkel med vinkelavstand på ca 42 grader relativt til retningen til “antisol” (motsatt retning av synsretningen til Sola). Figur 6 viser strålegangen i regndråpen. Som gitt i figurteksten er vinkelen $\phi \approx 60^\circ$ for de lysstrålene som gir oss regnbuen. Bestem brytningsvinkelen θ . Brytningsindeksen for vann er 1.333.



Figur 6: Det lyset som gir oss regnbuen går gjennom vanndråpene som vist i denne figuren med en vinkel $\phi \approx 60^\circ$.

Snel's brytningslov gir oss

$$n_{\text{luft}} \sin \phi = n_{\text{vann}} \sin \theta$$

Setter vi inn at brytningsindeksen for luft er om lag 1.000, og den for vann er 1.333 og at $\phi = 60^\circ$ følger det at $\theta = 40.5^\circ$.

Da følger det at innfallsvinkelen når strålen igjen treffer en grenseflate, nå mellom vann og luft, også blir 40.5° .

b) Beregn Brewstervinkelen både for lys som går fra luft mot vann og i grensesjiktet vann mot luft.

Brewstervinkelen kan vi bestemme ut fra ligning (1.51) på formelarket. Det er to ulike Brewstervinkler inni bildet, den ene er ved overgang fra luft til vann, og den neste ved overgang fra vann til luft.

Vi gjennomfører beregningene:

$$\text{Brewstervinkel} - \text{luft} - \text{vann} = \arctan \frac{n_v}{n_l} = \arctan 1.333 = 53.1^\circ$$

$$\text{Brewstervinkel} - \text{vann} - \text{luft} = \arctan \frac{n_l}{n_v} = \arctan 0.750 = 36.9^\circ$$

c) Dersom du betrakter regnbuen gjennom et lineært polarisasjonsfilter, hva ville du kunne oppleve? Gi nødvendige detaljer i beskrivelsen.

Vi ser at når lyset går gjennom en vandråpe, vil det oppleve:

- Ved første grenseflate er innfallsvinkel 60.0° og Brewstervinkel 53.1° . Forskjell om lag 6.9° .
- Ved andre grenseflate er innfallsvinkel 40.5° og Brewstervinkel 36.9° . Forskjell om lag 3.6° .
- Ved tredje grenseflate er innfallsvinkel 40.5° og Brewstervinkel 36.9° . Forskjell om lag 3.6° .

Vi vet at når innfallsvinkelen er eksakt lik Brewstervinkelen, vil det reflekterte lyset bli fullstendig lineært polarisert.

Det er imidlertid bare det reflekterte lyset som blir polarisert, ikke det transmitterte! Det betyr at det er BARE refleksjonen på bakre vegg av vandråpen som kommer til å bidra til endring i polarisering i det lyset vi får fra regnbuen.

Spørsmålet er da: Når det er 3.6 graders forskjell mellom innfallsvinkel og Brewstervinkel, vil det gi noe særlig polarisering?

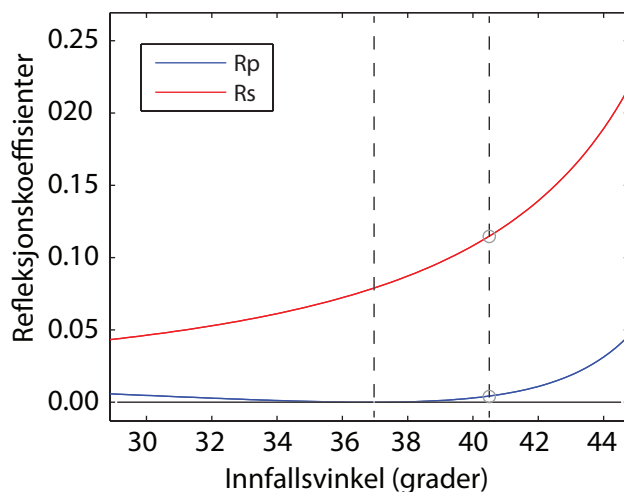
Her er det vanskelig å være veldig sikker i en eksamenssetting, men 3.6 grader er tross alt en liten vinkel, og dersom vi har figur 9.8 i læreboka litt i mente, vet vi at Brewstervinkelen ikke representerer en skarp lovmessighet. Vi har også på forelesning demonstrert hvordan vi kan fjerne refleksjoner fra f.eks. gulvet ved å bruke et polarisasjonsfilter, og har da sett at vi ikke behøver å treffe Brewstervinkelen svært nøyaktig for å få en betydelig reduksjon i refleksjon i lys med polarisering parallelt med innfallsplanet.

Ut fra disse erfaringene bør det være rimelig å konkludere at lyset fra en regnbue vil være betydelig polarisert, selv om vi ikke kan si akkurat hvor mye.

Når vi tenker oss strålegangen i dråpen og hvilken retning dråpen har i forhold til regnbuen, ser vi at polarisasjonen bør være langs regnbuen. Det er jo lys med polarisasjon parallelt med innfallsplanet som blir kraftig redusert.

Så langt eksamensbesvarelser, men når vi først har oppe dette fenomenet, har vi valgt å gi en litt mer nøyaktig beskrivelse av polarisasjonen. Vi har da tatt utgangspunkt i Fresnels ligninger, ligningene (9.15) og (9.16) i læreboka, for det tilfellet at $n_1 = 1.333$ og $n_2 = 1.000$ (som nettopp gjelder refleksjon på bakre vegg av vanndråpen). Vi har da laget en figur liknende figur 9.8 i læreboka, men tatt ut et lite utsnitt for å lettere se detaljer. Resultatet er vist i figur 7. Brewstervinkelen ser vi er om lag 36.9° , som tidligere beregnet, men kurven for R_p er temmelig flat i området. For $\theta = 40.5^\circ$ leser vi av fra figuren at $R_p = 0.00397$ og $R_s = 0.1135$. Herav følger at

$$\frac{R_p}{R_s} = 0.035$$



Figur 7: Refleksjonskoeffisienter beregnet fra Fresnels ligninger for lys som reflekteres inne i en vanndråpe. Se tekst for detaljer.

Det betyr at intensiteten av lyset med polarisering på tvers av regnbuen bare er ca 3.5% av intensiteten med polarisering langs regnbuen. Det betyr at lyset har en høy grad av lineær polarisering.

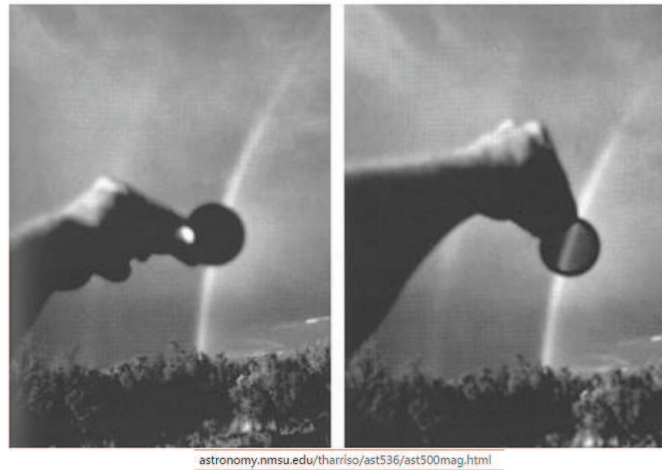
På internett kan du finne eksempler på fotografier som viser effekten, men jeg har ikke funnet noen svært gode eksempler. I figur 8 er det gitt ett eksempel.

Her slutter det ekstra tillegget vi tok med for moro skyld.

d) Bildemontasjen i figur 9 (neste side) viser hvordan lys fra sola, spredt av atomer og molekyler i atmosfæren, blir reflektert fra en speilblank vannflate. I et område merket med en sirkel i fotografiet blir praktisk talt ikke noe lys reflektert (vi ser rett til den sorte bunnen på vannet). Hva forteller det om det spredte lyset fra den delen av himmelen som normalt skulle blitt reflektert i den aktuelle retningen (retningen markert med en stiplet linje)?

Du kan siden, om du er interessert, lese mer om spredt lys på Wikipedia under “Rayleigh scattering”.

Dette er et morsomt eksempel hvor naturen selv ordner med et polarisasjonsfilter!



astronomy.nmsu.edu/tharriso/ast536/ast500mag.html

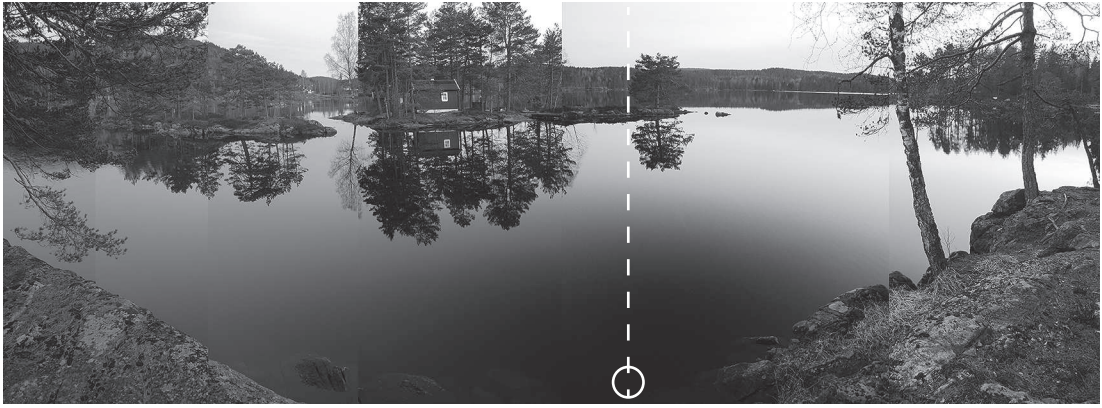
Figur 8: Eksperimentell demo av polarisasjon til lyset fra en regnbue. Et lineært polarisasjonsfilter holdes opp i lysveien for en regnbue. Filteret har 90 graders forskjell i sin orientering i de to delbildene. (Kilde: Se lenke under bildet.)

Vi har her å gjøre med refleksjon av lys i overflaten mellom luft og vann, og det innkommende lyset er i luft. Vi så i forrige deloppgave at Brewstervinkelen i dette tilfellet er om lag 53° . I figurteksten er det oppgitt at synsretningen til det sorte området danner ca 50° med loddlinjen. Det betyr at også innfallsvinkelen blir om lag 50° . Det betyr at lys med polarisasjon parallelt med innfallsplanet blir kraftig redusert. Derimot vil lys med polarisasjon normalt på innfallsplanet reflekteres i betydelig grad.

[Info for senere bruk, ikke forventet at man kan dette til eksamen: Graden av refleksjon er gitt ut fra refleksjonskoeffisienten R_p og R_s i Fresnels ligninger og figur 9.8 i læreboka, men justert for brytningsindeksene for vann og luft.]

Siden vi ikke får noe reflektert lys overhodet, må det bety at lyset som skulle ha blitt reflektert rett og slett ikke har noe polarisering vinkelrett på innfallsplanet! Men bildet viser at himmelen er lys også i den retningen som skulle blitt reflektert. Det betyr at lyset fra himmelen i den aktuelle retningen rett og slett må være vertikalt polarisert!

[Dette er et eksempel på at spredt lys ofte er polarisert. Interesserte kan som antydnet lese mer om dette f.eks. på Wikipedia med oppslagsord Rayleigh scattering. Lyset fra himmelen i en retning 90 grader vekk fra retningen til Sola, kan ha en betydelig lineær polarisering normalt på retningen til Sola. Graden av polarisering har sammenheng med hvor ren og tørr atmosfæren er. I vårt tilfelle stod Sola i horisonten og da vil polariseringen av det spredte lyset fra atmosfæren være vertikal i den retningen som er 90 grader vekk fra Sola.]



Figur 9: Bildemontasje som viser reflektert lys fra en speilblank vannoverflate omtrent ved solnedgang. Total bildevinkel horisontalt er ca 150 grader. Retningen markert med stiplet linje er omtrent vinkelrett på retningen til sola (sola lå i horisonten utenfor høyre del av bildet). Retningen fra observatøren ned til området merket med en sirkel, var ca 50 grader (relativt til loddlinjen).

Oppgave 4

Geometrisk optikk m.m.:

a) Den 9. mai 2016 var en flott Merkurpassasje synlig i sin helhet i Norge. Det ble hevdet at man ikke kunne se med bare øynene Merkurskiven mens den gled over solskiven, fordi Merkur er for liten. Gjør noen beregninger som støtter eller svekker en slik påstand. [Det tas i denne oppgaven for gitt at man bruker tilstrekkelig med filtre for at lysintensiteten inn på øyet ikke blir for stor!]

Info: Merkurs diameter 4879.4 km. Midlere avstand Sol - Merkur $5.79 \cdot 10^7$ km. Midlere avstand Sol - Jord $1.49 \cdot 10^8$ km. Avstand linse/netthinne i et menneskeøye ca 20 mm. Diameter til synscellene (tappene) i fovea (ansvarlig for skarpsyn) på netthinnen ca $2.0 \mu\text{m}$. Vi ser i denne oppgaven for enkelhets skyld bort fra diffraksjon.

Tankegangen her er at Merkur er så liten i forhold til avstanden, at vinkeldiameteren θ blir svært liten. Størrelsen til bildet av Merkur på netthinnen (en skive med diameterer δ) er slik at vinkeldiameteren til denne skiva relativt til midt i øyelinsen, også vil være lik θ . Hvorvidt vi vil kunne se den sorte skiva i forhold til solas intense lys, avhenger da hvor stor skiva på netthinnen (diameter δ) er i forhold til "pixlene" i øyet, dvs størrelsen til tappene.

Vi starter med å regne ut vinkeldiameteren til Merkur når den passerer solskiva (nærmere oss enn Sola).:

$$\theta = \frac{4.8794 \cdot 10^3}{(14.9 \cdot 10^7 - 5.79 \cdot 10^7)} = 5.36 \cdot 10^{-5}$$

Siden vi har samme vinkel inne i øyet (bildet av Merkur sett fra midt i øyelinsen eller

iris), blir diameteren av bildet δ av Merkur på netthinnen:

$$\delta = 5.36 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Her har vi benyttet at i et menneskeøye er avstanden fra linsen til retina om lag 20 mm.

Vi ser da at Merkurskiven vil ha en diameter på $1.1 \mu\text{m}$ på netthinnen. Synscellene har en diameter på om lag $2 \mu\text{m}$, med andre ord dobbelt så stor diameter.

Det betyr at dersom bildet av Merkur faller fullstendig innenfor det følsomme området for en synscelle, vil integrert intensitet på denne ene synscellen bli om lag 75% av det nabocellene får. I prinsippet kan vi tenke oss at dette er nok til at vi vil oppfatte Merkur som en flekk med litt redusert intensitet. Men bildet vil neppe ligge stabilt på en synscelle, og sjansene er stor for at den mørke flekken som Merkurbildet representerer, vil bli fordelt på to eller tre synsceller. I så fall vil reduksjonen i lysintensiteten på disse cellene bli ganske marginal.

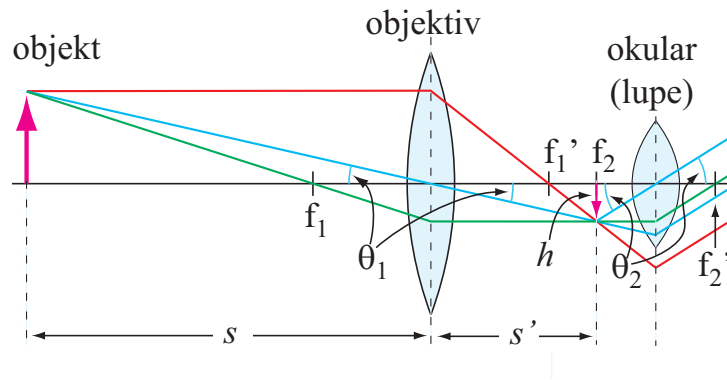
Det er vanskelig å konkludere svært bombastisk ut fra regningene vi har gjort. Diffraksjon vil også spille inn i praksis og resultatet vil da i prinsippet også avhenge av hvor stor pupillen vår er. Uansett ser vi at bildet av Merkur på netthinna er såpass lite at det må være svært vanskelig å oppdage den med bare øynene, dersom det overhodet er mulig i praksis. Våre beregninger støtter derfor påstanden om at vi ikke kunne se Merkur med bare øynene ved Merkurpassasjen 9. mai i år. Beregningene sier oss imidlertid at konklusjonen ikke er svært overbevisende.

b) Vi hadde liggende en gammel linse med 10 cm diameter og påskrevet $f = 500$ mm. Vi hadde videre en lupe liggende med påtrykt: 5X. Disse ble satt sammen til et lite teleskop. Forklar hvordan dette kunne gjøres. Tegn et strålediagram der du bruker de vanlige konstruksjonsreglene for tynne linser. [Du kan gjerne i denne tegningen anta at objektavstanden bare er noen få meter i stedet for “uendelig” for å lette tegningen.] Bestem avstanden mellom linsene og forstørrelsen dersom vi skulle bruke dette teleskopet for å kikke på Merkurpassasjen. [Solfilter antas brukt!] Ville vi kunne se Merkurskiven under Merkurpassasjen ved hjelp av dette teleskopet? Som alltid: Begrunn svarene.

Vi kan bruke linsen med brennvidde 500 mm som objektiv og lupen som okular. Lupen er påtrykt 5X, hvilket betyr at forstørrelsen er 5X. Forstørrelsen for en lupe er vanligvis gitt som vinkelforstørrelsen vi får når vi betrakter et objekt gjennom lupen sammenlignet med situasjonen hvor vi betrakter objektet uten lupe og objektet har avstanden 25 cm fra øyet (gjennomsnittlig “nærpunkt” for befolkningen). Det betyr at brennvidden til lupen må være:

$$f_{\text{lupen}} = 250 \text{ mm}/5 = 50 \text{ mm}$$

I figur 10 har vi tegnet inn strålegang (konstruksjonsregler) for det teleskopet vi kan lage oss. Vi har valgt å bruke konstruksjonsreglene for det tilfellet at objektet ikke er svært langt unna i forhold til brennvidden til objektivet.



Figur 10: Konstruksjonslinjer for å vise sammenheng mellom objekt og bilde for et teleskop. Vi har her valgt å la objektavstanden være mye mindre (i forhold til brennvidden) enn det vi ville hatt dersom vi betraktet Merkurpassasjen gjennom teleskopet.

For det tilfellet av vi observerer Merkurpassasjen med dette teleskopet (NB: Kraftig solfilter antas brukt!!!), vil bildet av Sola og Merkur ligge praktisk talt i brennplanet for den første linsen. Forstørrelsen m til teleskopet i slike tilfeller er

$$m = -\frac{f_{\text{objektiv}}}{f_{\text{lupe}}} = -\frac{500}{50} = -10$$

Minustegnet er tatt med for å indikere at bildet vil være opp-ned.

En vinkelforstørrelse på 10 er ikke spesielt mye. Vil den kunne føre til at vi kan se Merkurskiven dersom vi kikker på Sola og Merkur gjennom teleskopet?

Ut fra beregningen i forrige deloppgave så vi at bildet av Merkur (uten bruk av teleskop) hadde en diameter på om lag $1 \mu\text{m}$, dvs. halvparten av en synscelle. Betrakter vi Sol og Merkur gjennom teleskopet vårt, vil bildet av Merkur bli 10 ganger større, dvs få en diameter på om lag $10 \mu\text{m}$. Det betyr at skyggen av Merkur vil gi kraftig redusert lysintensitet på i størrelsesorden 20 tettliggende synsceller. Det bør vær nok til at vi vil kunne se Merkur på dens vei over solskiven ved Merkurpassasjen.

c) Vi fikk lyst å bruke den 10 cm store linsen som brennlass. Hvor stor irradians kunne vi maksimalt oppnå lokalt på et stykke papir dersom vi brukte linsen som brennlass? Irradiansen fra Sola er om lag 900 W/m^2 ved bakken på Jorda.

Tankegangen her er at når vi sender sollys gjennom linsen, vil lysbunten bli fokusert og ha minst diameter i brennplanet for så å utvides igjen.

Vi kan fort få assosiasjoner til diffraksjon og Airy-skive og denslags. Diffraksjon vil imidlertid spille minimal rolle her. Grunnen er at solskiven er så stor og at også diameteren til linsen er så stor. Vi så jo at vi nesten kunne se Merkurskiven med bare øynene fordi bildet av Merkur var nesten like stor som en synscelle. Vi vet også fra tidligere at øyelinsen/iris har en diameter på om lag 2 - 8 mm og at skarpsynet vårt ikke ødelegges mye av diffraksjon. Vi ser derfor bort fra diffraksjon også i denne deloppgaven.

Den minste diameteren på lysbunten av sollys som passerer linsen, vil derfor rett og slett være diameteren på bildet av sola i brennplanet.

Vi kan da bestemme irradiansen vi kan få i brennplanet ved å anta at all effekt som passerer linsa også vil passere *bildet av sola* i brennplanet. Siden bildet er mye mindre enn linsas størrelse, vil irradiansen i brennplanet bli mye større enn det som faller ned på bakken uten brennlass.

La oss gjennomføre beregningene. For å finne størrelsen til bildet av Sola i brennplanet, må vi kjenne vinkeldiameteren til Sola. Den er om lag 0.5 grader, og er omtrent den samme som for Månen. Dette er en størrelse som har gått igjen i en rekke oppgaver, så det er en størrelse som antas kjent. Dersom man ikke husker denne verdien, må man bare gjøre en gjetning, eller bruke en matematisk symbol, og gjennomføre beregningene videre.

Bildet av Sola i brennplanet får da følgende diameter (tatt i betraktning at brennvidden på linsa er 500 mm) (gjør først om fra grader til radianer):

$$\frac{0.5 \cdot \pi}{180} \cdot 500 \text{ mm} = 8.73 \cdot 10^{-3} \cdot 500 \text{ mm} = 4.34 \text{ mm}$$

Effekten av sollys som passerer gjennom linsa (diameter 10 cm) er:

$$P = 900 \text{ W/m}^2 \cdot 0.05^2 \cdot \pi = 7.07 \text{ W}$$

Irradiansen på et papir holdt i brennplanet ville da bli:

$$I = \frac{P}{\text{tverrsnitt} - \text{av} - \text{bildet}} = \frac{7.07 \text{ W}}{(4.34 \cdot 10^{-3}/2)^2 \cdot \pi \text{ m}^2} = 4.7 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$$

Dette er om lag 520 ganger irradiansen uten bruk av brennlass.

Det kan bemerkes at selv om dette er en stor økning i irradians, ville denne linsa ikke vært svært effektiv som brennlass. Brennvidden er lang i forhold til diameteren. Dersom brennvidden f.eks. bare hadde vært 250 mm, ville diameteren av bildet av Sola blitt bare halvparten så stor, og arealet av bildet en faktor fire mindre enn nå. Da ville vi fått en økning i irradians på om lag 2080 ganger sammenlignet med situasjonen uten brennlass.