Taller Anillos y Campos

Carlos Alirio Rico Acevedo

-

1. Muestre que $S \subset \mathcal{R}$ es un subanillo de $\mathcal{R}$ si y sólo si son validos

   $0 \in S$,

   $(a - b) \in S$ para todo $a, b \in S$,

   $ab \in S$ para todo $a, b \in S$.

2. Muestre que la intersección arbitraria de subanillos de un anillo $\mathbb{R}$ es tambien un subanillo.

3. Muestre que si $\mathcal{U}$ es la colección de todas las unidades de un anillo $\mathcal{R}$ con unitario, entonces $\langle U, \cdot \rangle$ es grupo.

4. Muestre que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ para todas las a y b en un anillo $\mathcal{R}$ si y sólo si $\mathcal{R}$ es conmutativo.

5. Sea p un primo. Muestre que en el anillo $\mathbb{Z}_p$, se tiene $(a + b)^p = a^p + b^p$.

6. Si para algún anillo $\mathcal{R}$ existe un entero positivo n tal que $n \cdot a = 0 \ \forall a \in \mathcal{R}$, entonces el menor de dichos enteros es llamado *característica del anillo* $\mathcal{R}$. Caso no exista dicho entero, se dice que $\mathcal{R}$ tiene característica cero. Encuéntrese la característica de cada uno de los siguientes anillos:

   a) $2\mathbb{Z}$
   b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
   c) $\mathbb{Z}_3 \times 3\mathbb{Z}$
   d) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
   e) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$
   f) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$

7.

8. Muestre que en $\mathbb{Z}_p$ 1 y $p - 1$ son los únicos elementos del campo que son sus propios inversos multiplicativos. Con esto demuestre que $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$ si y sólo si n es primo (*Teorema de Wilson*).

9. Sea $\mathbb{R}$ un anillo que contiene al menos dos elementos. Suponga que para cada $a \neq 0$, existe una b tal que $aba = b$.

   (a) Muestre que $\mathbb{R}$ no tiene divisores de cero
   (b) Muestre que $bab = b$.
   (c) Muestre que $\mathbb{R}$ tiene unitario.
   (d) Muéstrese que $\mathbb{R}$ es un anillo de división.

10. Muestre que un anillo conmutativo sin divisores de cero y finito, es un campo.

11. Sea A un grupo y $Hom(A)$ el conjunto de todos los endomorfismos de A. Muestre que el anillo $\langle Hom(A), +, \circ \rangle$. Donde la suma de endomorfismos $(\psi + \phi)(a) = \psi(a) + \phi(a)$ para todo $a \in A$. y $\psi \circ \phi$ es la composición.