

## Capítulo 4

### Anillos noetherianos y artinianos

Muchos anillos de importancia, tanto en geometría algebraica como en teoría de números, satisfacen ciertas condiciones de *finitud* que se suelen expresar mejor, siguiendo a Noether y Artin, en términos de condiciones de cadena en sus ideales. Ejemplos de especial importancia son los anillos de polinomios con coeficientes en un campo  $K[x_1, \dots, x_n]$  y el anillo de enteros  $\mathbb{Z}$ .

**Anillos noetherianos.** Un anillo  $A$  es *noetheriano* si todos sus ideales son finitamente generados.

**Proposición 4.1** *Si  $A$  es anillo, son equivalentes:*

- (1)  $A$  es noetheriano.
- (2) Toda cadena ascendente de ideales propios

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

se estaciona, i.e., existe un entero  $m$  tal que  $I_m = I_{m+1} = \dots$ .

- (3) Todo conjunto no vacío de ideales de propios  $A$  tiene un elemento máximo, i.e., un ideal que no está contenido en ninguno de los ideales de la familia dada.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Sea  $I := \bigcup I_j$ . Como los ideales  $I_j$  están encadenados, entonces  $I$  es un ideal de  $A$  y es propio porque los  $I_j$  lo son. Por hipótesis  $I$  es finitamente generado, digamos  $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , donde notamos que para  $m$  suficientemente grande se tiene que  $a_i \in I_m$  y por lo tanto  $I \subseteq I_m$ , i.e.,  $I_k = I_m$  para toda  $k \geq m$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Si  $\mathcal{F}$  es una familia no vacía de ideales propios de  $A$  que no contiene un elemento máximo, entonces para cualquier  $I_1 \in \mathcal{F}$  existe un  $I_2 \in \mathcal{F}$  tal que  $I_1 \subsetneq I_2$ . De esta manera se construye una cadena que no se estaciona.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Si  $I \subsetneq A$  es un ideal propio, sea  $\mathcal{F}$  la familia de ideales contenidos en  $I$  de la forma  $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ . Por hipótesis esta familia tiene un elemento máximo, digamos  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ . Entonces, para todo  $a \in I$  se tiene que  $\langle a_1, \dots, a_n, a \rangle \subseteq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ,

y como éste es máximo se sigue que  $\langle a_1, \dots, a_n, a \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  y por lo tanto  $a \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  y así  $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .  $\square$

*Ejemplo 1.* El anillo  $\mathbb{Z}$  es un DIP y por lo tanto es noetheriano. Todo campo  $K$  es noetheriano y el anillo de polinomios  $K[x_1, \dots, x_n]$  también es noetheriano por el teorema siguiente:

**Teorema 4.2 (Teorema de la base de Hilbert)** *Si  $A$  es un anillo noetheriano, entonces  $A[x]$  también lo es. En particular, si  $K$  es un campo, entonces el anillo de polinomios  $K[x_1, \dots, x_n]$  es noetheriano.*

*Demostración.* La segunda afirmación se sigue de la primera por inducción. Para demostrar la primera afirmación, mostraremos que si  $A[x]$  no fuera noetheriano entonces  $A$  no lo es. Supongamos entonces que  $A[x]$  no es noetheriano y sea  $I \subseteq A[x]$  un ideal que no es finitamente generado. Sea  $f_1 \in I$  de grado mínimo. Escojamos  $f_2 \in I - \langle f_1 \rangle$  de grado menor (el cual existe porque  $I$  no es finitamente generado). Iterando este proceso, escojamos  $f_{k+1} \in I - \langle f_1, \dots, f_k \rangle$  de grado menor. Por la elección de los  $f_i$ , sus grados  $n_i$  satisfacen que  $n_1 \leq n_2 \leq \dots$ . Más aún, si  $a_i$  es el coeficiente de grado de  $f_i$ , entonces

$$\langle a_1 \rangle \subseteq \langle a_1, a_2 \rangle \subseteq \dots \subseteq A$$

es una cadena de ideales de  $A$  que no se estaciona, ya que si lo hiciera, digamos

$$\langle a_1, \dots, a_k \rangle = \langle a_1, \dots, a_k, a_{k+1} \rangle$$

se tendría una igualdad de la forma

$$a_{k+1} = \sum_{i=1}^k r_i a_i \quad \text{con los } r_i \in A$$

y poniendo

$$g := f_{k+1} - \sum_{i=1}^k r_i x^{n_{k+1}-n_i} f_i \in I - \langle f_1, \dots, f_k \rangle$$

este es un polinomio de grado  $\text{gr}(g) < \text{gr}(f_{k+1})$  porque el coeficiente  $a_{k+1}$  de  $f_{k+1}$  se cancela en

$$a_{k+1}x^{n_{k+1}} - \sum_{i=1}^k r_i x^{n_{k+1}-n_i} a_i x^{n_i} = a_{k+1}x^{n_{k+1}} - \sum_{i=1}^k r_i a_i x^{n_{k+1}} = 0$$

porque  $\sum_{i=1}^k r_i a_i = a_{k+1}$ , lo cual contradice la minimalidad del grado de  $f_{k+1}$ .  $\square$

En el capítulo 1, página 17, se definieron los conjuntos algebraicos afines  $\mathcal{V}(I) \subseteq K^n$  para  $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$  un ideal, con  $K$  algebraicamente cerrado. Por el teorema de la base de Hilbert, todos estos ideales son finitamente generados, digamos  $I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$  con  $f_i \in I$ . Se sigue que

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(f_1) \cap \dots \cap \mathcal{V}(f_k),$$

es decir, todos los conjuntos algebraicos afines son la intersección un número finito de hipersuperficies  $\mathcal{V}(f_i) \subseteq K^n$  (vea el ejemplo 6 del capítulo 1 en la página 18). Dicho en otras palabras, en la definición de los conjuntos algebraicos afines  $\mathcal{V}(I)$  basta considerar conjuntos finitos de polinomios (que generen el ideal  $I$ ).

Localización preserva la noetherianidad:

**Proposición 4.3** *Si  $A$  es noetheriano y  $S \subseteq A$  es multiplicativo, entonces  $S^{-1}A$  también es noetheriano.*

*Demostración.* Si  $J$  es cualquier ideal de  $S^{-1}A$ , entonces  $\varphi^{-1}J \subseteq A$  es finitamente generado y por lo tanto  $S^{-1}\varphi^{-1}J$  también es finitamente generado, pero por 3.7 este último ideal es  $J$ .  $\square$

Recordemos ahora del capítulo 1, página 18, que si  $U \subseteq \text{Specm} K[x_1, \dots, x_n]$ , entonces  $\mathcal{J}(U) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in U} \mathfrak{m}$ ; en particular para  $U = \text{Specm} K[x_1, \dots, x_n]$  se tiene que

$$\mathcal{J}(\text{Specm}(K[x_1, \dots, x_n])) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \text{Specm} K[x_1, \dots, x_n]} \mathfrak{m}$$

y dejamos como el ejercicio 27 el probar que si  $K$  es un campo infinito, entonces

$$\mathcal{J}(\text{Specm}(K[x_1, \dots, x_n])) = 0$$

(note que en particular si  $K$  es algebraicamente cerrado, el ejemplo 2 en la página 91 prueba el caso correspondiente).

Si  $A$  es cualquier anillo, a la intersección de todos los ideales máximos de  $A$  se le llama el *radical de Jacobson* de  $A$  y lo denotaremos por  $J(A)$ . Así, el ejercicio 27 citado anteriormente, pide probar que  $J(K[x_1, \dots, x_n]) = 0$ .

**Lema 4.4** *Si  $A$  es un anillo y  $c \in A$ , entonces  $c \in J(A)$  si y sólo si  $1 - ac \in A^*$  (una unidad) para todo  $a \in A$ .*

*Demostración.* Si  $1 - ac$  no es una unidad, entonces está contenido en un ideal máximo  $\mathfrak{m}$  de  $A$  y como  $c \in J(A) \subseteq \mathfrak{m}$  entonces  $ac \in \mathfrak{m}$  y por lo tanto  $1 \in \mathfrak{m}$ , lo cual es imposible.

Recíprocamente, si  $c \notin \mathfrak{m}$  para algún ideal máximo, entonces  $\mathfrak{m} + \langle c \rangle = \langle 1 \rangle$  y por lo tanto  $1 = m + ac$  para algún  $m \in \mathfrak{m}$  y  $c \in A$ . Se sigue que  $1 - ac = m \in \mathfrak{m}$  y por lo tanto no es una unidad.  $\square$

**Teorema 4.5 (Lema de Nakayama)** *Sean  $I \subseteq A$  un ideal tal que  $I \subseteq J(A)$  y  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado.*

(1) *Si  $M = IM$ , entonces  $M = 0$ .*

(2) *Si  $N$  es un submódulo de  $M$  tal que  $M = N + IM$ , entonces  $M = N$ .*

*Demostración.* (1): Si  $x_1, \dots, x_n$  generan  $M$ , por hipótesis podemos escribir

$$x_i = \sum_j a_{ij} x_j \quad \text{con los } a_{ij} \in I.$$

Entonces,  $x_1, \dots, x_n$  son soluciones del sistema de  $n$  ecuaciones en  $n$  incógnitas

$$\sum_j (\delta_{ij} - a_{ij})x_j = 0 \quad \text{donde } \delta_{ij} \text{ es una delta de Kronecker}$$

y así, por la regla de Cramer  $\det(\delta_{ij} - a_{ij}) \cdot x_i = 0$  para toda  $i$ . Observe ahora que en la expansión del determinante anterior todos los sumandos tienen un factor en  $I$  excepto el término correspondiente a la diagonal que es de la forma  $(1 - a_{11}) \cdots (1 - a_{nn})$ ; por lo tanto el determinante anterior se expande como un 1 más una suma de elementos de  $I$ , digamos  $1 + c$  con  $c \in I \subseteq J(A)$ . Se sigue que  $d = \det(\delta_{ij} - a_{ij}) \in A^*$  porque de lo contrario existiría un ideal máximo  $\mathfrak{m}$  tal que  $d \in \mathfrak{m}$ , y como  $d = 1 + c$  con  $c \in J(A)$ , entonces  $c \in \mathfrak{m}$  y consecuentemente  $1 \in \mathfrak{m}$ , una contradicción. Por lo tanto,  $\det(\delta_{ij} - a_{ij}) \in A^*$ . Así, la igualdad  $\det(\delta_{ij} - a_{ij}) \cdot x_i = 0$  implica que  $x_i = 0$  para todo  $i$  y por lo tanto  $M = 0$ .

(2): La hipótesis dice que  $M/N = (N + IM)/N = I(M/N)$  y así por la parte (1) se sigue que  $M/N = 0$ , i.e.,  $M = N$ .  $\square$

Un caso importante del lema de Nakayama es cuando  $A$  es un *anillo local*, i.e., cuando tiene sólo un ideal máximo  $\mathfrak{m}$ . Observe entonces que todo elemento  $u \in A - \mathfrak{m}$  es una unidad porque de lo contrario estaría contenido en un ideal máximo diferente de  $\mathfrak{m}$ . Se sigue que  $A - \mathfrak{m} = A^*$ .

**Corolario 4.6 (Lema de Nakayama)** Sean  $(A, \mathfrak{m})$  un anillo local y  $M$  un  $A$ -módulo finitamente generado.

(1) Si  $M = \mathfrak{m}M$ , entonces  $M = 0$ .

(2) Si  $N$  es un submódulo de  $M$  tal que  $M = N + \mathfrak{m}M$ , entonces  $M = N$ .  $\square$

OBSERVACIÓN. Si  $(A, \mathfrak{m})$  es un anillo local, viendo al ideal  $\mathfrak{m}$  como un  $A$ -módulo, para el  $A$ -módulo cociente  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ , como  $\mathfrak{m}$  anula a  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ , la acción  $A \times \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  se factoriza a través del epimorfismo canónico al campo residual  $\rho : A \rightarrow A/\mathfrak{m} =: k(\mathfrak{m})$ , i.e., se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A \times \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \\ \rho \times \text{id} \downarrow & \nearrow & \\ k(\mathfrak{m}) \times \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 & & \end{array}$$

de tal forma que  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  es un  $k(\mathfrak{m})$ -espacio vectorial.

**Corolario 4.7** Sea  $(A, \mathfrak{m})$  un anillo noetheriano local. Entonces,  $\mathfrak{m}$  es un ideal finitamente generado por los elementos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  si y sólo si sus clases residuales módulo  $\mathfrak{m}^2$  generan  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$  como  $k(\mathfrak{m})$ -espacio vectorial. En particular, el número mínimo de generadores de  $\mathfrak{m}$  es igual a la dimensión del  $k(\mathfrak{m})$ -espacio vectorial  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ .

*Demostración.* Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  generan  $\mathfrak{m}$ , claramente sus clases residuales generan el cociente  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . Recíprocamente, si sus clases residuales  $\alpha_i + \mathfrak{m}^2$  generan  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ , entonces

$$\mathfrak{m} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle + \mathfrak{m}^2.$$

Como  $A$  es noetheriano, entonces  $\mathfrak{m}$  es finitamente generado y así aplicando la segunda parte del lema de Nakayama con  $M = \mathfrak{m}$  y  $N = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  se sigue que  $\mathfrak{m} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ .  $\square$

**Lema 4.8** *En un anillo noetheriano todo conjunto de generadores de un ideal contiene un conjunto finito de generadores.*

*Demostración.* Si  $I = A$ ,  $1 \in I$  se puede escribir como  $1 = r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$  con los  $a_i$  en cualquier conjunto de generadores de  $I$ . Se sigue que  $I$  está generado por  $a_1, \dots, a_n$ . Supongamos ahora que  $I \subsetneq A$  es un ideal propio y sea  $\Lambda$  un conjunto de generadores de  $I$ . Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de ideales generados por subconjuntos finitos de  $\Lambda$ . Como  $A$  es noetheriano  $\mathcal{F}$  tiene un elemento máximo  $\mathfrak{m}$  y este  $\mathfrak{m}$  debe contener a todos los elementos de  $\Lambda$  (si no fuera así añadiendo cualquier otro elemento de  $\Lambda$  a los generadores de  $\mathfrak{m}$  se obtendría otro ideal mayor que  $\mathfrak{m}$ ) y por lo tanto  $\mathfrak{m} = I$ .  $\square$

**Teorema 4.9 (Teorema de intersección de Krull)** *Si  $A$  es un anillo noetheriano e  $I$  un ideal tal que  $I \subseteq J(A)$ , entonces  $\bigcap_{n \geq 1} I^n = 0$ .*

*Demostración.* Mostraremos primero que, para cualquier ideal  $I$  en un anillo noetheriano

$$(1) \quad \bigcap_{n \geq 1} I^n = I \cdot \bigcap_{n \geq 1} I^n.$$

Note entonces que, en el caso cuando  $I \subseteq J(A)$ , por el lema de Nakayama se sigue que  $\bigcap_{n \geq 1} I^n = 0$ , como se quería. Basta entonces probar (1) y para comenzar note que la inclusión  $\supseteq$  es obvia. Para la otra inclusión, sean  $a_1, \dots, a_r$  generadores de  $I$ . Entonces,  $I^n$  consiste de las sumas finitas

$$\sum_{i_1 + \dots + i_r = n} \lambda_{i_1 \dots i_r} a_1^{i_1} \dots a_r^{i_r} \quad \lambda_{i_1 \dots i_r} \in A.$$

En otras palabras,  $I^n$  consiste de los elementos de la forma  $g(a_1, \dots, a_r)$  para algún polinomio homogéneo  $g(x_1, \dots, x_r) \in A[x_1, \dots, x_r]$  de grado  $n$ . Denotemos con  $H_m$  al conjunto de polinomios homogéneos  $f$  de grado  $m$  tales que  $f(a_1, \dots, a_r) \in \bigcap_{n \geq 1} I^n$  y sea  $J$  el ideal de  $A[x_1, \dots, x_r]$  generado por  $\bigcup_m H_m$ . Por el lema anterior existe un conjunto finito  $\{f_1, \dots, f_k\}$  de elementos de  $\bigcup_m H_m$  que genera a  $J$ . Sean  $d_i = \text{gr}(f_i)$  y sea  $d = \max\{d_i\}$ . Si  $b \in \bigcap_{n \geq 1} I^n$ , en particular  $b \in I^{d+1}$  y por lo tanto  $b = f(a_1, \dots, a_r)$  para algún polinomio homogéneo  $f$  de grado  $d+1$ . Por definición  $f \in H_{d+1} \subseteq J = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$  y así existen  $g_i \in A[x_1, \dots, x_r]$  tales que

$$f = g_1 f_1 + \dots + g_k f_k.$$

Como  $f$  y los  $f_i$  son homogéneos, podemos omitir de cada  $g_i$  los términos que no sean de grado  $\text{gr}(f) - \text{gr}(f_i) = d + 1 - d_i > 0$  y suponer que los  $g_i$  son homogéneos de grado  $d + 1 - d_i > 0$  y por lo tanto no son constantes. Entonces,  $g_i(a_1, \dots, a_r) \in I$  ya que los  $a_i \in I$  y los  $g_i$  son homogéneos no constantes. Por lo tanto

$$b = f(a_1, \dots, a_r) = \sum_i g_i(a_1, \dots, a_r) \cdot f_i(a_1, \dots, a_r) \in I \cdot \bigcap_{n \geq 1} I^n$$

lo cual demuestra (1), como se quería.  $\square$

**Corolario 4.10** *Si  $A$  es noetheriano e  $I \subseteq A$  es un ideal, entonces*

$$\bigcap_{n \geq 1} I^n = \{x \in A : \text{existe } a \in I \text{ tal que } (1 - a)x = 0\}.$$

*Demostración.* Si  $M = \bigcap I^n$ , en la demostración del teorema anterior se mostró que  $IM = M$ . Ahora, si  $S = 1 + I$ , entonces  $S$  es un subconjunto multiplicativo de  $A$  y note que para todo  $a/s$  en el ideal  $S^{-1}I \subseteq S^{-1}A$  (donde  $a \in I, s \in S$ ) se tiene que

$$1 + \frac{a}{s} = \frac{s + a}{s}$$

donde  $s \in S = 1 + I$  implica que  $s = 1 + a'$  con  $a' \in I$  por lo que  $s + a = 1 + (a + a') \in 1 + I$  y así  $1 + a/s \in (S^{-1}A)^*$  y por lo tanto  $a/s \in J(S^{-1}A)$  por 4.4, es decir,  $S^{-1}I \subseteq J(S^{-1}A)$  donde  $S^{-1}A$  es noetheriano por 4.3. Observe ahora que de  $M = IM$  se sigue que  $S^{-1}M = (S^{-1}I)(S^{-1}M)$ . Como  $S^{-1}I \subseteq J(S^{-1}A)$ , por el lema de Nakayama se sigue que  $S^{-1}M = 0$ . Finalmente, como  $A$  es Noetheriano, entonces  $M$  es finitamente generado; se sigue que la igualdad  $S^{-1}M = 0$  es equivalente a que exista  $s \in S$  tal que  $sM = 0$ . En efecto, claramente  $sM = 0$  implica que  $S^{-1}M = 0$ . Recíprocamente, si  $S^{-1}M = 0$ , escribamos  $M = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ ; entonces los  $a_i/1$  generan  $S^{-1}M$  como  $S^{-1}A$ -módulo, y como  $S^{-1}M = 0$  lo anterior quiere decir que  $a_i/1 = 0$ , i.e., existe  $s_i \in S$  tal que  $s_i a_i = 0$ , para toda  $1 \leq i \leq m$ . Poniendo  $s = s_1 \cdots s_m \in S$  se tiene que  $s a_i = 0$  para toda  $i$  y por lo tanto  $sM = 0$ .  $\square$

**Proposición 4.11** *Si  $A$  es un anillo noetheriano, todo ideal  $I$  contiene una potencia de su radical  $\sqrt{I}$ . En particular, su nilradical es nilpotente.*

*Demostración.* Como  $A$  es noetheriano, podemos suponer que  $\sqrt{I}$  está generado por  $a_1, \dots, a_n$ . Entonces, para cada  $i$  una potencia  $a_i^{r_i} \in I$ . Por lo tanto, para cada elemento  $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$  de  $\sqrt{I}$  ( $\alpha_i \in A$ ) en la potencia

$$(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n)^{r_1 + \cdots + r_n}$$

al expandirla cada uno de sus sumandos tiene un factor de la forma  $a_i^{r_i}$  para algún  $i$  y por lo tanto está en  $I$ .  $\square$

**Proposición 4.12** *Si  $K$  es un campo y  $A$  una  $K$ -álgebra de tipo finito, entonces,  $J(A) = \sqrt{0} = \text{nil}A$ . En particular, si  $A$  es reducido, entonces  $J(A) = 0$ .*

*Demostración.* Como  $\text{nil} A = \bigcap \mathfrak{p}$  y los máximos son primos, entonces  $\text{nil} A \subseteq J(A)$ . Recíprocamente, si  $f \in J(A)$  queremos mostrar que  $f$  es nilpotente. Supongamos que no lo es; entonces  $A_f \neq 0$  y así existe un ideal máximo  $\mathfrak{m} \subseteq A_f$ , y como  $A_f \simeq A[T]/\langle fT - 1 \rangle$  por 3.6, entonces  $A_f$  es una  $K$ -álgebra de tipo finito, porque  $A$  lo es y consecuentemente  $A[T]$  también lo es. Se sigue que  $A_f/\mathfrak{m}$  es una extensión de tipo finito de  $K$  y así, por 3.21 es una extensión algebraica. Sea  $\rho : A \rightarrow A_f$  el morfismo canónico. Entonces  $\rho$  induce un monomorfismo  $A/\rho^{-1}(\mathfrak{m}) \hookrightarrow A_f/\mathfrak{m}$ , i.e.,  $A/\rho^{-1}(\mathfrak{m})$  es una  $K$ -subálgebra de  $A_f/\mathfrak{m}$ . Por 3.20 se sigue que  $A/\rho^{-1}(\mathfrak{m})$  es un campo y por lo tanto  $\rho^{-1}(\mathfrak{m})$  es un ideal máximo de  $A$ . Note ahora que  $f \notin \rho^{-1}(\mathfrak{m})$  porque  $\rho(f)$  es una unidad de  $A_f$ . Finalmente, el hecho de que  $f$  no esté en el ideal máximo  $\rho^{-1}(\mathfrak{m})$  de  $A$  contradice el que  $f \in J(A)$ . Se sigue que  $f$  es nilpotente, como se quería.  $\square$

*Ejemplo 2.* Si  $K$  es un campo algebraicamente cerrado y  $\mathfrak{p} \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$  es un ideal primo, el anillo  $A = K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p}$  es una  $K$ -álgebra de tipo finito y es un dominio entero (en particular es reducido) y así la proposición anterior dice que  $J(A) = 0$ .

**Proposición 4.13** *Si  $A$  es noetheriano,  $\mathfrak{m} \subseteq A$  es máximo y  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  es el ideal máximo del anillo local  $A_{\mathfrak{m}}$ , entonces para todo  $n \geq 0$  la función*

$$A/\mathfrak{m}^n \rightarrow A_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n$$

*dada por  $a + \mathfrak{m}^n \mapsto (a/1) + (\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n$  es un isomorfismo. Más aún, induce isomorfismos*

$$\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^k/(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n$$

*para toda  $k < n$ .*

*Demostración.* La segunda afirmación se sigue de la primera aplicando el lema del quinto ya que se tiene el diagrama conmutativo siguiente, para todo  $k < n$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^n & \longrightarrow & A/\mathfrak{m}^n & \longrightarrow & A/\mathfrak{m}^k \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ 0 & \longrightarrow & (\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^k/(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n & \longrightarrow & A_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n & \longrightarrow & A_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^k \longrightarrow 0 \end{array}$$

y por lo tanto basta probar la primera afirmación. Sean  $S = A - \mathfrak{m}$  y  $\varphi : A \rightarrow A_{\mathfrak{m}}$  el morfismo canónico (que induce la función que queremos probar que es un isomorfismo). Para mostrar que  $A/\mathfrak{m}^n \rightarrow A_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n$  es inyectiva, notamos primero que  $S^{-1}(\mathfrak{m}^n) = (\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n$  y así debemos mostrar que  $\varphi^{-1}S^{-1}(\mathfrak{m}^n) = \mathfrak{m}^n$ . Para ésto, si  $a \in \varphi^{-1}S^{-1}(\mathfrak{m}^n)$ , entonces  $\varphi(a) = a/1 \in S^{-1}(\mathfrak{m}^n)$  y así  $a/1 = b/s$  con  $b \in \mathfrak{m}^n$  y  $s \in S$ . Se sigue que  $tsa \in \mathfrak{m}^n$  para algún  $t \in S$  y por lo tanto  $tsa = 0$  en  $A/\mathfrak{m}^n$ . Por otra parte, el único ideal máximo que contiene a  $\mathfrak{m}^n$  es  $\mathfrak{m}$  (ya que si  $\mathfrak{n}$  es otro ideal máximo que contiene a  $\mathfrak{m}^n$ , entonces  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} = S^{-1}\mathfrak{m} \supseteq S^{-1}\mathfrak{n}$  por lo que  $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{n}$  y así  $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ ) y por la correspondencia con los ideales del cociente  $A/\mathfrak{m}^n$  se sigue ésto es un anillo local cuyo único ideal máximo es  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$ , y como  $t, s \in S = A - \mathfrak{m}$ , entonces  $ts \notin \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$  debe ser una unidad en  $A/\mathfrak{m}^n$ , y así la igualdad  $tsa = 0$  implica

que  $a = 0$  en  $A/\mathfrak{m}^n$ , i.e.,  $a \in \mathfrak{m}^n$ . Hemos así mostrado que  $\varphi^{-1}S^{-1}(\mathfrak{m}^n) \subseteq \mathfrak{m}^n$ . La otra inclusión es directa.

Resta probar que  $A/\mathfrak{m}^n \rightarrow A_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n$  es suprayectiva. Para ésto, sea  $a/s \in A_{\mathfrak{m}}$ , i.e.,  $a \in A$  y  $s \in A - \mathfrak{m}$ . Como antes, el único ideal máximo de  $A$  que contiene a  $\mathfrak{m}^n$  es  $\mathfrak{m}$  y por lo tanto ningún ideal máximo contiene a  $s$  y  $\mathfrak{m}^n$ , i.e.,  $\langle s \rangle + \mathfrak{m}^n = A$ . Se sigue que existen  $x \in A$  y  $b \in \mathfrak{m}^n$  tales que  $sx + b = 1$ . Como  $s$  es invertible en  $A_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n$ , entonces  $a/s$  es el único elemento de este anillo tal que  $s(a/s) = a$ . Como  $s(ax) = a(1 - b)$  con  $b \in \mathfrak{m}^n$ , entonces  $ab \in (\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n$  por lo que la imagen de  $ax$  en  $A_{\mathfrak{m}}$  satisface que  $s(ax) = a$  en  $A_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n$  y por lo tanto  $ax/1 = a/s$ , es decir  $\varphi(ax) = a/s$ .  $\square$

*Ejemplo 3.* Si  $p \in \mathbb{Z}$  es primo, entonces

$$\mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

y en general,

$$\mathbb{Z}_{(p)}/p^n\mathbb{Z}_{(p)} \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

**Ideales primarios.** Un ideal  $\mathfrak{q}$  de  $A$  es *primario* si es propio y  $ab \in \mathfrak{q}$  implica que  $a \in \mathfrak{q}$  o  $b^n \in \mathfrak{q}$  para algún  $n \geq 1$ . Equivalentemente,  $\mathfrak{q} \subsetneq A$  es primario si y sólo si todos los divisores de cero de  $A/\mathfrak{q}$  son nilpotentes (ya que si  $\mathfrak{q}$  es primario y si  $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$  en  $A/\mathfrak{q}$  y si  $\bar{x} \neq \bar{0}$ , entonces  $xy \in \mathfrak{q}$  y  $x \notin \mathfrak{q}$  y como  $\mathfrak{q}$  es primario se tiene que  $y^n \in \mathfrak{q}$  para algún  $n \geq 1$ , i.e.,  $\bar{y}^n = \bar{0}$  y por lo tanto  $\bar{y}$  es nilpotente. El recíproco es similar).

*Ejemplo 4.* Todo ideal primo  $\mathfrak{p}$  de  $A$  es primario.

*Ejemplo 5.* En  $\mathbb{Z}$  los ideales  $0$  y  $\langle p^n \rangle$ , para  $p$  primo, son primarios. En efecto,  $0$  es primo y así es primario. Ahora, si  $p > 1$  es primo de  $\mathbb{Z}$  y si  $xy \in \langle p^n \rangle$ , entonces  $p^n | xy$  y si  $p^n \nmid x$ , entonces algún  $p^k | y$ ,  $1 \leq k \leq n$  y así  $y = p^k t$  por lo que  $y^n = p^{knt}$ , i.e.,  $y^n \in \langle p^n \rangle$ .

*Ejemplo 6.* En  $K[x, y]$  el ideal  $\mathfrak{q} = \langle x^2, y \rangle$  es primario porque en  $K[x, y]/\langle x^2, y \rangle \simeq K[x]/\langle x^2 \rangle$  (se «muere» la variable  $y$ ) los divisores de cero son los múltiplos de  $x$  y por lo tanto son nilpotentes porque  $x^2 = 0$  en el cociente.

**Lema 4.14** Si  $\mathfrak{q}$  es primario, entonces  $\sqrt{\mathfrak{q}}$  es un ideal primo.

*Demostración.* Si  $ab \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ , entonces  $(ab)^n \in \mathfrak{q}$  para algún  $n \geq 1$  y así  $a^n \in \mathfrak{q}$  ó  $b^{mn} \in \mathfrak{q}$ . En cualquier caso,  $a \in \sqrt{\mathfrak{q}}$  ó  $b \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ .  $\square$

Si  $\mathfrak{q}$  es primario y  $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ , diremos que  $\mathfrak{q}$  es  *$\mathfrak{p}$ -primario*.

*Ejemplo 7.* En  $\mathbb{Z}$  el ideal  $0$  es  $0$ -primario, y para  $p \in \mathbb{Z}$  primo los ideales  $\langle p^n \rangle$  son  $\langle p \rangle$ -primarios porque  $\sqrt{\langle p^n \rangle} = \langle p \rangle$  ya que si  $a \in \sqrt{\langle p^n \rangle}$ , entonces  $a^t \in \langle p^n \rangle$ , i.e.,  $a^t = p^nu \in \langle p \rangle$  y por lo tanto  $a \in \langle p \rangle$ . Recíprocamente, si  $a \in \langle p \rangle$ , entonces  $a^n \in \langle p^n \rangle$  y así  $a \in \sqrt{\langle p^n \rangle}$ . Mostraremos ahora que estos son todos los ideales primarios de  $\mathbb{Z}$ .



En efecto, si  $I = \langle a \rangle \subseteq \mathbb{Z}$  es un ideal primario, entonces  $\sqrt{I} = \langle 0 \rangle$  o  $\langle p \rangle$ . En el primer caso  $I = 0$  ya que  $\mathbb{Z}$  no tiene nilpotentes. En el segundo caso,  $\langle a \rangle = I \subseteq \sqrt{I} = \langle p \rangle$  por lo que  $p \mid a$ , y escribiendo  $a = p^m u$  con  $p \nmid u$ , si sucediera que  $u > 1$ , entonces existiría otro primo  $q$  tal que  $q \mid u$  y así  $a = p^m u = p^m q^n v$  con  $p, q \nmid v$  y notamos que  $I = \langle a \rangle \subseteq \langle q \rangle$  y consecuentemente  $\langle p \rangle = \sqrt{I} \subseteq \sqrt{\langle q \rangle} = \langle q \rangle$ , i.e.,  $\langle p \rangle \subseteq \langle q \rangle$  por lo que  $p = q$ . Se sigue que  $u = 1$  y  $a = p^m$ , como se quería.

**Lema 4.15** Sean  $\mathfrak{m}$  un ideal máximo y  $\mathfrak{q}$  un ideal arbitrario. Son equivalentes:

- (1)  $\mathfrak{q}$  es  $\mathfrak{m}$ -primario.
- (2)  $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{m}$ .
- (3)  $\mathfrak{m}$  es el único primo mínimo que contiene a  $\mathfrak{q}$ .

*Demostración.* Claramente (1)  $\Rightarrow$  (2) y (2)  $\Rightarrow$  (3) por definición de radical. Para (3)  $\Rightarrow$  (1) note que la hipótesis implica que  $A/\mathfrak{q}$  tiene un único ideal primo, a saber,  $\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$ . En efecto, si  $\mathfrak{q}'/\mathfrak{q} \subseteq A/\mathfrak{q}$  es primo, entonces  $\mathfrak{q}' \supseteq \mathfrak{q}$  y así (3) implica que  $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{q}'$  y como  $\mathfrak{m}$  es máximo se sigue que  $\mathfrak{q}' = \mathfrak{m}$ . Por lo tanto,  $\text{nil}(A/\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}/\mathfrak{q}$  y así los elementos de  $\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$  son nilpotentes y como  $A/\mathfrak{q}$  es local con ideal máximo  $\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$ , los elementos de  $A/\mathfrak{q}$  fuera de  $\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$  son unidades.  $\square$

**Corolario 4.16** Si  $\mathfrak{m}$  es máximo, entonces las potencias  $\mathfrak{m}^k$  son  $\mathfrak{m}$ -primarios.  $\square$

**Lema 4.17** Si  $f : A \rightarrow B$  es un morfismo de anillos y  $\mathfrak{q} \subseteq B$  es primario, entonces  $f^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq A$  es primario.

*Demostración.* Si  $ab \in f^{-1}(\mathfrak{q})$  y  $a \notin f^{-1}(\mathfrak{q})$ , entonces  $f(a)f(b) = f(ab) \in \mathfrak{q}$  y como  $f(a) \notin \mathfrak{q}$  se sigue que  $f(b)^n \in \mathfrak{q}$ , i.e.,  $b^n \in f^{-1}(\mathfrak{q})$ , para algún  $n \geq 1$ .  $\square$

**Lema 4.18** Si  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n$  son  $\mathfrak{p}$ -primarios (para el mismo  $\mathfrak{p}$ ), entonces  $\mathfrak{q} = \bigcap \mathfrak{q}_i$  es  $\mathfrak{p}$ -primario.

*Demostración.*  $\sqrt{\mathfrak{q}} = \sqrt{\bigcap \mathfrak{q}_i} = \bigcap \sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}$ . Ahora, si  $ab \in \mathfrak{q}$  con  $b \notin \mathfrak{q}$ , entonces  $ab \in \mathfrak{q}_i$  para todo  $i$  y existe un  $j$  tal que  $b \notin \mathfrak{q}_j$ , y como  $\mathfrak{q}_j$  es primario se tiene que  $a^t \in \mathfrak{q}_j$  para algún  $t \geq 1$  y así  $a \in \sqrt{\mathfrak{q}_j} = \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ , i.e.,  $a^r \in \mathfrak{q}$ , para algún  $r$ .  $\square$

Si  $I$  es un ideal de  $A$  y  $x \in A$ , considere el ideal que traslada  $x$  a  $I$  (vea el ejercicio 9 de la página 25)

$$(I : x) := \{a \in A : ax \in I\}$$

y note que claramente  $x \in I$  implica que  $(I : x) = A$ .

**Lema 4.19** Sean  $\mathfrak{q}$  un ideal  $\mathfrak{p}$ -primario de  $A$  y  $x \in A$ .

- (1) Si  $x \notin \mathfrak{q}$ , entonces  $(\mathfrak{q} : x)$  es  $\mathfrak{p}$ -primario y así  $\sqrt{(\mathfrak{q} : x)} = \mathfrak{p}$ .
- (2) Si  $x \notin \mathfrak{p}$ , entonces  $(\mathfrak{q} : x) = \mathfrak{q}$ .

*Demostración.* (1): Mostraremos primero que  $\sqrt{(\mathfrak{q} : x)} = \mathfrak{p}$ : Si  $a \in \sqrt{(\mathfrak{q} : x)}$ , entonces  $a^n \in (\mathfrak{q} : x)$  para algún  $n \geq 1$ . Así,  $a^n x \in \mathfrak{q}$  y como  $x \notin \mathfrak{q}$ , entonces  $a^{mn} \in \mathfrak{q}$  y así  $a \in \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ . Recíprocamente, si  $a \in \mathfrak{p}$  como  $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$  entonces  $a^t \in \mathfrak{q}$  y

así  $a' \in (q : x)$ , i.e.,  $a \in \sqrt{(q : x)}$ . Ahora, si  $ab \in (q : x)$  entonces  $abx \in q$  y como  $q$  es  $\mathfrak{p}$ -primario se sigue que  $a^n \in q$  o  $bx \in q$ . En el primer caso se tiene que  $a^n \in (q : x)$  y en el segundo caso se tiene que  $b \in (q : x)$  y por lo tanto  $(q : x)$  es primario.

Para (2), claramente  $q \subseteq (q : x)$  y para la otra inclusión, si  $a \in (q : x)$  entonces  $ax \in q$  con  $x \notin \mathfrak{p} = \sqrt{q}$ , i.e., para todo  $n \geq 1$  se tiene que  $x^n \notin q$ . Como  $q$  es primario se sigue que  $a \in q$ .  $\square$

**Descomposición primaria.** Una *descomposición primaria* de un ideal  $I$  de  $A$  es una expresión de  $I$  como intersección finita de ideales primarios:

$$(*) \quad I = \bigcap_{i=1}^m q_i.$$

Hay ejemplos de ideales que no tienen una tal descomposición primaria. En la sección siguiente veremos que si  $A$  es noetheriano todos sus ideales admiten una descomposición primaria. Una descomposición primaria  $(*)$  se dice que es *mínima* si:

- (i) Los ideales primos  $\sqrt{q_i} = \mathfrak{p}_i$  son distintos
- (ii) Ninguno de los  $q_i$  puede ser omitido de  $(*)$ , es decir, para todo  $i = 1, \dots, n$ ,  $\bigcap_{j \neq i} q_j \not\subseteq q_i$ .

**OBSERVACIÓN.** Si  $I$  admite una descomposición primaria  $(*)$ , entonces admite una descomposición primaria mínima ya que, por 4.18 podemos combinar ideales primarios con el mismo radical y así (i) se puede tener. Para (ii), note que cualquier  $q_i$  en  $(*)$  que no satisfaga (ii) puede ser omitido.

Los ideales primos  $\mathfrak{p}_i = \sqrt{q_i}$  que ocurren en una descomposición primaria mínima de  $I$  se dice que *pertenecen* o que están *asociados* a  $I$ .

Si  $I$  es cualquier ideal de  $A$ , los *ideales primos mínimos* de  $I$  son los elementos mínimos del conjunto  $V(I)$  de ideales primos que contienen a  $I$ . Note que si  $I$  es un ideal propio, entonces existe un ideal máximo que lo contiene y por lo tanto  $I$  tiene ideales primos que lo contienen. Cuando  $I$  admite una descomposición primaria sus ideales primos mínimos son los radicales de los ideales primarios de la descomposición de  $I$ :

**Proposición 4.20** Si  $I = q_1 \cap \dots \cap q_n$ , con los  $q_i$  primarios y  $\mathfrak{p}_i = \sqrt{q_i}$ , entonces los ideales primos mínimos de  $I$  son los elementos mínimos del conjunto  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ .

*Demostración.* Para comenzar, observe que como  $\mathfrak{p}_i = \sqrt{q_i}$ , entonces  $q_i \subseteq \mathfrak{p}_i$  y por lo tanto  $I = q_1 \cap \dots \cap q_n \subseteq \mathfrak{p}_i$  y así cada  $\mathfrak{p}_i$  contiene a  $I$ . Ahora, si  $\mathfrak{p}$  es un primo que contiene a  $I$ , entonces  $\mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{i=1}^n q_i$  y por lo tanto

$$\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}} \supseteq \bigcap_{i=1}^n \sqrt{q_i} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$$

y así  $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_i$  para algún  $i$  (porque si no fuera así, para cada  $i$  existiría un  $a_i \in \mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}$  y  $a_1 \cdots a_n \in \bigcap_i \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$ , una contradicción con el hecho de que  $\mathfrak{p}$  es primo), vea también 1.16.  $\square$

La proposición anterior nos dice que, cuando  $I$  admite una descomposición primaria,  $I$  tiene un conjunto finito de primos mínimos que lo contienen y por lo tanto su radical  $\sqrt{I}$  es una intersección finita de primos. El teorema siguiente nos dice que los primos asociados a  $I$  están unívocamente determinados por  $I$ :

**Teorema 4.21 (Primer teorema de unicidad)** *Si  $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$  es una descomposición primaria mínima de  $I$  y  $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ , entonces*

$$\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\} = \{\sqrt{(I : x)} : \sqrt{(I : x)} \text{ es primo y } x \text{ varía en } A\}.$$

*En particular, el conjunto  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$  es independiente de la elección de la descomposición primaria de  $I$ .*

*Demostración.* Para cualquier  $x \in A$  se tiene que

$$(I : x) = \left( \bigcap \mathfrak{q}_i : x \right) = \bigcap (\mathfrak{q}_i : x)$$

y por lo tanto

$$\sqrt{(I : x)} = \sqrt{\bigcap (\mathfrak{q}_i : x)} = \bigcap \sqrt{(\mathfrak{q}_i : x)} = \bigcap_{x \notin \mathfrak{q}_i} \mathfrak{p}_i$$

la última igualdad por 4.19. Ahora, si  $\sqrt{(I : x)}$  es primo, la igualdad anterior implica que es igual a uno de los  $\mathfrak{p}_i$  ya que, poniendo  $\mathfrak{p} := \sqrt{(I : x)}$ , la igualdad dice que  $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_i$  para todo  $i$  y el argumento en paréntesis de la demostración de la proposición 4.20 anterior (vea también 1.16) dice que  $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_i$ , para algún  $i$  y por lo tanto  $\sqrt{(I : x)} = \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$ .

Recíprocamente, para ver que cada  $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$  es de la forma  $\sqrt{(I : x)}$  observe que para cada  $\mathfrak{p}_i$  existe un  $a_i \in \bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j - \mathfrak{q}_i$  porque la descomposición primaria es mínima. Por el lema 4.19 se sigue que  $\sqrt{(\mathfrak{q}_i : a_i)} = \mathfrak{p}_i$  y para  $j \neq i$  se tiene que  $a_i \in \mathfrak{q}_j$  y así  $\sqrt{(\mathfrak{q}_j : a_i)} = A$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sqrt{(I : a_i)} &= \sqrt{(\bigcap \mathfrak{q}_j : a_i)} = \sqrt{(\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j : a_i) \cap (\mathfrak{q}_i : a_i)} \\ &= \sqrt{(\bigcap_{j \neq i} \mathfrak{q}_j : a_i)} \cap \sqrt{(\mathfrak{q}_i : a_i)} = A \cap \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i. \end{aligned}$$

$\square$

**El asociado de un ideal.** Si  $I$  es un ideal de  $A$ , al conjunto

$$\text{Ass}(I) := \{\sqrt{(I : x)} : \sqrt{(I : x)} \text{ es primo y } x \text{ varía en } A\}$$

se le llama el *asociado* del ideal  $I$ . Así, el primer teorema de unicidad dice que si  $I$  admite una descomposición primaria,  $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$  y  $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$ , entonces

$$\text{Ass}(I) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$$

y los ideales primos  $\mathfrak{p}_i$  se dice que están *asociados* al ideal  $I$ . Los elementos minimales de  $\text{Ass}(I)$  se conocen como los *primos aislados* asociados a  $I$ . Los primos asociados que no son aislados se llaman *primos encajados*.

*Ejemplo 8.* En  $A = K[x, y]$ ,  $K$  un campo, para el ideal  $I = \langle x^2, xy \rangle$  se tiene la descomposición primaria

$$I = \langle x^2, xy \rangle = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2^2 \quad \text{con } \mathfrak{p}_1 = \langle x \rangle, \mathfrak{p}_2 = \langle x, y \rangle$$

porque el ideal  $\mathfrak{p}_1 = \langle x \rangle$  es primo (por lo tanto, primario) ya que el cociente  $K[x, y]/\langle x \rangle \simeq K[y]$  y el ideal  $\mathfrak{p}_2 = \langle x, y \rangle$  es máximo, porque  $K[x, y]/\langle x, y \rangle \simeq K$ , y por lo tanto el ideal  $\mathfrak{p}_2^2 = \langle x, y \rangle^2$  es  $\mathfrak{p}_2$ -primario. Aquí los primos asociados son  $\mathfrak{p}_1$  y  $\mathfrak{p}_2$  y notamos que  $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$  por lo que  $\mathfrak{p}_1$  es un primo aislado y  $\mathfrak{p}_2$  es un primo encajado. Note que en este ejemplo

$$\sqrt{I} = \sqrt{\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2^2} = \sqrt{\mathfrak{p}_1} \cap \sqrt{\mathfrak{p}_2^2} = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1$$

pero  $I$  no es un ideal primario porque en el cociente  $K[x, y]/\langle x^2, xy \rangle$  se tiene que  $xy = 0$  por lo que  $y$  es divisor de cero, pero no es nilpotente.

En el ejemplo anterior note que se tiene también otra descomposición primaria diferente

$$I = \langle x^2, xy \rangle = \langle x \rangle \cap \langle x^2, y \rangle,$$

donde  $\langle x^2, y \rangle$  es  $\langle x, y \rangle$ -primario por el ejemplo 6.

NOTA. Los términos *aislado* y *encajado* provienen de la geometría, ya que si  $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ , con  $K$  algebraicamente cerrado, el ideal  $I$  define la variedad afín  $\mathcal{V}(I) \subseteq K^n$  (véase la página 17 del capítulo 1) y los primos aislados de  $I$  corresponden a los puntos genéricos (vea la página 13 del capítulo 1) de las componentes irreducibles de  $\mathcal{V}(I)$  ya que la cerradura de  $\{\mathfrak{p}\}$  es toda la componente irreducible correspondiente, y los primos encajados corresponden a subvariedades de estas componentes irreducibles, i.e., variedades encajadas en las componentes irreducibles.

En el ejemplo 8 anterior, si  $K$  es algebraicamente cerrado, la variedad afín

$$\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}\langle x^2, xy \rangle \subseteq K^2$$

es la intersección del eje coordenado  $x$  (correspondiente a los ceros de  $x^2$ ) y la unión de los dos ejes coordenados  $x$ ,  $y$  (correspondiente a los ceros de  $xy$ ) por lo que  $\mathcal{V}(I)$  es el eje  $x$ , que es irreducible. De hecho, corresponde al primo aislado  $\langle x \rangle$ , i.e.,  $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}\langle x \rangle$  y el primo encajado  $\langle x, y \rangle$  corresponde al origen  $\{(0, 0)\} = \mathcal{V}\langle x, y \rangle$  encajado en el eje  $x$ .

Este ejemplo ilustra la unicidad de los primos asociados a un ideal que admite una descomposición primaria, pero también ilustra la no unicidad de los ideales

primarios involucrados en la descomposición. De hecho, lo que el ejemplo muestra adicionalmente es que en las dos descomposiciones siempre aparecen los factores correspondientes a los primos aislados y esto es precisamente lo que nos dirá el segundo teorema de unicidad. Antes de demostrarlo, mostraremos que en un anillo noetheriano todos los ideales tienen una descomposición primaria.

**Descomposición primaria en anillos noetherianos.** Un ideal  $I$  de  $A$  es *irreducible*<sup>1</sup> si para cualesquiera ideales  $J_1, J_2$  tales que  $I = J_1 \cap J_2$  se tiene que  $I = J_1$  ó  $I = J_2$ . El resultado principal es que en un anillo noetheriano todo ideal admite una descomposición primaria.

**Teorema 4.22** *Sea  $A$  un anillo noetheriano. Entonces,*

(1) *Todo ideal irreducible es primario.*

(2) *Todo ideal de  $A$  es una intersección finita de ideales irreducibles. Consecuentemente, todo ideal de  $A$  es una intersección finita de ideales primarios.*

*Demostración.* (1): Si  $I$  es irreducible, supongamos que  $xy \in I$  y que  $y \notin I$ . Queremos probar que  $x^n \in I$ , para algún  $n$ . Como  $A$  es noetheriano, la cadena de ideales

$$(I : x) \subseteq (I : x^2) \subseteq \dots$$

se estaciona, i.e.,  $(I : x^n) = (I : x^{n+1}) = \dots$ , para algún  $n \geq 1$ . Se sigue que

$$(*) \quad (\langle x^n \rangle + I) \cap (\langle y \rangle + I) = I.$$

En efecto, si  $a \in (\langle x^n \rangle + I) \cap (\langle y \rangle + I)$ , escribiendo  $a = x^n s + b$  y  $a = yt + b'$ , con  $b, b' \in I$ , lo segundo implica que  $ax = xyt + b'x \in I$  y lo primero implica que  $x^{n+1}s = ax - bx \in I$ . Por lo tanto  $s \in (I : x^{n+1}) = (I : x^n)$  y así  $a = x^n s + b \in I$ . La otra inclusión es obvia.

Ahora, como  $I$  es irreducible, la igualdad (\*) junto con la hipótesis de que  $y \notin I$  (por lo que  $(\langle y \rangle + I) \neq I$ ) implican que  $(\langle x^n \rangle + I) = I$  y por lo tanto  $x^n \in I$ , como se quería.

Finalmente, si (2) fuera falsa, el conjunto de ideales para los cuales la afirmación (2) es falsa sería no vacío y como  $A$  es noetheriano este conjunto tendría un elemento máximo, digamos  $I$ . Así,  $I$  es reducible y lo podemos escribir como  $I = J_1 \cap J_2$  con  $I \subsetneq J_i$ . Por la maximalidad de  $I$  cada  $J_i$  es una intersección finita de irreducibles y juntándolas se tiene que  $I$  es intersección finita de irreducibles, una contradicción.  $\square$

**El segundo teorema de unicidad.** Para probar que las intersecciones de ideales aislados asociados a un ideal descomponible no dependen de la descomposición primaria del ideal, necesitaremos estudiar primero cómo se comportan los ideales primarios bajo localización.

<sup>1</sup> Este concepto coincide con el de *espacio irreducible* para el caso del subespacio  $V(I)$  de  $\text{Spec} A$ , ya que  $V(I) = V(J_1 \cap J_2) = V(J_1) \cup V(J_2)$  y así  $I$  es irreducible si y sólo si  $V(I)$  es un subespacio irreducible. Vea la página 12 del capítulo 1.

**Proposición 4.23** Sean  $S \subseteq A$  un conjunto multiplicativo y  $\mathfrak{q} \subseteq A$  un ideal  $\mathfrak{p}$ -primario.

(1) Si  $S \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$ , entonces  $S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}A$ .

(2) Si  $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ , entonces  $S^{-1}\mathfrak{q}$  es un ideal  $S^{-1}\mathfrak{p}$ -primario de  $S^{-1}A$ . Más aún, bajo el morfismo de localización  $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$ , la imagen inversa de  $S^{-1}\mathfrak{q}$  en  $A$  es  $\mathfrak{q}$ . Así, bajo la correspondencia entre ideales de  $S^{-1}A$  e ideales de  $A$  inducida por  $\varphi$ , ideales primarios de  $S^{-1}A$  corresponden a ideales primarios de  $A$ .

*Demostración.* (1): Si  $s \in S \cap \mathfrak{p}$ , entonces para algún  $n \geq 1$ ,  $s^n \in S \cap \mathfrak{q}$  ya que  $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$ . Se sigue que  $S^{-1}\mathfrak{q} = \{a/s : a \in \mathfrak{q}, s \in S\}$  contiene a  $s^n/1$  que es una unidad de  $S^{-1}A$  y por lo tanto  $S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}A$ .

(2): Si  $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$ , entonces para todo  $s \in S$ ,  $as \in \mathfrak{q}$  implica que  $a \in \mathfrak{q}$  (ya que como  $s^n \in S$  entonces  $s^n$  no puede estar en  $\mathfrak{q}$  para algún  $n$  porque lo contrario implicaría que  $s \in \mathfrak{p}$ , en contradicción con la hipótesis). Por lo tanto, si  $a/s \in S^{-1}A$  está en  $S^{-1}\mathfrak{q}$ , entonces  $a \in \mathfrak{q}$  y como  $\mathfrak{q} \subsetneq A$ , entonces  $S^{-1}\mathfrak{q} \subsetneq S^{-1}A$ . Ahora, si  $(x/s)(y/t) \in S^{-1}\mathfrak{q}$  y  $x/s \notin S^{-1}\mathfrak{q}$ , entonces  $x \notin \mathfrak{q}$  y como éste es primario se sigue que  $y^n \in \mathfrak{q}$ , para algún  $n \geq 1$ , y por lo tanto  $(y/t)^n = y^n/t^n \in S^{-1}\mathfrak{q}$  y así  $S^{-1}\mathfrak{q}$  es primario. Ahora, como el radical conmuta con localización, entonces  $\sqrt{S^{-1}\mathfrak{q}} = S^{-1}\sqrt{\mathfrak{q}} = S^{-1}\mathfrak{p}$ , y  $S^{-1}\mathfrak{p}$  es primo porque  $\mathfrak{p}$  lo es. Finalmente, por 4.17, la imagen inversa de un ideal primario es primario.  $\square$

Si  $I \subseteq A$  es un ideal y  $S \subseteq A$  es multiplicativo, a la imagen inversa de  $S^{-1}I$ , bajo el morfismo de localización  $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A$ , lo denotaremos por  $S(I)$ .

**Proposición 4.24** Sean  $S \subseteq A$  un subconjunto multiplicativo,  $I \subseteq A$  un ideal descomponible e  $I = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$  una descomposición primaria mínima de  $I$ . Sean  $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$  y supongamos que los  $\mathfrak{q}_i$  están numerados de tal forma que  $S$  intersecta a  $\mathfrak{p}_{k+1}, \dots, \mathfrak{p}_n$  y es disjunto con  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_k$ . Entonces,

$$S^{-1}I = \bigcap_{i=1}^k S^{-1}\mathfrak{q}_i \quad \text{y} \quad S(I) = \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{q}_i$$

y éstas son sus descomposiciones primarias mínimas.

*Demostración.* Se tiene

$$(*) \quad S^{-1}I = S^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i\right) = \bigcap_{i=1}^k S^{-1}\mathfrak{q}_i,$$

la última igualdad por 4.23 ya que si  $S \cap \mathfrak{p}_i \neq \emptyset$  entonces  $S^{-1}\mathfrak{q}_i = S^{-1}A$ . También, por 4.23, si  $S \cap \mathfrak{p}_i = \emptyset$ , entonces los  $S^{-1}\mathfrak{q}_i$  son  $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ -primarios. Por otra parte, como los  $\mathfrak{p}_i$  son distintos, entonces los  $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , también lo son y así (\*) es una descomposición primaria mínima por la correspondencia biunívoca de 4.23. Finalmente, tomando las imágenes inversas, bajo el morfismo de localización, de ambos lados en (\*), obtenemos que

$$S(I) = \varphi^{-1}(S^{-1}I) = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^k S^{-1}\mathfrak{q}_i\right) = \bigcap_{i=1}^k \varphi^{-1}(S^{-1}\mathfrak{q}_i) = \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{q}_i$$

por la segunda parte de 4.23.  $\square$

Un subconjunto  $\Sigma \subseteq \text{Ass}(I)$  se dice que es *aislado* si siempre que  $\mathfrak{p}' \in \text{Ass}(I)$  es tal que  $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$  para algún  $\mathfrak{p} \in \Sigma$ , se tiene que  $\mathfrak{p}' \in \Sigma$ . Por ejemplo, si  $\Sigma$  es un subconjunto de primos aislados de  $\text{Ass}(I)$ , entonces  $\Sigma$  es un conjunto aislado.

**OBSERVACIÓN.** (1) Si  $\Sigma \subseteq \text{Ass}(I)$  es aislado, entonces  $S = A - \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathfrak{p}$  es multiplicativamente cerrado. De hecho, la observación es válida para todo subconjunto  $\Sigma \subseteq \text{Spec} A$ .

(2) Si  $\Sigma \subseteq \text{Ass}(I)$  es aislado y  $S = A - \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathfrak{p}$ , entonces para todo  $\mathfrak{p}' \in \text{Ass}(I)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}' \in \Sigma &\Rightarrow \mathfrak{p}' \cap S = \emptyset \\ \mathfrak{p}' \notin \Sigma &\Rightarrow \mathfrak{p}' \cap S \neq \emptyset. \end{aligned}$$

La observación (1) es porque si  $a, b \in S$ , entonces  $a, b \notin \mathfrak{p}$  para todo  $\mathfrak{p} \in \Sigma$ , y como los  $\mathfrak{p}$  son primos, entonces  $ab \notin \mathfrak{p}$  para todo  $\mathfrak{p} \in \Sigma$  y por lo tanto  $ab \in S$ .

Para (2), la primera parte es por la definición de  $S$ . Para la segunda parte, observe que si  $\mathfrak{p}' \notin \Sigma$ , entonces  $\mathfrak{p}' \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathfrak{p}$  porque si se tuviera la inclusión entonces se tendría que  $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$ , para algún  $\mathfrak{p} \in \Sigma$  por 1.16, y como  $\Sigma$  es aislado esto último implicaría que  $\mathfrak{p}' \in \Sigma$ , una contradicción; se sigue que  $\mathfrak{p}' \cap S \neq \emptyset$ , por definición de  $S$ .

**Teorema 4.25 (Segundo teorema de unicidad)** Sean  $I \subseteq A$  un ideal descomponible e  $I = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{q}_i$  una descomposición primaria mínima. Si  $\Sigma = \{\mathfrak{p}_{i_1}, \dots, \mathfrak{p}_{i_k}\} \subseteq \text{Ass}(I)$  es un conjunto aislado, entonces  $\mathfrak{q}_{i_1} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_{i_k}$  es independiente de la descomposición primaria mínima de  $I$ .

*Demostración.* Si  $S = A - \bigcup_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathfrak{p}$ , por la observación (2), para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(I)$ ,  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$  si  $\mathfrak{p} \in \Sigma$ , y  $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$  si  $\mathfrak{p} \notin \Sigma$ , y por la proposición anterior

$$S(I) = \bigcap_{\mathfrak{p}_{i_j} \in \Sigma} \mathfrak{q}_{i_j} = \mathfrak{q}_{i_1} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_{i_k}$$

y así  $\mathfrak{q}_{i_1} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_{i_k}$  es independiente de la descomposición ya que  $S(I)$  sólo depende de  $\Sigma \subseteq \text{Ass}(I)$  y el primer teorema de unicidad dice que los primos de  $\text{Ass}(I)$  no dependen de la descomposición.  $\square$

**Anillos artinianos.** Un anillo  $A$  es *artiniano* si toda cadena descendente de ideales de  $A$ :

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$$

se estaciona, i.e., existe un  $n$  tal que  $I_n = I_{n+k}$  para toda  $k \geq 0$ .

**Proposición 4.26** Si  $A$  es un anillo, son equivalentes:

(1)  $A$  es artiniano.

(2) Todo conjunto no vacío de ideales de  $A$  tiene un elemento mínimo, i.e., un ideal que no contiene propiamente otro ideal de la familia.

*Demostración.* Se sigue del lema de Zorn. Veá 4.1.  $\square$

*Ejemplo 9.*  $\mathbb{Z}$  es noetheriano pero no es artiniano porque la cadena de ideales

$$\langle a \rangle \supseteq \langle a^2 \rangle \supseteq \cdots$$

no se estaciona, si  $a \neq 0, \pm 1$ . Similarmente, si  $K$  es un campo, el anillo de polinomios  $K[x]$  es noetheriano pero no es artiniano.

**Proposición 4.27** *Un anillo artiniano tiene dimensión<sup>2</sup> de Krull cero. En otras palabras, en un anillo artiniano todo ideal primo es máximo.*

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{p}$  un ideal primo en un anillo artiniano  $A$ . Entonces,  $B = A/\mathfrak{p}$  es un dominio entero artiniano. Para cualquier elemento no nulo  $b \in B$  la cadena de ideales  $\langle b \rangle \supseteq \langle b^2 \rangle \supseteq \cdots$  se estaciona, i.e.,  $\langle b^n \rangle = \langle b^{n+1} \rangle = \cdots$ , para algún  $n \geq 1$ . En particular,  $b^n = b^{n+1}c$  para algún  $c \in B$  y  $n \geq 1$ . Como  $b \neq 0$  y  $B$  es un dominio entero, podemos cancelar  $b^n$  de la igualdad anterior y obtener que  $1 = bc$ , i.e.,  $b$  es una unidad y por lo tanto todo elemento distinto de cero de  $B$  es invertible y así  $B$  es un campo y consecuentemente  $\mathfrak{p}$  es máximo.  $\square$

**Corolario 4.28** *En un anillo artiniano el nilradical y el radical de Jacobson son iguales.*

*Demostración.*  $J(A) = \bigcap_{\text{máximos}} \mathfrak{m} = \bigcap_{\text{primos}} \mathfrak{p} = \text{nil } A$ .  $\square$

**Proposición 4.29** *Un anillo artiniano tiene sólo un número finito de ideales máximos.*

*Demostración.* Si  $\mathcal{F}$  es el conjunto de todas las intersecciones finitas  $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$  de ideales máximos de un anillo artiniano  $A$ , por 4.26  $\mathcal{F}$  tiene un elemento mínimo  $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$ . Por lo tanto, para cualquier ideal máximo  $\mathfrak{m}$  de  $A$  se tiene que  $\mathfrak{m}$  es uno de los  $\mathfrak{m}_i$  en la intersección anterior porque si no fuera así, como  $\mathfrak{m}$  no puede estar contenido propiamente en ningún  $\mathfrak{m}_i$  por maximalidad, entonces existirían  $a_i \in \mathfrak{m}_i - \mathfrak{m}$  para cada  $i$ , y el elemento  $a_1 \cdots a_n \in \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$  pero no estaría en  $\mathfrak{m}$  (porque éste es primo). Así,  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n \subsetneq \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$ , lo cual contradice la minimalidad de este último.  $\square$

**Proposición 4.30** *En un anillo artiniano  $A$  su nilradical es nilpotente.*

*Demostración.* La cadena de ideales  $\text{nil } A \supseteq \text{nil}^2 A \supseteq \cdots$  se estaciona, i.e.,  $\text{nil}^n A = \text{nil}^{n+1} A = \cdots$  para algún  $n \geq 1$ . Supongamos que  $\text{nil}^n A \neq 0$ . Existen ideales  $I$  tales

<sup>2</sup> En lo que sigue, y hasta antes del capítulo siguiente donde se estudia la dimensión de Krull de un anillo arbitrario, sólo consideraremos el caso de dimensión de Krull cero, donde la definición equivale a que todo ideal primo sea máximo.



que  $I \text{ nil}^n A \neq 0$ , por ejemplo  $I = \text{nil} A$  y así la familia  $\mathcal{F}$  de tales ideales tiene un elemento mínimo, digamos  $J$ . Entonces, existe un  $a \in J$  tal que  $a \text{ nil}^n A \neq 0$ . Como  $a \in J$ , entonces  $\langle a \rangle \subseteq J$  y por la minimalidad de  $J$  se debe tener que  $\langle a \rangle = J$ . Ahora,  $(a \text{ nil}^n A) \text{ nil}^n A = a \text{ nil}^{2n} A = a \text{ nil}^n A \neq 0$  y como  $\langle a \rangle$  es ideal  $a \text{ nil}^n A \subseteq \langle a \rangle$ , entonces por la minimalidad de  $J = \langle a \rangle$  se sigue que  $a \text{ nil}^n A = \langle a \rangle$ . Por lo tanto  $a = ax$  para algún  $x \in \text{nil}^n A$  y consecuentemente  $a = ax = ax^2 = \cdots = ax^n = \cdots = a \cdots a \cdot x^t = a \cdot 0 = 0$  porque  $x \in \text{nil}^n A \subseteq \text{nil} A$  y así algún  $x^t = 0$ . Esto contradice la elección de  $a$  con  $a \text{ nil}^n A \neq 0$ . Se sigue que  $\text{nil}^n A = 0$ .  $\square$

**Serie de composición.** Para demostrar el lema 4.35 siguiente, necesitaremos algunos resultados sobre *longitud de módulos* que introducimos a continuación.

Si  $M$  es un  $A$ -módulo, una *cadena de longitud  $n$*  en  $M$  es una sucesión de submódulos de  $M$  de la forma

$$(*) \quad 0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M.$$

Si la cadena es máxima, i.e., ya no se pueden insertar submódulos en  $(*)$  diremos que la cadena  $(*)$  es una *serie de composición de longitud  $n$*  de  $M$ . Note que decir que la cadena  $(*)$  es máxima es equivalente a pedir que los cocientes consecutivos  $M_j/M_{j-1}$  sean módulos simples (vea el ejercicio 16 en la página 2 del capítulo 2).

*Ejemplo 10.* Si  $A = K$  es un campo y  $M$  es un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita  $n$ , una serie de composición de  $M$  es una *bandera* en  $M$ , i.e., una cadena de subespacios vectoriales de la forma

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$$

donde  $\dim M_j = \dim M_{j-1} + 1$ , por lo que los cocientes  $M_j/M_{j-1}$  tienen dimensión 1 y así son simples. Note que la longitud de esta serie de composición es igual a  $n = \dim M$ .

Si un  $A$ -módulo  $M$  tiene una serie de composición de longitud  $n$ , denotaremos con  $\ell(M)$  a la longitud menor de todas las series de composición de  $M$ . Así,  $\ell(M) \leq n$ . Si  $M$  no tiene una serie de composición pondremos  $\ell(M) = \infty$ . El número  $\ell(M)$  satisface las propiedades siguientes:

(i): Si  $N \subsetneq M$ , entonces  $\ell(N) < \ell(M)$ . En efecto, si  $\{M_i\}$  es una serie de composición  $(*)$  de  $M$  de longitud mínima  $\ell(M) = n$ , poniendo  $N_i = N \cap M_i$  observe que  $N_i/N_{i-1} \subseteq M_i/M_{i-1}$  y como los  $M_i/M_{i-1}$  son simples entonces  $N_i/N_{i-1} = M_i/M_{i-1}$  ó  $N_i = N_{i-1}$ . En el segundo caso se puede remover al término repetido para al final obtener una serie de composición de  $N$  que muestra que  $\ell(N) \leq \ell(M)$ . Ahora, si sucediera que  $\ell(N) = \ell(M) = n$ , entonces  $N_i/N_{i-1} = M_i/M_{i-1}$  para todo  $i = 1, \dots, n$  y por lo tanto  $N_i = M_i$  para todo  $i$ , en particular  $N = M$ , una contradicción. Se sigue que  $\ell(N) < \ell(M)$ .

(ii): Cualquier cadena en  $M$  tiene longitud  $\leq \ell(M)$ . En efecto, si

$$0 = M'_0 \subsetneq M'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M'_k = M$$

es una cadena en  $M$  de longitud  $k$ , por la observación (i) anterior

$$0 = \ell(M_0) < \ell(M_1) < \cdots < \ell(M_k) = \ell(M)$$

donde notamos que hay  $k$  enteros entre 0 y  $\ell(M_k)$ , i.e.,  $\ell(M) \geq k$ .

**Lema 4.31** *Si  $M$  tiene una serie de composición de longitud  $n$ , entonces todas las series de composición de  $M$  tienen la misma longitud  $n$ . Más aún, toda cadena en  $M$  se puede extender a una serie de composición de  $M$ .*

*Demostración.* Si una serie de composición de  $M$  es de longitud  $k$ , por la observación (ii) anterior se tiene que  $k \leq \ell(M)$ , y como por definición  $\ell(M) \leq k$ , entonces se tiene la igualdad. Consideremos ahora cualquier cadena en  $M$ . Si su longitud es  $n = \ell(M)$ , entonces por (ii) es una serie de composición de  $M$ . Si su longitud es  $< \ell(M)$ , entonces por la primera parte de la proposición no es una serie de composición de  $M$  y por lo tanto no es una cadena máxima, i.e., se pueden insertar términos hasta que su longitud sea  $n = \ell(M)$ .  $\square$

Si  $M$  tiene una serie de composición, a  $\ell(M)$  se le llama la *longitud* de  $M$  y se dice que  $M$  es de *longitud finita*.

**Proposición 4.32** *Un  $A$ -módulo  $M$  tiene una serie de composición si y sólo si  $M$  es noetheriano y artiniiano. (Para las definiciones de módulo noetheriano y artiniiano, que generalizan las del caso de anillos, vea los ejercicios 4.8 y 4.9).*

*Demostración.* Si  $M$  tiene una serie de composición, todas las cadenas de  $M$  tienen longitud  $\leq \ell(M)$  y así son acotadas y por lo tanto se estacionan. Recíprocamente, construimos una serie de composición de  $M$  como sigue: pongamos  $M_0 = M$ . Como  $M_0$  es noetheriano, la familia  $\{M' \subsetneq M_0\}$  tiene un elemento máximo  $M_1 \subsetneq M_0$ . Repetimos el procedimiento para  $M_1$  y tenemos así una cadena descendente

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$$

y como  $M$  es artiniiano la cadena descendente anterior se estaciona dando lugar a una cadena de la forma

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n = 0$$

que se puede completar a serie de composición de  $M$ .  $\square$

**Proposición 4.33** *La longitud  $\ell(M)$  es una función aditiva en la clase de todos los módulos de longitud finita.*

*Demostración.* Mostraremos que si  $0 \xrightarrow{f} M' \rightarrow M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de  $A$ -módulos de longitud finita, entonces  $\ell(M) = \ell(M') + \ell(M'')$ . En efecto, para cualquier serie de composición  $\{M'_i\}_{0 \leq i \leq k}$  de  $M'$  consideremos sus imágenes bajo  $f$  notando que  $M'_i \simeq f(M'_i)$ :

$$0 = f(M'_0) \subsetneq f(M'_1) \subsetneq \cdots \subsetneq f(M'_k) = f(M') \simeq M'$$

y para cualquier serie de composición  $\{\overline{M}_i''\}_{0 \leq i \leq t}$  de  $M''$  consideremos sus preimágenes bajo  $g$  notando que como  $M'' \simeq M/M'$  los submódulos  $\overline{M}_i''$  corresponden (bajo  $g$ ) a submódulos  $M_i''$  de  $M$  que contienen a  $M'$  y el cero de  $M''$  corresponde a  $M'$ :

$$0 = \overline{M}' \simeq \overline{M}_0'' \subsetneq \overline{M}_1'' \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{M}_t'' \simeq M''.$$

Pegamos las dos sucesiones anteriores de submódulos de  $M$  para obtener

$$0 = f(M'_0) \subsetneq f(M'_1) \subsetneq \cdots \subsetneq f(M'_k) = f(M') \simeq M' = M'_0 \subsetneq M'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M'_t = M$$

que es una serie de composición de  $M$  de longitud  $k+t$ , como se quería.  $\square$

**Proposición 4.34** *Si  $K$  es un campo y  $M$  es un  $K$ -espacio vectorial, son equivalentes:*

- (1)  $\dim_K M < \infty$ .
- (2)  $\ell(M) < \infty$ .
- (3)  $M$  es noetheriano.
- (4)  $M$  es artinario.

*Más aún, si se satisfacen las condiciones anteriores, entonces  $\dim_K M = \ell(M)$ .*

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Si  $\dim M = n < \infty$ , una serie de composición de  $M$  es una bandera

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

por lo que  $\dim M_i = i$  y los cocientes  $M_i/M_{i-1}$  de dimensión 1 por lo que  $\ell(M) = n = \dim M$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) y (2)  $\Rightarrow$  (4) se siguen de 4.32. Para (3)  $\Rightarrow$  (1), supongamos que (1) es falso. Entonces, existe un número infinito de vectores  $x_1, x_2, \dots$  de  $M$  linealmente independientes. Consideremos entonces los subespacios vectoriales  $M_i = \langle x_1, \dots, x_i \rangle$  y note que estos forman una cadena ascendente infinita

$$M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots$$

contradiciendo que  $M$  es noetheriano. La implicación (4)  $\Rightarrow$  (1) es similar, sólo considerando los subespacios  $N_i = \langle x_{i+1}, \dots \rangle$  que forman la cadena descendente infinita

$$N_1 \supsetneq N_2 \supsetneq \cdots$$

que contradice que  $M$  es artinario.  $\square$

**Lema 4.35** *Sea  $A$  un anillo en el cual algún producto finito de ideales máximos es cero. Entonces,  $A$  es artinario si y sólo si  $A$  es noetheriano.*

*Demostración.* Supongamos que  $m_1 \cdots m_n = 0$  con los  $m_i$  ideales máximos no necesariamente distintos. Considere la cadena de ideales

$$A \supseteq \mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = 0$$

y los cocientes consecutivos

$$M_r := \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{r-1} / \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_r$$

como  $A$ -módulos y observe que la acción de  $A$  en los  $M_r$  se factoriza a través del epimorfismo canónico al campo residual  $\rho : A \rightarrow A/\mathfrak{m}_r =: k(\mathfrak{m}_r)$ , i.e., se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A \times M_r & \xrightarrow{\quad} & M_r \\ \rho \times \text{id} \downarrow & \nearrow & \\ k(\mathfrak{m}_r) \times M_r & & \end{array}$$

y los subespacios del espacio vectorial  $M_r$  están en correspondencia biunívoca con los ideales de  $A$  contenidos entre  $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{r-1}$  y  $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_r$ . Si  $A$  es noetheriano (artiniano) entonces  $M_r$  es noetheriano (artiniano) y por lo tanto es de dimensión finita como  $k(\mathfrak{m}_r)$ -espacio vectorial por la proposición anterior, y es noetheriano y artiniano como  $A$ -módulo por la correspondencia mencionada arriba. Aplicaciones iteradas del ejercicio 10 a las sucesiones exactas siguientes

$$0 \rightarrow 0 = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n \rightarrow \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{n-1} \rightarrow M_n \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{n-1} \rightarrow M_{n-1} \rightarrow 0$$

$$\vdots$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \rightarrow \mathfrak{m}_1 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{m}_1 \rightarrow A \rightarrow M_1 \rightarrow 0$$

muestran que si  $A$  es artiniano (respectivamente, noetheriano) entonces es noetheriano (respectivamente, artiniano) como  $A$ -módulo y por lo tanto como anillo.  $\square$

**Teorema 4.36** *Un anillo es artiniano si y sólo si es noetheriano de dimensión cero.*

*Demostración.* Si  $A$  es artiniano, por 4.27,  $\dim A = 0$ . Por 4.29,  $A$  tiene un número finito de ideales máximos  $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$  y así

$$\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n \subseteq \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n = J(A) = \text{nil} A$$

donde la última igualdad es por 4.28, y por 4.30 una potencia de este producto  $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$  es cero y así  $A$  es noetheriano por el lema anterior.

Recíprocamente, si  $\dim A = 0$  y  $A$  es noetheriano entonces el ideal 0 admite una descomposición primaria y así  $A$  tiene un número finito de ideales primos mínimos y éstos son máximos porque  $\dim A = 0$ . Ahora, el nilradical de  $A$  es la intersección de estos ideales primos mínimos y así  $\text{nil} A$  es la intersección de un número finito de

ideales máximos, y como  $A$  es noetheriano, por 4.11, alguna potencia de su nilradical es cero y así podemos aplicar el lema anterior para concluir que  $A$  es artiniano.  $\square$

**Teorema 4.37 (Teorema de estructura de los anillos artinianos)** *Todo anillo artiniano  $A$  se puede escribir de forma única, como producto directo finito de anillos artinianos locales.*

*Demostración.* Si  $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$  son los ideales máximos distintos de  $A$ , en la demostración del teorema anterior vimos que algún producto  $\mathfrak{m}_1^k \cdots \mathfrak{m}_n^k = 0$ . Como se tiene que  $\sqrt{\mathfrak{m}_i^k} = \mathfrak{m}_i$ , entonces para  $i \neq j$  los radicales  $\sqrt{\mathfrak{m}_i^k}$  y  $\sqrt{\mathfrak{m}_j^k}$  son coprimos y por lo tanto los ideales  $\mathfrak{m}_i^k$  y  $\mathfrak{m}_j^k$  también son coprimos por el ejercicio 5, inciso (ix) del capítulo 1. Del teorema chino del residuo se tiene un isomorfismo

$$A \simeq A/\mathfrak{m}_1^{r_1} \times \cdots \times A/\mathfrak{m}_n^{r_n},$$

y cada anillo artiniano  $A/\mathfrak{m}_i^{r_i}$  es obviamente local por el argumento en la demostración de 4.13.  $\square$

**Proposición 4.38** *Sea  $(A, \mathfrak{m})$  un anillo artiniano local. Si  $\mathfrak{m}$  es principal, entonces todo ideal de  $A$  es principal. De hecho, si  $\mathfrak{m} = \langle \pi \rangle$  e  $I \subseteq A$  es un ideal, entonces  $I = \langle \pi^r \rangle$ , para algún  $r \geq 0$ .*

*Demostración.* Por 4.28,  $\text{nil} A = J(A) = \mathfrak{m}$  y así por 4.30 alguna potencia de  $\mathfrak{m}$  es cero, i.e.,  $\mathfrak{m}^n = \langle \pi^n \rangle = 0$  para algún  $n$ . Sea  $I \neq 0$  un ideal propio de  $A$ . Entonces, existe un entero  $r \geq 0$  tal que  $I \subseteq \mathfrak{m}^r$  pero  $I \not\subseteq \mathfrak{m}^{r+1}$  (por ejemplo  $r = 1$  sirve para la primera condición y note que  $r \leq n$  porque  $\mathfrak{m}^n = 0$ ). Por lo tanto, existe un elemento  $a \in I$  tal que  $a \in \langle \pi^r \rangle$  pero  $a \notin \langle \pi^{r+1} \rangle$ , es decir,  $a = u\pi^r$  para algún  $u \in A$  y la segunda condición implica que  $u \notin \mathfrak{m}$  y por lo tanto  $u$  es una unidad de  $A$  y así  $\pi^r = au^{-1} \in I$  por lo que  $I = \langle \pi^r \rangle$ .  $\square$

Si  $(A, \mathfrak{m})$  es artiniano local, como  $\text{nil} A = J(A) = \mathfrak{m}$ , entonces por 4.30 el ideal  $\mathfrak{m}$  es nilpotente y como  $A$  es local, entonces todo elemento de  $A$  es una unidad o es nilpotente.

*Ejemplo 11.* Si  $p$  es primo, el anillo  $\mathbb{Z}/p^n$  es artiniano local con ideal máximo el correspondiente a  $\langle p \rangle$ . Si  $n = p_1^{e_1} \times p_r^{e_r}$ , el teorema anterior dice que

$$\mathbb{Z}/n \simeq \mathbb{Z}/p_1^{e_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{e_r}$$

es artiniano.

**Proposición 4.39** *Si  $(A, \mathfrak{m})$  es noetheriano local, entonces se cumple una y sólo una de las afirmaciones siguientes:*

- (1)  $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$  para todo  $n \geq 1$ .
- (2)  $\mathfrak{m}^n = 0$  para algún  $n$ , y en este caso  $A$  es artiniano.

*Demostración.* Si sucediera que  $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$  para algún  $n$ , por el lema de Nakayama se sigue que  $\mathfrak{m}^n = 0$  y como  $A$  es noetheriano por 4.35 se sigue que  $A$  es artiniano.  $\square$

**Proposición 4.40** *Sea  $A$  un anillo noetheriano. Son equivalentes:*

- (1)  $A$  es artiniano.
- (2)  $\text{Spec} A$  es finito y discreto.
- (3)  $\text{Spec} A$  es discreto.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Por 4.27 y 4.29,  $\text{Spec} A$  es finito y discreto. (2)  $\Rightarrow$  (3) es obvio. (3)  $\Rightarrow$  (1): Como  $\text{Spec} A$  es discreto, entonces para todo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec} A$ ,  $\{\mathfrak{p}\}$  es cerrado y así  $\mathfrak{p}$  es máximo por lo que  $\dim A = 0$  y así, por 4.36,  $A$  es artiniano.  $\square$

**Proposición 4.41** *Sean  $K$  un campo y  $A$  una  $K$ -álgebra de tipo finito. Son equivalentes:*

- (1)  $A$  es artiniana.
- (2)  $A$  es una  $K$ -álgebra finita.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Por el teorema de estructura de anillos artinianos 4.39, el anillo  $A$  es un producto directo finito de anillos artinianos locales y si probamos que cada uno de estos es una  $K$ -álgebra finita, entonces  $A$  también lo es. Supongamos entonces que  $(A, \mathfrak{m})$  es un anillo artiniano local que es de tipo finito como  $K$ -álgebra. Entonces, en  $K \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{m}$  el campo residual  $A/\mathfrak{m}$  es una extensión finita de  $K$  por el teorema de Zariski 3.21. Como  $A$  es artiniana, entonces también es noetheriana y por 4.32 tiene longitud finita como  $A$ -módulo y consecuentemente no se puede tener una cadena infinita

$$0 \subseteq \langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \cdots \subseteq M$$

con los  $x_i \in M$ . Se sigue que  $M$  es finitamente generado como  $A$ -módulo.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Como  $A$  es  $K$ -álgebra, todo ideal de  $A$  es un  $K$ -espacio vectorial y por la hipótesis (2) se tiene que  $\dim_K A = n < \infty$ . Entonces los ideales de  $A$  son también de dimensión finita como espacios vectoriales sobre  $K$  y por lo tanto son artinianos por 4.34.  $\square$

## Ejercicios

**4.1.** Los ejercicios siguientes son variantes del «lema de Nakayama» y tendremos ocasión de usar varias de estas versiones.

- (1) Si  $M$  es un  $A$ -módulo finitamente generado y  $M = IM$ , entonces existe un  $a \in A$  con  $a \equiv 1 \pmod{I}$  tal que  $aM = 0$ .
- (2) Si  $I \subseteq J(A)$ , entonces todo  $a \in A$  tal que  $a \equiv 1 \pmod{I}$  es invertible.

(3) Si  $M$  es finitamente generado,  $I \subseteq J(A)$  y  $N \subseteq M$  es tal que  $N/IN \hookrightarrow M/IM$  es un isomorfismo, entonces  $M = N$ .

(4) Si  $(A, \mathfrak{m})$  es local,  $M$  es finitamente generado y si  $x_1, \dots, x_n \in M$  son tales que sus imágenes  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$  generan  $M/\mathfrak{m}M$ , entonces los  $x_i$  generan  $M$ .

(5) Si  $(A, \mathfrak{m})$  es local y  $k = A/\mathfrak{m}$  es su campo residual, entonces  $\mathfrak{m}(M/\mathfrak{m}M) = 0$  y así  $M/\mathfrak{m}M$  es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita.

**4.2.** Si  $A$  es un anillo, se dice que  $A$  es *reducido* si su nilradical es cero. Si  $A$  es un anillo reducido que tiene sólo un número finito de ideales primos, demuestre que las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(i) La dimensión de Krull de  $A$  es cero.

(ii)  $A$  es isomorfo a un producto directo de un número finito de campos.

*Sugerencia:* use el teorema chino del residuo.

**4.3.** Si  $\mathfrak{p}$  es un ideal primo de  $A$  y  $n \geq 1$ , demuestre que  $\sqrt{\mathfrak{p}^n} = \mathfrak{p}$ .

**4.4.** Demuestre que un anillo local  $(A, \mathfrak{m})$  de dimensión cero consiste sólo de unidades y elementos nilpotentes.

**4.5.** Si  $(A, \mathfrak{m})$  es un anillo local, demuestre que 0 y 1 son los únicos elementos idempotentes.

**4.6.** Si  $I \subsetneq A$  es un ideal propio, demuestre que  $\sqrt{I} = I$  si y sólo si  $I$  es la intersección de ideales primos.

**4.7.** Sean  $K$  un campo y  $\mathfrak{p} \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$  un ideal primo. Demuestre que si  $L$  es el campo de fracciones del dominio entero  $K[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{p}$ , entonces  $\text{grtr}_K L \leq n - 1$ .

**4.8.** Sea  $M$  un  $A$ -módulo. Demuestre que las propiedades siguientes son equivalentes:

(i) Todo submódulo de  $M$  es finitamente generado.

(ii) Toda cadena ascendente de submódulos de  $M$ :

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$$

se estaciona, i.e., existe un  $n \geq 1$  tal que  $N_n = N_{n+k}$ , para todo  $k \geq 0$ .

(iii) Toda familia no vacía de submódulos de  $M$  tiene un elemento máximo para el orden dado por la inclusión.

Un módulo que satisface las condiciones anteriores se dice que es *noetheriano*.

**4.9.** Sea  $M$  un  $A$ -módulo. Demuestre que las propiedades siguientes son equivalentes:

(i) Toda cadena descendente de submódulos de  $M$ :

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$$

se estaciona, i.e., existe un  $n \geq 1$  tal que  $N_n = N_{n+k}$ , para todo  $k \geq 0$ .

(ii) Toda familia no vacía de submódulos de  $M$  tiene un elemento mínimo para el orden dado por la inclusión.

Un módulo que satisface las condiciones anteriores se dice que es *artiniano*.

**4.10.** Si  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de  $A$ -módulos, demuestre que:

- (i)  $M$  es noetheriano si y sólo si  $M'$  y  $M''$  lo son.
- (ii)  $M$  es artiniano si y sólo si  $M'$  y  $M''$  lo son.

**4.11.** Si  $\{M_i\}$ ,  $1 \leq i \leq n$  son  $A$ -módulos noetherianos (respectivamente, artinianos), demuestre que su suma directa es noetheriano (respectivamente, artiniano).

**4.12.** Si  $A$  es un anillo noetheriano (respectivamente, artiniano) y  $M$  es un  $A$ -módulo finitamente generado, demuestre que  $M$  es noetheriano (respectivamente, artiniano).

**4.13.** Sean  $K$  un campo y  $A$  una  $K$ -álgebra de tipo finito. Si  $I \subseteq A$  es cualquier ideal, demuestre que  $\sqrt{I} = J(I) = \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ máximo } \supseteq I} \mathfrak{m}$ .

**4.14.** Si  $A \subseteq B$  son anillos con  $B$  entero sobre  $A$  y  $B$  noetheriano, demuestre que sobre cada primo  $\mathfrak{p} \in \text{Spec} A$  hay sólo un número finito de primos  $\mathfrak{P} \in \text{Spec} B$ , es decir, para la función  $^a i : \text{Spec} B \rightarrow \text{Spec} A$  inducida por la inclusión  $i : A \hookrightarrow B$ , la fibra  $(^a i)^{-1}(\mathfrak{p})$  es finita.

**4.15.** Si  $K$  es un campo, todo  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita  $V$  es obviamente noetheriano. Demuestre que también es artiniano. Por otra parte, todo  $K$ -espacio vectorial noetheriano es de dimensión finita. Demuestre que todo  $K$ -espacio vectorial artiniano es de dimensión finita.

**4.16.** Si  $A$  es noetheriano, por 4.3,  $A_{\mathfrak{p}}$  es noetheriano para todo ideal primo  $\mathfrak{p}$  de  $A$ . ¿Ser noetheriano es una propiedad local?

**4.17.** Si todos los ideales primos de  $A$  son finitamente generados, demuestre que  $A$  es noetheriano.

**4.18.** Si  $M$  es un  $A$ -módulo noetheriano, demuestre que  $A/(0 : M)$  es noetheriano. Aquí  $(0 : M)$  se define como para el caso de ideales y es el *anulador* de  $M$ .

**4.19.** Si  $A$  es noetheriano y  $f : A \rightarrow A$  es un epimorfismo de anillos, demuestre que es inyectivo.

**4.20.** Si  $M, N$  son  $A$ -módulos tales que  $M + N$  y  $M \cap N$  son finitamente generados, demuestre que  $M$  y  $N$  también lo son.

**4.21.** Si  $M$  es un  $A$ -módulo finitamente generado e  $I \subseteq A$  es un ideal, demuestre que

$$\sqrt{(0 : M/IM)} = \sqrt{(0 : M) + I}.$$

**4.22.** Si  $f : A \rightarrow B$  es un morfismo de anillos, demuestre que  $f(J(A)) \subseteq J(B)$ .

**4.23.** Un anillo  $A$  es *semilocal* si sólo tiene un número finito de ideales máximos. Si  $A$  es semilocal con ideales máximos  $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ , demuestre que

$$J(A) = \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n.$$



**4.24.** Si  $A$  es semilocal y  $f : A \rightarrow B$  es un morfismo de anillos, demuestre que  $f(J(A)) = J(B)$ .

**4.25.** Sea  $\text{An}(M) = (0 : M) = \{a \in A : ax = 0 \text{ para todo } x \in M\}$  el *anulador* de  $M$ . Si  $M$  es un  $A$ -módulo finitamente generado y  $\mathfrak{p} \in \text{Spec} A$ , demuestre que  $M_{\mathfrak{p}} = 0$  si y sólo si  $\mathfrak{p} \in V(\text{An}(M))$ . *Sugerencia:*  $M$  finitamente generado implica que  $\text{An}(M)_{\mathfrak{p}} = \text{An}(M)_{\mathfrak{p}}$ .

**4.26.** Si  $M$  es un  $A$ -módulo, su *soporte* es el conjunto

$$\text{supp} M = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec} A : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

Si  $M, N$  son finitamente generados, demuestre que  $\text{supp}(M \otimes_A N) = \text{supp} M \cap \text{supp} N$ , y si  $M$  es finitamente generado e  $I \subseteq A$  es un ideal, demuestre que  $\text{supp}(M/IM) = (\text{supp} M) \cap V(I)$ . *Sugerencia:*  $M/IM \simeq M \otimes_A (A/I)$ ,  $I = \text{An}(A/I)$  y  $\text{supp}(A/I) = V(I)$ .

**4.27.** Si  $K$  es un campo infinito, demuestre que  $\mathcal{J}(K^n) = 0$ , donde para  $U \subseteq K^n$  interprete a  $\mathcal{J}(U)$  como

$$\mathcal{J}(U) = \{f \in K[x_1, \dots, x_n] : f(P) = 0 \text{ para todo } P \in U\}.$$

Note que cuando  $K$  es algebraicamente cerrado el ejemplo 2 de la página 91 demuestra el caso correspondiente.

**4.28.** Sea  $M$  un  $A$ -módulo. Demuestre el teorema de *Jordan-Hölder*: Si  $\{M_i\}$  y  $\{M'_i\}$  son dos series de composición de  $M$ , entonces existe una biyección entre la familia de cocientes  $\{M_i/M_{i-1}\}$  y la familia  $\{M'_i/M'_{i-1}\}$  tal que los cocientes correspondientes son isomorfos.