فصل اول

تــــابــع

تمرین صفحه ۴۲

(۱) دامنه هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

۱) $f(x)=\sqrt{x^۲+۱}$

حل: $D_f=R\ x^2+1\geq ۰\ \Rightarrow$

۲) $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲-۵x+۲۱}}$

حل: $x^۲-۵x+۲۱=x^۲-۵x+\frac{۲۵}{۴}+\frac{۵۹}{۴}=(x-\frac{۵}{۲})^۲+\frac{۵۹}{۴}>۰\Rightarrow D_f=R$

۳) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

حل: $D_f=(۰,+\infty)$

4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-7x+12}}$ $\qquad x^2-7x+12=0\Rightarrow x_1=4, x_2=3$

$\Rightarrow D_f=(-\infty,۳)\cup(۴,+\infty)$

۵) $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲-x+۲}}\Rightarrow x^۲-x+۲=x^۲-x+\frac{۱}{۴}+\frac{۷}{۴}$

$=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}>0\Rightarrow D_f=R$

6) $f(x)=\dfrac{x^2}{x}\Rightarrow D_f=R-\{۰\}$

۷) $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow D_f=(۰,+\infty)$

۸) $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x^۲+۲x+۱)(-x^۲+x-۱)}{x^۲-۵x+۶}}$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{(x+۱)^{۲}(-x^{۲}+x-۱)}{(x-۲)(x-۳)}}$$

$(x+۱)^{۲}\geq ۰ \quad , \quad -x^{۲}+x-۱<۰ \quad \Rightarrow$ صورت کسر ≤ ۰

باید مخرج کسر همراه منفی باشد و مخالف صفر یعنی $۲<x<۳$.

$\Rightarrow D_f=(2,3)$

۹) $f(x)=\sqrt[۴]{x^{۲}-۵+۶} \qquad \Rightarrow x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

$\Rightarrow D_f=(-\infty,۲)\cup(۳,+\infty)$

۱۰) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+1} \qquad \Rightarrow D_f=R-\{-1\}$

۱۱) $f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{x-|x|}} \qquad \Rightarrow x\neq|x|\Rightarrow x<۰ \qquad \Rightarrow D_f=(-\infty,۰)$

۱۲) $f(x)=\sqrt{۱-x^{۲}} \quad \Rightarrow D_f=[-1,1]$

۲) دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید:

۱) $f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases} \qquad \Rightarrow D_f=(-\infty,۰)\cup(۰,+\infty)$

$R_f=\{-۱,۱\}$

2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x} \qquad \Rightarrow D_f=R-\{0\}$

$\Rightarrow x\in D_f \Rightarrow f(x)=x\Rightarrow R_f=R-\{0\}$

۳) $f(x)=\dfrac{x-۱}{x-۱} \qquad \Rightarrow D_f=R-\{1\}, R_f=\{1\}$

۴) $f(x)=\{-x+۳ \quad x>1 \ \Rightarrow D_f=(-\infty,+\infty)$

چون تابع روی $[-\infty,1]$ صعودی است برد در این قسمت برابر $[-\infty,1]$ است و

و چون تابع روی $(1,+\infty)$ نزولی است برد در این قسمت برابر

$(-\infty,-1+3)=(-\infty,2)$

است. پس برد تابع اجتماع این دو مجموعه است که برابر مجموعه زیر است:

$$R_f=(-\infty,2)$$

$$۵)\quad f(x)=\begin{cases} x & x<۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases} \Rightarrow D_f=R-\{۱\}$$

$$R_f=(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$$

$$۶)\quad f(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲} \qquad \Rightarrow D_f=R-\{2\}$$

$$\Rightarrow x\in D_f \Rightarrow f(x)=x+۲$$

$$R_f=R-\{۴\}$$

$$۷)\quad f(x)=\begin{cases} -x+۵ & x>۴ \\ -\sqrt{۱۶-x^۲} & -۴<x<۴ \\ x+۵ & x\le -۴ \end{cases} \qquad \Rightarrow D_f=R-\{4\}$$

$$f_۱=-x+۵ \quad , \quad x>۴ \quad \Rightarrow R_{f_1}=(-\infty,1)$$

$$f_۱=-\sqrt{۱۶-x^۲} \qquad -۴<x<۴ \Rightarrow R_f=[-۴,۰]$$

$$f_3=x+5 \qquad x\le -۴ \Rightarrow R_f=[۰-\infty,۱]$$

$$\Rightarrow R_f=R_{f_۱}\cup R_{f_۲}\cup R_{f_۳}=(-\infty,۱)U[-۴,۰]=(-\infty,۱)$$

$$۸)\quad f(x)=\sqrt{x-|x|}$$

چون همواره داریم $x\le|x|$ در نتیجه $x-|x|\le 0$ پس جاهایی که $|x|=x$ است قابل قبول است یعنی $D_f=[0,+\infty]$.

$$x\in D_f \Rightarrow f(x)=\sqrt{x-x}=۰ \qquad \Rightarrow R_f=\{۰\}$$

۳) از جفت توابع زیر کدام یک مساوی هستند؟

۱) $f(x)=\frac{x}{x}, g(x)=1$

مساوی نیستند چون $D_g=R$ و $D_f=R-\{0\}$ با هم برابر نیستند.

۲) $g(x)=x$ و $f(x)=(\sqrt{x})^2$

مساوی نیستند چون $D_g=R$ و $D_f=[0,+\infty)$ با هم برابر نیستند.

۳) $g(x)=x+2$ و $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ با هم برابر نیستند.

۴) فرض کنید $f(x)=\sqrt{x-1}$ مطلوب است. $f(1)$ ، $f(x+1)$ و $f(x^2-1)$ و $f(f(2))$.

$f(1)=\sqrt{1-1}=0$

$f(x+1)=\sqrt{x+1-1}=\sqrt{x}$

$f(\frac{1}{x})=\sqrt{\frac{1}{x}-1}$

$f(x^2-1)=\sqrt{x^2-1-1}=\sqrt{x^2-2}$

$f(f(2))=f(\sqrt{2-1})=f(1)=0$

۵) اگر f تابعی باشد که به ازای هر x و y. $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

اگر n عدد طبیعی باشد و $f(1)\neq 0$ باشد. مقدار $\frac{f(n)}{f(1)}$ را بیابید.

حل :

$$\begin{aligned} f(n) &= f(1+1+1+\dots+1)=f(1)+f(1)+\dots+f(1) \\ &= n\ f(1) \\ &\Rightarrow \frac{f(n)}{f(1)}=\frac{nf(1)}{f(1)}=n \end{aligned}$$

۶) در هر یک از موارد $f+g$ ، $\frac{f}{g}$ ، fog ، gof ، fof ، gog را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(n)=x^2+1$.

$$f+g(x)=\sqrt{x}+x^2+1$$
$$\frac{f}{g}(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$$
$$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{x^2+1}$$
$$got(x)=g(f(x))=(\sqrt{x})^2+1=x+1$$
$$fof(x)=f(f(m))=\sqrt{\sqrt{x}}=^4\sqrt{x}$$
$$gog(x)=g(g(x))=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$$

ب) $g(x)=4-x^2$, $f(x)=\sqrt{x}$

$$f+g(x)=\sqrt{x}+4-x^2$$
$$\frac{f}{g}(x)=\frac{\sqrt{x}}{4-x^2}$$
$$fog(x)=\sqrt{4-x^2}$$
$$gof(x)=4-(\sqrt{x})^2=4-x$$
$$fof(x)=\sqrt{\sqrt{x}}=^4\sqrt{x}$$
$$gog(x)=4-(4-x^2)^2=4-(16-8x^2+x^4)=-4+8x^2-x^4$$

ج) $g(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

$$f+g(x)=f(x)+g(x)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}}=\frac{x^2+x}{x-1}$$

$$gof(x)=f(g(x))=\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{x-1}{x+1}$$

$$fog(x)=\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}=\frac{x+1}{1-x}$$

$$fof(x)=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{\frac{x+2}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}=\frac{x+2}{2}$$

$$gog(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

د) $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $f(x)=x^2$.

$$f+g(x)=x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$gof(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2}}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{x^2}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=x^2\sqrt{x}$$

$$fof(x)=(x^2)^2=x^4$$

$$gog(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}=\sqrt[4]{x}$$

$$fog(x)=f(g(n))=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{1}{x}$$

۷) در هر مورد fg و $f-g$ را بیابید.

الف) $g(x)=\begin{cases} x & x<o \\ ۴ & x\geq o \end{cases}$ ، $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x<o \\ ۴ & x\geq o \end{cases}$

حل:

$$f-g(x)=\begin{cases} x^2-x & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases} \qquad fg(x)=\begin{cases} x^3 & x<0 \\ 16 & x\geq 0 \end{cases}$$

ب) $g(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ -x & 0\leq x<1 \\ 4x & 1<x \end{cases}$ ، $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 4 & x\geq 0 \end{cases}$

حل: ابتدا $f(x)$ را به صورت $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 4 & 0\leq x\leq 1 \\ 4 & 1<x \end{cases}$ می‌نویسیم، داریم:

$$fg(x)=\begin{cases} x^۴ & x<0 \\ -۴x & 0\leq x \\ ۱۶x & ۱<x \end{cases}$$

و $f-g(x)=\begin{cases} x^2-x & x<0 \\ 0 & x\geq 0 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ -x & 0\leq x<1 \\ 4x & 1<x \end{cases}$ ، $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 4 & x\geq 0 \end{cases}$

حل: ابتدا $f(x)$ را به صورت $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 4 & 0\le x\le 1 \\ 4 & 1<x \end{cases}$ می‌نویسیم، داریم:

$$fg(x)=\begin{cases} x^4 & x<0 \\ -4x & 0\le x<1 \\ 16x & 1<X \end{cases}$$

{S

ج)

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<0 \\ 4 & x\ge 1 \end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & x<-1 \\ x^2+1 & -1\le x<2 \\ \sqrt{x+2} & 2<x \end{cases}$$

حل: دامنه مشترک دو تابع برابر $(2,+\infty)\cup(-\infty,-1)$ است پس داریم:

$$f-g(x)=\begin{cases} x^2-1-\frac{1}{x} & x<-1 \\ 4-\sqrt{x+2} & x>2 \end{cases}$$

$$fg(x)=\begin{cases} \frac{(x^2-1)}{x} & x<-1 \\ 4\sqrt{x+2} & x>2 \end{cases}$$

۸) توابع f و g به صورت زیر داده شده‌اند.

$$f:R-\{3\}\to R \qquad g:R-\{1\}\to R$$

$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-3}} \qquad g(x)=\frac{3-8x^3}{1-x^3}$$

اولاً: ثابت کنید f یک به یک است.

حل:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x_1+3}{x_1-3}}=\sqrt[3]{\frac{x_2+3}{x_2-3}}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+3}{x_1-3}=\frac{x_2+3}{x_2-3}\Rightarrow 1+\frac{6}{x_1-3}=1+\frac{6}{x_2-3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1-3}=\frac{1}{x_2-3}\Rightarrow x_1-3=x_2-3$$

$$\Rightarrow x_1=x_2$$

پس f یک به یک است.

ثانیاً آیا f و g وارون یکدیگرند.

حل: باید $D_f=R_g$ و $D_g=R_f$ باشد.

$$y=f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-3}} \Rightarrow \quad y^3=\frac{x+3}{x-3}=1+\frac{6}{x-3}$$

$$\Rightarrow y^3-1=\frac{6}{x-3}\Rightarrow x-3=\frac{6}{y^3-1}$$

$$\Rightarrow x=3+\frac{6}{y^3-1}=\frac{3y^3-3+6}{y^3-1}$$

$$\Rightarrow x=\frac{3y^3+3}{y^3-1}\Rightarrow \quad f^{-1}(x)=\frac{3x^3+3}{x^3-1}$$

با این محاسبه مشخص است که $g(x)\neq f^{-1}(x)$ است.

۹) کدام یک از توابع زیر یک به یک و پوشا است؟

۱) $f(x)=\dfrac{|x|+1}{x}$

حل) این تابع به صورت $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x} & x>0\\ \dfrac{-x+1}{x} & \end{cases}$ است.

هر جزء این تابع یک به یک و پوشاست، چون تابع هموگرافیک است.

۲) $f(x)=|x|+1 \quad , \quad f:R^{+}\to R$

حل: این تابه به صورت $f(x)=x+1$ است که یک به یک است.

ولی پوشا نیست چون $R_f=(1,+\infty)\neq R$ است.

۳) $f(x)=\sqrt[3]{x}+2 \quad , \quad f:R\to R$

حل: این تابع یک به یک است چون:

$$\begin{aligned}&f(x_1)=f(x_2)\\ &\Rightarrow \sqrt[3]{x_1}+2=\sqrt[3]{x_2}+2 \qquad \Rightarrow \sqrt[3]{x_1}=\sqrt[3]{x_2}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Rightarrow x_1=x_2\end{aligned}$$

این تابع پوشا نیز است چون:

$$\begin{aligned}y=\sqrt[3]{x}+2 \quad \Rightarrow \quad y-2=\sqrt[3]{x} \quad &\Rightarrow \quad x=(y-2)^3\\ &\Rightarrow \quad R_f=R\end{aligned}$$

۴) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1} \quad , \quad f:R-\{1\}\to R$

حل: تابع به صورت $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ روی دامنه‌اش حتماً یک به یک است.

این تابع پوشا نیست. چون:

$$y=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2x-2+3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{x-1}=y-2 \Rightarrow x-1=\frac{3}{y-2}$$

$$\Rightarrow x=1+\frac{3}{y-2}=\frac{y+1}{y-2}$$

$$R_f=R-\{2\}\neq R.$$

۱۰) تابع $f:R-\{1\}\to R-\{a\}$ با ضابطه زیر داده شده است:

$$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$$

اولاً: ثابت کنید f یک به یک است.

حل:

$$f(x)=\frac{2x-2+1}{x-1}=2+\frac{1}{x_1-1}$$

$$f(x)=f(x_2) \Rightarrow 2+\frac{1}{x_1-1}=2+\frac{1}{x_2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1-1}=\frac{1}{x_2-1} \quad \Rightarrow \quad x_1-1=x_2-1$$

$$\Rightarrow \quad x_1=x_2$$

پس f یک به یک است.

ثانیاً a را طوری بیابید که f پوشا باشد.

حل: باید $R_f=R-\{a\}$ را در نظر بگیریم. ابتدا R_f را به صورت زیر می‌یابیم:

$$y=\frac{2x-1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x-1}=y-2$$

$$\Rightarrow x-1=\frac{1}{y-2} \Rightarrow x=1+\frac{1}{y-2}$$

$$\Rightarrow R_f=R-\{2\} \quad \Rightarrow a=2$$

۱۱) وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید:

الف) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$

حل: این تابع یک به یک است. پس وارون دارد و داریم:

$$y = \frac{3x+2}{x-1} \Rightarrow yx - y = 3x+2 \Rightarrow x(y-3) = y+2$$
$$\Rightarrow x = \frac{y+2}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

ب) $f(x) = \sqrt{x-۴}$.

حل: این تابع یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است و داریم:

$$y = \sqrt{x-4} \Rightarrow x-4 = y^2 \Rightarrow x = y^2+4$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2+4$$

ج) $$f(x) = \begin{cases} x & x > ۱ \\ x^۲ & ۱ \le x \le ۹ \\ ۲۷\sqrt{x} & ۹ < x \end{cases}$$

حل) چون هر ضابطه یک به یک است، تابع یک به یک و وارون‌پذیر است:

$$f_۱(x) = x \quad , \quad x > ۱ \quad \Rightarrow f_۱^{-۱}(x) = x \qquad x > ۱$$
$$f_۲(x) = x^۲ \quad , \quad ۱ \le x \le ۹ \quad \Rightarrow \quad f_۲^{-۱}(x) = \sqrt{x} \quad ۱ \le x \le ۸۱$$
$$f_۳(x) = ۲۷\sqrt{x} \quad x \rangle ۹ \quad \Rightarrow \quad f_۳^{-۱}(x) = \frac{x^۲}{(۲۷)^۲} \qquad x \rangle ۸۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \begin{cases} x & x > ۱ \\ \sqrt{x} & ۱ \le x \le ۸۱ \\ (\frac{x}{۲۷})^۲ & x > ۸۱ \end{cases}$$