03-01-2020 Structure Algebriques l'informatique.

# I / Préliminaires : Rappels :

① Notion d'ensembles: Une ensemble est une collection d'objets deux a deux distincts.

Notation:

ex : $\{ \sigma, 1, *, ☺ \}$.

Il ne sert a rien de repeter un element plusieurs fois. et l'ordre des elements n'a aucune importance.

Un element d'un ensemble peut etre un autre ensemble.

$\{ \partial, 1, \{2, 3\}, \{\partial\}, * \}$.

Un ensemble particulier : l'ensemble vide

Autre exemple d'ensembles :

entiers positifs. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$.

entiers relatifs. $\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots\}$.

Ensemble des fractions: $\mathbb{Q} = \{2/3, 1/4, 2/1, \ldots\ldots\}$.

Ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$

Ensemble des nombres Complexes : $\mathbb{C}$

Ce sont des exemples d'ensembles infinis, avec un nombre infini d'elements.

Une notation classique pour construire un ensemble :

$\{n \mid n$ est etudiant en $L_2$ et $n$ mesure plus $1m70\}$.

tel que $\{objet \mid objet$ vérifie une proprieté$\}$.

ex: $\{n \mid n \in \mathbb{N}$ et $n \% 2 = 0\}$.

$B = \{a \mid a \in \mathbb{R}$ et $a > 0\}$.

A se note aussi $\{n \in \mathbb{N} \mid n$ est paire$\}$.

$B = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

Notation $x \in A$ $x$ est un element de l'ensemble A.

2 ensembles sont egaux ssi ils ont les mêmes elements.

$$X = Y \iff ((x \in X) \iff (x \in Y))$$

Notion de sous ensemble.

A est un sous ensemble de B (ou une partie de B) ssi tout les elements de A sont aussi des elements de B.

On note $A \subset B$.

ex: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ; $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$

$X \times Y = \{ (x ; y) : x \in X$ et $y \in Y \}$.

ex : $X = \{1, 2\}$.

$Y = \{a, b, c\}$.

$X \times Y = \{ (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c) \}$.

⚠ dans un couple le premier et le deuxieme peuvent etre egeaux.

Rq : si $X$ a $n$ elements et $Y$ a $p$ elements alors $X \times Y$, noté aussi $XY$ a $np$ elements.

DEF : le nombre d'element d'un ensemble est appelé le cardinal de l'ensemble est noté $card(X)$.

ou encore $|X|$ ou encore $\# X$.

$|X \times Y| = |X| \, |Y|$.

$|P(x)| = 2^{|x|}$.

② Notion d'application :

DEF : Une application est la données d'un ensemble de départs ("ensemble de départ")

- d'un ensemble d'arrivée

$X = \{1, \partial, 2\}$.

$1 \in X$ ; $\{1\} \subset X$.

$\{1, \partial\} \subset X$.

$X = \{1, \partial, 2\}$

Écrivons tous les sous-ensembles de $X$.

$\{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{\partial\}$.

$\{1, \partial\}$ ; $\{\partial, 2\}$ ; $\{1, 2\}$, $\{1, 2, \partial\}$. $\}$.

L'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble $X$

est noté $P(X)$, ensemble des Produits $X$.

Rq : si $X$ a $n$ elements

$Y = X \Leftrightarrow X \subset X$ et $Y \subset X$.

soit deux ensembles $X$ et $Y$. on appelle le produit cartisien

de $X$ et $Y$ et on note $X \times Y$, l'ensemble formé des couples ordonnées ou le premier element appartient a $X$ et le deuxieme elements appartient a $Y$.

2 applications sont egales ssi elles sont :

=> le même ensemble de depart

=> le même ensemble d'arrivée.

=> les mêmes liens de l'ensemble de départ vers les eléments de l'ensemble d'arrivée.

Une application f de X dans Y est la donnée de

$\boxed{\begin{array}{l} X, Y \text{ est d'un sous ensemble } \Gamma \subset XY \\ (x;y) \subset \Gamma \text{ et } (x;y) \in \Gamma \Rightarrow y_1 = y_2. \\ \text{et } \forall x \in X \ \exists y \in Y \ (x,y) \in \Gamma. \end{array}}$

Quelque soit $x \in X$, il existe un unique $y \in Y$ tel que :

$(x;y) \in \Gamma$

soit f une application de X dans Y (on note $f : X \to Y$).
soit $x \in X$, le resultat de la fonction f sur l'entrée x ~~soit $x \in X$~~.

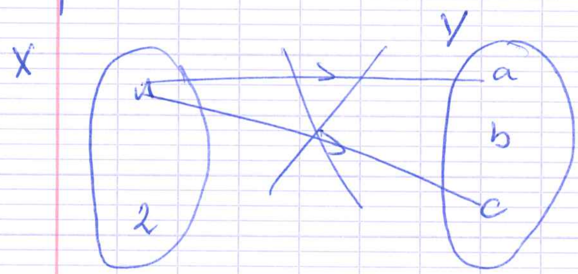
est applé l'image x
noté $f(x)$.

soit $y \in Y$ si il existe une entree tel que le resultat de la fonction sur l'entree est y dans x est appelé un antécédant de Y.

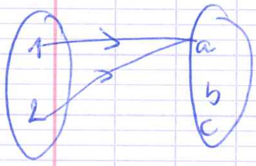
et un lien de chaque element de l'ensemble de départ vers un element de l'ensemble d'arrivée.

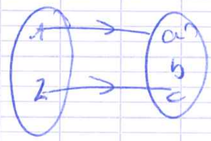
(correspond aussi aux fonctions déterministes ecrites en phyton).

Les ensembles $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{a, b, c\}$ pourrait etre représenté par :




et les liens d'une application de X vers Y par




$X = \{ n \,/\, n \text{ etudiant en } L2 \}$.

$Y = \mathbb{N}$

$x \in X \quad x \longmapsto n \in \mathbb{N}$, le n° elements.

Notation : $f \quad X \longrightarrow Y$

$\qquad x \longmapsto y$.

$f$ est l'application de l'ensemble X vers l'ensemble Y et a $x$

$f$ associe $y$.

Dans une application chaque element de l'ensemble de départ a exactement une image.

Les elements de l'ensemble d'arrivée peuvent avoir un ou plusieurs antécidents.

$X = \{0, 1\}^*$ : ensembles de departs

10~~0~~1001

$Y = \mathbb{Z}$

$f : X \longrightarrow Y$

$w \longrightarrow$ nbr de 1 dans $w$ − nbr 0 dans $w$.

(~~DEF~~) soit $f : X \longrightarrow Y$ une application.
soit $A \subset X$ et $B \subset Y$

DEF : On appelle image A par $f$, noté $f(A)$ l'ensemble des images des ensembles de A Par $f$.

$$f(A) = \{ y \in Y \ / \ \exists x \in A \quad y = f(x) \}.$$

$$f(A) = \{ f(a) \ / \ a \in A \}.$$

On appel image réciproque de B et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des antécidents des elements de B par $f$.

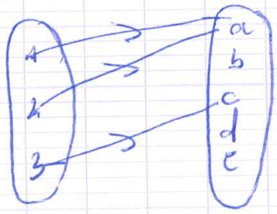
$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \ | \ \exists y \in B \quad y = f(x) \}.$$

parfois noté

$$f(x) = \{ y \in Y \ . \ \exists x \in X \quad y = f(x) \}$$

est appelé image de $f$ est noté $\mathrm{Im} f$.

exemple:

$f$ : 

$$f(\{1\}) = \{a\}$$

$$f(\{1, 2\}) = \{a\}$$

$$f(\{1, 2, 3\}) = \{a, c\} = \mathrm{Im} f$$

$$f^{-1}(\{a, b\}) = \{1, 2\}$$

$$f^{-1}(\{a, b, d, e\}) = \{1, 2\}$$

$$f^{-1}(\{d, e\}) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{b, c, d, e\}) = \{3\}$$

$$f : X \to X.$$

DEF:

Une application est injective ssi chaque element de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent.

$\forall x, x' \in X \quad x = x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

on utilise le plus souvent la contraposé de la fonction

$\forall x, x' \in X$

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

DEF :

Une application $f : X \to Y$ est surjective ssi chaque element de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédant.

$\forall y \in X, \exists x \in X$ tq $f(x) = y$.

ou $x \in f^{-1}(\{y\})$.

DEF :

$f : X \to Y$ est bijective.

si elles injective et surjective, chaque element de $Y$ a exactement un antécidant.