16 - 01 - 2020

Cours 2 : Structure Algebrique pour l'informatique.

DEF :

$f : X \longrightarrow Y$ $\qquad$ $g : Y \longrightarrow Z$

alors $\quad X \longrightarrow Z$

$\qquad\quad x \longmapsto g(f(x))$.

h est noté $g \circ f$, appelé la composé de g et f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

ps : $f \circ g$ n'est pas une application

$g \circ f$.

~~(si il existe)~~

soit $f : X \longrightarrow X$ tell que

$f \circ g$ et $g \circ f$ sont bien des applications.

$f \circ g : X \longrightarrow X$ et $g \circ f : X \longrightarrow X$).

$f \circ g = id_Y$ et $g \circ f = id_X$

Alors g est appelé la ~~fonction~~ application réciproque de f, noté f^{-1}

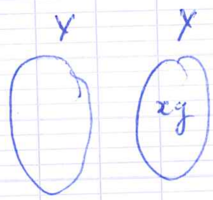
Rappel : $id_X \quad X \longrightarrow X$ $\qquad$ $id_Y \quad Y \longrightarrow X$

$\qquad\qquad\quad x \longmapsto x$ $\qquad\qquad\qquad\quad x \longmapsto x$.

__Proposition :__ $f : X \to Y$

f admet une application réciproque ssi f est bijective

y a un antécédent unique par f, on note $g(y)$ cet antécédent



$g : Y \to X$

$y \to$ unique antécédent par f.

Soit $x \in X$ $\quad g(f(x)) = x \quad g \circ f = id_X$.

Soit $y \in Y$ $\quad f(g(y)) = y \quad f \circ g = id_Y$.

g est bel et bien l'application réciproque de f.

$g = f^{-1}$.

Supposon que f admet bien une application reciproque f^{-1}.

Montronsque f est injective

Soit $x_1, x_2 \in X$, $\quad f(x_1) = f(x_2)$.

$f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$. $\Rightarrow$ f est injective.

Soit $y \in X$, l'antécédent de y par f est $f^{-1}(y)$

$f(\overset{x}{(f^{-1}(y))}) = y$ car $f \cdot f^{-1} = id_Y$

Ps : Pour que soit bijective il ne suffit pas d'avoir

$g : X \to X$ avec $g = id_X$.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$x \to x+1$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$x \to x-1$ si $x \geq 1$.

$0 \mapsto 0$.

$g \circ f = id_{\mathbb{N}}$ ou f n'est pas surjective.

③ Relation d'équivalence ; Partition :

Soit X un ensemble, une relation (binaire) sur X est la donnée d'un sous ensemble R de $X . X$.

$X = \{a, b, c\}$.

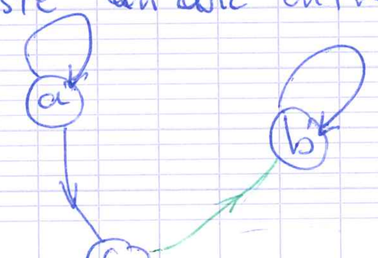
$X . X = \{(a;a), (a,b), (a,c), (b;b), (b,a), (b,c),$

$(c;c), (c;a), (c;b)\}$.

$R = \{(a,a), (a,c), (b,b), (c,b), (c,d)\}$.

Une relation peut etre représenté par un graphe de coordonnées $G(V, F)$ si les sommets sont les elements de X.

il existe un arc entre $x, y \in V$ ssi $(x;y) \in R$.



on note $x \mathcal{R} y$ ssi $(x,y) \in \mathcal{R}$.

Correspond a des fonctions informatiques d'entité.

booléan $R_o(x : X, y : X)$.

(on a alors $x R y$ ssi $R(x;y) = true$).

DEF :

Soit R une relation sur un ensemble X.

R est dite reflexive ssi $\forall x \in X \quad x R x$.

R est dite symetrique ssi $\forall x, y \in X$.

$$x R y \Rightarrow y R x.$$

- R est dite transitive ssi $\forall x, y, z \in X$

$$x R y \text{ et } y R z \Rightarrow x R z.$$

DEF :

on dit qu'une relation R definit sur X est une relation d'equivalence ssi :

=> R est reflixive.
=> symetrique.
=> transitive.

Sur $\mathbb{Z}$, on définit $x R y \iff$ est Paire.

1) $x R x$? $x + x = 2x \Rightarrow 2x$ est Paire. $\Rightarrow$ Refflexive.

2) $x R y \Rightarrow y R x$ $\Rightarrow x + y = y + x \Rightarrow$ Symetrique.

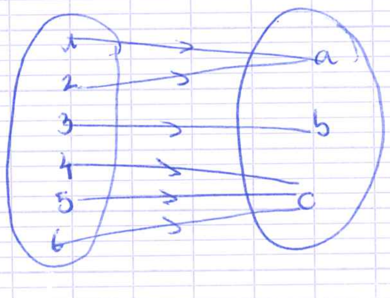
3) $x R y$ et $y R z \overset{?}{\Rightarrow} x R z$ $\Rightarrow$ transitive.

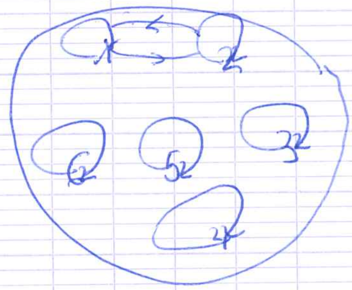
$x + y$ Paire
$y + z$ Paire

$$x + z = \underbrace{(x + y)}_{\text{Paire}} + \underbrace{(y + z)}_{\text{Paire}} - \underbrace{2y}_{\text{Paire.}}$$

Soit $f : X \rightarrow X$

sur ~~soit~~ X on définit par $x_1 R x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$





DEF : Partition.

soit X un ensemble : et P un sous ensemble de $P(X)$

$(P \subset P(X))$.

(Les elements de P sont des sous ensembles de X).

on dit que P est une partition de X ssi

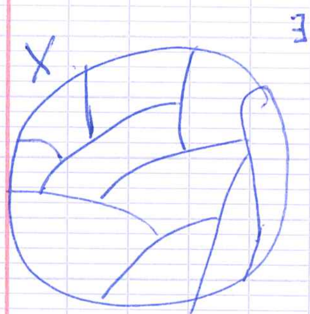
– P ne contient pas l'ensemble vide. $(\emptyset \notin P)$.

– Les elements de P sont deux a deux disjoints :

$\forall A, B \in P \qquad A \cap B = \emptyset$.

– La réunion de tous les elements de P est X.

$\exists A \in P \,, x \in A$.



Une Partition de X est une classification des elements de X.

> soit R une relation d'equivalence sur X
> xRy est noté $x \sim y$ ou même $x \equiv y$.
>
> l'ensemble $\{y \in X \mid y \sim x\}$ est appelé
>
> la classe de x, noté $[x]$ ou $\bar{x}$.

Proposition :

soit X un ensemble.

il existe une bijection entre l'ensemble :

Σ, des relations d'équivalence sur X et l'ensemble des partitions sur X.

A chaque relation d'equivalence on peut associer de maniere unique une partition sur X.

A chaque partition de X ont peut associer de manière unique une relation d'equivalence en X.

Soit $\sim$ une relation d'equivalence sur X.

L'ensemble des classes d'equivalence de $\sim$, noté $X/\sim$

est une Partition de X

$\emptyset \notin X/\sim$ car $\forall [\cancel{x}] \in X/\sim$, $x \in [x]$

(reflexivité de $\sim$).

$[x] \cap [y] \neq \emptyset \Rightarrow [x] = [y]$.

$[x] \cap [y] = \emptyset \Rightarrow \exists z \in X$ $x \sim z$ et $y \sim z$.

$\forall x \in X$, x est dans une classe d'equivalence ?

Oui $x \in [x]$ $(X \subset \bigcup_{x \in X} [x])$ /

Réciproquement soit P une Partition de X

on définit $\sim$ Par $x, y \in X$

$x \sim y \Leftrightarrow \exists A \in P$ $x \in A$ et $y \in A$

$\sim$ est une relation d'equivalence

car $\forall x \in X$ $\exists A \in P$ $x \in A$ $x \sim x$

si $x \sim y \Rightarrow A \subset P$. $x \in A$ et $y \in A \Rightarrow y \sim x$.

$x \sim y$ et $y \in z$

$\Rightarrow \exists A \in P$ $x \in A$ et $y \in A$

$\exists R \in P$ $y \in B$ et $z \in B$.

or comme P est une partition $y \in A$ et $y \in B \Rightarrow A = B$.

Donc $x \in A$ et $z \in A$ ou encore $x \sim z$