Sécurité et aide à la décision
Programmation linéaire
CM 01

Valentin Lemière
valentin.lemiere@unicaen.fr

30 janvier 2019

Objectifs du cours

- Présenter la programmation linéaire
- Donner les outils de résolution
- Présentation d'un solveur

Modalités de contrôle

- Examen sur table à la fin de la matière
- N'est qu'une des notes de la matière

1. Programmation linéaire

Programmation linéaire

- Aussi appeler optimisation linéaire
- Cherche le meilleur résultat d'un modèle
- Constitué de contraintes linéaires

Exemple de programme linéaire

- Un fermier possède deux produits pour nourrir ses bêtes
- Le produit A coûte 1,5E et donne 50g de protéine et 140g de glucide par kg
- Le produit B coûte 0,85E et donne 70g de protéine et 20g de glucide par kg
- Chaque bête requiert 255g de protéines et 220g de glucides par jour
- Quelle proportion de produits doit-il donner pour minimiser ses dépenses ?

Exemple de programme linéaire

- alim_A ≥ 0
- alim_B ≥ 0
- 50 alim_A + 70 alim_B ≥ 255
- 140 alim_A + 20 alim_B ≥ 220
- min : 1.5 alim_A + 0.85 alim_B

Exemple de programme linéaire

- alim_A = 0
- alim_B = 11
- Cout = 9.35

- alim_A = 5.1
- alim_B = 0
- Cout = 7.65

- alim_A = 1.1705
- alim_B = 2.8068
- Cout = 4.1415

Variables

- Quantité que l'on ne connaît pas et dont on veut la valeur
- Les inconnues

- Variable intermédiaire/supplémentaire
- $A = x + y + z \land A < 2x$

Contraintes linéaires

- Que veut-on dire par linéaire ?
- Une variable ne peut être multipliée que par un facteur constant, pas une autre variable
- 4 * Variable : linéaire
- Var1 * Var2 : non linéaire

Contraintes de borne

- "On ne peut pas vendre plus de 100 produits ce mois-ci"
- "On doit envoyer au moins 20 tonnes"

- produit ≤ 100
- poids ≥ 20

Contraintes de flot

- "J'ai 1000 litres et 3 clients C1, C2 et C3 à fournir"
- "J'achète mes disques depuis S1, S2 et S3. Il me faut 5000 disques"

- $C1 + C2 + C3 \leq 1000$
- $S1 + S2 + S3 = 5000$

Contraintes de ressources

- "Je ne peux avoir que 10000 connecteurs, chaque PC pro que je fais a besoin de 8 connecteurs, et chaque PC familial a besoin de 5 connecteurs"
- $8 \text{ pro} + 5 \text{ familial} \leq 10000$

Contraintes de balance

- "L'eau rentre par E1, E2 et E3. Elle doit ressortir par S1 et S2."
- $E1 + E2 + E3 = S1 + S2$
- $E1 + E2 + E3 - S1 - S2 = 0$

Contraintes souples

- Si le problème requiert que la contrainte soit satisfaite, ces contraintes sont dites dures
- Dans certains problèmes, certaines contraintes sont préférées, mais pas nécessaires. Ces contraintes sont dites souples
- Par exemple dans la planification sous préférence, ou un certain nombre de contraintes peuvent être autorisées à être violées, et la qualité de la solution dépend du nombre de contraintes satisfaites

Fonction objectif

- N'est pas une contrainte, mais consiste en une expression linéaire
- Est souvent un coût (quand on minimise) ou un profit (quand on maximise)
- La plupart des solveurs minimisent par défaut
- Il peut ne pas y avoir de fonction objectif, le solveur doit donc juste ressortir une solution réalisable, ou répondre si le problème possède (au moins) une solution, mais ces problèmes sont assez rare

Satisfaisabilité

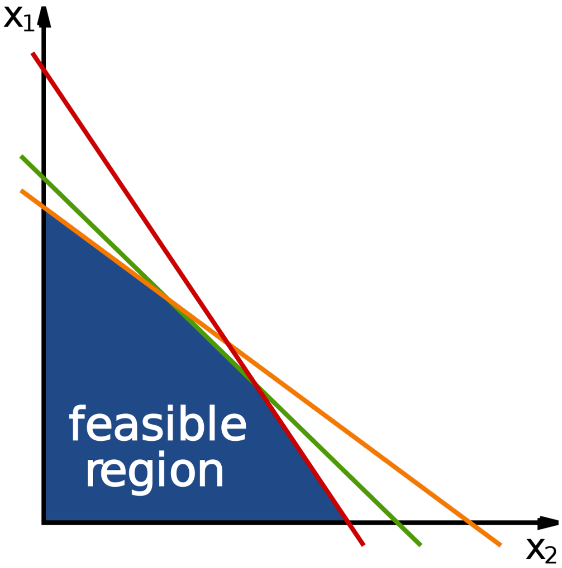
- Un problème est satisfiable s'il existe au moins une solution
- Si deux contraintes sont inconsistantes, alors le problème n'est pas satisfiable
- Par exemple les contraintes $x \geq 2$ et $x \leq 1$

Solution optimale

- La solution optimale est la solution avec la plus petite/grande valeur pour la fonction objectif
- Il n'existe pas forcement de solution optimale même si le problème est satisfiable
- Par exemple $x \geq 0$ avec max : x, il est toujours possible d'augmenter la valeur de la solution

2. Résolution

Résolution graphique



Axes

- Variables
- Avec 2 variables on peut facilement avoir une visualisation
- Mais s'applique quelque soit le nombre de variables

Contraintes

- 2 variables : forme des demi-droites
- 3 variables : forme des demi-plans
- 4+ variables : forme des demi-hyperplans

- L'équation linéaire forme directement l'équation de la demi-droite

Solutions

- L'ensemble des demi-droites forment un polygone convexe, qui représente l'ensemble des solutions réalisables
- La solution optimale est l'un des sommets du polygone
- Sauf si le polygone n'est pas fermé dans le sans de la minimisation/maximisation

Outils en ligne

- `https://www.zweigmedia.com/utilities/lpg/index.html?lang=en`

3. Exemple

Exemple

- Une usine propose deux produits P1 vendu 12E et P2 vendu 8E
- Chaque pièce est traitée successivement dans 3 ateliers
- Le nombre d'heures-machines par pièce est : P1 (A=3,B=5,C=2), P2(A=1,B=3,C=3)
- Pour éviter le chômage technique, l'atelier A doit fournir 1200 heures-machines, l'atelier B 3000 heures-machines et l'atelier C 1800 heures-machines
- Trouver une production permettant d'éviter le chômage technique telle que la production soit équilibrée à 10% près, tout en maximisant les profits

Choix des variables

- Le nombre de produits P1 produit
- Le nombre de produits P2 produit

Choix des contraintes

- L'atelier A fourni 1200 heures-machines : $3P1 + 1P2 \geq 1200$
- L'atelier B fourni 3000 heures-machines : $5P1 + 3P2 \geq 3000$
- L'atelier C fourni 1800 heures-machines : $2P1 + 3P2 \geq 1800$
- La production est équilibrée : $1.1P1 - P2 > 0$ et $-1P1 + 1.1P2 > 0$

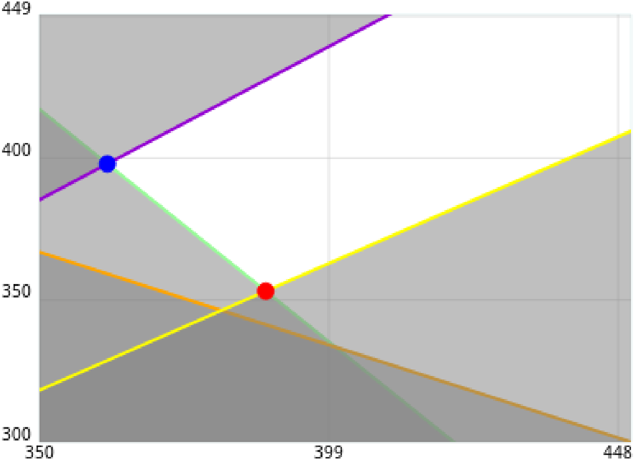
Choix de la fonction objective

- On veut maximiser les profits
- max : 12P1 + 8P2

Le programme linéaire

- max : 12P1 + 8P2
- 3P1 + 1P2 $\geq$ 1200
- 5P1 + 3P2 $\geq$ 3000
- 2P1 + 3P2 $\geq$ 1800
- 1.1P1 - P2 $>$ 0
- -1P1 + 1.1P2 $>$ 0

Résolution



Solution

- (361.4458, 397.5904) de valeur 7518.0723
- (388.2353, 352.9412) de valeur 7482.3529
- La région des solutions n'est pas bornée, il y a pas de solution optimale

4. Utilisation de la PL

Utilisation de la PL

- De nombreux problèmes en recherche opérationnelle peuvent être exprimé comme des programmes linéaires
- Planification
- Production
- Transport
- ...

5. PLNE

PLNE

- Tous les problèmes ne peuvent pas être modélisés comme des problèmes linéaires
- Notament lorsque les solutions ne peuvent être prises que parmi un ensemble de valeurs
- Programmation Linéaire en Nombre Entier, aussi appelé IP (Integer Programming) ou ILP

MILP

- On parle de MILP (Mixed integer linear programming) quand certaines variables sont contraintes aux entiers, et que d'autres variables sont réelles

Exemple

- max : y
- -x + y $\leq$ 1
- 3x + 2y $\leq$ 12
- 2x + 3y $\leq$ 12
- x $\geq$ 0
- y $\geq$ 0
- x $\in \mathbb{Z}$
- y $\in \mathbb{Z}$

Exemple

- Les solutions entières sont (1, 2) et (2, 2) toute deux avec une valeur de 2
- La solution réelle aurait été (1.8, 2.8), son arrondi (2, 3) n'est pas une solution

Méthode de résolution

- On ne peut pas résoudre en réel et prendre l'arrondi, car ce n'est pas garanti d'être une solution
- Branch-and-bound, qui divise le problème en plusieurs sous problèmes
- Via heuristique, la PLNE étant NP-difficile : recuit simulé, hill-climbing ...

6. PL 0/1

PL 0/1

- Les variables ne peuvent prendre que la valeur 0 ou 1
- Utilisée dans des problèmes de décision

Exemple

Minimiser le nombre de violations du problème de 2-coloration pour le graphe G=({A,B,C},{(A,B),(B,C)}).

Exemple

Minimiser le nombre de violations du problème de 2-coloration pour le graphe G=({A,B,C},{(A,B),(B,C)}).

Variables :

- A1
- A2
- B1
- B2
- C1
- C2

Exemple

Minimiser le nombre de violations du problème de 2-coloration pour le graphe G=({A,B,C},{(A,B),(B,C)}).

Contraintes :

- $A1 + A2 = 1$
- $B1 + B2 = 1$
- $C1 + C2 = 1$
- $D1 + D2 = 1$

Exemple

Minimiser le nombre de violations du problème de 2-coloration pour le graphe G=({A,B,C},{(A,B),(B,C)}).

Contraintes :

- A1 + B1 - arc11 $\leq$ 1
- A2 + B2 - arc12 $\leq$ 1
- B1 + C1 - arc21 $\leq$ 1
- B2 + C2 - arc22 $\leq$ 1

Exemple

Minimiser le nombre de violations du problème de 2-coloration pour le graphe G=({A,B,C},{(A,B),(B,C)}).

Fonction objectif :

- min : arc11 + arc12 + arc21 + arc22