Sécurité et aide à la décision
Programmation linéaire
CM 02

Valentin Lemière
valentin.lemiere@unicaen.fr

6 février 2019

1. Rappels

Rappels - Modélisation

- Comporte 3 éléments
- Les variables : les inconnus du problème
- Les contraintes : ce qui caractérise une solution
- La fonction objective : ce qu'on veut minimiser/maximiser

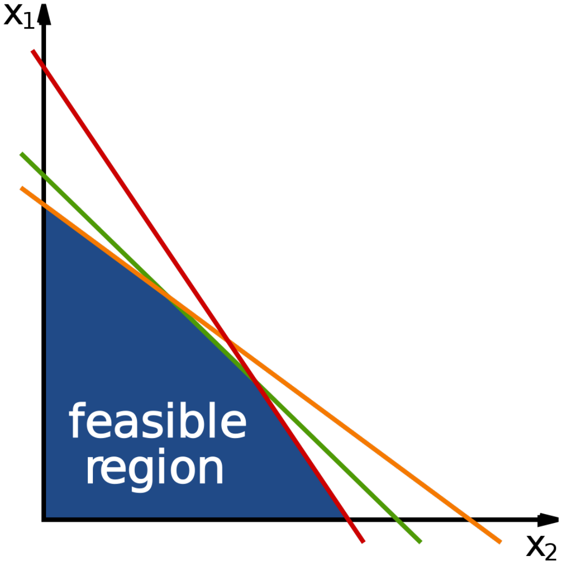
Rappels - Modélisation

- Les équations des contraintes et de la fonction objective sont linéaires
- Les variables doivent être multipliées par des constantes et pas d'autres variables

Rappels - Modélisation

- PL : les variables sont réelles
- PLNE : les variables sont entières
- PL 0/1 : les variables sont binaires
- MILP : certaines variables sont réelles et d'autre sont entières (ou binaire)

Rappels - Résolution graphique



Rappels - Résolution graphique

- S'utilise pour résoudre un problème à 2 variables (ou 3)
- Techniquement applicable à 4+
- Chaque axe représente une variable
- Chaque droite représente une contrainte
- Les contraintes délimitent la zone de solution
- La solution optimale, si elle existe, est un des sommets du polygone

Rappels - Résolution graphique

- $x1 + 2x2 \leq 12$
- $x + 2y = 12$
- $2y = 12 - x$
- $y = 12 - 0.5x$

- Si on a un $\leq$ alors les solutions sont sous la droite
- Si $\geq$ au-dessus

Rappels - Résolution graphique

- c1 : y = 12 - 0.5x
- c2 : y = 5 + x

- 12 - x = 5 + x
- 12 - 5 = x + x
- 7 = 2x
- x = 3.5
- y = 12 - x
- y = 12 - 3.5
- y = 8.5
- (3.5, 8.5)

2. Simplexe

Simplexe

- algorithme de résolution des problèmes d'optimisation linéaire
- se découpe en 3 étapes :
- la mise en forme standard
- l'initialisation
- la progression

Forme standard

Les inégalités deviennent des égalités par ajout de variables d'écart :

$$\max_{(x_1,x_2)} [F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2] .$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

forme canonique

$$\max F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e3 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

forme standard

Variables d'écarts

- si l'équation est $\leq$: on ajoute $+e_i$
- si l'équation est $\geq$: on retranche $-e_i$
- les variables d'écarts sont positives ou nulles

Initialisation

- Trouve une solution de base réalisable
- ou bien détecte l'impossibilité

- On exprime les variables de base (les variables d'écart) en fonction des variables hors base
- Une solution de base réalisable est obtenue en annulant les variables hors base

Progression

- On passe d'un sommet à un sommet voisin
- Tout en augmentant la valeur de la fonction objectif
- Ou on détecte une fonction objectif non majorée

- On exprime la nouvelle variable de base en fonction des variables hors base

Variables entrantes

- La variable ayant le plus grand coefficient positif
- Si toutes les variables sont ≤ 0 alors on ne peut plus augmenter, on a atteint la solution optimale

Variables sortantes

- Première variable qui s'annule quand on augmente la variable entrante
- La plus petite des variables, non nulle

3. Exemple

Exemple

$$\max_{(x_1,x_2)} \left[F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2\right].$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 \leq 81 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 55 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

forme canonique

$$\max F(x_1,x_2) = 6x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + e1 = 81 \\ 4x_1 + 5x_2 + e2 = 55 \\ 2x_1 + x_2 + e3 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

forme standard

Exemple

– **Dictionnaire** : On exprime les variables de base e_1, e_2, e_3 en fonction des variables hors-base x_1, x_2.

$$\boxed{\begin{array}{l} e_1 = 81 - 3x_1 - 9x_2 \\ e_2 = 55 - 4x_1 - 5x_2 \\ e_3 = 20 - 2x_1 - x_2 \\ \hline F = 6x_1 + 4x_2 \end{array}}$$

– *Solution de base réalisable initiale* :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ e_1 = 81,\ e_2 = 55,\ e_3 = 20 \text{ avec } F = 0.$$

– *Variable entrante* x_e : $\max_{>0}\{6,\ 4\} = 6 \Rightarrow \boxed{x_e = x_1}$.

– *Variable sortante* x_s : on maintient les contraintes $e_1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$, $e_3 \geq 0$

$$\Rightarrow x_1 = \min_{>0}\{\frac{81}{3}, \frac{55}{4}, \frac{20}{2}\} = 10 \Rightarrow \boxed{x_s = e_3}.$$

– *Nouvelle Solution de base réalisable* :

$$\boxed{x_1 = 10}, x_2 = 0,\ e_1 = 51,\ e_2 = 15,\ \boxed{e_3 = 0} \text{ avec } F = 60.$$

Exemple

$$\begin{array}{l} x_1 = 10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ e_1 = 81 - 3(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) - 9x_2 \\ e_2 = 55 - 4(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) - 5x_2 \\ \hline F = 6(10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3) + 4x_2 \end{array}$$

ce qui donne le dictionnaire :

$$\begin{array}{|l|} \hline x_1 = 10 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ e_1 = 51 - \frac{15}{2}x_2 + \frac{3}{2}e_3 \\ e_2 = 15 - 3x_2 + 2e_3 \\ \hline F = 60 + x_2 - 3e_3 \\ \hline \end{array}$$

Variable entrante x_e : $\max_{>0}\{\mathbf{1},\ -3\} = 1 \Rightarrow \boxed{x_e = x_2}$.

Variable sortante x_s : on maintient $x_1 \geq 0$, $e_1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$

$$\Rightarrow x_2 = \min_{>0}\{\frac{10}{1/2}, \frac{51}{15/2}, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{3}}\} = 5 \Rightarrow \boxed{x_s = e_2}.$$

Nouvelle Solution de base réalisable (étape 2) :

$$x_1 = \frac{15}{2}, \ \boxed{x_2 = 5}, e_1 = \frac{27}{2}, \ \boxed{e_2 = 0}, e_3 = 0 \text{ avec } F = 65.$$

4. Résolution

Outil en ligne

- https://www.zweigmedia.com/simplex/simplex.php?lang=en

Complexité

Méthode du simplexe : on explore seulement les sommets qui permettent d'augmenter la fonction objectif $\Rightarrow$ on réduit le nombre de solution de base à explorer.

Complexité = nombre d'itération dans le simplexe (phase2).

- On peut construire des exemples avec une complexité **exponentielle** en $\mathcal{O}(2^n)$ itérations (Klee-Minty, 1972).
- Mais dans la pratique la complexité du simplexe croît peu avec le nombre n de variables. En pratique, le nombre d'itérations est proportionnel au nombre m de contraintes (de m à $3m$ itérations).

Autres méthodes

- La méthode de l'ellipsoide
- Les méthodes affines
- Les méthodes de point intérieurs

5. lp_solve

lp_solve

- logiciel libre (sous licence LGLP) qui permet de résoudre des Mixed Integer Linear Problems (MILP
- fournit une API utilisable dans de nombreux langages

Il permet de résoudre des problèmes linéaires :

- en nombre réel
- en nombres entiers
- en 0/1
- ou mixte

lp_solve : 3 façons de l'utiliser

- exécuter le programme en donnant en argument un fichier contenant le programme linéaire
- Appeler le programme au travers de l'API (C, Java, Delphi, Python, ...) ou au travers d'un programme de calcul formel (R, MatLab)
- Utiliser l'IDE/Modeleur (disponible que sous Windows actuellement)

lp_solve : exemple .lp

- Un fermier possède deux produits pour nourrir ses bêtes
- Le produit A coûte 1,5E et donne 50g de protéine et 140g de glucide par kg
- Le produit B coûte 0,85E et donne 70g de protéine et 20g de glucide par kg
- Chaque bête requiert 255g de protéines et 220g de glucides par jour
- Quelle proportion de produits doit-il donner pour minimiser ses dépenses ?

lp_solve : exemple .lp

- min : 1.5 alim_A + 0.85 alim_B
- 50 alim_A + 70 alim_B $\geq$ 255
- 140 alim_A + 20 alim_B $\geq$ 220
- alim_A $\geq$ 0
- alim_B $\geq$ 0

lp_solve : exemple .lp

- min : 1.5 alim_A + 0.85 alim_B ;
- 50 alim_A + 70 alim_B >= 255 ;
- 140 alim_A + 20 alim_B >= 220 ;
- alim_A >= 0 ;
- alim_B >= 0 ;

lp_solve : exemple .lp

- `lp_solve fichier.lp`

```
Value of objective function: 4.14147727

Actual values of the variables:
alimA 1.17045
alimB 2.80682
```

lp_solve : API C++

```
#include <lpsolve/lp_lib.h>
```

```
lprec* lp = make_lp(nbConstraint, nbVariable);
```

lp_solve : API C++

```
// Ajout de 1 × x1 + 2 × x2 ≥ 3.
REAL row[nbVariable + 1];
row[1] = 1.0;
row[2] = 2.0;
add_constraint(lp, row, GE, 3.0);
```

```
row[1] = 1.0;
row[2] = 1.0;
set_obj_fn(lp, row);
```

lp_solve : API C++

```
if (solve(lp) == 0)
{
   cout << "Value = " << get_objective(lp) << endl;
   get_variables(lp, row);
   cout << "A=" « row[0] << " B=" << row[1] << endl;
}
```

```
g++ src.cpp -llpsolve55 -o MyExe
```

```
./MyExe
```