TD 2 = Structure Algebrique pour l'informatique.

Exercice n° 1 :

Soit $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* = \{(x ; y), x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{N}^*\}$.

$\forall (p, q) \in E \quad (p, q) R (p, q) \Leftrightarrow pq = qp$.

donc R est relfixive.

Soit $(p, q), (p', q') \in E \quad (p, q) R (p', q')$

$\Updownarrow$

$pq' = qp'$.

on a bien $(p', q') R (p, q) \Leftrightarrow p'q = qp'$

R est symetrique.

$(p, q) R (p'', q'')$?

$\Rightarrow pq'' = p''q$

$\begin{cases} (1)\ (p, q) R (p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q. \\ (2)\ (p', q') R (p'', q'') \Leftrightarrow p'q'' = q'p'' \end{cases}$

si $p \neq 0$.

(1) $\Leftrightarrow q' = \dfrac{qp'}{p}$ (3)

(2) et (2) $\Rightarrow p'q'' = p'' \dfrac{qp'}{p}$.

(4) et $p \neq 0$. $\Rightarrow q'' = \dfrac{p''q}{p}$.

$\Rightarrow pq'' = p''q$.

$\boxed{E/R = \mathbb{Q}}$ ⇒ (on peut representer plusieurs fraction de maniere déff:rentes.

$(2;4) \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{\cancel{4}}{2} + q\ \frac{?}{q} = \frac{?'}{q'}$)

Exercice n°2.

Une droite verticale $D \{ (x;y) \in \mathbb{Z}^2 \ .\ x = x_0 \}$.

droite d'equation $x = x_0$ note $D_{x=x_0}$.

$\ldots \cup D_{x=-2} \cup D_{x=0} \cup D_{x=1} \cup D_{x=2} \cup \ldots$

$$\bigcup_{x_0 = \mathbb{Z}} D_{x=x_0} = \mathbb{Z}^2$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ on a bien $(a,b) \in D_{x=a}$.

$$\mathbb{Z}^2 \subset \bigcup_{x \in \mathbb{Z}} D_{x=x}.$$

donc $(x,y) R (x',y')$.

$x = x'$.

2) $(x,y) R (x',y')$

$\cancel{y} = y'$.

Exercice n° 3

$Z = x + iy$.

$|Z| = |Z'|$ et $|Z''| = |Z'| = |Z|$

$[Z] = \{ Z' \in \mathbb{C} \quad |Z'| = |Z| \}$.

$[Z] = \{$ affixes de points du cercle O et de rayon $|Z| \}$.

$[0] = \{0\}$.

Exercice n° 4

$x R y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x R x \Leftrightarrow x^2 - x^2 = x - x$.

donc R est reflixive.

$x, y \in \mathbb{R} \quad x R y \Rightarrow x^2 - y$

$y R x \Leftrightarrow y^2 - x^2 = y - x$. en multipliant par (-1).

donc R est symetrique.

(1) $x R Z \Leftrightarrow x^2 - Z^2 = x - Z$

(1) et (2) $\Rightarrow x^2 + y^2 - Z^2 = x + y - Z$

$x \mathcal{R} y \iff x^2 - y^2 = x - y.$

$y \mathcal{R} z \iff y^2 - z^2 = y - z.$

donc R est transitive. $\Rightarrow$ donc R est un classe d'équivalence.

$[x] = \{ y \in \mathbb{R} \ , x^2 - y^2 = x - y \}.$

soit $y \in \mathbb{R}$. $\quad x^2 - y^2 = x - y.$

$\Updownarrow$

$(x - y \neq 0). \qquad (x-y)(x+y) = (x-y) \quad (1)$

$(1) \overset{x \neq y}{\iff} x + y = 1 \iff y = 1 - x.$

$y = x \qquad x \in [x].$

$[x] = \{ x \, ; \, 1 - x \}.$