Ahmed FADILI
Ayoub GHRISS

25 juin 2015

ÉQUATIONS DÉRIGÉES PAR UN PROCESSUS DE POISSON

1

PROCESSUS DE POISSON ET PROCESSUS DE POISSON COMPOSÉS

1.1 Processus de Poisson

T.1 On se donne $\lambda > 0$ un paramètre constant et $(\tau_n)_n$ une suite i.i.d de variables aléatoires de loi commune la loi exponentielle de paramètre λ. On construit la suite de v.a $(T_n)_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$$

Montrons que T_n suit une loi $\Gamma(n, \lambda)$

Pour cela, on montre que pour X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant, respectivement, des lois $\Gamma(\nu_1, \lambda)$ et $\Gamma(\nu_2, \lambda)$, la variable $(X_1 + X_2)$ suit une loi $\Gamma(\nu_1 + \nu_2, \lambda)$. Il est immédiat que $f_{X_1+X_2}(x) = 0$ pour tout x$\leqslant 0$, et pour tout réel $x > 0$ on a :

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_0^x t^{\nu_1 - 1}(x-t)^{\nu_2 - 1}\mathrm{d}t$$

On effectue le changement de variable $u = \frac{t}{x}$,

$$f_{X_1+X_2}(x) = \frac{x^{\nu_1-1} x^{\nu_2-1} x \mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^1 u^{\nu_1-1}(1-u)^{\nu_2-1}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{x^{\nu_1+\nu_2-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^1 u^{\nu_1-1}(1-u)^{\nu_2-1}\mathrm{d}u$$

L'intégrale est convergente par comparaison avec des intégrales de Riemann puisque $\nu_1 > 0$ et $\nu_2 > 0$. Alors, $f_{X_1+X_2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ donc est bien une densité de probabilité. On en reconnait la forme d'une densité de la loi $\Gamma(\nu_1+\nu_2,\lambda)$ donc on a nécessairement :

$$\int_0^1 u^{\nu_1-1}(1-u)^{\nu_2-1}du = \frac{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\nu_1+\nu_2)}$$

Ainsi, X_1+X_2 suit une loi $\Gamma(\nu_1+\nu_2,\lambda)$.

Il suffit ensuite de remarquer que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi $\Gamma(1,\lambda)$et que $\Gamma(n)=(n-1)!$, donc T_n suit une loi $\Gamma(n,\lambda)$ de densité :

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

T.2 Soit $t>0$, on a :

$$\mathbb{P}(N_t=n) = \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_n+\tau_{n+1})$$

T_n et τ_{n+1} étant indépendantes, on écrit :

$$\mathbb{P}(N_t=n) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{u\leqslant t\leqslant u+v}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}u^{n-1}e^{-\lambda u}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u)\lambda e^{-\lambda v}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(v)dudv$$

On effectue le changement de variable : $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Donc (p,q) est dans l'ensemble $\Delta = \{(x,y)/x \in \mathrm{R}^+ ety \geqslant x\}$

$$\mathbb{P}(N_t=n) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{p\leqslant t<q}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}p^{n-1}\lambda e^{-\lambda q}\mathbf{1}_{\Delta}(p,q)dpdq$$

On obtient

$$\mathbb{P}(N_t=n) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t p^{n-1}dp\int_t^{+\infty}\lambda e^{-\lambda q}dq = \frac{(\lambda t)^n}{(n)!}e^{-\lambda t}$$

Ainsi, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.

T.3 Soient $(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ n variables aléatoire indépendantes de loi commune la loi uniforme sur $[0,t]$ et on note par $(U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)})$ le vecteur des statistiques d'ordre associées.

On remarque d'abord que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_i \neq x_j$ pour tout $1 \leq i < j \leq n$ il existe une seule permutation $\sigma \in S_n$ telle que $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \cdots < x_{\sigma(n)}$.

On note aussi que l'ensemble $I = \{\omega / \exists i \neq j \text{ tq } U_i(\omega) = U_j(\omega)\}$ est de mesure nulle, puisque pour tout $1 \leq i < j \leq n$, $(U_i - U_j)$ est une variable à densité (U_i et U_j sont indépendantes), donc $P_{U_i-U_j}(0) = 0$ et I est alors union dénombrable d'ensemble de mesure nulle.

on peut alors introduire une variable aléatoire $\hat{\sigma}_n$ de Ω dans S_n vérifiant sur $\Omega\backslash$I :

$$\mathbf{1}_{\hat{\sigma}_n=\sigma} = \mathbf{1}_{U_{\sigma(1)}<U_{\sigma(2)}<\cdots<U_{\sigma(n)}}$$

Et on la prolonge par l'identité sur l'ensemble I, $\hat{\sigma}_n$ est égale à l'identité, et l'égalité précédente est presque sûre.

et donc on a pour toute application φ

$$\varphi(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}) = \sum_{\sigma\in S_n}\mathbf{1}_{\hat{\sigma}_n=\sigma}\varphi(U_{\sigma(1)}, \ldots, U_{\sigma(n)})$$

En passant aux espérances :

$$\mathrm{E}[\varphi(U_{(1)},\ \ldots,\ U_{(n)})] = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{E}[\mathbf{1}_{U_{\sigma(1)}<U_{\sigma(2)}<\cdots<U_{\sigma(n)}}\varphi(U_{\sigma(1)},\ \ldots,\ U_{\sigma(n)})]$$

Or, $U_{\sigma(i)}$ a même loi que U_i indépendamment de σ, et avec $Card(S_n) = n!$, on peut écrire :

$$\mathrm{E}[\varphi(U_{(1)},\ \ldots,\ U_{(n)})] = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1,\ \ldots,\ x_n)\mathbf{1}_{0\leq x_1<x_2<\cdots<x_n\leq t}\frac{n!}{t^n}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

Donc le vecteur $(U_{(1)}, U_{(2)},\ \ldots,\ U_{(n)})$ admet pour densité :

$$f(x_1, x_2,\ \ldots, x_n) = \frac{n!}{t^n}\mathbf{1}_{0\leq x_1<x_2<\cdots<x_n\leq t}$$

T.4 Calculons la loi de $(T_1,\ \ldots,\ T_n)$ conditionnellement à $\{N_t = n\}$: soit $(s_1,\ \ldots,\ s_n)\in\mathbb{R}_+^n$ et $A\in\mathcal{B}((\mathbb{R}^+)^n)$

$$\mathbb{P}((T_1,\ \ldots,\ T_n)\in A|N_t = n) = \frac{\mathbb{P}((T_1,\ \ldots,\ T_n)\in A, N_t = n)}{\mathbb{P}(N_t = n)}$$

$$= \frac{n!e^{\lambda t}}{(\lambda t)^n}\int_{\mathbb{R}^{+(n+1)}} \mathbf{1}_A(s_1, .., s_1+....+s_n)\mathbf{1}_(s_1+..s_n \leq t < s_1+..s_{n+1})\lambda^{n+1}e^{-\lambda(s_1+..+s_{n+1})}.ds_1ds_2....ds_{n+1}$$

On effectue le changement de variable $t_i = \sum_{j=1}^i s_j$ et on obtient alors :

$$\mathbb{P}((T_1,\ \ldots,\ T_n)\in A|N_t = n) = \frac{n!e^{\lambda t}}{(\lambda t)^n}\int_{\Delta^{n+1}} \mathbf{1}_A(t_1, ..t_n)\mathbf{1}_(t_n \leq t < t_{n+1})\lambda^{n+1}e^{-\lambda t_{n+1}}dt_1dt_2....dt_{n+1}$$

avec $\Delta^{n+1} = \{(t_1, ...t_n)\backslash 0 \leq t_1 < ... < t_n \leq t\}$ On a donc :

$$\mathbb{P}((T_1,\ \ldots,\ T_n)\in A|N_t = n) = \int_{\mathrm{R}^n} \mathbf{1}_A(t_1, ..t_n)\mathbf{1}_{(0\leq t_1<...<t_n\leq t\})}\frac{n!}{t^n}dt_1dt_2....dt_n(e^{\lambda t}\int_t^{+\infty} e^{-\lambda t_{n+1}}dt_{n+1})$$

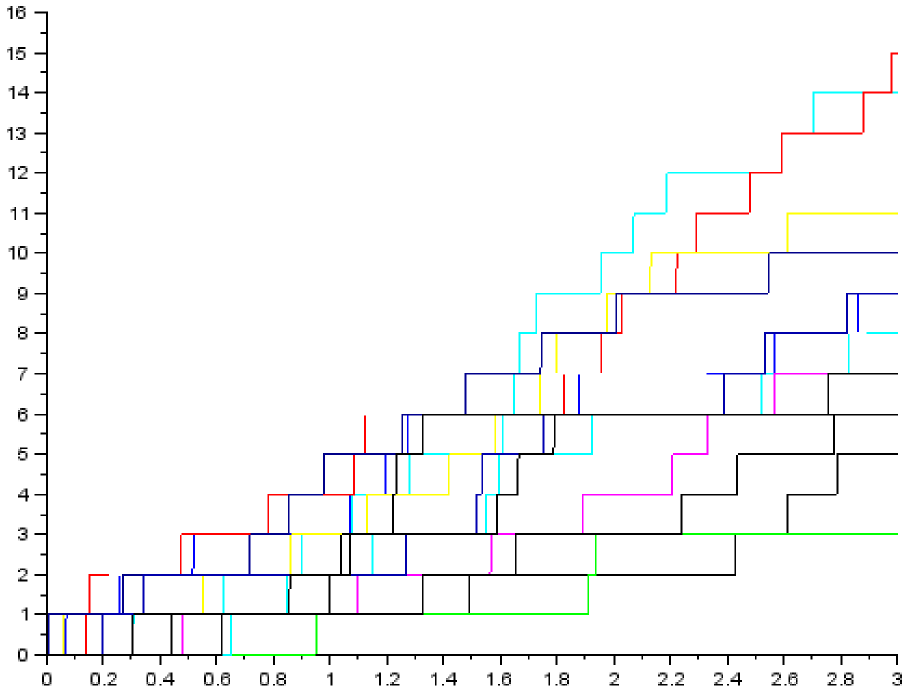
$$= \int_{\mathrm{R}^n} \mathbf{1}_A(t_1, ..t_n)\mathbf{1}_{(0\leq t_1<...<t_n\leq t\})}\frac{n!}{t^n}dt_1dt_2....dt_n$$

Ainsi, la loi conditionelle de $(T_1, ..., T_n)$ sachant $N_t = n$ est la même que celle de $(U_{(1)}, U_{(2)}....U_{(n)})$, et donc , elle est de densité :

$$f(x_1, x_2,\ \ldots, x_n) = \frac{n!}{t^n}\mathbf{1}_{0\leq x_1<x_2<\cdots<x_n\leq t}$$

S.1 Pour simuler le processus de Poisson, on implémente l'algorithme suivant en Scilab :

```
lambda=3
t=3

Nt= grand(1,1,"poi",lambda*t) // génère une valeur de Nt suivant la loi de Poisson
U=grand(Nt,1,"unf",0,t)   // génère Nt variables de loi uniforme sur [0,t]
U=gsort(U,"g","i") // vecteur de statistiques d'ordre associées

p=10000
x=linspace(0,t,p) // une partition (xi) de [0,t] de pas 1/p

for j=1 :p
    y(j)=0
    for i=1 :Nt
      if x(j)>=U(i) then   // une suite (yi) avec yi=Card{j/ xi>=Uj }
         y(j)=y(j)+1
        end
       end
end
plot2d(x,y)
```



Simulation 1 : Processus de Poisson, pour t=3 et λ=3

1.2 Introduction à l'intégrale stochastique par rapport à un processus de Poisson

T.5 $I_e(f)$ est combinaison linéaire de variables aléatoires, donc c'est une variable aléatoire.

Par linéarité de l'espérance : $E(I_e(f)) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i(E(\tilde{N}_{t_{i+1}}) - E(\tilde{N}_{t_i}))$.

D'après T.2, $\forall t \geq 0, N_t$ suit une loi de poisson de paramètre λt, donc $\tilde{N}_t$ est centrée, donc $E(I_e(f)) = 0$.

$$E(I_e(f)^2) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i^2 E((\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i})^2)$$

car les espérances des produits croisés sont nulles.

En effet si on a p et q tels que : $0 \leq p < q \leq K-1$ Alors :

$$E((\tilde{N}_{t_{p+1}} - \tilde{N}_{t_p})(\tilde{N}_{t_{q+1}} - \tilde{N}_{t_q})) = E(\tilde{N}_{t_{p+1}} - \tilde{N}_{t_p})E(\tilde{N}_{t_{q+1}} - \tilde{N}_{t_q}) = 0$$

car $\tilde{N}_{t_{p+1}} et \tilde{N}_{t_p}$ sont indépendantes de $\tilde{N}_{t_{q+1}} - \tilde{N}_{t_q}$ si $p < p+1 \leq q$

Comme $(\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i})$ est centrée :

$$\begin{aligned} E((\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i})^2) &= var(\tilde{N}_{t_{i+1}} - \tilde{N}_{t_i}) \\ &= var(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) = \lambda(t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

(car $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_{i+1} - t_i)$)

Finalement :

$$E(I_e(f)^2) = \lambda \sum_{i=0}^{K-1} a_i^2 (t_{i+1} - t_i) = \lambda \|f\|_2^2$$

T.6 $\mathcal{H}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^+, ds)$.

Soit f$\in L^2(\mathbb{R}^+, ds), et (f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{H}$ qui converge vers f, dans $L^2(\mathbb{R}^+, ds)$.
En particulier, $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^+, ds)$, donc :

$$E[(I_e(f_p) - I_e(f_q))^2] = E[(I_e(f_p - f_q)^2] = \lambda \|f_p - f_q\|_2^2$$

d'où $(I_e(f_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, qui est complet, donc elle converge. Notons $I_e(f)$ sa limite dans cet espace.
Cette limite est bien définie, car si on prend deux suites $(f_n)_{n\geq 0}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{H}$ qui convergent vers f, dans $L^2(\mathbb{R}^+, ds)$ on a :

$$E[(I_e(f_n) - I_e(g_n))^2] = E[(I_e(f_n - g_n)^2] = \lambda \|f_n - g_n\|_2^2$$

donc on vient de montrer que $I_e(f_n)$ et $I_e(g_n)$ convergent, et elles ont la même limite dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Ainsi, $I_e(f)$ est bien définie

Par continuité des normes dans les epaces de départ et d'arrivée, on a :
$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^+, ds)$ $E(I(f)^2) = \lambda \|f\|_2^2$
Cette relation implique la continuité de I_e. Et donc $I(f) = lim_{n->\infty} I_e(f_n)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ce qui suffit pour montrer l'unicité.

1.3 Résolution numérique des équations différentielles stochastiques par processus de Poisson

T.7 Si $f \in \mathcal{H}$ alors $E(I(f)) = 0$, car $\forall t \geq 0$: $\tilde{N}_t$ est centrée.
Soit f$\in L^2(\mathbb{R}^+, ds), et(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathcal{H}$ qui converge vers f, dans $L^2(\mathbb{R}^+, ds)$.

$$|E(I(f))| = |E(I(f - f_n))| \leq \sqrt{E(I(f - f_n)^2)} = \sqrt{\lambda}\|f - f_n\|_2$$

car $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilités.
D'où $lim_{n->\infty}\|f - f_n\|_2 = 0$ et donc : $E(I(f)) = 0$, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^+, ds)$.

1.3.1 • Exponentielle stochastiqe de Doléans-Dade

T.8 Pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$, l'équation s'écrit :

$$dX_t = -\lambda\sigma X_t dt$$

donc sur $[t_i; t_{i+1}]$:

$$X_t = X_{t_i} e^{-\lambda\sigma(t - t_i)} \qquad (*)$$

On en déduit que :

$$Xt_{i+1}^- = X_{t_i} e^{-\lambda\sigma(t_{i+1} - t_i)}$$

Donc :

$$Xt_{i+1} = (\sigma + 1)X_{t_i} e^{-\lambda\sigma(t_{i+1} - t_i)}$$

On obtient :

$$X_{N_t} = (\sigma + 1)^{N_t} x e^{-\lambda\sigma N_t}$$

(car $t_0 = 0$ et $X_0 = x$)
Et en réappliquant (*), on a :

$$X_t = X_{N_t} e^{-\lambda\sigma(t - N_t)}$$

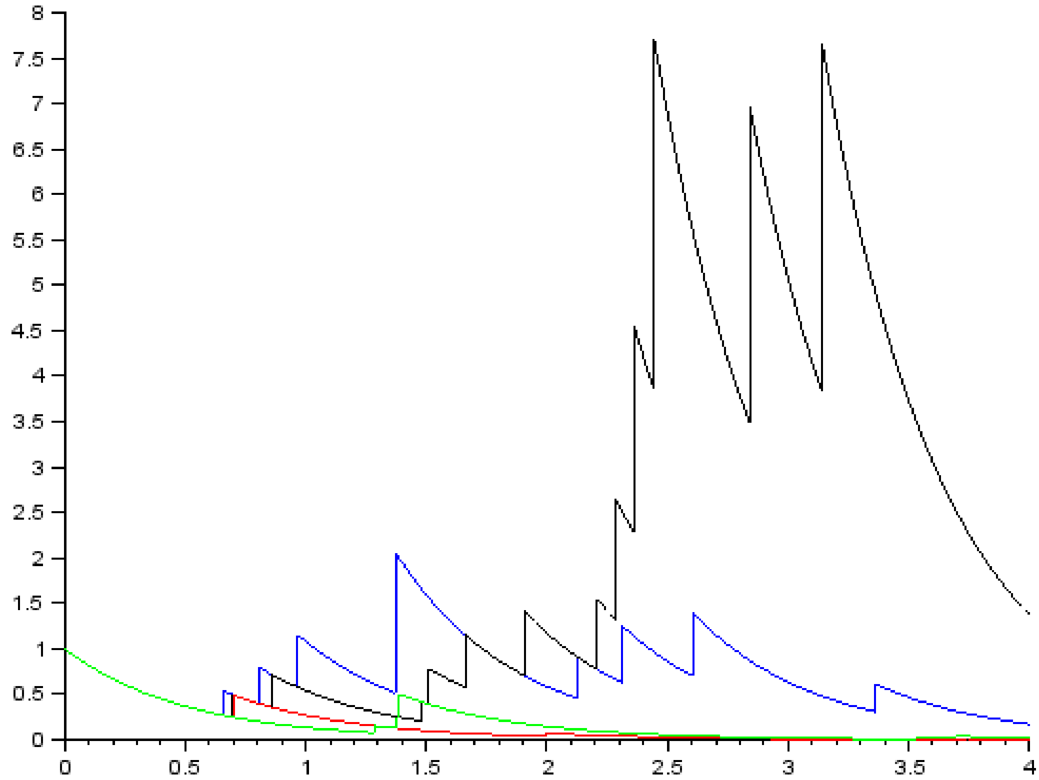
Ce qui donne :

$$X_t = (\sigma + 1)^{N_t} x e^{-\lambda\sigma t}$$

S.2

```
t=4
sigma = 1
lambda = 2
x0 = 1
Nt=grand(1,1,"poi",lambda*t)
p=10000
x=linspace(0,t,p)
U=grand(Nt,1,"unf",0,t)
U=gsort(U,"g","i")

for j=1 :p
    y(j)=0
    for i=1 :Nt
      if x(j)>=U(i) then
         y(j)=y(j)+1
      end
    end
end
```

```
for j=1 :p
       z(j)=x0*exp(-lambda*sigma*x(j))*(1+sigma)^y(j)
end
plot2d(x,z)
```



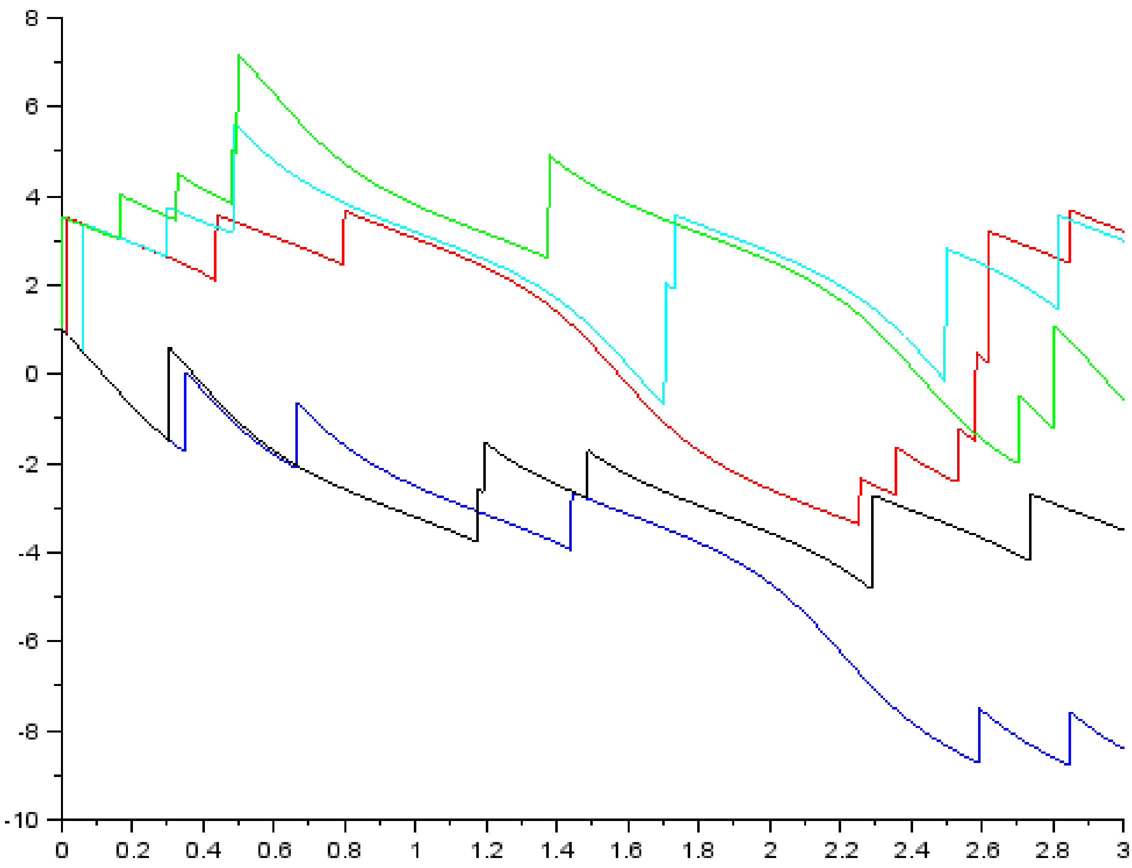
Simulation 2 : Exponentielle stochastiqe de Doléans-Dade, pour t=4 et λ=2 et $\sigma = 1$

1.3.2 • Une équation plus générale

S.3

```
t=3
lambda = 3
x0 = 1
p=1000
Nt= grand(1,1,"poi",lambda*t) // génère une valeur de Nt suivant la loi de Poisson
U=grand(Nt,1,"unf",0,t)    // génère Nt variables de loi uniforme sur [0,t]
U=gsort(U,"g","i") // vecteur de statistiques d'ordre associées

function yprim = g (t,y)
  yprim = -lambda*(2+cos(y))
endfunction

yU(1)=ode(x0,0,U(1),g) //résolution de l'ED y'=-lambda*f(y)
```

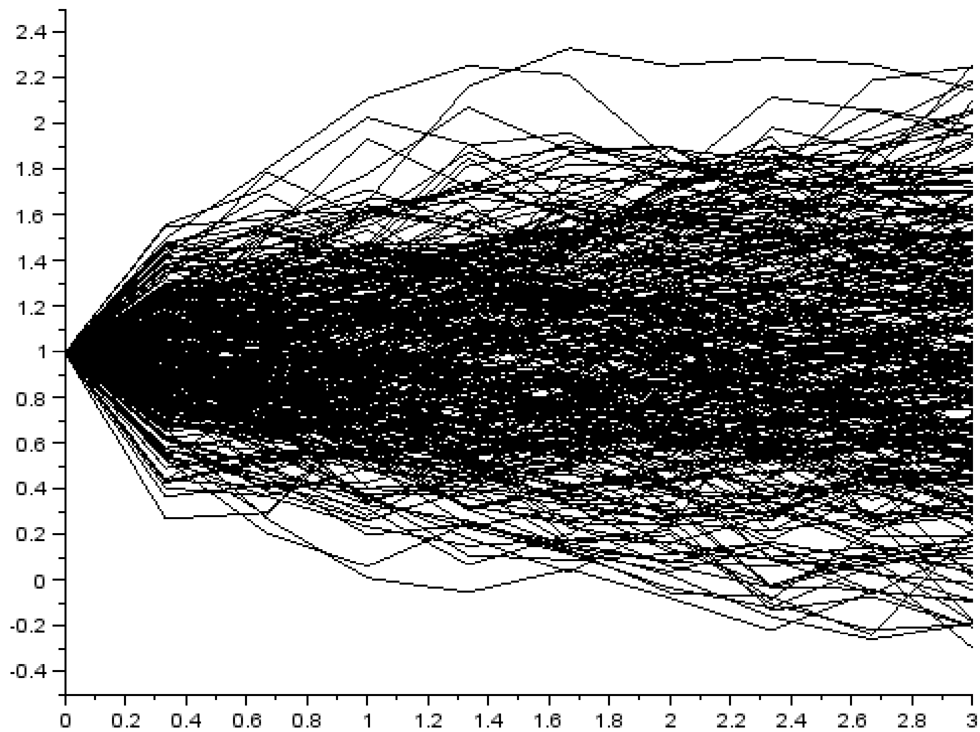
```
yU(1)=yU(1) + 2 + cos(yU(1)) // on ajoute le saut Delta(X)=2+cos(X_ti)
for j=2 :Nt
  yU(j)=ode(yU(j-1),U(j-1),U(j),g)
  yU(j)=yU(j) - g(0,yU(j)) /lambda
end

x=linspace(0,t,p)
for j=1 :p
    N(j)=0
    for i=1 :Nt
      if x(j)>=U(i) then
         N(j)=N(j)+1
        end
      end
end

for j=1 :p
  if N(j)==0 then
    z(j)=ode(x0,0,x(j),g) // si N(ti)=0, on initialise
  else
    z(j)=ode(yU(N(j)),U(N(j)),x(j),g)
  end
end
plot2d(x,z)
```



Simulation 3 : Quelques trajectoires sur $[0, 3]$ avec λ=3

S.4

```
t=3
lambda = 3
x0 = 1
p=40
Nb=10000
for j=1 :p
  z(j)=0
end

function yprim = g (t,y)
    yprim = -lambda*(2+cos(y))
endfunction
for i=1 :Nb
  Nt=grand(1,1,"poi",lambda*t)
  U=grand(Nt,1,"unf",0,t)
  U=gsort(U,"g","i")

  yU(1)=ode(x0,0,U(1),g)
  yU(1)=yU(1) + 2 + cos(yU(1))
  for j=2 :Nt
    yU(j)=ode(yU(j-1),U(j-1),U(j),g)
    yU(j)=yU(j) - g(0,yU(j)) /lambda
  end

  x=linspace(0,t,p)
  for j=1 :p
    N(j)=0
    for i=1 :Nt
      if x(j)>=U(i) then
          N(j)=N(j)+1
       end
     end
  end

  for j=1 :p
    if N(j)==0 then
      z(j)=z(j)+ode(x0,0,x(j),g)
    else
      z(j)=z(j)+ode(yU(N(j)),U(N(j)),x(j),g)
    end
  end
end
for j=1 :p
  z(j)=z(j) / Nb
end

disp(z)
```



Simulation 4 : Estimation de $E[X_t]$ sur $[0,3]$ avec λ=3 et un pas $\delta = \frac{t}{40}$

À t=0, on a $X_t = X_0 = 1$, les espérance estimées restent proches de 1 (dans l'intervalle [0.8 ; 1.2]). Or, en prenant la moyenne des valeurs estimées de $E[X_t]$ on remarque qu'elle est proche de 1. Intuitivement, on constate sur le graphique une "pseudo symétrie" par rapport à y=1. Numériquement, le tableau ci-dessous donne la moyenne de 10000 estimations, avec une partition de $[0,t]$ de pas $\delta = \frac{t}{40}$.

0	1	t_{10}	0.9984299	t_{20}	0.9637553	t_{31}	0.9833788
t_1	1.0057748	t_{11}	0.9977193	t_{21}	0.9634537	t_{32}	0.9901677
t_2	0.9974612	t_{12}	0.9969266	t_{22}	0.9579523	t_{33}	0.9899232
t_3	0.9970282	t_{13}	0.9930572	t_{23}	0.9537586	t_{34}	0.9813223
t_4	1.0064085	t_{14}	0.9899419	t_{25}	0.9579033	t_{35}	0.9870088
t_5	1.0084435	t_{15}	0.9843816	t_{26}	0.9558332	t_{36}	0.9866260
t_6	0.9981050	t_{16}	0.9728425	t_{27}	0.9769591	t_{37}	0.9881150
t_7	1.0060524	t_{17}	0.9673937	t_{28}	0.9687480	t_{38}	0.9864178
t_8	1.004212	t_{18}	0.9646382	t_{29}	0.9750980	t	0.9741230
t_9	0.9889190	t_{19}	0.9728140	t_{30}	0.9822195		