T.1 On se donne $\lambda > 0$ un paramètre constant et $(\tau_n)_n$ une suite i.i.d de variables aléatoires de loi commune la loi exponentielle de paramètre λ. On construit la suite de v.a $(T_n)_n$ définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$$

Montrons que T_n suit une loi Gamma $\Gamma(n, \lambda)$

Pour cela, on montre que pour X_1, X_2 deux variables aléatoires i.i.d suivant, respectivement, des lois Gamma $\Gamma(\nu_1, \lambda)$ et $\Gamma(\nu_2, \lambda)$, la variable $(X_1 + X_2)$ suit une loi Gamma $\Gamma(\nu_1 + \nu_2, \lambda)$. Il est immédiat que $f_{X_1+X_2}(x) = 0$ pour tout x$\leqslant 0$, et pour tout réel $x > 0$ on a :

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t)\mathrm{dt} = \frac{1}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \mathrm{e}^{-\lambda x} \int_0^x t^{\nu_1 - 1}(x-t)^{\nu_2 - 1}\mathrm{dt}$$

On effectue un chagement de variable $u = \frac{t}{x}$,

$$\begin{aligned} f_{X_1+X_2}(x) &= \frac{x^{\nu_1-1}x^{\nu_2-1}x\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^1 u^{\nu_1-1}(1-u)^{\nu_2-1}\mathrm{du} \\ &= \frac{x^{\nu_1+\nu_1-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)} \int_0^1 u^{\nu_1-1}(1-u)^{\nu_2-1}\mathrm{du} \end{aligned}$$

L'intégrale est convergente par comparaison avec des intégrales de Riemann puisque $\nu_1 > 0$ et $\nu_2 > 0$. Alors, $f_{X_1+X_2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ donc est bien une densité de probabilité. On en reconnait la forme d'une densité de la loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$ donc on a nécessairement que :

$$\int_0^1 u^{\nu_1-1}(1-u)^{\nu_2-1}du = \frac{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)}{\Gamma(\nu_1+\nu_2)}$$

Ainsi, $X_1 + X_2$ suit une loi Gamma $\Gamma(\nu_1 + \nu_2)$. Il suffit ensuite de remarquer que la loi exponentielle de paramètre λ est une loi Gamma $\Gamma(1, \lambda)$et que $\Gamma(n) = (n-1)!$, donc T_n suit une loi Gamma $\Gamma(n, \lambda)$ de densité :

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

T.2 Soit $t > 0$, on :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(T_n \leqslant t < T_n + \tau_{n+1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{u \leqslant t \leqslant u+v} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u) \lambda e^{-\lambda v} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(v) du dv \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable : $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Donc (p,q) est dans l'ensemble $\Delta = \{(x, y)/x \in \mathrm{R}^+ et y \geqslant x\}$

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{p \leqslant t < q} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} p^{n-1} \lambda e^{-\lambda q} \mathbf{1}_{\Delta}(p, q) dp dq$$

On obtient

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t p^{n-1} dp \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda q} dq = \frac{(\lambda t)^n}{(n)!} e^{-\lambda t}$$

Donc N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.

T.3

Soient $(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ n variables aléatoire indépendantes de loi commune la loi uniforme sur $[0, t]$ on note par $(U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)})$ le vecteur des statistiques d'ordre associées.

$$f_{(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})}(x_1, \ldots, x_n) = n! f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) \mathrm{I}_{x_1 < x_2 < \cdots < x_n}.$$

On remarque d'abord que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_i \neq x_j$ pour tout $1 \leq i < j < n$ il existe une seule permutation $\sigma \in S_n$ telle que $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < \cdots < x_{\sigma(n)}$ et peut alors introduire une variable aléatoire $\hat{\sigma}_n$ de (Ω, A, P) dans S_n qui vrifie ω de Ω

$$\mathbf{1}_{\hat{\sigma}_n = \sigma} = \mathbf{1}_{U_{\sigma(1)} \leq U_{\sigma(2)} < \cdots \leq U_{\sigma(n)}}$$

et donc on a pour toute application φ

$$\varphi(U_{(1)},\ \dots,\ U_{(n)}) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathbf{1}_{\hat{\sigma}_n=\sigma}\varphi(U_{\sigma(1)},\ \dots,\ U_{\sigma(n)})$$

Maintenant

$$\mathrm{E}[\varphi(U_{(1)},\ \dots,\ U_{(n)})] = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{E}[\mathbf{1}_{\hat{\sigma}_n=\sigma}\varphi(U_{\sigma(1)},\ \dots,\ U_{\sigma(n)})]$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_{(1)},\ \dots,\ x_{(n)})\mathbf{1}_{0\leq x_{\sigma(1)}<x_{\sigma(2)}<\cdots<x_{\sigma(n)}\leq t}\frac{1}{t^n}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

mais sur l'ensemble $\{x_{\sigma(1)}<\cdots<x_{\sigma(n)}\}$ on a que exactement $x(i)=x_{\sigma(i)}$ pour tout $i=1,\dots,n$:

$$\mathrm{E}[\varphi(U_{(1)},\ \dots,\ U_{(n)})] = \sum_{\sigma\in S_n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_{\sigma(1)},\ \dots,\ x_{\sigma(n)})\mathbf{1}_{0\leq x_{\sigma(1)}<x_{\sigma(2)}<\cdots<x_{\sigma(n)}\leq t}\frac{1}{t^n}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1,\ \dots,\ x_n)\mathbf{1}_{0\leq x_1<x_2<\cdots<x_n\leq t}\frac{1}{t^n}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x_1,\ \dots,\ x_n)\mathbf{1}_{0\leq x_1<x_2<\cdots<x_n\leq t}\frac{n!}{t^n}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

Donc le vecteur $(U_{(1)},U_{(2)},\ \dots,\ U_{(n)})$ admet pour densit $f(x_1,x_2,\ \dots,x_n)=\frac{n!}{t^n}\mathbf{1}_{0\leq x_1<x_2<\cdots<x_n\leq t}$

T.4 Calculons la loi de $(T_1,\ \dots,\ T_n)$ conditionnellement à $\{N_t=n\}$: soit $(s_1,\ \dots,\ s_n)\in\mathbb{R}_+^n$

$$\mathbb{P}((T_1,\ \dots,\ T_n)\in A|N_t=n) = \frac{\mathbb{P}((T_1,\ \dots,\ T_n)\in A, N_t=n)}{\mathbb{P}(N_t=n)}$$

$$= \frac{n!e^{\lambda t}}{(\lambda t)^n}\int_{\mathbb{R}^{+(n+1)}} \mathbf{1}_A(s_1,..,s_1+....+s_n)\mathbf{1}_(s_1+..s_n\leq t<s_1+..s_{n+1})\lambda^{n+1}e^{-\lambda(s_1+..+s_{n+1})}ds_1ds_2....ds_{n+1}$$

On effectue le changement de variable $t_i=\sum_1^i s_i$ et on obtient alors:

$$\mathbb{P}((T_1,\ \dots,\ T_n)\in A|N_t=n) = \frac{n!e^{\lambda t}}{(\lambda t)^n}\int_{\Delta^{n+1}} \mathbf{1}_A(t_1,..t_n)\mathbf{1}_(t_n\leq t<t_{n+1})\lambda^{n+1}e^{-\lambda t_{n+1}}dt_1dt_2....dt_{n+1}$$

avec $\Delta^{n+1}=\{(t_1,...t_n)\backslash 0\leq t_1<...<t_n\leq t\}$ On a donc

$$\mathbb{P}((T_1,\ \dots,\ T_n)\in A|N_t=n) = \int_{\mathrm{R}^n} \mathbf{1}_A(t_1,..t_n)\mathbf{1}_{(0\leq t_1<...<t_n\leq t\})}\frac{n!}{t^n}dt_1dt_2....dt_n(e^{\lambda t}\int_t^{+\infty} e^{-\lambda t_{n+1}}dt_{n+1})$$

$$= \int_{\mathrm{R}^n} \mathbf{1}_A(t_1,..t_n)\mathbf{1}_{(0\leq t_1<...<t_n\leq t\})}\frac{n!}{t^n}dt_1dt_2....dt_n$$

Ainsi, la loi conditionelle de $(T_1,...,T_n)$ sachant $N_t=n$ est la même que celle de $(U_{(1)},U_{(2)}....U_{(n)})$, de densité : $f(x_1,x_2,\ \dots,x_n)=\frac{n!}{t^n}\mathbf{1}_{0\leq x_1<x_2<\cdots<x_n\leq t}$

S.1 On implmente l'algorithme suivant en Scilab:

```
function Poisson2(t,l)
Tn=0
Nt=0
v=[0]
while Tn<= t
x=grand(1,"exp",1/l)
Tn=Tn+x
v=[v,Tn]
Nt=Nt+1
end
clf
plot2d2(v,[0:Nt],5,rect=[0,0,max(v)+1,Nt+1])
xtitle('Simulation de processus de Poisson, pour ' +string(t)+'. lambda ='+string(l))
```

```
endfunction

lambda=3
t=3

Nt= grand(1,1,"poi",lambda*t)
U=grand(Nt,1,"unf",0,t)
U=gsort(U,"g","i")


p=10000
x=linspace(0,t,p)

for j=1:p
    y(j)=0
    for i=1:Nt
      if x(j)>=U(i) then
         y(j)=y(j)+1
       end
     end
end

plot2d(x,y)
```