Esercizi aggiuntivi

venerdì 22 settembre 2023 10:06

① Si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + 1$.

Si determinino i punti di estremo vincolato di f su G, dove

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\}$$

Soluzione
- $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ punto di minimo globale
- $\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ punti di massimo globale

② Sia $f(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ x+y \end{pmatrix}$ e $g(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{u}{v} \\ u-v \end{pmatrix}$

Si consideri $h = g \circ f$, cioè $h(x,y) = g(f(x,y))$.

Determinare la matrice Jacobiana di h, $D_h(x,y)$, utilizzando il teorema del calcolo differenziale per funzioni composte.

Soluzione

$$D_h(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{y^2}{(x+y)^2} & \frac{x^2}{(x+y)^2} \\ y-1 & x-1 \end{bmatrix}$$

③ Calcolare

$$\iint xy \, dxdy,$$

(3) Calcolare

$$\iint_{\Omega} xy \quad dx\,dy ,$$

dove $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \ , \ x \geq 0 , \ y \geq 0 \}$

<u>Soluzione</u> (Hint: considerare passaggio alle coordinate polari)

$$\iint_{\Omega} xy \, dx\,dy = \frac{15}{8}$$

(4) Calcolare

$$\iint_{\Omega} xy \quad dx\,dy ,$$

dove $\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \}$

<u>Soluzione</u>

$$\iint_{\Omega} xy \, dx\,dy = \frac{1}{12}$$

(5) Sia $f(x,y) = x^{\frac{3}{2}} + (xy)^{\frac{3}{2}} \quad , \quad x>0 , \ y>0 .$

Stabilire in quali punti (x,y) la funzione f è differenziabile, in quali punti non è differenziabile e in quali non possiamo stabilirlo con i criteri visti.

<u>Soluzione</u>

Soluzione

f è differenziabile in ogni punto $x>0, y>0$.