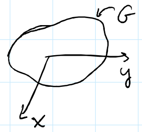
(4) <u>Estremi vincolati</u> , $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



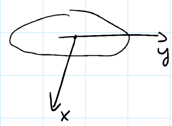
Vogliamo cercare i punti di estremo su G,
G curva regolare.
La curva G è rappresentata $g(x,y) = 0$

<u>Esempio 1</u>

$$f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1$$

vincolo: $g(x,y) = 0$, $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 1$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + y^2 - 1 = 0$$



~

<u>Procedura</u> : metodo dei moltiplicatori di Lagrange , $f \in C^1(A)$

<u>Step 1</u> Si isolano i punti (se presenti) non regolari di $G = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$, vale a dire

$$\nabla g(x,y) = \underline{0} .$$

<u>Step 2</u> Si introduce la funzione Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$, definita come:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$$

$\boxed{\text{Prop}}$ Se (x^*, y^*) è punto di estremo vincolato per f su G, allora $\exists \lambda^* \in \mathbb{R}$ tale che
(x^*, y^*, λ^*) è punto stazionario per $\mathcal{L}$.

$\boxed{\text{Coroll}}$ Se (x^*, y^*, λ^*) non è punto stazionario per $\mathcal{L}$
$\Rightarrow (x^*, y^*)$ non è punto di estremo vincolato per f su G.

≈

(x,y,λ) è punto stazionario per $\mathcal{L}$ $\iff$ $\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \underline{0}$

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (0,0,0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \\[2ex] g(x,y) = 0 \qquad \leftarrow \text{vincolo} \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema (x^*, y^*, λ^*) si dicono punti stazionari di $\mathcal{L}$
$\Rightarrow (x^*, y^*)$ si dice <u>punto critico</u>.

Step 3 determinare la natura dei punti critici.

Teo di Weierstrass

G chiuso e limitato, f continua $\Rightarrow$ f ha massimo e minimo globale su G

Esempio 1 (cont)

(Step 1) presenza di punti non regolari di G?

$$\nabla g(x,y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 8x \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y$$

$$\nabla g(x,y) = (8x, 2y) \overset{!}{=} (0,0)$$

$$\Longleftrightarrow (0,0)$$

(Step 2) $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) =$

$$= 4x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 - \lambda 4x^2 - \lambda y^2 + \lambda$$

- $\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = (0,0,0)$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x + 2 - \lambda \cdot 8x = 0 \\ 2y - 4 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ 4x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x(1-\lambda) = -2 \\ 2y(1-\lambda) = 4 \\ 4x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\cancel{4}8x\cancel{(1-\lambda)}}{\cancel{2}y\cancel{(1-\lambda)}} = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{4}2} \\ 2y(1-\lambda) = 4 \\ 4x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} y \neq 0 \\ \lambda \neq 1 \end{cases}}$$

$$4\frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \rightarrow 4x = -\frac{1}{2}y \rightarrow y = -8x$$

$$(3^\circ) \quad 4x^2 + 64x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 68x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{68} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{68}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{17}}$$

- $x = \frac{1}{2\sqrt{17}}$, $y = -8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{17}} = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, $1-\lambda = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y} = -\frac{2}{4}\sqrt{17} = -\frac{\sqrt{17}}{2}$

$$\Rightarrow \lambda = 1 + \frac{\sqrt{17}}{2}$$

- $x = -\frac{1}{2\sqrt{17}}$, $y = +8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $1-\lambda = \frac{2}{y} = \frac{2}{4} \cdot \sqrt{17} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$$\Rightarrow \lambda = 1 - \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$\Rightarrow$ Punti critici sono: $P_1 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$, $P_2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

Step 3

$$f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right) = \dots = 2-\sqrt{17}$$

$$f(P_2) = f\left(\frac{1}{2\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = \dots = 2+\sqrt{17}$$

$\Rightarrow \begin{cases} P_2 \text{ é MASSIMO GLOBALE} \\ P_1 \text{ é MINIMO GLOBALE} \end{cases}$

Esempio 2

$$f(x,y) = 2x^2+y^2 \quad , \quad g(x,y) = x^4 - x^2 + y^2 - 5 \overset{!}{=} 0$$

(Step 1)

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 4x^3-2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \to 2x(2x^2-1)=0 \\ \to y=0 \end{array}$$

$2x(2x^2-1)=0 \to x=0$

$2x(2x^2-1)=0 \to 2x^2-1=0$, $x^2=\frac{1}{2}$

$\downarrow$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

- $(0,0) \notin G$
- $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \notin G$
- $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \notin G$

(Step 2)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - \lambda\cdot(4x^3-2x) = 0 \\ 2y - \lambda\cdot(2y) = 0 \\ x^4-x^2+y^2-5 = 0 \end{cases}$$

$2y - \lambda\cdot(2y) = 0 \longrightarrow 2y(1-\lambda) = 0$

① $\boxed{y=0}$ ② $\boxed{\lambda = 1}$

① $y=0$, (3°) $x^4-x^2-5=0$

$$z=x^2 \quad , \quad z^2-z-5=0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}$$

$\Rightarrow$ Punti critici, $P_1 = \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}, 0\right)$

$P_2 = \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}, 0\right)$

② $\lambda=1$, (1°) $4x-4x^3+2x=0 \Rightarrow -4x^3+6x=0$

$-2x(2x^2-3)=0$

$x=0$ $\qquad$ $2x^2-3=0$

$$-2x(2x^2-3)=0$$

$$x=0 \qquad 2x^2-3=0$$

$$x^2=\frac{3}{2}\,, \quad x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

- (3°) $x=0$, $y^2=5 \Rightarrow y=\pm\sqrt{5} \rightarrow P_3=(0,\sqrt{5})$

  $\rightarrow P_4=(0,-\sqrt{5})$

- $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$

  (3°) $\frac{9}{4}-\frac{3}{2}+y^2-5=0 \Rightarrow y^2=\frac{17}{4} \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$

  $\rightarrow P_5=\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$, $P_6=\left(\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$

- $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y=\pm\frac{\sqrt{17}}{2} \longrightarrow P_7=\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$, $P_8=\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$

Step 3

$f(P_1)=f(P_2)=1+\sqrt{21}\sim 5{,}58$ non sappiamo.

$f(P_3)=f(P_4)=5 \leftarrow$ MINIMI P_3, P_4 MINIMI GLOBALI

$f(P_5)=f(P_6)=f(P_7)=f(P_8)=7{,}25$, P_5, P_6, P_7, P_8 MASSIMI GLOBALI