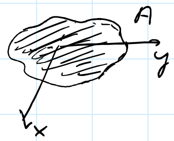
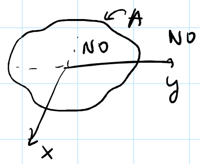
② **Estremi** $\quad f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \quad f \in C^2(A)$

a) estremi liberi. Punti di estremo su A, A insieme aperto



b) estremi vincolati. Punti di estremo su A, A non è aperto



Def $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x}_0 \in A$. Diciamo che:

- $\underline{x}_0$ è punto di massimo (risp. minimo) GLOBALE per f in A (e $f(\underline{x}_0)$ il valore massimo (risp. minimo) globale) se

$$\forall \underline{x} \in A, \quad f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0) \quad \left(\text{risp. } f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)\right)$$

- $\underline{x}_0$ è punto di massimo (risp. minimo) LOCALE per f in A se

$\exists$ intorno $U_{\underline{x}_0}$ di $\underline{x}_0$ tale che

$$\forall \underline{x} \in U_{\underline{x}_0}, \quad f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0) \quad \left(\text{risp. } f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)\right)$$

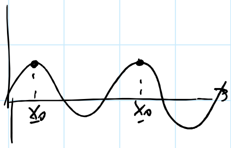
Osservazioni

① Teo di Weierstrass

se A è chiuso e limitato $\Longrightarrow$ f ha sia massimo sia minimo globali

② Punto di massimo (risp. minimo) globale è anche punto di massimo (risp. minimo) locale.

③ Non è detto che ci sia un unico estremo globale.



Esempio 1 $A = \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^n$) (insieme aperto $\Rightarrow$ estremi liberi)

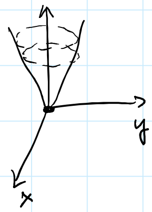
① $f(\underline{x}) = |\underline{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Si osservi che $f(\underline{x}) \geq 0$

Per ogni punto $\underline{x} \neq \underline{0}$, $f(\underline{x}) = |\underline{x}| > 0$

Invece per $\underline{x} = \underline{0}$, $f(\underline{x}) = f(\underline{0}) = 0$

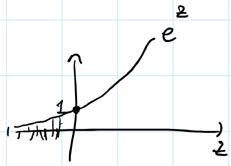
$\Rightarrow \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\underline{x}) \geq f(\underline{0})$ $\Rightarrow$ $\underline{x} = \underline{0}$ è punto di minimo globale



$n = 2$

② $A = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2(e^{-y^2} - 1)$

- $x^2 \geq 0$ $(\forall x)$, $e^{-y^2} - 1 \leq 0$ $(\forall y)$

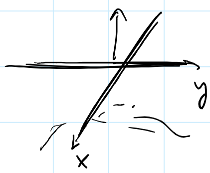


↗ z negativo

$\Rightarrow \boxed{f(x,y) \leq 0 \quad , \forall x,y}$

- se $x = 0$ (e qualunque y) $\Rightarrow$ $f(0,y) = 0$
$\Rightarrow (0,y)$ sono punti di massimo globali

- se $y = 0$ (e qualunque x) $\Rightarrow$ $f(x,0) = 0$
$\Rightarrow (x,0)$ sono punti di massimo globali



Procedura per l'individuazione di punti di estremo liberi ($f \in C^2(A)$)

Procedura per l'individuazione di punti di estremo liberi $\quad (f \in C^2(A))$

Step 1 [Individuare i punti candidati ad essere estremi liberi]

Teo di Fermat

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\underline{x_0} \in A$, $\underline{x_0}$ punto di massimo o minimo locale di f

$$\Longrightarrow \nabla f(\underline{x_0}) = \underline{0}$$

I punti candidati ad essere estremi di f in A sono tutti e soli quelli con

$$\boxed{\nabla f(\underline{x_0}) = 0}$$

- $\underline{x_0}$ tale che $\nabla f(\underline{x_0}) = 0$ sono detti <u>punti stazionari</u>

Esempio 3 Consideriamo

$f(x,y) = x^2 y + x^2 - 2y$. Determinare i punti stazionari.

> $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 2x$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - 2$

$$\Longrightarrow \nabla f(x,y) = (2xy + 2x, \; x^2 - 2)$$

$$\Longrightarrow \nabla f(\underline{x}) = \underline{0}$$

$$\begin{cases} 2xy + 2x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$\to x = \pm\sqrt{2}$

$\to \cancel{2}xy = -\cancel{2}x$, $x \neq 0$

$\quad \hookrightarrow y = -1$

$\Rightarrow$ Punti stazionari: $P_1 = (+\sqrt{2}, -1)$, $\quad P_2 = (-\sqrt{2}, -1)$

Step 2 [Studiare la natura dei punti stazionari] $(n=2)$ $\quad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$

Teo $f \in C^2(A)$, $\underline{x_0} = (x_0, y_0)$ punto stazionario per f, allora:

(a) se $\det H_f(x_0,y_0) > 0$ e

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \Longrightarrow (x_0, y_0)$ <u>MINIMO locale</u>

(a) se $\det H_f(x_0,y_0) > 0$ e

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ MINIMO locale
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ MASSIMO locale

(b) se $\det H_f(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ è una sella

(c) se $\det H_f(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow$ non si conclude nulla.

Esempio 3 - cont.

> $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y+2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2y+2 & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$$

- $P_1 = (\sqrt{2}, -1)$, $H_f(\sqrt{2},-1) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\det C = a \cdot d - b \cdot c$

$\det H_f(\sqrt{2},-1) = 0 - 4 \cdot 2 = -8 < 0$

$\Rightarrow P_1$ è una sella.

- $P_2 = (-\sqrt{2}, -1)$

$$H_f(-\sqrt{2},-1) = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$\det H_f(-\sqrt{2},-1) = -8 < 0 \Rightarrow P_2$ è una sella.

Esempio 4

$f(x,y) = x + \frac{1}{6}x^6 + y^4 - y^2$. Trovare estremi liberi.

Step 1

> $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + x^5$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 2y$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(1+x^5,\ 4y^3-2y\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+x^5 = 0 \\ 4y^3-2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1 \\ 2y(2y^2-1) = 0 \end{cases}$$

$y = 0$

$2y^2-1=0$

$y^2 = \frac{1}{2} \rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Punti stazionari: $P_1 = (-1,0)$

$P_2 = \left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P_3 = \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

<u>Step 2</u>

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 5x^4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2-2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 5x^4 & 0 \\ 0 & 12y^2-2 \end{bmatrix}$$

- $P_1 = (-1,0)$,

$$H_f(-1,0) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\det H_f(-1,0) = -10 < 0 \Rightarrow P_1$ è <u>sella</u>

- $P_2 = \left(-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$$H_f\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det H_f\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 20 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5 > 0$

$\Rightarrow P_2$ MINIMO (locale)

- $P_3 = \left(-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$$H_f\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det H_f\left(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 20 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\quad}\left(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5 > 0$

$$\det H_f\left(-1, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 20 > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1, -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5 > 0$$

$$\Rightarrow P_3 \text{ MINIMO (locale)}$$

$\boxed{\text{Teo}}$ (per n generico) $f \in C^2(A)$, $\underline{x}_0$ punto stazionario per f, allora:

(a) se $H_f(\underline{x}_0)$ è <u>definita positiva</u> (ha tutti gli autovalori positivi), allora $\underline{x}_0$ è punto di MINIMO (locale)

se $H_f(\underline{x}_0)$ è <u>definita negativa</u> (ha tutti gli autovalori negativi), allora $\underline{x}_0$ è punto di MASSIMO (locale)

(b) se $H_f(\underline{x}_0)$ ha almeno un autovalore positivo e un autovalore negativo (<u>indefinita</u>), allora $\underline{x}_0$ è una <u>sella</u>.

<u>Esempio 5</u>

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$$

. Trovare punti di estremo $(x \neq 0,\ y \neq 0)$

<u>Step 1</u> (punti stazionari)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2} - 1$$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{y} - \frac{8}{x^2},\ -\frac{x}{y^2} - 1\right)$$

- $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y^2 = 0 \\ \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y^2 \\ \frac{1}{y} - \frac{8}{y^4} = 0 \end{cases} \rightarrow x = -4$$

$$\hookrightarrow y^3 - 8 = 0$$

$$y^3 = 8$$

$$\Rightarrow y = 2$$

$\Rightarrow$ Punti stazionari: $P = (-4, 2)$

Step 2

$$> \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 8 \cdot \frac{2x}{x^4} = \frac{16}{x^3} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x \cdot \frac{2y}{y^4} = \frac{2x}{y^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow \quad H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{16}{x^3} & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{bmatrix}$$

- $P = (-4, 2)$

$$H_f(-4,2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det H_f(-4,2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} > 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-4,2) = -\frac{1}{4} < 0$$

$\Rightarrow$ P <u>MASSIMO</u> (locale)

---

③ Calcolo differenziale per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \neq n$ in generale

$$\underset{\underline{x} \in \mathbb{R}^n}{f(\underline{x})} = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{pmatrix} \qquad f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Def}}$ f è <u>derivabile</u> (risp. <u>differenziabile</u>) in $\underline{x}_0$ se tutte le f_i sono <u>derivabili</u> (risp. differenziabili)

$\boxed{\text{Def}}$ <u>Matrice Jacobiana</u> di f in $\underline{x}_0$

$$D_f(\underline{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \end{bmatrix}$$

$(m \times n)$

<u>Esempio 6</u>

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 3z^3 \\ x + \sin 3y + e^z \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow f_1(x,y,z) \\ \leftarrow f_2(x,y,z) \end{matrix}$$

- $f_1(x,y,z)$: $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = 4y$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = 9z^2$

- $f_2(x,y,z)$: $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = 3\cos(3y)$, $\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = e^z$

$$D_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 4y & 9z^2 \\ 1 & 3\cos(3y) & e^z \end{bmatrix} \qquad \underset{2}{\overset{\shortparallel}{m}} \times \underset{3}{\overset{\shortparallel}{n}}$$

$\boxed{\text{Prop}}$ $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\underline{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^K$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\underline{f}"] \arrow[rr, bend left, "h = g \circ f"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\underline{g}"] & \mathbb{R}^K \end{tikzcd} \qquad \underline{x_0} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{f}(\underline{x_0}) \in \mathbb{R}^m$$

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^K$

$h(\underline{x}) = g(f(\underline{x}))$

Sia $\underline{x_0} \in A$;

Se $\underline{f}$ é differenz in $\underline{x_0}$ e $\underline{g}$ é differenziab in $f(\underline{x_0})$, allora

$\underline{h} = g \circ f$ é differenz in $\underline{x_0}$. Inoltre,

$$\underset{(K \times n)}{D_{\underline{h}}(\underline{x_0})} = \underset{(K \times m)}{D_{\underline{g}}(\underline{f}(\underline{x_0}))} \cdot \underset{(m \times n)}{D_{\underline{f}}(\underline{x_0})}$$

$\boxed{\text{Esempio 7}}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x + 2y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u \cdot v \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow g_1(u,v) \\ \leftarrow g_2(u,v) \end{matrix}$ $\Rightarrow \nabla f(x,y) = (3, 2)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad (u,v) \quad (x,y)$$

$h = f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\nabla g_1(u,v) = (1, 1)$

$\nabla g_2(u,v) = (v, u)$

$$D_g(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{bmatrix}$$

Calcolare $\nabla h(u,v)$.

1°

1° modo

$$h(u,v) = f(g(u,v)) = f\left(\begin{pmatrix} u+v \\ u\cdot v \end{pmatrix}\right) = 3\cdot(u+v) + 2u\cdot v$$

$$> \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = 3 + 2v \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 3 + 2u$$

$$\Longrightarrow \nabla h(u,v) = (3+2v \, , \, 3+2u)$$

2° modo

$$\nabla h(u,v) = D_f(g(u,v)) \cdot D_g(u,v) =$$

$$f: \quad D_f(x,y) = \nabla f(x,y) = (3, 2)$$

$$g: \quad D_g(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{bmatrix}$$

$$= \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3+2v \, , & 3+2u \end{bmatrix}$$