Modelo de la identificación de *n*-celdas en un espacio discreto

Hipótesis

Sea el espacio vectorial discreto *V* de dimensión *n*, en el que un punto cualquiera viene individuado por sus coordenadas:

$$(u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n);$$

$$u_i \in \mathbb{N};$$

Sea su extensión a un nuevo espacio *J* en el que se permiten unas coordenadas "fraccionarias" del tipo ("mallado cuadrado"):

$$\left(\frac{1}{2}u'_o, \frac{1}{2}u'_1, \dots, \frac{1}{2}u'_{n-1}, \frac{1}{2}u'_n\right);$$

$$u'_i \in \mathbb{N};$$

Y $V \subset J$;

Y sea un punto cualquiera $P \in J$, cuyas coordenadas son de la forma:

$$\left(x_0 \pm \frac{1}{2}\lambda_0, x_1 \pm \frac{1}{2}\lambda_1, \dots, x_{n-1} \pm \frac{1}{2}\lambda_{n-1}, x_n \pm \frac{1}{2}\lambda_n\right);$$

$$\lambda_i \in \{0,1\}; \qquad x_i \in \mathbb{N};$$

Entonces el conjunto de coordenadas anterior dejará de identificar a *P* e identificará, según el presente modelo, a la celda *E* *r*-dimensional con:

$$r = n - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i;$$

Que cumpla que el punto *P* es su "baricentro". Más adelante se definirá la dimensión de una celda *E*.

Nótese que para el caso particular $\lambda_i = 0$, $\forall i$, $dim(E) = n$: se trata de la común identificación.

Desarrollo del modelo

Una celda *E* *r*-dimensional tiene una relación espacial con otras celdas *r*-dimensionales o con celdas de dimensión menor que se obtienen tras la modificación de uno o más λ_i de sus coordenadas.

Una celda *S* se define un subcelda de *E* si las coordenadas de *S* se pueden obtener a partir de las coordenadas de *E*, modificando sólo los parámetros λ_i. *E* "se relaciona espacialmente con (es rodeado por) sus subceldas"

Se define el número de *w*-subceldas de *E*, *s(r, w)* como el número de subceldas de *E* que son *w*-dimensionales:

$$s(r, w) = 2^{r-w}\binom{r}{w};$$

$$w < r;$$

Se da por hecho que siempre que exista *E*, existirán todas sus subceldas.

Se define el conjunto *S(E)* como el conjunto de celdas que son subceldas de *E*.

$$S(E) =< s{:}\, s\ es\ subelemento\ de\ E >$$

Sean E_1, E_2 dos celdas *r*-dimensionales cualesquiera, se define el conjunto de subceldas $S(E_1, E_2)$ como el conjunto de celdas que son subceldas a E_1, E_2.

$$S(E_1, E_2) =< s{:}\, s\ \in S(E_1), s\ \in S(E_2) >;$$

Se define la dimensión de intersección $i(E_1, E_2)$ como la dimensión de la celda de dimensión máxima del conjunto $S(E_1, E_2)$.

$$i(E_1, E_2) = \max_{s \in S(E_1, E_2)} \dim(s)\,;$$

Como todas las celdas del conjunto $S(E_1, E_2)$ son de dimensión comprendida entre *0* y *r*:

$$0 \leq i < r;$$

Se define la celda intersección $I(E_1, E_2)$ como la celda de dimensión máxima del conjunto $S(E_1, E_2)$.

$$I(E_1, E_2) = i{:}\, i \in S(E_1, E_2) \wedge \dim(I) = i(E_1, E_2);$$

Dos celdas E_1, E_2 se denominan *a*-conexas o conexas tomando adyacencia *a* si su dimensión es la misma y su dimensión de intersección es mayor o igual que *a*:

$$\dim(E_1) = \dim(E_2), i(E_1, E_2) \geq a \Leftrightarrow E_1, E_2\ se\ consideran\ a - conexas$$

$$0 \leq a < r;$$

Se define la función lógica *conexas* $c_a(E_1, E_2)$:

$$c_a(E_1, E_2)\begin{cases} false & si \quad i(E_1, E_2) < a; \\ true & si \quad i(E_1, E_2) \geq a; \end{cases}$$

Y su equivalente booleano $cB_a(E_1, E_2)$:

$$cB_a(E_1, E_2)\begin{cases} 0 & si \quad i(E_1, E_2) < a; \\ 1 & si \quad i(E_1, E_2) \geq a; \end{cases}$$

En resumen:

$$i(E_1, E_2) \geq a \Leftrightarrow c_a(E_1, E_2) \Leftrightarrow cB_a(E_1, E_2) = 1$$

Se define el conjunto de celdas conexas en potencia a una dada como el conjunto $E_P(r, a)$ de celdas que, si existiesen, se podrían considerar conexas a una celda *E* cualquiera tomando una adyacencia *a*. Esto es, el conjunto de máximo tamaño de celdas *r*-dimensionales con las que *E* se puede considerar conexa.

Se define la conectividad en potencia $e_P(r, a)$ como el número de celdas de $E_P(E, a)$, esto es, el número máximo de celdas *r*-dimensionales con los que una celda *E* cualquiera se podría considerar conexa tomando una adyacencia *a*.

$$e_P(r,a) = \sum_{i=a}^{r-1} s(r,i)\,;$$

Se define el conjunto de celdas conexas en acto $E_A(E, a)$ como el conjunto de celdas *r*-dimensionales que existen y son conexas a *E*, tomando una adyacencia *a*.

Se define la conectividad en acto $e_A(E, a)$ como el número de celdas de $E_A(E, a)$, esto es, el número de celdas *r*-dimensionales con los que *E* se conecta tomando una adyacencia *a*.

Se establece el orden natural de las coordenadas de las celdas, en el modelo propuesto, tal que unas coordenadas $(½u_0, ½u_1, \ldots, ½u_n)$ se ordenan respecto a otras $(½u_0', ½u_1', \ldots, ½u_n')$ identificadoras de una celda de la misma dimensión según el orden de $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ frente a $(u_0', u_1', \ldots, u_n')$, donde en la comparación de dos pares de coordenadas, u_i con u_i' y u_j con u_j', con $i<j$ el orden dominante será el obtenido de la comparación de u_i con u_i'.

Se define la operación *suma lineal* entre dos celdas $E_1 = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ y $E_2 = (u_0', u_1', \ldots, u_n')$, como:

$$suma_L(\alpha E_1, \beta E_2) = \alpha E_1 + \beta E_2 = (\alpha u_0 + \beta u'_0, \alpha u_1 + \beta u'_1, \ldots, \alpha u_n + \beta u'_n\,);$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N};$$

Se define la *forma estándar* como la expresión numérica de las coordenadas de una celda tal que cada parte entera de las mismas sea el menor número posible que exprese la cantidad de unidades que en forma *no estándar*:

$$\left(x_0 + \frac{1}{2}\lambda_0, x_1 + \frac{1}{2}\lambda_1, \ldots, x_{n-1} + \frac{1}{2}\lambda_{n-1}, x_n + \frac{1}{2}\lambda_n\right);$$

$$\lambda_i \in \{0,1\}; \qquad x_i \in \mathbb{N};$$

A partir de ahora se considerarán todas las celdas en *forma estándar*:

Sean E_1, E_2 dos celdas en orden natural ascendente, entonces:

$$i(E_1, E_2) = dim(E_2 - E_1) = r - \sum_{i=0}^{r} \lambda_i\,;$$

$$\forall \lambda_i \in coordenadas\ de\ E_2 - E_1;$$

Sea *C* un conjunto de celdas *r*-dimensionales $(E_0, E_1, \ldots, E_N)$ ordenadas según el orden natural en orden ascendente, entonces:

$$e_A(E,a) = \sum_{i=1}^{N} cB_a(E,E_i);$$

Nótese que, a diferencia de la conectividad en acto, la conectividad en potencia no depende de la situación de *E*, sólo de *r*.

C se denomina camino *r*-dimensional si E_0, E_N son conexas a una y sólo una celda de *C* y cada $E_i \in C$ es conexo sólo a dos celdas del mismo conjunto.

$$c_a(E_0,E_1) \wedge e_A(E_0,a) = 1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{N} c_a(E_{i-1},E_i) \wedge e_A(E_i,a) = 2 \Leftrightarrow C\ es\ un\ a - camino;$$

Un conjunto $(E_0, E_1, \dots, E_N)$ se denomina curva *r*-dimensional si cada $E_i \in (E_0, E_1, \dots, E_N)$ es conexa solamente a dos celdas del mismo conjunto.

$$c_a(E_0,E_N) \wedge e_A(E_0,a) = 2 \wedge \bigwedge_{i=1}^{N} c_a(E_{i-1},E_i) \wedge e_A(E_i,a) = 2 \ \Leftrightarrow C\ es\ un\ curva;$$

C se denomina componente conexa según *a*-adyacencia si para cada $E_i \in C$ existe al menos un $E_j \in C$ tal que E_i, E_j son conexas tomando una adyacencia *a*:

$$\bigwedge_{i=0}^{i=N} \exists E_j : E_j \in C, c_a\left(E_i,E_j\right) \Leftrightarrow \ C\ es\ componente\ a - conexa;$$

Definición de distancia

<u>Propiedades deseables de una distancia</u>

Para cualquier x, y, z:

$$d(x,x) = 0$$

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$$

<u>Candidatas según cálculo numérico</u>

A partir de ahora se considerarán dos celdas de dimensión cualquiera, y no necesariamente de la misma, $X=(x_0, x_1, \dots, x_n)$ y $Y=(y_0, y_1, \dots, y_n)$.

- Distancia Euclídea

A partir de ahora, *X* e *Y* no solamente representarán las celdas *X* e *Y*, sino los puntos de referencia elegidos en cuestión, para calcular la distancia, mediante una de las candidatas citadas en el apartado siguiente.

La opción de una distancia euclídea parece intuitiva:

$$d_E(X,Y) = |X - Y| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} (x_i - y_i)^2}$$

No obstante, habría que analizar el significado de la proporción subyacente a la distancia numérica entre dos celdas y su real distancia en el espacio *n*-dimensional. Numéricamente el factor de ½ puede no respetar las proporciones.

- Distancia Manhattan

Candidatas según los puntos de referencia

- Centros de masa

Supóngase en primer lugar que se define la distancia entre dos celdas como la distancia entre sus centros de masa. En ese caso su distancia vendrá dada por la distancia métrica elegida entre los puntos donde yacen las coordenadas de *X* e *Y*:

$$d(X,Y) = |X - Y| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} (x_i - y_i)^2}$$

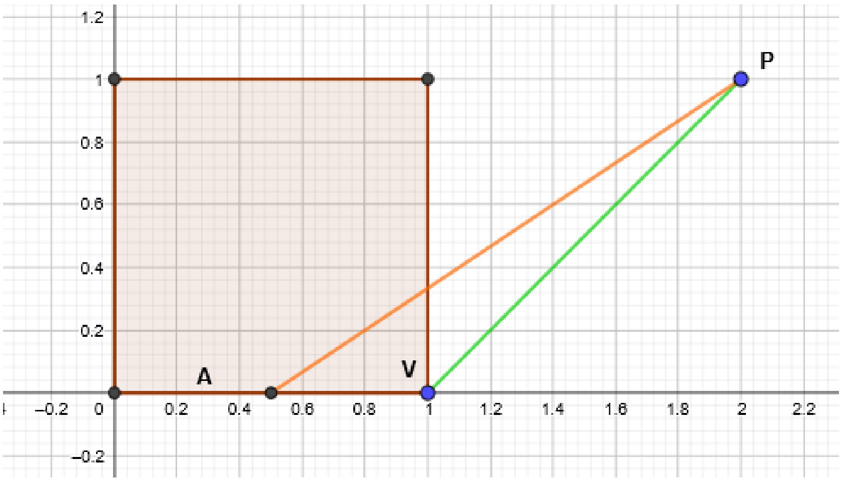
Por ejemplo, en el caso de la distancia euclídea:

$$d(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} (x_i - y_i)^2}$$

Es decir, desde un punto de vista simplemente vectorial. Véase a continuación la relación problemática que se tiene al definir la distancia entre una celda y una de sus subceldas: en primer lugar, puesto que geométricamente una subcelda "forma parte" de una celda parece obvio tener que definir su distancia como nula, es decir, redefiniendo la distancia como:

$$d(X,Y) = \begin{cases} 0 & si\ Y\ es\ subcelda\ de\ X \\ |X - Y| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} (x_i - y_i)^2} & si\ Y\ no\ es\ subcelda\ de\ X \end{cases}$$

Pero esto lleva a una relación problemática con la distancia entre dos celdas y una de ellas con una subcelda de la otra. Véase a continuación la intuición geométrica de dicho problema:



Si la distancia entre *A* y *V* es nula, entonces:

$$d(A,P) > d(A,V) + d(V,P)$$

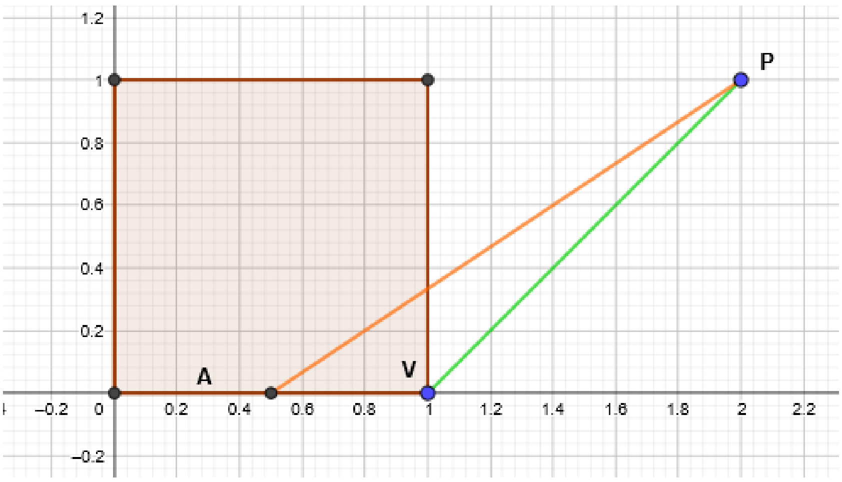
Por lo que se incumple la propiedad de la desigualdad triangular. Es natural pensar entonces en redefinir la distancia desde una celda a una de sus subceldas como distinta de cero, es decir, como la distancia entre sus centros de masa, pero eso comportaría una grave pérdida del sentido geométrico de la parte y el todo, la relación de una subcelda respecto a una celda.

- Distancia mínima

La idea de distancia mínima parece una solución al problema recién descrito. Si se define la distancia entre dos celdas tal que:

$$d(X,Y) = \min_{x \in S(X), y \in S(Y)} d(x,y)$$

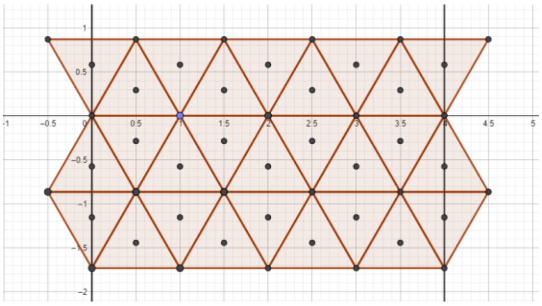
Entonces se solventa la incongruencia y parece que ahora la definición de distancia es consistente.

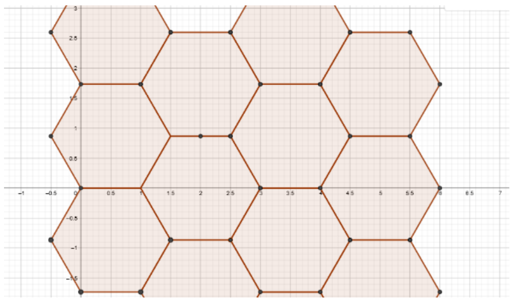


La distancia máxima no se analiza, de forma análoga a como se ha hecho con la distancia mínima, puesto que presenta claramente el mismo inconveniente que la distancia tomada entre centros de masa.

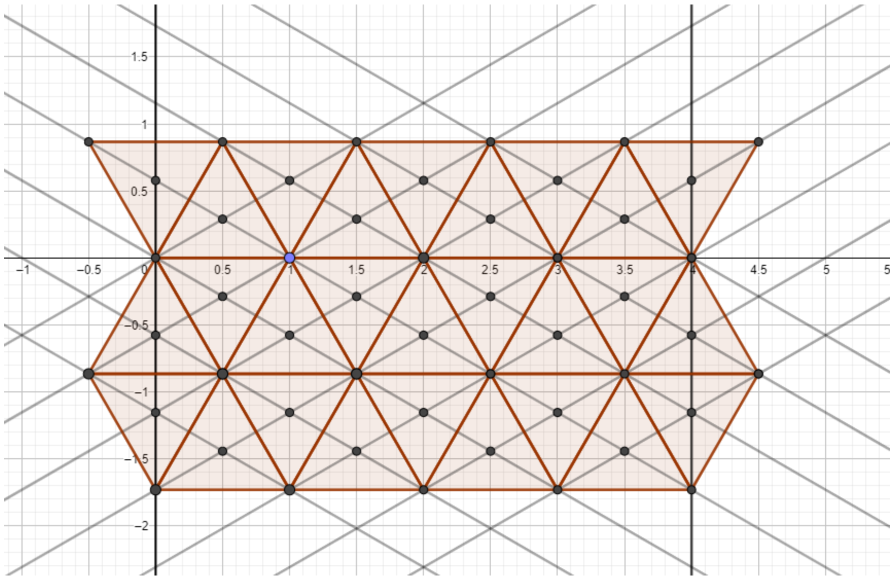
Ideas para un mallado "no cuadrado"

Una primera idea es un mallado triangular o hexagonal:

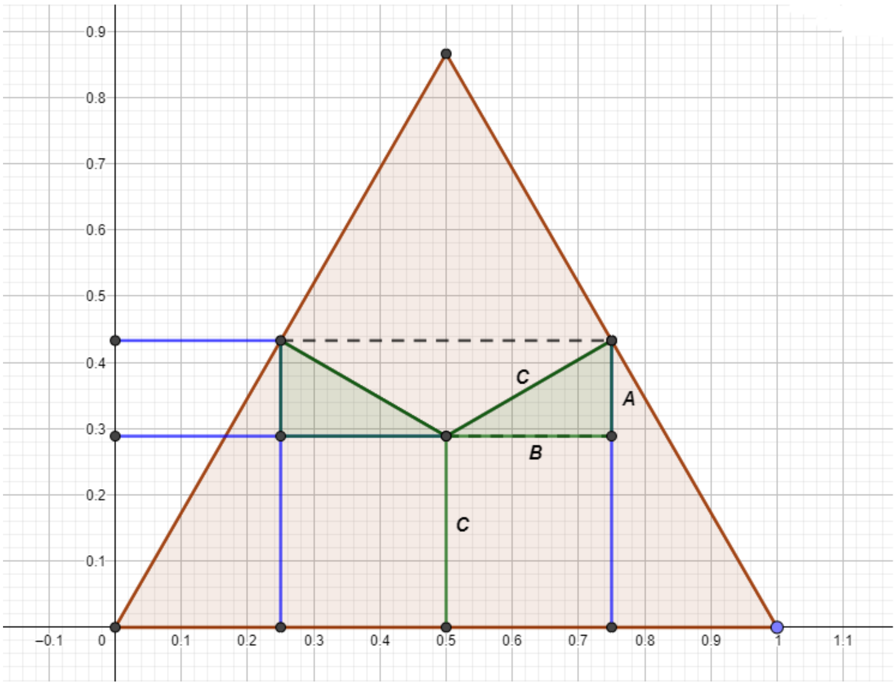




La obtención de sus subceldas del triangular se podría computar a través de sus mediatrices, por lo que se trataría de un cómputo equivalente al del mallado cuadrado:

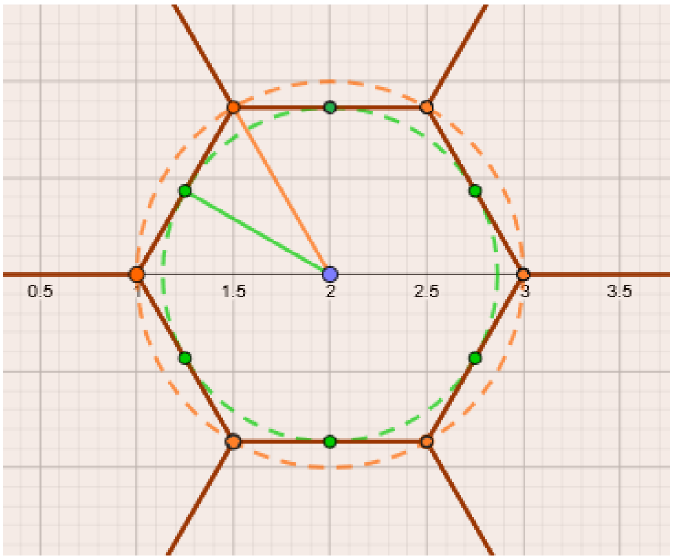


O, también, si se quieren mantener los ejes originales, entonces se pueden establecer tres posibles tuplas de *k* valores a sumar a *k* de sus coordenadas, que cumplen que la norma del "segmento" resultado de los dos valores de la tupla es igual. Intuitivamente:

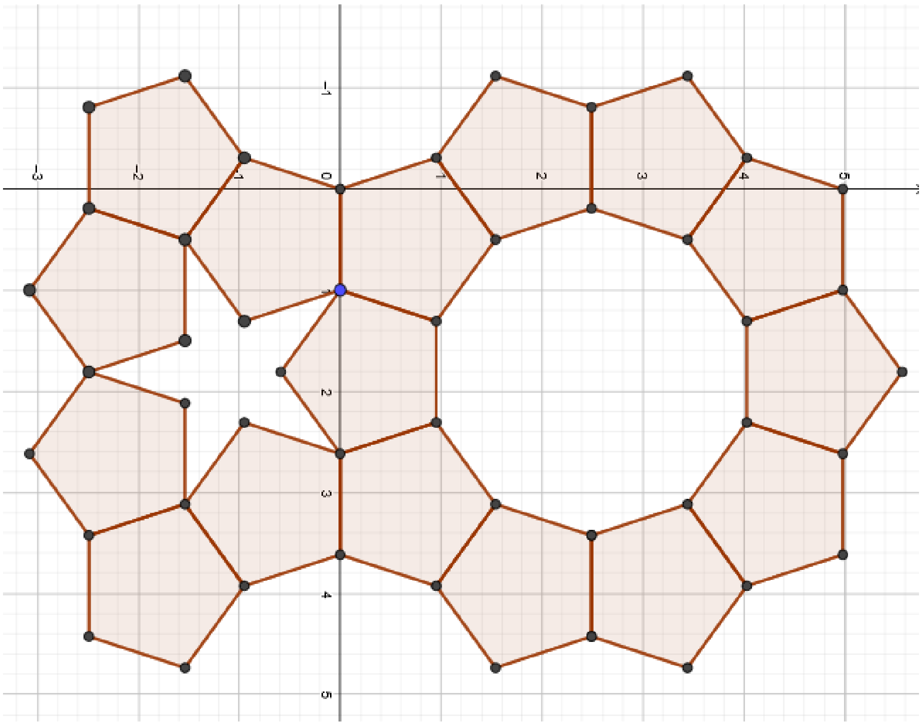


Parece, además, que siempre que se escoja un mallado formado por polígonos regulares se podrá llevar a cabo un razonamiento parecido, puesto que todos los *w*-subceldas están a una distancia del baricentro de la celda *r*-dimensional que depende solamente de *w* y *r*, no de la subcelda en particular que se quiera computar. Se podrán establecer *el número de lados del polígono* de tuplas de *k* valores a sumar a *k* coordenadas de la celda en cuestión.

Por ejemplo, para un mallado hexagonal, se podrían establecer seis tuplas:



Sin embargo, no todos los polígonos regulares son válidos para crear un mallado:



Preguntas

- ¿Cómo extender la palabra "baricentro" a la dimensión n-ésima? ¿Cómo podría definirse la relación espacial de una celda con sus subceldas? (aristas y vértices de un cubo respecto al cubo, por ejemplo)
- Mi concepto de *conexo* no tiene en cuenta la orientación porque considera las subceldas de una celda desde el punto de vista conjuntista. ¿Es interesante estudiar la orientación?
- ¿Cómo modelar los "agujeros"? ¿Puede un agujero n-dimensional estar determinado por un lugar geométrico de dimensión n-1?

Conceptos por estudiar

- Mallado no cuadrado (idea de 1/a con a posibilidades de suma o resta)
- Cómputo de las subceldas de *E* a partir de *E*
- Cómputo de $I(E_1, E2)$
- Distancia entre celdas de diferente dimensión
- Revisar camino, curva, etc., con forma estándar.
- Distancia
    - Candidatas según puntos de referencia
        - Centros de masas
            - Opción 1
            - Opción 2
        - Distancia mínima
    - Candidatas según cálculo numérico
        - Euclídea
        - Manhattan

- Otras

Ejemplo de prueba en un espacio tridimensional

Sea *n* = 3, entonces cualquier conjunto de valores de coordenadas identificará un cubo *C*. Para los valores de *w*:

$$w = 2; \qquad s(3,2) = 2\binom{3}{2} = 6$$

$$w = 1; \qquad s(3,1) = 4\binom{3}{1} = 12$$

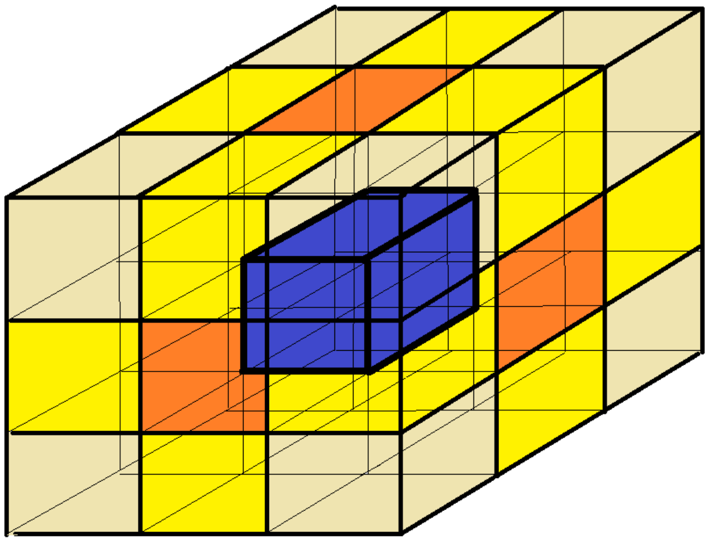
$$w = 0; \qquad s(3,0) = 8\binom{3}{0} = 8$$

Se encuentra que *C* se relaciona espacialmente con:

Dimensión (w)	*Número de subceldas (s)*
2	6
1	12
0	8

Los resultados obtenidos concuerdan con la experiencia, puesto que un cubo tiene seis caras (las caras son superficies de dimensión dos), doce aristas (segmentos de dimensión uno) y ocho vértices (puntos adimensionales).

El ejemplo propuesto de prueba parte de un espacio de tres dimensiones por simplicidad, pero es válido para cualquier espacio vectorial discreto de partida. Basta tener en cuenta que en dicho caso no cualquier conjunto de valores de coordenadas identificará un cubo, sino aquellos valores que cumplan que *r = 3* como explicado anteriormente; a partir de ahí los cálculos son idénticos, de hecho *s(r, w)* no depende de *n*, es decir, no depende del espacio en el que se está trabajando.



Cubos conexos al azul según adyacencia:

-2:

-1: +

-0: + +