В данной статье все основные и примеры будут рассмотрены на примерах.

Тригонометрическая подстановка

От иррациональностей вида $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$ можно избавится, делая замену неизвестной $x=a\sin t$, $x=\dfrac{a}{\sin t}$, $x=a\operatorname{tg}t$ соответственно. Действительно, в выражении $\sqrt{a^2-x^2}$ (считая, что $a>0$) область допустимых значений неизвестной x представляет собой отрезок $[-a;a]$. Множество значений функции $x(t)=a\sin t$ есть такой же отрезок. Поэтому можно сделать замену $x=a\sin t$, при этом иррациональность уничтожается: $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\sqrt{\cos t}=a|\cos t|$. Ограничив допустимые значения t условием $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, можно отбросить и знак модуля (т.к. $\cos t\le 0$). Таким образом, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$, где $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

<u>Задача №1</u> Решить уравнение $(4x-\sqrt{3})\sqrt{1-x^2}=x$

Решение: ОДЗ: $x\in[-1;1]$, значит можно положить $x=\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow$

$(4\sin t-\sqrt{3})\cos t=\sin t\Leftrightarrow 2\sin 2t=\sin t+\sqrt{3}\cos t\Leftrightarrow \sin 2t=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{3}\right)\Rightarrow$

$t_1=-\dfrac{4}{9}\pi;\ t_2=\dfrac{2}{9}\pi;\ t_3=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow x_1=\sin\left(-\dfrac{4}{9}\pi\right),\ x_2=\sin\left(\dfrac{2}{9}\pi\right), x_3=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\left\{\sin\left(-\dfrac{4}{9}\pi\right);\ \sin\left(\dfrac{2}{9}\pi\right);\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

<u>Задача №2</u> Решить уравнение $x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}(2x^2-1)$

Решение: ОДЗ: $x\in[-1;1]$, сделаем замену $x=\cos\alpha$, $0\le\alpha\le\pi$, тогда уравнение примет вид: $\cos\alpha+|\sin\alpha|=\sqrt{2}(2\cos^2\alpha-1)$, т.к. $\alpha\in[0;\pi]$, то $\sin\alpha\ge 0$, имеем: $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\Leftrightarrow(\cos\alpha+\sin\alpha)(\sqrt{2}\cos\alpha-\sqrt{2}\sin\alpha-1)=0\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=-1\\ \sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ \alpha=\dfrac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\text{,т.к. } 0\le\alpha\le\pi\ \left[\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{3}{4}\pi\\ \alpha=\dfrac{\pi}{12}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x_1=\cos\dfrac{3}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \quad x_2=\cos\dfrac{\pi}{12}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \cos\dfrac{\pi}{12}\right\}$

Различные варианты замены переменной

$ax^4+bx^2+c=0$, $a\ne 0$ (биквадратное уравнение), решается с помощью замены $x^2=t$.

<u>Задача №3</u> Решить уравнение $\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{6}{x^2-2x}-12=0$

Решение: $\dfrac{1}{x^2-2x+1}-\dfrac{6}{x^2-2x}-12=0$, $x^2-2x=t\Rightarrow\dfrac{1}{t+1}-\dfrac{6}{t}-12=0\Leftrightarrow$

$12t^2+17t+6=0\Rightarrow t_1=-\dfrac{3}{4}$ или $t_2=\dfrac{2}{3}\Rightarrow x^2-2x=-\dfrac{3}{4}$ или $x^2-2x=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow$

$x_1=\dfrac{1}{2}; x_2=\dfrac{3}{2}; x_3=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}; x_4=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{2};\ \dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}\right\}$

Задача №4 Решить уравнение $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2$
Решение: $\big((x+3)(x+8)\big)\big((x+2)(x+12)\big) = 4x^2$; $(x^2+11x+24)(x^2+14x+24) = 4x^2 \Rightarrow \left(x+11+\frac{24}{x}\right)\left(x+14+\frac{24}{x}\right) = 4$, сделаем замену, $x+11+\frac{24}{x} = t$, $x+14+\frac{24}{x} = t+3 \Rightarrow t(t+3) = 4 \Rightarrow t_1 = -4$ или $t_2 = 1 \Rightarrow x^2+11x+24 = -4x$ или $x^2+11x+24 = x \Rightarrow$
$x_{1,2} = \frac{-15+\sqrt{129}}{2}$; $x_{3,4} = -6; -4$
Ответ: $\left\{-6; -4; \frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}\right\}$

Задача №5 Решить уравнение $(x^2-2x+2)^2 + 3x(x^2-2x+2) = 10x^2$
Решение: $\frac{(x^2-2x+2)^2}{x^2} + 3\frac{(x^2-2x+2)}{x} = 10$, $\frac{x^2-2x+2}{x} = t \Rightarrow t^2+3t = 10 \Rightarrow t_1 = 2; t_2 = -5 \Rightarrow x^2-2x+2 = 2x$ или $x^2-2x+2 = -5x \Rightarrow x_{1,2} = 4\pm\sqrt{2}; x_3 = -1; x_4 = -2.$
Ответ: $\{-1; -2; 4\pm\sqrt{2}\}$

Задача №6 Решить уравнение $\frac{x^2}{2} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$
Решение: $t = \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \Rightarrow 3\left(t^2+\frac{8}{3}\right) = 10t \Leftrightarrow 3t^2 - 10t + 8 = 0 \Rightarrow t_1 = 2; t_2 = \frac{4}{3} \Rightarrow$
$x^2 - 12 = 6x$ или $x^2 - 12 = 4x \Rightarrow x_{1,2} = 3\pm\sqrt{21}; x_3 = -2; x_4 = 6$
Ответ: $\{-2; 6; 3\pm\sqrt{21}\}$

Задача №7 Решить уравнение $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$
Решение: $\frac{x^4}{x^2} - 3\frac{x^3}{x^2} - 8 + \frac{12}{x} + \frac{16}{x^2} = 0$; $x^2 - 3x - 8 + \frac{12}{x} + \frac{16}{x^2} = 0$; $x^2 + \frac{4}{x^2} - 3\left(x - \frac{4}{x}\right) - 8 = 0$,
$t = x - \frac{4}{x} \Rightarrow t^2 - 3t = 0 \Rightarrow t = 0$ или $t = 3 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ или $x^2 - 4 = 3x \Rightarrow x_{1,2} = \pm2; x_3 = 4; x_4 = -1$
Ответ: $\{-1; 4; \pm2\}$

Задача №8 Решить уравнение $x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$
Решение: $x^2 + \frac{(9x)^2}{(x+9)^2} + \frac{2x\cdot 9x}{x+9} - \frac{2x\cdot 9x}{x+9} = 40$, $\left(x - \frac{9x}{x+9}\right)^2 + 18\frac{x^2}{x+9} = 40$, $\left(\frac{x^2}{x+9}\right)^2 + 18\frac{x^2}{x+9} = 40, t = \frac{x^2}{x+9} \Rightarrow t^2 + 18t - 40 = 0 \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = -20 \Rightarrow x^2 = 2x + 18$ или $x^2 = -20x - 180 \Rightarrow x_{1,2} = 1\pm\sqrt{19}$
Ответ: $\{1\pm\sqrt{19}\}$

Уравнения вида $a^4 + b^4 = (a+b)^4$

Преобразуем выражение $a^4+b^4 = (a+b)^4 : a^4+b^4 = (a^2+b^2+2ab)\cdot(a^2+b^2+2ab) = a^4 + b^4 + \underbrace{2a^2b^2 + 4a^3b + 4ab^3 + 4a^2b^2}_{\equiv 0}$
Очевидно, что тождество будет верным, когда $6a^2b^2 + 4a^3b + 4ab^3 = 0 \Leftrightarrow$
$$2ab(3ab + 2a^2 + 2b^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ 3ab + 2a^2 + 2b^2 = 0 \end{array}\right.$$

Задача №9 Решить уравнение $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 16(x+2)^4$
Решение: $(x+1)^4 + (x+3)^4 = \big(2(x+2)\big)^4 = (2x+4)^4$. Пусть $a = x+1, b = x+3$, тогда это уравнение эквивалентно: $\left[\begin{array}{l} x+1 = 0 \\ x+3 = 0 \\ 2(x+1)^2 + 3(x+1)(x+3) + 2(x+3)^2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{c} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \\ \varnothing \end{array}\right.$

Сведение иррационального уравнения к системе уравнений

Задача №10 Решить уравнение $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

Решение: Пусть $\begin{cases} x^3+1=2y \\ 2x-1=y^3 \end{cases}$, $x^3-y^3+1=2y-2x+1 \Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=-2(x-y)$, следует, что если $x-y\neq 0$, то $x^2+xy+y^2=-2 \Rightarrow \varnothing$, следовательно $x=y \Rightarrow x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^+2x-1)=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}; x_3=1$

Ответ: $\{1;\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\}$

Задача №11 Решить уравнение $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x-3}=3$

Решение: Пусть $u=\sqrt{x}$ и $v=\sqrt[3]{x-3} \Rightarrow u+v=3$ и $v^3=u^2-3 \Rightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ v^3=u^2-3 \end{cases} \Rightarrow$ $v^3=v^2-6v+6 \Leftrightarrow (v-1)(v^2+6)=0 \Rightarrow v=1 \Rightarrow \sqrt[3]{x-3}=1 \Rightarrow x=4$

Ответ: $\{4\}$

Задача №12 Решить уравнение $\sqrt[4]{x+7}-\sqrt[4]{x-9}=2$

Решение: Пусть $u=\sqrt[4]{x+7}$ и $v=\sqrt[4]{x-9}$, тогда $\begin{cases} u^4-v^4=16 \\ u-v=2 \end{cases} \Rightarrow (2+v)^4-u^4=16 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} v=0 \\ v^2+3v+4=0 \end{array}\right. \Rightarrow v=0 \Rightarrow u=2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x+7}=2 \\ \sqrt[4]{x-9}=0 \end{cases} \Rightarrow x=9$

Ответ: $\{9\}$

Анализ ОДЗ

Задача №13 Решить уравнение $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2+x-2}+x+1=2x^3$

Решение: Найдем ОДЗ $\begin{cases} 1-x^2>0 \\ x^2+x-2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in[-1;1] \\ x\in(-\infty;-2]\cup[1;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x=1$. Проверкой убеждаемся, что $x=1$ - корень уравнения

Ответ: $\{1\}$

Задача №14 Решить уравнение $\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{x+3}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

Решение: ОДЗ уравнения - $x\in[-3;-1]\cup(0;+\infty)$, перепишем уравнение $\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$, возведем обе части уравнения в квадрат, получим равносильное уравнение $2\sqrt{x(x+1)}\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\geq 0$, получим систему: $\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{x^2}=2 \\ \left[\begin{array}{l} x(x+1)=0 \\ 1+\dfrac{1}{x^2}=0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=-1$, проверкой убеждаемся, что это корень исходного уравнения.

Ответ: $\{1\}$

Использование монотонности функций

Задача №15 Решить уравнение: $2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[4]{x-1}=\sqrt{3-x}+4$

Решение: ОДЗ: $1\leq x\leq 3$, рассмотрим функцию $f(x)=2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[4]{x-1}$,

$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$ видим, что $f'(x) > 0$ при $\forall x \in [1;3]$, следовательно $f(x) \nearrow$ (возрастающая). $g(x) = \sqrt{3-x} + 4$, $g'(x) = -\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{1}\sqrt{3-x}$. $g'(x) < 0 \forall x \in [1;3]$, следовательно, $g(x) \searrow$ (убывает). Следовательно, уравнение имеет только один корень. Методом подбора определяем, что $x = 2$
Ответ: $\{2\}$

Использование числовых неравенств

Задача №16 Решить уравнение: $(16x^{200}+1)(y^{200}+1) = 16(xy)^{100}$
Решение: Воспользуемся неравенством Коши: $\dfrac{16x^{200}+1}{2} \geq \sqrt{16x^{200}}$ и $\left(\dfrac{16x^{200}+1}{2}\right)\left(\dfrac{y^{200}+1}{2}\right) \leq \sqrt{16x^{200}} \cdot \sqrt{y^{200}}$, неравенство превращается в равенство при условии: $\begin{cases} 16x^{200} = 1 \\ y^{200} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{\sqrt[50]{2}} \\ y = \pm 1 \end{cases}$
Ответ: $\{x = \pm\dfrac{1}{\sqrt[50]{2}}; y = \pm 1\}$

Задача №17 Решить уравнение: $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + \sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1+x^2} = 4$
Решение: Воспользуемся неравенством Бернулли $(1-x)^{1/2} + (1+x)^{1/2} + (1-x^2)^{1/4} + (1+x^2)^{1/4} \leq 1 - \dfrac{1}{2}x + 1 + \dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{1}{4}x^2 + 1 + \dfrac{1}{4}x^2$, т.е. равенство достигается при $x = 0$.
Ответ: $\{0\}$

Некоторые дополнительные примеры

Задача №18 Решить уравнение: $x = \underbrace{\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{\ldots + \sqrt{5+x}}}}}_{n\text{раз}}$

Решение: 1) ОДЗ: $x \leq 0$
2) Пусть $f(x) = \sqrt{5+x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{5+x}} > 0$, для $x > 0$, т.е. $f(x) \nearrow$ (возрастает), тогда решением этого уравнения будет $f(x) = x \Rightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$
Ответ: $\left\{\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}\right\}$

Уравнение вида $f(g(x)) = f(h(x))$. Если $f(x)$ - строго возрастающая функция, то уравнение равносильно уравнению $g(x) = h(x)$ на области допустимых значений. Если $f(x)$ строго монотонная и четная, то уравнение равносильно $\left[\begin{array}{l} g(x) = h(x) \\ g(x) = -h(x) \end{array}\right.$

Задача №19 Решить уравнение: $(x-1)^4 + 4x - 4 = x^2 + 4\sqrt{x}$
Решение: 1) ОДЗ: $x \leq 0$, $(x-1)^4 + 4(x-1) = x^2 + 4\sqrt{x}$, пусть $f(x) = x^4 + 4x$, $g(x) = x - 1$, $h(x) = \sqrt{x}$, тогда получим $f(g(x)) = f(h(x))$, $f'(x) = 4x^3 + 4 > 0 \forall x > 0$, т.е. $f(x) \nearrow$, следовательно уравнение сводится к виду $x - 1 = \sqrt{x} \Rightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
Ответ: $\left\{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Задача №20 Решить уравнение: $x^4-2x^2+2|x^2-1|+1=4x^2+4|x|$

Решение: $(x^2-1)^2+2|x^2-1|=(2x)^2+2|2x|$, пусть $f(x)=x^2+2x$, $g(x)=x^2-1$ и $h(x)=2x$, тогда получим $f(g(x))=f(h(x))$, заметим также: $f(-x)=(-x)^2+2|-1|\cdot|x|=x^2+2x=f(x)$ - четная, при $x<0$ убывает; имеем:

$$\left[\begin{aligned}&\begin{cases}x\geq 0\\ \left[\begin{aligned}&x^2-1=2x\\&x^2-1=-2x\end{aligned}\right.\end{cases}\\&\begin{cases}x\leq 0\\ \left[\begin{aligned}&x^2-1=2x\\&x^2-1=-2x\end{aligned}\right.\end{cases}\end{aligned}\right.\Rightarrow x=\pm1\pm\sqrt{2}$$

Ответ: $\left\{\pm1\pm\sqrt{2}\right\}$

Решение уравнения вида $f(g(x))+f(h(x))=0$ сводится к решению уравнения вида $f(g(x))=f(-h(x))$, если $f(x)$ - нечетная.

Задача №21 Решить уравнение: $\sin\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{x^2+x+2}\right)=0$

Решение: Пусть $f(x)=\sin x$, $g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $h(x)=\dfrac{1}{x^2+x+2}$, тогда получим $f(g(x))+f(h(x))=0$, т.к. $f(-x)=-\sin x=-\sin x=-f(x)$ - нечетная, тогда $f(g(x))=f(-h(x))$, $f'(x)=\cos x>0$, для $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ - строго возрастает $-\dfrac{1}{2}\leq g(x)\leq\dfrac{1}{2}$, $0\leq h(x)\leq\dfrac{4}{7}$, следовательно уравнение сводится к решению $\dfrac{x}{x^2+1}=-\dfrac{1}{x^2+x+2}\Rightarrow x^3+2x^2+2x+1=0\Rightarrow x=-1$

Ответ: $\{-1\}$

Задачи для самостоятельного решения

1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=\sqrt{6x+1}$
2) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+1}$
3) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$
4) $\sqrt{x^3-x^2+4}+\sqrt{x^3-x^2+1}=3$
5) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4x^2-32x+64}=9$
6) $x^2-2x+4-3\sqrt{2x^2-4x+5}=-1$
7) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$
8) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$
9) $\sqrt{3x-2}-\dfrac{x^2-2x+4}{\sqrt{3x-2}}=x-3$
10) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=3x-6+2\sqrt{2x^2-3x-9}$
11) $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$
12) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$
13) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$
14) $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}=4$
15) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$
16) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$
17) $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$
18) $(4x^2-9)\sqrt{x+1}=0$
19) $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$
20) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

Неравенства и олимпиадные задачи

Задача №22 Решите неравенство: $\sqrt{6x-13}-\sqrt{3x^2-13x+13}\geq 3x^2-19x+26$. В ответе указать сумму всех удовлетворяющих неравенству целых значений x

Решение: $\sqrt{6x-13}=a$, $\sqrt{3x^2-13x+13}=b$, $a,b\geq0\Rightarrow 3x^2-19x+26=b^2-a^2$, $a-b\geq b^2-a^2\Leftrightarrow(a-b)(a+b+1)\geq0\Rightarrow a-b\geq0\Rightarrow a\geq b$, т.е. $\sqrt{6x-13}\geq\sqrt{3x^2-13x+13}\Leftrightarrow$
$\begin{cases}6x-13\geq 3x^2-13x+13\\3x^2-13x+13\geq0\end{cases}$, $x\in\left[2;\dfrac{13}{3}\right]$; $x\in\left(\infty;\dfrac{13-\sqrt{13}}{6}\right]\cup\left[\dfrac{13+\sqrt{13}}{6};+\infty\right)\Rightarrow$

$x = 3; 4$
Ответ: 7

Задача №23 Найти все пары вещественных чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе: $\begin{cases} (\sqrt{3}-\sqrt{2})^x = 2^{y/3} + 3^{y/3} \\ \sqrt{-5x^2 - 8xy - 3y^2} = -y - 2x \end{cases}$

Решение: Разберемся сначала со вторым уравнением, возведем его в квадрат. $-5x^2 - 8xy - 3y^2 = y^2 + 4xy + 4x^2 \Leftrightarrow (2y+3x)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x$, пусть $-\frac{x}{2} = t$, тогда из первого уравнения: $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-2t} = 2^t + 3^t$. Используя умножение на сопряженное выражение, получаем: $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2t} = 2^t + 3^t$, пусть $b = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6} > 3$, тогда $2^t + 3^t = b^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{b}\right)^t + \left(\frac{3}{b}\right)^t = 1$, левая часть представляет сумму двух убывающих функций, т.к. основания меньше 1, значит данное уравнение может иметь не более одного корня. Методом подбора находим, что $t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1, y = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

Задача №24 Решить неравенство $\frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{|x^2-7x+6| - |x^2-x-2|} \geq 0$

Решение: Т.к. неравенство $|f(x)| > |g(x)|$ равносильно каждому из неравенств $f^2(x) > g^2(x)$, $(f(x)+g(x))(f(x)-g(x)) > 0$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств: $\begin{cases} -x^2 + x + 9 \geq 0 \\ (2x^2 - 8x + 4)(-6x + 8) > 0 \end{cases} (1)$

Квадратный трехчлен $-x^2+x+6$ имеет корни -2 и 3, корнями квадратного трехчлена $x^2 - 4x + 2$ являются числа $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 2 + \sqrt{2}$, а системы (1) равносильна системе: $\begin{cases} (x+2)(x-3) \leq 0(2) \\ (x-x_1)(x-\frac{4}{3})(x-x_2) < 0(3) \end{cases}$, где $-2 < x_1 < \frac{4}{3} < 3 < x_2$. Множество E_1 решений неравенства (2) - отрезок $-2 \leq x \leq 3$. Множество E_2 решений неравенства (3), определяемое методом интервалов, является объединением интервалов $x < x_1$ и $\frac{4}{3} < x < x_2$, а множество решений системы (2), (3), - пересечение множество E_1 и E_2.

Ответ: $[-2; 2-\sqrt{2}) \cup \left(\frac{4}{3}; 3\right]$

Задачи для самостоятельного решения

21) $\frac{1}{2-\sqrt{x^2-3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$

22) $\frac{1}{\sqrt{|x+1|-2}} \leq \frac{1}{9+x}$

23) $\sqrt{3+4\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\sqrt{3}} + 3\cos x$

24) $\sqrt{x^2-5x+6} < 1 + \sqrt{x^2-x+1}$

25) $\sqrt{\frac{243+9x-2x^2}{2x+3}} > 9 - |x|$