В данной статье мы не будет приводить много теории, поскольку эти темы уже были рассмотрены в отдельных статьях, а просто покажем, некоторые примеры, в которых всем этим будем оперировать, и начнем мы с систем уравнений и неравенств.

Пытаться выделить здесь какие-то особые способы решения систем бессмысленно, т.к. их решение как и способ напрямую зависит от тех уравнений или неравенств, которые они содержат. Иногда некоторые системы можно привести к эквиватентной путем каких-то преобразований, можно максимально их упрощать используя функциональный подход, например метод итераций (см. пособие 13 и 8), либо тригонометрические тождества и так далее. Еще очень часто бывает удобно использовать метод оценок и некоторые неравенства. Рассмотрим для начала системы алгебраических уравнений.

Примеры

Задача №1 Решить систему $\begin{cases}\sqrt{8y-x}+x=2\\ \sqrt{3y-x}+x+y=2\end{cases}$

Решение: Сделаем замену $\begin{cases}u=\sqrt{8y-x}\\ v=\sqrt{3y-x}\end{cases}$, $\begin{cases}u^2=8y-x\\ v^2=3y-x\end{cases}\Rightarrow u^2-v^2=5y$. Вычтем из первого уравнения второе и получим: $\sqrt{8y-x}=\sqrt{3y-x}+y\Leftrightarrow 5u=5v+u^2-v^2\Leftrightarrow$ $(v-u)(5-(v+u))=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}v=u\\ v+u=5\end{array}\right.$ Если $v=u$, то $y=0$, тогда из первого уравнения $\sqrt{-x}+x=2\Rightarrow\varnothing$. Если $u+v=5$, то $\begin{cases}\sqrt{8y-x}+x=2\\ \sqrt{3y-x}+\sqrt{8y-x}=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8y-x=(2-x)^2\\ 3y-x=(3+x)^2\end{cases}$,

$\begin{cases}y=\dfrac{(2-x)^2+x}{8}\\ y=\dfrac{(3+x)^2+x}{3}\end{cases}\Rightarrow 3(2-x)^2+3x=8(3+x)^2+8x\Rightarrow x=-14$. Имеем $\begin{cases}x=-14\\ y=\dfrac{121}{4}\end{cases}$

Ответ: $\left(-14;\dfrac{121}{14}\right)$

Задача №2 Решить систему $\begin{cases}2x^2-xy-3y^2=0\\ x^2-3xy+2y^2=-1\end{cases}$

Решение: Если $x=y=0$, то уравнение первого уравнения пара $(0;0)$, но она не является решением второго уравнения, следовательно $x\neq 0$, и $y\neq 0$, тогда поделим оба уравнения на $y^2\Rightarrow\begin{cases}2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{x}{y}-3=0\\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2-3\dfrac{x}{y}+2=-\dfrac{1}{y^2}\end{cases}$ Пусть $\dfrac{x}{y}=t$, решим первое уравнение: $2t^2-t-3=0\Rightarrow t_{1,2}=-1;\dfrac{3}{2}$. Тогда получим: $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=-1\\ 1+3+2=-\dfrac{1}{y^2}\end{cases}\Rightarrow\varnothing$ или

$\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{2}+2=-\dfrac{1}{y^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{4}\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-2\\ x=-3\end{cases}$ или $\begin{cases}y=2\\ x=3\end{cases}$

Ответ: $(-3;-2);(3;2)$

Задача №3 Решить систему $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x+2y} = 10 \\ \sqrt{x+y} + 2x + y = 16 \end{cases}$

Решение: Пусть $\sqrt{x+y} = u$, $\sqrt{x+2y} = v$, решим уравнение
$\begin{cases} x+y = u^2 \\ x+2y = v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = v^2 - u^2 \\ x = u^2 - 2 - v^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = v^2 - u^2 \\ x = 2u^2 - v^2 \end{cases}$, тогда исходная система равносильна $\begin{cases} u + v = 10 \\ u + u^2 + 2u^2 - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 - v^2 + u - 16 = 0 \\ v = 10 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2 + 21u - 116 = 0 \\ v = 10 - u \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} u = 4 \\ v = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 20 \end{cases}$

Часто встречаются симметрические, которые имеют вид: $\begin{cases} f(x,y) + g(x,y) = 0 \\ f(x,y)g(x,y) = b \end{cases}$, например, $\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases}$. Многочлены $x + y$ и xy в левых частях уравнений системы являются простейшими симметрическими многочленами, а любой симметрический многочлен от u и v, где $u = x + y$ и $v = xy$. При решении симметрической системы часто приходится выражать через u и v многочлены вида $P_n(x,y) = x^n + y^n$. Приведем некоторые примеры:
$P_2(x) = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \equiv u^2 - 2v$
$P_3(x) = x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \equiv u^3 - 3uv$
$P_4(x) = x^4 + y^4 = (x+y)^4 - 4x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 = (x+y)^4 - 4xy(x^2+y^2) - 6x^2y^2 = (x+y)^4 - 4xy(x+y)^2 + 2x^2y^2 \equiv u^4 - 4vu^2 + 2v^2$