Теоретический материал

1. “ $\in$ ” - значок принадлежности, например, $a \in A$, т.е. элемент (a) принадлежит множеству A; “ $\notin$ ” - не принадлежит
2. “$\varnothing$” - пустое множество, т.е. множество, не содержащее никаких элементов
3. $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел; $\mathbb{R}$ - множество действительных чисел; $\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел
4. запись исключения элемента из множества $A \setminus a$, например, множество $A = [-1; 1]$ - отрезок, $B = [-1, 0) \cup (0; 1]$, тогда нуль исключается из $B \Rightarrow A \setminus 0 = B$
5. “ $\rightarrow$ ” - значок следствия или “ $\Rightarrow$ ”
6. “ $\Leftrightarrow$ ” - значок эквивалентности, например, $y = x^2 \Leftrightarrow y = \pm x$
7. “$\forall$” - означает для всех, для любого, например $\forall a \in A \Rightarrow a \,\vdots\, 2$(для любого элемента множества A следует, что (a) кратно двум)
8. “ : ” - означает логический переход(такой, что...), например, $\forall a \in A : a > 0 \Rightarrow a \,\vdots\, 2$ (для любого элемента множества A такого, что $a > 0$, следует, что (a) кратно двум)
9. “$\vdots$” - этот значок означает кратность числа чему-то (т.е. что что-то делится на что-то)
10. “ $\cup$ ” - значок объединения, например, $[-1; 1] = [-1; 0] \cup [0; 1]$, т.е. состоит из двух отрезков
11. “ $\cap$ ” - значок пересечения, т.е., например, $[-2; 2] \cap [0; 3] = [0; 2]$ или, например, $[-2; 2] \cap [-1; 1] = [-1; 1]$ (иначе говоря, “ $\cap$ ” - выделение общих элементов).
12. “ $\subset$ ” - значок включения или, иначе говоря, что что-то лежит внутри другого, например, множество A лежит внутри $B \Leftrightarrow A \subset B$, т.е. b содержит A.
13. “$\exists$” - значок существования, например, $\exists a : (25 \,\vdots\, a)$, т.е. есть такое число (существует), на которое делится число 25, т.е. $a = 1, 5, 25$.
14. “$\exists!$” - значок означает следующую фразу (существует хотя бы один...) или (существует единственный...)
15. “ $\mapsto$ ” - значок отображения, например, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, функция (f) отображает множество действительных чисел в множество действительных чисел.

Отношения между множествами

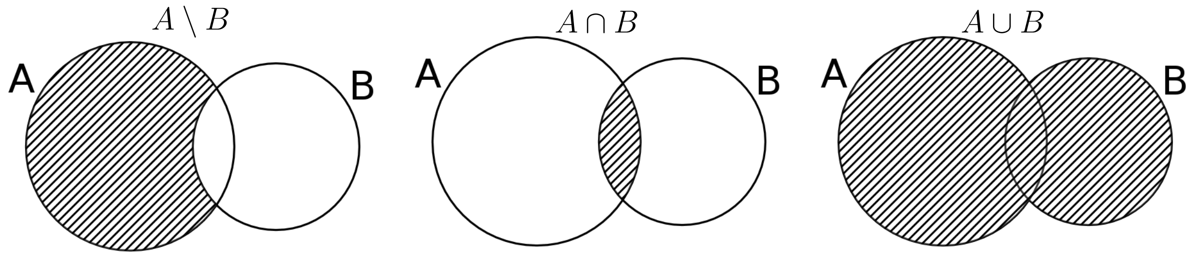
Два множества A и B могут вступать друг с другом в различные отношения

- A включено в B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, т.е. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A : a \in B$
- A включает B, если B включено в A, $A \supseteq B \Leftrightarrow B \subseteq A$

- А равно В, если А и В включены друг в друга: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \cap (B \subseteq A)$
- А строго включено в В, если А включено в В, но не равно ему: $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \cap (A \neq B)$
- А и В не пересекаются, если у них нет общих элементов $\Leftrightarrow \forall a \in A : a \notin B$

Бинарные операции

- пересечение $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$
- объединение $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$
- разность $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$



Рассмотрим примеры использования логических символов

Задача №1 Пусть А = {квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех x}, В = $\{\mathscr{D} < 0\}$, где $\mathscr{D} = b^2 - 4ac$, С = $\{\mathscr{D} < 0, a > 0\} = \{\mathscr{D} < 0\} \cap \{a > 0\}$ Доказать, что $A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow C$.

Доказательство. 1. Предположим, что из А не следует В. Тогда $\mathscr{D} = b^2 - 4ac \geqslant 0$, в этом сл-е квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2 ($x_1 = x_2$ при $\mathscr{D} = 0$) и поэтому обращается в нуль при $x = x_1$ и $x = x_2$, что противоречит А. Итак, предположение о том, что из А не следует В, является неверным, поэтому из А следует В, т.е. $A \Rightarrow B$

2. Докажем, что $A \Rightarrow C$, воспользуемся равенством

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\mathscr{D}}{4a^2}\right] \quad (1)$$

т.к. $A \Rightarrow \mathscr{D} < 0$, то выражение в квадратных скобках в формуле (1) положительно, и поэтому из условия $y > 0$ следуется, что $a > 0$. Итак, $A \Rightarrow C$

Обратно: если имеет место C, т.е. $\mathscr{D} < 0$ и $a > 0$, то из (1) следует, что $y > 0$ при всех (x). Таким образом, квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех действительных значениях (x) тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $\mathscr{D} = b^2 - 4ac < 0$

□

Задача №2 Пусть задано числовое множество X и число M. Записать с помощью кванторов отрицание утверждений:

а) A={все элементы x числового множества удовлетворяют условию $x < M$}

б) B={существует число $M > 0$, такое, что все элементы x из множества X удовлетворяют условию $|x| \geqslant M$}

Решение: а) Пусть A не имеет места, т.е. не все элементы x множества X удовлетворяют условию $x < M$. Это означает, что найдется (существует) такой элемент $x \in X$, для которого неравенство $x < M$ не выполняется, т.е. имеет место противоположное

неравенство $x \geqslant M$. (Если A - высказывание, то $\overline{A}$ - отрицание этого высказывания). Запишем A и $\overline{A}$ с помощью кванторов
$A = \{\forall x \in X \to x < M\}$
$\overline{A} = \{\exists x \in X : x \geqslant M\}$
б) Пусть B не имеет места, т.е. не существует числа $M > 0$, такого, чтобы для любого $x \in X$ имело место неравенство $|x| \geqslant M$. Это означает, что для любого $M > 0$ неравенство $|x| \geqslant M$ не может выполнятся для каждого $x \in X$. Иначе говоря, существует такой элемент $x = x_M \in X$ (зависящий от M), для которого неравенство не выполняется, т.е. справедливо неравенство $|x_M| < M$. С помощью кванторов утверждения B и $\overline{B}$ можно записать так:
$B = \{\exists M > 0 : \forall x \in X \to |x| \geqslant M\}$
$\overline{B} = \{\forall M > 0\ \exists x_M \in X : |x| < M\}$

<u>Задача №3</u> Рассмотрим неопределенные высказывания, заданные на множестве всех четырехугольников Q:
$A(Q) \equiv$\{четырехугольник Q - ромб\};
$B(Q) \equiv$\{диагонали четырехугольника Q взаимно перпендикулярны\}.
Доказать, что $\forall Q\ A(Q) \Rightarrow B(Q)$, а обратное утверждение $\forall Q\ B(Q) \Rightarrow A(Q)$ неверно.
Решение: Т.к. в любом ромбе диагонали взаимно перпендикулярны, то $A(Q) \Rightarrow B(Q)$ для любого ромба Q. Обратная теорема неверна: существует четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями, не являющийся ромбом.

<u>Задача №4</u> Даны два предиката $P(x) : x^2 + x + 1 > 0$ и $Q(x) : x^2 - 4x + 3 = 0$, определенные на множестве $\mathbb{R}$. Установить, какие из высказываний истинны, а какие ложны: а) $\forall x\ P(x)$ б) $\exists x\ P(x)$ в) $\forall x\ Q(x)$ г) $\exists x\ Q(x)$. (*Замечание:* Предикат - это то, что утверждается о субъекте. Субъектом высказывания называется то, о чем делается утверждение).
Решение: Т.к. $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ при всех x, то будут истинными высказывания $\forall x\ P(x)$ и $\exists x\ P(x)$. Т.к. $x^2 - 4x + 3 = 0$ имеет только два действительных корня $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$, то предикат $Q(x)$ принимает значение 1 только при $x = 3$ и $x = 1$ и 0 в остальных случаях. Но тогда высказывание $\forall x\ Q(x)$ ложно, а высказывание $\exists x\ Q(x)$ истинно.

Упражнения

1. Доказать, что равенства: а) $A \cup B = B$ б) $A \cap B = A$ верны тогда и только тогда, когда $A \subset B$.

2. Доказать, что равенства $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ верно тогда и только тогда когда, когда $A \supset C$.

3. Доказать равенство:
   а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
   б) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
   в) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
   г) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

4. Доказать, что для любых высказываний A и B справедливы равенства $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ и $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

5. Выяснить, какие из утверждений A и B следует из другого, используя символы «$\Rightarrow$»; «$\Leftrightarrow$»

а) $A \equiv${каждое из чисел a, b делится на 7}, $B \equiv${сумма $a+b$ делится на 7}
б) $A \equiv${последняя цифра числа a четная}, $B \equiv${число a делится на 4}
в) Доказать, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает отрицательные значения при всех $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{D} = b^2 - 4ac < 0$ и $a < 0$.

6. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ - квадратный трехчлен. $\mathscr{D} = b^2 - 4ac$, x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена, $x_1 \leqslant x_2$ $(\mathscr{D} \geqslant 0)$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ - абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$, M и K - заданные числа. Доказать, что:
а) $\{x_1 < M,\ x_2 < M\} \Leftrightarrow \{\mathscr{D} \geqslant 0,\ x_0 < M,\ af(M) > 0\}$
б) $\{x_1 > M,\ x_2 < M\} \Leftrightarrow \{\mathscr{D} \geqslant 0,\ x_0 > M,\ af(M) > 0\}$
в) $\{x_1 < M < x_2\} \Leftrightarrow \{af(M) < 0\}$
г) $\{K < x_1 < M,\ K < x_2 < M\} \Leftrightarrow \{\mathscr{D} \geqslant 0,\ K < x_0 < M,\ f(K)f(M) > 0\}$
д) $\{x_1 < K < M < x_2\} \Leftrightarrow \{af(K) < 0,\ af(M) < 0\}$