Оглавление

1 Правила игры

Правила выставления оценки подробно написаны в задавальнике.

Здесь приведу механизм расчёта оценки семинариста. Она набирается за счёт мини-кр на семинарах, решения домашнего задания, решения задач со звёздочкой, устных сдач.

За семинар i будет выставляться оценка O_i по формуле

$$O_i = \alpha_i \cdot \max\left[\frac{5}{8}T_i + \frac{3}{8}\beta_i HW_i, \frac{7}{8}T_i\right].$$

Здесь T_i – доля балла за самостоятельную письменную работу на семинаре от максимального балла, HW_i – доля балла за домашнюю работу от максимального балла, α_i, β_i – коэффициенты за оформление домашнего задания (HW). Ниже приводятся его возможные значения.

α_i	β_i	Случай
1	1	HW_i сдано в срок в тетради / в pdf-формате не в $\TeX$
$\frac{17}{16}$	1	HW_i сдано в срок в $\TeX$. Инструментарий $\TeX$ используется очень поверхностно или оформление «не очень красиво».
$\frac{9}{8}$	1	HW_i сдано в срок в $\TeX$. Инструментарий $\TeX$ используется основательно и оформление «скорее красивое».
1	0.5	HW_i сдано не в срок, но до жёсткого дедлайна
1	0	HW_i сдано после жёсткого дедлайна.

Как правило, «в срок» означает до момента того, как я буду проверять задания, но не ранее недели с момента выдачи и не позднее жёсткого дедлайна. Жёсткий дедлайн обычно составляет 2 недели с момента выдачи задания.

Выбирать между 2 и 3 строкой я буду субъективно, но некоторые признаки третьего случая укажу ниже.

- все формулы и цифры в $$
- разные задачи / разные этапы решения одной задачи чем-то отделены (лёгкая навигация)
- используются, если уместно, *itemize*, *enumerate*, курсив / жирный шрифт, греческие буквы, математические символы наподобие $\int$, $\sum$, lim, дроби, значки систем уравнений.

- скобки соответствуют размеру формулы. Сравните $(\int\limits_0^1 xdx)$ против $\left(\int\limits_0^1 xdx\right)$.
- если задача подразумевает рисование графа / приложение картинки / таблицу – она вставлена средствами $\TeX$.

Для повышения оценки можно решать задачи со звёздочкой. Суммарный балл за них составляет

$$S^* = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{i\in\Omega} S_i^*, \quad S^* \in [0,1],$$

где S_i^* – доля балла за задачи со звёздочкой от максимального балла, Ω – множество семинаров. Помимо этого, имеется возможность переписать 2 самостоятельные работы по первому и 2 по второму заданию. При этом появляется возможность досдать домашнее задание, соответствующее этому семинару. Эти переписывания производятся до написания большой контрольной по соответствующему заданию. Оценка O_i выставляется на основе переписанной работы. Самостоятельные работы для переписывания будут немного сложнее, чем исходные работы.

Оценка семинариста

$$\boxed{\mathrm{O}_{\text{сем}} = \left[8\sum_{i\in\Omega} O_i\right] + M_1 + M_2 + S^*.}$$

Здесь $M_1, M_2 \in [0,1]$ – оценки за устную сдачу 1 и 2 задания. На основании выполнения домашних заданий и результатов мини-кр, возможно, кому-то поставлю M_1, M_2 автоматом (без сдачи) или упрощу её процедуру. Устная сдача может включать обсуждение теоретического материала, решений домашних заданий, разбор ошибок на контрольных, решение задач. Сдачи будут проведены примерно за 1 – 2 недели до соответствующей контрольной работы, об их формате будет объявлено ближе к этому времени.

2 Алгебра логики: введение

2.1 Теоретические сведения

2.1.1 Базовые определения

Определение 2.1. ***Высказывание*** *– утверждение, для которого можно установить истинность или ложность.*

Определение 2.2. ***Булева функция*** n ***переменных*** *– отображение из* $\{0, 1\}^n$ *в* $\{0, 1\}$.

Способы задания булевых функций:

- таблицы истинности
- формулы
- вектор значений

Таблица 2.1: Логические связки

x	y	$\overline{x}$ (или $\neg x$)	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$ (или $x \neq y$)
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

Замечание. Иногда для упрощения доказательств полезно смотреть на $\oplus$ как на сложение по модулю 2, а иногда как на $\neq$. Обратите внимание, что формально у $\oplus$ и $\neq$ разный приоритет операций (см. далее), хотя таблица истинности у них одинакова.

Определение 2.3. ***Равенство булевых функций***. *Булевы функции f и g равны тогда и только тогда, когда их значения совпадают на любом наборе аргументов.*

Определение 2.4. ***Тавтология***. *Булева функция f называется тавтологией, если* $f \equiv 1$.

Способы проверки равенства функций:

- сравнение таблиц истинности
- доказать равенств некоторой третьей функции, которая описывается легко
- равносильными преобразованиями логических формул получить из одной формулы другую

- круги Эйлера

Определение 2.5. ***Существенные и фиктивные переменные***. *Переменная x_1 называется существенной для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $\exists x_2^*, \ldots, x_n^*$, при которых $f(0, x_2^*, \ldots, x_n^*) \neq f(1, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Переменная называется фиктивной, если она не существенная.*

Как доказать существенность x_1: предъявить соответствующий набор $x_2^*, \ldots, x_n^*$, показать, что он удовлетворяет определению.

Как доказать несущественность x_1: надо доказать, что указанного выше набора нет. Иными словами, проверить, что для любого набора $x_2^*, \ldots, x_n^*$ справедливо $f(0, x_2^*, \ldots, x_n^*) = f(1, x_2^*, \ldots, x_n^*)$. Либо достаточно предъявить эквивалентную формулу, в которой нет x_1.

2.1.2 Приоритет операций

В порядке убывания: скобки, $\neg$, $\wedge$, $\underbrace{\vee, \oplus}_{\text{наравне}}$, $\rightarrow$, $\underbrace{\leftrightarrow\ \neq}_{\text{наравне}}$.

2.1.3 Некоторые важные тождества

Дистрибутивные законы:

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Законы поглощения:

$$A \wedge (A \vee C) = A$$

$$A \vee (A \wedge C) = A$$

Остальные тождества смотрите в лекциях, здесь я оставил те, на которые хотел обратить особое внимание.

2.2 Решения задач

Задача 2. Докажите, что

а) $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$.

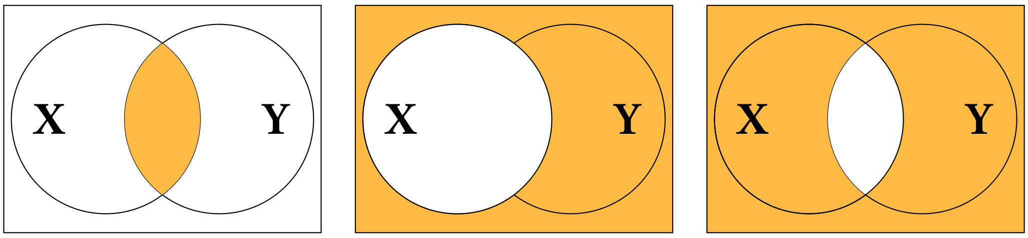
Решение. Таблица истинности:

x	y	$x \rightarrow y$	$\overline{x}$	$\overline{x} \vee y$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Другое решение. Обе функции равны той функции, которая принимает значение 1 тогда и только тогда, когда $x = 1, y = 0$.

b) $x \wedge y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$

Решение. Можно сделать по таблице истинности аналогично примеру выше. Рассмотрим способ с кругами Эйлера.



(a) $x \wedge y$ (b) $\overline{x}$ (c) $\overline{x} \vee \overline{y}$

Нетрудно видеть, что отрицание третьей картинки даёт первую, что доказывает формулу.

c) $\overline{x \to y} = x \wedge \overline{y}$.

Решение. Только что доказали, что $a \wedge b = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$. Подставим $a = x$, $b = \overline{y}$, получим $x \wedge \overline{y} = \overline{\overline{x} \vee y}$. В первом пункте вывели $\overline{x} \vee y = x \to y$. Подстановка даёт искомую формулу.

Задача 3. Преобразовать формулу $(x \wedge z) \vee (x \wedge \overline{z}) \vee \neg(\neg x \to \neg y)$.

Решение. $\underbrace{(x \wedge z) \vee (x \wedge \overline{z})}_{A} \vee \underbrace{\neg(\neg x \to \neg y)}_{B}$

$A = (x \wedge z) \vee (x \wedge \overline{z}) = x \wedge (z \vee \neg z) = x$ (дистрибутивный закон).

$B = \neg(\neg x \to \neg y) = \neg(x \vee \neg y) = \neg x \wedge y$ (доказали в задаче 2).

$A \vee B = x \vee \neg x \wedge y = (x \vee \neg x) \wedge (x \vee y) = x \vee y$ (дистрибутивный закон).

Ответ: $x \vee y$.

Задача 4. Докажите дистрибутивность дизъюнкции относительно эквивалентности: $x \vee (y \leftrightarrow z) = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$.

Решение. $x = 0 \Longrightarrow (y \leftrightarrow z) = (y \leftrightarrow z)$ – верно.

$x = 1 \Longrightarrow 1 = (1 \vee y) \leftrightarrow (1 \vee z) = 1 \leftrightarrow 1 = 1$ – верно.

Рассмотрены все варианты, формула доказана.

Задача 5. Булева функция $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ возвращает 1 тогда и только тогда, когда хотя бы две переменные из трёх равны 1. Выразите $\mathrm{MAJ}(x_1, x_2, x_3)$ через булеву формулу.

Решение. Таблица истинности:

x_1	x_2	x_3	MAJ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Заметим, что формула $\overline{x_1}x_2x_3$ равняется 1 только при условии $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. То же можно сказать про $x_1\overline{x_2}x_3$ для значений $(1, 0, 1)$, для $x_1x_2\overline{x_3}$ на $(1, 1, 0)$ и $x_1x_2x_3$ на $(1, 1, 1)$. Это значит, что если мы возьмём формулу

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3,$$

то она будет равна 1 только в том случае, если какой-то из дизъюнктов равен 1. Но наши дизъюнкты равны 1 на тех и только тех наборах переменных, в которых функция MAJ равняется 1. Таким образом, $f \equiv \text{MAJ}$, мы построили явную формулу.

Задача 7. Булева функция задана вектором значений: $f(x_1, x_2, x_3) = 10100101$.

1. Опишите f через таблицу истинности.
2. Какие переменные f являются существенными? Фиктивными?
3. Опишите f через булеву формулу.

Решение.

1. Таблица истинности:

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

2. $f(0, 0, 0) = 1 \neq f(1, 0, 0) = 0 \Longrightarrow x_1$ – существенная переменная.

   $f(0, 0, 0) = 1 \neq f(0, 0, 1) = 0 \Longrightarrow x_3$ – существенная переменная.

Докажем, что x_2 – фиктивная переменная. Для этого покажем, что при любой комбинации (x_1, x_3) значение функции f не зависит от x_2:

x_1	x_3	$f(x_1, x_2 = 0, x_3)$	$f(x_1, x_2 = 1, x_3)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Поскольку при любых (x_1, x_3) функция не меняет всего значения при изменении x_2, то это фиктивная переменная.

Другой способ. Можно заметить по таблице истинности, что $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \leftrightarrow x_3)$. Отсюда сразу видно, что x_2 – фиктивная переменная.

3. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \leftrightarrow x_3) = x_1 x_3 \vee \overline{x_1}\ \overline{x_3}$ (легко получить аналогично задаче 5).

   Замечание. Если не заметить, что $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \leftrightarrow x_3)$, то тот же метод можно было бы применить к исходной таблице истинности. Получился бы правильный ответ, который после упрощений сводится к полученному здесь (проверьте).

Задача 9. Докажите, что не существует булевой функции $f(x, y)$, существенно зависящей от обеих переменных, такой что $\overline{f(x, y)} = f(\overline{x}, \overline{y})$.

Решение. Таблица истинности:

x	y	f	если $b = a$	если $b = \neg a$
0	0	a	a	a
0	1	b	a	$\neg a$
1	0	$\neg b$	$\neg a$	a
1	1	$\neg a$	$\neg a$	$\neg a$

Первые две строки – определение $a, b \in \{0, 1\}$. Третья строка получена применением свойства f ко второй строке, четвёртая – к первой. Ясно, что либо $a = b$, либо $a = \neg b$. Из таблицы следует, что в первом случае фиктивной переменной является y, во втором – x.

3 Множества и логика

3.1 Теоретические сведения

3.1.1 Базовые определения

Определение 3.1. ***Множество*** *– структура данных, которая для любого объекта x может ответить, принадлежит он ей или нет.*

Определение 3.2. ***Универсум*** *– такое множество, что все элементы в обсуждаемом контексте могут быть только из этого множества.*

Определение 3.3. ***Предикат*** *– высказывание, зависящее от аргументов.*

Определение 3.4. ***Квантор существования*** $\exists$ *– дизъюнкция по всем элементам универсума:* $\exists\, x \iff \bigvee\limits_{i \in U} i$.

Определение 3.5. ***Квантор «любой»*** $\forall$ *– конъюнкция по всем элементам универсума:* $\forall\, x \iff \bigwedge\limits_{i \in U} i$.

3.1.2 Доказательство утверждений в теории множеств

Доказывать утверждения в теории множеств можно следующими методами, иллюстрируемыми далее:

- диаграммы Эйлера-Венна
- поэлементным рассмотрением частей утверждения
- тождества алгебры множеств (эквивалентны тождествам алгебры логики).

Для простых конструкций легче первый приём. Выбирать между вторым и третьим можно в зависимости от громоздкости получаемых третьим способом формул.

3.1.3 Теоретико-множественные операции

Далее приводится таблица, иллюстрирующая базовые теоретико-множественные операции с точки зрения диаграмм Эйлера-Венна, записи на языке теории множеств в целом и поэлементно, а также с точки зрения алгебры логики. Под $a = a(x)$ в последней строке следует понимать утверждение «$x \in A$», под $b = b(x)$ – «$x \in B$».

Обратите внимание, что первые шесть столбцов – это описания *множеств*, а последние четыре – описания истинности / ложности *конкретных утверждений* про множества. Для корректной записи последних требуется воспользоваться кванторами.

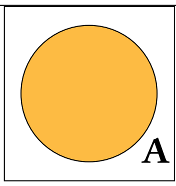
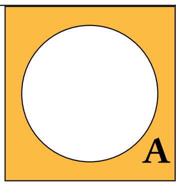
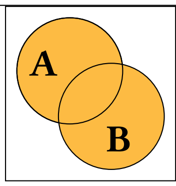
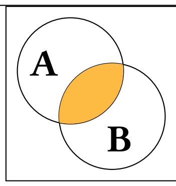
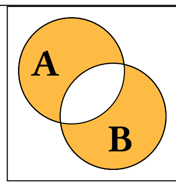
Множество	Дополнение множества	Объединение	Пересечение	Симметрическая разность
				
A	$U \setminus A$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \triangle B$
$x \in A$	$x \notin A$	$x \in A$ или $x \in B$	$x \in A$ и $x \in B$	$(x \in A$ или $x \in B)$ и $x \notin A \cap B$
a	$\overline{a}$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \oplus b$

Таблица 3.1: Теоретико-множественные операции

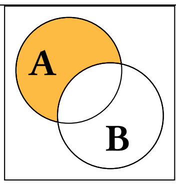
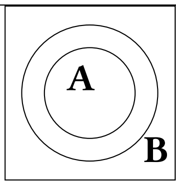
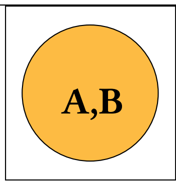
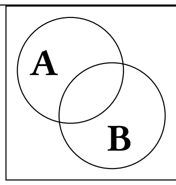
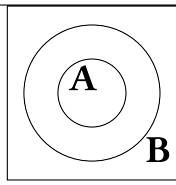
Разность множеств	Вложение	Равенство	Неравенство	Строгое вложение
				
$A \setminus B$	$A \subseteq B$ или $A \subset B$	$A = B$	$A \neq B$	$A \subsetneq B$
$x \in A$ и $x \notin B$	$\forall x \hookrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$	$\forall x \hookrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$ и $x \in B \Rightarrow x \in A$	$\exists x \in A \ : x \notin B$ или $\exists x \in B \ : \ x \notin A$	$x \in A \to x \in B$ и $A \neq B$
$a \wedge \overline{b}$	$\forall x \hookrightarrow a(x) \to b(x)$	$\forall x \hookrightarrow a(x) \leftrightarrow b(x)$	$\exists x : a(x) \wedge \overline{b(x)} \vee \exists x : b(x) \wedge \overline{a(x)}$	$(\forall x a(x) \to b(x)) \wedge \neg (\forall y a(y) \leftrightarrow b(y))$

Таблица 3.2: Теоретико-множественные операции

3.2 Решения задач

Примечание. Здесь и далее под натуральными числами $\mathbb{N}$ будут пониматься целые положительные числа. Обозначим $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Когда будете писать большую КР, обязательно уточняйте, что понимается под натуральными числами.

Задача 1. Универсум $U = N_0$. Опишите неформально на русском языке множества, заданные формулами:

1. $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.
   Ответ. Нечётные натуральные числа.
2. $\{n \mid \exists\, m \in U \; : \; n = 2m\}$.
   Ответ. Неотрицательные чётные числа.
3. $\{n \mid (\exists\, m \in U \; : \; n = 2m) \wedge (\exists\, k \in U : n = 3k)\}$.
   Ответ. Неотрицательные целые числа, кратные 6. Здесь полезно помнить, что если НОД$(a, b) = 1$, то $n \,\vdots\, a, n \,\vdots\, b \Longrightarrow n \,\vdots\, ab$.

Задача 2. $A = \{n \mid \exists k \in \mathbb{N} \; : \; n = k^2\}$, $U = \mathbb{N}_0$. Верно ли, что $A = \{1, 4, 9\}$?
Решение. Неверно, потому что число $16 = 4^2$ удовлетворяет указанному условию, но отсутствует в $\{1, 4, 9\}$.

Задача 3. Опишите формально множества ($U = \mathbb{Z}$):

1. Множество, состоящее из чисел 1, 10 и 100.
   Решение. $A = \{1, 10, 100\}$.
2. Множество, состоящее из чисел, больших 5.
   Решение. $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 5\}$.
3. Множество, состоящее из натуральных чисел, меньших 5.
   Решение. $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$ или $C = \{1, 2, 3, 4\}$.
4. Множество, которое не содержит элементов.
   Решение. $D = \varnothing$ или $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = n + 1\}$.

Задача 4. Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняются равенства

1. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
   Решение. $a \wedge \overline{a \wedge \overline{b}} = a \wedge (\overline{a} \vee b) = a \wedge \overline{a} \vee a \wedge b = a \wedge b$.
2. $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$
   Решение. $b \vee a \wedge \overline{b} = (b \vee a) \wedge (b \vee \overline{b}) = a \vee b$.
3. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
   Решение. $(a \vee b) \wedge \overline{a \wedge b} = (a \vee b) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b}) = a \wedge \overline{a} \vee a \wedge \overline{b} \vee b \wedge \overline{a} \vee b \wedge \overline{b} = a \wedge \overline{b} \vee b \wedge \overline{a}$.
4. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
   Решение. $(a \vee b) \wedge \overline{c} = a \wedge \overline{c} \vee b \wedge \overline{c}$.

Доказательство через диаграммы Эйлера было на семинаре. Если картинка простая, то они изящнее доказательств через алгебру логики.

Задача 5. На числовой прямой даны два отрезка: $P = [2, 10]$ и $Q = [6, 14]$. Выберите такой отрезок A, что формула

$$((x \in A) \to (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

Решение. После преобразования получим

$$\overline{a} \vee p \vee q \equiv 1.$$

Ясно, что при $x \in [2, 14]$ выражение истинно за счёт принадлежности P, Q. Чтобы $x \in \mathbb{R} \setminus [2, 14]$ тоже давали в нашем выражении истину, требуется, чтоб $\mathbb{R} \setminus A \subseteq \mathbb{R} \setminus [2, 14]$, т.е. $A \subseteq [2, 14]$.

Задача 6. Про множества A, B, C известно, что $A \cap B \subseteq C \setminus (A \cup B)$. Верно ли, что тогда $A \subseteq A \triangle B$?

Решение. Заметим, что $A \cap B \subseteq A \cup B$. Значит, если $\exists\ x \in A \cap B$, то, по условию, $x \in C \setminus (A \cup B) \Longrightarrow x \notin A \cup B \Longrightarrow x \notin A \cap B$. Получили противоречие. Значит, $A \cap B = \varnothing$. Тогда $A \triangle B = A \cup B$. Легко убедиться, что $A \subseteq A \cup B = A \triangle B$.

Задача 7. Докажите включение

$$\forall A_i, B_i \hookrightarrow (A_1 \cap \ldots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap \ldots \cap B_n) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \ldots \cup (A_n \triangle B_n).$$

Решение. Левое множество задаёт в точности те элементы x, которые либо принадлежат пересечению всех A_i, либо принадлежат пересечению всех B_i.

Пусть реализуется первый случай: $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$. Поскольку неверно, что $x \in B_1 \cap \ldots \cap B_n$, то $\exists\ j \in \overline{1, n} : \ x \notin B_j$. Из $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$ следует $x \in A_j$. Значит, $x \in A_j \triangle B_j \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup \ldots \cup (A_n \triangle B_n)$. Включение показано. Второй случай разбирается аналогично.

Задача 8. Докажите равенство

$$\forall A_i, B_i \hookrightarrow (A_1 \cap \ldots \cap A_n) \setminus (B_1 \cup \ldots \cup A_n) = (A_1 \setminus B_1) \cap \ldots \cap (A_n \setminus B_n).$$

Решение. $(a_1 \wedge \ldots \wedge a_n) \wedge (\overline{b_1 \vee \ldots \vee b_n}) = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n) \wedge (\overline{b_1} \wedge \ldots \overline{\wedge b_n}) = (a_1 \wedge \overline{b_1}) \wedge \ldots \wedge (a_n \wedge \overline{b_n})$.

4 Математические определения, утверждения и доказательства

4.1 Теоретические сведения

4.1.1 Базовые определения

Зафиксируем некоторое высказывание X.

Определение 4.1. ***Необходимое условие***. *Утверждение N называется необходимым условием для X, если верно $X \to N$.*

Определение 4.2. ***Достаточное условие***. *Утверждение S называется достаточным условием для X, если верно $S \to X$.*

Определение 4.3. ***Критерий***. *Утверждение называется критерием X, если оно является необходимым и достаточным условием, т.е. справедливо $X \leftrightarrow C$.*

Замечание. Из определения напрямую следует, что если вас просят доказать критерий, то необходимо провести рассуждения как в одну ($X \to C$), так и в другую ($C \to X$) сторону.

Определение 4.4. ***Контрапозиция*** *– метод доказательства, основанный на том, что критерием $A \to B$ является $\overline{B} \to \overline{A}$.*

Замечание. Обоснование этого метода заключается в том, что $A \to B = \overline{A} \vee B = B \vee \overline{A} = \overline{B} \to \overline{A}$.

Определение 4.5. ***Доказательство от противного*** *– метод доказательства, основанный на том, что если утверждение $\overline{A}$ ложно, то A истинно.*

Замечание. Обоснование этого метода следует из тождества $A \vee \overline{A} = 1$.

Определение 4.6. ***Конструктивное доказательство*** *– метод доказательства (опровержения) утверждений вида «Существует ли..?» («Верно ли, что всегда..?») путём предъявления конкретного объекта, удовлетворяющего (не удовлетворяющего) данным условиям.*

Замечание. Здесь уместно вспомнить, что квантор существования означает дизъюнкцию по универсуму, а квантор всеобщности – конъюнкцию по универсуму. Для истинности первого достаточно найти хотя бы один истинный элемент, для ложности второй – хотя бы один ложный.

Определение 4.7. ***Доказательство по ндукции*** *– метод доказательства утверждений, основанный на том, что если некоторое утверждение справедливо при $n = 1$ и из истинно-*

сти утверждения для $n = k$ следует его истинность для $n = k + 1$, то это утверждение выполняется для всех натуральных чисел.

Замечание. Первое называется базой индукции, второе – шагом. На практике не обязательно брать $n = 1$, бывает удобно брать $n = 0$, $n = 2$ и т.д., всё зависит от конкретной задачи.

4.2 Решения задач

Задача 1. Известно, что истинны утверждения $A \vee (B \wedge \overline{C})$ и $\overline{A} \wedge (B \vee C)$. Какие из утверждений A, B, C истинны, а какие ложны?
Решение.

$$(A \vee (B \wedge \overline{C})) \wedge (\overline{A} \wedge (B \vee C)) = 1$$

$$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{C}) \wedge \overline{A} \wedge (B \vee C) = 1 \Longrightarrow A = 0$$

$$A = 0 \Longrightarrow B \wedge \overline{C} \wedge (B \vee C) = B \wedge (B \vee C) \wedge \overline{C} = B \wedge \overline{C} = 1 \Longrightarrow C = 0, B = 1$$

Ответ: $A = 0, B = 1, C = 0$.

Замечание. Задача учит тому, что если нам нужно работать с несколькими утверждениями, которые как-то между собой связаны, иногда бывает полезно получить какие-то следствия про них через алгебру логики. Например, проверять указанные в задаче связи проще, когда A, B, C – буквы, а не громоздкие конкретные утверждения из другой области математики.

Задача 2. Докажите, используя контрапозицию, что если ab не делится на n, то a не делится на n и b не делится на n. Здесь $a, b, nin\mathbb{Z}$.

Решение. Напомним, что $x \vdots y \overset{\text{опр}}{\Longleftrightarrow} \exists\ t \in \mathbb{Z}\ :\ x = ty$.

Через контрапозицию всё получается автоматически.
Надо доказать, что $\neg \left(a \not\vdots\ n \wedge b \not\vdots\ n\right) \to ab \vdots n \Longleftrightarrow \left(a \vdots n \vee b \vdots n\right) \to ab \vdots n$.

$a \vdots n \Longrightarrow \exists t_a\ :\ a = t_a n \Longrightarrow ab = t_a bn \vdots n$.

$b \vdots n \Longrightarrow \exists t_b\ :\ a = t_b n \Longrightarrow ab = t_b an \vdots n$. Доказано.

Задача 3. Докажите, что если $ab = c$, то хотя бы одно из чисел a, b не превосходит $\sqrt{c}$; здесь a, b, c – положительные вещественные числа.

Решение. Предположим противное: $a > \sqrt{c}, b > \sqrt{c} \Longrightarrow c = ab > (\sqrt{c})^2 = c$. Противоречие.

Задача 4. Верно ли утверждение

1. Существуют различные положительные целые числа m и n, такие что $m < n$ и n^2 кратно m, но n не кратно m?
   Решение. Да, $m = 4, n = 6$.

2. Произведение рационального и иррационального числа – иррациональное число?
   Решение. Нет, $0 \cdot \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$.

Задача 6. Докажите, что для любого целого положительного n выполняется

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

Решение. Докажем индукцией по n.
База. $n = 1 \Longrightarrow 1 \cdot 2^1 = 2$ – верно.
Шаг. Пусть наше утверждение истинно для n:

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

Надо проверить истинность для $n + 1$:

$$\underbrace{1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n}_{(n-1)\cdot 2^{n+1}+2} + (n+1) \cdot 2^{n+1} \stackrel{?}{=} n \cdot 2^{n+2} + 2.$$

$$n \cdot 2^{n+1} - \underline{2^{n+1}} + \underline{\underline{2}} + n \cdot 2^{n+1} + \underline{2^{n+1}} \stackrel{?}{=} n \cdot 2^{n+2} + \underline{\underline{2}}$$

$$n \cdot 2^{n+1} + n \cdot 2^{n+1} \stackrel{?}{=} n \cdot 2^{n+2}$$

Последнее утверждение истинно. Мы получили его эквивалентными преобразованиями из того утверждения, которое надо доказать. Значит, шаг индукции обоснован.

Определение 4.8. *Утверждение A сильнее B, если A → B.*

Задача 7. Какое из утверждений сильнее:

$$\forall x \exists y \ : \ P(x,y) \quad \text{или} \quad \exists y \forall x \ : \ P(x,y)?$$

Здесь $P(x,y)$ – предикат, т.е. утверждение, зависящее от параметров (в данном случае x, y).

Решение. Докажем, что из второго следует первое. Действительно, если $\exists y_0 \forall x \ : \ P(x, y_0)$, то в первом утверждении для каждого x существует $y := y_0$, и $P(x, y_0)$ будет истинно по предположению истинности второго утверждения.

Задача 8. Докажите, что 1 можно представить в виде суммы 2023 различных обыкновенных дробей с числителем 1 и положительным знаменателем.

Указание. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \Longrightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \ldots$ Далее аккуратно докажите с использованием формулы выше.

Задача 10. Из целых чисел от 1 до $2n$ выбрано $n+1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

Указание. Сопоставим каждому числу его максимальный нечётный делитель. Докажите, что поскольку выбрано $n + 1$ число, то какие-то два выбранных числа a, b будут иметь один и тот же максимальный нечётный делитель и сделайте из этого выводы.

Задача 13. Убедитесь в истинности утверждения (при произвольных A и B):

$$(A \to B) \vee (B \to A).$$

Зафиксируем произвольную параболу. Пусть A – утверждение «ветви параболы направлены вверх», а B = «парабола пересекает 0 (прямую y = 0)». Проследите за следующими рассуждениями. Утверждение «если ветви параболы направлены вверх, то парабола пересекает 0», очевидно, ложно; тогда истинным должно быть утверждение «если парабола пересекает 0, то ветви параболы направлены вверх», но оно также ложно. То есть оба утверждения в дизъюнкции ложны (при некотором выборе утверждений A и B), но сама дизъюнкция истинна! Найдите ошибку в рассуждениях.

Решение. Используемое утверждение эквивалентно $\overline{A} \vee B \vee \overline{B} \vee A \equiv 1$. Ошибка заключается в том, что утверждение «если ветви параболы направлены вверх, то парабола пересекает 0» ложно при выборе *произвольной* параболы. В нашем же случае парабола зафиксирована, поэтому оно может оказаться и истинным (например, для $y(x) = -x^2 - 1$, из лжи следует что угодно).

Замечание. Помните, что очевидно то, что легко доказать, а не то, что выглядит правдоподобным.

5 Графы I. Неориентированные графы

5.1 Теоретические сведения

Хорошо описаны в конспектах лекций на стр. 28 – 34.

5.2 Решения задач

Задача 1. Найдите число рёбер в полном графе K_n.

Решение. В полном графе все вершины попарно соединены. Для каждой вершины от 1 до n имеем по $n-1$ смежной вершине. Значит, рёбер всего $\frac{1}{2}n(n-2)$. Множитель $\frac{1}{2}$ появляется из-за того, что при таком подсчёте каждое ребро считается 2 раза.

Задача 2. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны $4, 4, 4, 4, 2$.

Решение. Если в графе с пятью вершинами хотя бы три вершины имеют степень 4, то каждая вершина имеет степень хотя бы 3. Противоречие.

Задача 3. В графе 100 вершин и 800 рёбер.

- Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.
- Может ли так случиться, что все вершины этого графа имеют степень 16?

Решение.

- Предположим противное, тогда в графе все вершины имеют степень меньше 16. Тогда сумма степеней вершин меньше $16 \cdot 100 = 1600$, а рёбер меньше $\frac{1600}{2} = 800$. Противоречие.
- Да, может. Пусть вершины $i, j \in \{0, 1, \ldots, 99\}$ соединяются ребром тогда и только тогда, когда $1 \leq \min(|i-j|, 100-|i-j|) \leq 8$. Геометрически это соответствует тому, что числа от 0 до 99 расставлены по кругу, а ребром соединяются в точности те, расстояние между которыми по кругу не превышает 8. У каждой вершины степень ровно 16, тогда сумма степеней вершин $100 \cdot 16 = 1600$, а рёбер $\frac{1600}{2} = 800$.

Задача 4. Докажите, что граф содержит клику на n вершинах тогда и только тогда, когда его дополнение содержит независимое множество на n вершинах.

Решение. Пусть вершины перенумерованы натуральными числами. Граф $G = (V, E)$ содержит клику на n вершинах $\Longleftrightarrow \exists\, I \subseteq V, |I| = n \ : \ \forall i, j \in I, i \neq j \hookrightarrow (i, j) \in E$. Пусть $\overline{G} = (V, \overline{E})$ – дополнение G. Тогда, по определению, $\forall i, j \in I, i \neq j \hookrightarrow (i, j) \notin E \Longleftrightarrow \forall i, j \in I, i \neq j \hookrightarrow (i, j) \in \overline{E} \Longleftrightarrow$ в $\overline{G}$ существует независимое множество на n вершинах.

Задача 5. Докажите, что если H_1 и H_2 — связные подграфы графа G, такие что $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, то подграф $H_1 \cup H_2$ связен.

Решение. Пусть $H_1 = (V_1, E_1), H_2 = (V_2, E_2)$.

$H_1 \cap H_2 \neq \varnothing \Longleftrightarrow \exists\, v \ : \ v \in V_1 \cap V_2$.

H_1 связен $\Longleftrightarrow \forall u_1 \in V_1$ существует путь из v в u_1. H_2 связен $\Longleftrightarrow \forall u_2 \in V_2$ существует путь из v в u_2.

Докажем, что $H_1 \cap H_2$ связен, т.е. что для $\forall a, b \in V_1 \cup V_2$ существует путь из a в b по рёбрам из $E_1 \cup E_2$. Если a, b обе принадлежат целиком H_1 или H_2, то утверждение справедливо в силу связности H_1, H_2. Иначе, по сказанному выше, существует путь из a в v и из v в b, т.е. есть и путь из a в b.

Задача 5. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

Решение. Если граф G связен, то утверждение справедливо. Докажем, что если G не связен, то связно его дополнение.

G не связен $\Longleftrightarrow$ G разбивается хотя бы на две компоненты связности K_i, внутри которых каждая вершина достижима из каждой, но недостижима из любой вершины вне компоненты связности. В дополнении G каждая вершина из K_i соединена с каждой вершиной из K_j (при $i \neq j$).

Рассмотрим $u \in K_i, v \in K_j$. Если $i \neq j$, то, по сказанному выше, i, j соединены ребром, а потому между ними есть путь. Если $i = j$, то рассмотрим вершину w из другой компоненты связности. Вершины i, w и w, u соединены путями, а потому существует путь u, w, v. Связность дополнения G доказана.

Задача 7. Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с n вершинами?

Решение. Если $n = 0, 1$, то рёбер нет.

Если $n > 1$, то максимальное число рёбер достигается тогда, когда в графе ровно две компоненты связности (ровно одной не может быть, поскольку граф несвязен, а при наличии хотя бы трёх можно было бы добавить рёбра). Каждая из двух компонент связности должна быть полным подграфом. Значит, следует найти максимум среди выражений вида

$$\frac{1}{2}i(i-1) + \frac{1}{2}(n-i)(n-i-1), \quad i \in 1, \ldots, n-1.$$

Это выражение задаёт параболу с ветвями вверх и вершиной в точке $\frac{n}{2}$. Значит, максимум достигается при $i = 1$, т.е. ответ $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Задача 8. Каждая вершина графа G имеет степень 2. Докажите, что $G = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_m$, где H_i — граф цикл, и $H_i \cap H_j = \varnothing$.

Решение. Упорядочим все вершины и рёбра графа G (т.е. для любой пары вершин и любой пары рёбер можно будет сказать, какая «меньше»). Возьмём минимальную вершину a графа G и пойдём по минимальному ребру из неё. Из вершины, в которую пришли, тоже пойдём по минимальному ребру и т.д. Обсудим, до какой поры мы можем повторять эту процедуру.

Поскольку в графе G вершин конечное число, то наступит момент, когда из очередной вершины u нам придётся возвращаться в какую-то из уже посещённых вершин v. Заметим, что v обязана совпадать с началом нашего маршрута a, в противном случае степень v была бы не менее трёх. Мы нашли граф-цикл $H_1 \subseteq G$. Если наша процедура не прошлась по всем вершинам, то возьмём минимальную из ещё не посещённых вершин и повторим наши рассуждения. Таким образом, мы получили, что граф G содержит несколько графов-циклов. Ясно, что они не пересекаются, в противном случае степень вершины, входящей в это пересечение, была бы не менее 4. Кроме того, G не содержит никаких рёбер помимо содержащихся в этих графах путях, иначе степень некоторой вершины была бы не менее 3. Значит, G в точности представим в виде объединения непересекающихся графов-циклов.

6 Графы II. Неориентированные графы

6.1 Теоретические сведения

Хорошо описаны в конспектах лекций на стр. 33 – 41.

Ниже я привожу список определений и утверждений, которые очень полезно знать наизусть для успешного решения задач на графы.

Определение 6.1. *Между вершинами u, v существует путь, если в графе есть подграф-путь, начинающийся в v и заканчивающийся в u.*

Теорема 6.1. *В любом графе $G = (V, E)$ справедливо $\sum_{u \in V} d(u) = 2|E|$, $d(u)$ – степень вершины u.*

Определение 6.2. ***Дерево** – это объект, задаваемый одним из эквивалентных свойств:*

- *связный граф без циклов;*
- *минимальный связный граф (при удалении любого ребра граф становится несвязным);*
- *связный граф, в котором $|E| = |V| - 1$;*
- *граф, любая пара вершин в которым соединена единственным путём.*

Следствие 1. *Для любого графа справедливо $|E| \geq |V| - K$, где K – число компонент связности. В частности, для связного графа $|E| \geq |V| - 1$.*

Лемма 6.2. *Пусть $G(V, E)$ – связный граф и ребро e лежит на цикле; тогда граф $G^{'} = (V, E \setminus \{e\})$ связный. То есть удаление ребра цикла не нарушает связность.*

Лемма 6.3. *Если между вершинами w и z графа есть два различных пути P и Q, то граф содержит цикл.*

Теорема 6.4. *В любом дереве на $n \geq 2$ есть хотя бы две висячие вершины (т.е. вершины степени 1).*

Теорема 6.5. *Для любого связного графа можно построить остовное дерево.*

Теорема 6.6. *Граф является двураскрашиваемым тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины.*

Теорема 6.7. *Если в графе есть маршрут между вершинами x и y, то есть и соединяющий их путь.*

Определение 6.3. *Эйлеров маршрут – маршрут, проходящий по каждому ребру ровно единожды.*

Теорема 6.8. *Связный граф G содержит замкнутый эйлеров маршрут тогда и только тогда, когда степень каждой вершины чётна.*

6.2 Решения задач

Задача 1. Дерево имеет 2023 вершины. Верно ли, что в нём найдется путь длины 3?
Решение. Нет, контрпример – граф-звезда на 2023 вершинах.

Задача 2. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?

Решение. Если в дереве есть 2 вершины со степенью 5, то суммарная степень вершин не менее $2 \cdot 5 + 7 \cdot 1 = 17$ (степень каждой вершины не менее 1, т.к. иначе граф несвязный). По лемме о рукопожатиях, у нас не менее $\lceil \frac{17}{2} = 8.5 \rceil = 9$ рёбер. При этом в дереве на 9 вершинах должно быть в точности $9 - 1 = 8$ рёбер. Противоречие, такого дерева нет.

Задача 3. В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т.е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

Решение. Пусть вершин степени 1 ровно k, вершин степени хотя бы 3 – ровно s штук. Всего в нашем дереве $n = s + k$ вершин, а потому $s + k - 1$ рёбер. При этом сумма степеней вершин будет не менее $3 \cdot s + k \cdot 1$, а тогда, по лемме о рукопожатиях, рёбер должно быть не менее $\frac{3s+k}{2}$. Получили неравенство $s + k - 1 \geq \frac{3s+k}{2}$, откуда $k - 2 \geq s$. Учитывая $s = n - k$, получаем $k \geq 2 + n - k$, т.е. $k \geq \frac{n}{2} + 1$. Это означает, что висячих вершин всегда не менее половины.

Задача 4. Докажите, что любой связный граф имеет остовное дерево

Решение. Упорядочим наши рёбра. Будем идти от рёбер с меньшим номером к рёбрам с большим номером. На каждом шаге зададимся вопросом, потеряет ли граф связность, если ребро с текущим номером убрать. Если ответ отрицательный, то удалим это ребро, если положительный – оставим.

Поскольку рёбер конечное число, то наша процедура конечна. Так как мы удаляли рёбра всегда с сохранением связности графа, то полученный в итоге граф окажется связным. При этом в нём не может оказаться цикла, потому что из него всегда можно удалить некоторое ребро e без потери связности графа, что наш алгоритм сделал бы при обработке ребра e. Таким образом, любому связному графу G наш алгоритм сопоставляет некоторый связный граф без циклов на том же множестве вершин, что по определению означает построение остовного дерева.

Задача 5. Про граф известно, что в нём 1000 вершин и 2023 рёбра. Верно ли, что

1. в таком графе обязательно есть маршрут длины 3000;
2. в таком графе может не оказаться ни одного пути длины 64?

Решение.

1. Возьмём произвольное ребро $e = (V_i, V_j)$. Рассмотрим маршрут $\underbrace{V_i, V_j, V_i, V_j, \dots V_i, V_j, V_i}_{\text{3001 вершина}}$.

   По определению, эта последовательность является маршрутом длины 3000.

2. Ясно, что в графе не будет пути длины 64, если в нём нет 65 вершин. Разобьём 1000 вершин на группы по 50 вершин. В первой группе соединим все вершины друг с другом (там будет $\frac{50 \cdot 49}{2} = 1225$ рёбер), во второй сделаем так же, но потом удалим любые $1225 \cdot 2 - 2023 = 427$ рёбер. Мы получили граф, в котором 2023 ребра и притом нет пути длины 64.

Задача 6. Докажите или опровергните следующие утверждения:

1. если в графе есть замкнутый маршрут чётной длины, то в графе есть цикл чётной длины.

2. если в графе есть замкнутый маршрут нечётной длины, то в графе есть цикл нечётной длины.

Решение.

1. Контрпример: граф-путь на 2 вершинах v_1, v_2. Есть замкнутый маршрут v_1, v_2, v_1 чётной длины, но цикла нет.

2. Рассмотрим $v_1, \dots, v_n = v_1$ – кратчайший замкнутый маршрут нечётной длины. Если внутри него вершины не повторяются (за исключением крайних), то в графе содержится граф-цикл, а значит и цикл нечётной длины. Если же, например, вершина v_s повторяется, то она начинает и заканчивает замкнутый подмаршрут нечётной или чётной длины. В первом случае приходим противоречие с тем, что исходный маршрут был кратчайшим замкнутым маршрутом нечётной длины. Во втором мы можем удалить этот подмаршрут чётной длины, сократив длину исходного маршрута на чётное число и тем самым построив более короткий замкнутый маршрут нечётной длины. Противоречие.

Задача 7.

1. Докажите, что любое дерево 2-раскрашиваемо (существует правильная раскраска в 2 цвета).

2. Сколько есть правильных 2-раскрасок у дерева?

Решение.

1. Пусть исходное дерево не покрашено. Возьмём произвольную вершину u, присвоим ей цвет 1. Рассмотрим все её смежные вершины, присвоим им цвет 2. Рассмотрим все только что покрашенные вершины и покрасим их ещё не покрашенные смежные вершины в цвет 1. Теперь покрасим все непокрашенные вершины, смежные с только что покрашенными, в цвет 2 и т.д. Будем продолжать эту процедуру до тех пор, пока все вершины не окажутся покрашенными.

Докажем, что указанный алгоритм корректно осуществляет 2-раскраску дерева. Во-первых, произвольная вершина v будет покрашена не позднее чем через $\rho(u,v)$ шагов алгоритма (здесь $\rho(u,v)$ – расстояние между вершинами u, v в графе, т.е. длина кратчайшего пути между ними). Во-вторых, раскраска окажется правильной. Предположим, что это не так, тогда найдутся вершины v_1, v_2 одного цвета, соединённые ребром. В дереве между двумя вершинами может существовать только единственный путь, а потому наш алгоритм дошёл до какой-то из вершин раньше (пусть v_1), а вторую покрасил на следующей итерации, причём в противоположный цвет (по построению). Получили противоречие с совпадением цветов.

2. Покраска произвольной вершины обязывает все её смежные вершины иметь противоположный цвет, их соседей – исходный цвет, соседей соседей – противоположный цвет и т.д. Иными словами, покраска одной вершины задаёт покраску всего дерева, а потому существует лишь две раскраски.

Задача 9. Имеется связный граф. Докажите, что в нём можно выбрать одну из вершин так, чтобы после её удаления вместе со всеми ведущими из неё рёбрами останется связный граф.

Решение. Построим по нашему графу остовное дерево. В нём есть висячая вершина v. Удалим её вместе с соответствующим ребром. Останется дерево с количеством вершин на единицу меньшим (пути между всеми оставшимися парами вершин после этой операции продолжат существовать). Если удалить из исходного графа вершину v со всеми входящими в неё рёбрами, то полученный граф останется связным, потому что на его вершинах существует остовное дерево.

Задача .

1. Докажите, что $\mathrm{rad}(G) \le \mathrm{diam}(G) \le 2\mathrm{rad}(G)$.
2. Приведите пример графа G, для которого $\mathrm{rad} = \mathrm{diam} G$.

Решение.

1. Ясно, что

$$\mathrm{rad}(G) = \min_{v\in V} \max_{u\in V} \rho(u,v) \le \max_{v\in V} \max_{u\in V} \rho(u,v) \le \max_{u,v\in V} \rho(u,v) = \mathrm{diam}(G).$$

При этом $\forall u,v,t \in V \hookrightarrow \rho(u,v) \le \rho(u,t) + \rho(t,v)$, а потому такое же неравенство сохранится при взятии произвольных операций min \ max, в частности

$$\min_{t\in V} \max_{u,v\in V} \rho(u,v) \le \min_{t\in V} \max_{u,v\in V} \left(\rho(u,t) + \rho(t,v)\right).$$

Заметим, что справа для внутреннего максимума никакое выражение не зависит от u, v совместно, они используются только раздельно, а потому

$$\max_{u,v\in V} \left(\rho(u,t) + \rho(t,v)\right) = \max_{u\in V} \rho(u,t) + \max_{v\in V} \rho(t,v) = 2\max_{u\in V} \rho(u,t).$$

Поскольку $\rho(u, v)$ не зависит от t, то

$$\min_{t \in V} \max_{u,v \in V} \rho(u, v) = \max_{u,v \in V} \rho(u, v).$$

Собирая результаты воедино, получим

$$\mathrm{diam}(G) = \max_{u,v \in V} \rho(u, v) \le \min_{t \in V} 2 \cdot \max_{u \in V} \rho(u, t) = 2\mathrm{rad}(G).$$

2. Граф-путь на 2 вершинах: радиус совпадает с диаметром.

7 Двудольные графы, паросочетания и функции

7.1 Теоретические сведения

Хорошо описаны в конспектах лекций на стр. 42 – 50.

7.2 Решения задач

Задача 1. Частичная функция f из множества $A = \{1, 2, \ldots, 8\}$ в множество $B = \{a, b, \ldots, e\}$ определена следующим образом:

$$f : 1 \mapsto a, \quad 2 \mapsto a, \quad 3 \mapsto c, \quad 4 \mapsto d, \quad 5 \mapsto c, \quad 7 \mapsto d.$$

Найдите 1. $\mathrm{Dom}(f)$; 2. $\mathrm{Range}(f)$ 3. $f(\{1, 2, 3\})$; 4. $f^{-1}(c)$ 5. $f(\{1, 2, 3, 5, 6\})$; 6. $f^{-1}(\{a, b, c\})$

Решение.

1. $\mathrm{Dom}(f)$ – в точности те элементы A, из которых есть образ под действием f (есть исходящее ребро). **Ответ:** $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.
2. $\mathrm{Range}(f)$ – ровно те элементы B, для которых есть прообраз в A (есть входящее ребро). **Ответ:** $\{a, c, d\}$.
3. $f(\{1, 2, 3\})$ – выделяем это множество в A, смотрим, в какие элементы в B ведёт хотя бы одна стрелка из этого множества. **Ответ:** $\{a, c\}$.
4. $f^{-1}(c)$ – смотрим, из каких элементов A есть стрелка в c. **Ответ:** $\{3, 5\}$.
5. $f(\{1, 2, 3, 5, 6\})$ – так же, как в третьем пункте, однако элемент 6 не имеет образа. **Ответ:** $\{a, c\}$.
6. $f^{-1}(\{a, b, c\})$ – так же, как в четвёртом пункте, однако элемент b не имеет прообраза. **Ответ:** $\{1, 2, 3, 5\}$.

Задача 2. Частичная функция g из множества целых чисел в множество целых чисел сопоставляет числу x наибольший простой делитель x^2.

1. Какова область определения g?
2. Верно ли, что если X конечное, то $g^{-1}(X)$ конечное?

3. Найти $g^{-1}(\{3\})$;

Решение.

1. Функция определена на всех положительных целых числах, для которых существует наибольший простой делитель. По основной теореме арифметики, каждое число $n > 1$ раскладывается на простые множители единственным способом с точностью до порядка следования сомножителей. Значит, $\mathrm{Range}\ g = \mathbb{N}_1 \setminus \{1\}$.
2. Неверно. Пусть $X = \{17\}$, $Y = \{17^n \mid n \in \mathbb{N}_1\}$. X конечно, Y бесконечно.
3. 3 – наибольший простой делитель. Значит, годятся все числа вида $2^n \cdot 3^m$, $n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_1$. По основной теореме арифметики, другие числа не подходят.

Задача 3. Пусть f — частичная функция из множества A в множество B, $X, Y \subseteq A$, $U, V \subseteq B$. Верны ли для любых множеств f, A, B, X, Y, U, V следующие утверждения

1. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;
2. из равенства $f(X) = f(Y)$ следует $X \cap Y \neq \varnothing$;
3. $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$;
4. из равенства $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ следует $U = V$.

Решение.

1. $$f(X \cup Y) = \{t \in B \mid \exists m \in X \cup Y \ : \ f(m) = t\}$$
$$f(X) = \{t \in B \mid \exists m \in X \ : \ f(t) = m\}$$
$$f(Y) = \{t \in B \mid \exists m \in Y \ : \ f(t) = m\}$$
$$f(X) \cup f(Y) = \{t \in B \mid \exists m \in X \cup Y \ : \ f(t) = m\}$$
Доказываемое утверждение верно.
2. Неверно. Пусть $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $X = \{1\}$, $Y = \{2\}$. Видно, что $f(X) = f(Y)$, но $X \cap Y = \varnothing$.
3. $$f^{-1}(U \cap V) = \{t \in A \mid f(t) \in U \cap V \ : \ f(m) = t\}$$
$$f^{-1}(U) = \{t \in A \mid f(t) \in U\}$$
$$f^{-1}(V) = \{t \in A \mid f(t) \in V\}$$
$$f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \{t \in A \mid f(t) \in U\} \cap \{t \in A \mid f(t) \in V\} = \{t \in A \mid f(t) \in U \cap V\}.$$
Доказываемое утверждение верно.
4. Неверно. Достаточно взять два различных элемента $a \neq b \in B$, не имеющих прообразов: $f^{-1}(\{a\}) = f^{-1}(\{b\}) = \varnothing$.

Задача 4. Частичная функция f определена на множестве X и принимает значения в множестве Y, при этом $B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение «$f(f^{-1}(B))$? B» стало верным?

Решение.

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

$$f\left(f^{-1}\right)(B) = \{f(x) \mid x \in X, f(x) \in B\} \subseteq B$$

При этом знак $\supseteq$ невозможен. Рассмотрим функцию f, у которой некоторый элемент y не имеет прообраза. Тогда $f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$, $\{y\} \nsubseteq \varnothing$.

Задача 6. Приведите пример сюръекции множества положительных целых чисел на себя, для которой прообраз любого 1-элементного множества бесконечен.

Решение. Рассмотрим функцию, которая для единицы возвращает единицу, а для всех остальных чисел из $\mathbb{N}_1$ – показатель, с которым входит максимальный простой делитель в их разложение.

Единица имеет полным прообразом простые числа. Их бесконечно много. Для $n > 1$ в полном прообразе лежат, в частности, $\{2^m 3^n,\ m \geq 0\}$ – таких чисел тоже бесконечно много. Мы показали, что прообраз каждого элемента из Y непуст и бесконечен, функция определена на всём исходном множестве, а потому это сюръекция, которая удовлетворяет условиям задачи.

Задача 6. В каждой клетке доски $n \times n$ написано неотрицательное вещественное число таким образом, что суммы в каждой горизонтали и вертикали равны 1. Докажите, что можно расставить n небьющих друг друга ладей так, что стоящие под ними числа будут ненулевыми.

Решение Пусть A – множество строк, B – множество столбцов. Построим на них двудольный граф, проводя ребро только в том случае, если на пересечении выбранных строки и столбца стоит ненулевое число.

Для решения задачи достаточно показать, что существует совершенное паросочетание. Действительно, если мы сможем разбить все строки и столбцы строго на пары и поставим ладьи на рёбра в паросочетании, то они не будут бить друг друга т.к. у любых двух ладей будут отличаться как строки, где они стоят, так и столбцы.

Ясно, что количество строк и столбцов одинаково. Воспользуемся леммой Холла: если у каждого n-элементного множества из A есть хотя бы n соседей в B (всех вершин B, в которые ведут рёбра из какого-то элемента этого множества), то существует совершенное паросочетание. Пусть условие леммы не выполняется, тогда у какого-то k-элементного множества всего лишь $m < k$ соседей. Рассмотрим подтаблицу $k \times m$, образованную пересечением соответствующих k строк и m столбцов. Сумма чисел в каждой строке равна 1 (действительно, вклад в неё дают только ненулевые числа, и в точности они попали в нашу потаблицу, а сумма чисел в любой исходной строке была единичной). Аналогично, сумма чисел в каждом столбце равна 1. Получили противоречие: если суммировать все числа в подтаблице по строкам, то получится k, если по столбцам – $m < k$. Значит, условие леммы выполняется, и совершенное паросочетание существует.

8 Комбинаторика I. Правила суммы и произведения

8.1 Теоретические сведения

Теорема 8.1. ***Правило суммы***. *Если конечные множества A, B не пересекаются, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

Следствие 1. *Если объект A можно выбрать m способами, а другой объект B можно выбрать n способами, то выбор «либо A, либо B» можно $m + n$ способами.*

Теорема 8.2. ***Правило произведения***. *Если объект A можно выбрать m способами и если после такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары $(A; B)$ в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами.*

Определение 8.1. ***Перестановка без повторений*** *– биективное отображение из $\{1, \ldots, n\}$ в $\{1, \ldots, n\}$.* $\boxed{P_n = n!}$

Определение 8.2. ***Размещение из n элементов по k без повторений*** *– способ выбрать из n различных элементов некоторые k с учётом их порядка.* $\boxed{A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}}$

Определение 8.3. ***Размещение из n элементов по k с повторениями*** *– способ выбрать из n различных типов некоторые k элементов с учётом их порядка. Типы могут повторяться.* $\boxed{\overline{A_n^k} = n^k}$

Определение 8.4. ***Сочетание из n элементов по k*** *– способ выбрать из n различных элементов некоторые k без учёта их порядка.* $\boxed{C_n^k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}}$

Определение 8.5. ***Сочетание из n элементов по k с повторениями*** *– способ выбрать из n типов элементов некоторые k без учёта их порядка. Типы могут повторяться.* $\boxed{\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k}$.

Определение 8.6. ***Перестановка с повторениями из n_1 элементов класса 1, n_2 элементов класса $2, \ldots, n_k$ элементов класса k*** *– способ упорядочить $n_1 + \ldots + n_k$ элементов, при котором перестановки элементов внутри одного класса неразличимы.* $\boxed{P(n_1, \ldots, n_k) = \dfrac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$.

Следствие 2. *Для случая двух классов* $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k$.

8.2 Решения задач

Задача 1. Есть 3 гвоздики, 4 розы и 5 тюльпанов.

1. Сколькими способами можно составить букет из цветов одного вида?
2. Сколькими способами из них можно составить букет, в котором нечётное количество цветов каждого вида?
3. Сколькими способами можно составить букет, используя любые из имеющихся цветов?

(Цветы одного сорта считаем одинаковыми, количество цветов в букете не ограничено, но не равно 0.)

Решение.

1. Если букет из гвоздик, то его можно составить 3 способами (цветы одинаковые, важно лишь количество). Если из роз – 4. Из тюльпанов – 5. Варианты цветов не пересекаются. По правилу суммы $3 + 4 + 5 = 12$ вариантов.
2. Разрешается взять только 1 или 3 гвоздики (2 варианта), 1 или 3 розы (2 варианта), 1, 3 или 5 тюльпанов (3 варианта). Мы должны выбрать тройку чисел, соответствующую количеству цветов каждого типа. По правилу произведения $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.
3. Гвоздики – 4 варианта (учитываем также опцию отсутствия цветов). Розы – 5 вариантов. Тюльпаны – 6 вариантов. ы (2 варианта), 1, 3 или 5 тюльпанов (3 варианта). Мы должны выбрать тройку чисел, соответствующую количеству цветов каждого типа. По правилу произведения $4 \cdot 5 \cdot 6 - 1 = 119$. Здесь учтено, что пустой букет букетом не считается.

Задача 2. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Решение. Поскольку никакие из трёх точек не лежат на одной прямой, то любая неупорядоченная тройка точек задаёт треугольник. Обратно, каждый треугольник задаёт единственные такие три точки. Значит, надо выбрать из 10 элементов 3 без учёта их порядка. **Ответ:** $C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$.

Задача 3. Сколько существует 9-значных чисел, цифры которых расположены в порядке убывания (то есть каждая следующая меньше предыдущей)?

Решение. Поскольку всего цифр 10, а наше число состоит из 9 различных цифр, которые можно расположить лишь единственным образом (в порядке убывания), то число всецело определяется отсутствующей цифрой. Таковых может быть 10. Нуль при таком подсчёте оказаться на первом месте не может, поэтому все 10 вариантов корректны.

Ответ: 10.

Задача 4. Найдите вероятность того, что в случайном 4-буквенном слове в русском алфавите, есть хотя бы одна гласная? (Всего 33 буквы, 10 из них гласные.)

Решение. Проще посчитать количество четырёхбуквенных слов, в которых нет ни одной гласной. Это перестановки с повторениями с элементами из множества согласных букв, их $(33-10)^4$. Всего слов из 4 букв 33^4. Искомая вероятность есть отношения числа благоприятных исходов к общему их числу: $p = \frac{33^4-23^4}{33^4} = 1 - \left(\frac{23}{33}\right)^4$.

Задача 5. Докажите, что двоичных последовательностей (слов) длины n, в которых ровно k единиц столько же, сколько и подмножеств размера k множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Решение. Множество однозначно определяется входящими в него элементами. При этом существует биекция между двоичными последовательностями с k единицами и k-элементными подмножествами. Единицу на позиции i можно трактовать как то, что элемент i мы берём в наше подмножество, а нуль – что не берём. При этом если в последовательности ровно k единиц, то она задаёт ровно k элементов, которые формируют k-элементное подмножество. В обратную сторону: k-элементное подмножество задаёт уникальную двоичную последовательность, т.к. каждый элемент мы либо берём, либо нет. Взаимно-однозначное соответствие установлено, задача решена.

Задача 6. Лестница состоит из 13 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через некоторые ступеньки (можно даже через все). Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

Решение. Рассмотрим последовательность из нулей и единиц длины 13. Заметим, что существует биекция между возможными траекториями и такими последовательностями: единица на позиции i означает, что мы останавливаемся на ступеньке i, нуль – что не останавливаемся. Всего указанных последовательностей 2^{13}, а потому путей столько же.

Задача 7. Чего больше, разбиений 20-элементного множества A на 6 (непустых) подмножеств или его подмножеств размера 5?

Решение. Рассмотрим подмножество $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, размера 5 у 20-элементного множества. Сопоставим ему семейство множеств $\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, A \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Ясно, что оно является разбиением A на 6 непустых подмножеств. Значит, каждому подмножеству размера 5 можно сопоставить некоторое уникальное подмножество размера 5, а потому разбиений не меньше, чем таких множеств. Заметим, что их больше, потому что есть ещё, например, разбиение $\{x_1, x_6\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, A \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

Задача 8. 10 человек случайно выстроились в очередь. Найдите вероятность того, что

1. Иванов, Петров и Сидоров стоят подряд (в произвольном порядке);

2. Иванов стоит раньше Петрова;

3. Иванов и Петров не стоят друг за другом?

Решение.

1. Объединим трёх парней в единый блок и будем переставлять его с другими людьми в очереди. Получится $P_{10-3+1} = 8!$ вариантов. Учтём, что ребята могут встать в ряд $P_3 = 3! = 6$ способами. Поскольку каждой перестановке других людей может соответствовать произвольная перестановка мальчиков, то по правилу произведения благоприятных исходов $8! \cdot 6$. Всего исходов $P_{10} = 10!$. Искомая вероятность $p = \frac{6 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{15}$.

2. Каждой перестановке, в которой Иванов стоит раньше Петрова, можно сопоставить перестановку, в которой Петров стоит раньше Иванова, а все остальные люди стоят на одинаковых местах. Поскольку установлена биекция между всеми благоприятными и неблагоприятными исходами, то искомая вероятность составляет 0.5.

3. Если Иванов и Петров стоят друг с другом, то, объединяя их в блок и учитывая перестановки внутри него аналогично первому пункту, получаем $P_2 \cdot P_{10-2+1} = 2 \cdot 9!$ неблагоприятных исходов. Тогда благоприятных $10! - 2 \cdot 9!$. Вероятность $\frac{10! - 2 \cdot 9!}{10!} = 1 - 0.2 = 0.8$.

Задача 9. Сколькими способами можно образовать 6 пар из 12 человек?

Решение. Занумеруем людей от 1 до 12. Первому человеку можно поставить в пару $12 - 1 = 11$ человек. Следующий человек с минимальным номером, ещё не состоящий в паре, может найти её $12 - 2 - 1 = 9$ способами. Следующие – соответственно 7, 5, 3, 1 способами. Поскольку выбор делается независимо, то по правилу произведения получаем $11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 10395$ способов.

Задача 10. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

Решение. Чёрных полей $\frac{64}{2} = 32$. Нам нужно посчитать количество перестановок с повторениями из 12 белых шашек, 12 чёрных и $32 - 12 - 12 = 8$ пустых полей. Получаем $P(12; 12; 8) = \frac{32!}{12!12!8!} = \frac{32!}{(12!)^2 8!}$.

Задача 11. Сколькими способами можно выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные – в порядке убывания?

Решение. Все цифры можно разбить на две группы: чётные и нечётные. Внутри группы есть единственный способ расставить цифры (чётные – в порядке возрастания, нечётные – в порядке убывания). Значит, вся задача сводится к тому сколькими способами можно переставить между собой 5 чётных и 5 нечётных цифр. Ответ даётся перестановками с повторениями $P(5; 5) = \frac{10!}{5!5!}$.

9 Комбинаторика II. Биномиальные коэффициенты

9.1 Теоретические сведения

Некоторые тождества для биномиальных и мультиномиальных коэффициентов:

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
- $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$
- $(x_1 + \ldots + x_s)^n = \sum\limits_{\alpha_1+\ldots+\alpha_s=n} P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_s^{\alpha_s}$

9.2 Решения задач

Задача 1. Ладья стоит на левом поле клетчатой полоски 1×30 и за ход может сдвинуться на любое количество клеток вправо.

- Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля?
- Сколькими способами она может добраться до крайнего правого поля ровно за 7 ходов?

Решение.

- Аналогично решению задачи 6 из прошлого семинара, на каждой из промежуточных 28 клеток ладья либо останавливается, либо нет. Значит, путь однозначно кодируется последовательностью из 28 нулей и единиц.

  Ответ: 2^{28}.

- Считаем, что за каждый ход ладья смещается хотя бы на клетку. Всего её координата должна измениться на $30 - 1 = 29$ клеток. Это должно произойти ровно за 7 ходов. Любой путь можно закодировать последовательностью из стрелок (т.е. смещений на единицу вправо) и разделителей (специальных символов, разделяющих ходы). Ход совершается на столько клеток, сколько есть стрелок между двумя соответствующими разделителями или разделителем и началом/концом строки. При этом все стрелки и разделители внутри своих групп равноправны (не учитываем порядок). Поскольку мы исключаем ходы на нуль, то зарезервируем 7 стрелок на каждый из 7 ходов, а оставшиеся $29 - 7 = 22$ стрелки и 6 разделителей произвольно переставим между собой. Получим последовательности, в точности кодирующие наши пути. По формуле для перестановок с повторениями, их $P(22,6) = C_{28}^{6} = \frac{28!}{22!6!}$.

Ответ: $\frac{28!}{22!6!}$.

Задача 2. Найдите коэффициент при

- x^3y^7 в разложении $(2x - y)^{10}$;
- $x_1^3x_2x_4^5x_5$ в разложении $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$.

Решение.

- По биному Ньютона $C_{10}^3 \cdot 2^3 \cdot (-1)^7$
- По формуле для мультиномиальных коэффициентов $P(3,1,0,5,1)$.

Задача 3. Докажите справедливость формул (желательно найти комбинаторное доказательство):

- $\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{r}{j}\binom{s}{k-j} = \binom{r+s}{k}$;
- $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Решение.

- Выделим и зафиксируем в $r + s$-элементном множестве некоторые r элементов. Тогда выбрать из всего множества k элементов можно выбирая среди них $j = 0, 1, \ldots, k$ элементов, а остальные $k - j$ добирать из оставшихся s элементов.
- Занумеруем элементы индексами $0 \ldots n$. Если среди $n + 1$ элемента мы хотим выбрать $k + 1$, то индекс максимального элемента может быть $j = 0, 1, \ldots, n$ (при $j < k$ соответствующий биномиальный коэффициент равен нулю). Тогда левая сумма соответствует количеству способов выбрать k элементов при различных фиксированных индексах максимальных элементов.

Задача 4. Найдите число решений уравнения $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 11$ в неотрицательных целых числах.

Решение. Аналогично первой задаче, будем переставлять единицы (11 штук) и разделители (4 штуки).

Ответ: $P(11,4) = \frac{15!}{11!4!}$.

Задача 5. Сколькими способами можно разделить 15 одинаковых монет между 7 нумизматами так, чтобы каждому досталось хотя бы по монете?

Решение. Аналогично первой задаче, зарезервируем каждому из 7 нумизматов по монете, а остальные $15 - 7 = 8$ монет будем переставлять с разделителями (6 штук).

Ответ: $P(8,6) = \frac{14!}{8!6!}$.

Задача 6. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах

- «КОМПЬЮТЕР»;
- «ЛИНИЯ»;
- «ПАРАБОЛА»;
- «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ».

Решение.

- Все буквы различные $\Longrightarrow$ перестановки без повторений $\Longrightarrow$ $P_9 = 9!$.
- И – 2 раза, Л, Н, Я – 1 раз. $P(2,1,1,1) = \frac{5!}{2!1!1!1!} = 60$.
- П – 1, А – 3, Р – 1, Б – 1, О – 1, Л – 1. $P(1,3,1,1,1,1) = \frac{8!}{1!3!1!1!1!} = 6720$.
- О – 7, Б – 2, Р – 1, Н – 2, С – 3, П – 1, Т – 1, Ь – 1. $P(7,2,1,2,3,1,1,1) = \frac{18!}{7!2!1!2!3!1!1!1!} = 52929676800$.

Задача 7. Сколькими способами можно выбрать 6 чисел от 1 до 15, чтобы среди них не было двух, отличающихся на единицу?

Решение. Пусть 6 выбранных чисел – это $x_1, \ldots, x_6$, причём $x_1 < x_2 < \ldots < x_6$. Из условия следует $x_{i+1} - x_i > 1$. Пусть $y_i = x_i - i + 1$. Тогда $y_{i+1} - y_i = x_{i+1} - x_i - 1 > 0$. При этом существует взаимно-однозначное соответствие между наборами $(x_1, \ldots, x_6)$ и $(y_1, \ldots, y_6)$. Поэтому можно решать задачу для y_i. Заметим, что $1 \le x_6 \le 15$, а тогда $1 \le y_6 \le 15 - 5 = 11$. Осталось посчитать, сколькими способами из 11 чисел можно выбрать 6 без учёта их порядка.

Ответ: $C_{11}^6 = \frac{11!}{5!6!} = 462$.

Задача 8. Докажите, что

$$\binom{n+k+1}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+k}{k}.$$

Решение. Сводится к задаче 3-б при подстановке $n_{3\text{-б}} := n + k$, $k_{3\text{-б}} := n$.

10 Комбинаторика III. Формула включений-исключений

10.1 Теоретические сведения

Хорошо описаны в конспектах лекций на стр. 62 – 69.

Самое главное оттуда, на что настоятельно рекомендую обратить внимание:

- Определение характеристической функции
- Выражение характеристической функции объединения, пересечения, разности двух множеств через их характеристические функции
- Формула включений-исключений
- Принцип Дирихле

10.2 Решения задач

Задача 1. В группе 40 туристов. Из них 20 человек говорят по-английски, 15 — по-французски, 11 — по-испански. Английский и французский знают семь человек, английский и испанский — пятеро, французский и испанский — трое. Два туриста говорят на всех трёх языках. Сколько человек группы не знают ни одного из этих языков?

Решение 1. E, F, S – множества людей, говорящих на английском, французском, испанском. Можно нарисовать диаграмму Эйлера-Венна и вычислять количество элементов в каждом множестве, начиная с самого маленького по вложению. $40 - |E \cup S \cup F|$ будет ответом.

Решение 2. По формуле включений-исключений $|E \cup S \cup F| = |E| + |S| + |F| - |E \cap S| - |E \cap F| - |F \cap S| + |E \cap F \cap S| = 20 + 11 + 15 - 5 - 7 - 3 + 2 = 33$. Ни на одном языке не говорят $40 - 33 = 7$ туристов.

Задача 2. В группе студентов есть один, который знает C++, Java, Python, Haskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два — 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Каково наименьшее количество студентов в такой группе?

Решение. Пусть A_i – множество людей, владеющих i-ым языком программирования. Из условия (здесь и далее все индексы несовпадающие): $|A_i| = 15, |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = 6,$

$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = 2$, $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| = 1$. По формуле включений-исключений $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = C_4^1 \cdot 15 - C_4^2 6 + C_4^3 \cdot C_4^4 \cdot 1 = 15 \cdot 4 - 6 \cdot 6 + 4 \cdot 2 - 1 = 31$.

Задача 3. Пусть $X = \{1, \ldots, n\}$. Найдите число способов взять k подмножеств $X_1, \ldots, X_k$ множества X таких, что их пересечение пусто.

Решение. Построим таблицу размера $k \times n$ из нулей и единиц, где элемент с индексами (i, j) будет означать, взят ли элемент j в состав подмножества i. Здесь мы пользуемся тем, что подмножества n-элементного множества кодируются строками длины n и что их можно упорядочить (например, пользуясь лексикографической сортировкой строк). Значит, заполнение нашей таблицы однозначно кодирует взятые нами подмножества без учёта их порядка.

В задаче не требуется, чтобы наши подмножества были несовпадающими. Чтобы их пересечение было пусто, надо, чтобы они не пересекались ни по какому элементу, т.е. конъюнкция чисел в каждой строке должна давать нуль. Значит, в каждом столбце хотя бы один нуль. Вариантов так заполнить один столбец $2^k - 1$. Разные столбцы мы можем заполнять независимо, поэтому по правилу произведения всего $(2^k - 1)^n$ вариантов.

Задача 4. В стране пять городов: А, Б, В, Г и Д. Их хотят связать четырьмя авиалиниями так, чтобы из каждого города можно было (возможно, с пересадками) долететь до любого другого. Сколькими различными способами это можно сделать?

Решение. Задача сводится к подсчёту количества деревьев на пяти вершинах. Будем перебирать их по максимальной степени вершины.

Максимальная степень вершины хотя бы два (иначе граф несвязен). Для случая двух граф является графом-путём. Имеется $\cdot 5!2 = 60$ вариантов таких графов (нам важен порядок вершин, поэтому рассматриваем перестановки, но мы отождествляем графы, отличающиеся только порядком обхода слева или справа).

Если максимальная степень 3, то обязательно некоторая вершина будет соединена ребром с двумя висячими вершинами и с непродолжаемым графом-путём длины 2. Выбрать вершину степени 3 можно $C_5^1 = 5$ способами, выбрать две висячие вершины – $C_4^2 = 6$ способами, а упорядоченно взять две оставшиеся - $2 \cdot 1$ способом. Всего имеем $5 \cdot 6 \cdot 2 = 60$.

Если максимальная степень 4, то всё определяется только центральной вершиной графа-звезды, которую можно выбрать 5 способами. Степень больше четырёх в нашем графе быть не может.

Всего имеем $60 + 60 + 5 = 125$ вариантов.

Задача 5. Функция неубывающая, если $x \leq y$ влечет $f(x) \leq f(y)$. Найдите количество

- неубывающих инъекций $f \colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$;
- неубывающих сюръекций $f \colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$.

Решение. Ясно, что неубывающая функция однозначно задаётся последовательностью из n чисел от 1 до m, отсортированных в порядке неубывания.

- Каждое число от 1 до m должно быть использовано не более одного раза. Значит, надо выбрать из m образов значения для n переменных без учёта порядка. Ответ: C_m^n.
- Каждое число от 1 до m должно быть использовано хотя бы по разу. Резервируем m образов для m переменных, а для остальных $n-m$ переменных можно выбрать m типов с повторениями без учёта порядка. Получаем $\overline{C_{n-m}^m} = C_{n-1}^{m-1}$ вариантов.

Задача 8. Сколько имеется различных булевых функций от n переменных, принимающих значение 1 только на тех наборах, в которых содержится ровно k единиц? (но не обязательно на всех таких наборах)

Решение. Из условия следует, что на наборах, где количество единиц не k, функция принимает нулевое значение, а где k единиц – любое. Двоичных последовательностей длины n, содержащих ровно k единиц, C_n^k штук. Тогда всего функций $2^{C_n^k}$.

Задача 9. Функция Эйлера $\phi(n)$ возвращает количество положительных взаимнопростых с $n \geq 1$ чисел, непревосходящих n. Докажите формулу:

$$\phi(n) = n \times \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{p_r}\right),$$

в которой $p_1, \ldots, p_r$ — все различные простые делители числа $n > 1$.

Решение. Пусть A_i – множество чисел от 1 до n, которые делятся на i-ое простое число в разложении n на простые множители. Ясно, что $|A_i| = \frac{n}{p_i}$, $|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}}$, $\ldots, |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{n}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}}$.

По формуле включений-исключений, количество чисел, не делящихся ни на какое простое, входящее в разложение n, равно $\varphi(n) = n - \sum\limits_{i_1} |A_{i_1}| + \sum\limits_{i_1, i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \ldots + (-1)^k \sum\limits_{i_1, \ldots, i_k} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = n - \sum\limits_{i_1} \frac{n}{p_i} + \sum\limits_{i_1, i_2} \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}} - \ldots + (-1)^k \sum\limits_{i_1, \ldots, i_k} \frac{n}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}} = n \left(1 - \sum\limits_{i_1} \frac{1}{p_i} + \sum\limits_{i_1, i_2} \frac{1}{p_{i_1} p_{i_2}} - \ldots + (-1)^k \sum\limits_{i_1, \ldots, i_k} \frac{1}{p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}}\right)$.

Это действительно совпадает с $\phi(n) = n \times \left(\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)\right)$, т.к. оба выражения в скобках являются всевозможными суммами произведений $1, \frac{1}{p_i}$ в количестве k от 0 до n с учётом знака $(-1)^k$.