

Advanced Grid Modeling Center Tutorial

# Electricity Market 101

KPG-193 기반 계통운영최적화(UC/ED/OPF) 모델링 및 실습

---

**Geonho Song**

Ph.D. Student | Department of Energy Engineering  
Korea Institute of Energy Technology (KENTECH)



## Part 0.

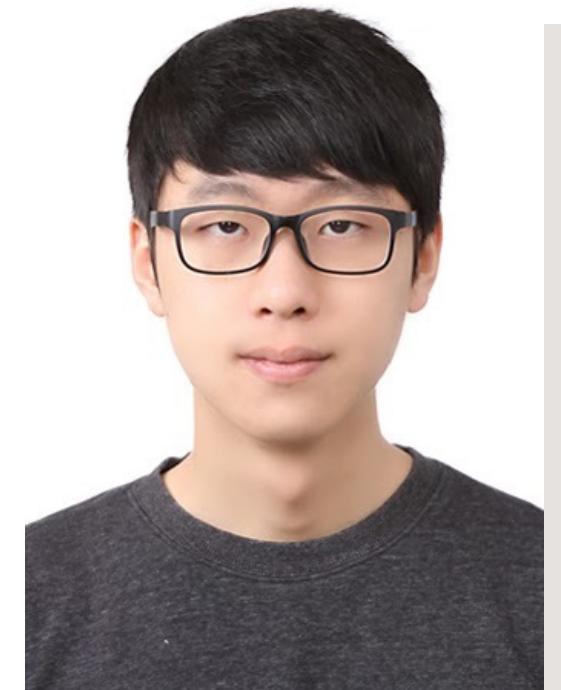
강의 개요

## 주요 이력 사항

- 학력 사항  
`24년 3월 KENTECH 석박통합과정 재학  
`24년 2월 고려대학교 학사

## 연구 분야

- 발전 및 송전 확장계획 (G&TEP)
- 오픈소스 전력망 모델링 (KPG 193)



## 최종 목표

: 계통운영최적화(UC/ED/OPF)에 대한 이해 및 실습

### Part 1. 계통운영최적화 이론

- 경제급전 이론 소개
- 최적조류계산 이론 소개
- 기동정지계획 이론 소개

### Part 2. 계통운영최적화 실습

- Julia를 활용한 최적화 모델링
- Julia를 활용한 계통운영최적화

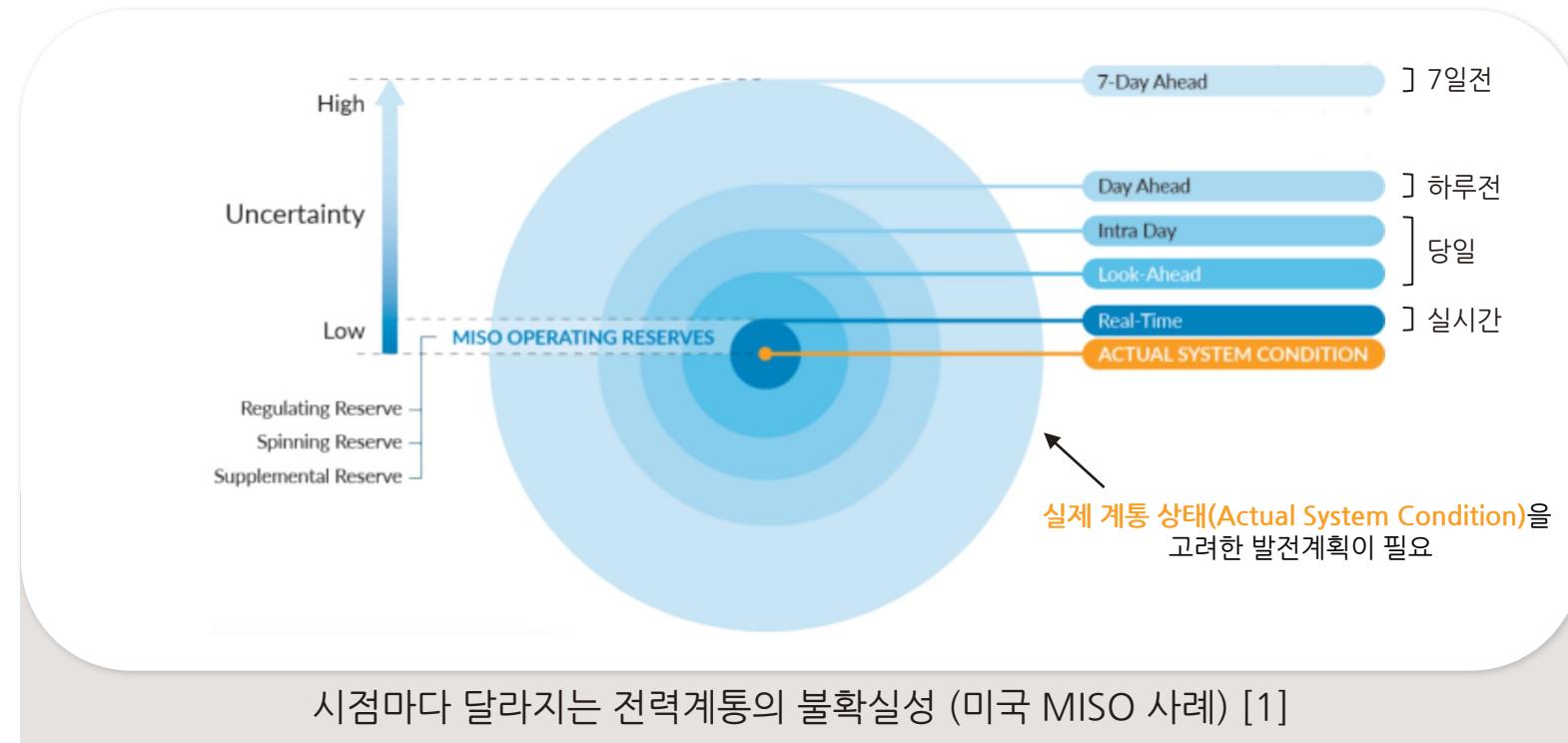
## Part 1.

# 계통운영최적화 이론

전력계통은 시간에 따라 불확실성의 수준이 크게 달라짐

각 시점마다 전력계통을 안정적으로 운영하기 위한 발전계획이 필요

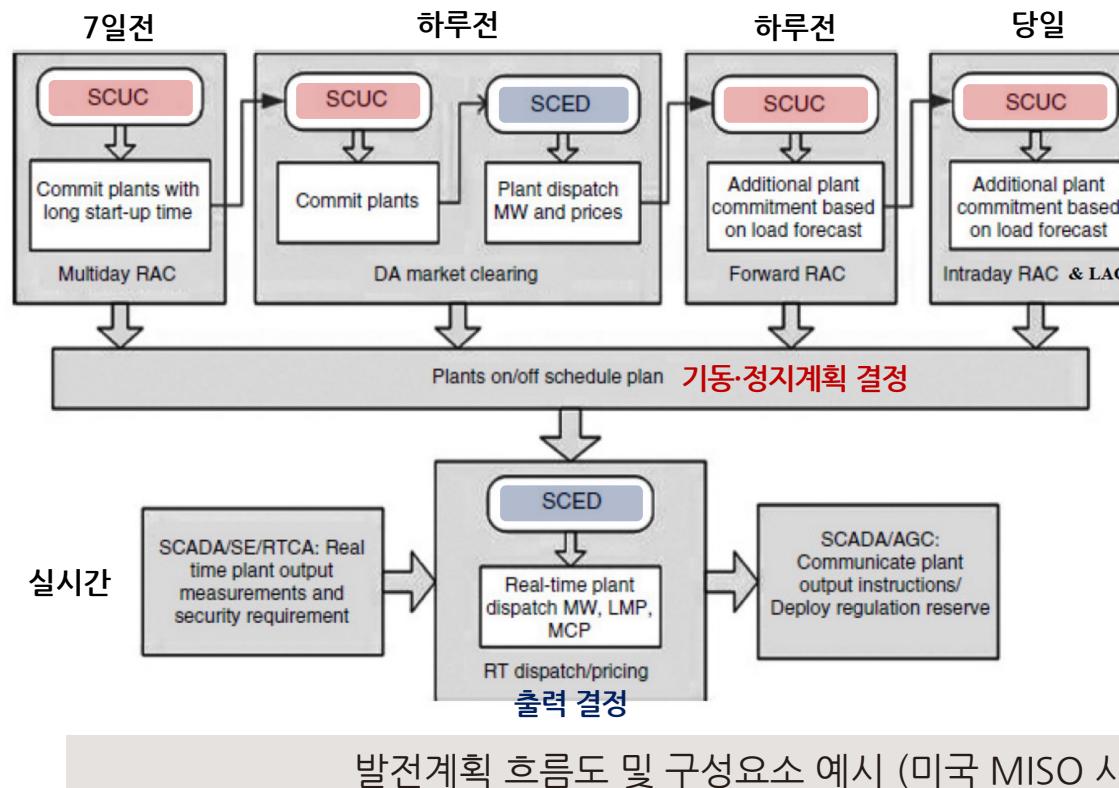
- 발전기 On/Off, 발전기 출력, 예비력 확보 등



[1] MISO, "Future of Grid Operations and Markets: Uncertainty Management", 2021

## 계통운영자는 기동정지계획 문제와 경제급전 문제를 풀어 발전계획을 수립

- 기동정지계획(Unit Commitment, **UC**) : 어떤 발전기를 언제 **기동·정지**시킬지 결정하는 최적화 문제
- 경제급전(Economic Dispatch, **ED**) : 운전 중인 발전기의 **출력**을 결정하는 최적화 문제



**SCUC:** Security Constrained Unit Commitment  
**SCED:** Security Constrained Economic Dispatch  
 \*SC는 발전계약, 송전계약 등 계통계약을 포함

RAC: Reliability Assessment Commitment  
 LAC: Look-Ahead Commitment

SCADA: Supervisory Control and Data Acquisition  
 SE: State Estimator  
 RTCA: Real-Time Contingency Analysis  
 AGC: Automatic Generation Control

경제급전은 운전 중인 발전기의 출력 분배를 결정하는 문제

- 전력계통을 단일 노드로 가정해 송전선로의 용량을 고려하지 않음

## 목적함수 - 총 비용 최소화

$$\min_{\Xi^{\text{ED}}} \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i^g(p_i)$$

## 제약조건

- 발전기 출력 제약

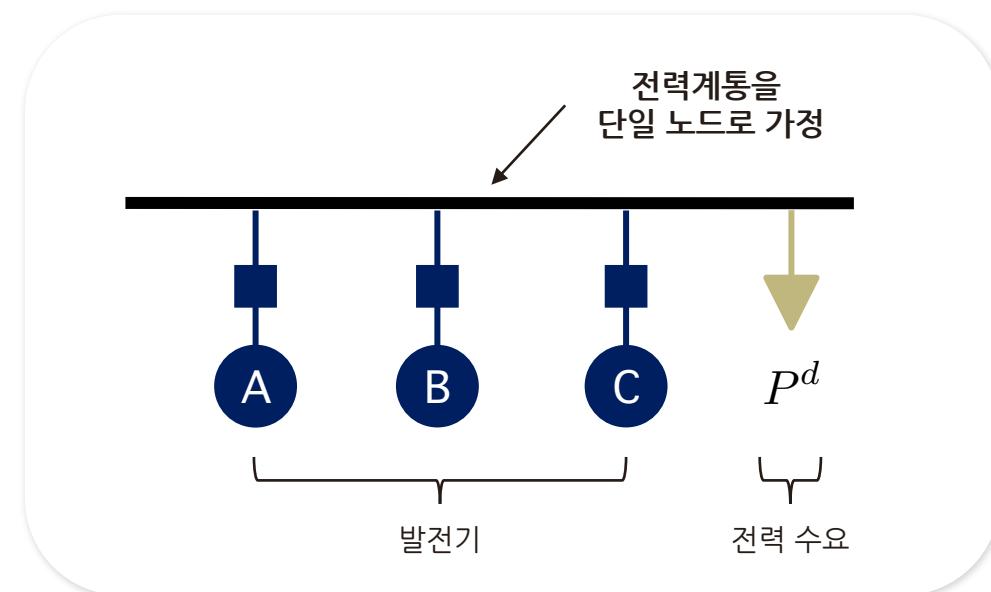
$$\underline{P}_i \leq p_i \leq \overline{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

- 전력 수급 균형

$$P^d = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i$$

## 결정변수

$$\Xi^{\text{ED}} = \{p_i \geq 0\}$$



$i \in \mathcal{I}$ : 발전기 집합	$p_i$ : 발전량
$C_i^g(p_i)$ : 발전 비용 함수	
$\underline{P}_i$ : 최소 발전량	
$\overline{P}_i$ : 최대 발전량	
$P^d$ : 전력 수요	

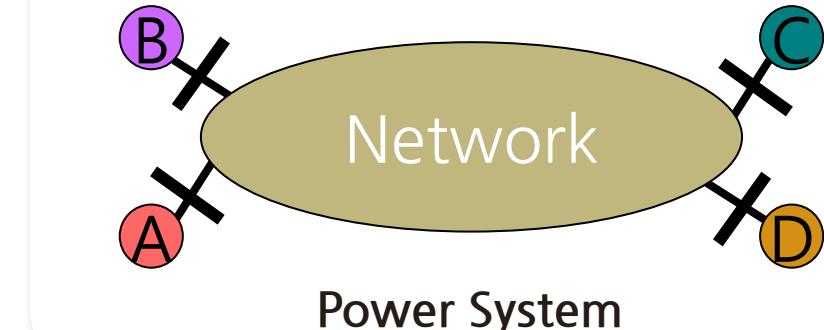
## 경제급전 문제

$$\begin{aligned} \min_{\Xi^{\text{ED}}} \quad & \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i^g(p_i) \\ \text{s.t.} \quad & \underline{P}_i \leq p_i \leq \bar{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i = P^D. \end{aligned}$$

where  $\Xi^{\text{ED}} = \{p_i \geq 0\}$ .

## 경제급전 문제의 한계

- 실제로 모든 발전기와 부하는 동일한 모선에 연결되어 있지 않음
- 경제급전 결과, 계통에서 허용되지 않는 조류나 전압이 발생할 수 있음



최적조류계산(OPF)은 경제급전과 네트워크 제약을 통합적으로 고려

## 목적함수 - 총 비용 최소화

$$\min_{\Xi^{\text{AC}}} \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i^g(p_i)$$

## 제약조건

- 전력조류방정식 (Power Flow Equation)

$$p_l^{ft} = G_l v_{s(l)}^2 - v_{s(l)} v_{r(l)} [G_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) + B_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$p_l^{tf} = G_l v_{r(l)}^2 - v_{s(l)} v_{r(l)} [G_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) - B_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

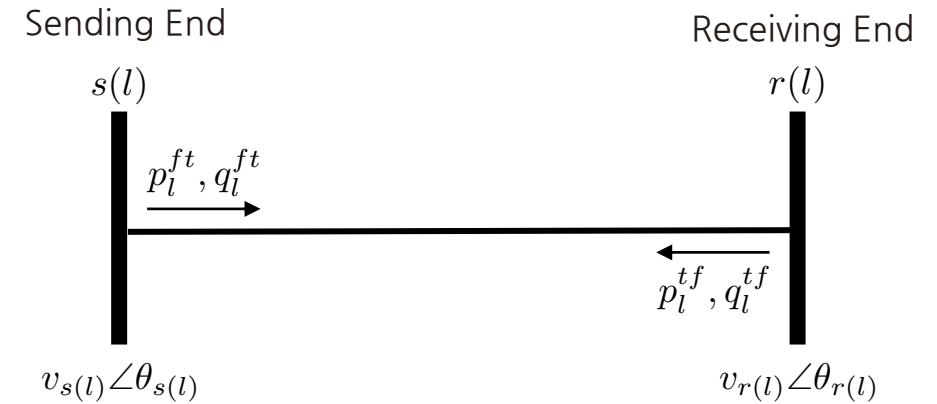
$$q_l^{ft} = -(B_l + \frac{B_l^{\text{sh}}}{2}) v_{s(l)}^2 + v_{s(l)} v_{r(l)} [B_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) - G_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$q_l^{tf} = -(B_l + \frac{B_l^{\text{sh}}}{2}) v_{r(l)}^2 + v_{s(l)} v_{r(l)} [B_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) + G_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

- 조류량 제한

$$(p_l^{ft})^2 + (q_l^{ft})^2 \leq (\bar{F}_l)^2, \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$(p_l^{tf})^2 + (q_l^{tf})^2 \leq (\bar{F}_l)^2, \quad \forall l \in \mathcal{L}$$



$v_b$ : 모선 전압 크기	$G_l$ : 선로 conductance
$\theta_b$ : 모선 전압 위상각	$B_l$ : 선로 susceptance
$s(l)$ : 송전측 모선	$B_l^{\text{sh}}$ : 충전 susceptance
$r(l)$ : 수전측 모선	$F_l$ : 선로 열적 한계

## 제약조건

- 모선 전압 크기 및 위상각 제한

$$\underline{\Delta}_l \leq \theta_{s(l)} - \theta_{r(l)} \leq \overline{\Delta}_l, \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$\underline{V}_b \leq v_b \leq \overline{V}_b, \quad \forall b \in \mathcal{B}$$

- 발전기 출력 제약

$$\underline{P}_i \leq p_i \leq \overline{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

$$\underline{Q}_i \leq q_i \leq \overline{Q}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

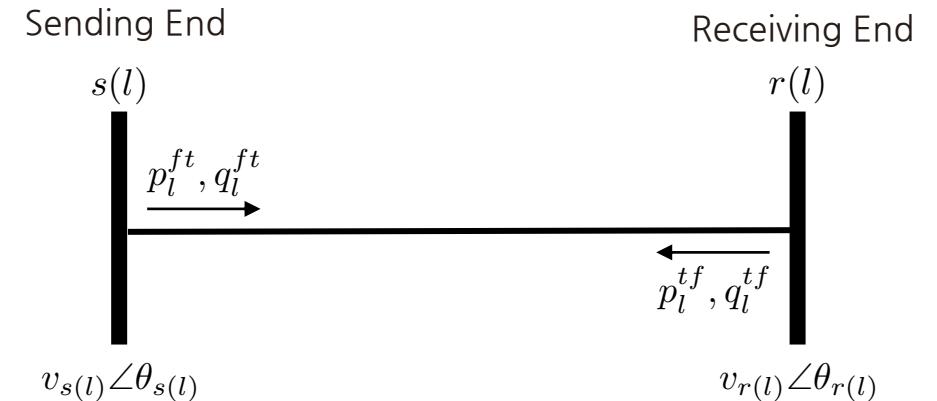
- 전력 수급 균형

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_b} p_i - \sum_{l: s(l)=b} p_l^{ft} - \sum_{l: r(l)=b} p_l^{tf} = P_b^D + G_b v_b^2 \quad \forall b \in \mathcal{B}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_b} q_i - \sum_{l: s(l)=b} q_l^{ft} - \sum_{l: r(l)=b} q_l^{tf} = Q_b^D - B_b v_b^2 \quad \forall b \in \mathcal{B}$$

## 결정변수

$$\Xi^{\text{AC}} = \{p_i, v_b \geq 0; | \theta_b | \leq \pi; q_i\}$$



$v_b$ : 모선 전압 크기	$G_l$ : 선로 conductance
$\theta_b$ : 모선 전압 위상각	$B_l$ : 선로 susceptance
$s(l)$ : 송전측 모선	$B_l^{\text{sh}}$ : 충전 susceptance
$r(l)$ : 수전측 모선	$F_l$ : 선로 열적 한계

## 문제의 규모

- 수천 개의 선로와 모선이 존재
- 네트워크 제약을 만족하도록, 수백 개의 발전기의 출력을 결정해야 함

## 비선형(Non-Linear) 구조

- 전력조류방정식이 복잡한 비선형 수식으로 구성됨
- 해를 찾기 위해 많은 계산이 필요함

## DC 최적조류계산 근사를 통한 계산 복잡도 완화

- 다수의 근사 가정 하에 전력조류를 선형 모델로 근사
  - 유효전력 성분만 고려
  - 모선 션트 Conductance 무시 및 선로저항 무시
  - 전압크기 = 1.0 p.u.
  - 작은 위상차

$$p_l^{ft} = G_l v_{s(l)}^2 - v_{s(l)} v_{r(l)} [G_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) + B_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$p_l^{tf} = G_l v_{r(l)}^2 - v_{s(l)} v_{r(l)} [G_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) - B_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$q_l^{ft} = -(B_l + \frac{B_l^{\text{sh}}}{2}) v_{s(l)}^2 + v_{s(l)} v_{r(l)} [B_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) - G_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$q_l^{tf} = -(B_l + \frac{B_l^{\text{sh}}}{2}) v_{r(l)}^2 + v_{s(l)} v_{r(l)} [B_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) + G_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

부록 참고

$$p_l^{ft} = \frac{\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}}{X_l}, \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$p_l^{tf} = \frac{\theta_{r(l)} - \theta_{s(l)}}{X_l}, \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

## AC-OPF 최적화 문제

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Xi_{\text{AC}}} \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i^g(p_i) \\
 \text{s.t.} \quad & \underline{\Delta}_l \leq \theta_{s(l)} - \theta_{r(l)} \leq \bar{\Delta}_l, \quad \forall l \in \mathcal{L} \\
 & \underline{V}_b \leq v_b \leq \bar{V}_b, \quad \forall b \in \mathcal{B} \\
 & \underline{P}_i \leq p_i \leq \bar{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\
 & \underline{Q}_i \leq q_i \leq \bar{Q}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\
 & p_l^{ft} = G_l v_{s(l)}^2 - v_{s(l)} v_{r(l)} [G_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) + B_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\
 & p_l^{tf} = G_l v_{r(l)}^2 - v_{s(l)} v_{r(l)} [G_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) - B_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\
 & q_l^{ft} = -\left(B_l + \frac{B_l^{\text{sh}}}{2}\right) v_{s(l)}^2 + v_{s(l)} v_{r(l)} [B_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) - G_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\
 & q_l^{tf} = -\left(B_l + \frac{B_l^{\text{sh}}}{2}\right) v_{r(l)}^2 + v_{s(l)} v_{r(l)} [B_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) + G_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\
 & (p_l^{ft})^2 + (q_l^{ft})^2 \leq (\bar{F}_l)^2, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\
 & (p_l^{tf})^2 + (q_l^{tf})^2 \leq (\bar{F}_l)^2, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\
 & \sum_{i \in \mathcal{I}_b} p_i - \sum_{l: s(l)=b} p_l^{ft} - \sum_{l: r(l)=b} p_l^{tf} = P_b^D + G_b v_b^2 \quad \forall b \in \mathcal{B}, \\
 & \sum_{i \in \mathcal{I}_b} q_i - \sum_{l: s(l)=b} q_l^{ft} - \sum_{l: r(l)=b} q_l^{tf} = Q_b^D - B_b v_b^2 \quad \forall b \in \mathcal{B}.
 \end{aligned}$$

## DC-OPF 최적화 문제

$$\min_{\Xi^{\text{AC}}} \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i^g(p_i)$$

$$\text{s.t. } \underline{\Delta}_l \leq \theta_{s(l)} - \theta_{r(l)} \leq \bar{\Delta}_l, \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$v_b = 1.0 \quad \underline{V}_b \leq v_b \leq \bar{V}_b, \quad \forall b \in \mathcal{B}$$

$$P_i \leq p_i \leq \bar{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$$\text{유효전력만 고려} \quad \underline{Q}_i \leq q_i \leq \bar{Q}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$$p_l^{ft} = G_l v_{s(l)}^2 - v_{s(l)} v_{r(l)} [G_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) + B_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L},$$

$$p_l^{tf} = G_l v_{r(l)}^2 - v_{s(l)} v_{r(l)} [G_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) - B_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L},$$

$$\text{유효전력만 고려} \quad q_l^{ft} = \left( B_l + \frac{B_l^{\text{sh}}}{2} \right) v_{s(l)}^2 + v_{s(l)} v_{r(l)} [B_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) - G_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L},$$

$$\text{유효전력만 고려} \quad q_l^{tf} = \left( B_l + \frac{B_l^{\text{sh}}}{2} \right) v_{r(l)}^2 + v_{s(l)} v_{r(l)} [B_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) + G_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L},$$

$$(p_l^{ft})^2 + (q_l^{ft})^2 \leq (\bar{F}_l)^2, \quad \forall l \in \mathcal{L},$$

$$(p_l^{tf})^2 + (q_l^{tf})^2 \leq (\bar{F}_l)^2, \quad \forall l \in \mathcal{L},$$

$$\text{션트 무시} \quad \sum_{i \in \mathcal{I}_b} p_i - \sum_{l: s(l)=b} p_l^{ft} - \sum_{l: r(l)=b} p_l^{tf} = P_b^D + C_o v_b^2 \quad \forall b \in \mathcal{B},$$

$$\text{유효전력만 고려} \quad \sum_{i \in \mathcal{I}_b} q_i - \sum_{l: s(l)=b} q_l^{ft} - \sum_{l: r(l)=b} q_l^{tf} = Q_b^D - B_o v_b^2 \quad \forall b \in \mathcal{B}$$

$$p_l^{ft} = \frac{\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}}{X_l}, \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$p_l^{tf} = \frac{\theta_{r(l)} - \theta_{s(l)}}{X_l}, \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$-\bar{F}_l \leq p_l^{ft} \leq \bar{F}_l, \quad \forall l \in \mathcal{L},$$

$$-\bar{F}_l \leq p_l^{tf} \leq \bar{F}_l, \quad \forall l \in \mathcal{L},$$

## DC-OPF 최적화 문제

$$\begin{aligned} \min_{\Xi^{\text{DC}}} \quad & \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i^g(p_i) \\ \text{s.t.} \quad & \underline{\Delta}_l \leq \theta_{s(l)} - \theta_{r(l)} \leq \bar{\Delta}_l, \quad \forall l \in \mathcal{L} \\ & \underline{P}_i \leq p_i \leq \bar{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ & p_l^{ft} = \frac{\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}}{X_l}, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & p_l^{tf} = \frac{\theta_{r(l)} - \theta_{s(l)}}{X_l}, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & -\bar{F}_l \leq p_l^{ft} \leq \bar{F}_l, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & -\bar{F}_l \leq p_l^{tf} \leq \bar{F}_l, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}_b} p_i - \sum_{l: s(l)=b} p_l^{ft} - \sum_{l: r(l)=b} p_l^{tf} = P_b^D \quad \forall b \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

## DC-OPF의 장점

- 계산 속도가 빠름
- 전력시장에서 모선별 가격(Nodal Price) 계산에 사용 가능

## Economic Dispatch

$$\begin{aligned} \min_{\Xi^{\text{ED}}} \quad & \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i^g(p_i) \\ \text{s.t.} \quad & \underline{P}_i \leq p_i \leq \bar{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i = P^D, \end{aligned}$$

where  $\Xi^{\text{ED}} = \{p_i \geq 0\}$ .

## DC Optimal Power Flow

$$\begin{aligned} \min_{\Xi^{\text{DC}}} \quad & \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i^g(p_i) \\ \text{s.t.} \quad & \Delta_l \leq \theta_{s(l)} - \theta_{r(l)} \leq \bar{\Delta}_l, \quad \forall l \in \mathcal{L} \\ & \underline{P}_i \leq p_i \leq \bar{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ & p_l^{ft} = \frac{\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}}{X_l}, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & p_l^{tf} = \frac{\theta_{r(l)} - \theta_{s(l)}}{X_l}, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & -\bar{F}_l \leq p_l^{ft} \leq \bar{F}_l, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & -\bar{F}_l \leq p_l^{tf} \leq \bar{F}_l, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}_b} p_i - \sum_{l: s(l)=b} p_l^{ft} - \sum_{l: r(l)=b} p_l^{tf} = P_b^D, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \end{aligned}$$

where  $\Xi^{\text{DC}} = \{p_i \geq 0; |\theta_b| \leq \pi\}$ .

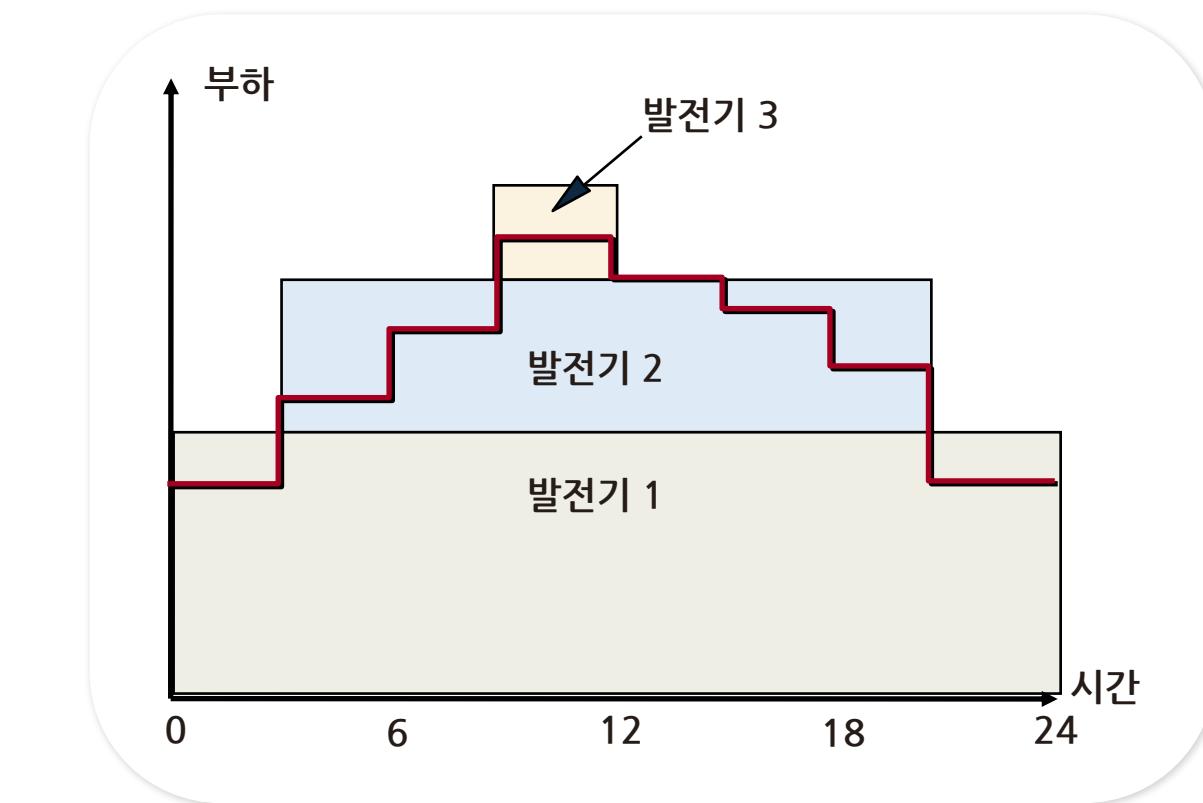
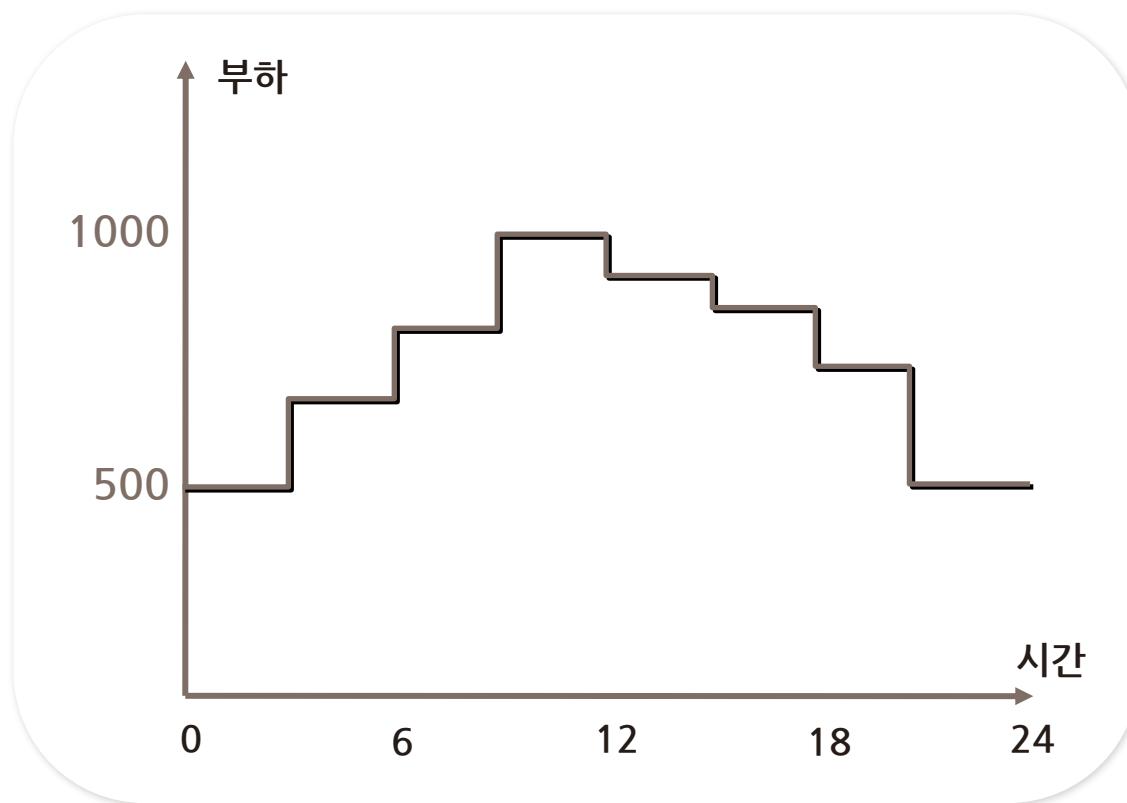
## AC Optimal Power Flow

$$\begin{aligned} \min_{\Xi^{\text{AC}}} \quad & \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i^g(p_i) \\ \text{s.t.} \quad & \Delta_l \leq \theta_{s(l)} - \theta_{r(l)} \leq \bar{\Delta}_l, \quad \forall l \in \mathcal{L} \\ & \underline{V}_b \leq v_b \leq \bar{V}_b, \quad \forall b \in \mathcal{B} \\ & \underline{P}_i \leq p_i \leq \bar{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ & \underline{Q}_i \leq q_i \leq \bar{Q}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ & p_l^{ft} = G_l v_{s(l)}^2 - v_{s(l)} v_{r(l)} [G_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) + B_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & p_l^{tf} = G_l v_{r(l)}^2 - v_{s(l)} v_{r(l)} [G_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) - B_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & q_l^{ft} = -\left(B_l + \frac{B_l^{\text{sh}}}{2}\right) v_{s(l)}^2 + v_{s(l)} v_{r(l)} [B_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) - G_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & q_l^{tf} = -\left(B_l + \frac{B_l^{\text{sh}}}{2}\right) v_{r(l)}^2 + v_{s(l)} v_{r(l)} [B_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) + G_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & (p_l^{ft})^2 + (q_l^{ft})^2 \leq (\bar{F}_l)^2, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & (p_l^{tf})^2 + (q_l^{tf})^2 \leq (\bar{F}_l)^2, \quad \forall l \in \mathcal{L}, \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}_b} p_i - \sum_{l: s(l)=b} p_l^{ft} - \sum_{l: r(l)=b} p_l^{tf} = P_b^D + G_b v_b^2, \quad \forall b \in \mathcal{B}, \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}_b} q_i - \sum_{l: s(l)=b} q_l^{ft} - \sum_{l: r(l)=b} q_l^{tf} = Q_b^D - B_b v_b^2, \quad \forall b \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

where  $\Xi^{\text{AC}} = \{p_i, v_b \geq 0; |\theta_b| \leq \pi; q_i\}$ .

기동정지계획은 어떤 발전기를 언제 **기동·정지**시킬지 결정하는 문제

- 주어진 시간대별 부하에 대한 최적 기동정지계획 수립



## 목적함수 - 총 비용 최소화

$$\min_{\Xi^{\text{ED}}} \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i^g(p_i)$$

## 제약조건

- 발전기 출력 제약

$$\underline{P}_i \leq p_i \leq \overline{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

- 전력 수급 균형

$$P^d = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i$$

$i \in \mathcal{I}$  : 발전기 집합       $p_i$  : 발전량  
 $C_i^g(p_i)$  : 발전 비용 함수  
 $\underline{P}_i$  : 최소 발전량  
 $\overline{P}_i$  : 최대 발전량  
 $P^d$  : 전력 수요

## 목적함수 - 총 비용 최소화

$$\min \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{t \in \mathcal{T}} C_i^g(p_{it})$$

## 제약조건

- 발전기 출력 제약

$$\underline{P}_i \leq p_{it} \leq \overline{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}$$

- 전력 수급 균형

$$P_t^d = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{it}, \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

$i \in \mathcal{I}$  : 발전기 집합       $p_{it}$  : 발전량  
 $t \in \mathcal{T}$  : 시간 집합       $C_i^g(p_{it})$  : 발전 비용 함수  
 $\underline{P}_i$  : 최소 발전량  
 $\overline{P}_i$  : 최대 발전량  
 $P_t^d$  : 전력 수요

## 기동정지계획 모델링

- 주어진 시간대에 대하여 문제 확장

## 목적함수 - 총 비용 최소화

$$\min \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{t \in \mathcal{T}} (C_i^g(p_{it}) + C_i^u(u_{it}))$$

## 제약조건

- 발전기 출력 제약

$$P_i u_{it} \leq p_{it} \leq \bar{P}_i u_{it}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}$$

→ 기동 시:  $P_i \leq p_{it} \leq \bar{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}$

정지 시:  $0 \leq p_{it} \leq 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}$

- 전력 수급 균형

$$P_t^d = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{it}, \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

$i \in \mathcal{I}$ :	발전기 집합	$p_{it}$ :	발전량
$t \in \mathcal{T}$ :	시간 집합	$C_i^g(p_{it})$ :	발전 비용 함수
$u_{it}$ :	기동상태	$P_i$ :	최소 발전량
		$\bar{P}_i$ :	최대 발전량
		$P_t^d$ :	전력 수요

## 기동정지계획 모델링

- 주어진 시간대에 대하여 문제 확장
- 발전기 기동상태 변수  $u_{it}$  도입
  - 발전기 기동 시  $u_{it} = 1$
  - 발전기 정지 시  $u_{it} = 0$

## 목적함수 - 총 비용 최소화

$$\min \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{t \in \mathcal{T}} (C_i^g(p_{it}) + C_i^u(u_{it}))$$

## 제약조건

- 발전기 출력 제약

$$\underline{P}_i u_{it} \leq p_{it} \leq \bar{P}_i u_{it}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}$$

- 전력 수급 균형

$$P_t^d = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{it}, \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

- 발전기 출력 증감발 제약

$$p_{it} - p_{i,t-1} \leq P_i^{\text{RU}}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} \setminus \{1\}$$

$$p_{i,t-1} - p_{it} \leq P_i^{\text{RD}}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} \setminus \{1\}$$

$i \in \mathcal{I}$ :	발전기 집합	$p_{it}$ :	발전량
$t \in \mathcal{T}$ :	시간 집합	$C_i^g(p_{it})$ :	발전 비용 함수
$u_{it}$ :	기동상태	$\underline{P}_i$ :	최소 발전량
$C_i^u(u_{it})$ :	기동 비용 함수	$\bar{P}_i$ :	최대 발전량
$P_i^{\text{RU}}, P_i^{\text{RD}}$ :	최대 증감발량	$P_t^d$ :	전력 수요

## 기동정지계획 모델링

- 주어진 시간대에 대하여 문제 확장
- 발전기 기동상태 변수  $u_{it}$  도입
  - 발전기 기동 시  $u_{it} = 1$
  - 발전기 정지 시  $u_{it} = 0$
- 발전기 출력 증감발 제약 추가

## 목적함수 - 총 비용 최소화

$$\min \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{t \in \mathcal{T}} (C_i^g(p_{it}) + C_i^u(u_{it}))$$

## 제약조건

- 발전기 출력 제약

$$\underline{P}_i u_{it} \leq p_{it} \leq \bar{P}_i u_{it}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}$$

- 전력 수급 균형

$$P_t^d = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{it}, \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

- 발전기 출력 증감발 제약

$$p_{it} - p_{i,t-1} \leq P_i^{\text{RU}}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} \setminus \{1\}$$

$$p_{i,t-1} - p_{it} \leq P_i^{\text{RD}}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T} \setminus \{1\}$$

- 발전기 최소 운전/정지시간 제약, 예비력 확보량 제약, 논리 제약

→ 부록 참고

$i \in \mathcal{I}$	: 발전기 집합	$p_{it}$	: 발전량
$t \in \mathcal{T}$	: 시간 집합	$C_i^g(p_{it})$	: 발전 비용 함수
$u_{it}$	: 기동상태	$\underline{P}_i$	: 최소 발전량
$C_i^u(u_{it})$	: 기동 비용 함수	$\bar{P}_i$	: 최대 발전량
$P_i^{\text{RU}}, P_i^{\text{RD}}$	: 최대 증감발량	$P_t^d$	: 전력 수요

## 기동정지계획 모델링

- 주어진 시간대에 대하여 문제 확장
- 발전기 기동상태 변수  $u_{it}$  도입
  - 발전기 기동 시  $u_{it} = 1$
  - 발전기 정지 시  $u_{it} = 0$
- 발전기 출력 증감발 제약 추가
- 발전기 최소 운전/정지시간 제약,  
예비력 확보량 제약, 논리 제약 추가

## Part 2.

---

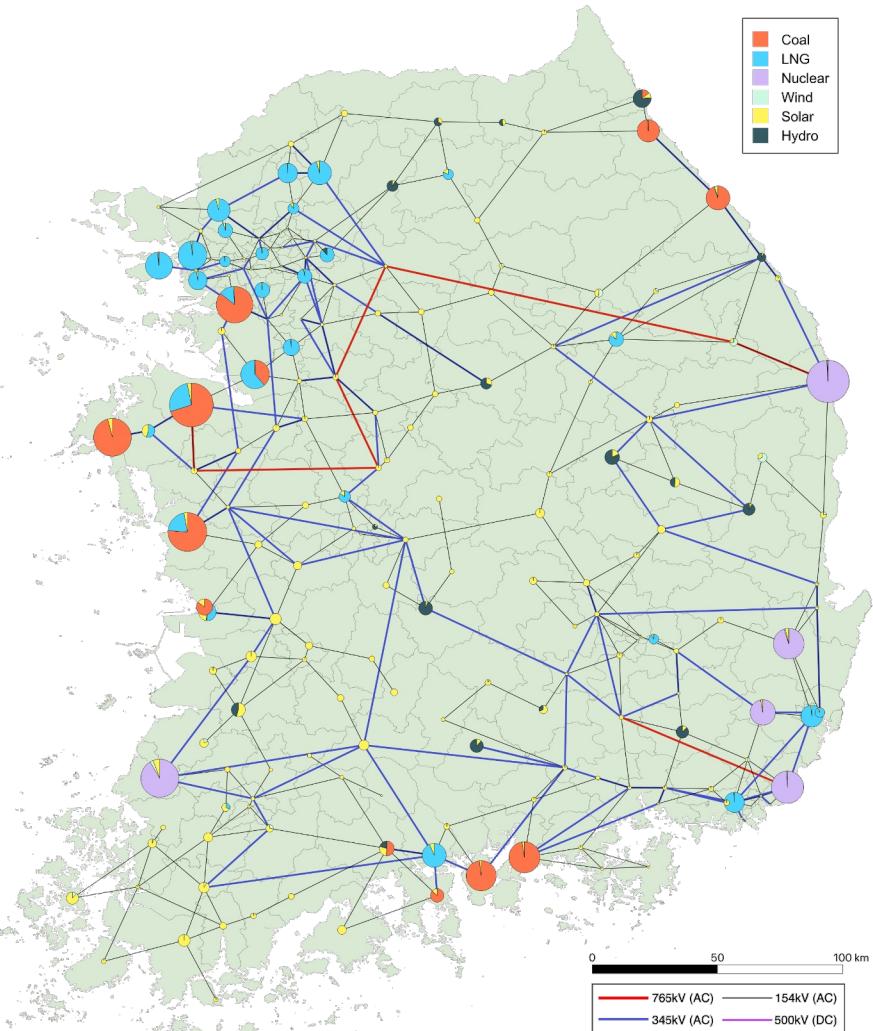
# 계통운영최적화 실습

## KPG-193 TestGrid

- 2022년을 기준으로 한국 송전망을 모델링한 시험계통
- 193개 모선 / 122개 발전기 / 359개 송전선로
- **공개된 자료만을 사용한 Open-source Model [4]**

KPG193_VER1_5	
└ mustoff	nuclear_mustoff.csv
└ network	
└ location	bus_location.csv
└ m	KPG193_ver1_5.m
└ mat	KPG193_ver1_5.mat
└ profile	
> commitment_decision	
> demand	
> renewables	
> weather	
└ renewables_capacity	
└ hydro_generators_2022.csv	
└ solar_generators_2022.csv	
└ wind_generators_2022.csv	
└ LICENSE	

- } 원전 계획정지 데이터 (실적)
- } 모선 위치 (위도, 경도)
- } 네트워크 데이터 (MATPOWER)
- } 프로파일 데이터  
(1시간 단위, 총 8760시간)
- } 모선별 재생에너지 용량



[4] Song, G., & Kim, J., "KPG 193: A Synthetic Korean Power Grid Test System for Decarbonization Studies", 2024

## Julia의 JuMP 패키지를 이용한 최적화 모델링

```

50  # =====
51  # Build and Solve ED Model
52  # =====
53
54  m = Model(HiGHS.Optimizer)
55
56  @variable(m, pg[g in 1:n_gens] ≥ 0)
57
58  @constraint(m, gen_pmax[g in 1:n_gens], Gen_Pmin[g] ≤ pg[g] ≤ Gen_Pmax[g])
59
60  @constraint(m, power_balance,
61    sum(pg[g] for g in 1:n_gens) = sum(Demand))
62
63  @objective(m, Min,
64    sum(Gen_Cost[g][1] * pg[g]^2 + Gen_Cost[g][2] * pg[g] + Gen_Cost[g][3]
65      for g in 1:n_gens))
66
67  optimize!(m)

```

모델선언 {  
결정변수 {  
제약조건 {  
목적함수 {

“script/solve\_ed.jl”

### 최적화 문제 - 경제 급전

$$\begin{aligned}
 \text{목적함수} & \left\{ \begin{array}{l} \min_{\Xi^{\text{ED}}} \sum_{i \in \mathcal{I}} C_i^g(p_i) \\ \text{s.t. } \underline{P}_i \leq p_i \leq \bar{P}_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\ \sum_{i \in \mathcal{I}} p_i = P^D. \end{array} \right. \\
 \text{제약조건} & \\
 \text{결정변수} & \left\{ \begin{array}{l} \text{where } \Xi^{\text{ED}} = \{p_i \geq 0\}. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

## Julia의 PowerModels.jl 패키지를 이용한 최적조류계산 수행

Day(1~365) 및  
KPG193 경로 설정

```
17  # =====
18  # Configuration
19  # =====
20
21  solve_day = 1
22  data_dir = "data/KPG193_ver1_5"
23
24
25  # =====
26  #
27  #          OPTIMAL POWER FLOW SPECIFIC
28  #
29  # =====
30
31  include("../src/prepare_opf.jl")
32
33  # Prepare OPF data
34  mn_data = prepare_opf(
35      data_dir,
36      num_hours = NUM_HOURS,
37      day = solve_day
38  )
39
40  # Solve the multi-network OPF problem
41  # result = solve_mn_opf(mn_data, DCPPowerModel, Ipopt.Optimizer) # DC OPF
42  result = solve_mn_opf(mn_data, ACPPowerModel, Ipopt.Optimizer) # AC OPF
43
44  println("Optimization terminated with status: $(result["termination_status"]))
45  println("Objective value: $(result["objective"]))
```

“script/solve\_opf.jl”

KPG193  
데이터 전처리

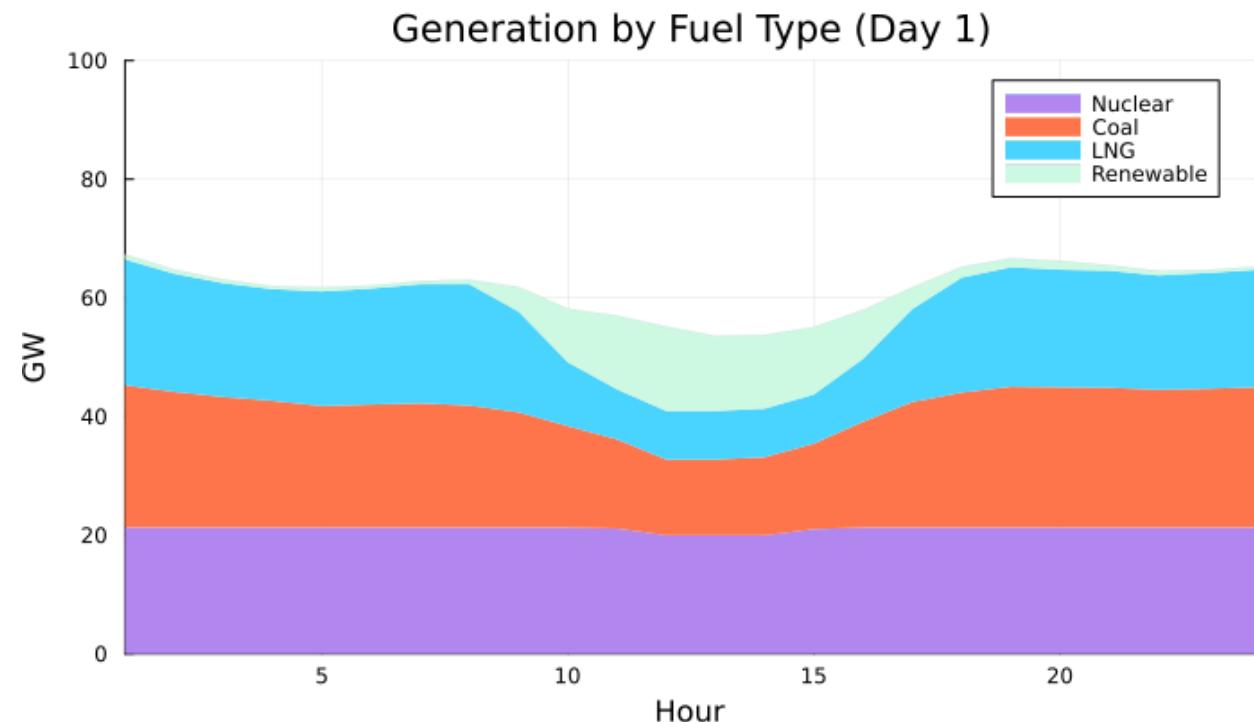
최적조류계산  
수행

→ 패키지가 결정변수, 제약조건, 목적함수를 자동으로 만듦

## 최적조류계산 수행 결과

	A	B	C	D
1	hour	generator_id	dispatchP_MW	dispatchQ_MVAR
2	1	1	880.0000087	-111.498772
3	1	3	509.2427063	-111.498772
4	1	4	823.5170852	29.40093263
5	1	5	880.0000087	28.11399495
6	1	10	440.0000044	-66.9401476
7	1	12	770.0000076	-385.0000016
8	1	13	880.0000088	-179.432117
9	1	19	780.1306095	-23.6697983
10	1	21	880.0000087	-23.6697983
11	1	24	677.3388821	-70.34659923
12	1	25	770.0000077	-54.17739951
13	1	28	536.9026038	108.766627
14	1	29	690.5758344	90.48454491
15	1	30	675.9594278	90.48454491
16	1	31	573.5513808	90.48454491

“results/opf/dispatch/dispatch\_results.csv”



“results/opf/graph/generation\_by\_fuel.png”

## Julia의 UnitCommitment.jl 패키지를 이용한 기동정지계획 수행

```

14 # =====
15 # Configuration
16 # =====
17
18 solve_day = 1
19 data_dir = joinpath("data", "KPG193_ver1_4")
20
21 # =====
22 #
23 #          UNIT COMMITMENT SPECIFIC
24 #
25 # =====
26
27
28 include(joinpath("../src", "prepare_uc.jl"))
29
30 network_output_file = joinpath("results", "uc", "network", "kpg193_uc_day$(solve_day).json")
31
32 # Prepare UC data
33 uc_data = prepare_uc(
34     data_dir,
35     num_hours = NUM_HOURS,
36     day = solve_day,
37     output_path = network_output_file
38 )
39
40 # Load instance and build optimization model
41 instance = UnitCommitment.read(network_output_file)
42
43 model = UnitCommitment.build_model(           → 패키지가 결정변수, 제약조건, 목적함수를 자동으로 만듦
44     instance =
45     optimizer = HiGHS.Optimizer,
46     formulation = UnitCommitment.Formulation(
47         transmission = UnitCommitment.ShiftFactorsFormulation()
48     )
49 )
50
51 scenario = instance.scenarios[1]
52 UnitCommitment.optimize!(model)
53
54 println("Optimization terminated with status: $(termination_status(model))")
55

```

Day(1~365) 및 KPG193 경로 설정

KPG193 데이터 전처리

기동정지계획 모델 생성

기동정지계획 수행

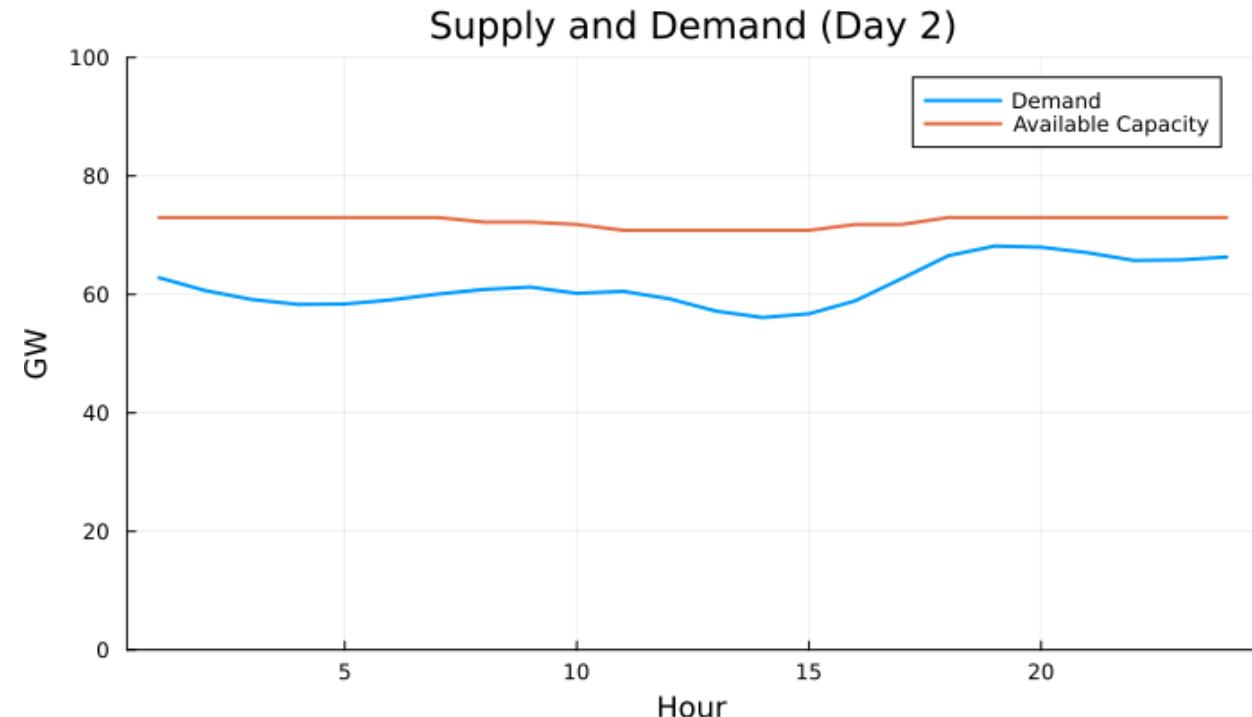
“script/solve\_uc.jl”

패키지가 **결정변수**, **제약조건**, **목적함수**를 자동으로 만듦

## 기동정지계획 수행 결과

1	A	B	C	D	E
hour	generator_id	status	dispatch_MW	initial_status	
2258	1	95	1	400	9
2259	2	95	1	400	10
2260	3	95	1	400	11
2261	4	95	1	400	12
2262	5	95	1	400	13
2263	6	95	1	400	14
2264	7	95	1	400	15
2265	8	95	1	400	16
2266	9	95	1	400	17
2267	10	95	0	0	-1
2268	11	95	0	0	-2
2269	12	95	0	0	-3
2270	13	95	0	0	-4
2271	14	95	0	0	-5
2272	15	95	0	0	-6

“results/uc/commitment/commitment\_results.csv”



“results/uc/graph/supply\_and\_demand.png”

**Thank you  
For your attention**

---

**Geonho Song**

Ph.D. Student | Department of Energy Engineering  
Korea Institute of Energy Technology (KENTECH)

부록

---

# APPENDIX

## DC 전력 조류 방정식 - 다수의 근사 가정 하에 선형 관계를 제공

### 1. 유효전력 성분만 고려

$$p_l^{ft} = G_l v_{s(l)}^2 - v_{s(l)} v_{r(l)} [G_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) + B_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$p_l^{tf} = G_l v_{r(l)}^2 - v_{s(l)} v_{r(l)} [G_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) - B_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$q_l^{ft} = -(B_l + \frac{B_l^{\text{sh}}}{2}) v_{s(l)}^2 + v_{s(l)} v_{r(l)} [B_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) - G_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

$$q_l^{tf} = -(B_l + \frac{B_l^{\text{sh}}}{2}) v_{r(l)}^2 + v_{s(l)} v_{r(l)} [B_l \cos(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) + G_l \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})], \quad \forall l \in \mathcal{L}$$

### 2. 버스 션트 컨덕턴스 무시 및 선로저항 무시 ( $R_l \ll X_l$ )

$$G_b \approx 0, \quad G_l = \frac{R_l}{R_l^2 + X_l^2} \approx 0, \quad B_l = -\frac{X_l}{R_l^2 + X_l^2} \approx -\frac{1}{X_l}$$

$$p_l^{ft} = \frac{v_{s(l)} v_{r(l)} \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})}{X_l}, \quad p_l^{tf} = -\frac{v_{s(l)} v_{r(l)} \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})}{X_l}$$

2. 버스 션트 컨덕턴스 무시 및 선로저항 무시 ( $R_l \ll X_l$ )

$$p_l^{ft} = \frac{v_{s(l)} v_{r(l)} \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})}{X_l}, \quad p_l^{tf} = -\frac{v_{s(l)} v_{r(l)} \sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})}{X_l}$$

3. 전압크기 = 1.0 p.u. ( $v_b = 1.0$ )

$$p_l^{ft} = +\frac{\sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})}{X_l},$$
$$p_l^{tf} = -\frac{\sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})}{X_l}$$

4. 작은 위상차

$$\sin(\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}) \approx (\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)})$$

$$p_l^{ft} = \frac{\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}}{X_l},$$
$$p_l^{tf} = -\frac{\theta_{s(l)} - \theta_{r(l)}}{X_l} = \frac{\theta_{r(l)} - \theta_{s(l)}}{X_l}$$

## 목적함수 - 총 비용 최소화

$$\min_{\Xi^{\text{UC}}} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{t \in \mathcal{T}} \left( C_i^G(p_{it}) + C_i^U(v_{it}) + C_i^D(w_{it}) \right)$$

## 결정 변수

- $u_{it}$  : 발전기 on/off 상태
  - $u_{it} = 1$  : 발전기 i가 t시간에 운전 중(Online)
  - $u_{it} = 0$  : 발전기 i가 t시간에 정지 중(Offline)
- $v_{it}$  : 발전기 기동 결정 변수
  - $v_{it} = 1$  : 발전기 i가 t시간에 기동함(Start up)
  - $v_{it} = 0$  : 발전기 i가 t시간에 기동하지 않음
- $w_{it}$  : 발전기 정지 결정 변수
  - $w_{it} = 1$  : 발전기 i가 t시간에 정지함(Shut-down)
  - $w_{it} = 0$  : 발전기 i가 t시간에 정지하지 않음
- $p_{it}$  : 발전기 출력
- $r_{it}^+, r_{it}^-$  : 발전기 상향/하향 예비력

이진 변수

연속 변수

[7] Morales-España, G., Latorre, J. M., & Ramos, A., "Tight and compact MILP formulation for the thermal unit commitment problem", 2013

## 제약조건(Constraints)

- 발전기 출력 제약

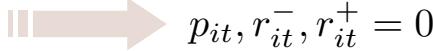
$$p_{it} - r_{it}^- \geq \underline{P}_i u_{it}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T},$$

$$p_{it} + r_{it}^+ \leq \overline{P}_i u_{it} - (\overline{P}_i - P_i^{\text{SU}}) v_{it} - (\overline{P}_i - P_i^{\text{SD}}) w_{i,t+1}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T},$$

- 발전기가 t시간에 정지해 있는 경우,  $u_{it} = v_{it} = w_{i,t+1} = 0$

$$p_{it} - r_{it}^- \geq 0$$

$$p_{it} + r_{it}^+ \leq 0$$



$$p_{it}, r_{it}^-, r_{it}^+ = 0$$

- 발전기가 t시간에 기동하는 경우,  $u_{it} = v_{it} = 1, w_{i,t+1} = 0$

$$p_{it} - r_{it}^- \geq \underline{P}_i$$

$$p_{it} + r_{it}^+ \leq P_i^{\text{SU}}$$



기동한계(Startup limit)내에서 운전

- 발전기가 t+1시간에 정지하는 경우,  $u_{it} = v_{it} = 1 = w_{i,t+1} = 1$

$$p_{it} - r_{it}^- \geq \underline{P}_i$$

$$p_{it} + r_{it}^+ \leq P_i^{\text{SD}}$$

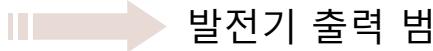


정지한계(Shutdown limit)내에서 운전

- 운전중인 발전기의 경우 (Start up, Shut down x),  $u_{it} = 1, v_{it} = w_{i,t+1} = 0$

$$p_{it} - r_{it}^- \geq \underline{P}_i$$

$$p_{it} + r_{it}^+ \leq \overline{P}_i$$



발전기 출력 범위 안에서 운전

## 제약조건(Constraints)

- 발전기 출력 감발 제약

$$p_{it} + r_{it}^+ - p_{i,t-1} \leq P_i^{\text{RU}}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T},$$

$$p_{i,t-1} - (p_{it} - r_{it}^-) \leq P_i^{\text{RD}}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T},$$

- 발전기 최소 운전 시간

$$\sum_{\tau=t-TU_i+1}^t v_{i,\tau} \leq u_{i,t}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in [TU_i, T],$$

- 최소 운전 시간이 2시간인 경우 ( $TU_i = 2$ )

$t$	1	2	3	4	5	6
$v_{it}$	0	0	0	1	0	0
$u_{it}$	0	0	0	(a)	(b)	(c)

$$(a) : \sum_{\tau=4-2+1}^4 v_{i,\tau} = \sum_{\tau=3}^4 v_{i,\tau} = 1 \leq u_{i,4} \quad \rightarrow \quad u_{i,4} = 1$$

$$(b) : \sum_{\tau=5-2+1}^5 v_{i,\tau} = \sum_{\tau=4}^5 v_{i,\tau} = 1 \leq u_{i,5} \quad \rightarrow \quad u_{i,5} = 1$$

$$(c) : \sum_{\tau=6-2+1}^6 v_{i,\tau} = \sum_{\tau=5}^6 v_{i,\tau} = 0 \leq u_{i,6} \quad \rightarrow \quad \text{최소 운전 시간이 지나면 제약 비활성}$$

[7] Morales-España, G., Latorre, J. M., & Ramos, A., "Tight and compact MILP formulation for the thermal unit commitment problem", 2013

## 제약조건(Constraints)

- 발전기 최소 정지 시간

$$\sum_{\tau=t-TD_i+1}^t w_{i,\tau} \leq 1 - u_{i,t}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in [TD_i, T],$$

- 최소 정지 시간이 2시간인 경우 ( $TD_i = 2$ )

$t$	1	2	3	4	5	6
$w_{it}$	0	0	0	1	0	0
$u_{it}$	1	1	1	(d)	(e)	(f)

- 논리 제약 (Logical Constraint)

$$u_{it} - u_{i,t-1} = v_{it} - w_{it}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T},$$

$t$	$t-1$	$t$
$v_{it}$		1
$u_{it}$	0	1
$w_{it}$		0

기동 시 (Start up)

$t$	$t-1$	$t$
$v_{it}$		0
$u_{it}$	1	0
$w_{it}$		1

정지 시 (Shut down)

$$(d) : \sum_{\tau=4-2+1}^4 w_{i,\tau} = \sum_{\tau=3}^4 w_{i,\tau} = 1 \leq 1 - u_{i,4} \rightarrow u_{i,4} = 0$$

$$(e) : \sum_{\tau=5-2+1}^5 w_{i,\tau} = \sum_{\tau=4}^5 w_{i,\tau} = 1 \leq 1 - u_{i,5} \rightarrow u_{i,5} = 0$$

$$(f) : \sum_{\tau=6-2+1}^6 w_{i,\tau} = \sum_{\tau=5}^6 w_{i,\tau} = 0 \leq 1 - u_{i,6} \rightarrow u_{i,6} = 1$$

최소 정지 시간이 지나면  
제약 비활성

$t$	$t-1$	$t$
$v_{it}$		0
$u_{it}$	0	0
$w_{it}$		0

최소 기동, 정지 제약조건과 함께 제약되어  $v_{it} = v_{it} = 0$

## 제약조건(Constraints)

- 예비력 확보량 제약

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} r_{it}^+ \geq R_t^+, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} r_{it}^- \geq R_t^-, \quad \forall i \in \mathcal{I},$$

- 전력수급 균형 제약

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} P_{bt}^d = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{it}, \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

[7] Morales-España, G., Latorre, J. M., & Ramos, A., "Tight and compact MILP formulation for the thermal unit commitment problem", 2013

## UC 최적화 문제

$$\begin{aligned}
 & \min_{\Xi^{\text{UC}}} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{t \in \mathcal{T}} \left( C_i^G(p_{it}) + C_i^U(v_{it}) + C_i^D(w_{it}) \right) \\
 \text{s.t. } & p_{it} - r_{it}^- \geq \underline{P}_i u_{it}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \\
 & p_{it} + r_{it}^+ \leq \bar{P}_i u_{it} - (\bar{P}_i - P_i^{\text{SU}}) v_{it} - (\bar{P}_i - P_i^{\text{SD}}) w_{i,t+1}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \\
 & p_{it} + r_{it}^+ - p_{i,t-1} \leq P_i^{\text{RU}}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \\
 & p_{i,t-1} - (p_{it} - r_{it}^-) \leq P_i^{\text{RD}}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \\
 & \sum_{\tau=t-TU_i+1}^t v_{i,\tau} \leq u_{i,t}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in [TU_i, T], \\
 & \sum_{\tau=t-TD_i+1}^t w_{i,\tau} \leq 1 - u_{i,t}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in [TD_i, T], \\
 & u_{it} - u_{i,t-1} = v_{it} - w_{it}, \quad \forall i \in \mathcal{I}, t \in \mathcal{T}, \\
 & \sum_{i \in \mathcal{I}} r_{it}^+ \geq R_t^+, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\
 & \sum_{i \in \mathcal{I}} r_{it}^- \geq R_t^-, \quad \forall i \in \mathcal{I}, \\
 & \sum_{b \in \mathcal{B}} P_{bt}^d = \sum_{i \in \mathcal{I}} p_{it}, \quad \forall t \in \mathcal{T}
 \end{aligned}$$

where  $\Xi^{\text{UC}} = \{u_{it}, y_{it}, z_{it} \in \{0, 1\}; p_{it}, r_{it}^+, r_{it}^- \geq 0\}$

[7] Morales-España, G., Latorre, J. M., & Ramos, A., "Tight and compact MILP formulation for the thermal unit commitment problem", 2013