

Grimaldi

Capítulo 1

1. Un número telefónico consta de siete cifras enteras. Supongamos que la primera cifra debe ser un número entre 2 y 9, ambos inclusive. La segunda y la tercera cifra deben ser números entre 1 y 9, ambos inclusive. Cada una de las restantes cifras es un número entre 0 y 9, ambos inclusive. ¿Cuántos números de teléfono distintos pueden formarse con estas condiciones?

Primero tenemos 8 casos. Para la segunda y tercera juntas son $RV_{9,2}$ y los demás serán $RV_{10,4}$

El número de teléfonos es $8 * 9^2 * 10^4$

2. El consejo directivo de una empresa informática tiene 10 miembros. Se ha programado una próxima reunión de accionistas para aprobar una nueva lista de ejecutivos (elegidos entre los 10 miembros del consejo). ¿Cuántas listas diferentes, formadas por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, pueden presentar el consejo a los accionistas para su aprobación? Si tres miembros del consejo son ingenieros en informática ¿cuántas de las anteriores listas tienen:

- a) un ingeniero propuesto para la presidencia?
- b) exactamente un ingeniero en la lista?
- c) al menos un ingeniero en la lista?

- a) Llamemos a los miembros 1, 2, 3, 10. Una lista sería 1, 2, 3, 4 otra sería 4, 5, 3, 1 donde el orden importa ya que el primero sería el presidente, el segundo el vicepresidente, el tercero el secretario y el cuarto el tesorero, es decir que la lista 1, 2, 3, 4 no sería la misma que la 4, 3, 2, 1 ya que el primer caso el presidente sería 1 y en el segundo sería 4. Obviamente no hay repetición.

Así pues, el número de listas es $V_{10,4} = 10000$ a) Si tres miembros del consejo son ingenieros. ¿En Cuántas listas hay un ingeniero propuesto para la presidencia?

Fijamos el presidente (3 casos) y variamos a los restantes. Tendríamos entonces

$$3 * V_{9,3} = 3 * 9 * 8 * 7$$

- b) En cuantas listas hay exactamente un ingeniero. Tenemos 3 ingenieros para 4 posiciones y los 7 miembros restantes los variamos de 3 en 3 $3 * 4 * v_{7,3}$
- c) En cuantas listas hay por lo menos un ingeniero. Calculamos todas las que no tienen ningún ingeniero y las restamos del total, es decir $v_{10,14} - v_{7,14}$

3. Una empresa produce cerraduras de combinación. Cada combinación consta de tres números enteros del 0 al 99, ambos inclusive. Por el proceso de construcción de las cerraduras cada número no puede aparecer más de una sola vez en la combinación de la cerradura. ¿Cuántas cerraduras diferentes pueden construirse?

S.//Una posible combinación sería 1, 23, 87 que sería distinta de 23, 1, 87, por lo que importa el orden. Por otra parte, nos dicen que cada número no puede aparecer más de una sola vez, por lo que no hay repetición. Se trata de $V_{100,3} = 100 * 99 * 98$

4. Una mano de bridge consta de 13 cartas del conjunto de 52 de la baraja francesa.

a) ¿Cuántas manos de bridge son posibles?

b) ¿De cuántas formas se le puede dar a una persona 6 picas y 5 corazones?

a)) El número posibles de manos es obviamente $C_{52,13}$ pues el orden en que estén dadas las cartas no influye en la mano y no puede haber repetición por no haber cartas repetidas.

b) En una mano hay $C_{13,6}$ de dar 6 picas, pues tengo 13 picas para dar 6. Análogamente para dar 5 corazones serían $C_{13,5}$. Por último me quedan todavía dos cartas por dar para completar la mano, de donde puedo elegir cualquiera que no sea picas ni corazones, es decir 13 tréboles y 13 rombos, es decir $C_{26,2}$ Por tanto el resultado final es $C_{13,6}C_{13,5}C_{26,2}$

5. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 7 se forman números de cinco cifras que no tengan ninguna repetida. a) ¿Cuántos números se pueden formar? b) ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 4 y cuántos son múltiplos de 2?

a) Importa el orden y no hay repetición $v_{6,5} = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 = 720$

b) Son múltiplos de 4 los que acaban en 12,24,32,44,52,72

Acaban en 12 $v_{4,3} = 4 * 3 * 2 = 24$. Por tanto, los múltiplos de 4 son

$5 * 24 = 120$. Como hay 720 casos, acaban en una cifra concreta de las 6, $720/6 = 120$ y como para ser pares tienen que acabar en 2 o 4, el número de pares que hay es 240.

6. Un profesor del Departamento de Computación tiene siete libros de programación diferentes en una estantería. Tres de los libros son de FORTRAN y los otros cuatro de PASCAL. ¿De cuántas formas puede ordenar el profesor estos libros si:

a) no hay restricciones?

b) los lenguajes se deben alternar?

c) todos los libros de FORTRAN deben estar juntos?

d) todos los libros de FORTRAN deben estar juntos y los libros de PASCAL también?

a) Si constituyen siete libros diferentes, el resultado es $p_7 = 7!$

b) Los lenguajes deben alternar, es decir $p_1 f_1 f_2 f_3 f_4$

y siempre deben estar colocados así variando solamente los subíndices. Por cada cuaterna de los de Pascal tengo $p_3 = 3!$ ternas de Fortran. Por tanto, la solución es $p_4 * p_3 = 4! * 3!$

c) Si los libros de Fortran deben estar juntos, puedo considerar un bloque a los tres permutados entre sí, es decir, por ejemplo:

$$p_1(FFF)p_2p_3p_4$$

El número de casos que tendríamos en esa situación sería $p_5 = 5!$, pero a su vez los elementos de FFF permutan entre sí 3 veces, por lo que el resultado pedido será:

$$p_5 * p_3 = 5! * 3!$$

d) Si los de Fortran deben estar juntos y los de Pascal también tenemos los dos casos FFFPPPP o PPPFFF, es decir p_2 , pero a su vez el bloque FFF presenta p_3 casos y el bloque PPPP presenta p_4 casos. El resultado final sería:

$$p_2 * p_3 * p_4 = 2! * 3! * 4!$$

7. ¿De cuántas formas se pueden colocar las letras de la palabras POLIINSATURADO de modo que se mantenga el orden en que aparecen las vocales?

$$P_7 * C_{14,7}$$

8. Un estudiante debe responder siete de las diez preguntas de un examen. ¿De cuántas formas puede hacer su elección si:

- a) no hay restricciones
- b) debe contestar las dos primeras preguntas
- c) debe responder al menos cuatro de las seis primeras preguntas

a) Si las preguntas las numeramos del 1 al 10, una posible respuesta sería 9834567, que es la misma, aunque alteremos el orden y no hay posible repetición. Se trata de combinaciones de 10 tomadas 7 a 7, es decir $C_{10,7}$

b) Si debe responder a las dos primeras, todos los casos comenzarán por 12---- y me quedan cinco preguntas por responder de los 8 restantes, por tanto serán $C_{8,5}$

c) Si tiene que responder al menos cuatro de las seis primeras tenemos:

Que responda exactamente 4 de las 6 primeras: $C_{6,4} \cdot C_{4,3}$

Que responda exactamente 5 de las 6 primeras: $C_{6,5} \cdot C_{4,2}$

Que responda exactamente 6 de las 6 primeras: $C_{6,6} \cdot C_{4,1}$ El resultado por tanto será: $6C_{6,4} + 6C_{6,5} + 4$

9. ¿Cuántos números enteros entre 1000 y 9999 satisfacen que la suma de sus dígitos es exactamente 9? ¿Cuántos de los números anteriores tienen todas sus cifras diferentes de cero?

a) $\binom{-4}{8} = \binom{11}{8} = C_{12}^9$

b) Es equivalente $-\binom{-4}{5} = \binom{8}{5} = C_8^5$

10. En una heladería se sirven 7 tipos de helados.

c) ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir 12 helados?

d) ¿De cuántas maneras se pueden elegir 12 helados si tiene que haber al menos uno de cada tipo?

a) Sería equivalente a averiguar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $x + y + z + t + u + v + w = 12$, con x, y, z, t, u, v, w no negativos. Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^{12} en el producto $(1+x+x^2+x^3+\dots)$.

$$\binom{-7}{12} = \binom{18}{12}$$

b) Sería equivalente a averiguar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $x + y + z + t + u + v + w = 12$, con $x, y, z, t, u, v, w \geq 1$. Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^{12} en el producto $(x+x^2+x^3+\dots)^7$, es decir el coeficiente de x^{12} en $x^7(1-x)^{-7}$ que es el coeficiente de x^5 en $(1-x)^{-7}$ que es

$$-\binom{7}{5} = \binom{11}{5}$$

Capítulo 2

1. Construya la tabla de verdad:

$$p \leftrightarrow [(q \wedge r) \rightarrow \neg(s \vee r)]$$

| p | q | r | S | p | | q | | r | | s | | r | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|
| V | V | V | V | V | F | V | V | V | F | V | F | V | | |
| V | V | V | F | V | F | V | V | V | F | F | F | V | | |
| V | V | F | V | V | V | V | F | F | V | V | F | F | | |
| V | V | F | F | V | F | V | F | F | V | F | V | F | | |
| V | F | V | V | V | V | F | F | V | V | V | F | V | | |
| V | F | V | F | V | F | F | F | V | V | F | F | V | | |
| V | F | F | V | V | V | F | F | F | V | V | F | F | | |
| V | F | F | F | V | F | F | F | F | V | F | V | F | | |
| F | V | V | V | F | F | V | V | V | F | V | F | V | | |
| F | V | V | F | F | V | V | V | V | F | F | F | V | | |
| F | V | F | V | F | F | V | F | F | V | V | F | F | | |
| F | V | F | F | F | F | V | F | F | V | F | V | F | | |
| F | F | V | V | F | F | F | F | V | V | V | F | V | | |
| F | F | V | F | F | F | F | F | V | V | F | F | V | | |
| F | F | F | V | F | F | F | F | F | V | V | F | F | | |
| F | F | F | F | F | F | F | F | F | V | F | F | F | | |

Construya la tabla de verdad: a)

$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$$

| P | q | r | p | | q | | p | | r |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | F | F | V | V |
| V | V | F | V | V | V | F | F | V | F |
| V | F | V | V | F | F | F | F | V | V |
| V | F | F | V | F | F | F | F | V | F |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | V | V | F | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | F | V | V | V | V | F | F |
| F | F | V | F | V | F | F | V | V | V |
| F | F | F | F | V | F | F | V | F | F |
| V | V | V | V | V | V | F | F | V | V |
| V | V | F | V | V | V | F | F | V | F |
| V | F | V | V | F | F | F | F | V | V |
| V | F | F | V | F | F | F | F | V | F |
| F | V | V | F | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | F | V | V | V | V | F | F |
| F | F | V | F | V | F | F | V | V | V |
| F | F | F | F | V | F | F | V | F | F |

b) La primera proposición y la segunda proposición es verdadera si p es q y además, inversamente p es r.

3. Exprese la negación de la proposición $p \leftrightarrow q$ en términos de conectivos

$$((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p))$$

4. Escriba la siguiente proposición como implicación, de dos maneras, cada una de la manera si entonces: Catalina deberá practicar sus lecciones de piano o no ir al cine.

P: ir al cine

Q: practicar piano

$$q \rightarrow p \text{ ó } (p) \rightarrow \neg(q)$$

5. Sean p,q y r proposiciones primitivas. Demuestre la verdad o falsedad (con un contraejemplo) de lo siguiente:

a) $[p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r]$

$$[(r \leftrightarrow q) \leftrightarrow p] \leftrightarrow [r \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)]$$

b) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$$

c)

6. el problema dice así sean p, q, r proposiciones primitivas, escriba la recíproca la inversa y la contra positiva de cada una de las siguientes implicaciones:

a) $p \rightarrow (q \wedge r)$

1. su recíproca $q \rightarrow p$

2. su inversa $\neg p \rightarrow \neg q$

3. su contra positiva $\neg q \rightarrow \neg p$

c) $((p \vee q) \rightarrow r$

1. Reciproca $r \rightarrow (p \vee q)$
2. Inversa $\neg(p \vee q) \rightarrow r$
3. Contra positiva $\neg r \rightarrow \neg(p \vee q)$

7. En cada uno de los siguientes casos, complete el espacio en blanco con la palabra "reciproca" "inversa" "contra positiva" de modo que sea verdadera.

- a) la reciproca de la inversa de $p \rightarrow q$ es la inversa de $p \rightarrow q$
- b) la reciproca de la inversa de $p \rightarrow q$ es la contra positiva de $q \rightarrow p$
- c) la inversa de la reciproca de $p \rightarrow q$ es la reciproca de $p \rightarrow q$
- d) la inversa de la reciproca de $p \rightarrow q$ es la inversa de $q \rightarrow p$
- e) la reciproca de la contra positiva de $p \rightarrow q$ es la inversa de $p \rightarrow q$
- f) la reciproca de la contra positiva de $p \rightarrow q$ es la reciproca de $q \rightarrow p$
- g) la inversa de contra positiva de $p \rightarrow q$ es la reciproca de $p \rightarrow q$

8. Escriba cada uno de los siguientes argumentos en forma simbólica.

- a) Si hace frio el viernes, entonces, Cristóbal utilizara su abrigo si los bolsillos están remendados dos. El pronostico es frio para viernes, pero los bolsillos no están remendados.

$$p \leftrightarrow (q \vee r)$$

- b) El contrato se cumplirá si y solo si las nuevas ventanas se instalan en la casa en junio.

$$p \leftrightarrow (q \vee r)$$

9. El análisis realizado, es innecesario si nos dejamos llevar por la precipitación, se torna necesario si nos paramos a reflexionar sobre que mensaje se pretende transmitir.

10. Traduzca la siguiente proposición, simbólicamente.

Si el resultado obtenido es superior al previsto en 5 unidades, será debido a no haber realizado el proceso a la temperatura adecuada o la existencia de errores en los cálculos finales

$$(\neg q \vee r) \rightarrow p$$

$$(q \rightarrow \neg p) \wedge (r \rightarrow p)$$

