Esercizi: terzo foglio

Agnese Gini

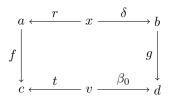
8 dicembre 2015

1 Esercizio 62

Consideriamo il seguente diagramma commutativo in $S^{-1}\mathcal{C}$, dove $a, b, c, d \, \text{Ob} \, \mathcal{C}$, $f \in g$ sono morfismi in \mathcal{C} mentre $\alpha \in \beta$ sono morfismi di $S^{-1}\mathcal{C}$



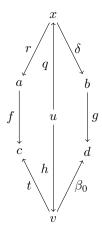
Se S è un sistema localizzante per la categoria \mathcal{C} , abbiamo visto che i morfismi α e β possono essere rappresentati come composizione di un elemento di Mor \mathcal{C} e l'inverso di un elemento di S, più specificatamente esistono $\delta, \beta_0 \in \text{Mor}\,\mathcal{C}$ e $r, t \in S$ tali che α e β sono rispettivamente e equivalenti a δr^{-1} e $\beta_0 t^{-1}$. Il diagramma allora può essere scritto nel seguente modo



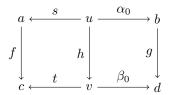
Usando ancora una volta che S è un sistema localizzante, dato che $fs \in \operatorname{Mor} \mathcal{C}$ e $t \in S$ sappiamo che esistono un $q \in S$ e h un morfismo di \mathcal{C} che fanno commutare il seguente quadrato nella categoria di partenza



Osserviamo però che, poiché $g\alpha=\beta f$ ovvero $g\delta r^{-1}=\beta_0 t^{-1}f$, a partire dal fatto che frq=th componendo da entrambe le parti $\beta_0 t^{-1}frq=\beta_0 t^{-1}th$ abbiamo che $g\delta r^{-1}rq=g\delta q=\beta_0 h$. Allora il seguente diagramma è commutativo in $\mathcal C$



Notando infine che $s := rq \in S$ e che $\alpha = \delta r^{-1} = \delta qq^{-1}r^{-1} = (\delta q)s^{-1}$. Ponendo quindi $\alpha_0 := \delta q$ abbiamo la tesi:



2 Esercizio 63

Sia \mathcal{A} una categoria abeliana. Vogliamo mostrare che valgono le seguenti proprietà riguardanti i triangoli distinti in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$:

TR1

a. Il triangolo

$$X^{\bullet} = X^{\bullet} \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{\bullet}[1]$$

è distinto.

- b. Se un triangolo è isomorfo ad un triangolo distinto è distinto.
- c. Ogni morfismo in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ si completa a triangolo distinto.

TR2 Il triangolo

$$A^{\bullet} \xrightarrow{\quad u \quad} B^{\bullet} \xrightarrow{\quad v \quad} C^{\bullet} \xrightarrow{\quad w \quad} A^{\bullet}[1]$$

è distinto se e solo se è distinto il triangolo

$$B^{\bullet} \xrightarrow{\quad v \quad} C^{\bullet} \xrightarrow{\quad w \quad} A^{\bullet}[1] \xrightarrow{\quad u[1] \quad} B^{\bullet}[1]$$

TR3 Dati due triangoli distinti, se esistono due morfismi nella categoria derivata α e β come segue

$$A^{\bullet} \xrightarrow{u} B^{\bullet} \xrightarrow{v} C^{\bullet} \xrightarrow{w} A^{\bullet}[1]$$

$$\alpha \downarrow \qquad \beta \downarrow \qquad \varphi \downarrow \qquad \downarrow \alpha[1]$$

$$X^{\bullet} \xrightarrow{u_1} Y^{\bullet} \xrightarrow{v_1} Z^{\bullet} \xrightarrow{w_1} X^{\bullet}[1]$$

allora esiste un morfismo $\varphi \in \text{Mor } \mathcal{D}(\mathcal{A})$ che fa commutare il diagramma.

Prima di passare alla dimostrazione esplicita di questi fatti è bene fare alcune osservazioni, richiamare e mostrare alcune proprietà riguardo i triangoli distinti. Iniziamo ricordando che un *triangolo* di complessi è

$$A^{\bullet} \xrightarrow{u} B^{\bullet} \xrightarrow{v} C^{\bullet} \xrightarrow{w} A^{\bullet}[1]$$

dove $A^{\bullet}, B^{\bullet}, C^{\bullet} \in \text{Ob}(\text{Com}(\mathcal{A}))$ mentre i morfismi $u, v, w \in \text{Mor } \mathcal{E}$ dove e può essere, a seconda dei casi, $\text{Com}(\mathcal{A})$, $\text{Kom}(\mathcal{A})$ oppure $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

In particolare un triangolo in $\mathcal E$ è distinto se e solo è isomorfo a un triangolo della forma

$$X^{\bullet} \xrightarrow{\tilde{f}} \operatorname{Cil}(f) \xrightarrow{\pi} \operatorname{Cono}(f) \xrightarrow{-\delta} X^{\bullet}[1]$$

per qualche morfismo $f: X^{\bullet} \to Y^{\bullet}$. Dove, sottolineiamo, la nozione di isomorfismo è quella della categoria $\mathcal E$ in questione, mentre $\tilde f^n: X^n \to X^n \oplus X^{n+1} \oplus Y^n$, $\pi^n: X^n \oplus X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+1}$ sono rispettivamente i morfismi $x \mapsto (x,0,0) \ (a,b,c) \mapsto (b,c) \ e \ (x,y) \mapsto x$.

Questa nozione è particolarmente utile perché, si vede facilmente, se abbiamo un triangolo distinto allora abbiamo anche una successione esatta lunga in coomologia

$$----\to H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow H^{n+1}(A) \longrightarrow H^n(B)$$

Abbiamo mostrato che valgono le seguenti proprietà:

Proposizione 1. In Kom $\mathcal A$ un triangolo è distinto se e solo se è della forma

$$X^{\bullet} \xrightarrow{f} Y^{\bullet} \longrightarrow \operatorname{Cono}(f) \xrightarrow{-\delta} X^{\bullet}[1]$$

Teorema 1. In Kom \mathcal{A} valgono **TR1**,**TR2** e **TR3**, opportunamente riformulate

Mostriamo un corollario di questo teorema che ci servirà dopo:

Corollario 1. In TR3 se α e β sono quasi isomorfismi allora lo è anche φ .

Dimostrazione. Ricordiamo che presi due morfismi omotopi $\alpha_1 \sim \alpha$ allora $H^{\bullet}(\alpha_1) = H^{\bullet}(\alpha)$; consideriamo le due successioni esatte lunghe in comologia e i morfismi indotti

$$--- \to H^{n}(A) \longrightarrow H^{n}(B) \longrightarrow H^{n}(C) \to H^{n+1}(A) \to H^{n+1}(B) --- \to H^{n}(\alpha) \qquad H^{n}(\beta) \qquad H^{n}(\varphi) \qquad H^{n}(\varphi) \qquad H^{n+1}(\alpha) \qquad H^{n+1}(\beta) \qquad H^{n+1}(X) \to H^{n}(X) \to H^{n}(X) \to H^{n}(X) \to H^{n+1}(X) \to$$

dove per ipotesi $H^n(\alpha)$ e $H^n(\beta)$ sono isomorfismi per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che la categoria \mathcal{A} è abeliana, usando il lemma dei cinque si ha che $H^n(\varphi)$ è un isomorfismo per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque φ è un quasi isomorfismo.

Vorremmo utilizzare che $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ è la localizzazione di Kom (\mathcal{A}) , rispetto al sistema localizzante dei quasi isomorfismi, e sfruttare per la dimostrazione di **TR1**, **TR2** e **TR3** il Teorema 1. Esplicitiamo a tal fine la relazione tra i triangoli distinti in queste due categorie (che discende banalmente dalla definizione):

Lemma 1. Un triangolo in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ è distinto se e solo se è isomorfo all'immagine, tramite il funtore localizzante Q, di un triangolo distinto in $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$

Possiamo finalmente provare le tre proprietà sui triangoli nella categoria derivata:

Dimostrazione.

TR1

a. Il triangolo

$$X^{\bullet} = X^{\bullet} \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{\bullet}[1]$$

è distinto $\text{Kom}(\mathcal{A})$ e quindi lo è in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

- b. Ovvio per definizione.
- c. Consideriamo un qualsiasi $u \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^{\bullet}, B^{\bullet})$; dato che $S \coloneqq \{\text{quasi isomorfismi}\}$ è un sistema localizzante, esistono $s \in S$ e $g \in \operatorname{Mor}(\operatorname{Kom}(\mathcal{A}))$ tali che $u = gs^{-1}$ e usando $\mathbf{TR1c}$ di Kom abbiamo che $g \colon E^{\bullet} \to B^{\bullet}$ si completa ad un triangolo distinto in $\operatorname{Kom}(\mathcal{A})$

$$E^{\bullet} \xrightarrow{g} B^{\bullet} \xrightarrow{\pi} \operatorname{Cono}(g) \xrightarrow{-\delta} E^{\bullet}[1]$$

E perciò

Detto $v = s[1]\delta$ abbiamo quindi il seguente diagramma commutativo:

$$E^{\bullet} \xrightarrow{g} B^{\bullet} \xrightarrow{\pi} \operatorname{Cono}(g) \xrightarrow{-\delta} E^{\bullet}[1]$$

$$\downarrow s \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad s[1] \qquad \downarrow \qquad \qquad s[1] \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad S[1]$$

$$X^{\bullet} \xrightarrow{u} B^{\bullet} \xrightarrow{\pi} \operatorname{Cono}(g) \xrightarrow{-\delta} X^{\bullet}[1]$$

Ci basta osservare che in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ questo è un isomorfismo di triangoli e visto che per costruzione il triangolo di sopra è distinto lo è anche quello di sotto, dunque abbiamo esibito un completamento di u a triangolo distinto.

TR2 È vero perché grazie al Lemma 1 ci si riconduce a TR2 in Kom.

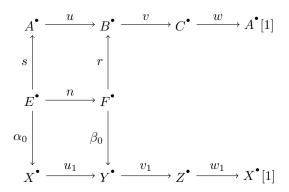
TR3 Consideriamo due triangoli distinti, e due morfismi nella categoria derivata α e β come segue

$$A^{\bullet} \xrightarrow{u} B^{\bullet} \xrightarrow{v} C^{\bullet} \xrightarrow{w} A^{\bullet}[1]$$

$$\alpha \downarrow \qquad \qquad \beta \downarrow \qquad \qquad \downarrow \alpha[1]$$

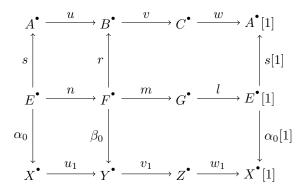
$$X^{\bullet} \xrightarrow{u_{1}} Y^{\bullet} \xrightarrow{v_{1}} Z^{\bullet} \xrightarrow{w_{1}} X^{\bullet}[1]$$

Senza perdere di generalità possiamo, usando il Lemma 1, ridurci a considerare due triangoli distinti in $\text{Kom}(\mathcal{A})^1$; usando perciò quanto provato nell'Esercizio 62 sappiamo che possiamo a partire dal primo quadrato costruire un diagramma commutativo in $\text{Kom}(\mathcal{A})$

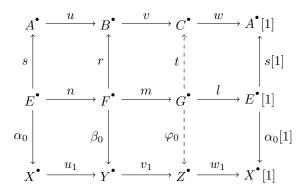


Grazie a TR2 possiamo completare n a un triangolo distinto in Kom(\mathcal{A}).

 $^{^{1}}$ Ci basta, un volta trovato il morfismo che stiamo cercando, comporlo con gli isomorfismi tra i triangoli di partenza e quelli in Kom.



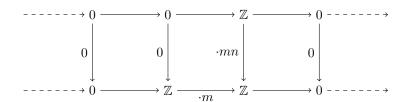
Per **TR3** di Kom esistono due morfismi t e φ_0 :



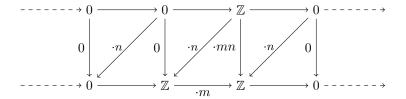
Infine usando il Corollario 1 abbiamo che $t \in S$ e quindi $\varphi = \varphi_0 t^{-1}$ è il morfismo di $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ che cercavamo.

3 Esercizio 66

i) Consideriamo il seguente morfismo, non 0, di complessi di gruppi abeliani con $m,n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

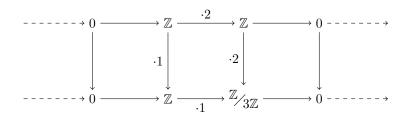


Dico che questo morfismo è omotopo a zero tramite la seguente omotopia



C'è sostanzialmente da verificare che lo sia per morfismo $\cdot mn$, ma banalmente $(\cdot mn) = (\cdot m)(\cdot n) + 0$.

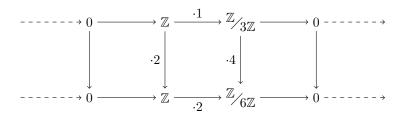
ii) Consideriamo il morfismo definito dal seguente diagramma



Questo morfismo non è omotopicamente equivalente a zero, se esistesse infatti un omotopia h dovrebbe valere la condizione $id_{\mathbb{Z}}=\cdot 1=h\circ (\cdot 2)$, ma gli unici endomorfismi di \mathbb{Z} invertibili sono $\pm id_{\mathbb{Z}}$. Tuttavia questo morfismo di complessi è zero nella categoria derivata; per dimostrare questa affermazione ci serviremo dell'Esercizio 64:

Lemma 2. $f \in \mathcal{D}(A)$ è zero se e solo se esiste un quasi isomorfismo t tale che ft è omotopicamente equivalente a zero.

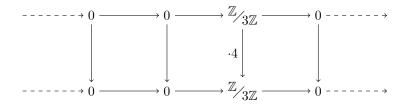
Ci basta dunque trovare un quasi isomorfismo che soddisfi queste ipotesi; a tale proposito consideriamo il morfismo di complessi



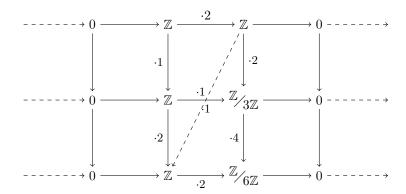
È ben definito infatti

$$\begin{array}{cccc}
1 & & & \bar{1} \\
\downarrow & & & \downarrow \\
2 & & & \bar{4}
\end{array}$$

Inoltre è un quasi isomorfismo poiché passando in coomologia otteniamo

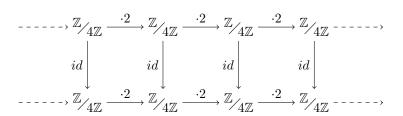


Consideriamo quindi la composizione di questi due morfismi:



Sfruttando che $\bar{8} \equiv \bar{2} \mod 6$ abbiamo che il morfismo ·1: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ da che questa composizione è omotopa a zero, e dunque nulla in $\mathcal{D}(A)$.

iii) Prendiamo il morfismo di complessi



In ogni punto del complesso la coomologia è zero in quanto bordi e cocicli sono sempre isomorfismi a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, quindi $H^{\bullet}(id)=0$; tuttavia questo morfismo non può essere omotopo a zero in quanto dovrebbe esistere un h tale che per ogni $x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $x = h(\cdot 2)(x) + (\cdot 2)h(x) = 4h(x) = 0$, assurdo.

4 Esercizio 67

Sia \mathcal{A} una categoria semisemplice; per mostrare che $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ è naturalmente equivalente alla categoria dei complessi con tutti i bordi nulli, $\mathrm{Com}_0(\mathcal{A})$, esibiremo un'equivalenza di categorie tra queste due categorie. Con lo scopo di avere una maggiore chiarezza dimostremo prima alcuni lemmi che ci permetteranno di fare ciò

Lemma 3. Sia \mathcal{A} una categoria semisemplice e X^{\bullet} un complesso. Allora X^{\bullet} è quasi isomorfo al complesso $Y_X^{\bullet} \in \text{Com}_0(\mathcal{A})$ tale che $Y^n = H^n(X)$.

Dimostrazione. Sia un complesso X^{\bullet} con bordo ∂ , indicando con $Z^{n}(X)$ il cociclo n—esimo e con $B^{n+1}(X) = \partial^{n}(X)$ abbiamo la seguente sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow Z^n(X) \stackrel{i}{\longrightarrow} X^n \longrightarrow B^{n+1}(X) \longrightarrow 0$$

Dato che \mathcal{A} è semisemplice allora $X^n=Z^n(X)\oplus B^{n+1}(X)$. Usando poi che $H^n(X)$ è il conucleo di $B^n\to Z^n$ abbiamo anche che la seguente su successione esatta:

$$0 \longrightarrow B^n(X) \stackrel{i}{\longrightarrow} Z^n(X) \longrightarrow H^n(X) \longrightarrow 0$$

E quindi $X^n=Z^n(X)\oplus B^{n+1}(X)=B^n(X)\oplus H^n(X)\oplus B^{n+1}(X).$ La proiezione sulla seconda coordinata

$$s^n \colon B^n(X) \oplus H^n(X) \oplus B^{n+1}(X) \to H^n(X)$$

è tale che se $(a,h,b)\in X^n$ allora $s^{n+1}\circ\partial^n(a,h,n)=s^{n+1}(b,0,0)=0$ e perciò induce un quasi isomorfismo²

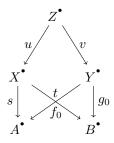
che è quello che cercavamo.

Lemma 4. Siano A^{\bullet} e B^{\bullet} due complessi, allora esiste una bigezione tra $\mathrm{Mor}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^{\bullet}, B^{\bullet})$ e $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Com}_0(\mathcal{A})}(Y_A^{\bullet}, Y_B^{\bullet})$.

Dimostrazione. Sia

$$\begin{array}{cccc} \Phi \colon & \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^{\:\raisebox{3.5pt}{\text{\circle*{1.5}}}}, B^{\:\raisebox{3.5pt}{\text{\circle*{1.5}}}}) & \longrightarrow & \operatorname{Mor}_{\operatorname{Com}_0(\mathcal{A})}(Y_A^{\:\raisebox{3.5pt}{\text{\circle*{1.5}}}}, Y_B^{\:\raisebox{3.5pt}{\text{\circle*{1.5}}}}) \\ f & \longmapsto & H^{\:\raisebox{3.5pt}{\text{\circle*{1.5}}}}(f) \end{array}$$

un'applicazione. Mostriamo in primo luogo che è ben definita: siano $f = f_0 s^{-1}$ e $g = g_0 t^{-1}$, con s e t quasi isomorfismi, due morfismi equivalenti in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$; allora esistono u, v quasi isomorfismi tali che



 $^{2}$ La coomologia del secondo complesso è uguale a quella del primo per costruzione e $H^{\bullet}(s)=id$

sia un diagramma commutativo. Allora³

$$H^{\bullet}(f) = H^{\bullet}(f_{0})H^{\bullet}(s)^{-1}$$

$$= H^{\bullet}(f_{0})H^{\bullet}(u)H^{\bullet}(u)^{-1}H^{\bullet}(s)^{-1}$$

$$= H^{\bullet}(f_{0}u)H^{\bullet}(su)^{-1}$$

$$= H^{\bullet}(g_{0}v)H^{\bullet}(tv)^{-1}$$

$$= H^{\bullet}(g_{0})H^{\bullet}(v)H^{\bullet}(v)^{-1}H^{\bullet}(t)^{-1}$$

$$= H^{\bullet}(g_{0})H^{\bullet}(t)^{-1} = H^{\bullet}(g)$$

e quindi Φ non dipende dal rappresentate scelto. Chiaramente Φ è suriettiva visto che $H^{\bullet}(f) \in \Phi^{-1}(H^{\bullet}(f))$; ma è anche iniettiva: per il Lemma 3 esiste s_A (la proiezione sulla seconda coordinata) un isomorfismo in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tra A^{\bullet} e Y_A^{\bullet} , prese allora $f, g \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(A^{\bullet}, B^{\bullet})$ tali che $H^{\bullet}(f) = H^{\bullet}(g)$, abbiamo $f = s_B^{-1} \circ H^{\bullet}(f) \circ s_A = s_B^{-1} \circ H^{\bullet}(g) \circ s_A = g$. E dunque Φ è bigettiva.

Ponendo

$$\begin{array}{cccc} G \colon & \mathcal{D}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \operatorname{Com}_0(\mathcal{A}) \\ & X^{\bullet} & \longmapsto & Y_X^{\bullet} \\ & f & \longmapsto & H^{\bullet}(f) \end{array}$$

allora otteniamo un funtore ben definito.

Vogliamo mostrare che è anche un'equivalenza di categoria usando la seguente proposizione (vista a lezione⁴):

Proposizione 2. Sia $F: \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ un funtore, se valgono i seguenti fatti:

- i Se F(x) è isomorfo F(y) allora x è isomorfo a y,
- ii Per ogni $b \in \text{Ob}\,\mathcal{B}$ esiste c in $\text{Ob}\,\mathcal{C}$ tale che F(c) è isomorfo a b,
- iii Per ogni x, y c'è una biezione tra $Hom_{\mathcal{C}}(x, y)$ e $Hom_{\mathcal{B}}(F(x), F(y))$

allora è un'equivalenza di categorie.

Preso un complesso X^{\bullet} , il Lemma 3 ci dice che è isomorfo in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ a $G(X^{\bullet})$; per mostrare la proprietà i basta quindi comporre l'isomorfismo in Com_0 (che è un isomorfismo anche nella categoria derivata) con quelli in partenza. ii è ovvia in quanto se $Y^{\bullet} \in \mathrm{Com}_0(\mathcal{A})$, che si immerge in $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, allora $Y^{\bullet} = G(Y^{\bullet})$. iii è il Lemma 4. E dunque G è proprio l'equivalenza cercata.

5 Esercizio 68

 $\Leftarrow\,$ Consideriamo una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow A \stackrel{f}{\longrightarrow} B \stackrel{g}{\longrightarrow} C \longrightarrow 0$$

³Sto usando che funzioni omotope danno lo stesso morfismo.

 $^{^4}$ In verità sul mio quaderno è dimostrata, però ho il dubbio che fosse stata lasciata per esercizio.

Applicando il funtore $\text{Ext}(C, _)$ otteniamo una la successione

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(C,A) \xrightarrow{f \circ -} \operatorname{Hom}(C,B) \xrightarrow{g \circ -} \operatorname{Hom}(C,C) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1(C,A) \xrightarrow{- - - - \to}$$

Per ipotesi $\operatorname{Ext}^1(C,A)=0$ e perciò $g\circ _$ è suriettiva e dunque esiste $h\in \operatorname{Hom}(C,B)$ tale che $g\circ h=id_C$, ossia la successione spezza.

⇒ Invece di mostrare direttamente il viceversa, è più interessante mostrare un risultato un po' più generale a proposito delle categorie semisemplici. Tuttavia per maggiore leggibilità, soprattutto per fissare la notazione, ci è utile richiamare alcune cose fatte a lezione. Abbiamo visto che è ben definito il funtore

$$\begin{array}{cccc} D\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \\ & A & \longmapsto & \underline{A}^{\bullet} \\ & f & \longmapsto & \underline{f} \end{array}$$

dove $\underline{A}^{\:\raisebox{3.5pt}{\text{\circle*{1.5}}}}$ è il complesso con tutti oggetti nulli eccetto che nell'indice 0:

$$-- \rightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 -- \rightarrow$$

mentre se $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ allora $\underline{f} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{A}^{\bullet}, \underline{B}^{\bullet})$ è

Indicato con $\underline{B}^{\bullet}[i]$ lo shift a sinistra del complesso, abbiamo definito

$$\operatorname{Ext}\nolimits^i_{\mathcal{A}}(A,B) \coloneqq \operatorname{Hom}\nolimits_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(\underline{A}^{\:\raisebox{3.5pt}{\text{\circle*{1.5}}}},\underline{B}^{\:\raisebox{3.5pt}{\text{\circle*{1.5}}}}[i]).$$

Se la categoria \mathcal{A} è semisemplice abbiamo visto nell'Esercizio 67 che esiste un'equivalenza di categorie tra $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ e $\mathrm{Com}_0(\mathcal{A})$; usando la stessa notazione, si ha che i complessi che sono nell'immagine di D sono tali che $G \circ D(B) = D(B)$, altre parole i complessi \underline{B}^{\bullet} ottenuti a partire da oggetti di \mathcal{A} vanno in se stessi. Il Lemma 4 perciò ci permette di scrivere la seguente uguaglianza

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^{i}(A,B) = \operatorname{Hom}_{\operatorname{Com}_{0}(\mathcal{A})}(\underline{A}^{\bullet},\underline{B}^{\bullet}[i]).$$

Per la particolare forma di questi complessi allora diventa chiaro che per ogni $i \neq 0$ $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A,B) = 0$. Il caso di $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}$ è banalmente un corollario di questo fatto più generale.