Agnieszka Kurzajewska

Nr indeksu: 244994

Sprawozdanie

Każdy wielomian stopnia n może zostać przedstawiony w postaci Newtona. Dla danego wielomianu zostaje wybrane n+1 punktów xi, takich, że:

W tym zadaniu dla jakiejś funkcji otrzymujemy argumentów i wartości tej funkcji dla podanych argumentów. Za pomocą ilorazów różnicowych można wyznaczyć wielomian który będzie interpolował powyższe punkty.

Metoda Newtona opisuje algorytm wyznaczania współczynników wielomianu .

Dla wartości funkcji zachodzi zależność rekurencyjna:

Można więc zapisać argumenty i wartości funkcji f(x) w postaci macierzy:

dla wartości

A następnie j dopisywać kolejne kolumny macierzy uzupełnione różnicami dzielonymi korzystając z powyższej

rekurencyjnej własności:

itd.

Zadanie 1.

W powyższym zadaniu używamy rekurencyjnego wzoru dla ilorazów różnicowych:

Znając węzły xi i wartości funkcji interpolowanej w tych węzłach można za pomocą zależności

Utworzyć dwuwymiarową macierz ilorazów różnicowych przedstawionych powyżej. Aby obliczyć ilorazy różnicowe nie używając tablicy dwuwymiarowej , należy od dołu „zwijać” macierz od dołu poprzez obliczanie wartości ilorazów różnicowych rzędu zerowego i pierwszego opisanej wzorem: nadpisując wynikiem n-tą wartość tablicy.

Zadanie 2.

Wielomian stopnia można zapisać używając ilorazów różnicowych pokazując zależności wielomianu

i jego zależności od funkcji :

W podanym zadaniu należy obliczyć wartość wielomianu w punkcie .

Dla podanej postaci można w łatwy sposób obliczyć wartość wielomianu za pomocą algorytmu Hornera przedstawionego poniżej:

Algorytm implementujący powyższy wzór rekurencyjny polega na n-krotnym powtórzeniu pętli dodającej do wartości wynikowej wartość obliczoną za pomocą powyższego wzoru.

Zadanie 3.

Zadanie polega na obliczeniu współczynników wielomianu przedstawionego w postaci naturalnej znając współczynniki wielomianu w postaci Newtona oraz węzły.

Tutaj także korzystamy z powyższego wzoru zapisania wielomianu z użyciem ilorazów różnicowych

Dla tego wzoru i uogólnionego schematu Hornera można utworzyć wynikowy wielomian obliczając współczynniki wielomianu zaczynając od najwyższego, ponieważ, jak w poprzednich zadaniach najwyższy wyraz jest używany tylko raz i może zostać redukowany.

Zadanie 4.

Zadanie polega na napisaniu funkcji interpolującej zadaną funkcję w podanym przedziale z użyciem wielomianu o stopniu w postaci Newtona oraz narysowanie wykresu tej funkcji i wielomianu.

Aby narysować wykres używamy równoodległych węzłów interpolacji , równych odległości między nimi wyznaczonych za pomocą podzielenia odcinka na równe n odcinków; i wartości funkcji dla danych węzłów.

Korzystamy także z ilorazów różnicowych liczonych za pomocą programu napisanego w zadaniu pierwszym.

Program tworzący wyjściowy wykres obiera dowolną liczbę argumentów w przedziale , umieszcza je w odległości równej od siebie i dla podanych argumentów oblicza wartość funkcji za pomocą funkcji warNewton() opisanej w zadaniu nr 2.

Zadanie 5.

Przetestować funkcję na następujących przykładach:

Program tworzy wykresy interpolowanej funkcji oraz wielomian interpolacyjny.

Jak widać, oba te wykresy pokrywają się. Wartości funkcji są więc do siebie bardzo zbliżone, co jest spowodowane wyliczaniem wartości funkcji dla węzłów o różnych odstępach, co daje dość dokładne przybliżenie rzeczywistych danych.

a)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n=5 | n=10 | n=15 |
| /var/folders/44/rhs2b2tn6j39pyn4f7fmkd4r0000gn/T/com.microsoft.Word/Content.MSO/714D8974.tmp | /var/folders/44/rhs2b2tn6j39pyn4f7fmkd4r0000gn/T/com.microsoft.Word/Content.MSO/270ED3A2.tmp | /var/folders/44/rhs2b2tn6j39pyn4f7fmkd4r0000gn/T/com.microsoft.Word/Content.MSO/F6615400.tmp |

b)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n=5 | n=10 | n=15 |
| /var/folders/44/rhs2b2tn6j39pyn4f7fmkd4r0000gn/T/com.microsoft.Word/Content.MSO/DA87614C.tmp | /var/folders/44/rhs2b2tn6j39pyn4f7fmkd4r0000gn/T/com.microsoft.Word/Content.MSO/70FF13A.tmp | /var/folders/44/rhs2b2tn6j39pyn4f7fmkd4r0000gn/T/com.microsoft.Word/Content.MSO/5F007D58.tmp |

Zadanie 6.

Przetestować funkcję na następujących przykładach (zjawisko rozbieżności):

a)

b) , [-5, 5], n = 5, 10, 15

W danym zadaniu zaobserwowano dość spore odchylenia dla wartości funkcji. W przykładzie a) dla n=5 dokładność ze wszystkich 3 przypadków jest największa, a największa niedokładność występuje w miejscu występowania bardzo małych danych liczbowych bliskich zeru. Dla n=10 i n=15 wyniki zaczynają się od siebie oddalać wraz ze wzrostem bezwzględnej wartości argumentów. Na końcach przedziałów widać, że większa liczba przedziałów liczbowych daje większą dokładność, ale tylko do pewnego momentu.

a)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n=5 | n=10 | n=15 |
| /var/folders/44/rhs2b2tn6j39pyn4f7fmkd4r0000gn/T/com.microsoft.Word/Content.MSO/37B7C526.tmp | /var/folders/44/rhs2b2tn6j39pyn4f7fmkd4r0000gn/T/com.microsoft.Word/Content.MSO/5D943424.tmp | /var/folders/44/rhs2b2tn6j39pyn4f7fmkd4r0000gn/T/com.microsoft.Word/Content.MSO/AD8CC1D2.tmp |

b)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n=5 | n=10 | n=15 |
| /var/folders/44/rhs2b2tn6j39pyn4f7fmkd4r0000gn/T/com.microsoft.Word/Content.MSO/6B9CD1B0.tmp | /var/folders/44/rhs2b2tn6j39pyn4f7fmkd4r0000gn/T/com.microsoft.Word/Content.MSO/147B133E.tmp | /var/folders/44/rhs2b2tn6j39pyn4f7fmkd4r0000gn/T/com.microsoft.Word/Content.MSO/87D361FC.tmp |

W powyższym przykładzie możemy zaobserwować efekt Rungego, polegającego na tym, że dokładność wielomianu interpolującego funkcje zwiększa się wraz ze zwiększeniem liczby przedziałów, ale tylko do pewnego momentu, bo potem dokładność zaczyna się znacznie pogarszać, i jak dla niskiego n największa niedokładność pojawia się na środku wykresu, tak potem staje się to miejscem o najlepszym dopasowaniu, ponieważ dla małych argumentów x, wartość funkcji nie jest jeszcze na tyle mała, żeby występowały duże niedokładności obliczeniowe.