此文为线性空间知识梳理系列文章第 2 篇，第 1 篇请参考[《线性代数-线性空间知识梳理1》]。

目录

线性子空间

集合除了研究集合内元素与集合的关系，还有集合之间的关系，比如最常见的子集。线性空间是一个集合，那么线性空间是否有子空间这一概念？是怎么定义的？

我们仍以几何空间类比。几何空间中，过定点 O 的一个平面 π 对于向量的加法和数量乘法也成为实数域 R 上的一个线性空间。自然可以把过定点 O 的平面称为几何空间的一个子空间。并由此引出子空间的定义：

【定义 P60】设 V 是数域 K 上的一个线性空间，U 是 V 的一个非空子集，如果 U 对于 V 的加法和数量乘法也形成数域 K 上的一个线性空间，那么称 U 是 V 的一个线性子空间，简称为子空间。||

例如，几何空间中，过定点 O 的平面，过定点 O 的直线都是几何空间的子空间。但是不经过定点 O 的平面不是几何空间的子空间。

如何**判断**非空子集是否是子空间呢？有以下定理：

【定理 P61】设 V 是数域 K 上的一个线性空间，U 是 V 的一个非空子集，则 U 是 V 的一个子空间的充分必要条件是，U 对于 V 的加法和数量乘法封闭，即

$$\begin{aligned} &\alpha,\beta\in U \ \Rightarrow\ \alpha+\beta\in U \\ &k\in K,\alpha\in U \ \Rightarrow\ k\alpha\in U \end{aligned} \tag{9}$$

我们可以很容易想到两个特殊的子空间：由于 $0+0=0$，$k0=0, \forall\, k\in K$，因此 $\{0\}$ 是线性空间 V 的一个子空间（这段话前面的 0 均是 V 中抽象的零向量，不是标量），称为 V 的零子空间，记作 0（这个 0 不是标量也不是零向量，是一个线性空间）。V 本身是 V 的一个子空间。0 和 V 称为 V 的**平凡子空间**。

数域 K 上线性空间 V 有没有除了平凡子空间之外的**非平凡子空间呢**?

我们考虑这样一个集合 W，即

$$W=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s|k_1,k_2,\ldots,k_s\in K\} \tag{10}$$

其中，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$（他们中可以有相等的）是线性空间 V 中，按照一定次序排成的**有限**多个向量，称为 V 的一个**向量组**。$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s$ 称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 的一个**线性组合**，其中 $k_1,k_2,\ldots,k_s\in K$ 。

容易验证，W 是 V 的一个子集，且对于 V 的加法和数量乘法封闭，从而 W 是 V 的一个**子空间**。我们称 W 是由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ **生成的子空间**，记作 $<\alpha_1,\ldots,\alpha_s>$，即

$$<\alpha_1,\ldots,\alpha_s>=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s|k_1,k_2,\ldots,k_s\in K\} \tag{11}$$

如果 V 中一个向量 β，如果存在 $k_1,k_2,\ldots,k_s\in K$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s \tag{12}$$

则称 β 可以有向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ **线性表出**。于是 $\beta\in<\alpha_1,\ldots,\alpha_s>\ \Leftrightarrow\ \beta$ 可由向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ 线性表出。

【应用】

学了线性空间及其子空间，向量组和线性组合后，先小试牛刀应用一下，直接从线性方程组的系数和常数项判断方程组有无解。

设数域 K 上 n 元线性方程组为

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{array} \tag{13}$$

将方程组中 x_i 的系数组成一个 s 元有序数据，即 K^s中的一个 s 维列向量 α_i，常数项也组成一个 s 维列向量 β 。则（13）可以写成

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\ldots+x_n\alpha=\beta \tag{14}$$

于是，数域 K 上 n 元线性方程组（14）有解，

$\Leftrightarrow\ \beta$ 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\ldots,\alpha_n$ 线性表出，

$\Leftrightarrow\ \beta\in<\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n>$ 。

这个结论开辟了直接从线性方程组和系数和常数项判断方程组有没有解的新途径，即常数项列向量与系数列向量组生成的子空间之间的关系。这需要去研究向量组生成的子空间的结构，也就是本文接下来的内容。

线性空间的结构

那么说了这么多结构，线性空间的结构究竟需要研究哪些问题?

下文将研究数域 K 上的线性空间 V 的结构，我们将阐述研究线性空间结构的 4 条途径：

1. 类比几何空间中基的概念，我们将对于任意的线性空间 V 引进基的概念，从而线性空间 V 中每个元素都能由这个基中有限个元素唯一地线性表出。
2. 类比几何空间中，过定点 O 的直线，过定点 O 的平面都是几何空间的子空间，我们将对于任意线

性空间 V ，引进子空间的概念，研究子空间的交与和，以及子空间的直和。
3. 研究数域 K 上的众多的线性空间中，哪些在本质上是相同的，即引进线性空间同构的概念，并且研究数域 K 上线性空间同构的条件。
4. 给出线性空间 V 的一个划分，把划分中的每一个子集看成一个元素，引进商空间的概念。

并且将把对线性空间的结构的研究结果应用到由数域 K 上 n 元有序数组组成的线性空间 K^n 中，从而解决直接从线性方程组的系数和常数项判断方程组有无解，有多少解的问题，并且研究清楚线性方程组有无穷多个解时其解集的结构。

研究线性空间及其子空间的结构，直接动因是我们想从线性方程组系数常数项直接判断有没有解。但其结构问题研究清楚，作用远远不止这些，它在数学，物理，化学，经济学等中国领域都有非常重要的广泛应用。

线性相关

研究线性空间及子空间的结构，我们按照高中学过的数学：几何空间中，过定点 O 的一个平面 π ，只要在这个平面上取两个不共线的向量 $\vec{a},\vec{b}$ ，其他每一个向量都可以由这两个不共线向量唯一线性表出。

由此受到启发，要研究抽象线性空间 V 及其子空间的结构，首先要研究类似于几何空间内共线或不共线的向量那样的向量组。于是我们引进了线性相关与线性无关的概念。

【定义 P64】数域 K 上的线性空间 V ， $\alpha_1,...,\alpha_s$ 是 V 中的一个向量组，其中 $s>1$ ，如果 K 中有一组不全为 0 的数 $k_1,...,k_s$ ，使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0 \tag{15}$$

那么称向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 是**线性相关**的；否则称向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 是线性无关的，即如果从（15）式可以推出 $k_1=\cdots=k_s=0$ ，那么称向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 是**线性无关**的。||

线性相关和线性无关的向量组有哪些**性质**呢？

1. 对**单个向量** α 来说，线性相关 $\Leftrightarrow$ 有 $k\neq 0$ 使 $k\alpha=0 \ \Leftrightarrow\ \alpha=0$；从而 α 线性无关 $\Leftrightarrow\ \alpha\neq 0$ 。
2. 若向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 有一个部分线性相关，则向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 线性相关。
3. 若向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 线性无关，则它的任意一个部分也线性无关。
4. 含有 0 的向量组一定线性相关。
5. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2...,\alpha_s$ $(s\geq 2)$ 线性相关的充要条件是，其中至少一个向量可以由其余向量线性表出。
6. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2...,\alpha_s$ $(s\geq 2)$ 线性无关的充要条件是，其中每一个向量都不能由其他向量线性表出。

【应用】有了线性相关的概念和性质，可以立即应用很多方面：

1. 线性相关等价于其次线性方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s=0$ **有非零解**；线性无关等价于**只有零解**。
2. K^n 中，若列（行）向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 线性无关，则每个向量添上 m 个分量（所去掉分量的位置对每个向量都一样），得到的延伸组 $\tilde{\alpha}_1,...,\tilde{\alpha}_s$ 也线性无关；K^{n+m} 中，若列（行）向量组 $\tilde{\alpha}_1,...,\tilde{\alpha}_s$ 线性相关，则每个向量去掉 m 个分量（所去掉分量的位置对每个向量都一样），得到的缩短组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 也线性相关。

研究线性相关的向量组很有用，比如在【线性子空间】中我们介绍了线性表出，即

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s \tag{16}$$

那么，线性表出的**表出方式唯一**的充要条件就是向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 线性无关。这个【命题 P66】的重要性在于：**一个向量如果能由这个线性无关的向量组线性表出，那么表出方式只有一种，这样就易于辨认一个向量**（坐标的理论基础）。

紧接着又出现了一个问题，什么条件下，一个向量能由线性无关的向量组线性表出呢？我们有以下命题：

【命题 P67】：在数域 K 上的线性空间 V 中，设向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，如果向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta$ 线性相关，那么向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 线性表出。

极大线性无关组

设 V 是数域 K 上的线性空间，本节所考虑的向量都是 V 中的向量（除了特别声明之外），并设 W 是由向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 生成的子空间，则 W 中每一个向量可以由向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 线性表出。但向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 并不一定线性无关，那么这个向量组中是否有一组线性无关的部分组，使 W 中每一个向量可以由这个部分组线性表出？由此引出了极大线性无关组的概念：

【定义 P74】向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的一个部分组如果满足：1. 这个部分组是线性无关的；2. 从向量组的其余向量（如果还有的话）中任取一个添加进去，得到的新的部分组都线性相关，那么这个部分组称为向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的一个**极大线性无关组**。

极大线性无关组不唯一，那么任意两个极大线性无关组有什么**联系**？抽象地讲，这个联系是指什么？我们可以先研究向量组和它的一个极大线性无关组之间的联系，再通过传递性，就能得到两个极大线性无关组之间的联系。

首先介绍两个比较常用的概念：

向量组的线性表出：若向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的每一个向量都可以由向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 线性表出，则称向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 线性表出。

向量组等价：若向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 能够互相线性表出，则称这两个向量组等价，记作

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \ldots, \beta_r\} \tag{17}$$

有了这两个概念，就能得到向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 与它的一个极大线性无关组之间的联系：**向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 与它的任意一个极大线性无关组等价**。再由向量组等价的对称性和传递性，就能得到两个极大线性无关组之间的关系：**向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的任意两个极大线性无关组等价**。

进一步地考虑，向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的任意两个极大线性无关组所含向量的**个数**是否相等？

【引理 P76】设向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 可由向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 线性表出，如果 $r > s$，那么向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 线性相关；如果向量组 $\beta_1, \ldots, \beta_r$ 线性无关，那么 $r \leq s$。$||$

这个引理给出了在线性空间 V 中，比较两个向量组所含向量个数的一种方法，同时就能得到：**等价的线性无关的向量组所含向量个数相等**。因此向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的任意两个极大线性无关组所含向量的个数相等，我们就将向量组的一个极大线性无关组所含向量的个数称为这个**向量组的秩**，记作 $rank\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$，全由零向量组成的向量组的秩规定为 0。

向量组的秩是一个非常深刻的重要概念，可以刻画很多问题，得到许多有用的结论：

1. 向量组 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 线性无关的充要条件是，它的秩等于它所含向量的个数。
2. 如果向量组 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 可以由向量组 $\beta_1, ..., \beta_r$ 线性表出，那么 $rank\{\alpha_1, ..., \alpha_s\} < rank\{\beta_1, ..., \beta_r\}$ 。
3. 等价的向量组有相等的秩。
4. 两个向量组等价的充分必要条件是：它们的秩相等并且其中一个向量组可以由另一个向量组线性表出。

基

过定点 O 的平面 π ，取两个不共线的向量，则 π 上任何一个向量可以由它们唯一地线性表出，所以两个不共线的向量很重要，即线性无关。对线性无关，我们专门谈了**两个向量组**线性无关和线性相关的定义。这里注意，向量组和子空间的概念是完全不同的，向量组是**有限多个向量**按照一定的顺序写出来，而子空间是一个线性空间；线性空间及其子空间是我们要研究的对象，向量组是我们研究的工具，一个向量组构成的集合是原线性空间的有限子集，但并不是原线性空间的子空间。但是若要探讨抽象的线性空间或具体的线性空间，比如说函数空间，有限子集也不够用了，因为会涉及到一组无限多个向量，即无限子集，那么有限多的向量组的线性相关、线性无关的概念就不够了，所以要探讨**线性空间的子集**是线性相关还是线性无关。

首先给出线性空间的子集线性相关、线性无关的定义：

设 V 是数域 K 上的线性空间， V 的一个**有限子集** $\{\alpha_1, ..., \alpha_s\}$ 线性相关（线性无关）:⇔ 向量组 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 线性相关（线性无关）。

设 V 是数域 K 上的线性空间， V 的一个**无限子集** S 线性相关 :⇔ S 有一个有限子集是线性相关的；V 的一个**无限子集** S 线性无关 :⇔ S 任何一个有限子集是线性无关的。

有了这个定义之后，我们就可以真正地研究线性空间 V 的结构，即线性空间的基和维数：

【定义 P79】设 V 是数域 K 上的线性空间，V 的一个子集 S ，如果满足下面条件:

1. S 是线性无关的，
2. V 中任意向量可以由 S 中的有限多个向量线性表出，则称 S 是 V 的**一个基**。

注意：

1. 基是**一个子集**或**一个向量组**，不能说成一组基。
2. 在上面定义中，如果 $S = \{\alpha_1, ..., \alpha_s\}$ 是有限子集，则有序向量组 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 是 V 的一个有序基。
3. 只含有零向量的线性空间的一个基规定为空集，空集定义成线性无关。
4. 任一数域上的任一线性空间 V 都有一个基。

基的另一种刻画

线性空间的基还有另一种刻画，为此，类比**向量组的极大线性无关组**的概念，引出**线性空间的极大线性无关集**：

【定义】设 V 是数域 K 上的线性空间，V 的一族向量（或 V 的一个子集）S 如果满足下述两个条件：

1. S 是线性无关的；

2. 从 V 的其余向量（如果还有的话）中任取一个添加进去，得到的新的一族向量（或一个子集）都线性相关，

那么称 S 是 V 的极大线性无关的一族向量（或 V 的一个**极大线性无关集**）。||

有了极大线性无关集的概念，就能引出第二种刻画线性空间基的方法：

【命题 P81】设 V 是数域 K 上的线性空间，且 V 含有非零向量，则 V 中的一族向量（或 V 的一个子集）S 是 V 的一个基当且仅当 S 是 V 的**极大线性无关集**。||

维数

对于数域 K 上的线性空间 V ，

如果 V 中有一个基由有限多个向量组成，那么称 V 是**有限维**的；如果 V 中有一个基由无穷多个向量组成，那么称 V 是**无限维**的。

对有限维线性空间 V ，其任意两个基所含向量的个数相等；对无限维线性空间 V ，其任意一个基都由无穷多个向量组成。

对有限维线性空间 V ，把 V 的一个基所含向量的个数称为 V 的维数，记作 $dim_K V$ ，简记作 $dim\ V$ ；对无限维线性空间 V ，则记 $dim\ V = \infty$ ；只含零向量的线性空间的维数为 0 。

维数性质

对于**有限维**线性空间 V，它的维数对于研究 V 的结构提供了重要信息。我们有以下几个基本但非常有用的【命题】：

1. n 维线性空间 V 中，任意 $n+1$ 个向量都线性相关。
2. 设 $dimV = n$，则 V 中任意 n 个线性无关的向量都是 V 的一个基。
3. 设 $dimV = n$，若 V 中每个向量都可以由向量组 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 线性表出，则 $\alpha_1, ..., \alpha_n$ 是 V 的一个基。
4. 设 $dimV = n$，则 V 中任意一个线性无关的向量组都可以扩充成 V 的一个基。

对于**有限维**线性空间 V 的**子空间** W，我们有下述结论：

1. $dimW \leq dimV$；
2. 从 $dimW = dimV$ 可推出 $W = V$ 。

第二个结论表明，仅仅用维数就能判断有限维线性空间 V 的子空间 W 是否等于 V 。

求基和维数

那么，知道了这么多定义和性质，通常我们怎么求一个线性空间或子空间的基和维数呢?

通常，第一步先探索任意一个向量能由哪些向量线性表出；第二步去证明这些向量是线性无关的。

如果已经知道了一个线性空间或子空间的维数为 n，那么只要找出 n 个线性无关的向量，他们就是一个基；或者去找出 n 个向量，使得这个空间中的任一向量都可以由这 n 个向量线性表出，那么这 n 个向量就是一个基。

基和维数有很多重要应用，一方面，由于线性空间中的向量在基下线性表出方式唯一，我们由此可以引出**坐标**；另外，基和维数本身就是认识**子空间结构**的重要工具。

以下两小节对此分别进行了介绍。

坐标

知道了基和维数，我们就能定义坐标的概念。

设 V 是数域 K 上的 n 维线性空间， $\alpha_1,...,\alpha_n$ 是 V 的一个基。则 V 中任一向量 α 可以由基 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 线性表出且表法唯一：

$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n \tag{18}$$

我们把系数组成的 n 维有序数组（写成向量的形式）$(a_1,...a_n)^T$ 称为向量 α 在基 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 下的**坐标**。

例如，数域 K 上 n 元有序数组形成的线性空间 K^n 中，令

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, ... \epsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

由于以 $\epsilon_1,\epsilon_2,...,\epsilon_n$ 为列向量组的矩阵的行列式的值为 1 ，因此 $\epsilon_1,\epsilon_2,...,\epsilon_n$ 线性无关。任取 $\alpha = (a_1,a_2,...,a_n)^T \in K$ ，有

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + ... + a_n\epsilon_n \tag{20}$$

因此，$\epsilon_1,\epsilon_2,...,\epsilon_n$ 是 K^n 的一个基，通常称 $\epsilon_1,\epsilon_2,...,\epsilon_n$ 是 K^n 的**标准基**。$dim\ K^n = n$ ，这就是我们把 K^n 称为数域 K 上的 n **维**向量空间的原因。

并且，由（20）式得，K^n 中任一向量 $\alpha = (a_1,...,a_n)^T$ 在基 $\epsilon_1,\epsilon_2,...,\epsilon_n$ 下的坐标是 α 本身。

对于线性空间 V ，只要知道它的一个基，那么 V 的结构就完全清楚了。这是研究线性空间的结构的第一条途径。

子空间的结构

有了以上基和维数的定义，以及相关的结论，我们可以研究线性空间 V 的子空间的结构，以下本小节均讨论数域 K 上的线性空间 V：

若 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 是 V 的一个向量组，则向量组 $\alpha_1,...,\alpha_s$ 的一个极大线性无关组是**子空间** $<\alpha_1,...,\alpha_s>$ 的一个基，从而 $dim <\alpha_1,...,\alpha_s> = rank\{\alpha_1,...,\alpha_s\}$ 。

这里一定要注意，$dim < \alpha_1, ..., \alpha_s >$ 与 $rank\{\alpha_1, ..., \alpha_s\}$ 是两个不同的概念。**维数是对于子空间而言的，秩是对于向量组而言的。**

也就是说，V 中的向量组 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 和其生成的子空间 $< \alpha_1, ..., \alpha_s >$ 虽不是一个概念，但有着密切的联系。前面我们介绍了**两个向量组**如果能互相线性表出则等价，这个结论可以延伸到其形成的子空间，即 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 和 $\beta_1, ..., \beta_r$ 是 V 的两个向量组，则 $< \alpha_1, ..., \alpha_s > = < \beta_1, ..., \beta_r > \ \Leftrightarrow\ \{\alpha_1, ..., \alpha_s\} \cong \{\beta_1, ..., \beta_r\}$ 。

下篇请阅读：线性代数-线性空间的知识梳理3。