0 说明

笔记标题：MIT_LA_Lecture9-10

笔记版本：v1.0

对于文档的说明：

1. 你可以在我的Github仓库中下载本笔记的Markdwon源文档，并通过浏览目录进行更方便高效地浏览；也欢迎在知乎文章中进行浏览。
2. 本笔记参考的课程为MIT Linear Algebra（麻省理工线性代数），本课程在网易公开课、Bilibili和youtube等网站上都有视频资源，读者可以选择合适的平台观看。
3. 本笔记并未完全按照视频课的内容记录，添加了许多自己的理解、资料的补充和顺序的调整。
4. 本系列笔记在不断更新，已经发布的笔记也会偶尔进行内容更新，版本号可以在文件标题或说明的开头查看，你可以通过Github的commit信息来查看笔记更新内容。
5. 如果你对笔记内容有好的建议，请提出来，笔者在这里表示感谢。

对于内容的说明：

1. 小写字母表示的向量，比如 $\vec{a}$ ，除非在特殊说明的情况下，都表示的是列向量。用 $\vec{a}^T$ 来表示行向量。
2. 部分矩阵中 `.` 用来表示元素省略，并不表示元素为 0 。
3. 单位矩阵用 I 表示。

9.1 线性相关

定义

假设V是在域 K 上的向量空间，如果 $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n$ 是V的向量，称他们为线性相关，如果从域 K 有非全零的元素的$a_1,a_2,...,a_n$，使得

$$a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+...+a_n\vec{v}_n=\vec{0} \tag{1}$$

如果 K 中不存在这样的元素，那么 $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n$ 是线性无关。

举例

1. 在一条直线上的向量线性相关。
2. 零向量与任何向量线性相关。
3. 二维平面内，任意三个向量线性相关；n 维空间内，任意 $n+1$ 个向量线性相关。

性质

1. 线性无关等价于矩阵 A 零空间只有零向量，即 $rank(A)=n$；线性相关等价于矩阵 A 零空间有非零向量，即 $rank(A)<n$ 。
2. 向量 $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n$ 张成（span）一个空间意味着，这个空间包含这些向量的所有线性组合。

9.2 向量空间的基与维数

在 5 中，我们简单介绍了向量空间的基与维数，回顾一下：

定义

设 V 为向量空间，如果 r 和向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_r\in V$ ，且满足：

- $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_r$ 线性无关；
- V 中任一向量都可由 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_r$ 线性表示，也就是它们生成整个空间。

那么，向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_r$ 就称为向量空间 V 的一个**基**， r 称为向量空间 V 的**维数** $dim\,V$ ，并称 V 为 r 维向量空间。

对于给定向量空间，虽然会有很多组基，但空间中的任一组基都有相同的向量的数量，也就是生成此空间的最少需要的向量的个数，这就是空间的维数。基向量可能不同，但基向量的个数一定相同。

性质

- 对于 R^n 中 n 个向量，要构成 R^n 的一组基的充分必要条件是以这 n 个向量为列的 $n \times n$ 矩阵是可逆矩阵。
- 线性无关的列向量，是其张成的矩阵的列空间的一组基。但矩阵列空间的一组基并不一定是所有列向量。
- $rank(A)$ = 主元列的数量 = 矩阵列空间的维数；零空间的维数就是 $dim\ N(A) = rank(F) = n - r$ 。

举例

标准基

三维空间 R^3 中，我们知道以下这组基，因为很容易能验证符合以上性质，并且这是一组标准正交基：

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

如果基的模均为 1 ，那么这组基为标准基；

如果基相互正交，那么这组基为正交基。

添加不相关的向量

还是在三维空间中，我们考虑是否存在其他基：如果我们随便取两个非零不共线向量，它们一定共面，那么当第三个非零向量不在前两个向量张成的平面上时，这三个向量就组成一组基。

消元找到主元列

以下我们考虑如何找到矩阵列空间的一组基。

首先，我们可以通过高斯消元法找到简化行阶梯型 R 并找到主元列，主元列在原始的 A 所对应的列向量即是列空间的一组基。

极大线性无关组

矩阵列向量的一个极大线性无关组构成其列空间的一组基。

由维数找到一组基

如果知道 R^m 上某矩阵列空间的维数 r ，那么**从列向量中**找到 r 个线性无关的列向量即可组成列空间的一组基。注意，这里只能从列向量中找，也就是在列空间内找，如果跳出了这个空间，那么随便找 r 个线性无关的向量，虽可以构成一组基，但不一定是矩阵列空间的基，这点十分重要。

10 四个基本子空间

基本定义

四个子空间的前两个我们上一节笔记已经介绍过：**列空间**与**零空间**，我们当时学习的目的是为了更好地理解线性方程组的解的结构。这是因为，我们可以把线性方程组等价于列向量的线性组合是否能得到一个新的列向量，而列向量的所有线性组合就是其列空间，因此 $\vec{b}$ 是否在其列空间内，就可以判断出 $A\vec{x}=\vec{b}$ 是否有解；而零空间内的向量就是使 $A\vec{x}=\vec{0}$ 成立的 $\vec{x}$，只要我们找到一个特解，就能得到 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解了。

那么，另外两个子空间：**行空间**和**左零空间**，又该怎么理解呢？行空间可以看成是行向量张成的向量空间，左零空间就是对应的能使行向量线性组合为 $\vec{0}$ 的系数向量的集合。

因为我们已经习惯了通过列向量处理向量空间和线性关系，所以可以将 A 转置，A^T 的列空间就是 A 的行空间，A^T 的零空间就是 A 的左零空间。

以下我们以 $m\times n$ 型矩阵 A 为例：

子空间	含义	域
列空间	列向量的线性组合	$C(A)\in R^m$
零空间	使列向量线性组合为 $\vec{0}$ 的系数向量的集合	$N(A)\in R^n$
行空间	行向量的线性组合，A^T 的列空间	$C(A^T)\in R^n$
左零空间	A^T的零空间	$N(A^T)\in R^m$

理解这些向量空间，我们需要：

1. 找到他们的一组基。
2. 维数是多少。

基本子空间的维数

我们容易得到：

子空间	维数
列空间	$dim\ C(A)=rank(A)=r$
零空间	$dim\ N(A)=n-r$
行空间	$dim\ N(A)=n-r$
左零空间	$dim\ N(A^T)=m-r$

基本子空间的基

在实际计算中，我们为了求解线性方程组，得出矩阵的秩或基本子空间的维数，会经常通过高斯消元法或高斯-若当消元法来得到矩阵对应的行阶梯型矩阵或简化行阶梯形矩阵，从而找到主元列，基变量和自由变量。寻找基本子空间的基通常也这么进行。

我们考虑以下矩阵 A ，其通过初等行变换 E 得到简化行阶梯型 R：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R \tag{3}$$

我们得到 2 个主元，即 $rank(A)=2$ ，则 $dim\ C(A)=2, dim\ N(A)=2$ 。

列空间

列空间的一组基就是原矩阵 A 主元列所对应的列向量，而不是 R 中主元列列向量。这是因为，**初等行变换改变了列空间**，即 $C(R)\neq C(A)$ ，因为 $[1,1,1]^T$ 显然在A的列空间内，但是不在 R 的列空间内。

零空间

在 7 中的 (28)，我们就已经找出了零空间的一组基：

$$N_{n\times(n-r)}=\begin{bmatrix}-F_{r\times(n-r)}\\I_{n-r}\end{bmatrix} \tag{4}$$

行空间

上面我们知道初等行变换会改变列空间，但初等行变换不会对行空间产生影响，因为初等行变换本来就是行向量之间的线性组合。

所以，R 中的主元行向量（即** A 的简化阶梯型矩阵 R 的前 r 行**，这里具体来说就是前 2 行）就是 A 行空间的一组基，但 A 的前两行并不一定就是行空间的基，因为我们在初等行变换的过程中，是有可能交换行的，这个和列空间刚好相反。总之，R 中主元列在 A 中对应的列向量是 A 的列空间的基；R 中主元行在 R 中对应的行向量是 A 的行空间的基。

既然行空间在行最简形在 R 中以最佳形式表现出来，那么我们也可以通过列变换，或者说 A^T 的简化行阶梯型来找到 A 的列空间的最佳形式。

左零空间

在寻找行空间的基时，我们首先进行消元得到了简化行阶梯形矩阵 R：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R \tag{5}$$

R 一定有且仅有 r 个非零行向量，就是主元行，剩下的 $m-r$ 行就是零向量了。

我们写出高斯-若当消元过程，E 就是初等行变换的过程：

$$E=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix} \tag{6}$$

我们把 $EA=R$ 补全：

$$\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&-1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{7}$$

知道 E 之后，我们实际上就已经知道左零空间的维数和基了。观察最后一行：

$$\begin{bmatrix}-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&1\\1&1&2&1\\1&2&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{8}$$

我们在第一章就谈到过，矩阵左乘行向量相当于矩阵行的线性组合，这里右边是零向量，这也就是上面我们说的那种形式，于是我们可以得到 $[-1,0,1]$ 是矩阵左零空间的一个基，而 $rank(A)=2$，所以 $dim\ (A^T)=m-r=3-2=1$，也就是基向量的个数为1，即再没有1组与 $[-1,0,1]$ 线性无关的基。