0 说明
4.1 矩阵的 LU 分解
为什么需要 LU 分解
LU 分解
其他分解形式
PLU 分解
LDU 分解
4.2 高斯消元算法复杂度
4.3 转置矩阵
转置矩阵的性质
特殊转置矩阵
对称矩阵
正交矩阵
斜对称矩阵
4.4 置换矩阵
置换矩阵的定义
置换矩阵的性质
5 向量空间
空间
向量空间的定义
常见的向量空间
向量空间的子空间
向量空间的基与维数
6.1 列空间
列空间的定义
线性方程组与列空间
6.2 零空间
零空间的定义
零空间的维数
特例分析
一般分析
7 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的求解
思路
计算机求解的过程
8 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的求解
$A\vec{x}=\vec{b}$ 何时有解?
$A\vec{x}=\vec{b}$ 解的结构

0 说明

笔记标题：MIT_LA_Lecture4-8

笔记版本：v1.0

对于文档的说明：

1. 你可以在我的Github仓库中下载本笔记的Markdwon源文档，并通过浏览目录进行更方便高效地浏览；也欢迎在知乎文章中进行浏览。
2. 本笔记参考的课程为MIT Linear Algebra（麻省理工线性代数），本课程在网易公开课、Bilibili和youtube等网站上都有视频资源，读者可以选择合适的平台观看。
3. 本笔记并未完全按照视频课的内容记录，添加了许多自己的理解、资料的补充和顺序的调整。
4. 本系列笔记在不断更新，已经发布的笔记也会偶尔进行内容更新，版本号可以在文件标题或说明的开头查看，你可以通过Github的commit信息来查看笔记更新内容。
5. 如果你对笔记内容有好的建议，请提出来，笔者在这里表示感谢。

对于内容的说明：

1. 小写字母表示的向量，比如 $\vec{a}$ ，除非在特殊说明的情况下，都表示的是列向量。用 $\vec{a}^T$ 来表示行向量。
2. 部分矩阵中 `.` 用来表示元素省略，并不表示元素为 0 。
3. 单位矩阵用 I 表示。

4.1 矩阵的 LU 分解

为什么需要 LU 分解

在上一节中，我们知道通过高斯消元法可以容易地求解线性方程组，用矩阵表示即 $EA=U$ ， E 为若干初等矩阵的积，包含了我们进行初等变换的所有信息， U 为上三角矩阵（upper triangular）。我们以 1 中（6）为例 $E_{32}E_{21}A=U$ ：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&0&5\end{bmatrix}\tag{1}$$

我们先**不考虑行的交换**，观察 $E_{32}E_{21}=E$ ：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-6&-2&1\end{bmatrix}\tag{2}$$

我们可以发现， E 除了初等行变换信息（即 E 中的-3，-2两项），还多了一个额外信息-6，这个是我们不想要的信息，那么有没有只包含行变换信息的分解或等式呢？有，这就是我们即将介绍的 LU 分解。

LU 分解

> 在线性代数与数值分析中， LU 分解是矩阵分解的一种，将一个矩阵分解为一个**下三角矩阵**和一个**上三角矩阵**的乘积，有时需要再乘上一个**置换矩阵**。 LU 分解可以被视为高斯消元法的矩阵形式。在数值计算上， LU 分解经常被用来解线性方程组、且在求反矩阵和计算行列式中都是一个关键的步骤。

> --维基百科

仍先不考虑行变换，LU 分解简单地说就是 $A=LU$，同样写出上例的 LU 分解式：

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&2&-2\\0&0&5\end{bmatrix} \tag{3}$$

可以看到，L 除了是下三角阵外，还**包含且仅包含**了矩阵行变换的所有信息。同时我们有以下结论：

$$\begin{aligned}&EA=U\\&A=LU\\&\therefore L=E^{-1}\end{aligned} \tag{4}$$

这样，当我们通过高斯消元法变换矩阵后，就能立即写出 $A=LU$ 这种分解形式，对**消元的过程和结果**进行完整地记录，而不需要额外去计算 $E=E_{32}E_{21}$，我们写出L就相当于记录了 E，因为 $L=E^{-1}$。

总之，对于 $A=LU$，如果不存在行交换，消元乘数（消元步骤中需要乘以并减去的倍数）可以直接写入 L 中。因此可以这样看待消元，只要步骤正确，就可以在得到 LU 的过程中把 A 抛开，这是对矩阵形式进行消元的更深刻的认识。

其他分解形式

除了上面给出的 LU 分解，有些矩阵还能进行 PLU 分解和 LDU 分解。

PLU 分解

方阵 A 的 PLU **分解**是是将它分解成一个**置换矩阵** P、**一个下三角矩阵** L 与**上三角矩阵** U 的乘积，即

$$A=PLU \tag{5}$$

事实上，所有的方阵都可以写成 PLU 分解的形式，由于左乘排列矩阵 P^{-1} 是在交换行的顺序（也就是后面即将说到的置换矩阵），所以由 $P^{-1}A=LU$ 推得适当的交换 A 的行的顺序，即可将 A 做 LU 分解。事实上，PLU 分解有很高的数值稳定性，因此实用上是很好用的工具。

有时为了计算上的方便，会同时间换行与列的顺序，此时会将 A 分解成

$$A=PLUQ \tag{6}$$

其中 P、L、U 同上，Q 是一个置换矩阵（这里是右乘以交换列）。

LDU 分解

方阵 A 的 **LDU 分解**是是将它分解成一个**单位下三角矩阵** L、**对角矩阵** D 与**单位上三角矩阵** U 的乘积，即

$$A=LDU \tag{7}$$

其中单位上、下三角矩阵是指对角线上全是 1 的上、下三角矩阵。

事实上，LDU 分解可以推广到 A 是一般的矩阵，而非方阵。此时，L 和 D 是方阵，并且与 A 有相同的行，U 则有和 A 相同的长宽。注意到现在 U 是上三角的定义改为主对角线的下方都是 0，而主对角线是收集所有 U_{ij} 满足 $i=j$ 。

我们将（3）中的 $A=LU$ 分解再进一步化为 LDU 分解：

$$\begin{bmatrix}1&2&1\\3&8&1\\0&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\tag{3}$$

4.2 高斯消元算法复杂度

关于高斯消元算法的复杂度：

1. 用每一行减去第一行的倍数，以消除第一行以外的第一列的元素，因为每行有 n 个元素，所以计算次数为 n^2 ；
2. 排除第一行，用每一行减去第二行的倍数，计算以此类推，因为共有 n 行，所以我们一共进行了 n 次，算法复杂度为 $n^2+(n-1)^2+\ldots+1^2=O(\frac{1}{3}n^3)$ 。
3. 这里我们仅讨论得到阶梯型矩阵的复杂度，高斯-若当消元法会有额外的计算步骤，但后续计算量小，并不影响其复杂度，这里不予证明。

4.3 转置矩阵

转置矩阵的性质

转置矩阵（transpose）有很多值得我们记住的基本的性质，对于矩阵 A,B 和标量 c，转置矩阵有下列性质：

- $(A^T)^T=A$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$
- $(cA)^T=cA^T$
- $\left|A^T\right|=|A|$
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}^T\vec{b}$
- 若 $AA^T=C$ ，则 C为对称矩阵，即 $C=C^T$ 。

还有比如我们刚刚学到的：

$$AA^{-1}=I\xrightarrow{T}(A^{-1})^TA^T=I\rightarrow\left(A^T\right)^{-1}=(A^{-1})^T\tag{4}$$

当然，还有一些之后会学到的：

- 如果 A 只有实数元素，则 A^TA 是半正定矩阵。
- 如果 A 是在某个域上，则 A 相似与 A^T 。

特殊转置矩阵

对称矩阵

其转置等于自身的方块矩阵叫做**对称矩阵**。

正交矩阵

其转置也是它的逆矩阵的方块矩阵叫做**正交矩阵**；就是说 G 是正交的，如果 $GG^T = G^T G = I$ 。

斜对称矩阵

其转置等于它的负矩阵的方块矩阵叫做斜对称矩阵；就是A是斜对称的，如果 $A^T = -A$ 。

4.4 置换矩阵

置换矩阵的定义

在以上的消元的讨论中，我们为了方便都事先假定不需要进行行的交换，如果需要考虑这些行交换或列交换， $A = LU$ 分解就不能完全表示出矩阵消元的所有信息了，这个时候我们需要在 LU 左边乘上一个置换矩阵，用以记录行交换的信息，从而我们得到了 $A = PLU$ 分解；当然，有时候我们也会进行列交换，那么同样地在 LU 右端乘上一个置换矩阵，就得到了 $A = PLUQ$ 分解。

> 在数学中的矩阵论里，置换矩阵（permutation matrix）是一种系数只由0和1组成的方块矩阵。置换矩阵的每一行和每一列都恰好有一个1，其余的系数都是0。在线性代数中，每个n阶的置换矩阵都代表了一个对 n 个元素（n 维空间的基）的置换。当一个矩阵乘上一个置换矩阵时，所得到的是原来矩阵的横行（置换矩阵在左）或纵列（置换矩阵在右）经过置换后得到的矩阵。
>
> 来自维基百科。

我们考虑 $n=3$时的置换矩阵，一共有以下6个：

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix} \tag{5}$$

相应地，左乘分别代表不变，交换2、3行，交换1、2行等；右乘分别代表不变，交换2、3列，交换1、2列等。

置换矩阵的性质

- 从定义可以看出，n 维置换矩阵共有 $n!$ 个。
- 从定义也可以很容易得到，置换矩阵的逆等于其转置，即 $P^{-1} = P^T$ 。
- 这 $n!$ 个置换矩阵任意相乘的结果仍在其中，其逆也在其中，也就是这 $n!$ 个矩阵构成了一个矩阵群，对矩阵乘法和逆运算封闭。

5 向量空间

空间

什么是空间？如果让一只蚂蚁沿着一条细绳爬行，那么对蚂蚁来说，空间就是一条直线 R ，如果把蚂蚁放到地图上，那么空间就是一个平面 R^2 ，而现实里，蚂蚁还能往上往下，那么就像我们人类感知的一样，空间就是三维空间 R^3 。

而数学上，空间是指一种具有特殊性质及一些额外结构的集合，也就是说，我们规定一些性质或结构，若集合能满足这些要求，那它就是一个我们规定的某种空间。在数学上，空间可以有很多种，比如函数空间、仿射空间、概率空间等等，向量空间也是规定的一种满足特定性质和要求的**元素**的集合。

那么，从这个定义来说，向量空间里的元素只要满足这些要求就行了，是不是向量空间里的元素不是向量也可以呢？还真是这样。向量空间的元素还可以是函数、矩阵、多项式、映射等等，只要这些元素满足向量空间的所规定的线性运算规律就好了。

但正如名字所示，我们最常见和研究的向量空间还是一些有序数组，也就是向量的集合，这一节我们还是以它为主介绍。

那么，向量空间应该满足什么性质呢?

向量空间的定义

设 V 为 n 维向量的集合，如果集合 V 非空，且集合 V 对于向量的加法及数乘两种运算封闭，那么就称集合 V 为向量空间。所谓封闭，是指在集合 V 中可以进行向量的加法及数乘两种运算。具体地说：

$$\begin{aligned}&\text{若}\vec{a},\vec{b}\in V\text{，则}\vec{a}+\vec{b}\in V\text{；}\\&\text{若}\vec{a}\in V\text{，}\lambda\in R\text{，则}\lambda\vec{a}\in V\text{。}\end{aligned}\tag{6}$$

当然，我们这里前提还是以有序数组，即向量为对象考虑的，对于一般化的向量空间，我们会在后面介绍。

常见的向量空间

在思考这个问题之前，我们先回过头看一看（6）这个定义，其中 $\vec{a},\vec{b}$ 既然可以相加，首先它们的维数必须相同，也就是说，不同维数的向量构成的向量空间肯定是不同的，比如，举个最简单的例子，两个集合A和B，$A=\left\{\vec{0}=[0,0]^T\right\}$，$B=\left\{\vec{0}=[0,0,0]^T\right\}$，很容易验证这两个向量都分别满足向量空间的定义，但它们是不同的向量空间。

同样地，我们还能举出一个例子 R , R^2 ，和 R^3 都是向量空间，可以说是 n 维列向量能构成的最大的向量空间。

还有哪些呢？比如我们考虑 R^2 内，一条过原点的直线也是一个向量空间，因为我们很容易能验证（6）中的两条性质。但线段、射线和不过原点的直线都不是向量空间，也就是没有其他种类的向量空间了。

我们再考虑 R^3 中，同样，过原点的直线是向量空间，更进一步，过原点的任一平面也是一个向量空间，也没有其他种类的向量空间了。

现在我们再加上最开始考虑的零向量和 R^n 本身，总结一下， R^n 中，一共有多少种向量空间呢?

首先是零向量，然后是 R^n 中任一过原点的直线，然后是R^n中任一过原点的平面，当 $n=4$ 时，还有 R^4 中任一过原点的三维空间，当然4维是抽象的， $n>4$时以此类推。最后再加上 R^n 本身，就是 R^n 内所有不同种类的向量空间，共有 $n+1$ 种。

向量空间的子空间

我们知道了 R^n 中，一共有 $n+1$ 种向量空间，并且，前 n 种向量空间都是 R^n 的子集（当然 R^n 本身也是 R^n 的子集），那么就称前 n 种低维向量空间是 R^n 的**子空间**。

一个集合 A 首先应该是一个向量空间，其次它是另一个向量空间 V 的子集，这样它就是这个向量空间 V 的子空间。

那么，是在 R^n 中的这 $n+1$ 种向量空间，前 n 种向量空间只能是 R^n 的子空间吗？并不是，比如，R^n 上的一个二维向量空间，即 R^n 中一个过原点的平面，在其中任找一条过原点的直线，那么这条直线就是这个二维向量空间的子空间。当然， n 维零向量也是 R^n 中任一向量空间的子空间。

向量空间的基与维数

设 V 为向量空间，如果 r 和向量 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_r\in V$ ，且满足：

- $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_r$ 线性无关；
- V 中任一向量都可由 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_r$ 线性表示，

那么，向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_r$ 就成为向量空间V的一个**基**， r 称为向量空间V的**维数** $dim\,V$ ，并称 V 为 r 维向量空间。多说一句，如果 $\vec{a}_1$ 是m维列向量，那么我们通常称 V 为 R^m 上的 r 维向量空间。

如果向量空间 V 没有基，那么 V 的维数是0。0维向量空间只含一个零向量 $\vec{0}$。

以上，我们介绍了向量空间的概念， 接下来介绍两种常用的向量空间来帮助理解和求解线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$： **列空间**和**零空间**。

6.1 列空间

列空间的定义

设一 m 行 n 列实元素矩阵为 A_{mn} ，则其列空间（column space）是由矩阵 A 的所有列向量张成（span）的 R^m 上的子空间，记作 $C(A)$ 。

矩阵 A 的列空间 $C(A)$ 中的所有向量均为矩阵 A 中列向量的某种线性组合，都为 R^m 上的向量（即 m 维向量）。

$C(A)$的维度等于矩阵 A 的列秩，最大为 $min(m,n)$ 。即：

$$dim\,C(A) = rank(A) \le min(m,n) \tag{7}$$

列空间 $C(A)$ 的一组自然基底是矩阵 A 的列向量的最大线性无关组。

线性方程组与列空间

我们考虑以下线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$ ：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

我们很容易验证列空间 $C(A)$ 是一个向量空间。

A的列空间 $C(A)$ 为所有列的线性组合，因为第3列为前两列之和，前两列线性无关，所以 $C(A)$ 是 R^4 上的一个2维向量空间。

那么，由（8）可知，求解线性方程组从列向量角度讲，本质就是 $\vec{b}$ 是否可以由系数矩阵 A 的列向量线性表出。那么什么时候 $A\vec{x} = \vec{b}$ 解有什么时候无解呢？**从列空间的角度，当 $\vec{b} \in C(A)$ 时，线性方程组有解；反之则无解。**

6.2 零空间

零空间的定义

对于所有使齐次线性方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$ 成立的向量 $\vec{x}$ 的集合，称为矩阵 A 的零空间（null spaces），用符号表示为 $N(A)$ 。

零空间是一个向量空间。当 A 为 m 行 n 列实元素矩阵，所以 $\vec{x}$ 是一个 n 维列向量：

- 若 $\vec{w} \in N(A)$ ，则 $A(k\vec{w}) = kA\vec{w} = \vec{0}$ ，即 $k\vec{w} \in N(A)$ ；
- 若 $\vec{w}, \vec{u} \in N(A)$ ，则 $A(\vec{w} + \vec{u}) = A\vec{w} + A\vec{u} = \vec{0}$ ，即 $\vec{w} + \vec{u} \in N(A)$ 。

所以 $N(A)$ 就是 R^n 的一个子空间。

零空间的维数

很容易知道，$\vec{0} \in N(A)$ ，以下我们来讨论 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的非零解。

特例分析

比如我们考虑例（8）所对应的其次线性方程组：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

很明显，一个解为 $\vec{x} = [-1, -1, 1]^T$ ，当然所有 $k\vec{x}$ 也都是解，那么还有与 $\vec{x}$ 不共线的解吗?

我们可以设非零解为 $\vec{x} = [c\lambda_1, c\lambda_2, c]^T$ ，（这里 $c \neq 0$ ，因为 c 若等于0，前两列线性无关，得到的就是零解）由于所有 $k\vec{x}$ 也都是解，我们不妨取 $1/c$ ，即 $\vec{x} = [\lambda_1, \lambda_2, 1]^T$ ，来剔除线性相关的解，来讨论：**到底有多少线性无关的 $\vec{x}$ ？也就是零空间的维数。**

我们知道 A 三个列向量的前两个列向量线性无关，也就是前两列是 $C(A)$ 的一个基，第三列可以表示成前两列的线性组合：

$$\overrightarrow{a_3} = k_1\overrightarrow{a_1} + k_2\overrightarrow{a_2} \tag{10}$$

这种表示方法一定是唯一的。因为若有 $\overrightarrow{a_3} = c_1\overrightarrow{a_1} + c_2\overrightarrow{a_2}$ ，且 $[k_1, k_2]^T \neq [c_1, c_2]^T$ ，那么两式相减，我们可以得到 $\vec{0} = (c_1 - k_1)\overrightarrow{a_1} + (c_2 - k_2)\overrightarrow{a_2}$ ，又因为 a_1, a_2 线性无关，所以只有系数都为0时，其线性组合才为 $\vec{0}$ ，所以得到 $c_1 = k_1$ ， $c_2 = k_2$ ，这和我们的假设矛盾，即证明了（10）的表示方法一定是唯一的。

那么 $\overrightarrow{-a_3} = -k_1\overrightarrow{a_1} + -k_2\overrightarrow{a_2} = \lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2}$ 的表示方法也一定是唯一的，移项就能得到，使 $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{a_3} = \vec{0}$ 成立的 $[\lambda_1, \lambda_2, 1]^T$ ，也就是非零解 $\vec{x}$ 也是唯一的，从而原齐次线性方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的系数矩阵 A 的零空间的维数为一，也就是说：**N(A)是 R^n 上的一维向量空间，即 R^n 中的一条过原点的直线。**

一般分析

有了以上特例分析作为基础，我们就能容易地推广到一般情况。

对于一般的 m 行 n 列矩阵 A ，考虑 A 的列向量 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ，一定可以（但并不唯一地）分为两部分，即 $a_1, \ldots, a_r$ 为列空间的一组基（即最大线性无关组）， $a_{r+1}, \ldots, a_n$ 为分别可以由基唯一线性表出的列向量。

> 这里的基虽然在原列向量 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 内，不一定就是最左边的 r 列，但是可以通过交换列向量得到这种形式，相应的零空间内各列向量的位置也需要做相应的调换，比如交换2、4列的位置，那么零空间向量 $[1, 2, 3, 4]^T$ 相应交换2、4行的位置，变成 $[1, 4, 3, 2]^T$ ，但这并不会影响零空间维数这个结果，我们这么做只是为了方便地分析问题。

我们任意从后面 $n - r$ 个列向量中取某个 a_k 系数为1，使其他 $n - r - 1$ 个系数均为0，同样的分析思路，我们有使

$$\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_r\overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_k} = \vec{0} \tag{11}$$

成立的 $[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0_{r+1}, 0_{k-1}, 0_k, 0_{k+1}, \ldots, 0_n]^T$ 是唯一的，由于我们假设的一般性，这样的列向量有 $n - r$ 个，也就是说至少有 $n - r$ 个线性无关的 n 维向量在零空间中，即零空间至少 $n - r$ 维。

尝试写出这 $n - r$ 个向量：

$$\begin{bmatrix} \lambda_{1(r+1)} \\ \lambda_{2(r+1)} \\ \cdots \\ \lambda_{r(r+1)} \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{1(r+2)} \\ \lambda_{2(r+2)} \\ \cdots \\ \lambda_{r(r+2)} \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \lambda_{1(n)} \\ \lambda_{2(n)} \\ \cdots \\ \lambda_{r(n)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

这下我们就能很容易看出为什么要取一个为1，其他都为0，目的就是为了一定能得到 $n-r$ 个线性无关且各自唯一表示的列向量。

那么有可能还有其他的线性无关的向量吗?

也就是比如我们再随便给出一个列向量：

$$\vec{x}^* = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n]^T \tag{13}$$

想要使 $A\vec{x}^* = \vec{0}$ ，且与（12）我们已经得到的 $n-r$ 个解线性无关。这是不可能的。

我们用反证法来证明这个命题，现在有一个 $\vec{x}^*$ 满足"想要使 $A\vec{x}^* = \vec{0}$ ，且与（12）我们已经得到的 $n-r$ 个解线性无关"这个**假设**，那么，我们一定可以将 $\vec{x}^*$ 表示成如下的形式：

$$\vec{x}^* = c_{r+1} \begin{bmatrix} \lambda_{1(r+1)} \\ \lambda_{2(r+1)} \\ \cdots \\ \lambda_{r(r+1)} \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_{r+2} \begin{bmatrix} \lambda_{1(r+2)} \\ \lambda_{2(r+2)} \\ \cdots \\ \lambda_{r(r+2)} \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + c_n \begin{bmatrix} \lambda_{1(n)} \\ \lambda_{2(n)} \\ \cdots \\ \lambda_{r(n)} \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {\lambda_1}^* \\ {\lambda_2}^* \\ \cdots \\ {\lambda_r}^* \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

简写为：

$$\vec{x}^* = c_{r+1}\overrightarrow{x_{r+1}} + c_{r+2}\overrightarrow{x_{r+2}} + \ldots + c_n\overrightarrow{x_{r+n}} + \overrightarrow{x_s}^* \tag{15}$$

关键来了， $\overrightarrow{x_s}^*$ 一定不是零向量，因为这是我们**假设要求的线性无关**。

然后我们在（15）等式两端乘以 A ，便得到：

$$\begin{gathered} A\vec{x}^* = c_{r+1}A\overrightarrow{x_{r+1}} + c_{r+2}A\overrightarrow{x_{r+2}} + \ldots + c_nA\overrightarrow{x_{r+n}} + A\overrightarrow{x_s}^* \\ \vec{0} = c_{r+1}\vec{0} + c_{r+2}\vec{0} + \ldots + c_n\vec{0} + A\overrightarrow{x_s}^* \\ A\overrightarrow{x_s}^* = \vec{0} \end{gathered} \tag{16}$$

再以列向量的线性组合表示出来：

$${\lambda_1}^*\vec{a}_1 + {\lambda_2}^*\vec{a}_2 + \ldots + {\lambda_r}^*\vec{a}_r + 0\vec{a}_{r+1} + 0\vec{a}_{r+2} + \ldots + 0\vec{a}_n = \vec{0} \tag{17}$$

$${\lambda_1}^*\vec{a}_1 + {\lambda_2}^*\vec{a}_2 + \ldots + {\lambda_r}^*\vec{a}_r = \vec{0} \tag{18}$$

由（18）式，我们得到了 $a_1,...,a_r$ 线性相关，这和我们最开始的假定是矛盾的，所以我们由反证法得出，不存在更多线性无关的解了，也就是说 $dim\ N(A)=n-r$ ， r 为 A 的秩。

当然，以上这种证明只是我自己做笔记时想出来的，肯定很繁琐，之后学习了矩阵的秩会有相关性质进行简洁的证明。

综合列空间，我们可以得到，对于 A_{mn} ，若 $rank(A)=r$ ，则有：

$$dim\ C(A)=r, dim\ N(A)=n-r \tag{19}$$

列空间和零空间对于理解非齐次线性方程组的解是非常有帮助的，列空间告诉我们什么时候有解什么时候无解，零空间告诉我们，解的结构应该是什么样子。

7 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的求解

思路

考虑以下 A ，并进行行变换得到简化阶梯型矩阵 R ：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}=R \tag{20}$$

现在，记：

$$I_{r\times r}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, F_{r\times(n-r)}=\begin{bmatrix}2&-2\\0&2\end{bmatrix} \tag{21}$$

那么 R 可以表示为：

$$R_{m\times n}=\begin{bmatrix}I_{r\times r}&F_{r\times(n-r)}\\\vec{0}_{(m-r)\times r}&\vec{0}_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix} \tag{22}$$

设 $N_{n\times(n-r)}$ 为：

$$N_{n\times(n-r)}=\begin{bmatrix}-F_{r\times(n-r)}\\I_{n-r}\end{bmatrix} \tag{23}$$

接下来计算 RN ：

$$R_{m\times n}N_{n\times(n-r)}=\begin{bmatrix}-F_{r\times(n-r)}+F_{r\times(n-r)}\\\vec{0}_{(m-r)\times(n-r)}+\vec{0}_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{0}_{r\times(n-r)}\\\vec{0}_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}=\vec{0} \tag{24}$$

这样我们就找出了 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的一组解 $N_{n\times(n-r)}$ 。

计算机求解的过程

第一步，通过消元找出 R 。

第二步，找出主元变量和自由变量。

第三步，给自由变量赋值0和1，并通过回代解出主变量。

举个例子：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\2&6&8\\2&8&10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{25}$$
$$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

由（23）可知解的形式为：

$$N_{3\times 1}=\begin{bmatrix}-F_{2\times 1}\\I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix} \tag{26}$$

所以原齐次线性方程组的通解为：

$$\vec{x}=k\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix} \tag{27}$$

其中， k 为任意实数。

8 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的求解

在了解了列空间和零空间之后，就可以对 $A\vec{x}=\vec{b}$ 何时有解和解的结构进行分析了。

$A\vec{x}=\vec{b}$ 何时有解?

以下两命题等价：

- 当 $\vec{b}\in C(A)$ 时， $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解。
- 当 $rank(A)=rank(A,\vec{b})$ 时， $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解。

具体而言， n 元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ ：

- 无解的充要条件是 $rank(A)<rank(A,\vec{b})$ 。
- 有唯一解的充要条件是 $rank(A)=rank(A,\vec{b})=n$ 。
- 有无穷多解的充要条件是 $rank(A)=rank(A,\vec{b})<n$ 。

接下来从简化行阶梯型 R 来分类：

$$\underset{\text{一解}}{\overset{r=m=n}{R=I}},\quad \underset{\text{无穷解}}{\overset{r=m<n}{R=\begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}}},\quad \underset{\text{无解或一解}}{\overset{r=n<m}{R=\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}}},\quad \underset{\text{无解或无穷解}}{\overset{r<m,r<n}{R=\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}} \tag{28}$$

$A\vec{x}=\vec{b}$ 解的结构

非齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解为齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的通解，加上非齐次线性方程组的任一特解$\vec{x}^*$：

$$\vec{x}=\begin{bmatrix} -F_{r\times(n-r)} \\ I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_{n-r} \end{bmatrix}+\vec{x}^* \tag{29}$$