# Università degli Studi di Napoli Federico II Accademia Aeronautica

Laurea in Gestione dei Sistemi Aerospaziali per la Difesa (GESAD)

> Corso di MECCANICA DEL VOLO

Prestazioni in Volo Livellato

Prof. A. De Marco

#### PRESTAZIONI IN VOLO NON ACCELERATO

Velocità massima in volo livellato (massimo grado ammissione)

Velocità di crociera (ad un grado di ammissione <1, ad es. 0.75) in volo livellato

Velocità di stallo

Rateo di salita (salita stabilizzata, cioè a V su traiettoria costante)

Angolo di salita (salita stabilizzata, cioè a V su traiettoria costante)

Quota di tangenza pratica e teorica

Tempo di salita

Volo librato

Autonomia oraria e di distanza

Mentre quelle in presenza di accelerazioni sono:

## PRESTAZIONI IN PRESENZA DI ACCELERAZIONI

Prestazioni di decollo (corsa di decollo)

Prestazioni di atterraggio

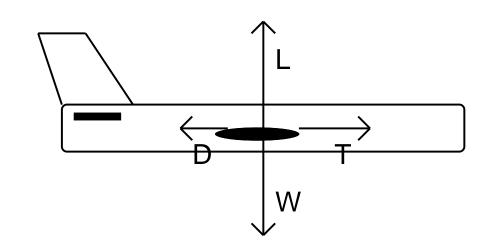
Virata

Manovra nel piano longitudinale (cabrata)

$$L = CL \cdot q \cdot S = W$$

$$T_d = T_{no} = D$$
 O anche

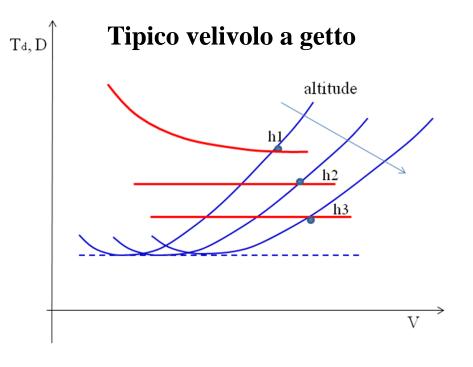
$$\Pi_d = \Pi_{no} = D \cdot V$$



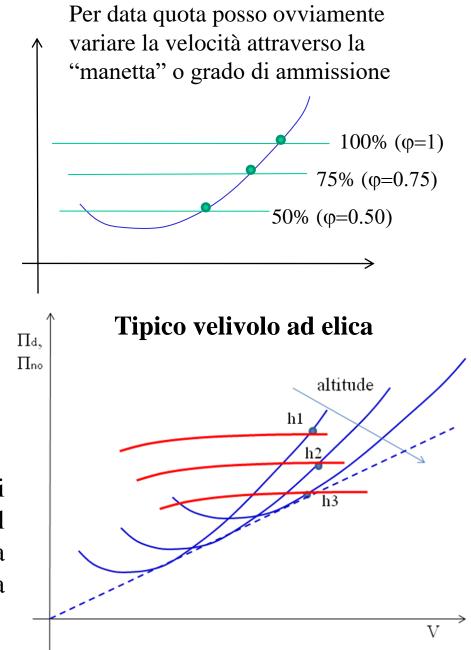
Per assegnata spinta (o potenza) disponibile da parte dell'impianto propulsivo (scelta dal pilota attraverso il grado di ammissione) si avrà la velocità di equilibrio (velocità alla quale la spinta o potenza necessaria eguaglia tale spinta).

Per il velivolo propulso a getto (Turbofan) si ricorda che bisogna considerare il "rating" del motore MAX CRUISE

$$T = T_o \cdot 0.71 \cdot \sigma \cdot \phi$$
 MAX CRUISE, alte quote (h>20,000 ft)

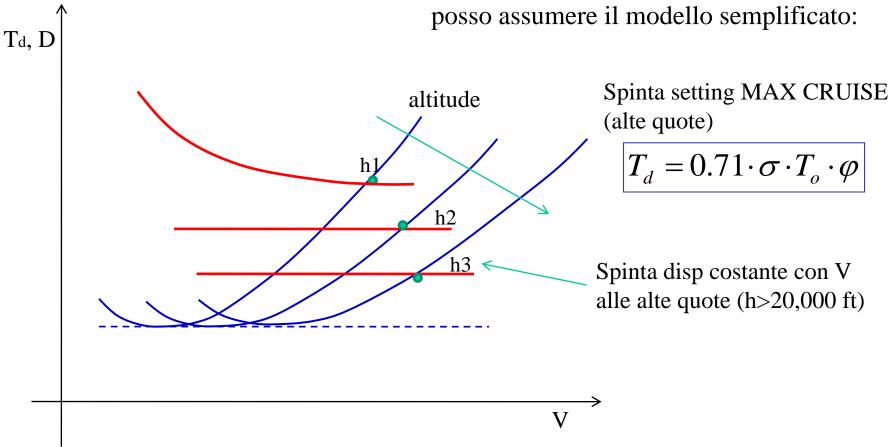


In corrispondenza del massimo grado di ammissione, considerando il settaggio del motore MAX CRUISE, avrò la massima velocità di crociera in volo livellato a quella quota.



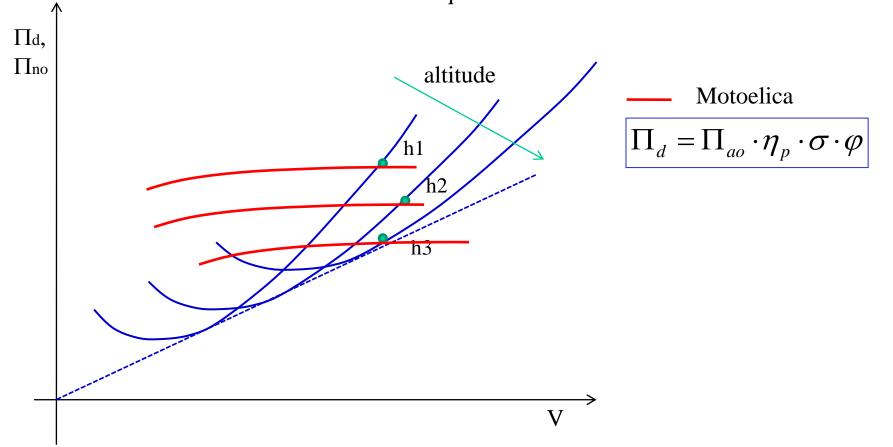
# Grafici tipico velivolo a getto - Vel max Crociera -

Alle quote basse la spinta non è costante con la velocità di volo V. Per quote tipiche alle quali opera in crociera un velivolo da trasporto a getto (tipicamente dai 28,000 ai 38,000 ft, quindi certamente maggiori di 20,000 ft) però posso assumere il modello semplificato:



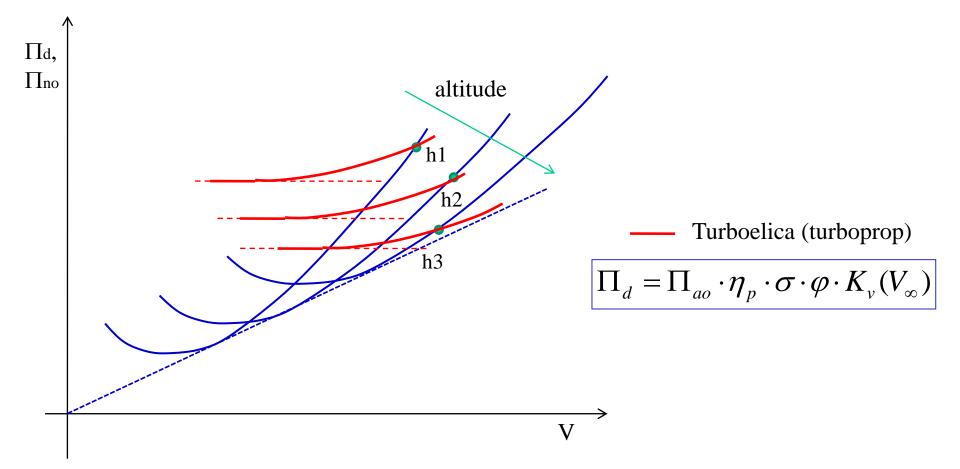
# Volo livellato Grafici tipico velivolo ad elica - Vel max Crociera -

Per un velivolo ad elica alimentato da motore alternativo la potenza disponibile risente della quota come la potenza all'albero. Se l'elica è a passo variabile posso assumere rendimento dell'elica abbastanza costante alle varie velocità di volo. Evidentemente quindi anche la potenza disponibile sarà costante con la V, ma ovviamente variabile con la quota.



# Grafici tipico velivolo ad elica -Vel max Crociera – (Turboprop)

Evidentemente quindi anche la potenza disponibile sarà costante con la V, ma ovviamente variabile con la quota. Le curve evidenziano l'effetto RAM (Kv) del motore turboelica.



#### VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO

## **VELIVOLI A GETTO**

Ad esempio consideriamo il velivolo MD-80, con i seguenti dati :

 $W=W_{TO} = 63500 \text{ Kg peso max al decollo}$ 

 $S=112 \text{ m}^2 \text{ b}=33 \text{ m} \text{ AR}=9.72$ 

CDo=0.020 e=0.80  $CL_{MAX}=1.5$ 

Imp. propulsivo:



2 motori PW JT8D da 89000 N (9072 Kgf) di spinta ciascuno, cioè  $T_0$ =18144 Kgf

Dai dati geometrici ed aerodinamici del velivolo ho:

 $E_{MAX}$ =17.5 da cui la minima spinta necessaria al volo sarà:

 $D_{MIN} = \frac{W}{E_{MAX}} = 3633 \text{ Kgf}$ 

Si parte ad ogni quota da

$$Vs = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{CL_{MAX}}}$$

Come spinta disponibile (MAX CRUISE) assumo :

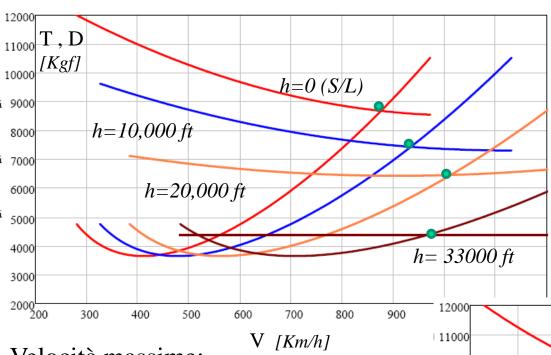
$$T = K_{MZ} \cdot 0.83 \cdot T_o \cdot \varphi$$

$$=0.71\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{T_o}\cdot\boldsymbol{\varphi}$$

Mod. semplificato alte quote

# **VELIVOLI A GETTO**

#### VELOCITA' MASSIMA VOLO LIV. – APPROCCIO GRAFICO



Sono riportate le curve rispetto alla TAS (vel vera).

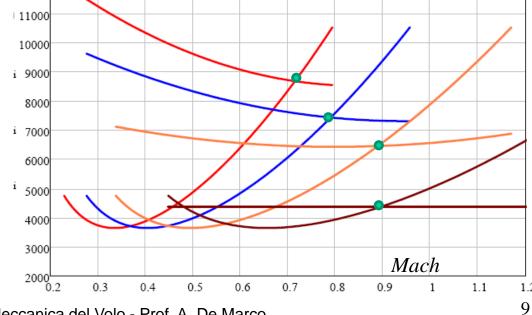
Per alte quote (quelle alle quali solitamente viaggia un velivolo da trasporto a getto) la spinta disponibile segue l'andamento della formula approssimata.

$$=0.71\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{T_o}\cdot\boldsymbol{\varphi}$$

Velocità massime:

A 33,000 ft il punto di equilibrio è vicino al punto A, alle quote basse è a V>VA

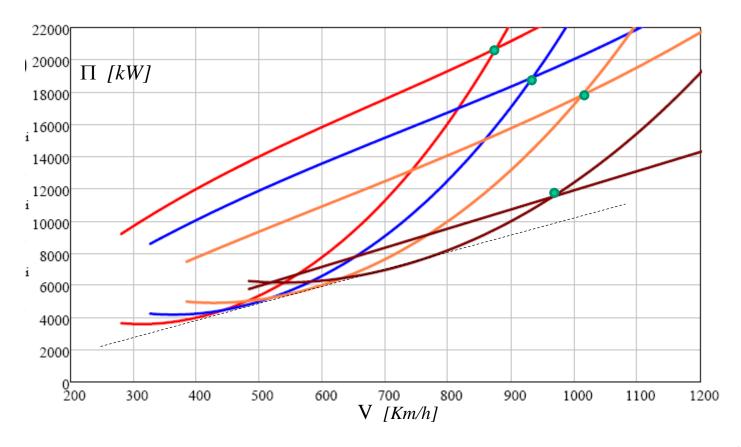
Alle alte quote MACH TROPPO **ELEVATI. Possibile?** 



# Volo livellato VELIVOLI A GETTO VELOCITA' MASSIMA VOLO LIV. – APPROCCIO GRAFICO

Ovviamente si ritrovano gli stessi risultati sulle curve delle potenze necessarie e disponibili.

Si noti come le curve della spinta per velivoli a getto tendono ad essere costanti (soprattutto ad alte quote) mentre le curve di potenza tendono quindi ad andamento lineare con la velocità.



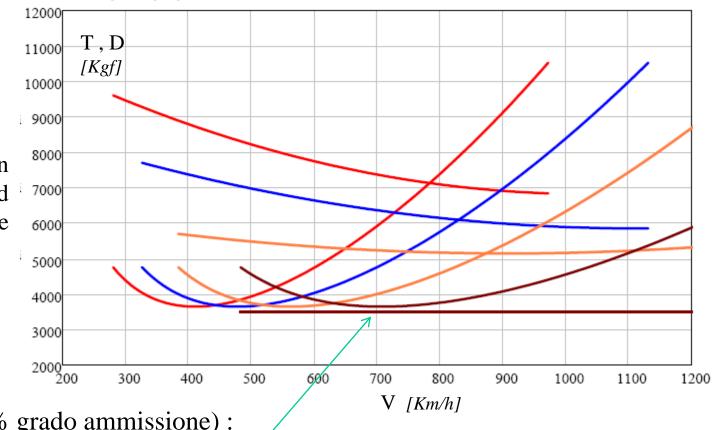
# **VELIVOLI A GETTO**

#### VELOCITA' MASSIMA VOLO LIV. – APPROCCIO GRAFICO

# 80% della SPINTA MAX CROCIERA

$$\varphi = 0.80$$

Un tipico livello usato in crociera corrisponde ad una manetta tra il 75 e 80%.



Velocità crociera (80% grado ammissione):

h=33,000 ft SPINTA NON SUFF per volare a questa manetta a questa quota

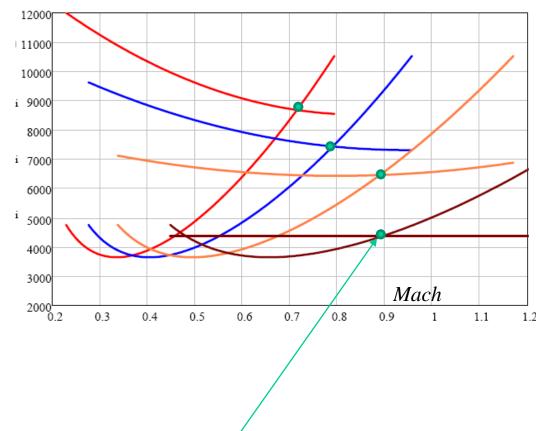
#### VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO

Il Mach di crociera massimo valutato graficamente risulta pari a **M=0.89**.

Ciò non è FISICO! Infatti questo velivolo non riesce a volare a tali velocità.

Il problema è che abbiamo trascurato la resistenza di comprimibilità (Wave Drag) che modifica la polare (soprattutto il CDo) per M>0.70-0.75.

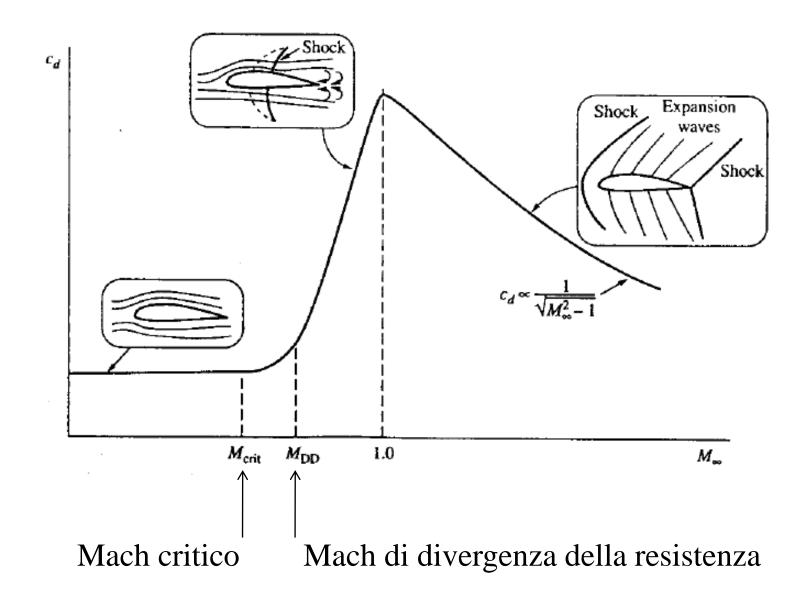
La curva di resistenza usata presuppone polare parabolica (senza effetti comprimibilità). Per Mach alti, come già visto nel Cap 3, si ha invece un forte aumento della resistenza per la resistenza d'onda.



A 33000 ft  $\Rightarrow$  M=0.89 !!!

Il velivolo non riesce a volare a tali Mach

# Volo livellato VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO



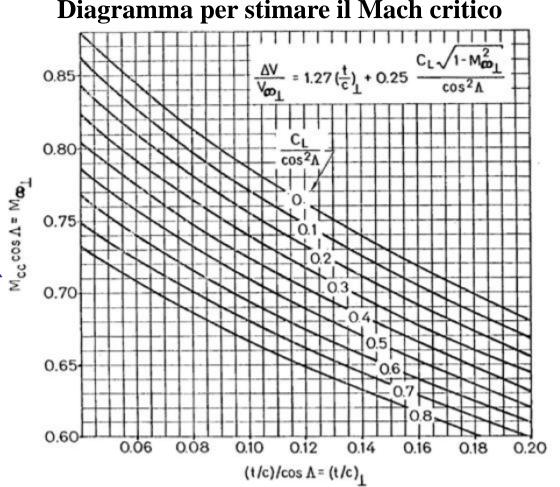
#### VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO

L'incremento di resistenza dovuto alla comprimibilità dipende dal Mach di volo e dal

# Mach critico Mcc del velivolo

Il Mach critico del velivolo dipende da:

- Spessore percentuale dell'ala (t/c)
- Angolo di freccia Λ
- Assetto (coeff di portanza CL)



Il diagramma vale per profili peaky

Profili supercritici => aggiungere 0.03 o 0.04

Profili supercritici aggressivi si rende necessario un aumento di 0.06.

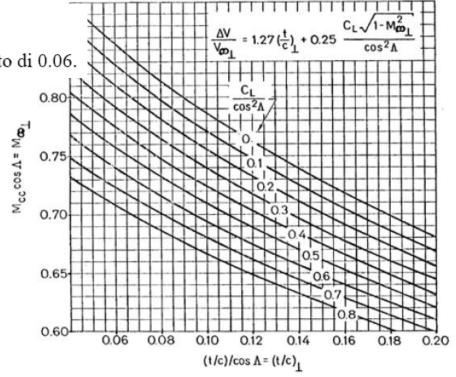
#### VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO

Il diagramma vale per profili peaky
Profili supercritici => aggiungere 0.03 o 0.04

Profili supercritici aggressivi si rende necessario un aumento di 0.06.

Stimato il Mach critico Mcc dal diagramma

⇒Si può stimare il Mach di divergenza MDD



 Si può poi valutare il Mach di divergenza, (per vedere solo se il Mach di volo di crociera previsto è compatibile)

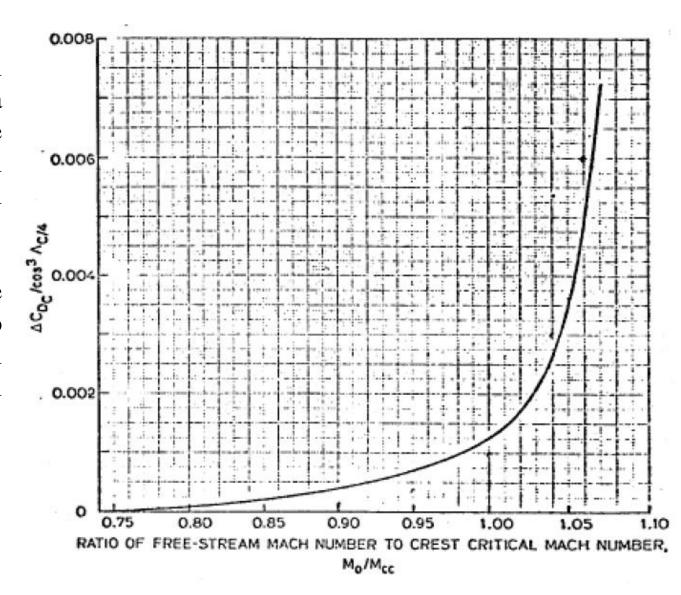
$$M_{DD} = M_{cc} \cdot \left[ 1.02 + 0.08 \cdot \left( 1 - \cos \Lambda_{\frac{c}{4}} \right) \right]$$

In pratica fornisce un  $M_{DD}$  all'incirca pari a  $M_{cc}$  \* 1.03 (cioè del 3% maggiore) per angoli di freccia intorno a 25-30°.

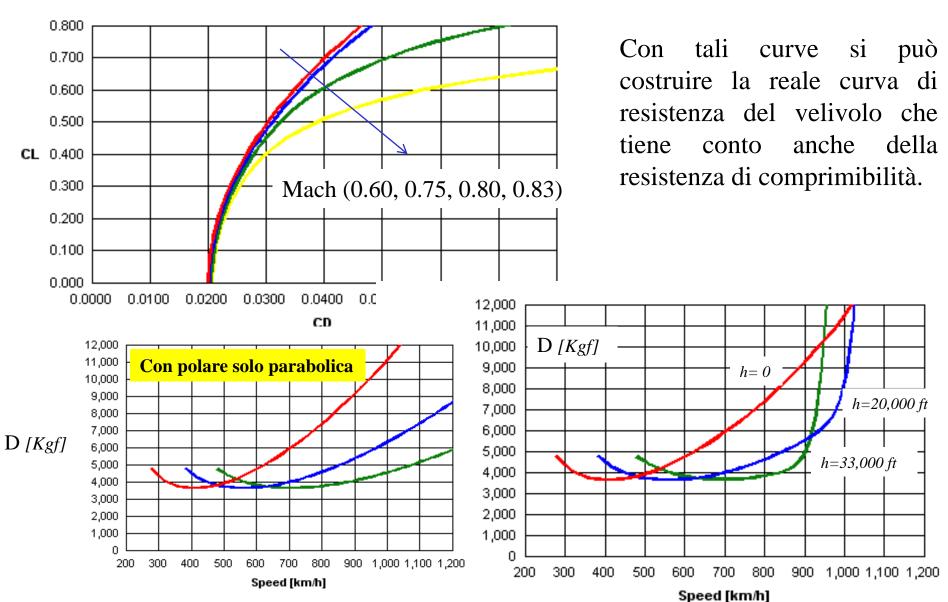
### **INCREMENTO DI RESISTENZA PER Mach elevati** o anche per M>Mcc

L'incremento di resistenza dovuto alla comprimibilità dipende dal Mach di volo e dal Mach critico del velivolo.

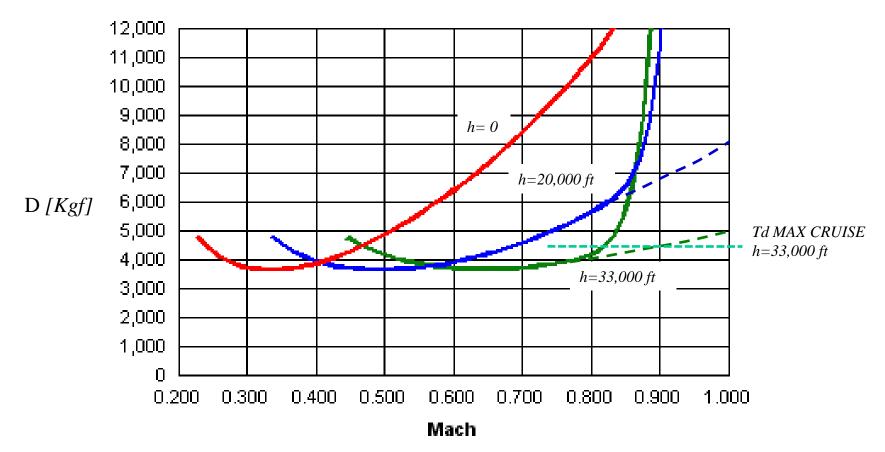
Stimando il dCD da tale diagramma si possono costruire le curve di resistenza (polari) a vari valori del Mach.



#### VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO



Volo livellato VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO

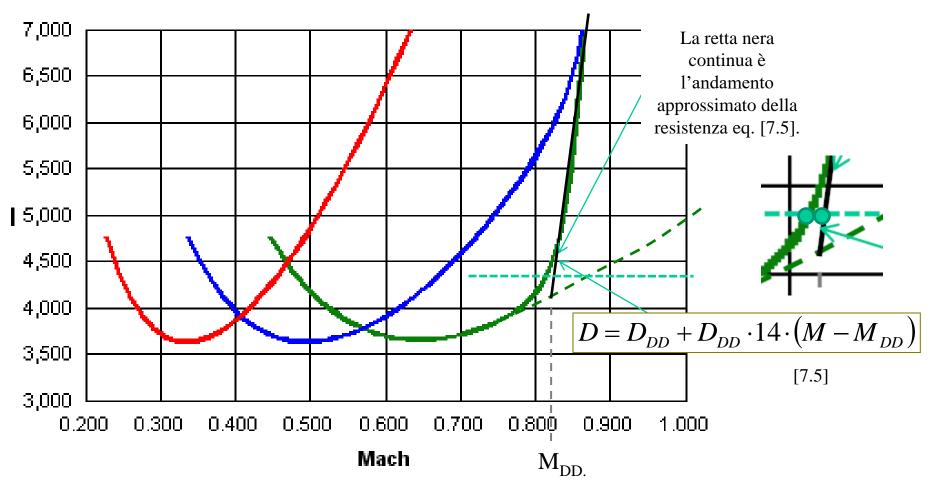


Le curve di resistenza tratteggiate sono quelle senza effetti di comprimibilità. Graficando in funzione del Mach viene evidenziato ancora più chiaramente l'effetto della comprimibilità (resistenza d'onda da aggiungere per Mach elevati). Come si vede, per data spinta disponibile (ad esempio circa 4300 Kgf a 33,000 ft) il Mach raggiunto è di poco superiore a 0.80 e non **M=0.89**.

# VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO APPROCCIO APPROSSIMATO per effetti comprimibilità

I grafici precedenti mostrano come l'effetto di incremento di resistenza è particolarmente sensibile per Mach > Mach di divergenza  $M_{DD}$ .

Si può assumere un andamento approssimato lineare.



# VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO APPROCCIO APPROSSIMATO per effetti comprimibilità

La relazione approssimata consiste nel considerare, per  $M>M_{DD}$ , un incremento della resistenza pari a 1.4 volte la resistenza a  $M_{DD}$ , chiamiamola  $D_{DD}$ , per ogni 0.1 di incremento di Mach da  $M_{DD}$ .

In altri termini si considera un andamento lineare della resistenza con il Mach per  $M>M_{DD}$ . Se indichiamo con  $D_{DD}$  la resistenza (relativa alla polare parabolica) in corrispondenza di  $M_{DD}$ , si può utilizzare la relazione :

$$T_{\text{no}} = D = D_{\text{DD}} + D_{\text{DD}} \cdot 14 \cdot (M - M_{\text{DD}})$$

per M>M<sub>DD</sub>

Come si vede la relazione fornisce un incremento di 1.4 volte di  $D_{DD}$  in corrispondenza di un incremento  $(M-M_{DD})=0.10$ .

Il valore del Mach di divergenza, come detto dipende da spessore(t/c), CL e freccia del'ala, nel nostro caso verrà assegnato come dato di input per evitare di dover fare complesse letture del grafico a pag. 11 (che necessita la conoscenza dei parametri sopra menzionati).

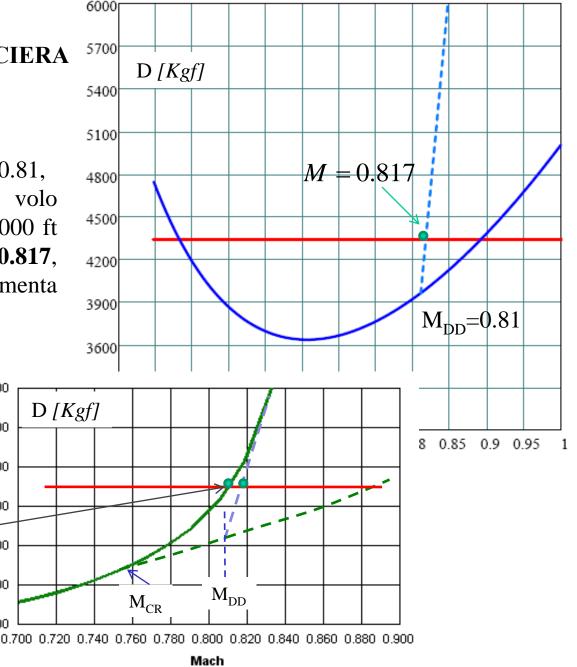
# Volo livellato VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA APPROCCIO GRAFICO <APPROCCIO APPROSSIMATO >

MD-80.

Assunto un Mach di divergenza pari a 0.81, come si può vedere la velocità di volo massima (MAX CRUISE) a quota 33000 ft (10,000 m circa) risulta pari a Mach **0.817**, con la curva di resistenza che aumenta lineare per M>M<sub>DD</sub>

Si vede come tale valore sia plausibile (e vicino a quello che si troverebbe con la curva di resistenza calcolata, pari a circa 0.81).

Valore velocità equilibrio con curva di resistenza reale (circa 0.81)



4,800

4,600

4,400

] 4,200

4,000

3,800

3,600

#### VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO

Ovviamente il vantaggio notevole del considerare l'andamento lineare è quello di trovare la soluzione per via analitica intersecando la retta che parte dal punto a Mach = $M_{DD}$  e la retta orizzontale con spinta pari a quella disponibile.

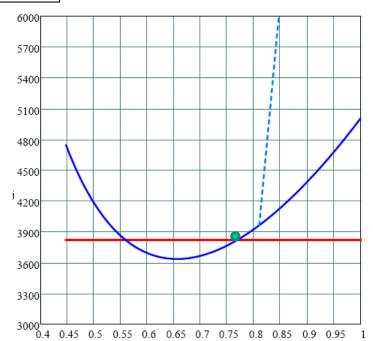
(vedi dopo).

$$T_{no} = D = D_{DD} + D_{DD} \cdot 14 \cdot (M - M_{DD})$$

Data la spinta a data quota:

$$(M - M_{DD}) = \frac{T_d - D_{DD}}{14 \cdot D_{DD}} \longrightarrow M = M_{DD} + \frac{T_d - D_{DD}}{14 \cdot D_{DD}}$$

Così si trova il Mach di equilibrio per data spinta (nel caso di spinta maggiore della resistenza di divergenza a tale quota). Assegnato il Mach di divergenza, bisogna calcolare il CL, il CD e la resistenza  $D_{\rm DD}$ . Ovviamente se la spinta fosse inferiore, vuol dire che sono a sx del Mach di divergenza e posso assumere valida la polare parabolica (vedi figura).



#### VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO

### VELIVOLI AD ELICA

Consideriamo un velivolo bimotore ad elica (da 8-10 posti) (Beechcraft KingAir C90A) caratterizzato dai seguenti dati :

W=4380 Kg peso massimo al decollo

 $S = 27.3 \text{ m}^2$  b=15.3 m AR=8.57

CDo=0.026 e=0.78

$$CL_{MAX}=1.6$$

2 Motori Pratt&Withney PT6A21, ciascuno da 550 hp all'albero, cioè

$$\Pi_{0} = 2.550 = 1100 \text{ hp}$$

I motori sono turboelica.

Rendimento propulsivo delle eliche  $\eta_P$ =0.80

# VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO VELIVOLI AD ELICA

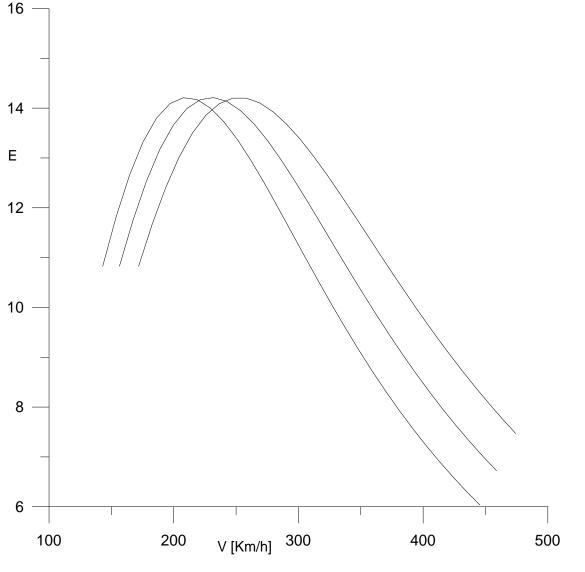
#### Ad ogni quota:

per ogni velocità (a partire dalla velocità minima corrispondente con la velocità di stallo a quella quota, sempre data dalla 7.3) :

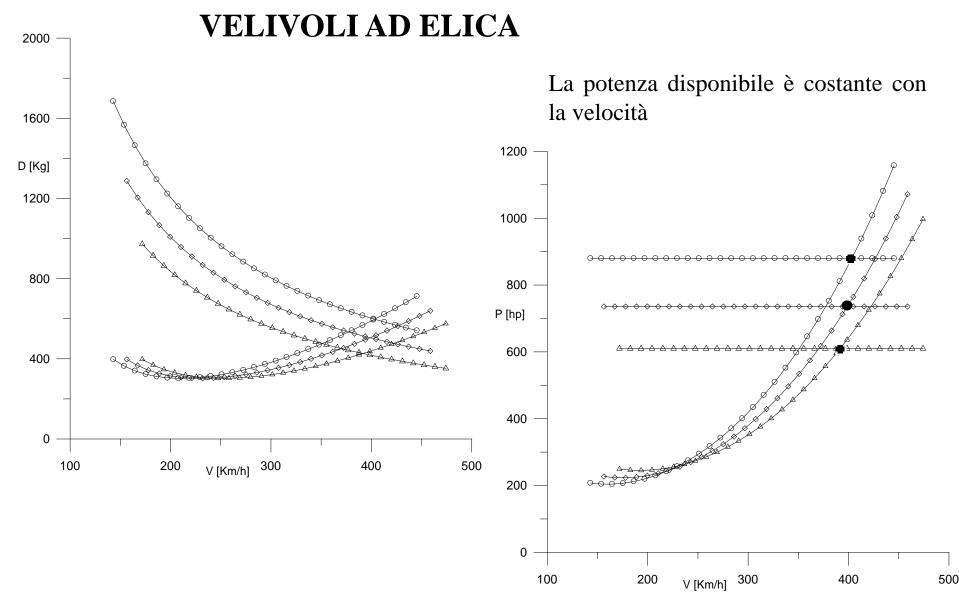
- -calcolo la pressione dinamica q
- -calcolo il CL
- -calcolo il CD
- -calcolo D=q S CL
- -calcolo  $\Pi_{no}$ = D V

$$\Pi_{d} = \Pi_{o} \cdot \varphi \cdot \sigma \cdot \eta_{P}$$

# Volo livellato VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO VELIVOLI AD ELICA



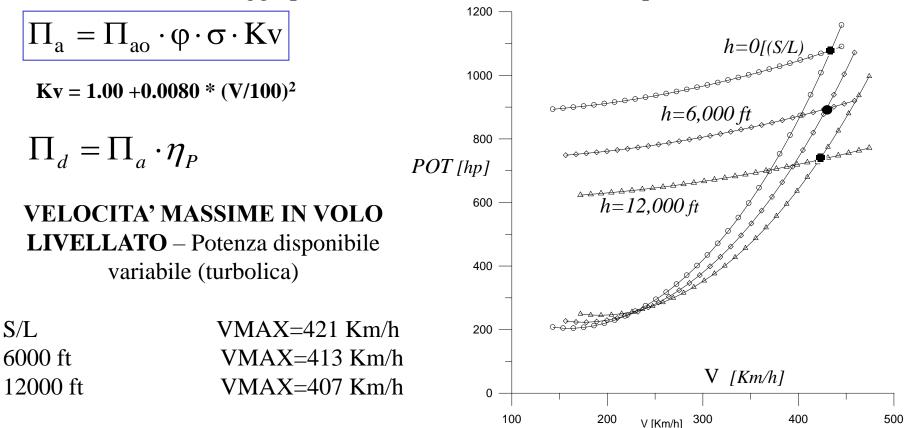
### VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO



# VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO VELIVOLI AD ELICA

I calcoli effettuati risentono della approssimazione di aver considerato la potenza all'albero costante con la velocità.

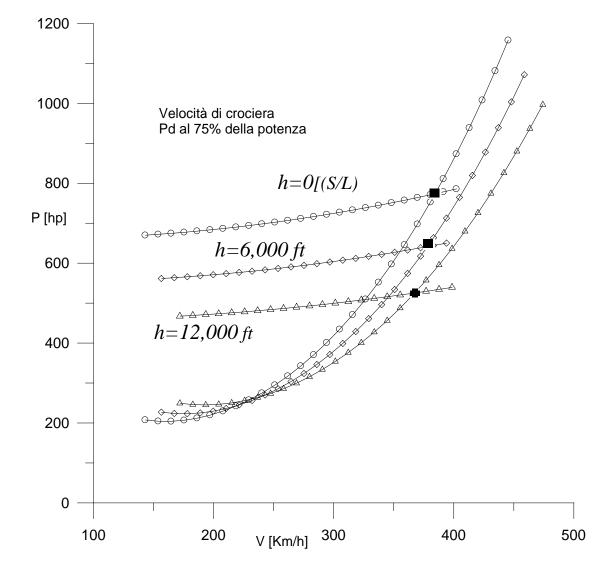
In realtà, come sappiamo il motore turboelica fornisce una potenza variabile con V con legge parabolica, effetto RAM (vedi cap.6).



# Volo livellato VELOCITA' MASSIMA E DI CROCIERA – APPROCCIO GRAFICO VELIVOLI AD ELICA

# VELOCITA' AL 75% DEL GRADO DI AMMISSIONE

S/L VMAX=382 Km/h 6000 ft VMAX=374 Km/h 12000 ft VMAX=365 Km/h



#### APPROCCIO ANALITICO

# Velivoli a GETTO

E'POSSIBILE TROVARE UNA ESPRESSIONE ANALITICA ? MOTIVI :

$$C_D = C_{Do} + K \cdot C_L^2$$

a) Formula che indica l'influenza dei vari parametri del velivolo sulla velocità di equilibrio in volo livellato

b) Formula utilizzabile per effettuare stime

$$T_{d} = D \qquad T_{d} = qS \cdot C_{Do} + \frac{KS}{q} \left(\frac{W}{S}\right)^{2}$$

$$q^{2}S \cdot C_{Do} - qT_{d} + KS \left(\frac{W}{S}\right)^{2} = 0$$

$$q = \frac{T_{d} \pm \sqrt{T_{d}^{2} - 4S \cdot C_{Do} \cdot S(W/S)^{2}}}{2SC_{Do}} = \frac{T_{d}/S \pm \sqrt{(T_{d}/S)^{2} - 4C_{Do} \cdot K(W/S)^{2}}}{2C_{Do}}$$

$$V^{2} = \frac{T_{d}/S \pm \sqrt{(T_{d}/S)^{2} - 4C_{Do}K(W/S)^{2}}}{\rho C_{Do}} \qquad \frac{T_{d}}{S} = \frac{T_{d}}{W} \frac{W}{S}$$

$$V = \left[ \frac{(T_d / W)(W / S) \pm (W / S) \sqrt{(T_d / W)^2 - 4C_{Do}K}}{\rho C_{Do}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

#### APPROCCIO ANALITICO

# Velivoli a GETTO

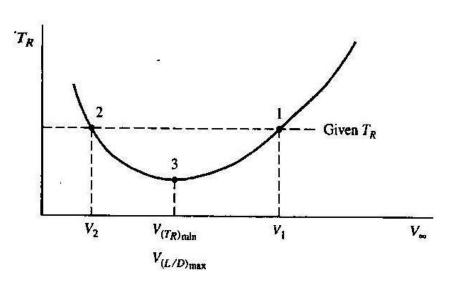
$$V = \left[ \frac{(T_d / W)(W / S) \pm (W / S) \sqrt{(T_d / W)^2 - 4C_{Do}K}}{\rho C_{Do}} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad 4 \cdot K \cdot C_{Do} = \frac{4}{\pi} \frac{C_{Do}}{AR \cdot e} = \frac{1}{E_{MAX}^2}$$

$$4 \cdot K \cdot C_{Do} = \frac{4}{\pi} \frac{C_{Do}}{AR \cdot e} = \frac{1}{E_{MAX}^2}$$

$$V = \left[ \frac{(T_d / W)(W / S) \pm (W / S) \sqrt{(T_d / W)^2 - 1/E_{MAX}^2}}{\rho C_{Do}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

La velocità V dipende da:

- il rapporto spinta-peso Td/W
- il carico alare W/S
- La polare (CDo,K), cioè il Cdo ed "e", oltre ad AR
- La quota (compare a denominatore, ma anche in modo indiretto in Td)



#### APPROCCIO ANALITICO

# Velivoli a GETTO

$$V = \left[ \frac{(T_d / W)(W / S) \pm (W / S) \sqrt{(T_d / W)^2 - 4C_{Do}K}}{\rho C_{Do}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Discriminante nullo se :

$$\left(\frac{T_d}{W}\right)^2 - 4C_{Do}K = 0$$

$$\left(\frac{T_d}{W}\right)^2 = \frac{1}{E_{MAX}^2} \qquad T_d = \frac{W}{E_{MAX}} \qquad T_d = D_{MIN}$$

Ci saranno 2 soluzioni reali se:

$$\boxed{\frac{T_{d}}{W} \geq \frac{1}{E_{MAX}}}$$

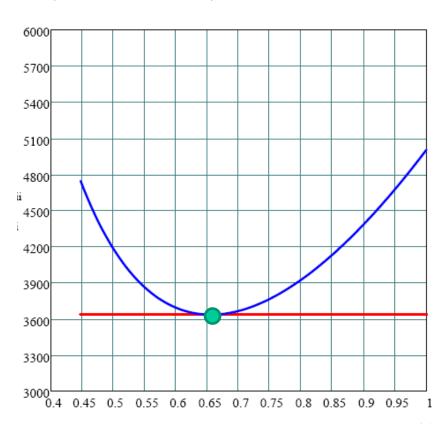
#### APPROCCIO ANALITICO

# Velivoli a GETTO

se 
$$\frac{T_d}{W} = \frac{1}{E_{MAX}}$$
  $T_d = \frac{W}{E_{MAX}} = W \cdot \sqrt{\frac{4}{\pi}} \sqrt{\frac{C_{Do}}{AR \cdot e}}$ 

$$V = \sqrt{\frac{1}{\rho}} \sqrt{\frac{1}{C_{Do}}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{\pi}} \sqrt{\frac{C_{Do}}{AR \cdot e}}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot C_{Do}}}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{CL_E}}$$

E ritroviamo (come logico) che se la spinta è uguale alla minima resistenza, ho 2 soluzioni reali e coincidenti e chiaramente la velocità coincide con quella del punto  ${\bf E}$ 



#### APPROCCIO ANALITICO

Velivoli a GETTO

Altra espressione della formula che fornisce la soluzione di velocità di equilibrio per data spinta a data quota

L'equazione 
$$V = \left[ \frac{(T_d/W)(W/S) \pm (W/S) \sqrt{(T_d/W)^2 - 1/E_{MAX}^2}}{\rho \cdot C_{Do}} \right]^{\frac{1}{2}}$$
Puo' => 
$$V = \left[ \frac{(T_d/W) \cdot (W/S)}{\rho \cdot C_{Do}} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{T_d}{W}\right)^2 \cdot E_{MAX}^2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Si può evincere che la velocità massima (o di crociera) di un velivolo dipende da:

- Rapporto spinta disponibile/peso Td/W
- Carico alare W/S (se il carico alare cresce, cioè S piccola, la V aumenta!)
- Quota (tramite  $\rho$ ), ma anche tramite T<sub>d</sub>
- C<sub>Do</sub> del velivolo (Influenza forte, compare direttamente)
- Efficienza massima, o in particolare CDo, AR ed e

#### APPROCCIO ANALITICO - JET

# Altro modo analitico rapido di trovare la velocità massima se è nota la spinta.

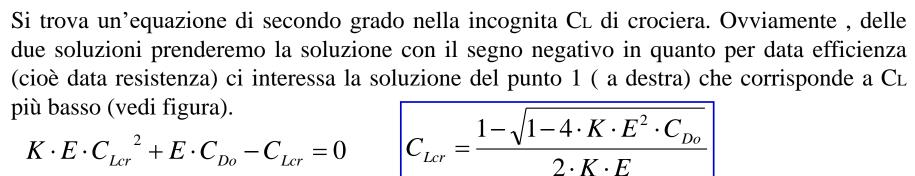
Se è nota la spinta in crociera massima (φ=1) dei motori alla quota scelta:  $T_d = T_o \cdot \sigma \cdot 0.71 \cdot \varphi$ 

Si può poi ricavare l'efficienza aerodinamica se è noto il peso perché la spinta deve eguagliare la resistenza aerodinamica in volo livellato nella condizione di crociera:

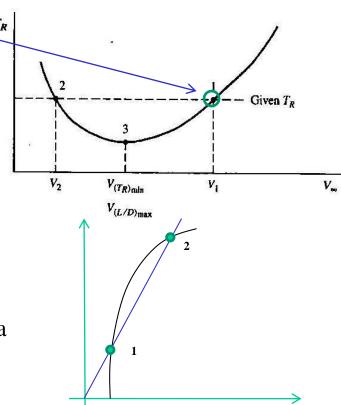
 $E = \frac{C_{Lcr}}{C_{Doc}} = \frac{L}{D} = \frac{W}{T_d}$ 

Ma l'efficienza è anche il rapporto di CL/CD e, senza fenomeni di comprimibilità, vale la polare parabolica :

$$E = \frac{C_{Lcr}}{C_{Dcr}} = \frac{C_{Lcr}}{C_{Do} + K \cdot C_{Lcr}^{2}}$$



$$K \cdot E \cdot C_{Lcr}^{2} + E \cdot C_{Do} - C_{Lcr} = 0$$

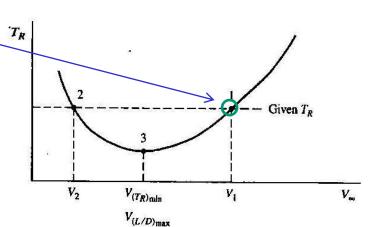


#### APPROCCIO ANALITICO - JET

Altro modo rapido di trovare la velocità massima Se è nota la spinta.

Trovato il CL di crociera di ricava la velocità:

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \cdot \sigma} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{Lcr}}}$$



Esempio, Velivolo a getto tipo MD-80:

W=63500 Kg S=112 mq AR=9.72 CDo=0.020 e=0.80

Spinta: 2 motori da 9072 Kgf => To tot= 18 144 Kgf.

Velocità massima a quota 33 000 ft (sigma=0.337)

$$T_d = T_o \cdot \sigma \cdot 0.71 \cdot \varphi$$
  $T_d = 4341 \text{ Kgf}$   $\frac{T_d}{W} = 0.068$ 

$$T_d = 4341 \ Kgf$$

$$\frac{T_d}{W} = 0.068$$

$$E = \frac{L}{D} = \frac{W}{T_d} = 14.63$$

Dai dati si calcola l'efficienza massima per vedere se ho soluzione, cioè se tale efficienza aerodinamica sia effettivamente ottenibile

$$E_{\text{max}} = \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{AR \cdot e}{CD_0}} = \frac{W}{T_d} = 17.5$$

#### **APPROCCIO ANALITICO - JET**

Altro modo rapido di trovare la velocità massima Se è nota la spinta.

Si ricava il k della polare parabolica :  $K = \frac{1}{\pi \cdot AR \cdot e}$  K = 0.0409 E si ricava il CL di crociera :

$$K = \frac{1}{\pi \cdot AR \cdot e} \qquad K = 0.0409$$



$$C_{Lcr} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot K \cdot E^2 \cdot C_{Do}}}{2 \cdot K \cdot E}$$

$$C_{Lcr} = 0.378$$

$$C_{Lcr} = 0.378$$

$$\sigma = 0.337$$

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \cdot \sigma} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{Lcr}}} = 266.9 \ m/s = 961 \ km/hr$$

Che corrisponde alla quota considerata ad un Mach=0.89

Ovviamente, l'applicazione della equazione soluzione analitica trovata alle pagine precedenti fornisce lo stesso esatto risultato:

$$\frac{W}{S} = 5560 \frac{N}{m^2}$$

$$\frac{T_d}{W} = 0.068$$

$$E_{\text{max}} = 17.5$$

$$\frac{\frac{W}{S} = 5560 \frac{N}{m^{2}}}{\frac{T_{d}}{W} = 0.068} \longrightarrow V = \left[\frac{\left(T_{d}/W\right) \cdot \left(W/S\right)}{\rho_{0} \cdot \sigma \cdot C_{Do}} \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{T_{d}}{W}\right)^{2} \cdot E_{MAX}^{2}}}\right)\right]^{1/2} = 266.9 \text{ m/s}$$

$$E_{\text{max}} = 17.5$$

$$C_{Do} = 0.020$$

Che corrisponde alla quota considerata sempre a Mach=0.89

### Ovviamente , tenendo conto della comprimibilità il Mach di volo non potrà 5400 essere così elevato.

Applicando infatti l'equazione vista in precedenza, Per Mach > Mach di divergenza (assunto in tal caso ad esempio pari a 0.81):

$$M_{DD} = 0.81$$
  $a = 299.335 \frac{m}{s}$   $h=33,000 \text{ ft}$   $V_{DD} := M_{DD} \cdot a$   $V_{DD} = 242.461 \frac{m}{s}$ 

$$CL_{DD} := \frac{2}{\rho_0 \cdot \sigma} \cdot \frac{W}{S} \cdot \frac{1}{V_{DD}^2} \qquad CL_{DD} = 0.458$$

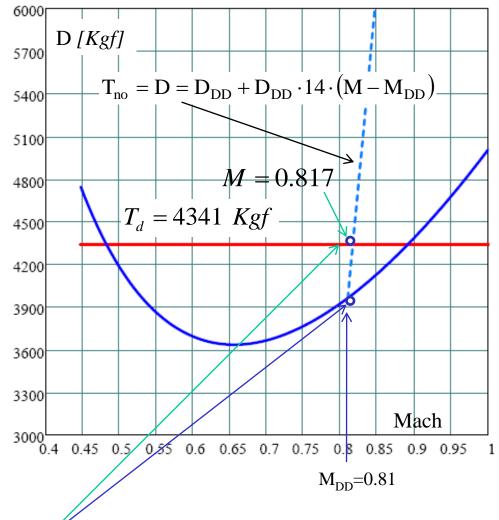
$$CD_{DD} := CD_0 + \frac{CL_{DD}^2}{\pi \cdot AR \cdot e} \qquad CD_{DD} = 2.86 \times 10^{-2}$$

$$D_{DD} := \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot \sigma \cdot S \cdot V_{DD}^2 \cdot CD_{DD} \qquad D_{DD} = 3.885 \times 10^4 \,\mathrm{N}$$

$$M = M_{DD} + \frac{T_d - D_{DD}}{14 \cdot D_{DD}}$$

$$M = 0.817$$
 VmarDD := M a

 $D_{DD} = 3.962 \times 10^{3} \cdot \text{kgf}$   $a = 299.335 \frac{\text{m}}{\text{m}}$  Alla quota h=33,000 ft  $M = M_{DD} + \frac{T_d - D_{DD}}{14 \cdot D_{DD}}$   $M = 0.817 \quad \text{VmaxDD} := \text{M} \cdot \text{a} \quad \text{VmaxDD} = 244.509 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{VmaxDD} = 880.231 \cdot \frac{\text{km}}{\text{m}}$ 



### APPROCCIO ANALITICO – VEL IVOLO JET

Velivolo quadrimotore B747-400 :

$$W = 360,000 \, kgf$$

$$S = 540 \, m^2$$

$$b = 64 \, m \qquad AR = 7.7$$

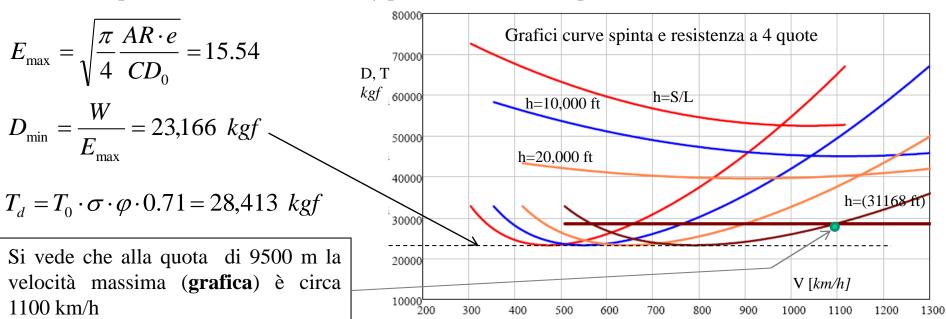
$$C_{Do} = 0.020 \quad e = 0.80$$

$$T_0 = 4 \cdot 27,930 \quad kgf = 111,720 \quad kgf$$



## CALC. LA VEL MAX ( $\phi$ =1) DI CROCIERA alla quota h=9500 m(31168 ft),( $\sigma$ =0.358)

Dai dati del velivolo ricavo l'efficienza massima la minima resistenza, nonché valuto la spinta massima disponibile (max cruise,  $\phi$ =1) per la crociera alla quota considerata:



### APPROCCIO ANALITICO – VEL IVOLO JET

Velivolo quadrimotore B747-400 :

### CALC. LA VEL MAX ( $\phi$ =1) DI CROCIERA alla quota h=9500 m(31168 ft),( $\sigma$ =0.358)

Approccio analitico (senza effetti comprimibilità).

Calcoliamo il rapporto spinta/peso e la velocità massima con la formula:

$$\frac{W}{S} = 6525.7 \frac{N}{m^2} \qquad \sigma = 0.358$$

$$\frac{T_d}{W} = \frac{28,413}{360,000} = 0.079 \qquad \longrightarrow \qquad V = \begin{bmatrix} \frac{T_d}{W} \cdot W \cdot W \cdot S \\ \frac{T_d}{W} \cdot \sigma \cdot C_{Do} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{W}} \\ \frac{T_d}{W} \cdot E_{MAX} \end{bmatrix} = 304.4 \, \text{m/s}$$

$$C_{Do} = 0.020$$

$$V_{\text{max}} = 1096 \, \text{km/h}$$

Essendo la velocità del suono a quota 9500 m pari a a=301.5 m/s , si ricava :  $M_{\rm max}=1.01$  Ovviamente il risultato è falsato dal fatto che non abbiamo tenuto in conto degli effetti della comprimibilità.

La velocità massima ottenuta con la formula sopra, come già specificato prima, può essere ricavata anche con il metodo esposto precedentemente, cioè rifacendosi al calcolo del CL corrispondente per data efficienza aerodinamica, che si ottiene dal rapporto tra il peso e la spinta disponibile:

#### APPROCCIO ANALITICO – VEL IVOLO JET

Velivolo quadrimotore B747-400 :

CALC. LA VEL MAX ( $\phi$ =1) DI CROCIERA alla quota h=9500 m(31168 ft),( $\sigma$ =0.358)

Approccio analitico (senza effetti comprimibilità).

$$\frac{T_d}{W} = \frac{28,413}{360,000} = 0.079 E = \frac{L}{D} = \frac{W}{T_d} = 14.63 K = \frac{1}{\pi \cdot AR \cdot e} K = 0.0517$$

$$E = \frac{C_{Lcr}}{C_{Dcr}} = \frac{C_{Lcr}}{C_{Do} + K \cdot C_{Lcr}^{2}} \qquad K \cdot E \cdot C_{Lcr}^{2} + E \cdot C_{Do} - C_{Lcr} = 0$$

$$K \cdot E \cdot C_{Lcr}^{2} + E \cdot C_{Do} - C_{Lcr} = 0$$

$$C_{Lcr} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot K \cdot E^2 \cdot C_{Do}}}{2 \cdot K \cdot E}$$

$$C_{Lcr} = 0.321$$

$$C_{Lcr} = 0.321$$

$$\sigma = 0.358$$

$$\sigma = 0.358$$
  $V_{\text{max}} = V_{cr} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \cdot \sigma} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{Lcr}}} = 304.4 \text{ m/s} = 1096 \text{ km/h}$ 

Stesso risultato ottenuto con la formula soluzione equazione di secondo grado (pagina precedente).

Ovviamente bisogna procedere invece con il calcolo che tenga conto degli effetti della comprimibilità.

### APPROCCIO ANALITICO – VEL IVOLO JET

Velivolo quadrimotore B747-400 :

### CALC. LA VEL MAX ( $\varphi$ =1) DI CROCIERA alla quota h=9500 m(31168 ft),( $\sigma$ =0.358)

Approccio analitico (con effetti comprimibilità). Si assume come dato di INPUT il Mach di divergenza  $T_{no} = D = D_{DD} + D_{DD} \cdot 14 \cdot (M - M_{DD})_{-1}$ del velivolo:

$$V_{DD} = M_{DD} \cdot a \qquad V_{DD} = 250.2 \, \text{m/s}$$

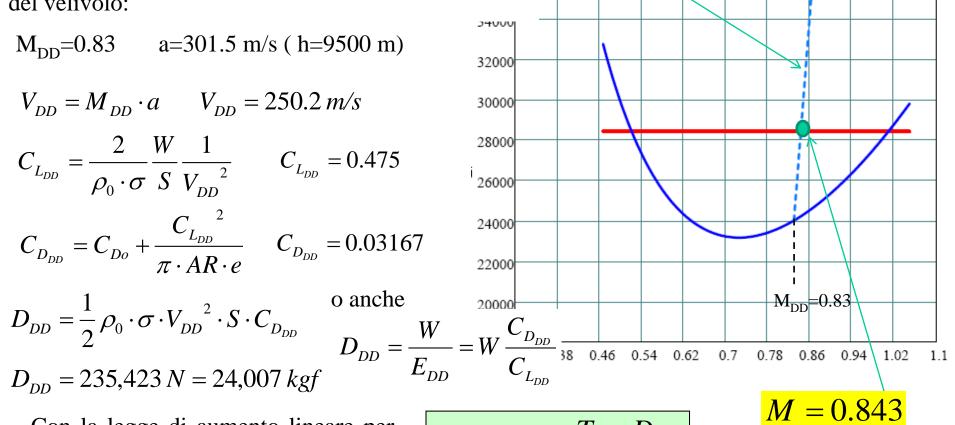
$$C_{L_{DD}} = \frac{2}{\rho_0 \cdot \sigma} \frac{W}{S} \frac{1}{V_{DD}^2}$$
  $C_{L_{DD}} = 0.475$ 

$$C_{D_{DD}} = C_{Do} + \frac{C_{L_{DD}}^{2}}{\pi \cdot AR \cdot e}$$
  $C_{D_{DD}} = 0.03167$ 

$$D_{DD} = \frac{1}{2} \rho_0 \cdot \sigma \cdot V_{DD}^2 \cdot S \cdot C_{DD}$$
 o an

$$D_{DD} = 235,423 N = 24,007 kg$$

Con la legge di aumento lineare per M> MDD, il Mach corrispondente alla massima velocità sarà:



$$M = M_{DD} + \frac{T_d - D_{DD}}{14 \cdot D_{DD}}$$

$$V_{\text{max}} = 915 \text{ km/h}$$

# Velivoli ad ELICA

$$\Pi_{d} = \Pi_{no} = a \cdot V^{3} + \frac{b}{V}$$

$$a \cdot V^4 - \Pi_d \cdot V + b = 0$$

Difficile risoluzione analitica

### **APPROCCIO ANALITICO**

# Velivoli ad ELICA

$$\Pi_{d} = \Pi_{no} = \frac{1}{2} \rho \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{CD} \cdot \mathbf{V}^{3}$$

$$\Pi_d = \Pi_a \cdot \eta_p = \Pi_O \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_p$$

nel caso di motore a pistoni e

$$\Pi_{d} = \Pi_{a} \cdot \eta_{p} = \Pi_{o} \cdot Kv \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_{p}$$

nel caso di motore turboelica

$$V = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \Pi_d}{\rho \cdot S \cdot CD}}$$

Il CD non è noto ... approccio iterativo

#### APPROCCIO ANALITICO

# Velivoli ad ELICA

#### PROCEDURA PER VELIVOLI CON MOTORI A PISTONI

Per il calcolo della velocità massima ( $\phi$ =1) o di crociera ( $\phi$ =0.75, ad esempio) ad una certa quota (fissata densità  $\rho$ ):

Si valuta la potenza massima disponibile alla quota considerata tramite la

$$\Pi_{d} = \Pi_{a} \cdot \eta_{p} = \Pi_{O} \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_{p}$$

Si assume inizialmente CD=1.1 CDo

1) Si calcola con tale valore di CD il valore di V dalla 7.19 alla quota in esame ed in corrispondenza della potenza disponibile

$$V = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \Pi_d}{\rho \cdot S \cdot CD}}$$
(7.20)

2) Dalla V ricavata si può ricavare il CL :

$$CL = \frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{V^2}$$

3) Dal CL si ricava il CD:

$$CD = CDo + K \cdot CL^2$$

Con il valore di CD trovato si ritorna al punto 1 e si ricalcala un nuovo valore della velocità. Si procede fino a che la velocità ricavata al ciclo corrente differisce di poco (ad esempio 1 Km/h) da quella relativa all'iterazione precedente.

#### APPROCCIO ANALITICO

# Velivoli ad ELICA

### Esempio

Rifacciamo il caso del velivolo Beechcraft King Air trattato per via grafica a pag. 12-13-14. Riportiamo ancora i dati del velivolo :

W=4380 Kg peso massimo al decollo

 $S = 27.3 \text{ m}^2$  b=15.3 m AR=8.57

CDo=0.026 e=0.78  $CL_{MAX}$ =1.6

2 Motori Pratt&Withney PT6A21 , ciascuno da 550 hp all'albero , cioè

 $\Pi_{\rm o} = 2 \cdot 550 = 1100 \, \rm hp$ 

I motori sono turboelica.

Rendimento propulsivo delle eliche η<sub>P</sub>=0.80

Inizialmente assumiamo di non considerare l'effetto ram della turboelica.

#### APPROCCIO ANALITICO

# Velivoli ad ELICA

La potenza disponibile al livello del mare è :

$$\Pi_d = \Pi_o \cdot \eta_P = 1100 \cdot 0.80 = 880 \text{ hp} = 656480 \text{ W}$$

Nella relazione 7.19 dobbiamo ovviamente utilizzare la potenza in W e ρ ed S in unità standard.

Riportiamo i calcoli effettuati in tabella ai vari cicli di iterazione :

Iteraz.	CD	V (calcolata dalla 7.19)	CL	CD
1	1.1*CDo=0.0286	111.11  m/s = 400  Km/h	0.208	0.0281
2	0.0281	111.85 m/s = 402.6 Km/h	0.205	0.0280
3	0.0280	111.91 m/s = 402.9 Km/h	0.205	0.0280

Si vede come già alla seconda iterazione la velocità è praticamente pari a quella finale.

Dai calcoli effettuati risulta che la velocità massima al livello del mare risulta pari a 403 Km/h.

Si può vedere come si è ottenuto per via analitica il risultato ottenuto per via grafica a pag. 13 (si era ottenuto come velocità massima in volo livellato il valore di 402 Km/h.

#### APPROCCIO ANALITICO

# Velivoli ad ELICA

12000 ft

La densità a 12000 ft è  $0.85 \text{ Kg/m}^3 \ (\sigma=0.69)$ 

La potenza disponibile in condizioni di crociera al 75% (quindi φ=0.75) a questa quota è :

$$\Pi_d = \Pi_o \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_P = 1100 \cdot 0.69 \cdot 0.75 \cdot 0.80 = 457 \text{ hp} = 340922 \text{ W}$$

Iteraz.	CD	V (calcolata dalla 7.19)	CL	CD
1	1.1*CDo=0.0286	100.97  m/s = 363.5  Km/h	0.364	0.0323
2	0.0323	96.96  m/s = 349.07  Km/h	0.394	0.0334
3	0.0334	95.88  m/s = 345.17  Km/h	0.403	0.0337
4	0.0337	95.55  m/s = 344  Km/h	0.406	0.0337

Quindi la velocità di crociera (75% del grado di ammissione) alla quota di 12000 ft risulta pari a 344 Km/h.

Si vede come è stato necessario effettuare una iterazione in più.

Il motivo è che, quando si considerano condizioni di crociera (essendo le velocità meno elevate ed anche i CL un po' più elevati) sarebbe più opportuno partire da valori pari a 1.2 CDo.

In effetti ciò non influisce minimamente sul risultato finale.

#### APPROCCIO ANALITICO

# Velivoli TURBOELICA

#### PROCEDURA PER VELIVOLI CON MOTORI TURBOELICA

Per il calcolo della velocità massima ( $\varphi=1$ ) o di crociera ( $\varphi=0.75$ , ad esempio) ad una certa quota (fissata densità p):

Si valuta la potenza massima disponibile alla quota considerata tramite la

$$\Pi_{d} = \Pi_{a} \cdot \eta_{P} = \Pi_{O} \cdot Kv \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_{P}$$

assumendo inizialmente un valore di Kv=1.0 (infatti, poiché non conosco la velocità di volo (che è proprio la mia incognita) non conosco Kv.

Indichiamo con  $\Pi_{d-1}$  la potenza disponibile con Kv=1  $\Pi_{d-1} = \Pi_a \cdot \eta_P = \Pi_O \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_P$ 

$$\Pi_{d-1} = \Pi_a \cdot \eta_P = \Pi_O \cdot \sigma \cdot \phi \cdot \eta_P$$

Si assume inizialmente CD=1.1 CDo

1) Si calcola con tale valore di CD il valore di V dalla 7.19 alla quota in esame ed in corrispondenza della potenza disponibile

$$V = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \Pi_{d-1}}{\rho \cdot S \cdot CD}}$$
 (7.21)

2) Dal valore di V ricavato si ricava il Kv (questa volta >1)

#### APPROCCIO ANALITICO

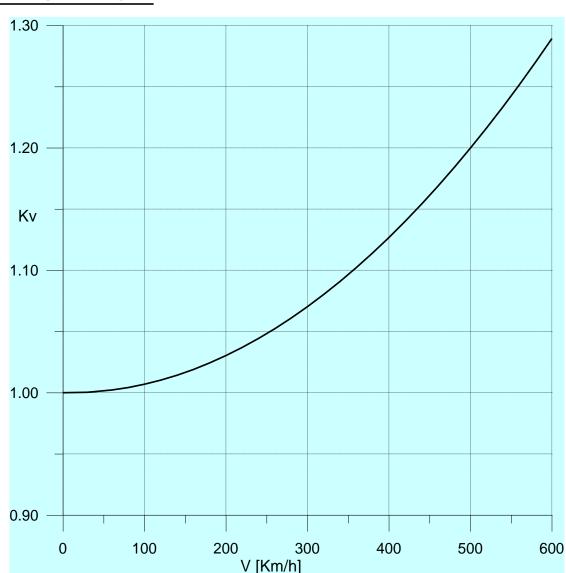
# Velivoli TURBOELICA

## **EFFETTO RAM**

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = 1.00 + 0.0080 * (V/100)^2$$

con V espressa in Km/h

Da notare che il fattore Kv non supera mai 1.20-1.24 in quanto le velocità di velivoli che montano motori turboprop non superano velocità dell'ordine dei 500-550 km/h.



#### APPROCCIO ANALITICO

# Velivoli TURBOELICA

3) Si ricava nuovamente la velocità dalla relazione sopra, questa volta considerando la potenza disponibile che è stata moltiplicata per il Kv (in genere significa potenza disponibile incrementata del 10-20%), cioè:

$$V = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \Pi_{d-1} \cdot Kv}{\rho \cdot S \cdot CD}}$$
 (7.22)

4) Dalla V ricavata si può ricavare il CL:

$$CL = \frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{V^2}$$

5) Dal CL si ricava il CD:

$$CD = CDo + K \cdot CL^2$$

Con il valore di CD trovato si ritorna al punto 3 e si ricalcala un nuovo valore della velocità. Si procede fino a che la velocità ricavata al ciclo corrente differisce di poco (ad esempio 1 Km/h) da quella relativa all'iterazione precedente.

Si noti come non è necessario andare a modificare il Kv (viene calcolato solo all'inizio, cioè al primo ciclo) se il valore della velocità varia tra un ciclo e l'altro meno di 5 Km/h. Infatti la figura 6.24 del cap. 6 mostra chiaramente comne variazioni di velocità di volo così ridotte non comportano variazioni significative del Kv.

#### APPROCCIO ANALITICO

# Velivoli TURBOELICA

### Esempio

Sempre per il velivolo Beechcraft, calcoliamo la velocità massima in volo livellato al livello del mare, considerando questa volta la procedura per motore turboelica.

Assumendo inizialmente Kv=1 la potenza disponibile risulta pari a  $\Pi_{d-1}$  = 880 hp

Iteraz.	CD	V (calcolata dalla 7.21 o 7.22)	Kv	CL	CD
pre	1.1*CDo=0.0286	111.14  m/s = 400.09  Km/h (7.21)	1.127		
1	1.1*CDo=0.0286	115.60  m/s = 416.33  Km/h (7.22)	cc	0.192	0.02771
2	0.0277	116.90  m/s = 420.70  Km/h (7.22)	cc	0.188	0.02764
3	0.0334	116.97  m/s = 421.10  Km/h (7.22)	cc	0.1878	0.02764

La velocità massima quindi risulta 420 Km/h (prima, considerando un equivalente motore a pistoni era stata calcolata di 403 Km/h.

Vediamo anche come il risultato (421 Km/h) è in pieno accordo con il risultato ottenuto per via grafica a pag. 15 (analisi fig. pag. 16).

#### APPROCCIO ANALITICO

# Velivoli TURBOELICA

Sempre assumendo motore turboelica (procedura pagina precedente), possiamo calcolare la velocità massima alla quota di 12000 ft.

La potenza disponibile da considerare (per l'effetto del  $\sigma$ ) è : sempre assumendo inizialmente Kv=1 la potenza disponibile risulta pari a  $\Pi_{d-1} = 880 \cdot \sigma = 610 \, \text{hp}$  (il rapporto delle densità a 12000 ft è 0.69).

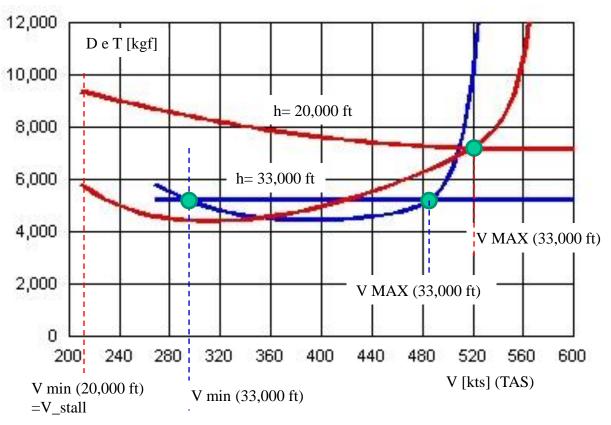
Iteraz.	CD	V (calcolata dalla 7.21 o 7.22)	Kv	CL	CD
		ma con $\rho = \rho(12000 \text{ ft}) = 0.85 \text{ Kg/m}^3$			
pre	1.1*CDo=0.0286	111.14  m/s = 400.09  Km/h (7.21)	1.127		
1	1.1*CDo=0.0286	115.65  m/s = 416.33  Km/h (7.22)	66	0.2773	0.02957
2	0.02957	114.37  m/s = 411.74  Km/h  (7.22)	66	0.2835	0.02973
3	0.02973	114.16  m/s = 411.00  Km/h  (7.22)	cc	0.2846	0.02976

Quindi la velocità massima alla quota di 12000 ft risulta pari a 411 Km/h.

## INVILUPPO DI VOLO

Se calcolo ad ogni quota la velocità minima (quella di stallo oppure quella della intersezione di sx, cioè limitata dalla spinta disponibile a quote elevate) e la velocità massima posso ottenere quello che si chiama inviluppo di volo in volo livellato (**level flight envelope**).

Si vede chiaramente dai diagrammi che la minima velocità è infatti dipendente a quote medio basse dallo stallo aerodinamico (cioè la V minima è quella di stallo) mentre a quote elevate è definita dalla spinta disponibile, cioè non si può andare più piano perché il motore non lo permette.

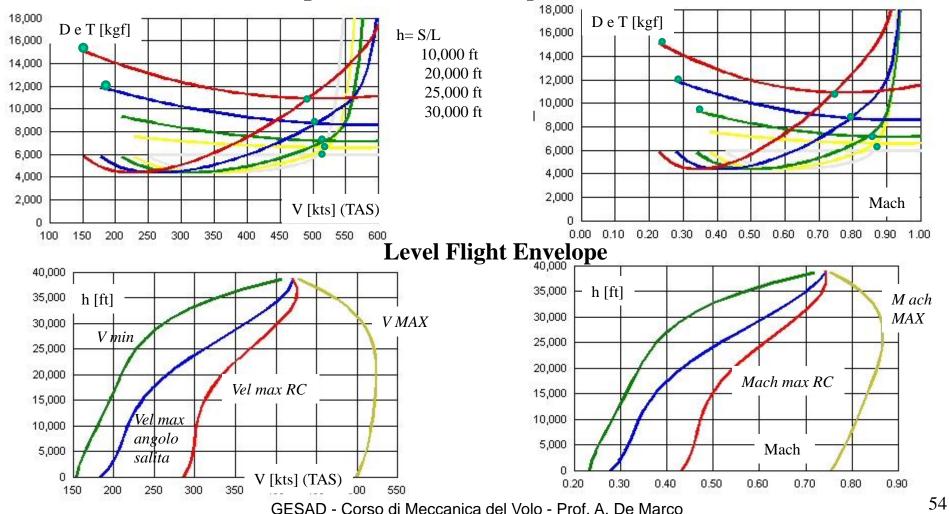


## INVILUPPO DI VOLO

L'esempio seguente riporta il calcolo effettuato per il velivolo Airbus A320.

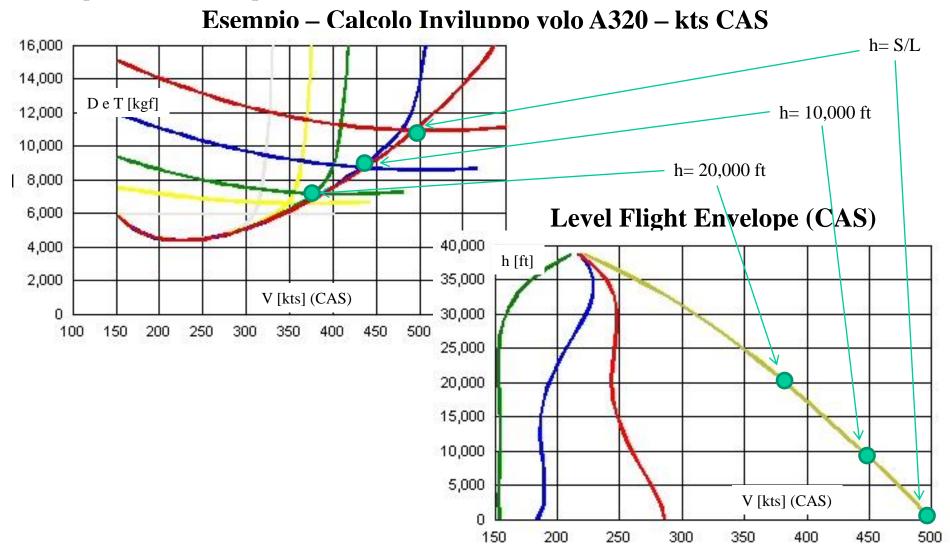
E' evidente che si può ragionare come velocità TAS (qui espressa in nodi [kts]) o esprimendo la velocità in Mach. L'inviluppo di volo si ottiene riportando per ogni quota (messa sull'asse Y) la velocità minima e quella massima in volo livellato in crociera. Possono essere anche riportate la velocità di migliore rateo di salita e di migliore angolo di salita (cap. 8). Si evidenzia chiaramente la mssima quota raggiungibile.

Esempio – Calcolo Inviluppo volo A320



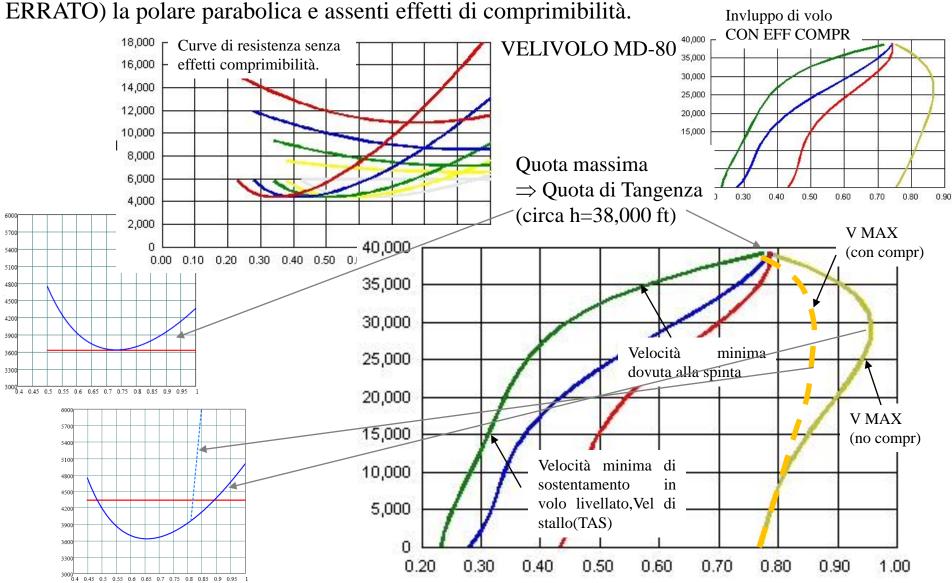
### INVILUPPO DI VOLO

L'inviluppo di volo potrebbe anche essere riportato in velicità equivalente (o calibrata CAS) che è quella che vede il pilota sull'anemometro.



### INVILUPPO DI VOLO

E' evidente che l'inviluppo ricavato nel caso precedente teneva conto della resistenza di comprimibilità. Qui si evidenzia come cambia l'inviluppo se consideriamo (in modo ERRATO) la polare parabolica e assenti effetti di comprimibilità



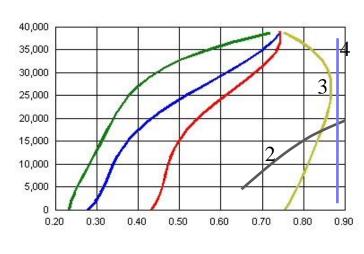
### INVILUPPO DI VOLO

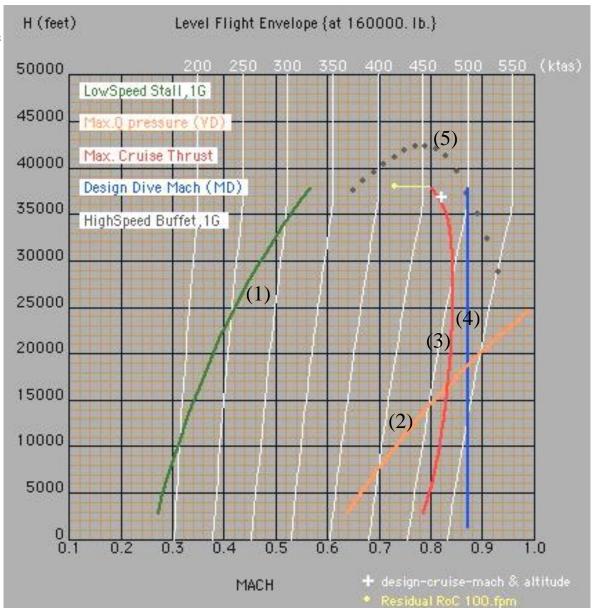
Qui si riporta un realistico inviluppo di volo in volo livellato per il velivolo Airbus A320.

Come si vede sono riportate tutte le limitazioni alla velocità che sono :

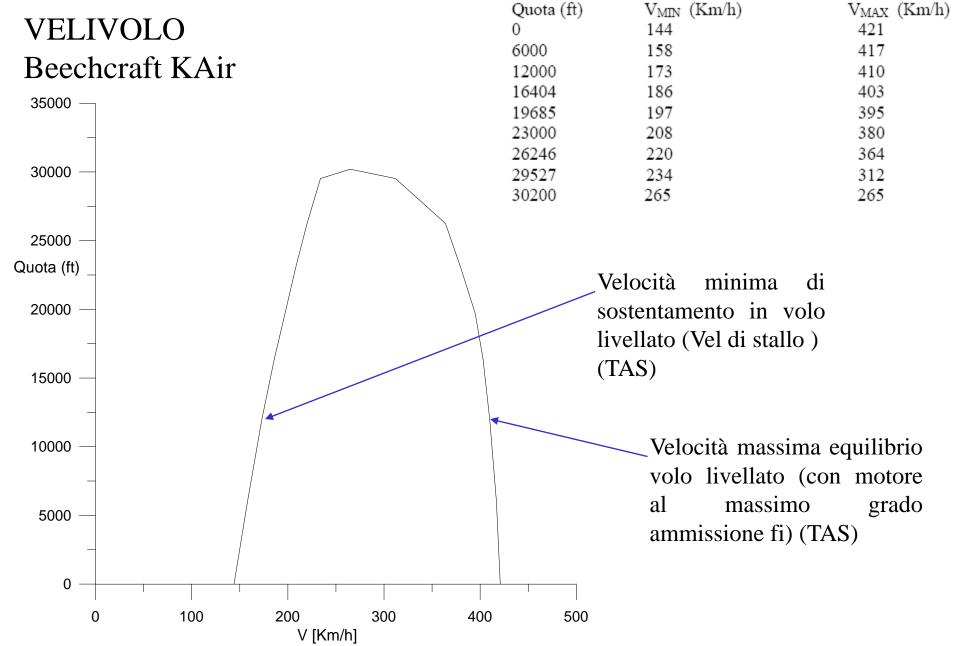
- (1) Vel. Minima (Stallo)
- (2) Vel. Max press dinamica
- (3) Vel. Max (limite spinta)
- (4) Massimo Mach Affondata (Dive)
- (5) Limite di Buffet (cioè onde d'urto)

La limitazione dovuta alla pressione dinamica (2) nasce dall'esigenza di evitare danni strutturali al velivolo

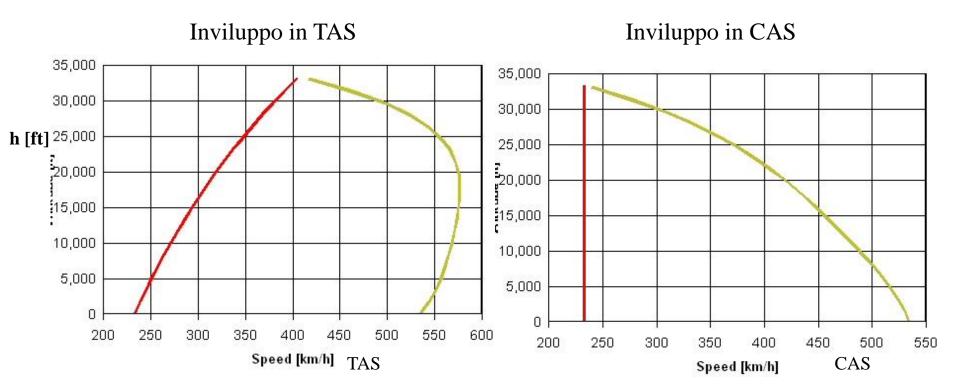




## INVILUPPO DI VOLO (Caso Velivolo ad Elica)



## Esempio inviluppo di volo per il velivolo ATR72

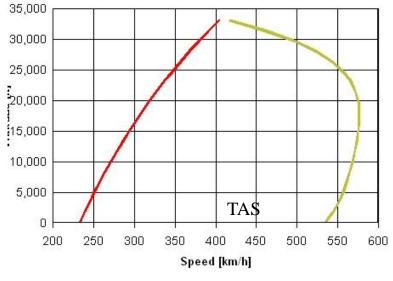


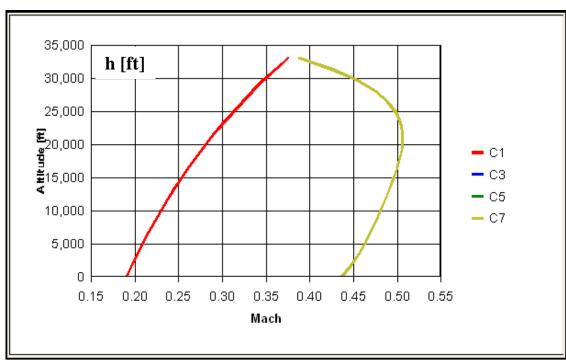
Si nota come la CAS non dipende dalla quota ed infatti la velocità di stallo CAS (quella che avverte il pilota) è sempre la stessa indipendentemente dalla quota.

### **INVILUPPO DI VOLO** (Caso Velivolo ad Elica)

## Esempio inviluppo di volo per il velivolo ATR72

Come già visto per il velivolo a getto, anche per il turboprop l'inviluppo di volo di un velivolo può essere anche espresso in numero di Mach





Si nota come il Mach segue abbastanza l'andamento della TAS.