

Università degli Studi di Napoli Federico II
Accademia Aeronautica

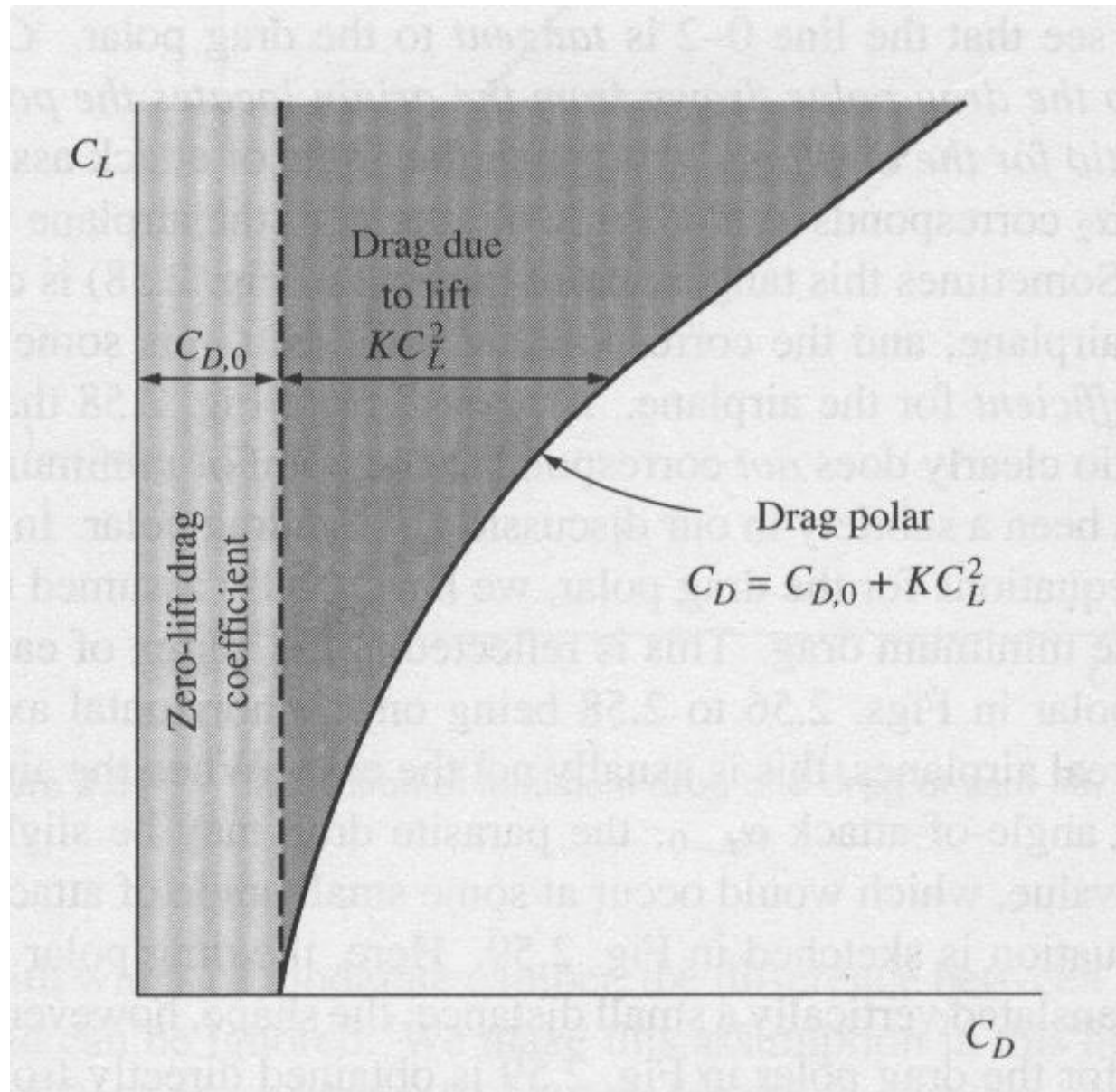
Laurea in
Gestione dei Sistemi Aerospaziali per la Difesa
(GESAD)

Corso di
MECCANICA DEL VOLO

Le Polari Tecniche del Velivolo
(Curve di spinta e potenza necessaria al volo)

Prof. A. De Marco

Polari tecniche

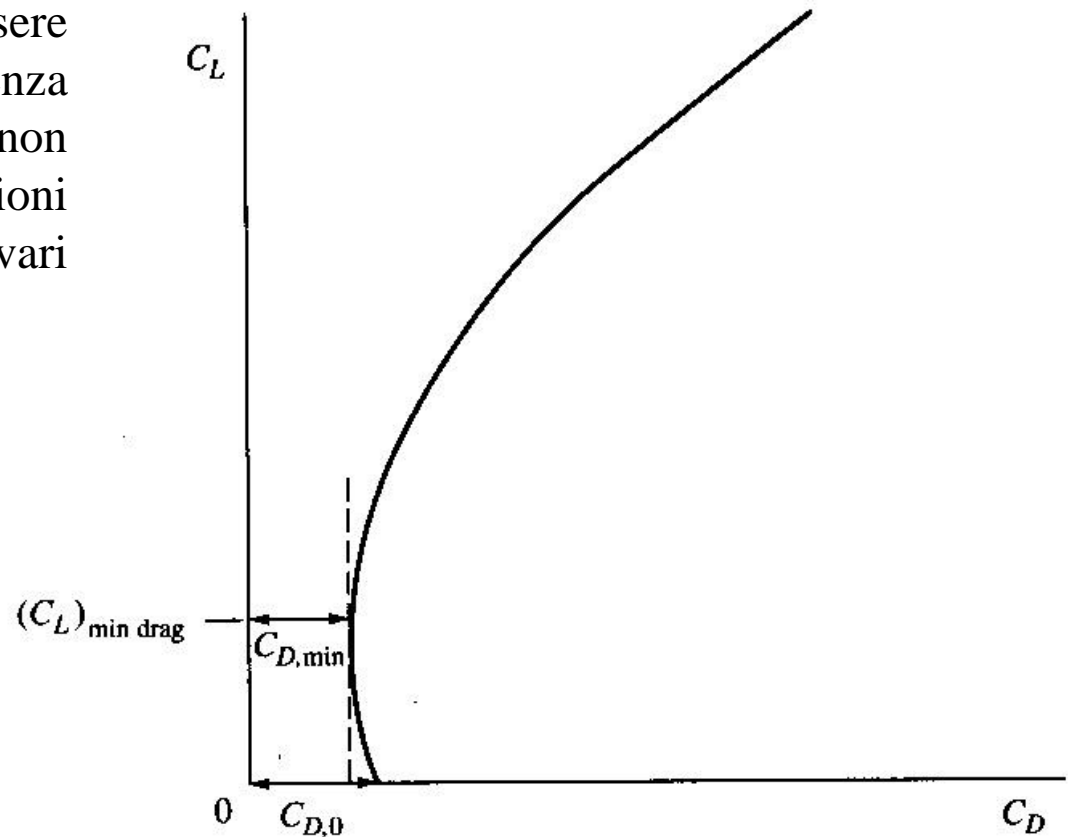


Polari tecniche

$$C_D = C_{D_{\min}} + K (C_L - C_{L_{\min_drag}})^2$$

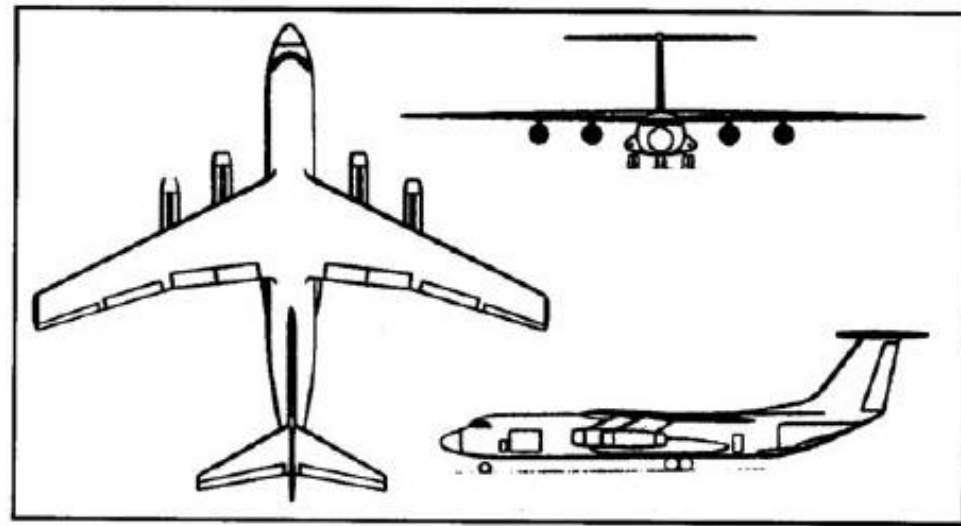
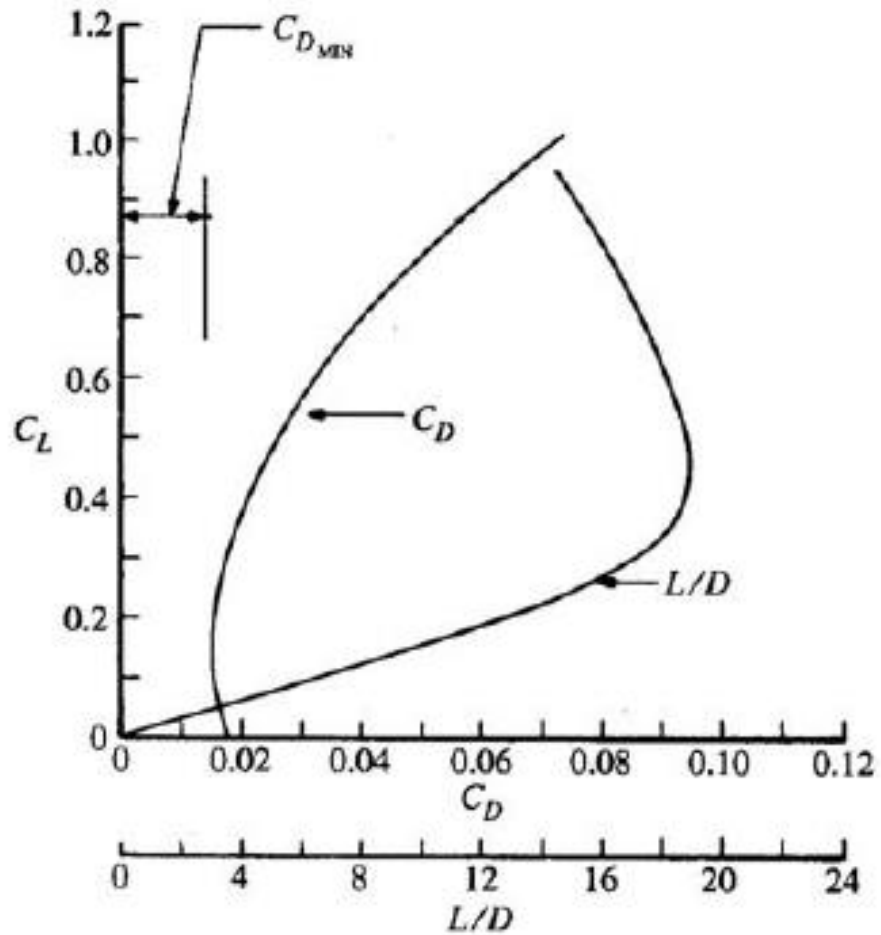
Polare parabolica ad asse spostato

Anche se tale modello potrebbe essere più rispondente alla polare di resistenza reale, la complessità dell'equazione non permetterebbe di ricavare le relazioni semplici che esprimono i legami tra i vari punti caratteristici.



Polari tecniche

Lockheed C141 A

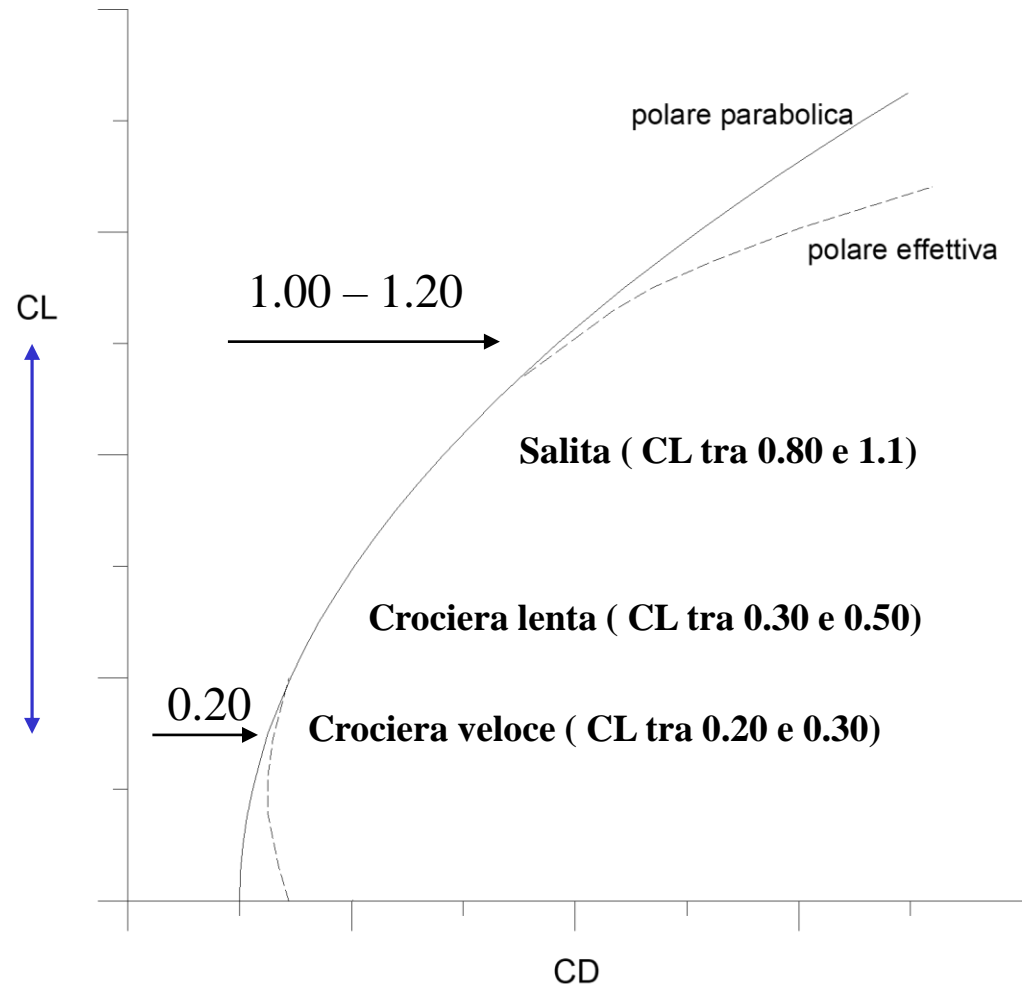


Polari tecniche

La polare parabolica
(anche ad asse non spostato)
approssima bene i regimi in cui il
velivolo OPERA effettivamente

Il velivolo solitamente vola
in questo range di assetti:

- crociera veloce 0.20-0.30
- crociera lenta 0.30-0.50
- salita 0.90-1.20



Quindi CONVIENE MOLTO OPERARE CON LA POLARE PARABOLICA ! (Equazione semplice e rispondenza con quella effettiva nel range di CL usati per il volo e per il calcolo delle prestazioni)

Polari tecniche – VELOCITÀ DI STALLO

La velocità di stallo è la minima velocità di sostentamento a quota costante.

La curva di portanza del velivolo prevede un legame lineare con l'angolo d'attacco ed un valore massimo di coefficiente di portanza allo stallo.

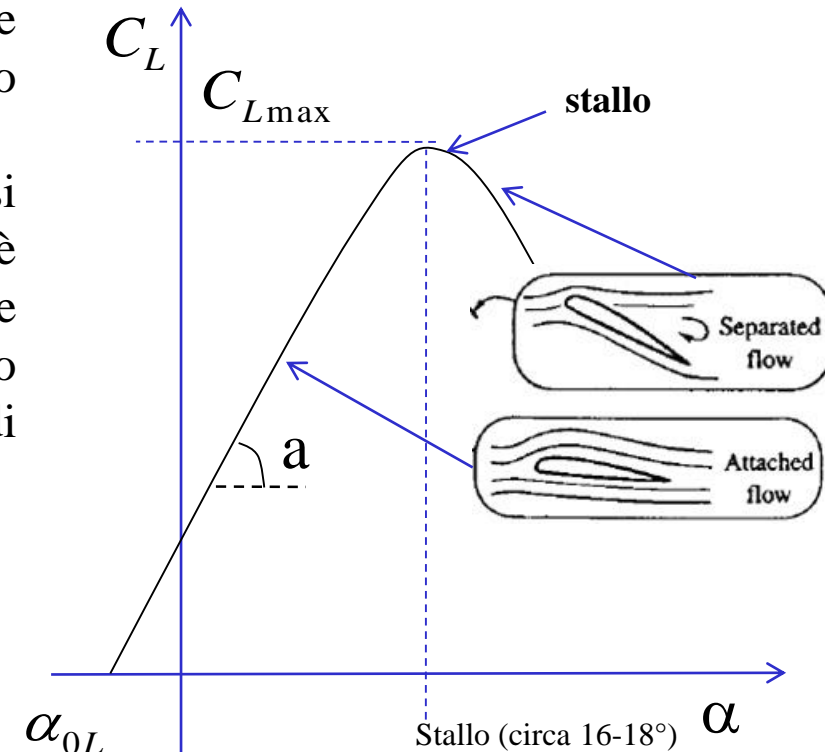
Per un velivolo con ala senza ipersostentatori estesi (configurazione di crociera) il C_L massimo è variabile tra 1.4 ed 1.6 a seconda del valore di AR e freccia dell'ala. Dalla relazione di equilibrio portanza=peso si ricava una relazione tra velocità di volo e coefficiente di portanza.

$$L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot C_L = W$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{C_L}} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0 \sigma}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{C_L}}$$

$$V \propto \frac{1}{\sqrt{C_L}} \quad C_L = \frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{V^2} \quad C_L \propto \frac{1}{V^2}$$

Quindi, incorrispondenza dello stallo $C_L = C_{Lmax}$
Si avrà la velocità di stallo (minima velocità)



$$V_{so} = \sqrt{\frac{2}{\rho_0} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{LMAX}}}$$

Velocità di stallo
a quota S/L

$$V_s = V_{so} / \sqrt{\sigma}$$

Velocità di stallo
in quota

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

- La vel. Minima di sostentamento è la velocità di stallo

$$V_{SO} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o} \frac{W}{S} \frac{1}{CL_{MAX}}} \quad V_S = V_{SO} / \sqrt{\sigma}$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{CL}} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o \sigma}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

$$CL = \frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{V^2}$$

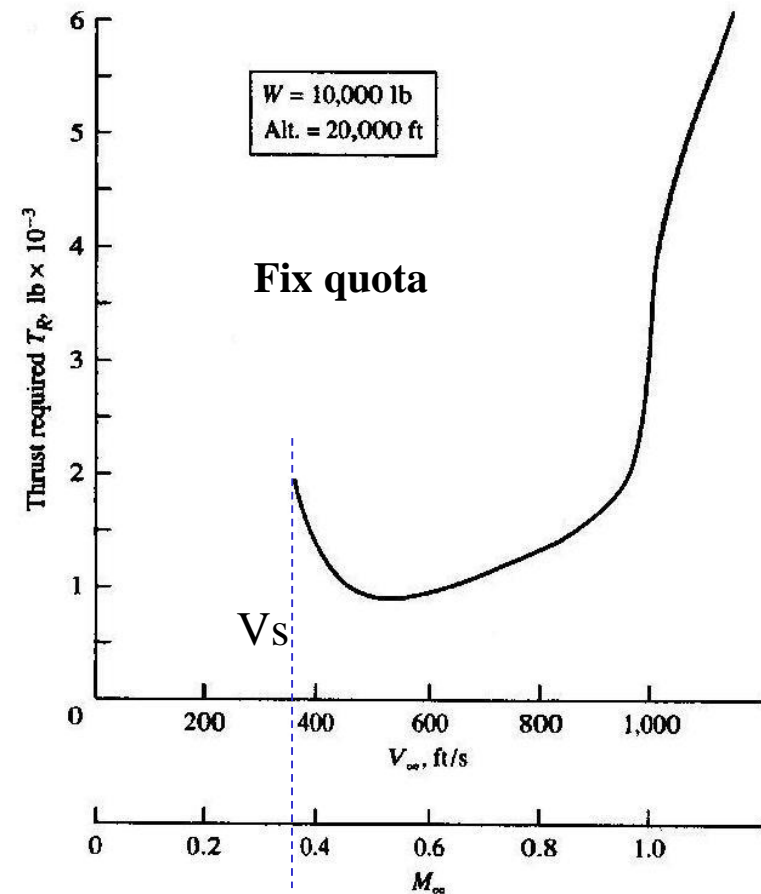
Legame tra coeff. di portanza e velocità di volo

Per data quota

$$V \propto \frac{1}{\sqrt{CL}}$$

$$CL \propto \frac{1}{V^2}$$

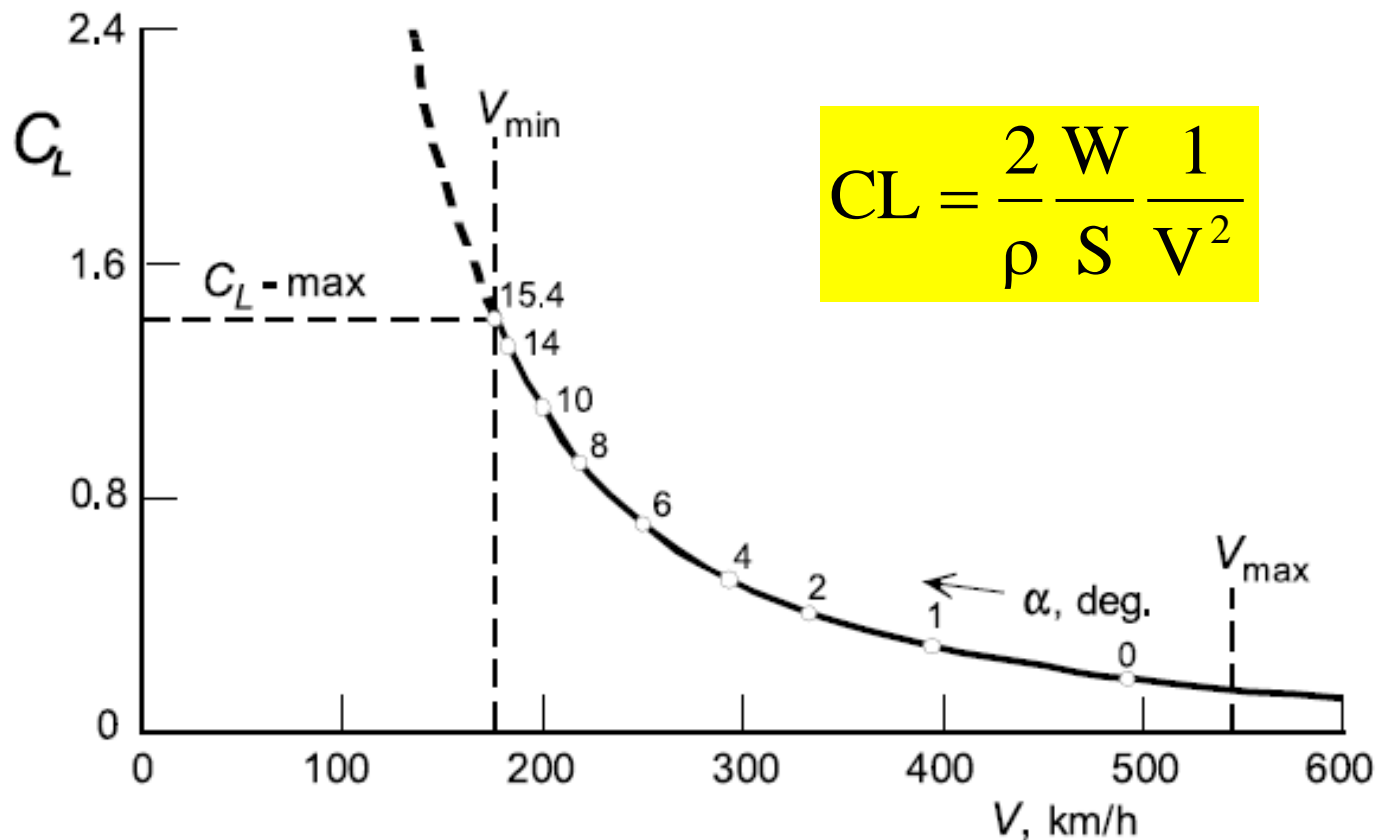
Ricordiamo anche che CL è legato all'angolo di attacco α



Non ha senso calcolare la curva di resistenza per $V < V_S$

Legame tra coeff. di portanza e velocità di volo (per data:

- quota
- dati velivolo , cioè peso W e sup. alare S



Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

RESISTENZA

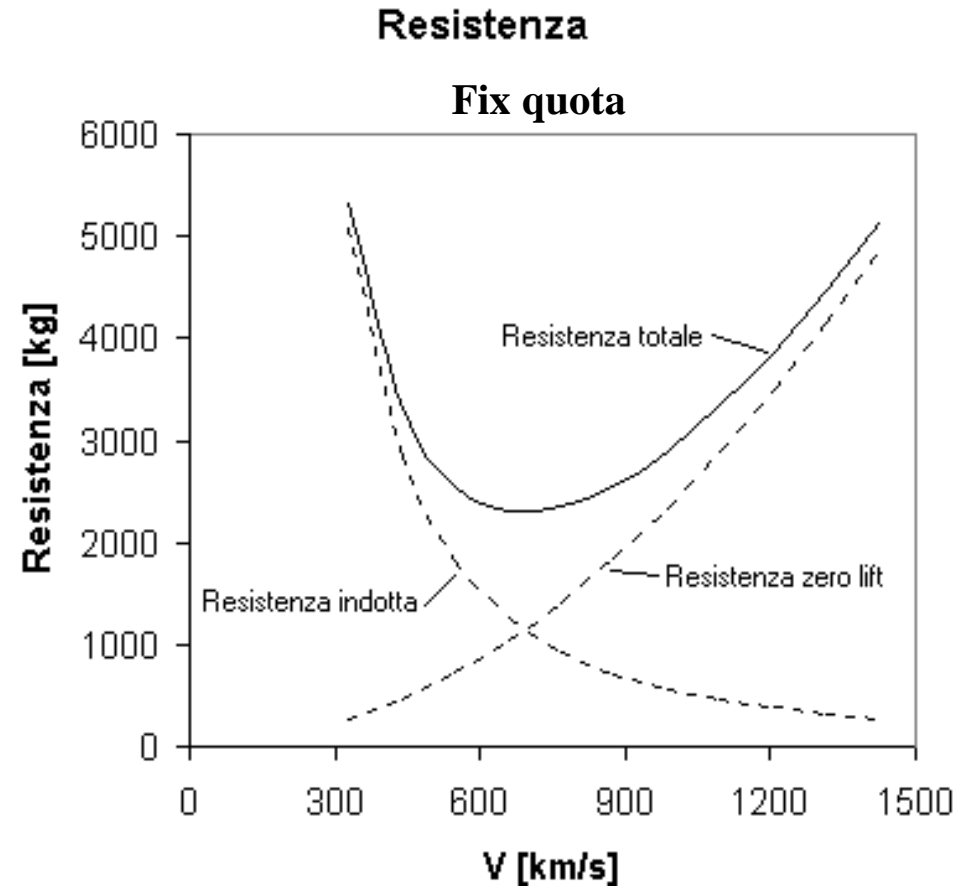
$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D$$

$$C_D = C_{D0} + K C_L^2$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D0} + \frac{1}{2} \rho V^2 S K C_L^2$$

Essendo
 $C_L \propto \frac{1}{V^2}$

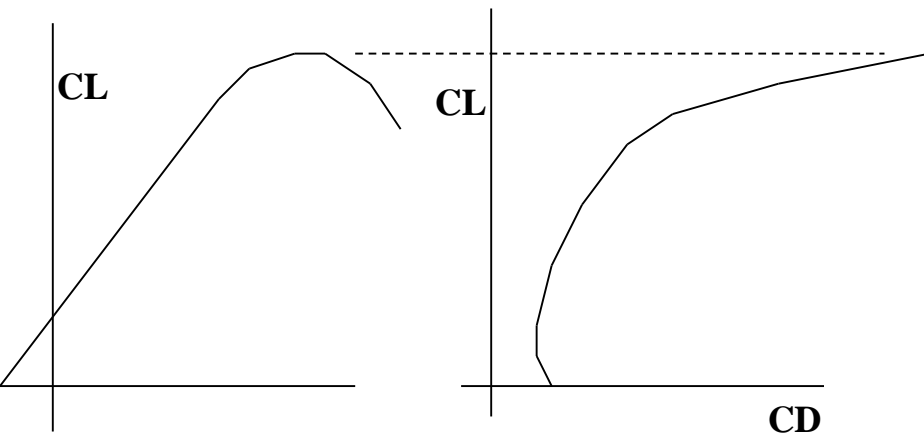
Il secondo termine è
una funzione
 $= f\left(\frac{1}{V^2}\right)$



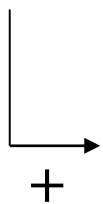
L'AEREO E' DIVERSO RISPETTO AGLI ALTRI MEZZI DI TRASPORTO
AUTO o TRENO => La resistenza aumenta all'aumentare della velocità

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

RESISTENZA



Polare (CL,CD)

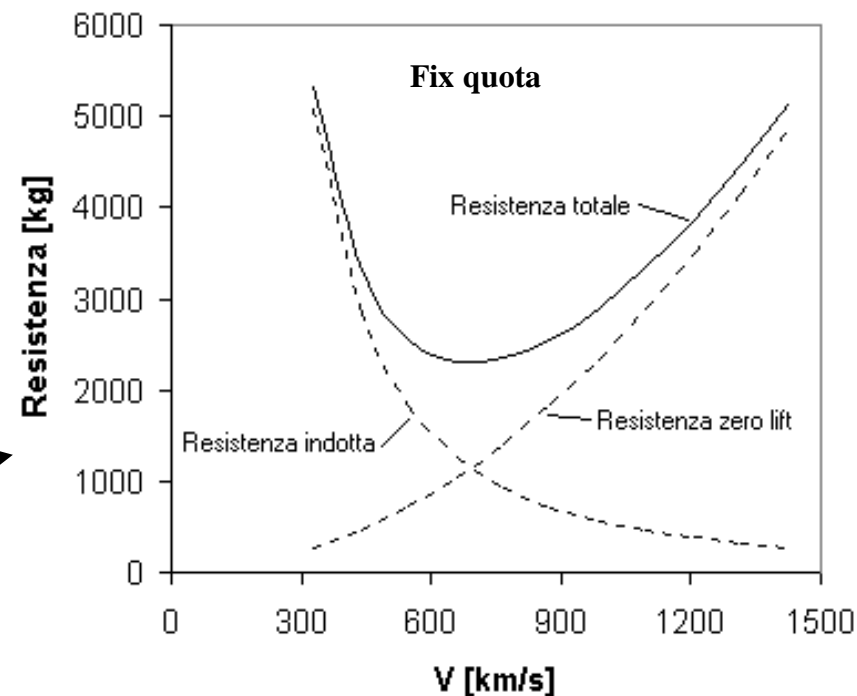


- Peso W
- Superficie alare S
- Quota ρ

+ Ipotesi volo livellato $L=W$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D_0} + \frac{2KS}{\rho V^2} \left(\frac{W}{S} \right)^2$$

Resistenza



Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

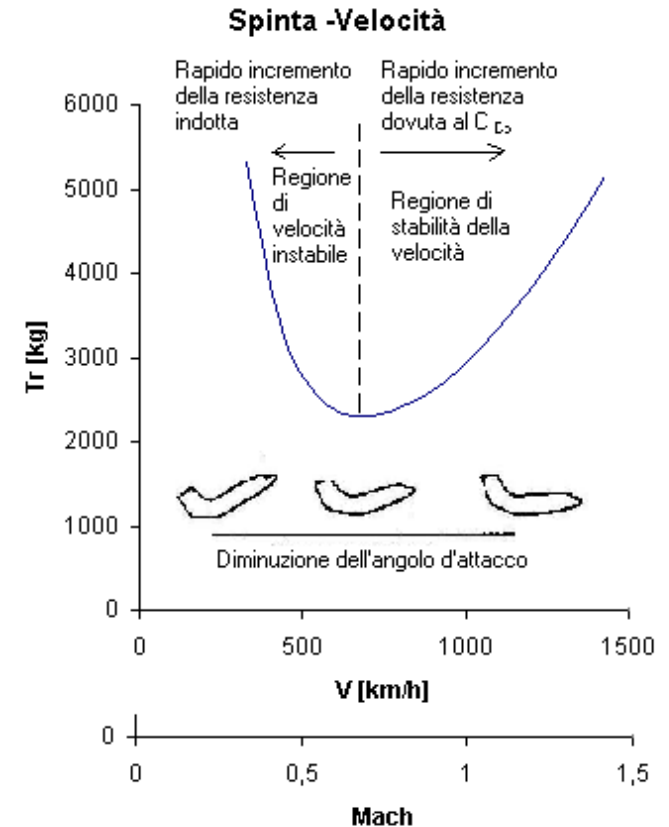
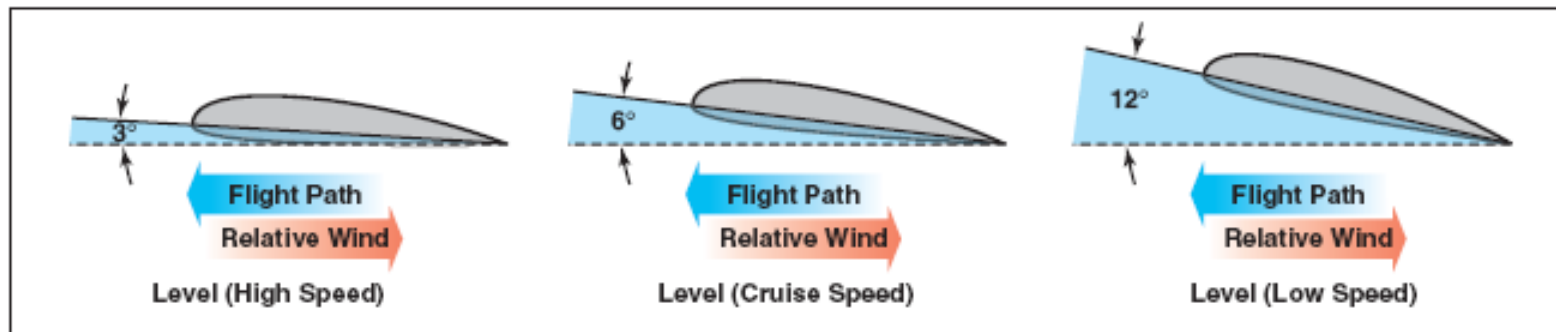
RESISTENZA

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D$$

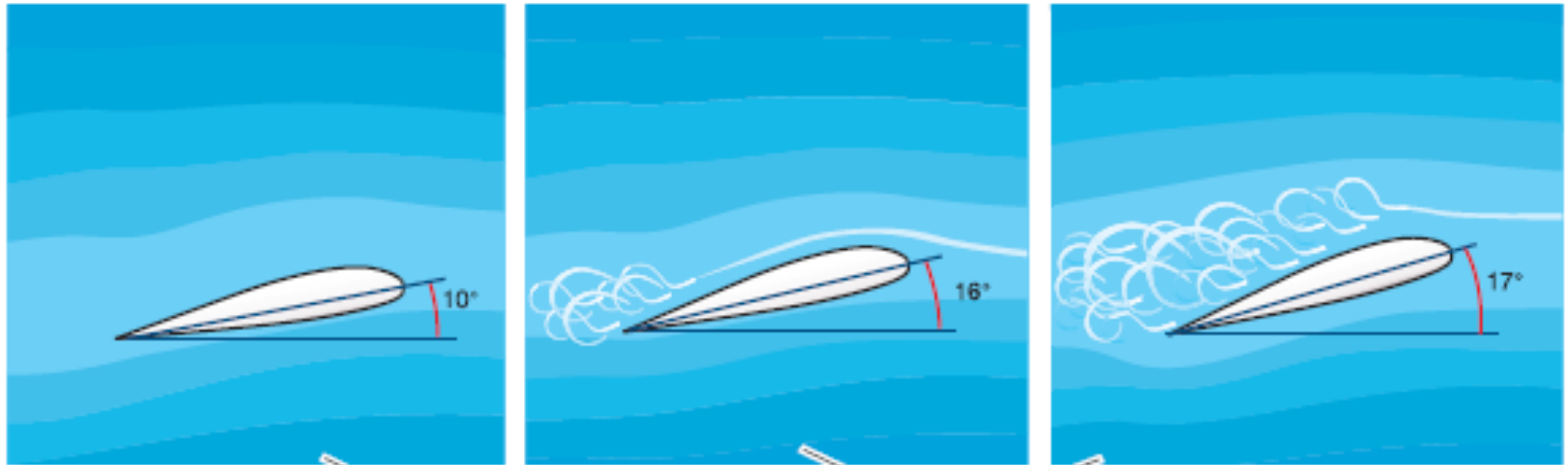
$$C_D = C_{D0} + K C_L^2$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D0} + \frac{1}{2} \rho V^2 S K C_L^2$$

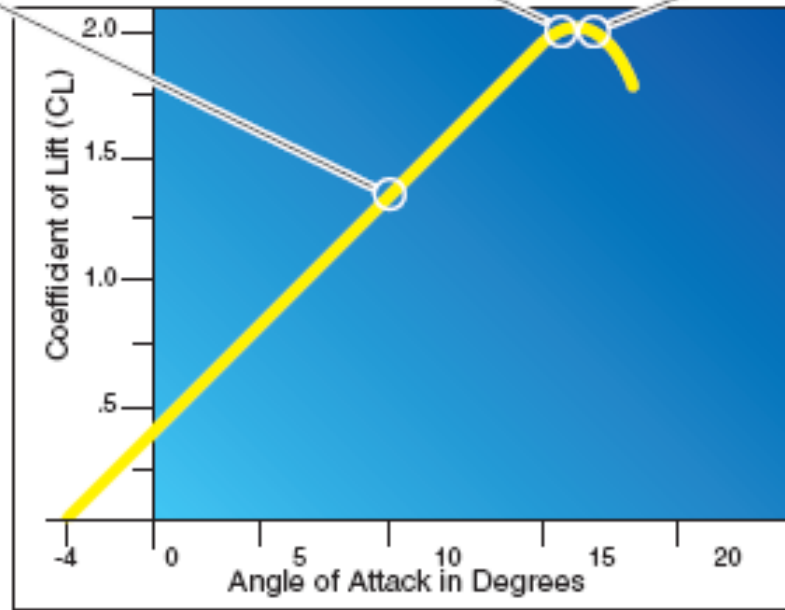
Legame tra V , C_L ed α



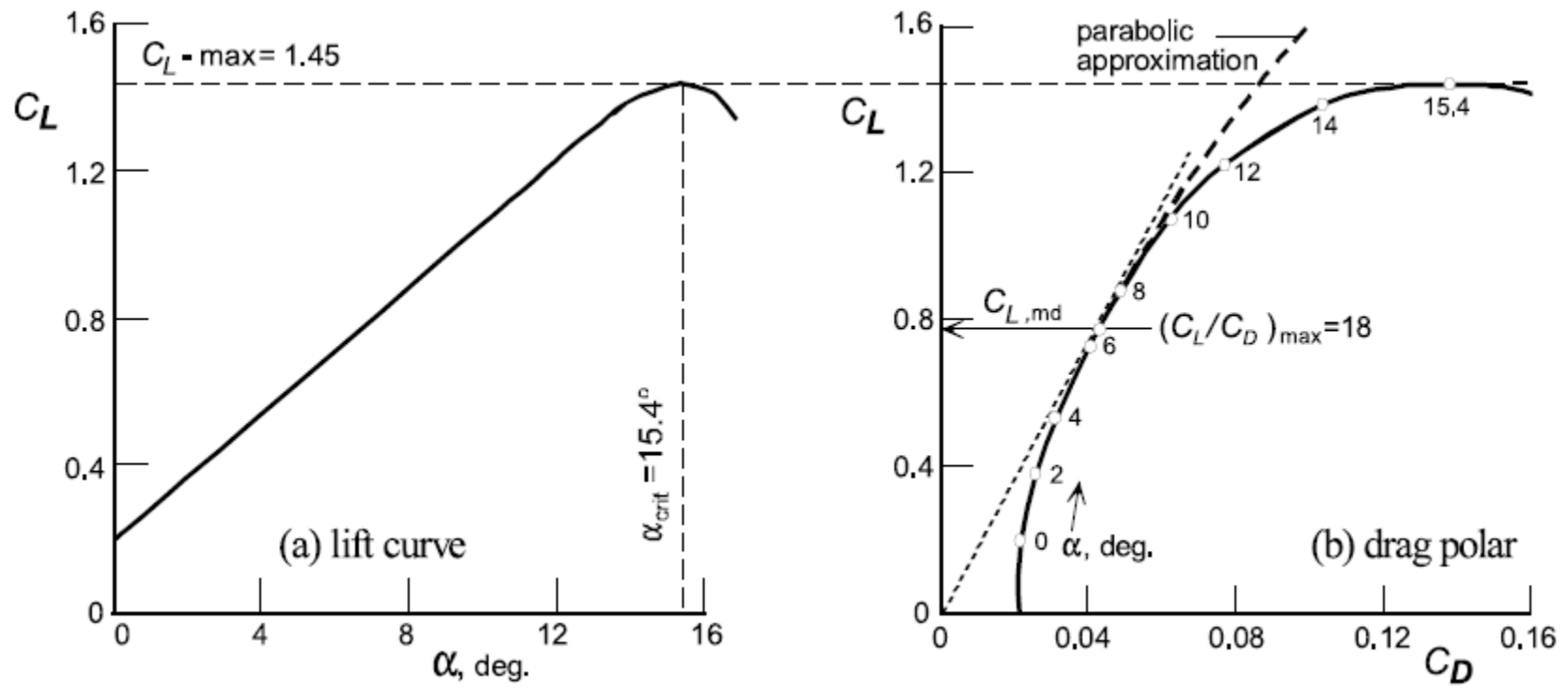
Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato



stallo



Legame tra coeff. di portanza, angolo d'attacco e coeff. di resistenza (polare del velivolo)



Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

RESISTENZA

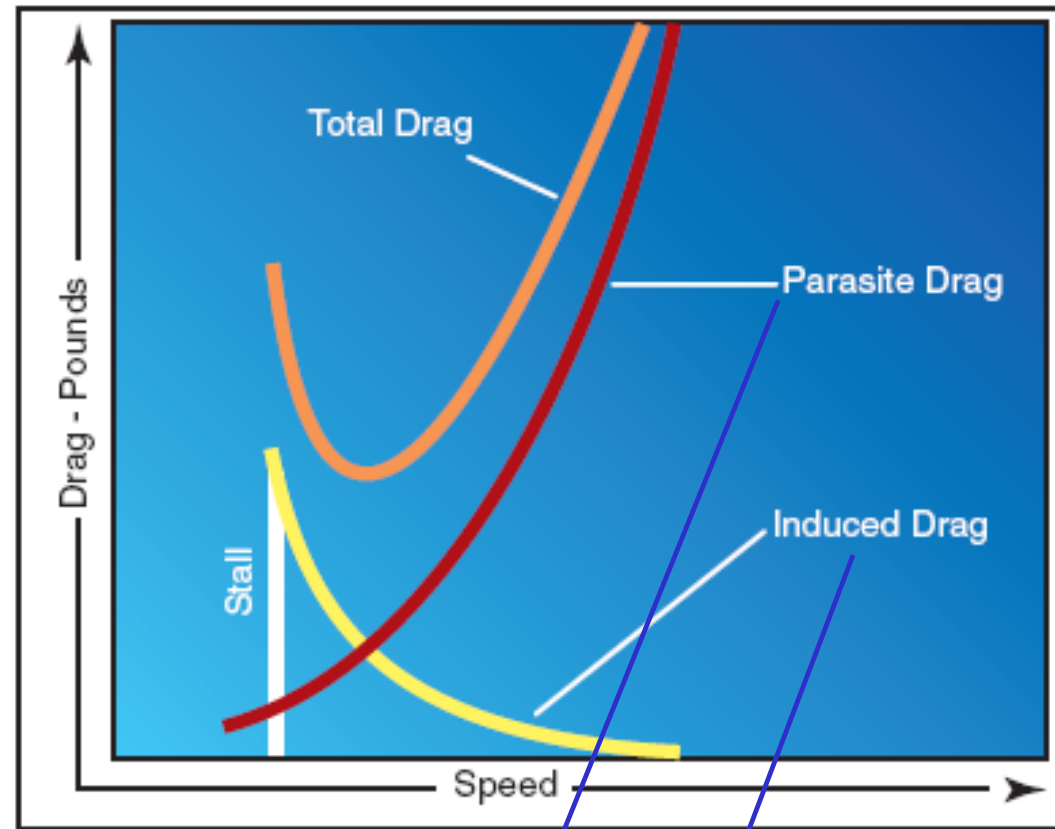
$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D$$

$$C_D = C_{D0} + K C_L^2$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D0} + \frac{1}{2} \rho V^2 S K C_L^2$$

Ed essendo $C_L = \frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{V^2}$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D0} + \frac{2KS}{\rho V^2} \left(\frac{W}{S} \right)^2$$

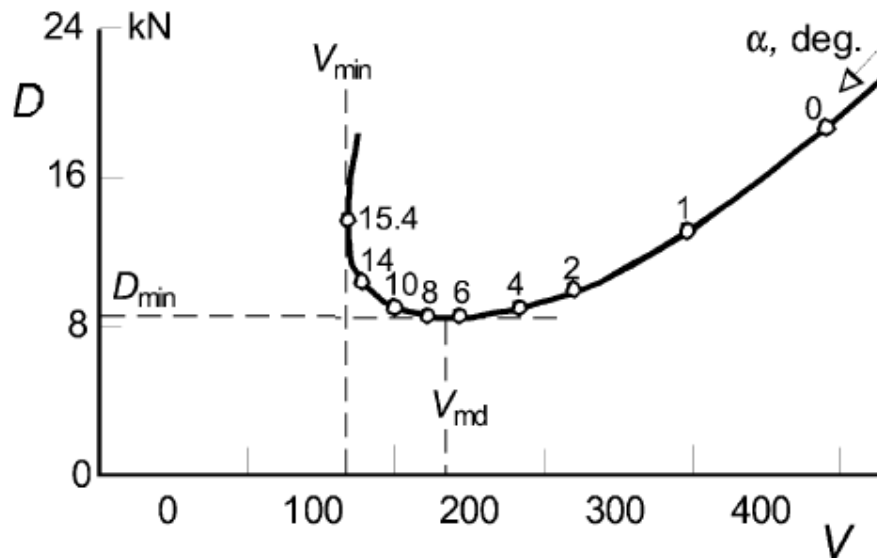


$$D = T_{no} = aV^2 + b \frac{1}{V^2}$$

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

RESISTENZA

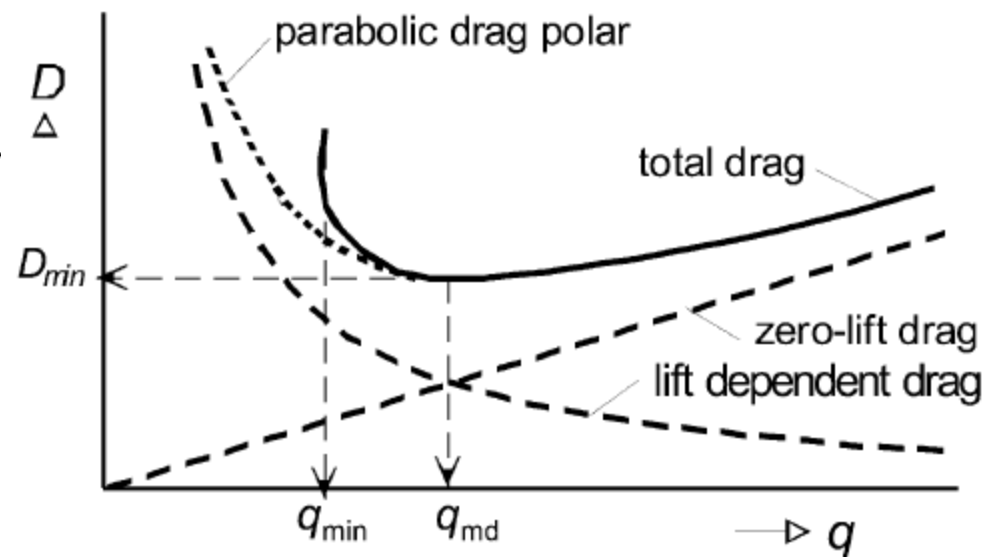
$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D_o} + \frac{2KS}{\rho V^2} \left(\frac{W}{S} \right)^2$$



(a) Drag versus flight speed

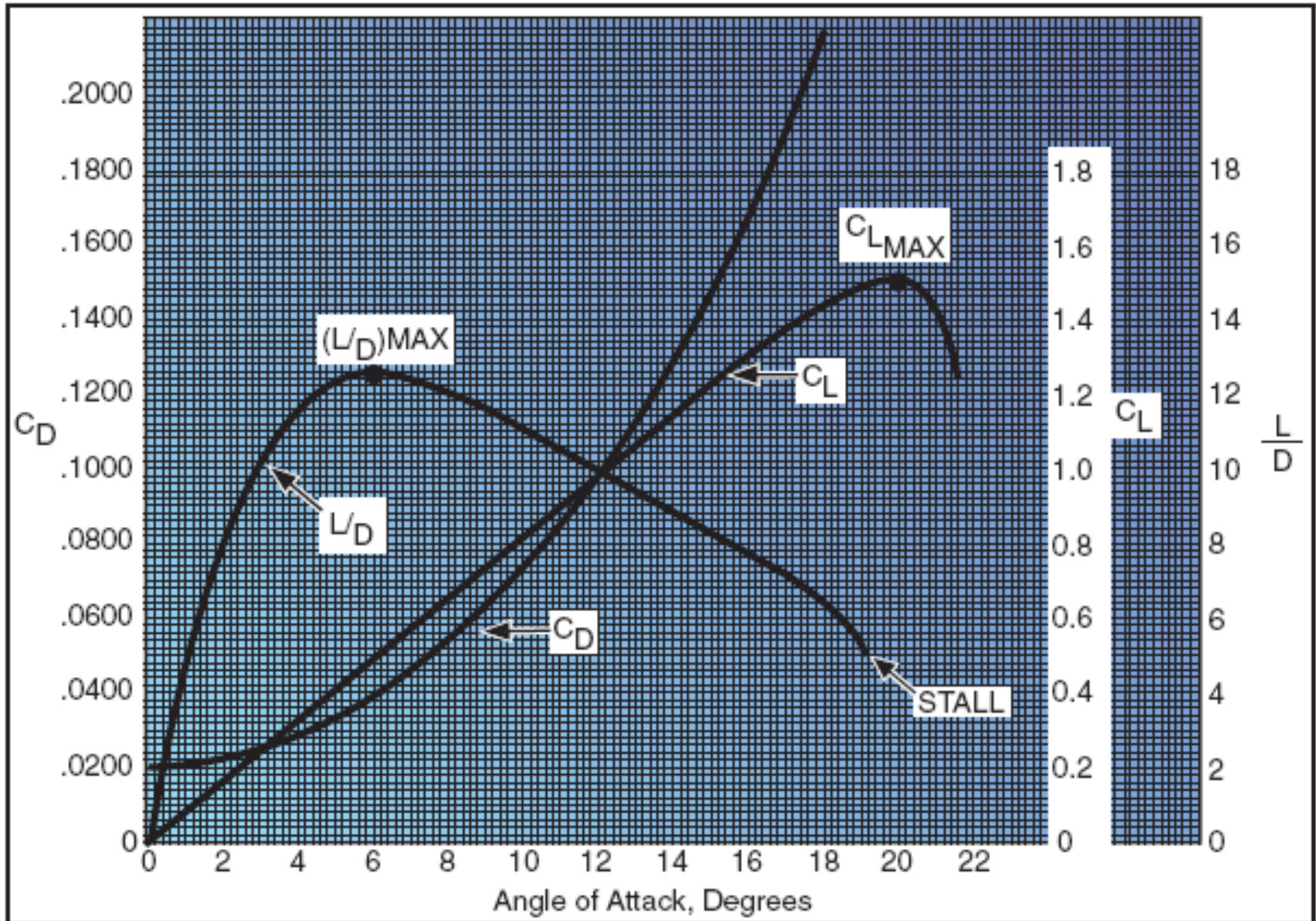
In termini di pressione dinamica

$$D = q \cdot S C_{D_o} + \frac{1}{q} \cdot K S \left(\frac{W}{S} \right)^2$$



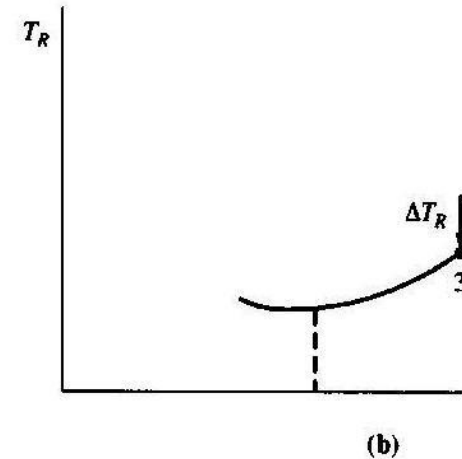
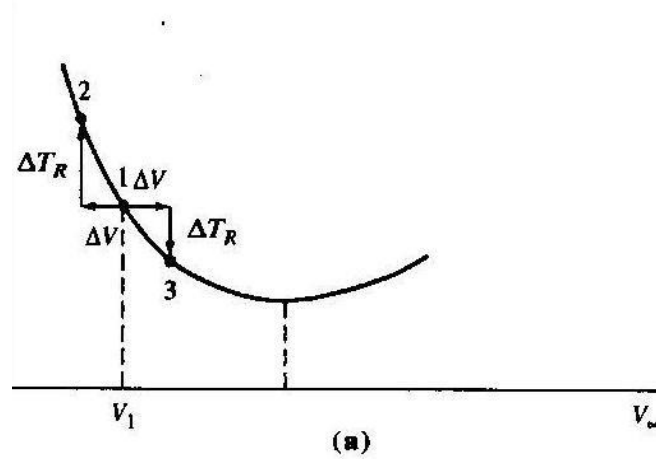
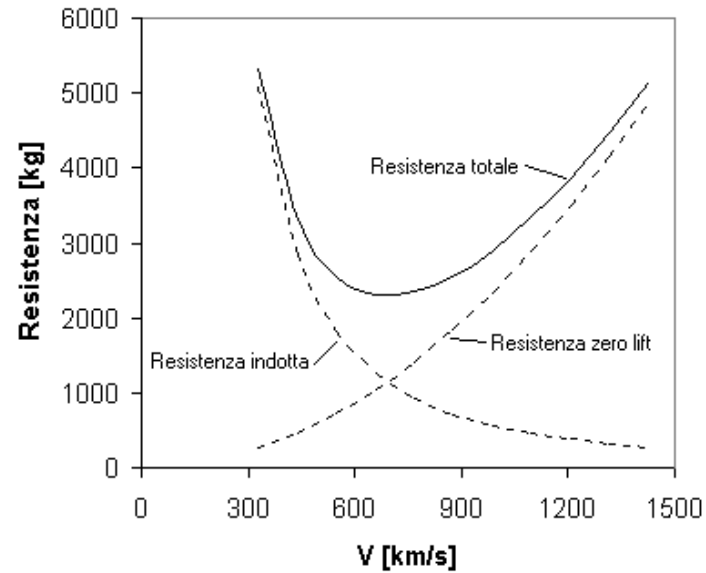
(b) Drag versus dynamic pressure

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

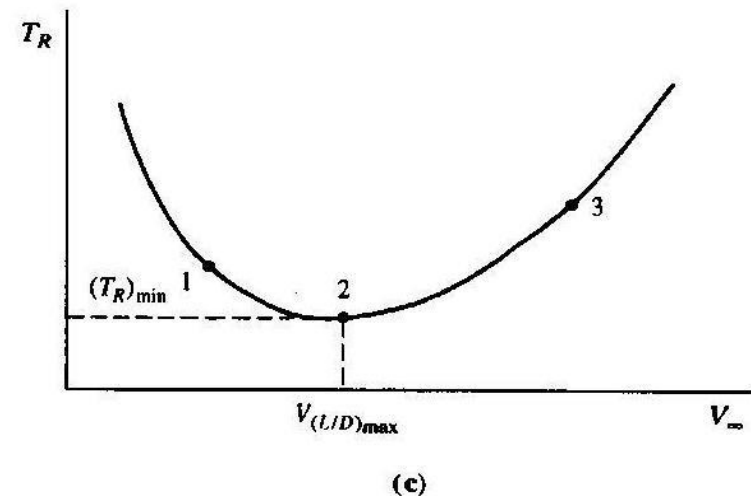


Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Resistenza



**Il ramo sinistro è un ramo di equilibrio in volo livellato instabile !
Il ramo destro è invece stabile.**



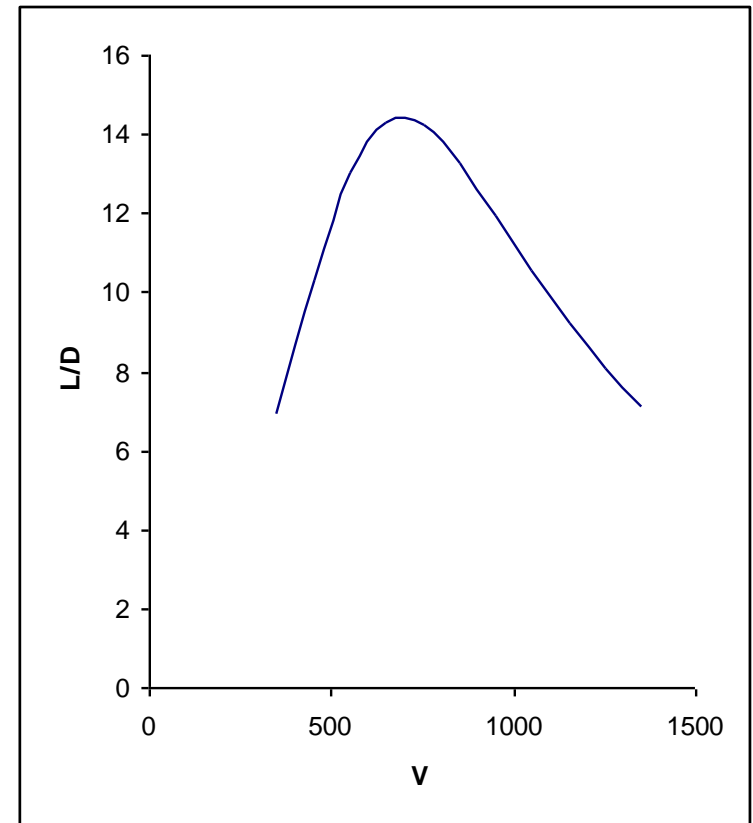
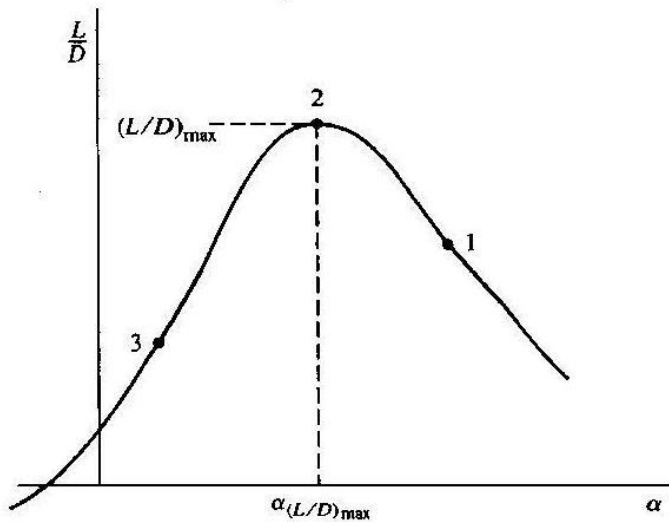
Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Efficienza aerodinamica

$$T_R = D = \frac{D}{W} W = \frac{D}{L} W$$

$$T_R = \frac{W}{L/D}$$

$$\frac{L}{D} = \frac{\frac{1}{2} \rho V^2 S C_L}{\frac{1}{2} \rho V^2 S C_D} = \frac{C_L}{C_D}$$



Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Approccio analitico

$$D = qSC_D = qS(C_{D_o} + KC_L^2)$$

$$L = W = qSC_L = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_L \longrightarrow C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S \left[C_{D_o} + 4K \left(\frac{W}{\rho V^2 S} \right)^2 \right]$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 SC_{D_o} + \frac{2KS}{\rho V^2} \left(\frac{W}{S} \right)^2$$

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Approccio analitico

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D0} + \frac{2KS}{\rho V^2} \left(\frac{W}{S} \right)^2$$

$$D = T_{no} = \frac{1}{2} \rho f V^2 + \frac{2}{\rho} \frac{W^2}{S} \frac{1}{\pi A Re} \frac{1}{V^2}$$

$$D = T_{no} = aV^2 + b \frac{1}{V^2}$$

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Approccio analitico

$$D = T_{no} = aV^2 + b \frac{1}{V^2}$$

Minima D se : $d(D)dV=0$

$$2aV - 2b \frac{1}{V^3} = 0 \quad \longrightarrow \quad aV^2 = b \frac{1}{V^2} \quad \longrightarrow \quad \text{Res. Parassita} = \text{Res. Indotta}$$

$$E_{\max} = \frac{W}{D_{\min}} \quad C_{Do} = K \cdot C_L^2$$

$$C_{L_E} = \sqrt{\frac{C_{Do}}{K}} = \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot C_{Do}}$$

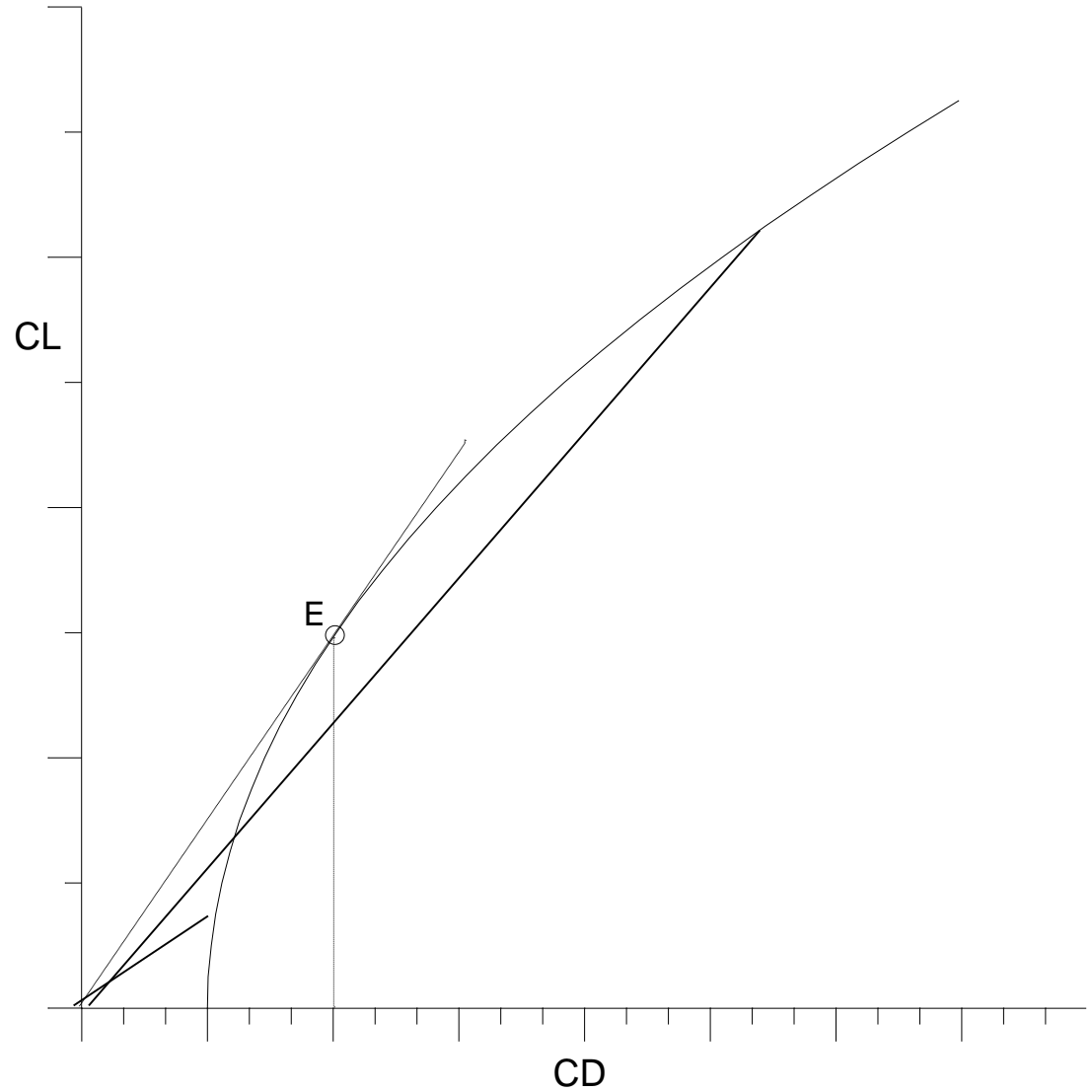
$$C_{D_E} = C_{Do} + K C_{L_E}^2 = 2 C_{Do}$$

$$E_{\max} = E_E = \frac{C_{L_E}}{C_{D_E}} = \frac{\sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot C_{Do}}}{2 \cdot C_{Do}} = \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{AR \cdot e}{C_{Do}}}$$

$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{L_E}}}$$

Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Approccio analitico



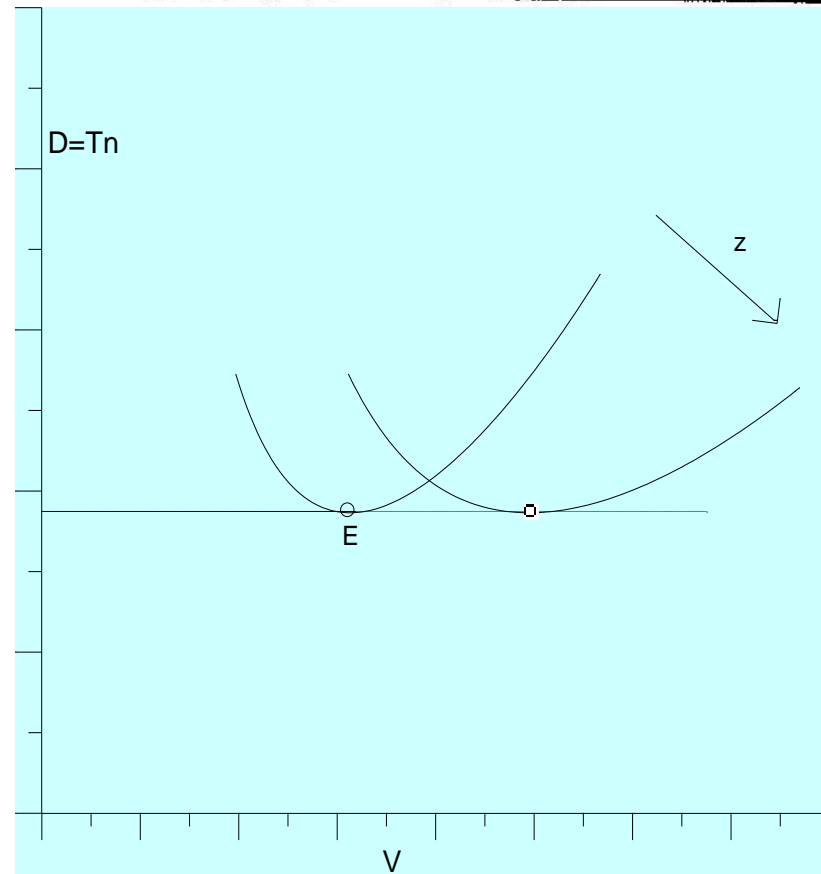
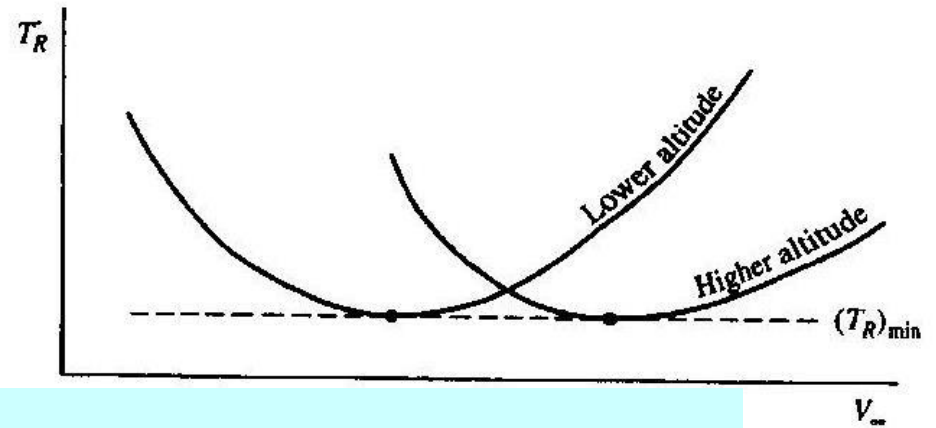
Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Approccio analitico

$$D_{\min} = T_{\text{no_min}} = \frac{W}{E_{\text{MAX}}}$$

$$V(z) = \frac{V_o}{\sqrt{\sigma}}$$

Influenza della quota

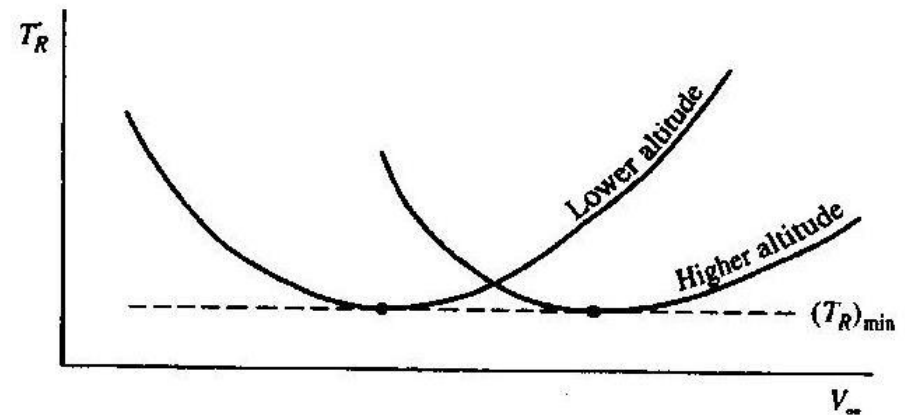


Polari tecniche – SPINTA RICHIESTA al volo livellato

Approccio analitico

$$D_{\min} = T_{no_min} = \frac{W}{E_{MAX}}$$

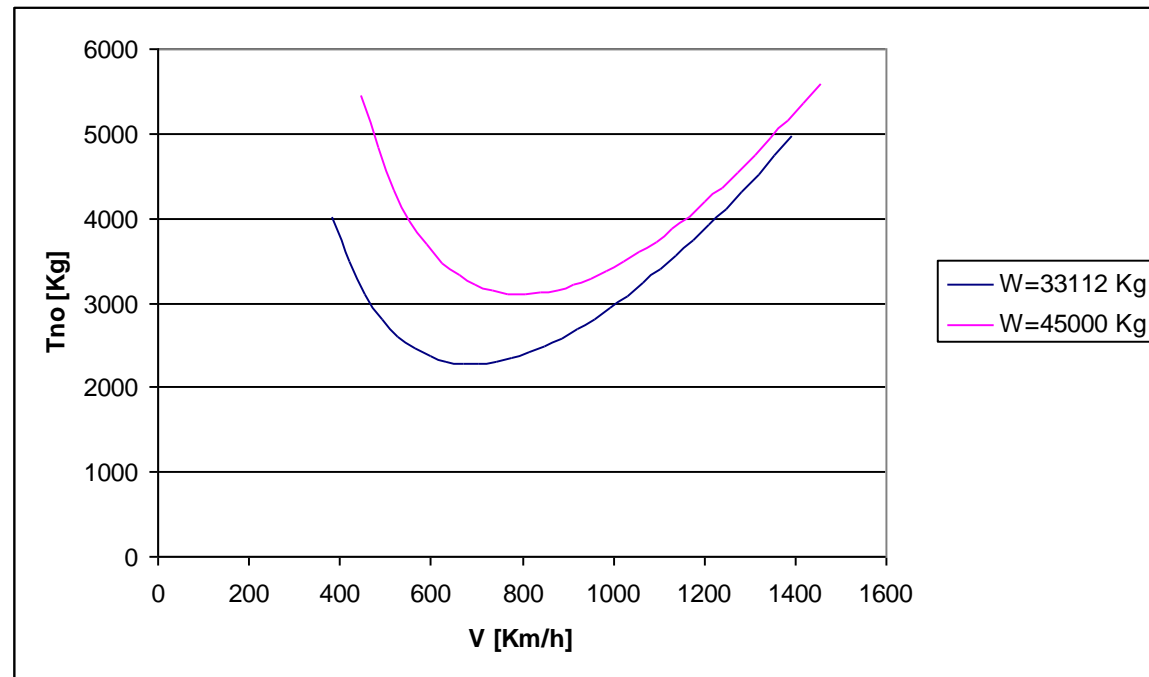
$$V(z) = \frac{V_o}{\sqrt{\sigma}} \quad V = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{CL}}$$



La resistenza (a parità di assetto) (ad esempio punto E, resistenza minima) aumenta come il peso. (As esempio, se il peso aumenta di una volta e mezzo, anche la resistenza aumenta della stessa percentuale.

La velocità di volo (per dato assetto) (vedi formula sopra) aumenta con la radice del peso. (si vede che la curva si sposta anche leggermente a destra).

Influenza del peso



Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

$$\Pi_{no} = T_{no} \cdot V = D \cdot V$$

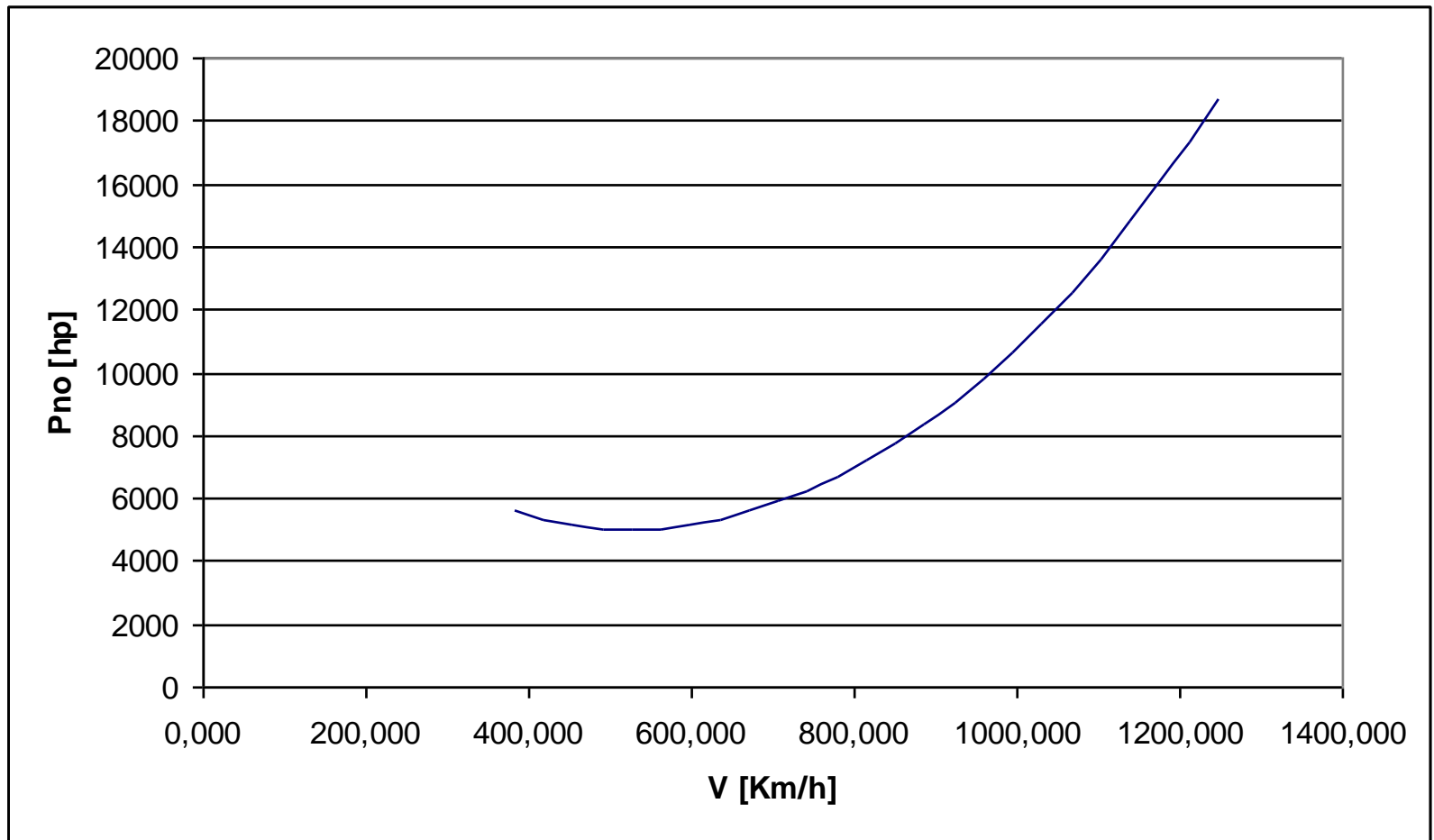
Consideriamo consideriamo sempre il velivolo con peso pari a $W=33112.8 \text{ Kg}$, $S=88.2 \text{ m}^2$, $b=22.9 \text{ m}$ e quota pari a 9000 m . Il $CD_0=0.015$ e il fattore di Oswald sia 0.80 .

Il calcolo inizia da un valore di V pari alla velocità di stallo a quota $z=9000 \text{ m}$, considerando che il CL_{MAX} del velivolo in configurazione pulita è 1.40 .

V [Km/h]	CL	CD	E	D=W/E [Kg]	Pno [KW]	Pno [hp]
382,386	1,400	0,170	8,24	4019	4188	5614
418,386	1,169	0,123	9,50	3486	3974	5327
454,386	0,991	0,093	10,69	3096	3834	5139
490,386	0,851	0,072	11,78	2812	3757	5037
526,386	0,739	0,058	12,71	2606	3738	5011
562,386	0,647	0,048	13,45	2462	3772	5057
598,386	0,572	0,041	14,00	2365	3857	5170
634,386	0,509	0,035	14,35	2308	3990	5348
670,386	0,455	0,031	14,51	2283	4170	5590
706,386	0,410	0,028	14,49	2285	4398	5895
742,386	0,371	0,026	14,34	2310	4672	6263
778,386	0,338	0,024	14,06	2355	4994	6695
814,386	0,309	0,023	13,70	2417	5364	7191
850,386	0,283	0,021	13,27	2496	5783	7752
886,386	0,261	0,020	12,79	2588	6252	8381

Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

$$\Pi_{no} = T_{no} \cdot V = D \cdot V$$



Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

$$\Pi_{no} = T_{no} \cdot V = D \cdot V$$

$$\Pi_{no} = D \cdot V = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot (C_{Do} + K C_L^2) \cdot V$$

$$\Pi_{no} = \frac{1}{2} \rho \cdot C_{Do} \cdot S \cdot V^3 + \frac{1}{2} \rho \cdot S \cdot V^3 \cdot K C_L^2$$

$$C_L = \frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{V^2}$$

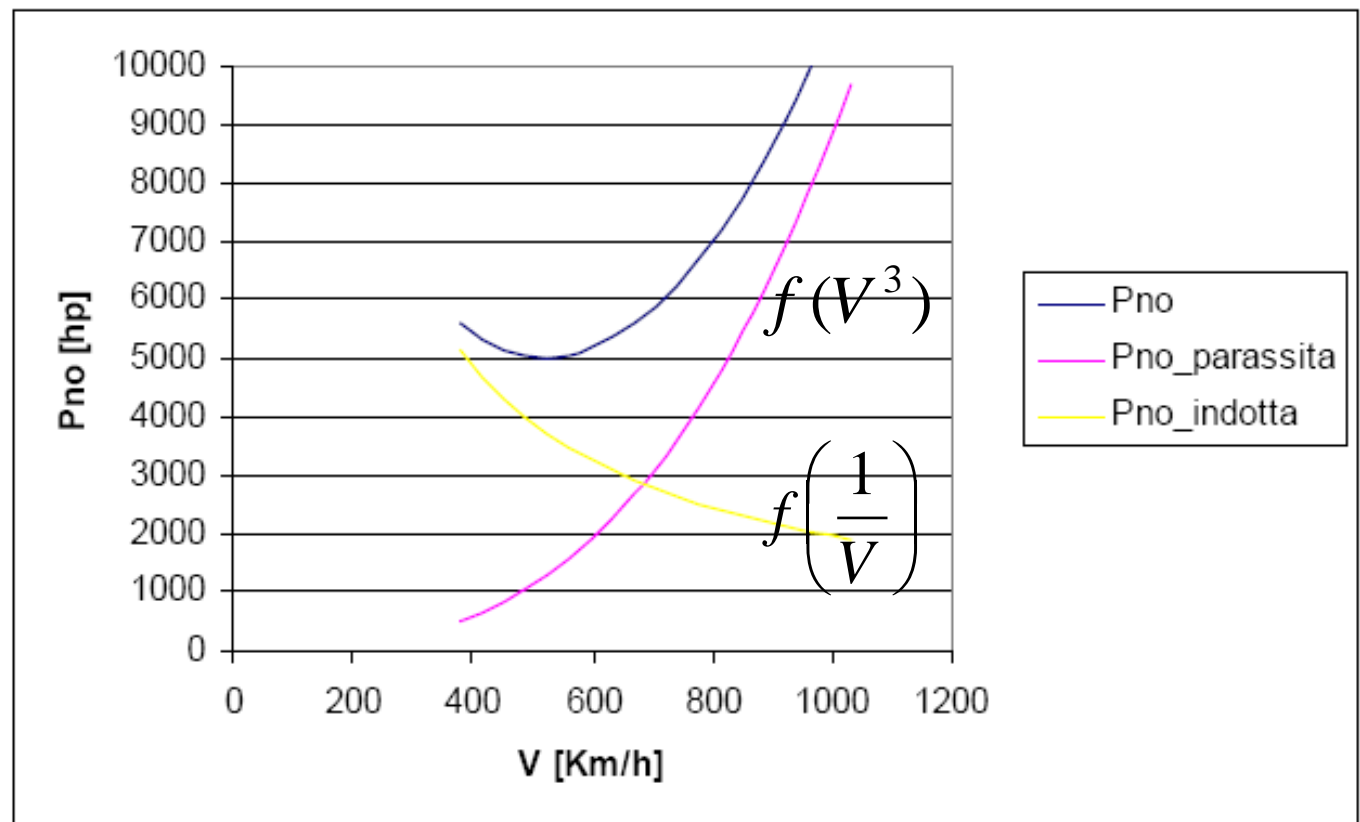
$$\Pi_{no} = \frac{1}{2} \rho \cdot C_{Do} \cdot S \cdot V^3 + \frac{2}{\rho} \cdot S \cdot K \cdot \left(\frac{W}{S} \right)^2 \cdot \frac{1}{V}$$

$$\Pi_{no} = D \cdot V = \left(a \cdot V^2 + \frac{b}{V^2} \right) \cdot V = a \cdot V^3 + \frac{b}{V}$$

Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

$$\Pi_{no} = T_{no} \cdot V = D \cdot V$$

$$\Pi_{no} = D \cdot V = \left(a \cdot V^2 + \frac{b}{V^2}\right) \cdot V = a \cdot V^3 + \frac{b}{V}$$



Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

Deriviamo per trovare il minimo

$$\Pi_{no} = D \cdot V = \left(a \cdot V^2 + \frac{b}{V^2}\right) \cdot V = a \cdot V^3 + \frac{b}{V}$$

$$\frac{d\Pi_{no}}{dV} = 3 \cdot a \cdot V^2 - \frac{b}{V^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 3 \cdot a \cdot V^2 = \frac{b}{V^2} \quad \rightarrow \quad 3 \cdot D_o = D_i$$

$$CD_i = K \cdot CL^2 = \frac{CL^2}{\pi \cdot AR \cdot e} = 3 \cdot CD_o$$

$$CD = 4 \cdot CD_o$$

$$CL_P = \sqrt{\frac{3 \cdot CD_o}{K}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CD_o}$$

$$CL_P = \sqrt{3} \cdot CL_E = 1.73 \cdot CL_E$$

$$CD_P = 4 \cdot CD_o$$

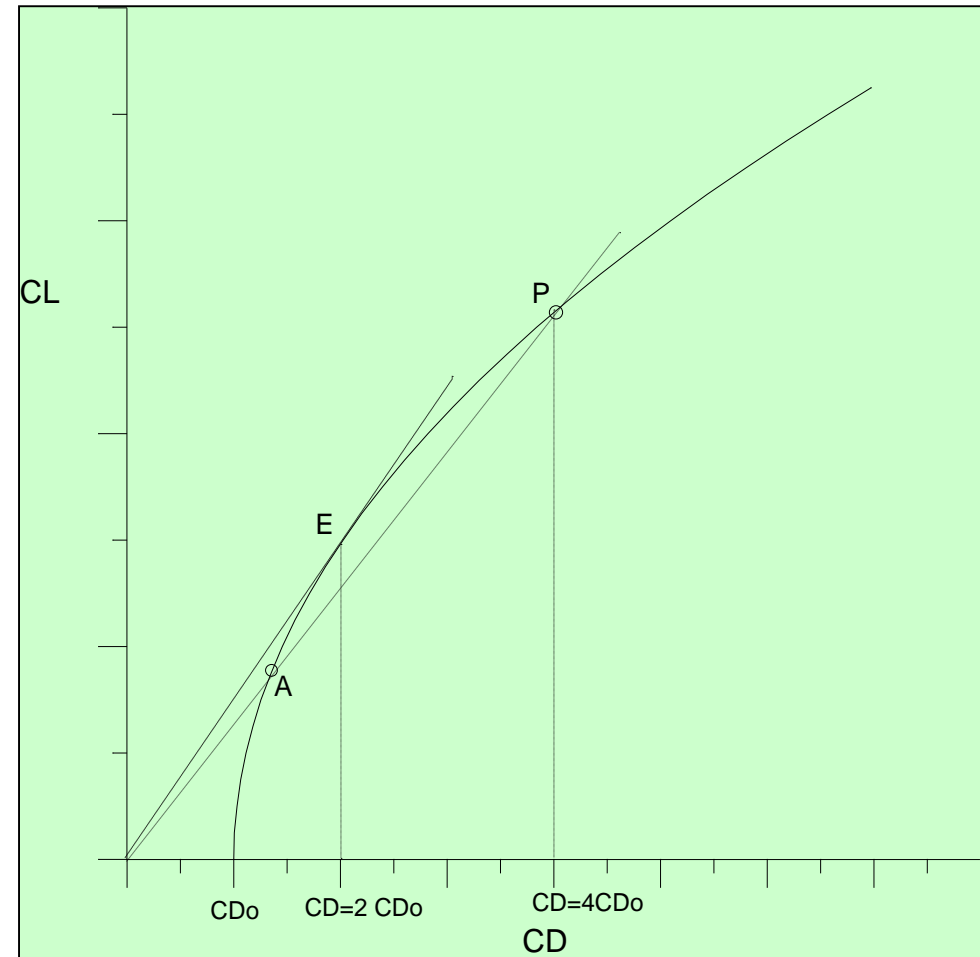
Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

PUNTO P

$$CL_P = \sqrt{3} \cdot CL_E = 1.73 \cdot CL_E$$

$$CD_P = 4 \cdot CD_0$$

$$E_P = \frac{CL_P}{CD_P} = \frac{\sqrt{3} \cdot CL_E}{4 \cdot CD_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{CL_E}{CD_E}$$

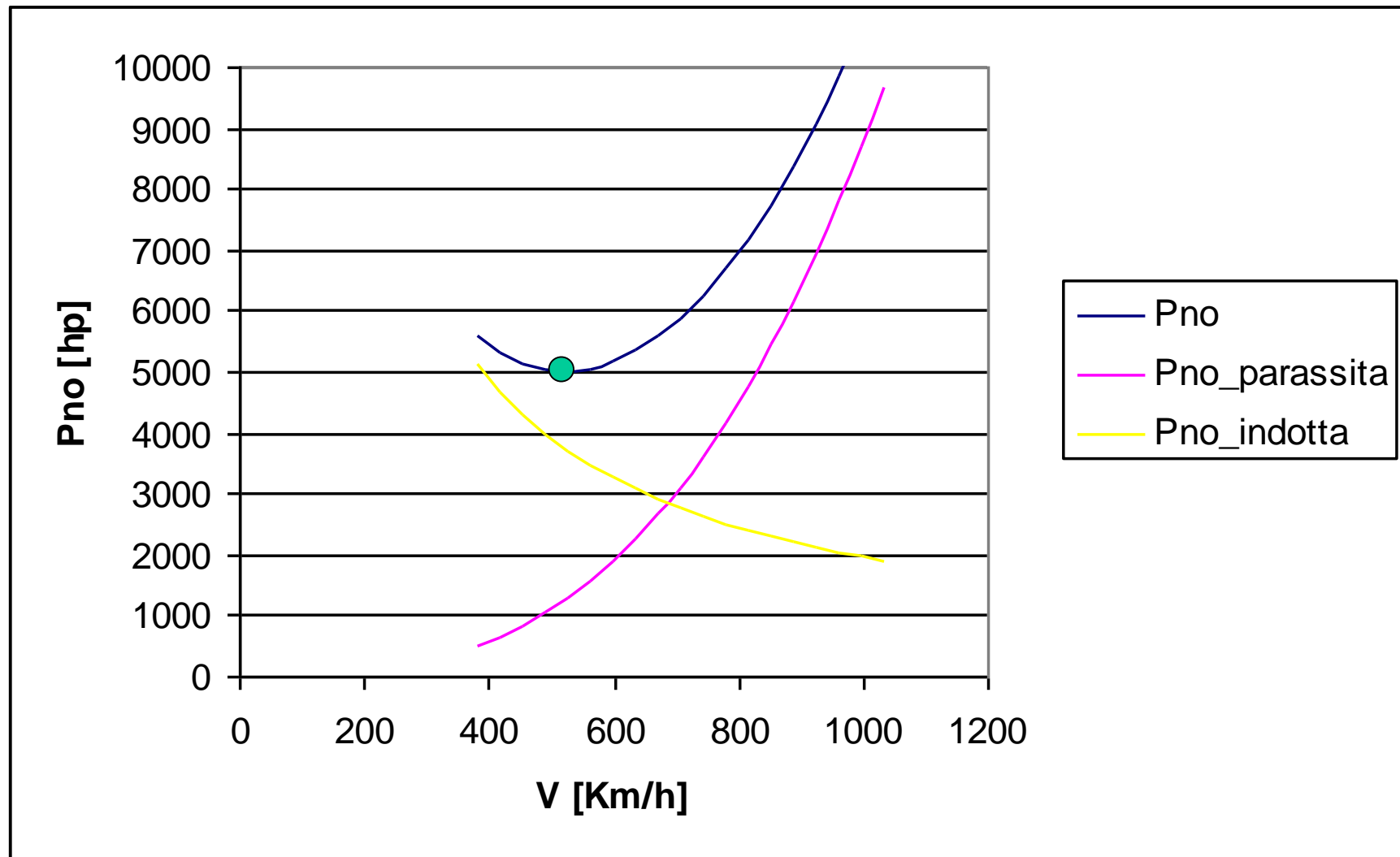


$$V_P = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{CL_P}} = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3} \cdot CL_E}} = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1.32}$$

Quindi la velocità nel punto caratteristico P è uguale a quella in E diviso per 1.32.

Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

PUNTO P



Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

PUNTO P

$$D = T_{no} = \frac{W}{E} \quad \Pi_{no} = T_{no} \cdot V = \frac{W}{E} V = \frac{W}{(E/V)}$$

$$\Pi_{no_MIN} \Rightarrow \left(\frac{E}{V} \right)_{MAX} \quad \Pi_{no} = \frac{W}{E} V = W \cdot \frac{CD}{CL} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \cdot \sqrt{\frac{1}{CL}}$$

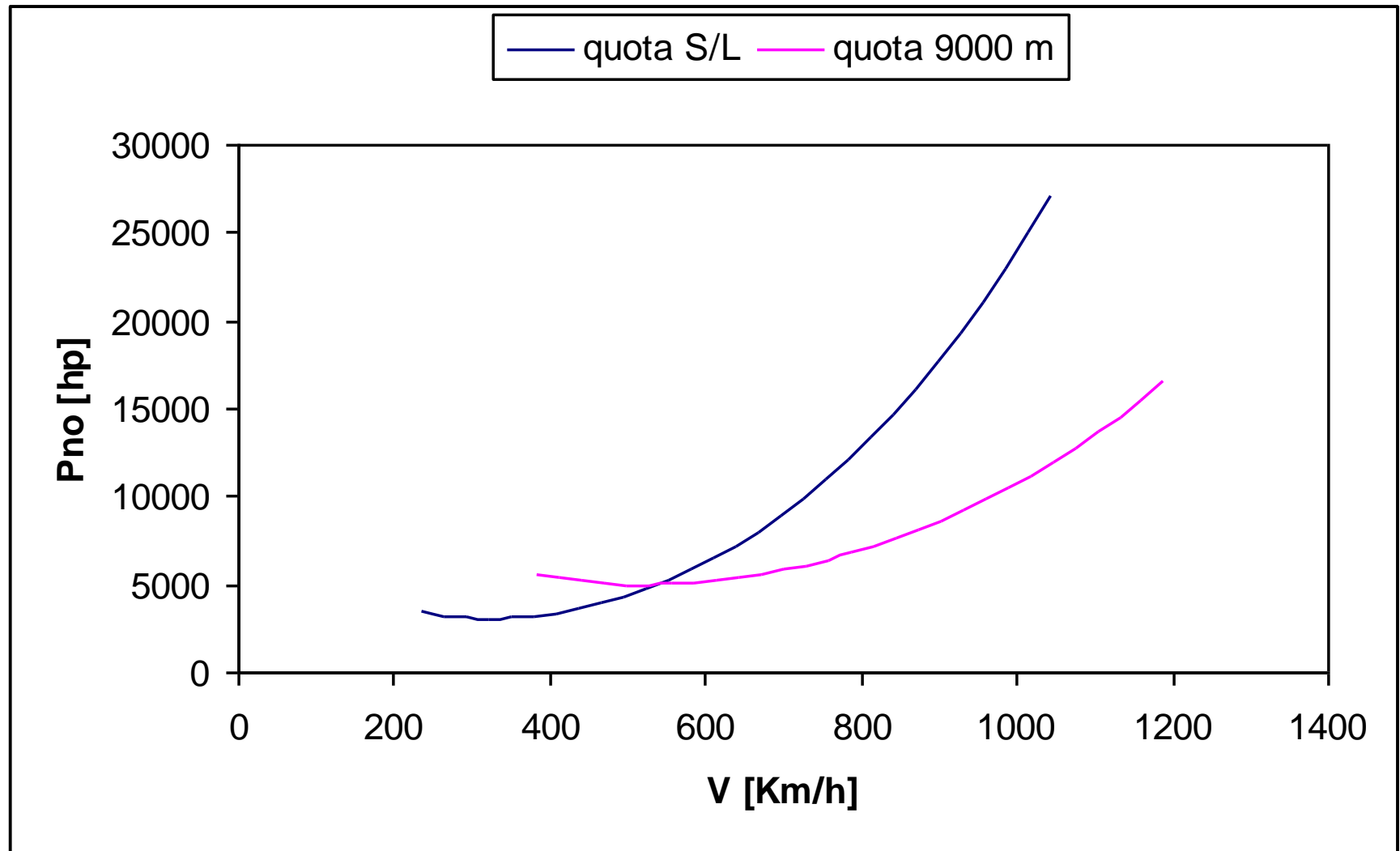
$$\Pi_{no} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o \sigma}} \cdot \sqrt{\frac{1}{S}} \cdot W^{3/2} \cdot \frac{CD}{CL^{3/2}}$$

$$\Pi_{no_MIN} = \sqrt{\frac{2}{\rho_o}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot W^{3/2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{CL^{3/2}}{CD} \right)_{MAX}}$$

$$\Pi_{no_MIN} \Rightarrow \left(\frac{CL^{3/2}}{CD} \right)_{MAX} = (E \cdot \sqrt{CL})_{MAX}$$

Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

PUNTO P – considerazioni grafiche



Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

PUNTO P – considerazioni grafiche

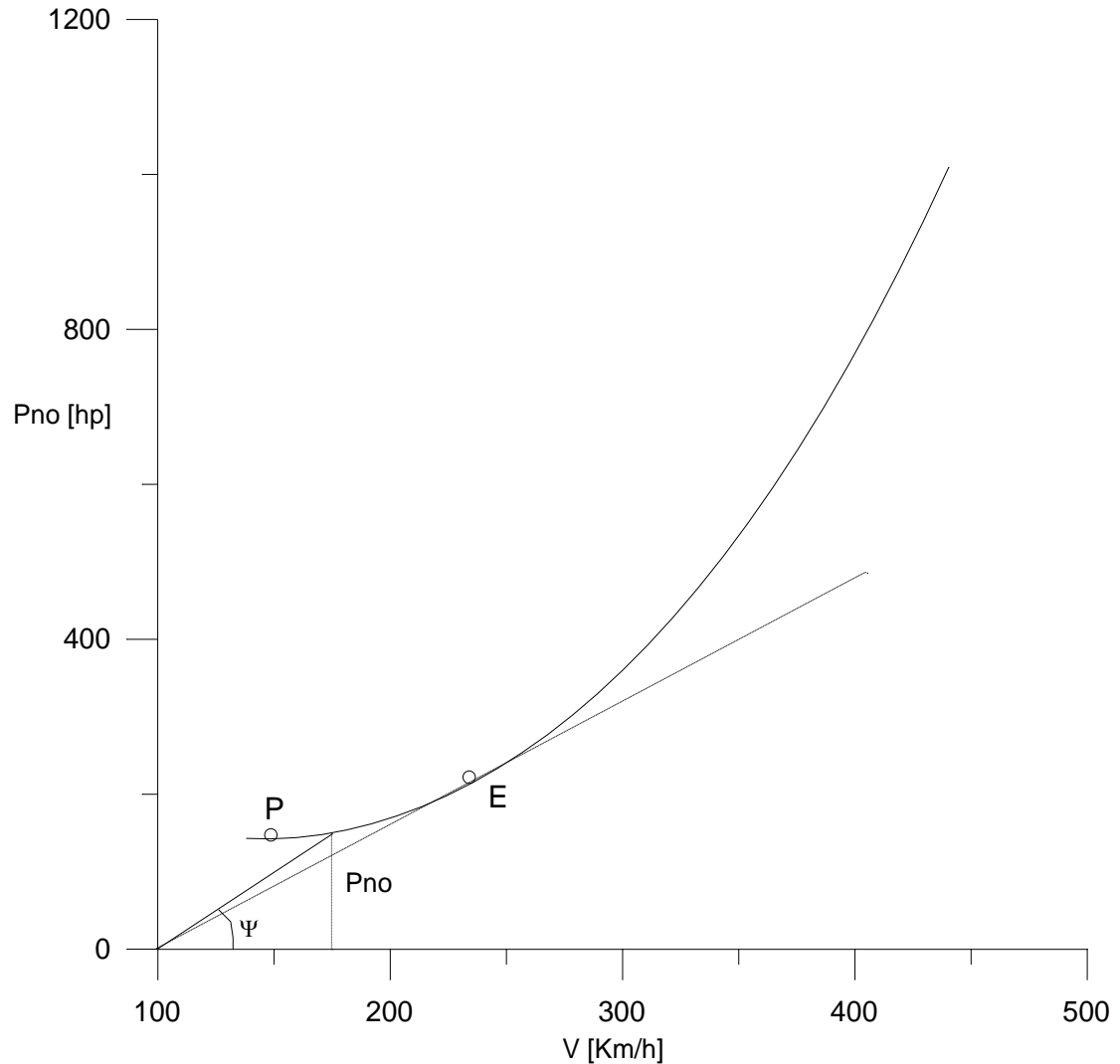
$$\Pi_{no} = V \cdot \tan \psi$$

$$\tan \psi = T_{no} = D$$

$$\psi_{MIN} = \text{ATAN}(D_{MIN}) = \text{ATAN}\left(\frac{W}{E_{MAX}}\right)$$

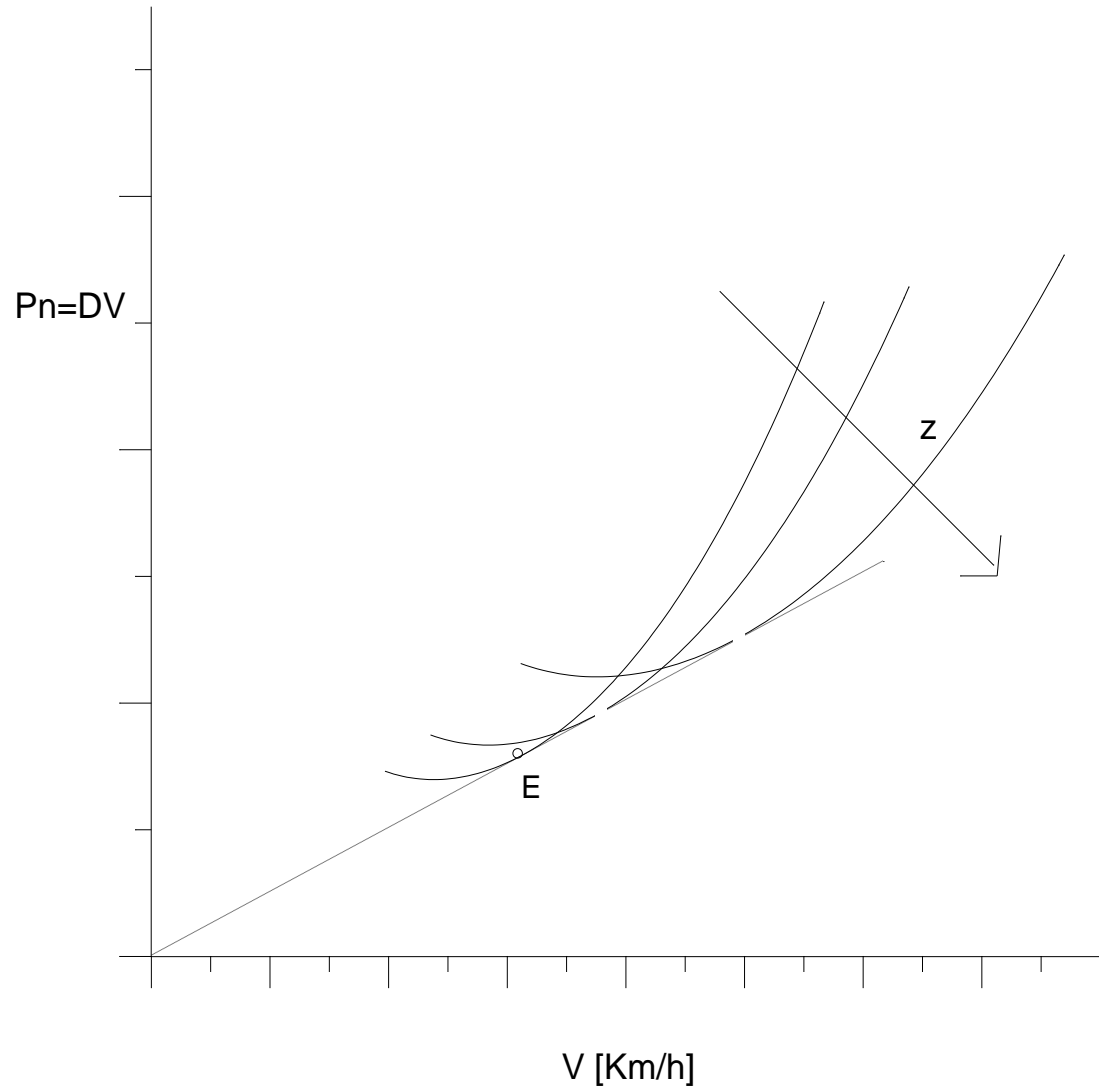
Pno [hp]

$$V_P = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1.32}$$



Polari tecniche – POTENZA RICHIESTA al volo livellato

PUNTO P – considerazioni grafiche

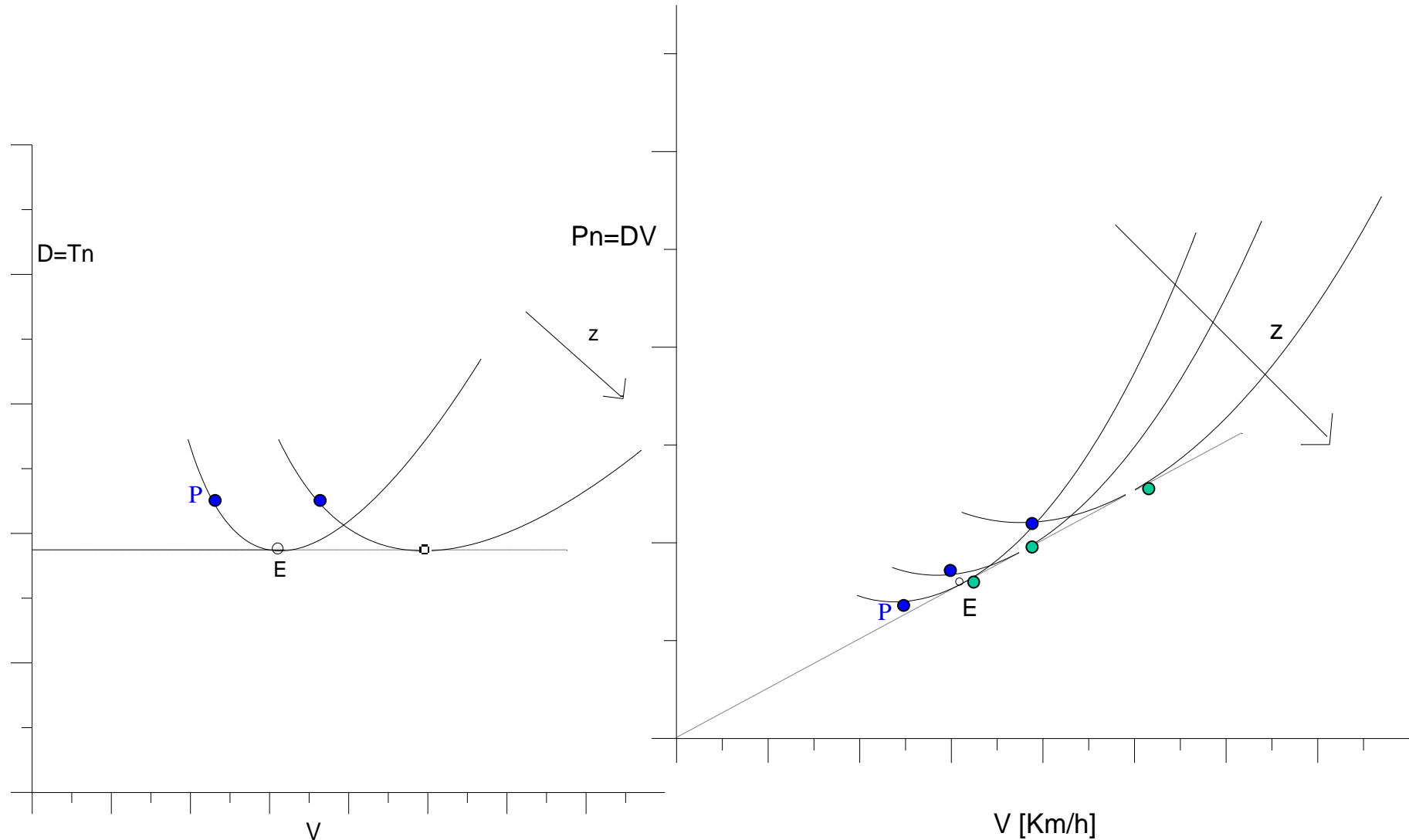


Polari tecniche

PUNTO E : Max Efficienza - Minima resistenza volo livellato

PUNTO P : Min. Potenza volo livellato $(\Pi_{no})_{MIN} = (D \cdot V)_{MIN}$

$$\left(\frac{E}{V}\right)_{MAX} \Rightarrow (E \cdot \sqrt{CL})_{MAX}$$



Polari tecniche – Influenze Peso e CDo su Potenza necessaria

$$\Pi_{no} = \frac{1}{2} \rho \cdot CD_0 \cdot S \cdot V^3 + \frac{2}{\rho} \cdot S \cdot K \cdot \left(\frac{W}{S} \right)^2 \cdot \frac{1}{V}$$

con

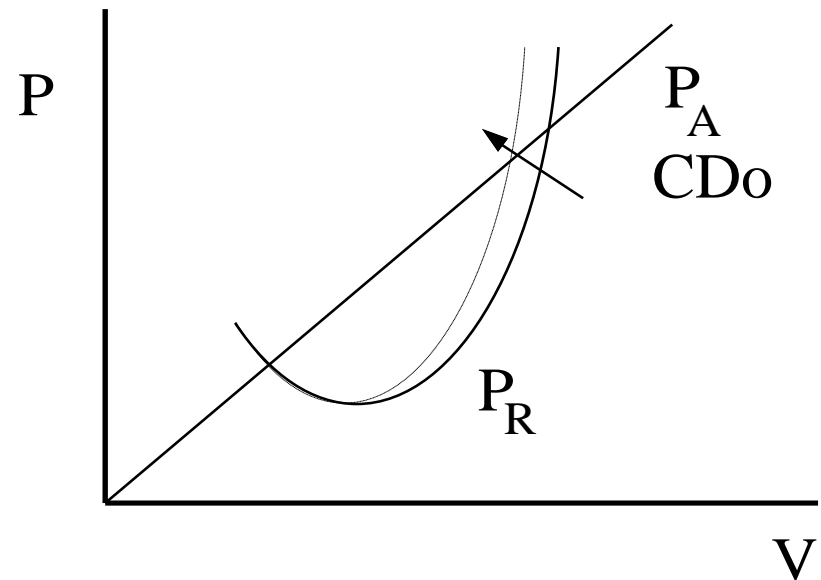
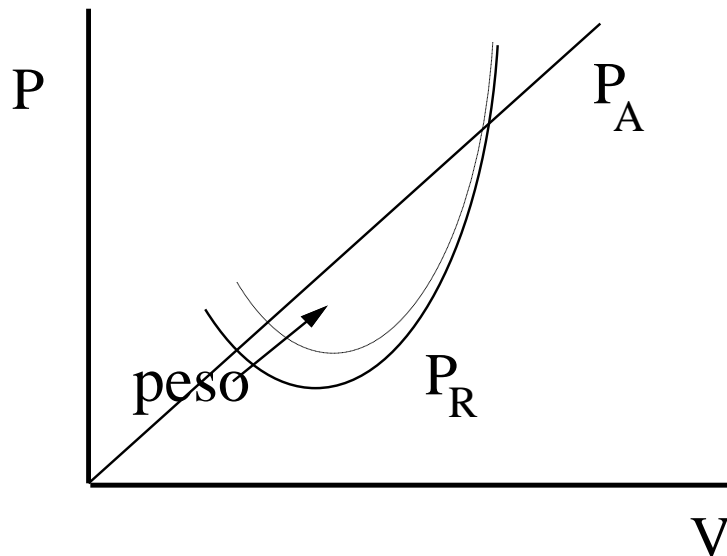
$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{CL}}$$

$$\Pi_{no} = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot CD_0 \cdot \frac{1}{CL^{3/2}} \cdot W^{3/2} + \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \cdot \frac{1}{\pi AR \cdot e} \sqrt{CL} \cdot W^{3/2}$$

$$\Pi_{no} = \left[\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \right] \cdot \left[\frac{CD_0}{CL^{3/2}} + \frac{\sqrt{CL}}{\pi AR \cdot e} \right] \cdot W^{3/2}$$

A parità di assetto (condizione di volo o CL) la potenza necessaria varia con $W^{3/2}$

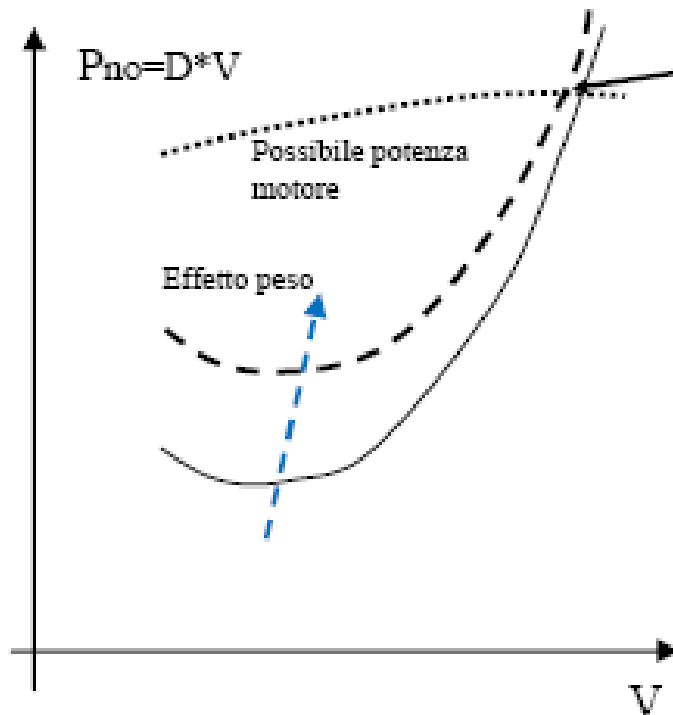
La velocità (vedi sopra) aumenta con la radice del peso W



Polari tecniche – Influenze Peso su Potenza necessaria

$$\Pi_{no} = \left[\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \right] \cdot \left[\frac{CD_0}{CL^{3/2}} + \frac{\sqrt{CL}}{\pi AR \cdot e} \right] \cdot W^{3/2}$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{CL}}$$



Per data potenza motore l'aumento di peso non compromette in modo forte le velocità di volo ottenibili. La variazione forte si ha alle basse velocità (si riduce fortemente il rateo di salita, cap. 8)

Tutte le velocità dei punti caratteristici si spostano a destra proporzionalmente alla radice del peso W .

La potenza minima aumenta proporzionalmente a $W^{(3/2)}$

Polari tecniche – Influenze CDo su Potenza necessaria

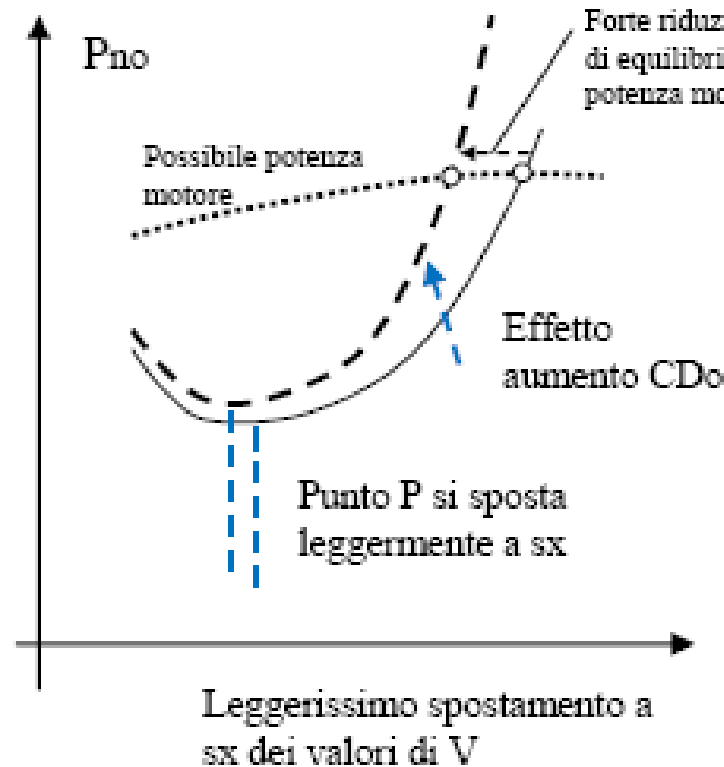
$$\Pi_{no} = \left[\sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{1}{\sqrt{S}} \right] \cdot \left[\frac{CD_0}{CL^{3/2}} + \frac{\sqrt{CL}}{\pi AR \cdot e} \right] \cdot W^{3/2}$$

$$V = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{CL}}$$

$$\Pi_{no} = \frac{1}{2} \rho \cdot CDo \cdot S \cdot V^3 + \frac{2}{\rho} \cdot S \cdot K \cdot \left(\frac{W}{S} \right)^2 \cdot \frac{1}{V}$$

$$CL_P = \sqrt{\frac{3 \cdot CDo}{K}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CDo}$$

$$V_P = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W}{S}} \sqrt{\frac{1}{CL_P}}$$

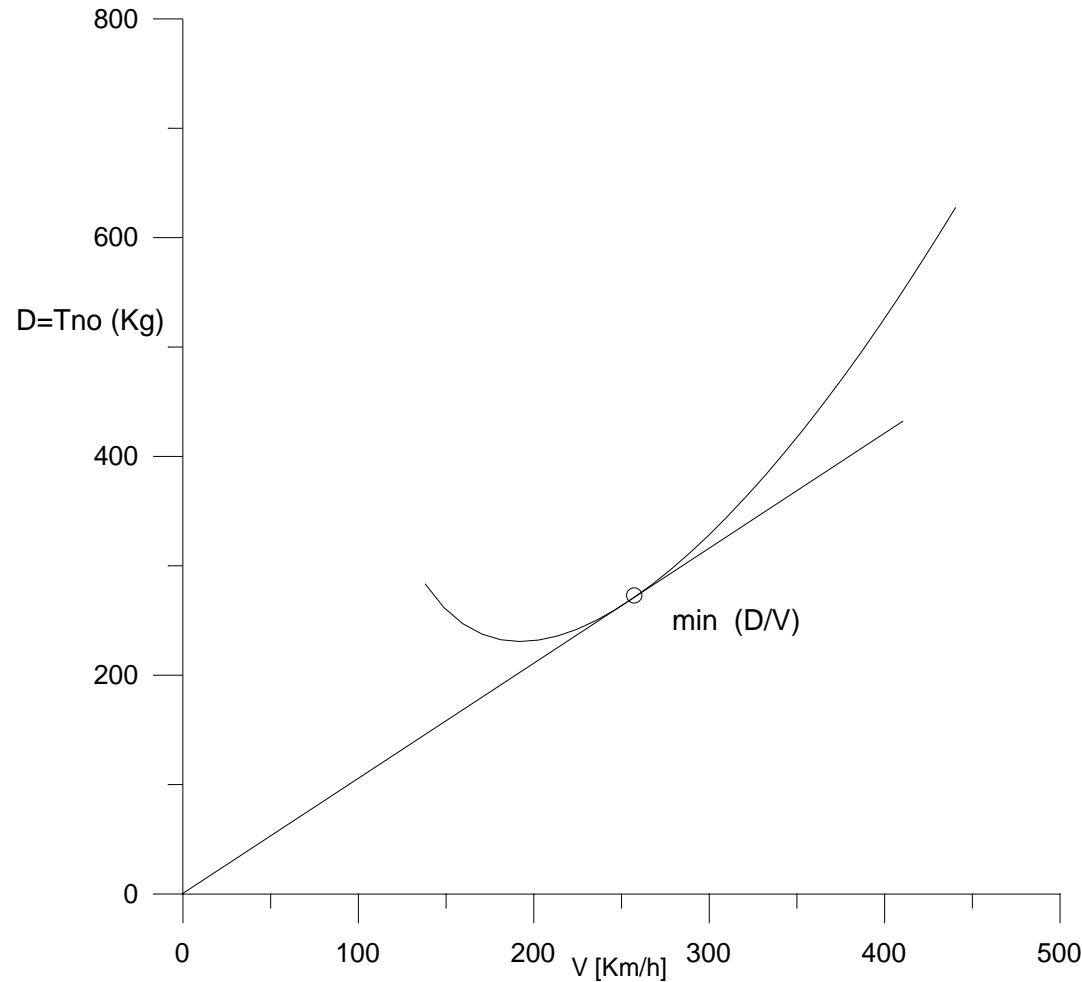


L'aumento del CDo si fa sentire soprattutto alle alte velocità sulla potenza necessaria al volo. Ovviamente non fa variare molto le velocità dei punti caratteristici (come prima) Per data potenza disponibile (ad esempio un velivolo ad elica) si vede come è drammatica la riduzione di velocità derivante da un aumento di CD_0 , ma non molto sensibile la riduzione dovuta ad aumento di peso. (vedi pagina precedente)

Spostamento di V di un punto caratteristico (ad esempio il punto P di minima potenza) sarà proporzionale alla radice quarta dell'aumento di CDo

Polari tecniche – PUNTO A

PUNTO A : $(E \cdot V)_{MAX} \Rightarrow \left(\frac{E}{\sqrt{CL}} \right)_{MAX} \Rightarrow \left(\frac{D}{V} \right)_{MIN}$



Polari tecniche – PUNTO A

PUNTO A: $(E \cdot V)_{MAX} \Rightarrow \left(\frac{E}{\sqrt{CL}} \right)_{MAX} \Rightarrow \left(\frac{D}{V} \right)_{MIN}$

$$T_{no} = D = a \cdot V^2 + \frac{b}{V^2}$$

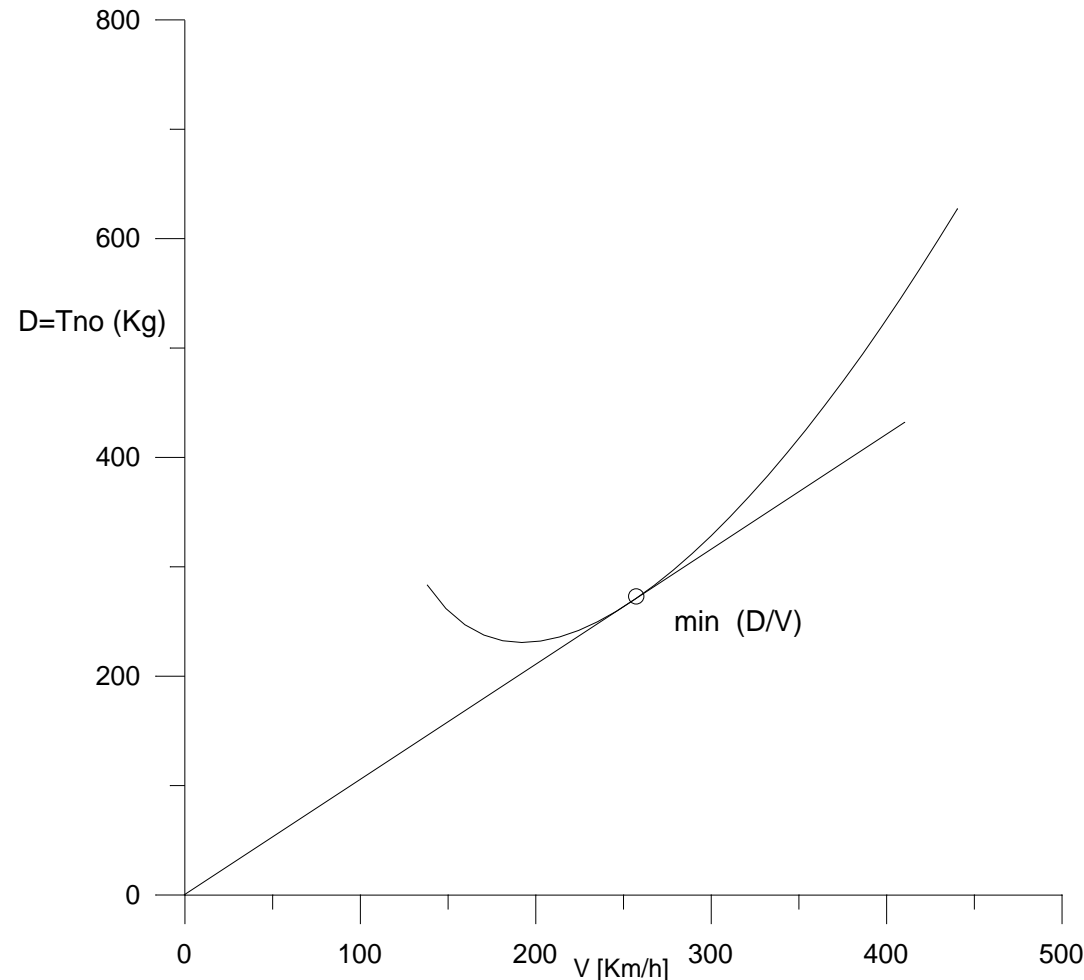
$$\frac{D}{V} = a \cdot V + \frac{b}{V^3}$$

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{D}{V} \right) = a - 3 \frac{b}{V^4} = 0$$

$$a = 3 \frac{b}{V^4} \quad a \cdot V^2 = 3 \cdot \frac{b}{V^2}$$

$Do = 3 Di$

$$CD_o = 3 \cdot CD_i = 3 \cdot K \cdot CL^2$$



Polari tecniche – PUNTO A

$$CD_0 = 3 \cdot CD_i = 3 \cdot K \cdot CL^2$$

$$CD_i = \frac{1}{3} \cdot CD_0$$

$$CD = CD_0 + CD_i = \frac{4}{3} \cdot CD_0 \quad \longrightarrow \quad CD_A = \frac{4}{3} CD_0$$

$$CL_A = \sqrt{\frac{CD_0}{3 \cdot K}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CD_0}$$

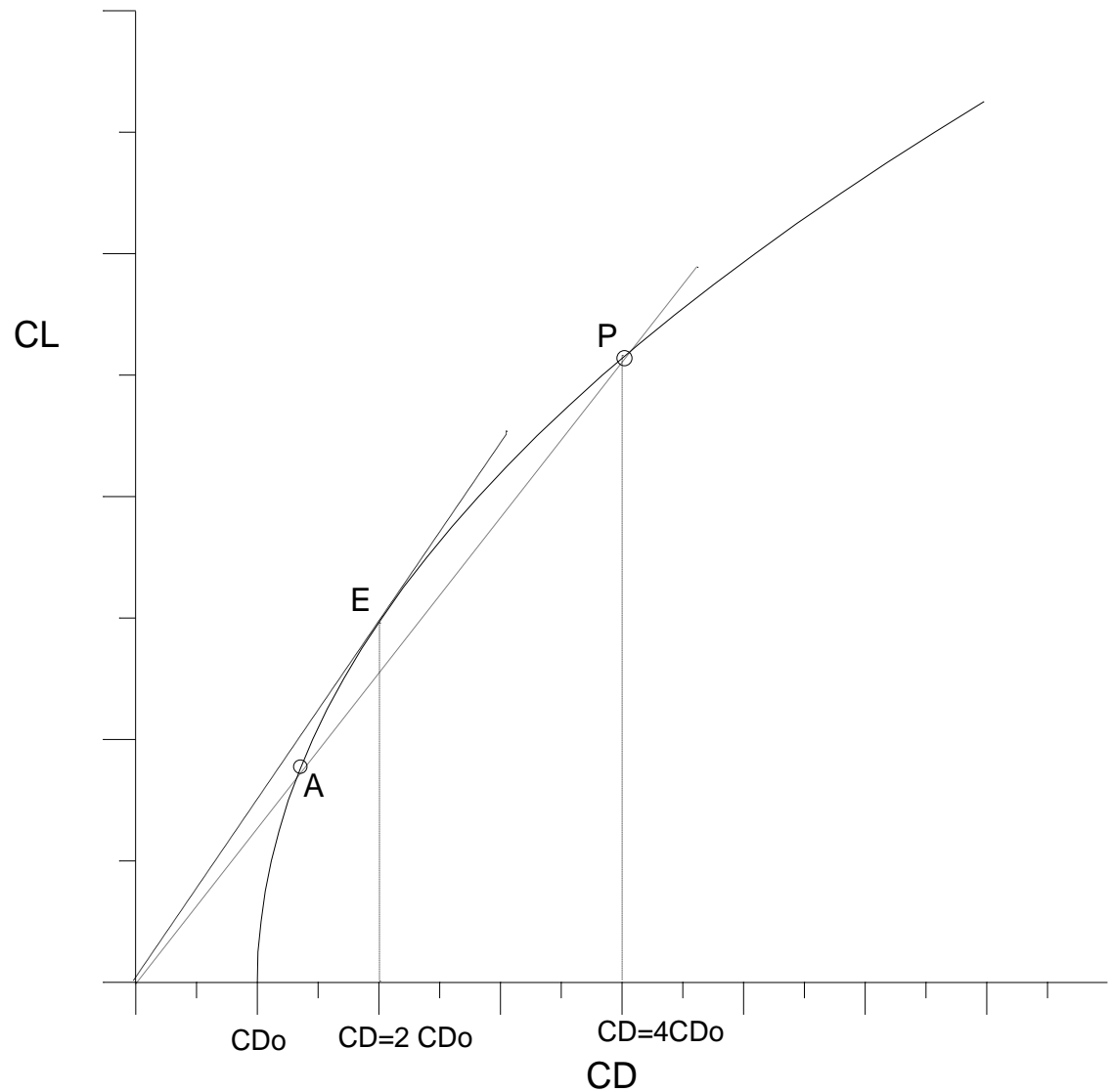
$$CL_A = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot CL_E = \frac{CL_E}{1.732}$$

$$E_A = \frac{CL_A}{CD_A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{CL_E}{CD_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{CL_E}{CD_E} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot E_{MAX}$$

$$V_A = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \cdot \sqrt{\frac{1}{CL_A}} = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \sqrt{\frac{W}{S}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{CL_E}} = \sqrt[4]{3} \cdot V_E = 1.32 V_E$$

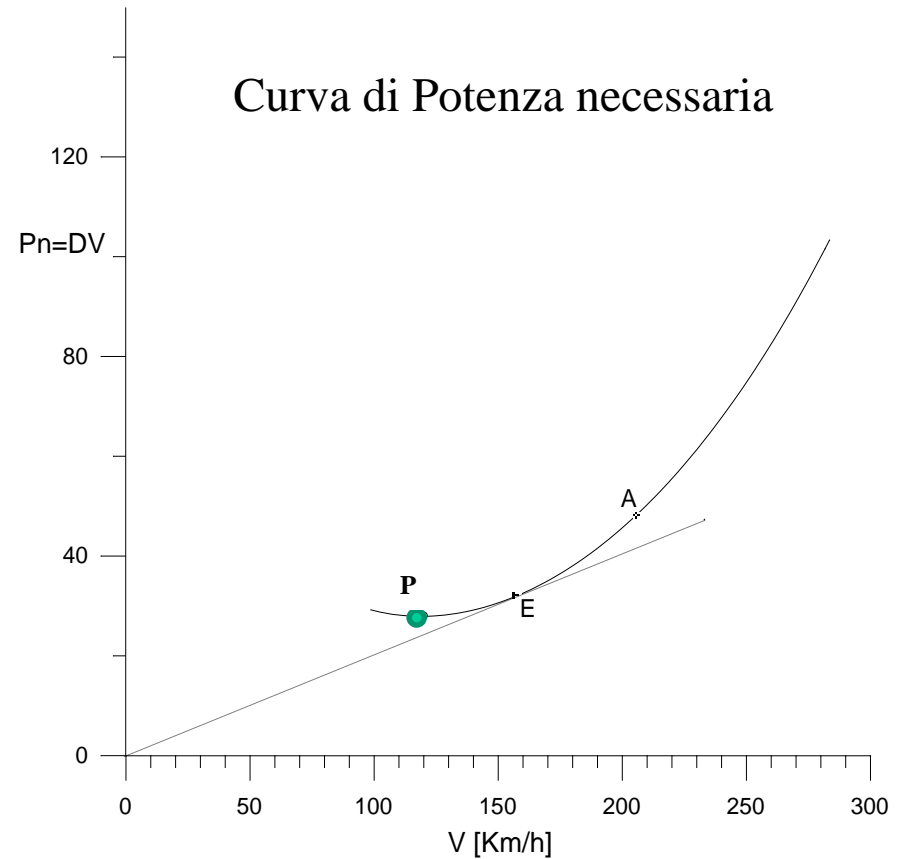
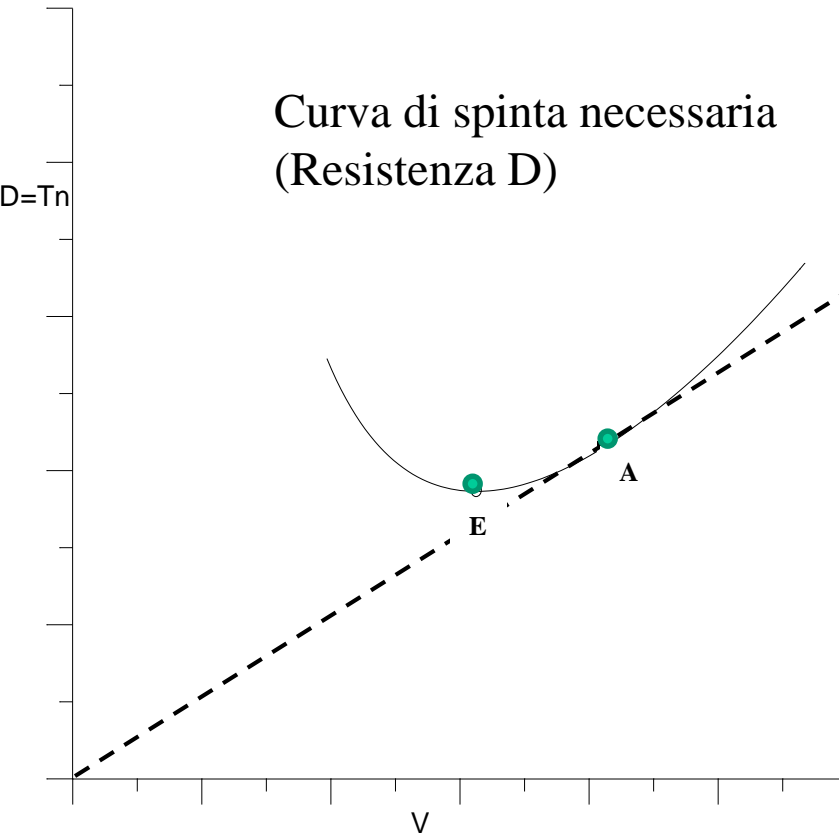
Polari tecniche – PUNTO A

Punti A e P
 \Rightarrow stessa Efficienza



Polari tecniche – PUNTO A

$$V_A = 1.32 V_E$$



Polare Parabolica – APPROCCIO ANALITICO

PUNTO E

$$\frac{L}{D} = \frac{C_L}{C_D} = \frac{C_L}{C_{D0} + KC_L^2} \quad \frac{L}{D} = E \quad \longrightarrow \quad E = E_{MAX} \quad \text{se}$$

$$\frac{d(C_L / C_D)}{dC_L} = \frac{C_{D0} + KC_L^2 - C_L (2KC_L)}{(C_{D0} + KC_L^2)^2} = 0$$

$$C_{D0} + KC_L^2 - 2KC_L^2 = 0$$

$$C_{D0} = KC_L^2$$

$$C_L = C_{LE} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}} = \sqrt{C_{D0} \pi A Re} \quad K = \frac{1}{\pi A Re}$$

$$\left(\frac{L}{D}\right)_{\max} = \left(\frac{C_L}{C_{D0} + KC_L^2}\right)_{\max} = \frac{\sqrt{C_{D0} / K}}{C_{D0} + C_{D0}} = \frac{\sqrt{C_{D0} / K}}{2C_{D0}}$$

Polare Parabolica – APPROCCIO ANALITICO

PUNTO E

$$L = W = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L$$

$$W = \frac{1}{2} \rho V_{(L/D)_{\max}}^2 S \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}$$

$$\frac{W}{S} = \frac{1}{2} \rho V_{(L/D)_{\max}}^2 \sqrt{\frac{C_{D0}}{K}}$$

$$V_{(L/D)_{\max}} = \left(\frac{2}{\rho} \sqrt{\frac{K}{C_{D0}}} \frac{W}{S} \right)^{1/2}$$

$$V_E = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{W}{S} \frac{1}{C_{L_E}}}$$

Polare Parabolica – APPROCCIO ANALITICO

PUNTO P $P = D \cdot V \Rightarrow P_{\text{MIN}} \Rightarrow (D \cdot V)_{\text{MIN}} = \left(\frac{W}{E} \cdot V \right)_{\text{MIN}} \Rightarrow \left(\frac{W}{E} \cdot \frac{1}{\sqrt{C_L}} \right)_{\text{MIN}}$

$$(E \cdot \sqrt{C_L})_{\text{MAX}} \Rightarrow \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D} \right)_{\text{MAX}} = \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_{D0} + KC_L^2} \right)_{\text{MAX}}$$

$$\frac{d(C_L^{3/2} / C_D)}{dC_L} = \frac{(C_{D0} + KC_L^2) \left(\frac{3}{2} C_L^{1/2} \right) - C_L^{3/2} (2KC_L)}{C_{D0} + KC_L^2} = 0$$

$$\frac{3}{2} C_{D0} + KC_L^{1/2} + \frac{3}{2} KC_L^{5/2} - 2KC_L^{5/2} = 0 \quad C_{D0} = \frac{1}{3} KC_L^2$$

$$C_L = C_{L_P} = \sqrt{3C_{D0} / K} = \sqrt{3C_{L_E}}$$

$$\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D} \right)_{\text{max}} = \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_{D0} + KC_L^2} \right)_{\text{max}} = \frac{(3C_{D0} / K)^{3/4}}{C_{D0} + 3C_{D0}} = \frac{1}{4C_{D0}} \left(\frac{3C_{D0}}{K} \right)^{3/4}$$

Polare Parabolica – APPROCCIO ANALITICO

PUNTO P

$$\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D} \right)_{\max} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{K C_{D0}^{1/3}} \right)^{3/4}$$

$$L = W - \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L$$

$$W = \frac{1}{2} \rho V_{(C_L^{3/2} / C_D)_{\max}} S \sqrt{\frac{3 C_{D0}}{K}}$$

$$V_{(C_L^{3/2} / C_D)_{\max}} = \left(\frac{2}{\rho} \sqrt{\frac{K}{3 C_{D0}}} \frac{W}{S} \right)^{1/2}$$

$$V_{(C_L^{3/2} / C_D)_{\max}} = 0.76 V_{(L/D)_{\max}} = \frac{V_E}{1.32}$$

Polare Parabolica – APPROCCIO ANALITICO

PUNTO A

$$\left(\frac{D}{V}\right)_{MIN} = \left(\frac{W}{E} \cdot \frac{1}{V}\right)_{MIN} \Rightarrow \left(\frac{W}{E} \cdot \sqrt{C_L}\right)_{MIN}$$

$$\left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{MAX} \Rightarrow \left(\frac{C_L^{1/2}}{C_D}\right)_{MAX} = \left(\frac{C_L^{1/2}}{C_{D0} + KC_L^2}\right)_{MAX}$$

$$\frac{d(C_L^{1/2} / C_D)}{dC_L} = \frac{(C_{D0} + KC_L^2) \left(\frac{1}{2} C_L^{-1/2}\right) - C_L^{1/2} (2KC_L)}{C_{D0} + KC_L^2} = 0 \quad C_{D0} = 3KC_L^2$$

$$\left(\frac{C_L^{1/2}}{C_{D0}}\right)_{max} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3KC_{D0}^3}\right)^{1/4}$$

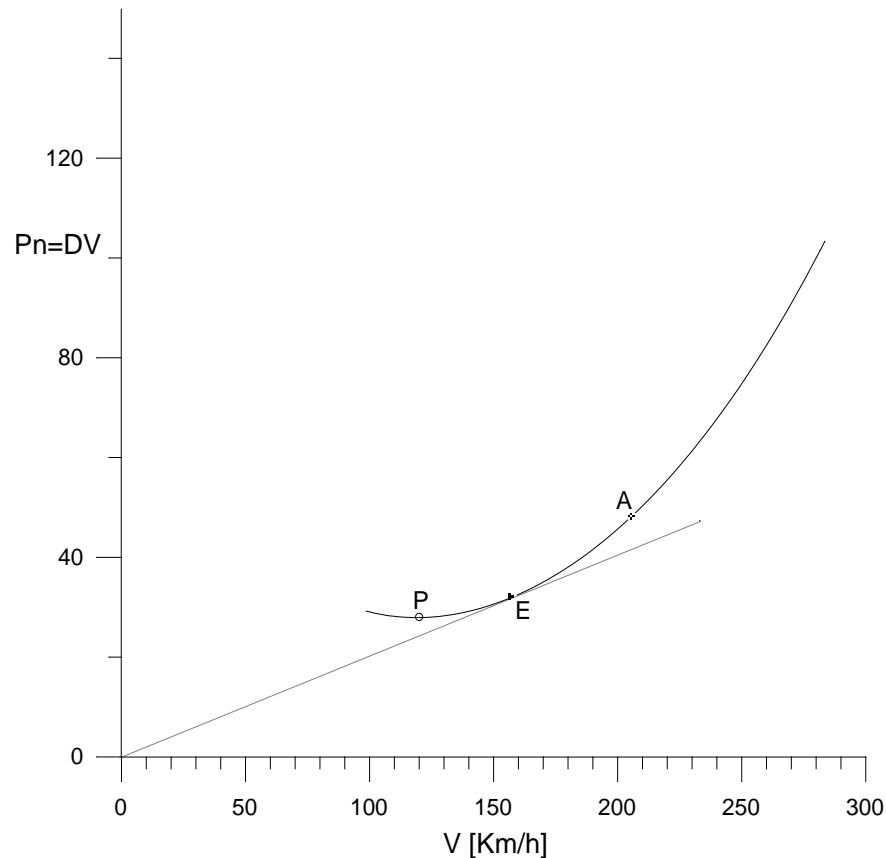
$$V_{(C_L^{1/2} / C_D)_{max}} = \left(\frac{2}{\rho} \sqrt{\frac{3K}{C_{D0}}} \frac{W}{S}\right)^{1/2}$$

$$V_{(C_L^{1/2} / C_D)_{max}} = 1.32 V_{(L/D)_{max}}$$

Polare Parabolica – APPROCCIO ANALITICO

$$V_{(C_L^{3/2} / C_D)_{\max}} < V_{(C_L / C_D)_{\max}} < V_{(C_L^{1/2} / C_D)_{\max}}$$

$$V_P < V_E < V_A$$

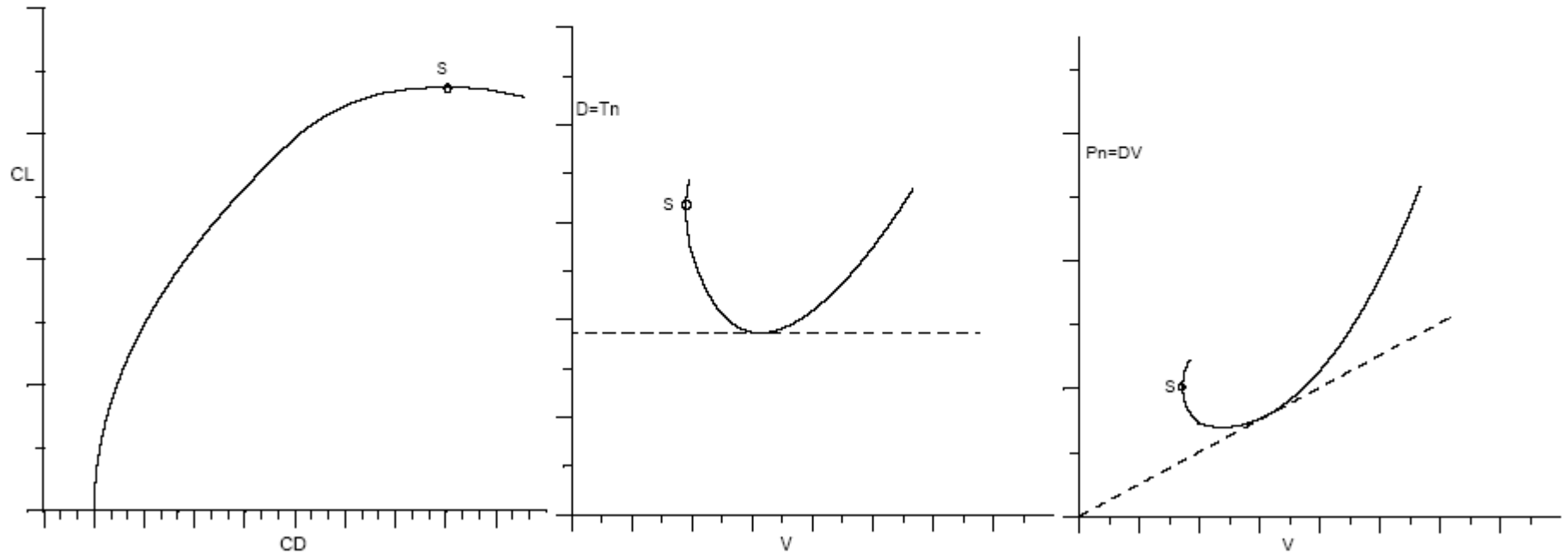


Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

Punto S

Stallo

Corrisponde a $C_L = C_{L_{\max}} \Rightarrow V = V_S = V_{\min}$



Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

Punto E

Massima efficienza

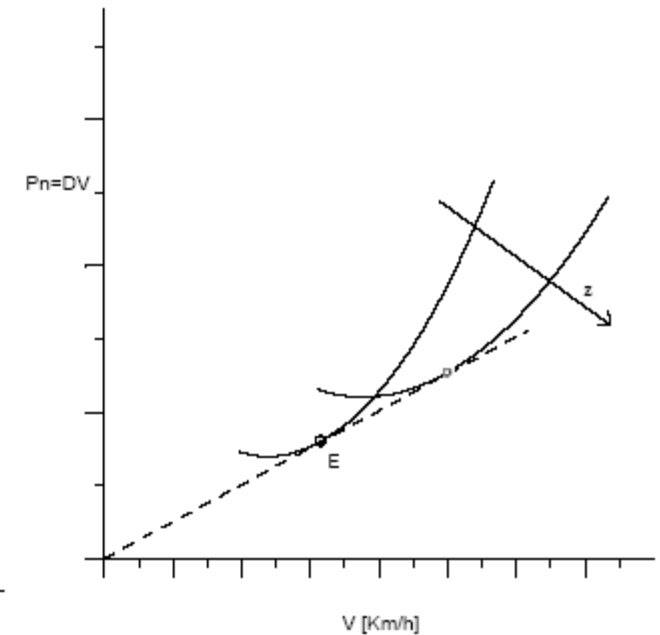
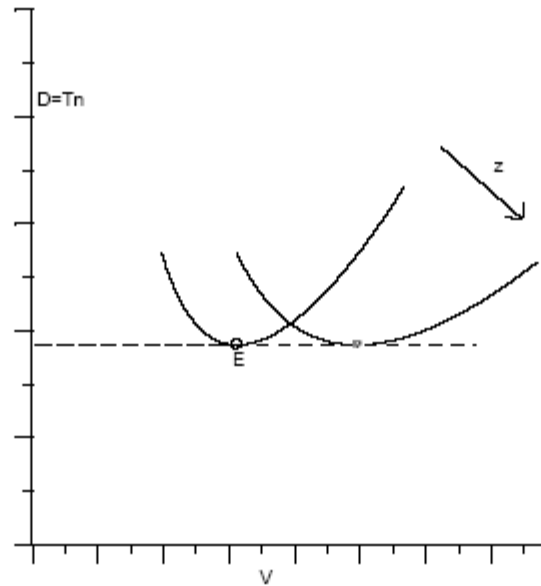
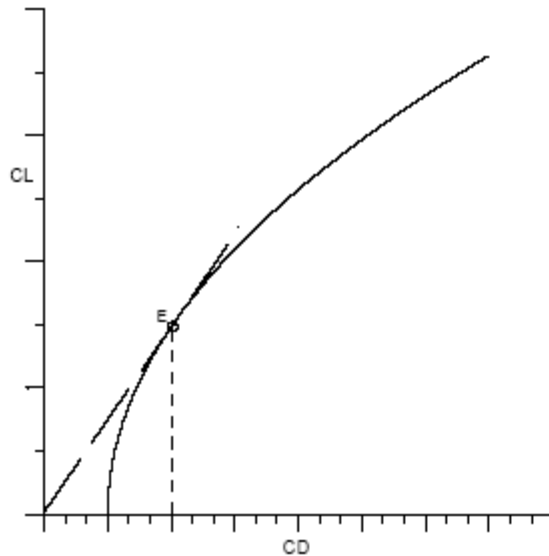
$$D_{\min} \Rightarrow E_{\max}$$

$$C_{Di}=C_{Do} \Rightarrow C_D=2 C_{Do}$$

$$C_{LE} = \sqrt{\pi AR_e C_{Do}}$$

$$E_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\pi AR_e}{4 C_{Do}}\right)} = \sqrt{\left(\frac{\pi b_e^2}{4 f}\right)}$$

$$V_E = \sqrt{\frac{2 W}{\rho S C_{LE}}}$$



Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

Punto P

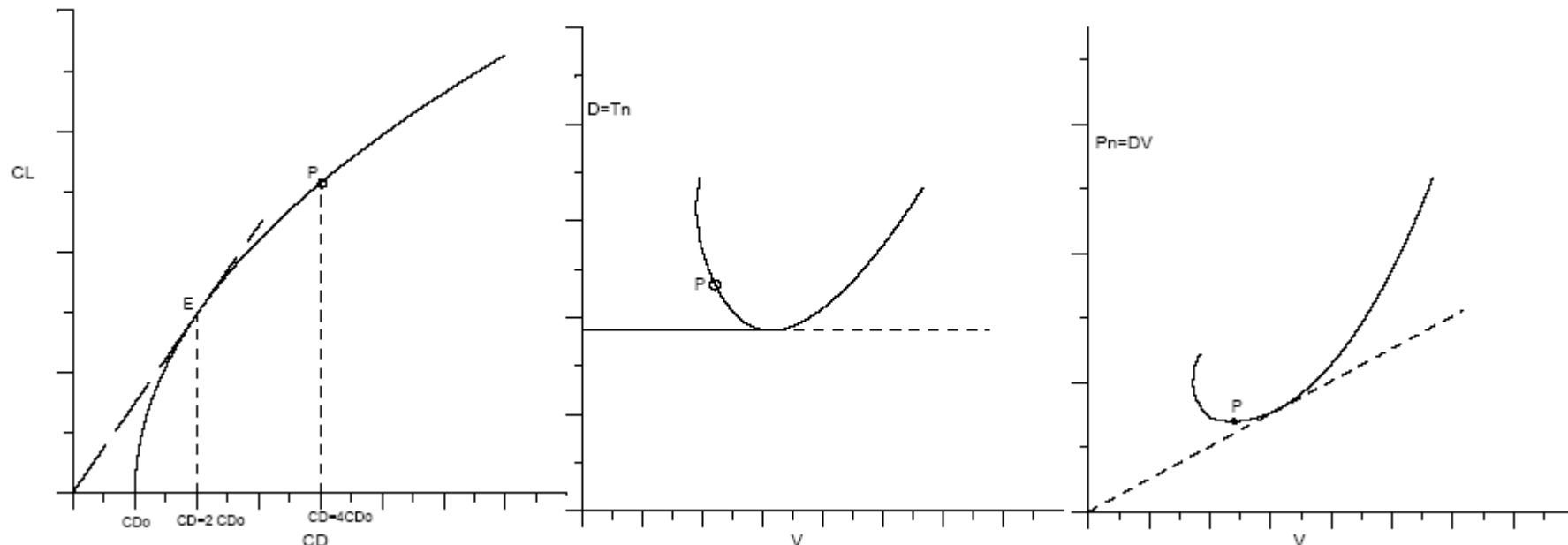
$$\Pi_{\min} = (T_{\text{no}} V)_{\min} \Rightarrow (C_D V^3)_{\min} \Rightarrow \left(\frac{C_D}{C_L} \frac{1}{\sqrt{C_L}} \right)_{\min} \Rightarrow (E \sqrt{C_L})_{\max}$$

$$\text{si ha : } \Pi = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{W^3}{S}} \frac{C_D}{C_L^{3/2}}$$

$$D_i = 3 D_o \quad \text{cioè } C_{Di} = 3 C_{Do} \quad C_D = 4 C_{Do}$$

$$\Pi_{\min} \Rightarrow \left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D} \right)_{\max} \Rightarrow (E \sqrt{C_L})_{\max}$$

$$C_{LP} = \sqrt{3 \pi A R_e C_{Do}} = \sqrt{3} C_{LE} = 1.732 C_{LE}$$



Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

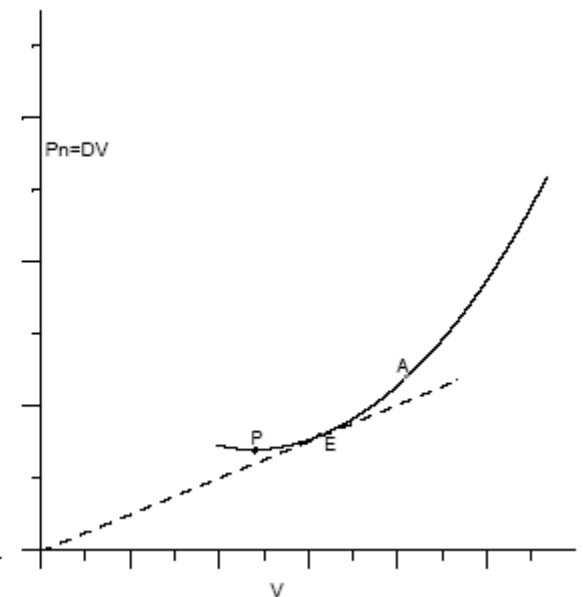
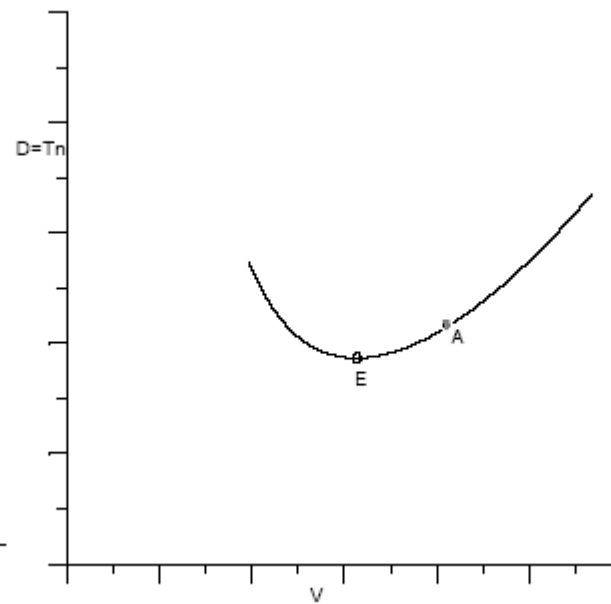
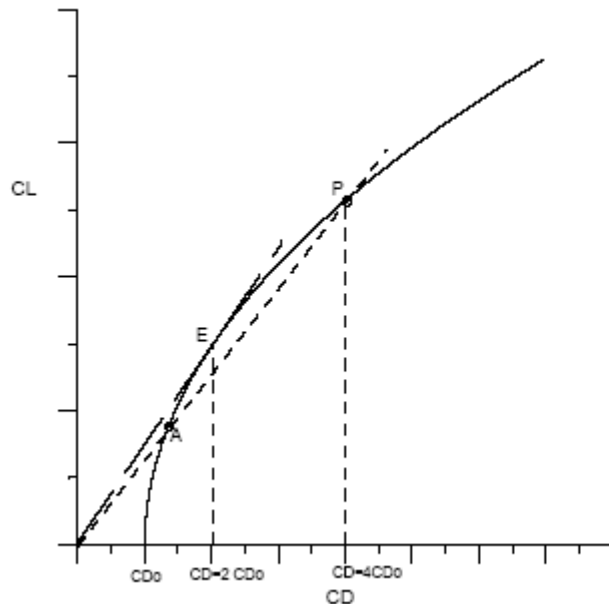
Punto A

$$\left(\frac{T}{V}\right)_{\min} \Rightarrow (C_D V)_{\min} \Rightarrow \left(C_D \frac{1}{\sqrt{C_L}}\right)_{\min} \Rightarrow \left(\frac{E}{\sqrt{C_L}}\right)_{\max}$$

$$D_i = \frac{D_o}{3} \quad C_{Di} = \frac{C_{Do}}{3} \quad C_{DA} = C_{Do} + \frac{C_{Do}}{3} = \frac{4}{3} C_{Do}$$

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi AR_e} = \frac{C_{Do}}{3}$$

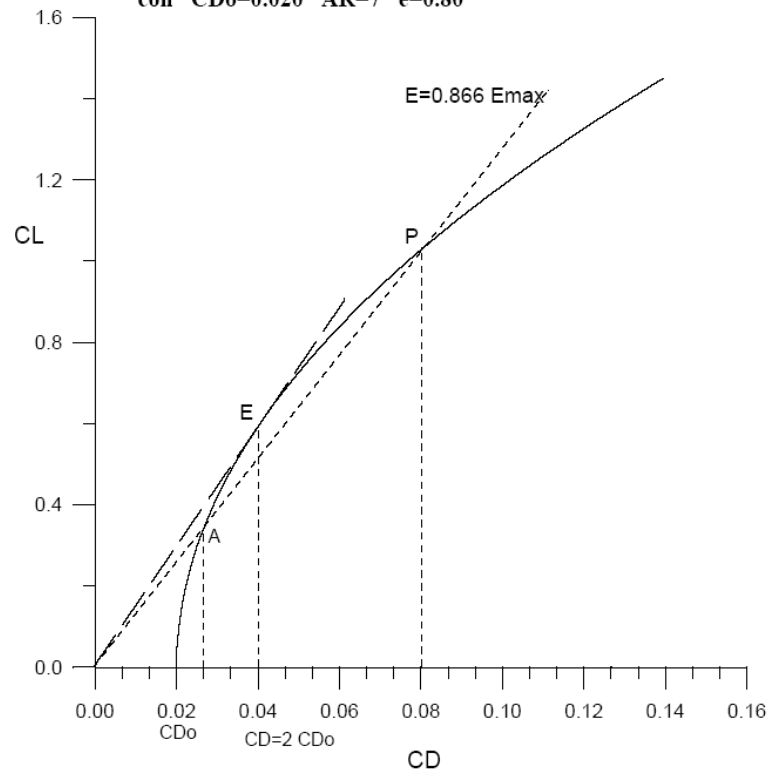
$$C_{LA} = \sqrt{\frac{\pi}{3} C_{Do} AR_e} = \frac{C_{LE}}{\sqrt{3}} = 0.577 C_{LE}$$



Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

PUNTO	Efficienza CL/CD	C_L	C_D
A	$E = \sqrt{\frac{3}{4}} E_{\max} = 0.866 E_{\max}$	$C_{LA} = \frac{C_{LE}}{\sqrt{3}} = 0.577 C_{LE}$	$C_{DA} = C_{Do} + \frac{1}{3} C_{Do} = \frac{4}{3} C_{Do}$
E	$E = E_{\max} = \sqrt{\frac{\pi AR_e}{4 C_{Do}}}$	$C_{LE} = \sqrt{\pi AR_e C_{Do}}$	$C_{DE} = C_{Do} + C_{Do} = 2 C_{Do}$
P	$E = \sqrt{\frac{3}{4}} E_{\max} = 0.866 E_{\max}$	$C_{LP} = \sqrt{3} C_{LE} = 1.732 C_{LE}$	$C_{DP} = C_{Do} + 3 C_{Do} = 4 C_{Do}$

Esempio di polare parabolica $CD = C_{Do} + C_L^2 / (\pi AR_e)$
con $C_{Do} = 0.020$ $AR = 7$ $e = 0.80$



Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

RELAZIONI DA CONSIDERARE:

$$V_P = \frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} = \frac{V_E}{1.32}$$

$$V_A = \sqrt[4]{3} \cdot V_E = 1.32 \cdot V_E$$

$$D_{\text{MIN}} = D_E = \frac{W}{E_{\text{MAX}}}$$

$$E_A = E_P = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot E_E = 0.866 \cdot E_E$$

$$D_A = D_P = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot D_E = \frac{D_E}{0.866} = 1.155 \cdot D_E$$

$$\Pi_P = \Pi_{\text{MIN}} = \frac{W}{E_P} \cdot V_P =$$

$$\Pi_P = D_P \cdot V_P = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot D_E \right) \cdot \left(\frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt[4]{27}} \cdot \Pi_E = \frac{\Pi_E}{1.14}$$

$$\Pi_E = \frac{W}{E_E} \cdot V_E = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{W}{E_P} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot V_P = \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \cdot \Pi_P = 1.14 \cdot \Pi_P$$

$$\Pi_E = 1.14 \cdot \Pi_P$$

$$\Pi_A = \frac{W}{E_A} \cdot V_A = \frac{W}{E_P} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot V_P = \sqrt{3} \cdot \Pi_P = 1.732 \cdot \Pi_P$$

$$\Pi_A = 1.732 \cdot \Pi_P$$

Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

Relazioni tra le potenze necessarie al volo nei 3 punti caratteristici

$$\Pi_P = D_P \cdot V_P = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot D_E \right) \cdot \left(\frac{V_E}{\sqrt[4]{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt[4]{27}} \cdot \Pi_E = \frac{\Pi_E}{1.14}$$

$$\Pi_A = D_A \cdot V_A = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot D_E \right) \cdot (\sqrt[4]{3} \cdot V_E) = 1.52 \cdot \Pi_E$$

Quindi , rispetto al valore minimo (punto P), ad una certa quota:

$$\Pi_E = 1.14 \cdot \Pi_P$$

$$\Pi_A = D_A \cdot V_A = (D_P) \cdot (\sqrt[4]{3} \cdot V_E) = (D_P) \cdot (\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot V_P) = \sqrt{3} \cdot \Pi_P = 1.73 \cdot \Pi_P$$

$$\Pi_A = 1.73 \cdot \Pi_P$$

...Vedi tabella riepilogativa pagina successiva

Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

TABELLA RIEPILOGATIVA :

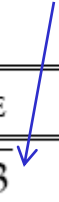
$$E_{MAX} = \sqrt{\frac{\pi AR \cdot e}{4 CD_0}}$$

$$CL_E = \sqrt{\pi \cdot AR \cdot e \cdot CD_0}$$

$$D_{MIN} = \frac{W}{E_{MAX}}$$

$$\Pi_{MIN} = \Pi_P = \frac{W}{E_P} \cdot V_P$$

1.155



Punto	CD/CD ₀	CL/CL _E	E/E _{MAX}	V/V _E	T/T _E	Π/Π _P
P	4	$\sqrt{3}=1.732$	$\sqrt{3}/2 = 0.866$	$1/\sqrt[4]{3}=1/1.32$	$2/\sqrt{3}$	1
E	2	1	1	1	1	$\sqrt[4]{27}/2=1.14$
A	4/3	$1/\sqrt{3}=0.577$	$\sqrt{3}/2 = 0.866$	$\sqrt[4]{3}=1.32$	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}=1.73$

Polare Parabolica – PUNTI CARATTERISTICI

