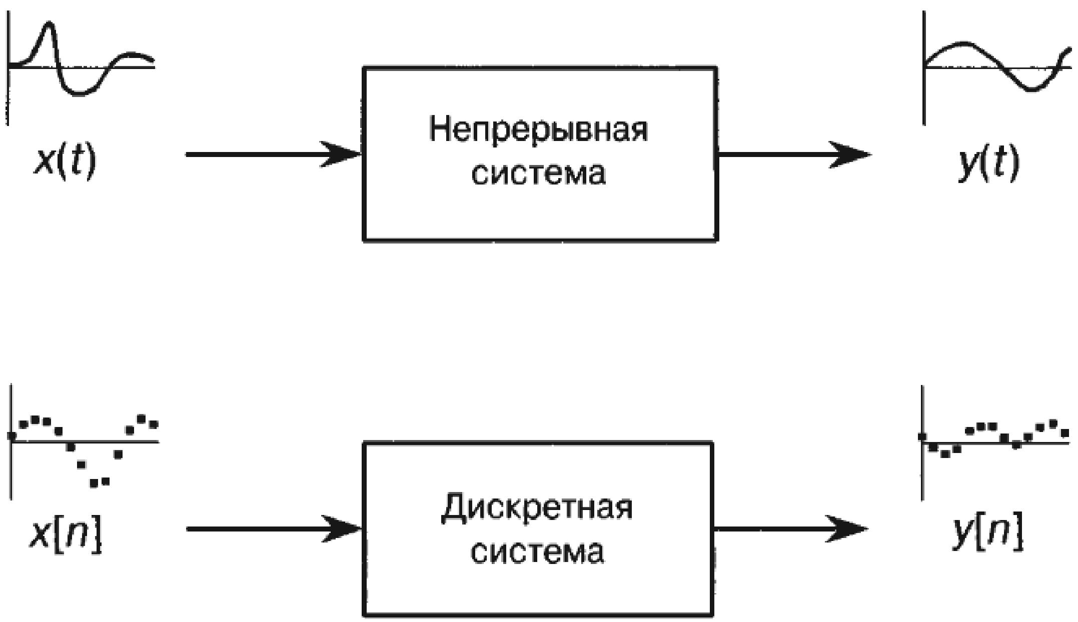
12.04.2018

Вычислительные модели с использованием научных библиотек Python

Спектральный анализ, фильтрация, обработка аудио

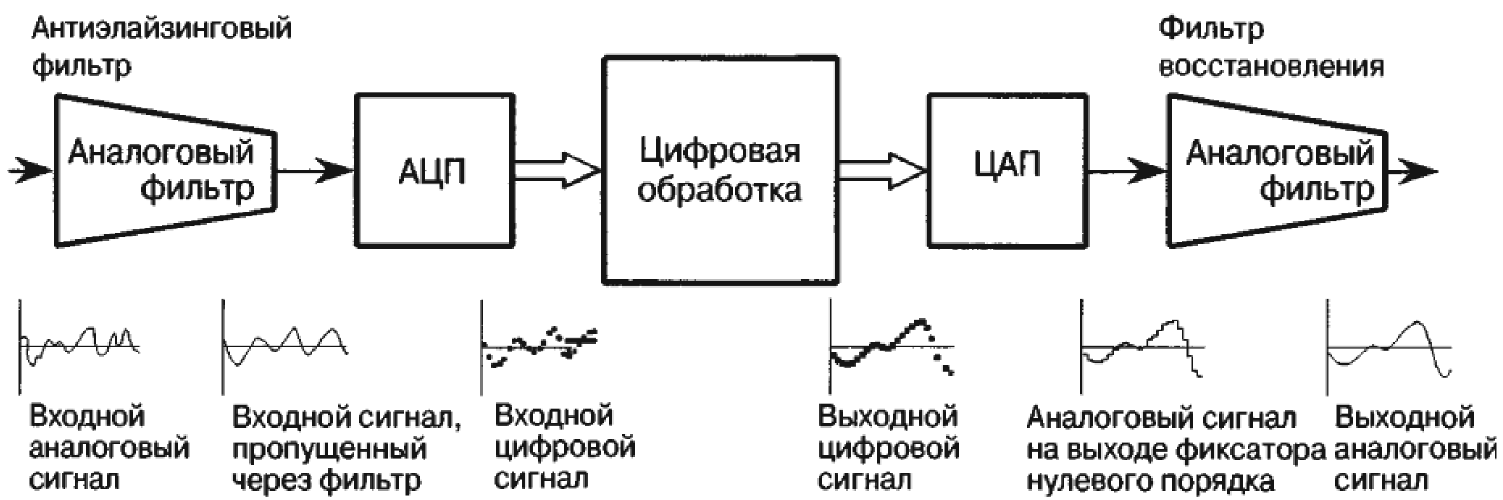
Определение

Сигнал – зависимость одной величины от другой (функция). Например, зависимость давления воздуха в точке от времени можно рассматривать как звуковой сигнал. Зависимость напряжения в проводнике от времени тоже может представлять звуковой сигнал. Зависимость яркости точки на плоскости от ее координат можно рассматривать как черно-белое изображение.



Преобразование сигналов

Теорема Котельникова (Найквиста, Шеннона): если сигнал таков, что его спектр ограничен частотой F, то после дискретизации сигнала с частотой не менее $2F$ можно восстановить исходный непрерывный сигнал по полученному цифровому сигналу абсолютно точно. Для этого нужно проинтерполировать цифровой сигнал «между отсчетами» специального вида функциями (sinc-функциями).



Свертка

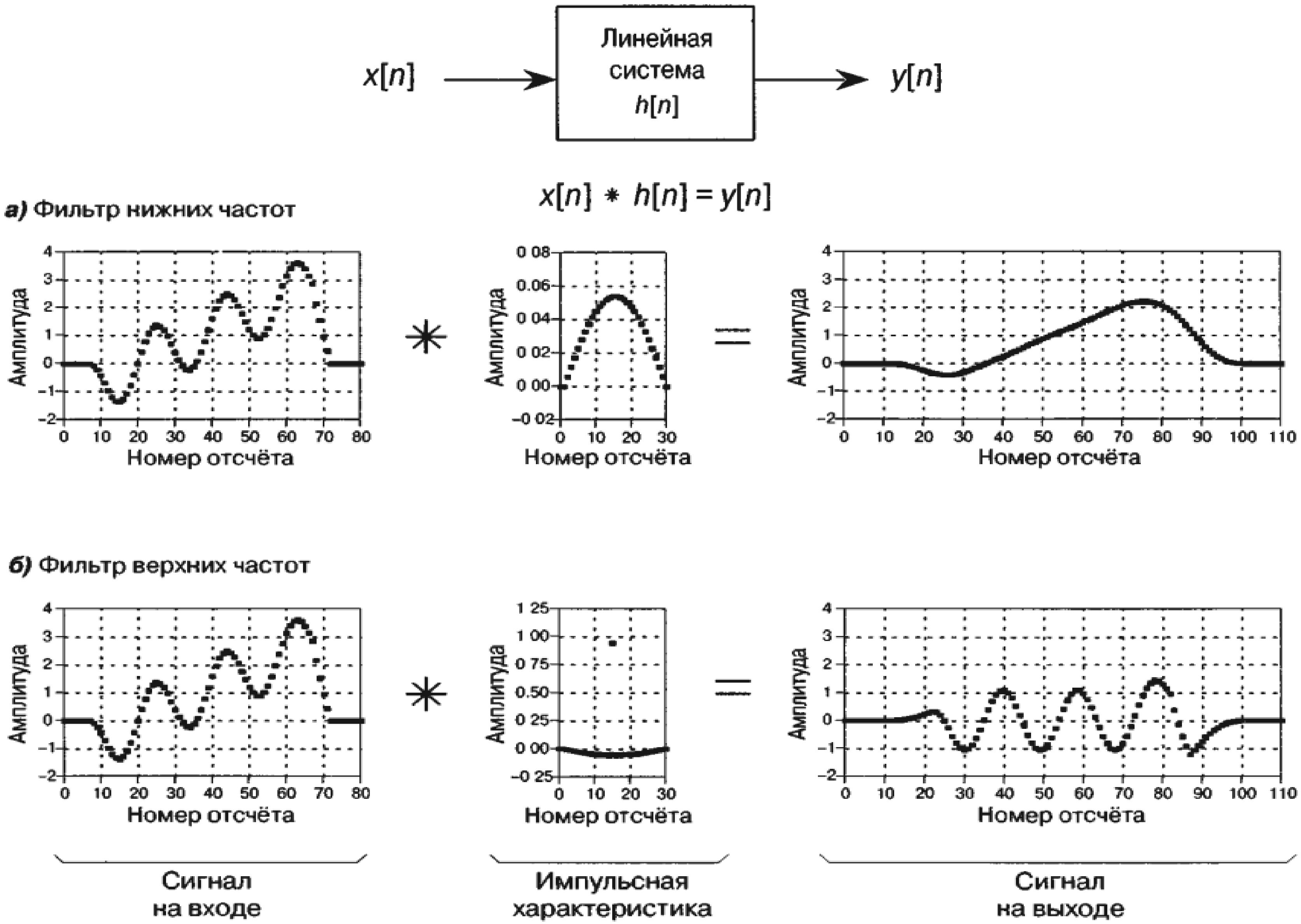
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k] \cdot h[k]$$

Функция $h[n]$ называется *ядром свертки*

Свойства свертки:

1. $x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$ (т.е. можно переставлять местами исходный сигнал и ядро свертки – это свойство редко используется на практике).
2. $(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$ (т.е. вместо того, чтобы проводить свертку по очереди в разных системах, можно получить систему с ядром $(y[n] * z[n])$, которая является суперпозицией систем $y[n]$ и $z[n]$).
3. $x[n] * y[n] + x[n] * z[n] = x[n] * (y[n] + z[n])$

Свертка



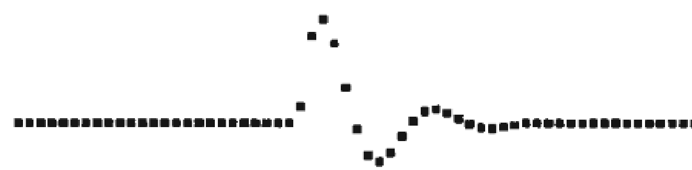
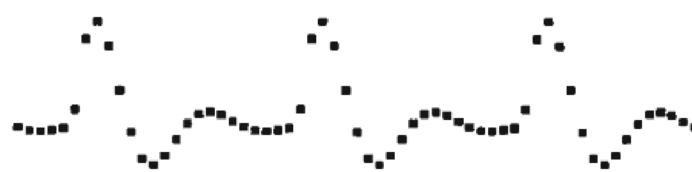
$x[n]$
Линейная система $h[n]$
$y[n]$
$x[n] * h[n] = y[n]$
а) Фильтр нижних частот
б) Фильтр верхних частот
Амплитуда
Номер отсчёта
Сигнал на входе
Импульсная характеристика
Сигнал на выходе

Дискретное преобразование Фурье (DFT)

Преобразование Фурье (*Fourier transform*)– это разложение функций на синусоиды (далее косинусные функции мы тоже называем синусоидами, т.к. они отличаются от «настоящих» синусоид только фазой). Существует несколько видов преобразования Фурье.

1. Непериодический непрерывный сигнал можно разложить в интеграл Фурье.
2. Периодический непрерывный сигнал можно разложить в бесконечный ряд Фурье.
3. Непериодический дискретный сигнал можно разложить в интеграл Фурье.
4. Периодический дискретный сигнал можно разложить в конечный ряд Фурье.

Дискретное преобразование Фурье (DFT)

Тип преобразования	Пример сигнала
Преобразование Фурье (непрерывные апериодические сигналы)	
Разложение в ряд Фурье (непрерывные периодические сигналы)	
Преобразование Фурье дискретного времени (дискретные апериодические сигналы)	
Дискретное преобразование Фурье (дискретные периодические сигналы)	

Дискретное преобразование Фурье (DFT)

Прямое преобразование:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \qquad k = 0, \dots, N-1$$

Обратное преобразование:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi i}{N}kn} \qquad n = 0, \dots, N-1.$$

- N — количество значений сигнала, измеренных за период, а также количество компонент разложения;
- $x_n, \quad n = 0, \dots, N-1,$ — измеренные значения сигнала (в дискретных временных точках с номерами $n = 0, \dots, N-1$), которые являются входными данными для прямого преобразования и выходными для обратного;

Оконное преобразование Фурье (DFT)

$$F(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]w[n-m]e^{-j\omega n}$$

w — некоторая оконная функция.

Окно Ханна (Хеннинга)

$$w(n) = 0.5\ \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right)$$

Окно Хэмминга

$$w(n) = 0.53836 - 0.46164\ \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

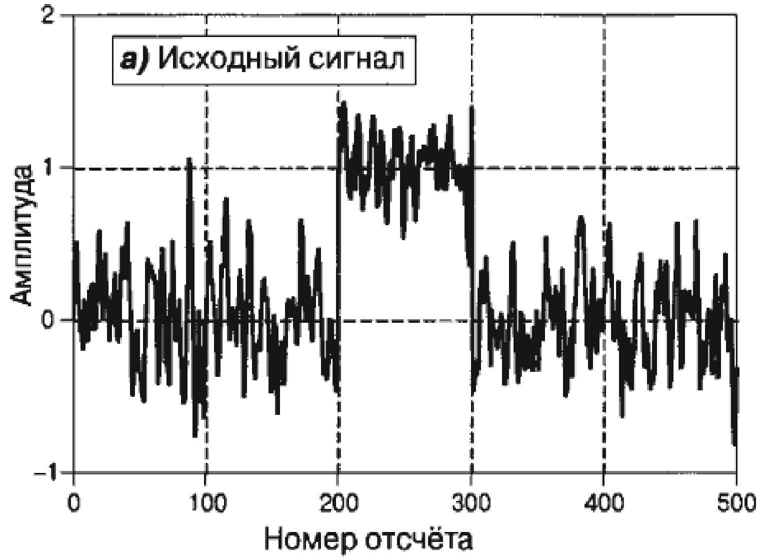
Окно Блэкмана

$$w(n) = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$$

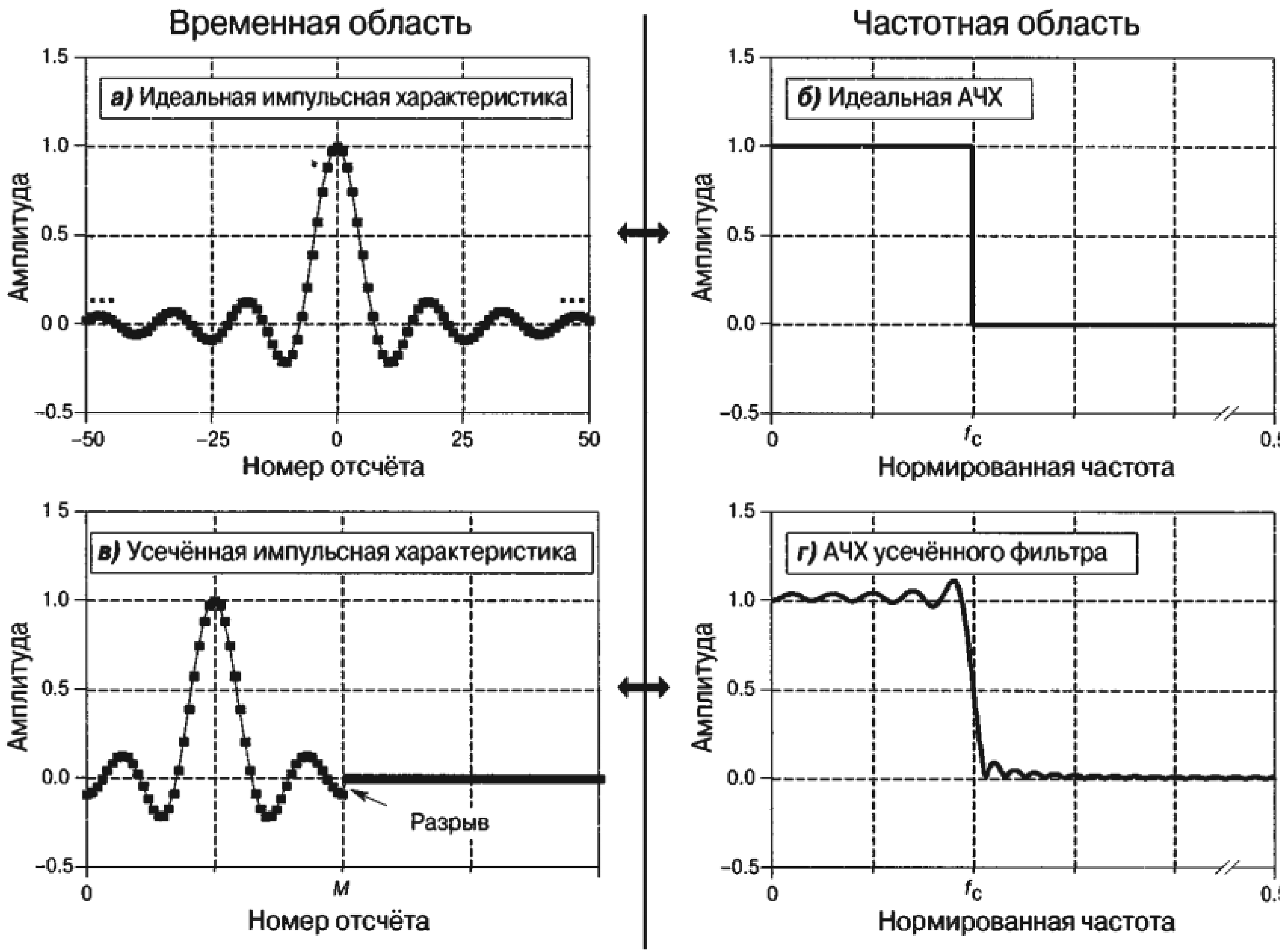
$$a_0 = \frac{1-\alpha}{2}; \quad a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{\alpha}{2}$$

Фильтрация сигналов

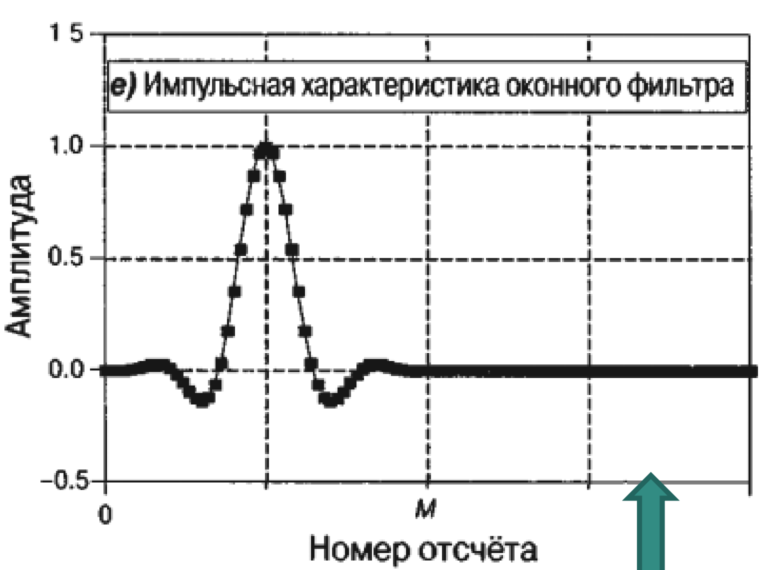
$$y[i]=\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}x[i+j].$$

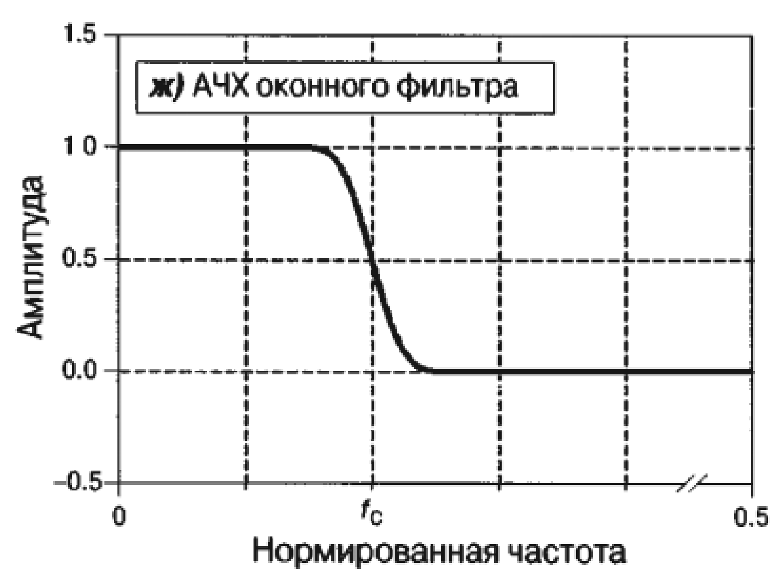


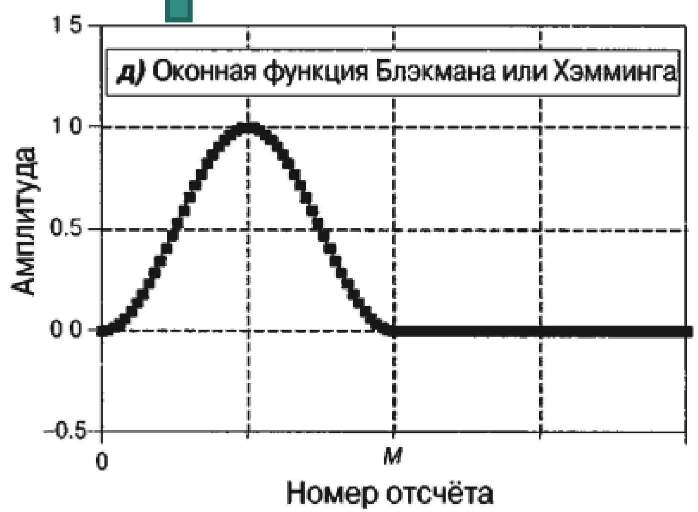
Фильтрация сигналов



Фильтрация сигналов







Спектральный анализ