15.03.2018

Вычислительные модели с использованием научных библиотек Python

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задача Коши, постановка

$$\frac{d\,\mathbf{u}(t)}{d\,t} = \mathbf{f}(t,\ \mathbf{u}),$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T, \mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T$$

<u>Системы высшего порядка</u>

$$u_1 = u, u_2 = \frac{d\,u_1}{d\,t}, u_3 = \frac{d\,u_2}{d\,t}, \ldots, u_m = \frac{d\,u_{m-1}}{d\,t},$$

$$\frac{d\,u_m}{d\,t} = g(t,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m),$$

$$u_i(0) = a_{i-1}, i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Разностная задача

$$L(u) = F,$$

$$L(u) = \begin{cases} \frac{du}{dt} - f(t, \quad u), & t > 0; \\ u(0), & t = 0; \end{cases} \quad F = \begin{cases} 0, & t > 0; \\ u_0, & t = 0; \end{cases}$$

$$L_\tau(u^\tau) = F_\tau,$$

Разностная схема

Сходимость

$\|u^\tau - U^\tau\| \to 0$

при $\tau \to 0$

$$\|u^\tau - U^\tau\| \leqslant C\,\tau^p (C \neq C(\tau))$$

Аппроксимация

$\|r_\tau\| \to 0$ при $\tau \to 0$, где $r_\tau \equiv L_\tau(U^\tau) - F_\tau$

$$\|r_\tau\| \leqslant C_1 \tau^p (C_1 \neq C_1(\tau))$$

Устойчивость

$$L_\tau(u^\tau) - F_\tau = \xi_\tau,$$

$$L_\tau(v^\tau) - F_\tau = \eta_\tau$$

$$\| u^\tau - v^\tau \| \leqslant C_2\ (\|\xi_\tau\| + \|\eta_\tau\|)$$

Метод Рунге-Кутты

$$k_1 = f(t_n,\ \ u_n),$$

$$k_2 = f(t_n + \alpha_2\tau,\quad u_n + \tau\beta_{21}k_1),$$

$$k_3 = f(t_n + \alpha_3\tau,\quad u_n + \tau\,(\beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2)),\ldots,$$

$$k_r = f(t_n + \alpha_r\tau,\quad u_n + \tau\,(\beta_{r1}k_1 + \ldots + \beta_{r,r-1}k_2)),$$

$$u_{n+1} = u_n + \tau\,(\gamma_1 k_1 + \ldots + \gamma_r k_r),$$

0					
α_2	β_{21}				
α_3	β_{31}	β_{32}			
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		
α_r	β_{r1}	β_{r2}	$\ldots$	β_{rr-1}	
	γ_1	γ_2	$\ldots$	γ_{r-1}	γ_r

Таблицы Бутчера

Метод Адамса

$$f(t) = f(t_n) + f(t_n,\ \ t_{n-1})(t - t_n) +$$

$$+ f(t_n,\ \ t_{n-1},\ \ t_{n-2})(t - t_n)(t - t_{n-1}) +$$

$$+ f(t_n,\ \ t_{n-1},\ \ t_{n-2},\ \ t_{n-3})(t - t_n)(t - t_{n-1})(t - t_{n-2}) + \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$u_{n+1} = u_n + \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,\ \ u(t))\,dt$$

Жесткие системы

1. Жесткий спектр:

$$\operatorname{Re}\Lambda_i(u) \leqslant -\Lambda_0, |\operatorname{Im}\Lambda_k| < |\operatorname{Re}\Lambda_k|, k = 1 \div N_1$$

(Λ_i — *собственные значения матрицы Якоби*); $\Lambda_0 > 0$

$$\mathbf{J} = \{\mathbf{f'}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\}$$

2. *Мягкий спектр*:

$$|\lambda_j| \leqslant \lambda_0, j = 1 \div N_2, \lambda_0 > 0.$$

При этом $\lambda_0 \ll \Lambda_0$.

<u>Пример</u>

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3,\\
\dot{y}_2 &= 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2,\\
\dot{y}_3 &= 3 \cdot 10^7 y_2^2.
\end{aligned}$$

Исследование устойчивости

$$\dot{x}(t) = f(x, \lambda).$$

$$f(x) = Ax + o(|x|),$$

$$A = \left\| \frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j} \right\|, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad o(|x|) \to 0, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \to 0.$$

Теорема 4 (теорема Ляпунова). *Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то $x = 0$ является асимптотически устойчивым положением равновесия нелинейной системы*

Исследование устойчивости, пример

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2, \\ \dot{y} = e^{-4x} - 1. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} 1 - 2x - y^2 = 0, \\ e^{-4x} - 1 = 0. \end{cases}$ - поиск положения равновесия (ПР)

$(0, 1)$ и $(0, -1)$ - найденные ПР

2) $(0, 1)$ - рассмотрим точку

$y - 1 = y_1$ - замена переменных

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - (1 + y_1)^2 = -2x - 2y_1 - y_1^2, \\ \dot{y}_1 = -4x + o(x). \end{cases}$$

3) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ - поиск собственных значений

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -4.$ => (0,1) – неустойчивое ПР

Модель два хищника - жертва

Модель

$$\dot{u} = u(1 - v_1 - v_2 - u),$$
$$\dot{v}_1 = -\gamma_1 v_1(\alpha - u),$$
$$\dot{v}_2 = -\gamma_2 v_2(\beta - u),$$

Задание: исследование свойств системы

- Найти невырожденные точки положения равновесия и дать интерпретацию
- С помощью теоремы Ляпунова определить значения параметров при которых положение равновесия будет асимптотически устойчивым
- Для каждого случая выполнить численное моделирование
- Для каждого случая построить фазовую диаграмму

Модель два хищника - жертва

Точки равновесия системы

$$O(u = v_1 = v_2 = 0);$$
$$A_1(u = 1,\ v_1 = v_2 = 0);$$
$$A_2(u = \alpha,\ v_1 = 1 - \alpha,\ v_2 = 0);$$
$$A_3(u = \beta,\ v_1 = 0,\ v_2 = 1 - \beta).$$

Задача Коши, scipy

theta''(t) + b*theta'(t) + c*sin(theta(t)) = 0

```
>>> def pend(y, t, b, c):
...         theta, omega = y
...         dydt = [omega, -b*omega - c*np.sin(theta)]
...     return dydt
>>> b = 0.25
>>> c = 5.0

>>> y0 = [np.pi - 0.1, 0.0]
>>> t = np.linspace(0, 10, 101)
>>> from scipy.integrate import odeint
>>> sol = odeint(pend, y0, t, args=(b, c))
```