16.03.2017

Вычислительные модели с использованием научных библиотек Python

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задача Коши

Постановка задачи

$$\frac{d\,\mathbf{u}(t)}{d\,t} = \mathbf{f}(t,\ \ \mathbf{u}),$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)^T, \mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)^T$$

Задача Коши

Метод Рунге-Кутты

$$k_1 = f(t_n,\ \ u_n),$$

$$k_2 = f(t_n + \alpha_2\tau,\quad u_n + \tau\beta_{21}k_1),$$

$$k_3 = f(t_n + \alpha_3\tau,\quad u_n + \tau\,(\beta_{31}k_1 + \beta_{32}k_2)), \ldots,$$

$$k_r = f(t_n + \alpha_r\tau,\quad u_n + \tau\,(\beta_{r1}k_1 + \ldots + \beta_{r,r-1}k_2)),$$

$$u_{n+1} = u_n + \tau\,(\gamma_1 k_1 + \ldots + \gamma_r k_r),$$

0					
α_2	β_{21}				
α_3	β_{31}	β_{32}			
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		
α_r	β_{r1}	β_{r2}	$\ldots$	β_{rr-1}	
	γ_1	γ_2	$\ldots$	γ_{r-1}	γ_r

Таблицы Бутчера

Задача Коши

Метод Адамса

$$f(t) = f(t_n) + f(t_n,\ t_{n-1})(t - t_n) +$$

$$+ f(t_n,\ t_{n-1},\ t_{n-2})(t - t_n)(t - t_{n-1}) +$$

$$+ f(t_n,\ t_{n-1},\ t_{n-2},\ t_{n-3})(t - t_n)(t - t_{n-1})(t - t_{n-2}) + \ldots$$

$$u_{n+1} = u_n + \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,\ u(t))\,dt = \int\limits_{t_n}^{t_{n+1}} f(t)\,dt$$

$$u_{n+1} = u_n + \tau_n f(t_n) + \frac{\tau_n^2}{2} f(u_n,\ u_{n-1}) +$$

$$+ \frac{\tau_n^2}{6}(2\tau_n + 3\tau_{n-1}) f(u_n,\ u_{n-1},\ u_{n-2}) + \frac{\tau_n^2}{12}(2\tau_n^2 + 8\tau_n\tau_{n-1} +$$

$$+ 4\tau_n\tau_{n-2} + 6\tau_{n-1}^2 + 6\tau_n\tau_{n-2}) f(u_n,\ u_{n-1},\ u_{n-2},\ u_{n-3}).$$

Задача Коши

Жесткие системы ОДУ

1. **Жесткий спектр:**

$$\operatorname{Re}\Lambda_i(u) \leqslant -\Lambda_0, |\operatorname{Im}\Lambda_k| < |\operatorname{Re}\Lambda_k|\,, k = 1 \div N_1$$

(Λ_i — *собственные значения матрицы Якоби*); $\Lambda_0 > 0$ $\quad \mathbf{J} = \{\mathbf{f}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\}$

2. *Мягкий спектр*:

$$|\lambda_j| \leqslant \lambda_0, j = 1 \div N_2, \lambda_0 > 0.$$

При этом $\lambda_0 \ll \Lambda_0$.

Пример

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3, \\ \dot{y}_2 &= 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2, \\ \dot{y}_3 &= 3 \cdot 10^7 y_2^2. \end{aligned}$$

Задача Коши

Жесткие системы ОДУ

1. Жесткий спектр:

$$\operatorname{Re}\Lambda_i(u) \leqslant -\Lambda_0, |\operatorname{Im}\Lambda_k| < |\operatorname{Re}\Lambda_k|, k = 1 \div N_1$$

(Λ_i — *собственные значения матрицы Якоби*); $\Lambda_0 > 0$ $\quad \mathbf{J} = \{\mathbf{f'}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\}$

2. *Мягкий спектр*:

$$|\lambda_j| \leqslant \lambda_0, j = 1 \div N_2, \lambda_0 > 0.$$

При этом $\lambda_0 \ll \Lambda_0$.

Пример

$$\dot{y}_1 = -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3,$$
$$\dot{y}_2 = 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3 \cdot 10^7 y_2^2,$$
$$\dot{y}_3 = 3 \cdot 10^7 y_2^2.$$

Задача Коши

<u>Алгоритмы Scipy (на основе библиотеки netlib)</u>

- LSODE(default): нежесткие системы – неявный метод Адамса, жесткие – метод Гира,(автоматическое переключение)
- VODE: нежесткие системы – неявный метод Адамса, жесткие – метод Гира
- Dopri5 – явный Рунге-Кутты 4(5)
- Dop843 – явный Рунге-Кутты 8(5,3)

Задача Коши

theta''(t) + b*theta'(t) + c*sin(theta(t)) = 0

```
>>> def pend(y, t, b, c):
...         theta, omega = y
...         dydt = [omega, -b*omega - c*np.sin(theta)]
...     return dydt
...
>>> b = 0.25
>>> c = 5.0

>>> y0 = [np.pi - 0.1, 0.0]
>>> t = np.linspace(0, 10, 101)
>>> from scipy.integrate import odeint
>>> sol = odeint(pend, y0, t, args=(b, c))
```

Задача Коши

Исследование устойчивости

$$\dot{x}(t) = f(x, \lambda).$$

$$f(x) = Ax + o(|x|),$$

$$A = \left\| \frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j} \right\|, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad o(|x|) \to 0, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \to 0.$$

Теорема 4 (теорема Ляпунова). *Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то $x = 0$ является асимптотически устойчивым положением равновесия нелинейной системы*

Задача Коши

Исследование устойчивости, пример

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2, \\ \dot{y} = e^{-4x} - 1. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} 1 - 2x - y^2 = 0, \\ e^{-4x} - 1 = 0. \end{cases}$ - поиск положения равновесия (ПР)

$(0,1)$ и $(0,-1)$ - найденные ПР

2) $(0,1)$ - рассмотрим точку

$y - 1 = y_1$ - замена переменных

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - (1 + y_1)^2 = -2x - 2y_1 - y_1^2, \\ \dot{y}_1 = -4x + o(x). \end{cases}$$

3) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ - поиск собственных значений

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -4.$ => (0,1) – неустойчивое ПР

Модель два хищника - жертва

Модель

$$\dot{u} = u(1 - v_1 - v_2 - u),$$
$$\dot{v}_1 = -\gamma_1 v_1(\alpha - u),$$
$$\dot{v}_2 = -\gamma_2 v_2(\beta - u),$$

Задание: исследование свойств системы

- Найти невырожденные точки положения равновесия и дать интерпретацию
- С помощью теоремы Ляпунова определить значения параметров при которых положение равновесия будет асимптотически устойчивым
- Для каждого случая выполнить численное моделирование
- Для каждого случая построить фазовую диаграмму

Модель два хищника - жертва

Точки равновесия системы

$$O(u = v_1 = v_2 = 0);$$
$$A_1(u = 1,\ v_1 = v_2 = 0);$$
$$A_2(u = \alpha,\ v_1 = 1 - \alpha,\ v_2 = 0);$$
$$A_3(u = \beta,\ v_1 = 0,\ v_2 = 1 - \beta).$$

python

Модель два хищника - жертва

A1:

```
M = Matrix([[-1, -1, -1], [0, y1*(1-a), 0], [0, 0, y2*(1-b)]])
M
```

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & y_1(-a+1) & 0 \\ 0 & 0 & y_2(-b+1) \end{bmatrix}$$

```
M.eigenvals()
```

$$\{-1 : 1, \quad -ay_1 + y_1 : 1, \quad -by_2 + y_2 : 1\}$$

Асимптотическая устойчивость по Ляпунову:

$-ay_1+y_1 < 0, -by_2+y_2 < 0 \Rightarrow a > 1, b > 1$