

ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G এর স্থানাঙ্ক

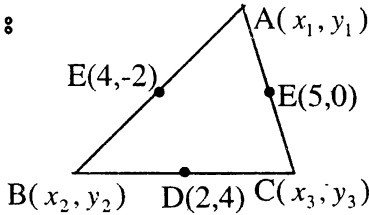
$$= \left(\frac{10+20+30}{3}, \frac{20+30+10}{3} \right) = (20, 20)$$

BC এর মধ্যবিন্দু D(25, 20)

$$GD = \sqrt{(20-25)^2 + (20-20)^2} \text{ একক} \\ = 5 \text{ একক (Ans.)}$$

3(e) ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে (2, 4), (5, 0) এবং (4, -2) হলে A, B এবং C শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান :



মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(x₁, y₁) B(x₂, y₂) ও C(x₃, y₃) এবং BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D(2, 4), E(5, 0) ও F(4, -2)

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 8 \quad (1)$$

$$y_1 + y_2 = -4 \quad (2), x_2 + x_3 = 4 \dots (3)$$

$$y_2 + y_3 = 8 \quad (4), x_3 + x_1 = 10 \dots (5)$$

(5)

$$(1) + (3) - (5) \Rightarrow 2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$(1) \text{ হতে পাই, } x_1 = 7 \text{ এবং } (3) \text{ হতে পাই } x_3 = 3$$

$$\text{আবার, } (2) + (4) \quad (6) \Rightarrow 2y_2 = 4 \Rightarrow y_2 = 2$$

$$\therefore (2) \text{ হতে পাই, } y_1 = -6 \text{ এবং } (4) \text{ হতে পাই } y_3 = 6$$

$$B(2, 2)$$

$$C(3, 6)$$

$$A(7, -6)$$

$$C \equiv (2 + 5 - 4, 4 + 0 + 2) = (3, 6)$$

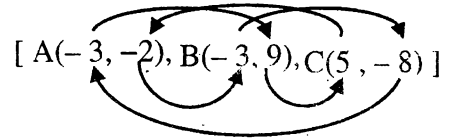
1. (a) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(-3, -2), B(-3, 9) এবং C(5, -8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [কু.'০৪; য.'০৪, '১৩; চ.'০৮]

সমাধান : A(-3, -2), B(-3, 9) এবং C(5, -8) বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} | (-3)9 + (-3)(-8) + 5(-2) - (-2)(-3) - 9(5) - (-8)(-3) |$$

$$[\frac{1}{2} | x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_4 y_1$$

- y₁x₂ - y₂x₃ - y₃x₄ - y₄x₁ সূত্র দ্বারা]



$$= \frac{1}{2} | -27 + 24 - 10 - 6 - 45 - 24 |$$

$$= \frac{1}{2} | -88 | = 44 \text{ বর্গ একক।}$$

বিকল্প পদ্ধতি:

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -2 & 9 & -8 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} | -27 + 24 - 10 - (6 + 45 + 24) |$$

$$= \frac{1}{2} | -13 - 75 | = \frac{1}{2} | -88 | = 44$$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

একক।

৪ ধা:

দৈর্ঘ্য d একক।

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times CA \times d$$

$$44 =$$

$$\Rightarrow 88 = \sqrt{64 + 36} \times d \Rightarrow d = \frac{88}{10} = 8\frac{4}{5}$$

B হতে CA এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $8\frac{4}{5}$ একক।

1(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A(5, 6), B(-9, 1) এবং C(-3, -1); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং এর সাহায্যে A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ঢা.'০৮; চ.'১০; য.'০৭; দি.'০৯, '১০]

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } \Delta ABC &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & -9 & -3 \\ 6 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} | 5 + 9 - 18 - (-54 - 3 - 5) | \\ &= \frac{1}{2} | -4 + 62 | = \frac{1}{2} | -4 + 62 | = \frac{1}{2} (58) \\ &= 29 \end{aligned}$$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = 29 বর্গ একক।

২য় অংশ : ধরি, A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য d একক।

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times d$$

$$\Rightarrow 29 = \frac{1}{2} \times \sqrt{(-9+3)^2 + (1+1)^2} \times d$$

$$\Rightarrow 58 = \sqrt{36 + 4} \times d$$

$$\Rightarrow d = \frac{58}{2\sqrt{10}} = \frac{29\sqrt{10}}{10}$$

\therefore A হতে BC এর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{29\sqrt{10}}{10}$ একক।

1(c) দেখাও যে, (3, 5), (3, 8) এবং মূলবিন্দু একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু.'০২]

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি A(3, 5) ও B(3, 8) এবং মূলবিন্দু O(0, 0)।

$$OA = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$OB = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{9 + 64} = \sqrt{73}$$

$$AB = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$$

এখানে, $OA + AB = \sqrt{34} + 3 > \sqrt{73} = OB$

\therefore প্রদত্ত বিন্দু দুইটি এবং মূলবিন্দু একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়।

$$\text{এখন, } \Delta ABO = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

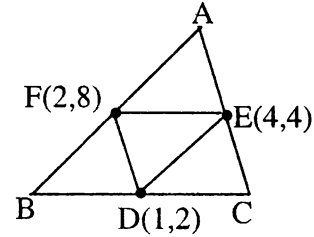
$$= \frac{1}{2} | 24 + 0 + 0 - (15 + 0 + 0) |$$

$$= \frac{1}{2} | 24 - 15 | = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $4\frac{1}{2}$ বর্গ একক।

1(d) ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু (1, 2), (4, 4) এবং (2, 8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর [প্র.ভ.প.'০১]

সমাধান :



ধরি, ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু D(1, 2), E(4, 4) এবং F(2, 8)।

$$\begin{aligned} \therefore \delta_{DEF} &= (1-4)(4-8) - (2-4)(4-2) \\ &= 12 + 4 = 16 \end{aligned}$$

$$\Delta DEF = \frac{1}{2} | 16 | = 8$$

$$\Delta ABC = 4 \times \Delta DEF = 4 \times 8 = 32$$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 32 বর্গ একক।

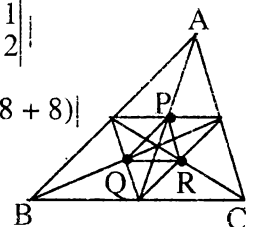
1(e) ABC ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির মধ্যবিন্দু (1, 2), (4, 4) এবং (2, 8); ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, ABC ত্রিভুজের মধ্যমাগুলির মধ্যবিন্দু P(1, 2), Q(4, 4) এবং R(2, 8)।

$$\Delta PQR = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} | 4 + 32 + 4 - (8 + 8 + 8) |$$

$$= \frac{1}{2} | 40 - 24 |$$



$$= \frac{1}{2} |32| = 16$$

$$\Delta ABC = 16 \times \Delta DEF = 16 \times 8 = 128$$

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 128 বর্গ একক।

2. (a) কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(t+1, 1)$, $(2t+1, 3)$, $(2t+2, 2t)$ । ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, $t=2$ অথবা $t=-1/2$ হলে, বিন্দুগুলো সমরেখ হবে। [ক্. '১০; রা. '১০; ব. '১০]

সমাধান : বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} t+1 & 2t+1 & 2t+2 & t+1 \\ 1 & 3 & 2t & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} |3t+3+4t^2+2t+2t+2-(2t+1+6t+6+2t^2+2t)| \\ &= \frac{1}{2} |4t^2+7t+5-2t^2-10t-7| \\ &= \frac{1}{2} |2t^2-3t-2| \text{ বর্গ একক।} \end{aligned}$$

$t=2$ হলে,

$$2t^2-3t-2=8-6-2=8-8=0$$

এবং $t=-\frac{1}{2}$ হলে,

$$2t^2-3t-2=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2=\frac{1+3-4}{2}=0$$

$t=2$ বা $-\frac{1}{2}$ হলে বিন্দুগুলো সমরেখ হবে।

2(b) (a, b) , (b, a) এবং $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ ভিন্ন বিন্দুত্রয়

সমরেখ হলে, দেখাও যে, $a+b=0$ । [চ. '০২]

সমাধান : যেহেতু বিন্দুগুলি সমরেখ,

$$\begin{vmatrix} a & b & 1/a & a \\ b & a & 1/b & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a^2+1+\frac{b}{a}-(b^2+1+\frac{a}{b})=0$$

$$\Rightarrow a^2-b^2+\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=0$$

$$\Rightarrow a^2-b^2+\frac{b^2-a^2}{ab}=0$$

$$\Rightarrow (a^2-b^2)(1-\frac{1}{ab})=0$$

$$\Rightarrow (a-b)(a+b)(ab-1)=0$$

এখানে $a-b=0$ অর্থাৎ $a=b$ হলে অথবা $ab=1$ হলে বিন্দু তিনটি ভিন্ন হয় না।

$$a+b=0 \text{ (Showed).}$$

2(c) কোন ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের স্থানাঙ্ক $(2, -1)$, $(a+1, a-3)$, $(a+2, a)$ হলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং a এর মান কত হলে বিন্দুগুলি সমরেখ হবে? [রা. '১২; য. '১২; দি. '১৪]

সমাধান : বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & a+1 & a+2 & 2 \\ -1 & a-3 & a & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} |2a-6+a^2+a-a-2-(-a-1+a^2-a-6+2a)| \\ &= \frac{1}{2} |a^2+2a-8-a^2-7| \\ &= \frac{1}{2} |2a-1| \text{ বর্গ একক। (Ans.)} \end{aligned}$$

এখন বিন্দুগুলো সমরেখ হলে, $2a-1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

3(a) যদি $A(3, 4)$, $B(2t, 5)$ এবং $C(6, t)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক

হয়, তবে t এর মান নির্ণয় কর। 15/2

[য. '০৩, '১৪; ঢা. '০৪; সি. '০৪; ব. '১৩; মা. '১৪]

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2t & 6 & 3 \\ 4 & 5 & t & 4 \end{vmatrix} = 19\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} |15+2t^2+24-(8t+30+3t)| = \frac{39}{2}$$

$$\Rightarrow |2t^2-11t+9| = 39$$

$$\Rightarrow 2t^2-11t+9 = \pm 39$$

$$+ \text{ ' চিহ্ন নিয়ে পাই, } 2t^2-11t+9-39=0$$

$$\Rightarrow 2t^2-11t-30=0$$

$$\Rightarrow 2t^2-15t+4t-30=0$$

$$\Rightarrow t(2t - 15) + 2(2t - 15) = 0$$

$$\Rightarrow (t + 2)(2t - 15) = 0$$

$$t = -2 \text{ অথবা, } t = 15/2$$

$$- \text{ ' - ' চিহ্ন নিয়ে পাই, } 2t^2 - 11t + 48 = 0$$

$(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 48 < 0$ বলে, t এর কোন বাস্তব মানের জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ হবেনা।

$$t \text{ এর মান } -2 \text{ বা, } 15/2.$$

3(b) দেখাও যে, $(p, p - 2)$, $(p + 3, p)$ এবং $(p + 2, p + 2)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত হবে। [কু.'০৮; মা.বো.'০৮]

প্রমাণ : প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$$= \frac{1}{2} |(p - p - 3)(p - p - 2) -$$

$$(p - 2 - p)(p + 3 - p - 2)|$$

$$= \frac{1}{2} |(-3)(-2) - (-2) \cdot 1|$$

$$= \frac{1}{2} |6 + 2| = 4 \text{ বর্গ একক; যা } p \text{ বর্জিত।}$$

বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল p বর্জিত।

3(c) OPQ ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $(0, 0)$, $(A \cos \beta, -A \sin \beta)$ এবং $(A \sin \alpha, A \cos \alpha)$; দেখাও যে, $\alpha = \beta$ হলে, ত্রিভুজটি ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হবে। বৃহত্তম মানটি নির্ণয় কর। [ব.'০৮; চ.'১২]

প্রমাণ : প্রদত্ত বিন্দুত্রয়ের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ A \cos \beta & -A \sin \beta & 1 \\ A \sin \alpha & A \cos \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (A^2 \cos \alpha \cos \beta + A^2 \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= \frac{1}{2} A^2 \cos (\alpha - \beta); \text{ ইহা বৃহত্তম হবে যদি}$$

$\cos(\alpha - \beta)$ বৃহত্তম হয় অর্থাৎ,

$$\cos(\alpha - \beta) = 1 \text{ হয়।}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0$$

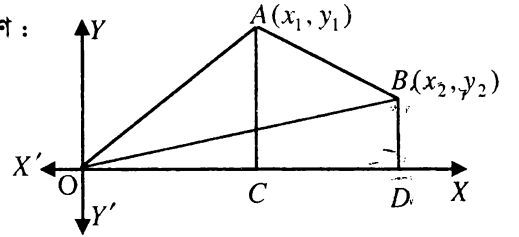
$$\alpha = \beta \quad (\text{Showed})$$

$$\text{বৃহত্তম মানটি} = \frac{1}{2} A^2 \text{ বর্গ একক}$$

3 (d) দুটি অক্ষরেখা পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। A এবং B এর ধনাত্মক স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) । মূল নিয়মে প্রমাণ কর যে,

OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ বর্গ একক। [য.'০৫; ঢা.'০৯; দি.'১২]

প্রমাণ :



A ও B বিন্দু হতে x- অক্ষের উপর যথাক্রমে AC ও BD লম্ব আঁকি। তাহলে, $OC = x_1$, $OD = x_2$, $AC = y_1$, $BD = y_2$ এবং $CD = x_2 - x_1$, যখন $x_2 > x_1$

OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ΔOAB হলে,

$\Delta OAB = \Delta OAC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + ট্রাপিজিয়াম ACDB এর ক্ষেত্রফল - ΔOBD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} (OC \times AC) + \frac{1}{2} (AC + BD) \times CD - \frac{1}{2} (OD \times BD)$$

$$= \frac{1}{2} \{ x_1 y_1 + (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) - x_2 y_2 \}$$

$$= \frac{1}{2} (x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_2)$$

$$\Delta OAB = \frac{1}{2} (x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

এখন, ΔOAB ধনাত্মক হবে যখন $x_2 y_1 > x_1 y_2$

এবং ঋণাত্মক হবে যখন $x_2 y_1 < x_1 y_2$ । কিন্তু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হতে পারে না।

$$\text{OAB ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল } \frac{1}{2} |x_2 y_1 - x_1 y_2| \text{ বর্গ}$$

একক।

4. (a) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(2, 4)$ এবং $C(-3, 3)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে,

দেখাও যে, $x - 5y = 0$ অথবা, $x - 5y + 36 = 0$.
[রা.'১৩]

প্রমাণ: ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} | (x-2)(4-3) - (y-4)(2+3) | \\ &= \frac{1}{2} | x-2-5y+20 | \\ &= \frac{1}{2} | x-y+18 | \text{ বর্গ একক} \end{aligned}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} | x-5y+18 | = 9$

$$\Rightarrow x-5y+18 = \pm 18$$

$$x-5y = 0 \text{ অথবা, } x-5y+36 = 0 \text{ (Showed)}$$

4(b) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x, y)$, $B(2, -4)$ ও $C(-3, 3)$ এবং এর ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হলে, দেখাও যে, $7x + 5y + 24 = 0$ অথবা, $7x + 5y - 12 = 0$. [ব.'০৬]

প্রমাণ: ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} | (x-2)(-4-3) - (y+4)(2+3) | \\ &= \frac{1}{2} | -7x+14-5y-20 | \\ &= \frac{1}{2} | -7x-5y-6 | \text{ বর্গ একক} \end{aligned}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2} | -7x-5y-6 | = 9$

$$\Rightarrow 7x+5y+6 = \pm 18$$

$$7x+5y+24 = 0 \text{ অথবা, } 7x+5y-12 = 0$$

5(a) ΔABC এর A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 5)$, $(-3, 3)$, $(-1, -1)$ এবং BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু D, E, F হলে, ত্রিভুজ ABC এবং DEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। দেখাও যে, $\Delta ABC = 4 \Delta DEF$. [ব.'০৫]

সমাধান: ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} | (3+3)(3+1) - (5-3)(-3+1) |$$

$$= \frac{1}{2} | 24+4 | = \frac{1}{2} (28) = 14 \text{ বর্গ একক।}$$

$$BC \text{ এর মধ্যবিন্দু } D \equiv \left(\frac{-3-1}{2}, \frac{3-1}{2} \right) = (-2, 1)$$

$$CA \text{ এর মধ্যবিন্দু } E \equiv \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = (1, 2)$$

$$AB \text{ এর মধ্যবিন্দু } F \equiv \left(\frac{3-3}{2}, \frac{5+3}{2} \right) = (0, 4)$$

ΔDEF এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} | (-2-1)(2-4) - (1-2)(1-0) |$$

$$= \frac{1}{2} | 6+1 | = \frac{7}{2} \text{ বর্গ একক।}$$

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{14}{7/2} = 4.$$

$$\Delta ABC = 4 \Delta DEF$$

5(b) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A, B, C এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4, -3)$, $(13, 0)$, $(-2, 9)$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর উপর এমনভাবে অবস্থিত যেন, $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$. ABC এবং DEF ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এদের আনুপাত 3 : 1. [রা.'০২]

সমাধান : প্রদত্ত বিন্দু $A(4, -3)$, $B(13, 0)$ এবং $C(-2, 9)$ এর নিচায়ক,

$$\begin{aligned} \delta_{ABC} &= (4-13)(0-9) - (-3-0)(13+2) \\ &= 81 + 45 = 126 \end{aligned}$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} | 126 | \text{ বর্গ একক} = 63 \text{ বর্গ একক}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{BD}{DC} = \frac{2}{1} \Rightarrow BD:DC = 2:1$$

$$\text{তদুপ } CE:EA = 2:1, AF:FB = 2:1$$

$$D \equiv \left(\frac{2 \times -2 + 1 \times 13}{2+1}, \frac{2 \times 9 + 1 \times 0}{2+1} \right)$$

$$= \left(\frac{-4+13}{3}, \frac{18}{3} \right) = (3, 6)$$

$$E \equiv \left(\frac{2 \times 4 + 1 \times -2}{2+1}, \frac{2 \times -3 + 1 \times 9}{2+1} \right)$$

$$= \left(\frac{8-2}{3}, \frac{-6+9}{3} \right) = (2, 1)$$

$$F \equiv \left(\frac{2 \times 13 + 1 \times 4}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times -3}{2+1} \right) \\ = \left(\frac{26+4}{3}, \frac{-3}{3} \right) = (10, -1)$$

$$\delta_{DEF} = (3-2)(1+1) - (6-1)(2-10) \\ = 2 + 40 = 42$$

$$\Delta DEF = \frac{1}{2} |42| \text{ বর্গ একক} = 21 \text{ বর্গ একক}$$

$$\text{দ্বিতীয় অংশ : } \Delta ABC : \Delta DEF = 63 : 21 = 3 : 1$$

5(c) ABC ত্রিভুজে A, B, C শীর্ষ তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-1, 2)$, $(2, 3)$ ও $(3, -4)$; P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, দেখাও যে,
$$\frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{|x-3y+7|}{22} \quad [\text{কু. '০৭}]$$

$$\text{প্রমাণ : } \delta_{PAB} = (x+1)(2-3) - (y-2)(-1-2) \\ = -x-1+3y-6 = -x+3y-7$$

$$\Delta PAB = \frac{1}{2} |-x+3y-7| \text{ বর্গ একক} \\ = \frac{1}{2} |x-3y+7| \text{ বর্গ একক}$$

$$\delta_{ABC} = (-1-2)(3+4) - (2-3)(2-3) \\ = -21-1 = -22$$

$$\Delta PAB = \frac{1}{2} |-22| \text{ বর্গ একক} = 11 \text{ বর্গ একক} \\ \frac{\Delta PAB}{\Delta ABC} = \frac{|x-3y+7|}{22}$$

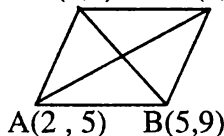
6.(a) ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(2, 5)$, $B(5, 9)$ এবং $D(6, 8)$.

I. ABD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

II. চতুর্থ শীর্ষ C এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। রম্বসটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০৫,' ১০; সি.'০৯; ব.'০৯]

III. প্রমাণ কর যে, রম্বসটির বহু চারটি সমান।

সমাধান : I. $D(6, 8)$ $C(x, y)$



$$ABD \text{ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |(2-5)(9-8) - (5-9)(5-6)| \\ = \frac{1}{2} \{(-3)(1) - (-4)(-1)\}$$

$$= \frac{1}{2} |-3-4| = \frac{1}{2} |-7| = \frac{7}{2} \text{ বর্গ একক।}$$

II. ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) . ABCD একটি

রম্বস বলে AC কর্ণের মধ্যবিন্দু $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+5}{2} \right)$ এবং

BD কর্ণের মধ্যবিন্দু $\left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2} \right)$ অভিন্ন।

$$\frac{x+2}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow x+2 = 11 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{এবং } \frac{y+5}{2} = \frac{17}{2} \Rightarrow y+5 = 17 \Rightarrow y = 12$$

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(9, 12)$.

$$2য় অংশ : AC = \sqrt{(2-9)^2 + (5-12)^2} = 7\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{(5-6)^2 + (9-8)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{রম্বসটির ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} (AC \times BD) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} (7\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \text{ বর্গ একক} = 7 \text{ বর্গ একক।}$$

$$[\text{বি.দ্র. : } C \equiv (6+5-2, 9+8-5) = (9, 12)]$$

$$\text{III. } AB = \sqrt{(2-5)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$BC = \sqrt{(5-9)^2 + (9-12)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$CD = \sqrt{(9-6)^2 + (12-8)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$DA = \sqrt{(6-2)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

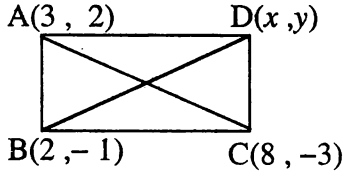
রম্বসটির বহু চারটি সমান।

6(b) ABCD আয়তের তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(3, 2)$, $B(2, -1)$, $C(8, -3)$ হলে, চতুর্থ শীর্ষ D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। আয়তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ব.'০২; ঢা.'০৩; চ.'০৬]

সমাধান ধরি, D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) . ABCD একটি আয়তক্ষেত্র বলে BD কর্ণের মধ্যবিন্দু

$(\frac{x+2}{2}, \frac{y-1}{2})$ এবং AC কর্ণের মধ্যবিন্দু
 $(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2})$ অভিন্ন।



$$\frac{x+2}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow x+2 = 11 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{এবং } \frac{y-1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y-1 = -1 \Rightarrow y = 0$$

D বিন্দুর স্থানাঙ্ক (9, 0) (Ans.)

$$২য় অংশ : AB = \sqrt{(3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(2-8)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

আয়তটির ক্ষেত্রফল = $AB \times BC$ বর্গ একক

$$= \sqrt{10} \times 2\sqrt{10} \text{ বর্গ একক} = 20 \text{ বর্গ একক।}$$

$$[বি.দ্র. : D \equiv (8+3-2, -3+2+1) = (9, 0)]$$

6(c) A, B, C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (0, -1), (15, 2), (-1, 2) এবং (4, -5)।

I. AB : CD নির্ণয় কর।

II. ত্রিভুজ ABC ও ABD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

III. প্রমাণ কর যে, CD কে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। [ব.'০৭; কু.'১১; দি.'১৩]

$$I. \text{ সমাধান : } AB = \sqrt{(0-15)^2 + (-1-2)^2} \\ = \sqrt{225+9} = 3\sqrt{26}$$

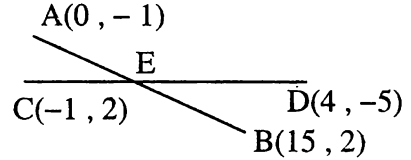
$$CD = \sqrt{(-1-4)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

$$AB : CD = 3\sqrt{26} : \sqrt{74} = 3\sqrt{13} : \sqrt{37}$$

$$II. \text{ ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |(0+30+1) \\ - (-15-2-0)| \\ = \frac{1}{2} |31+17| = 24 \text{ বর্গ একক}$$

$$\text{ত্রিভুজ ABD এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} |(0-75-4) \\ - (-15+8+0)| \\ = \frac{1}{2} |-79+7| = 36 \text{ বর্গ একক।}$$

III. প্রমাণ:



ধরি, CD রেখাংশকে AB রেখাটি k : 1 অনুপাতে E বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$E \text{ বিন্দুর স্থানাঙ্ক} = (\frac{4k-1}{k+1}, \frac{-5k+2}{k+1})$$

এখন A, E, B বিন্দু তিনটি সমরেখ বলে তাদের নিশ্চায়ক, $\delta_{AEB} = 0$

$$\therefore 0 \times \frac{-5k+2}{k+1} + \frac{4k-1}{k+1} \times 2 + 15 \times -1 -$$

$$(-1 \times \frac{4k-1}{k+1} + \frac{-5k+2}{k+1} \times 15 + 2 \times 0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8k-2}{k+1} - 15 - \frac{-4k+1-75k+30}{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow 8k-2-15k-15+79k-31=0$$

$$\Rightarrow 72k-48=0 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \text{ অর্থাৎ } k : 1 = 2 : 3$$

CD রেখাংশকে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

বিকল্প পদ্ধতি :

$$\delta_{ABC} = (0-15)(2-2) - (-1-2)(15+1) \\ = 0 + 48 = 48$$

$$\delta_{ABD} = (0-15)(2+5) - (-1-2)(15-4) \\ = -105 + 33 = -72$$

$$\frac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}} = \frac{48}{-72} = -\frac{2}{3} < 0$$

C ও D, AB এর বিপরীত পাশে অবস্থিত। অতএব CD কে AB রেখাটি 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

6(d) A , B , C এবং D বিন্দু চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 1) , (1,0) , (5, 1) এবং (-10, -4)

CD সরলরেখা AB রেখাংশকে বহিঃস্থভাবে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [চ.'০২]

সমাধান :

$$\delta_{CDA} = (5 + 10)(-4 - 1) - (1 + 4)(-10 - 3) \\ = -75 + 65 = -10$$

$$\delta_{CDB} = (5 + 10)(-4 - 0) - (1 + 4)(-10 - 1) \\ = -60 + 55 = -5$$

$$\frac{\delta_{CDA}}{\delta_{CDB}} = \frac{-10}{-5} = \frac{2}{1} > 0$$

C ও D , AB এর একই পাশে অবস্থিত এবং AB কে CD রেখাটি 2 : 1 অনুপাতে বহিঃবিভক্ত করে।

6(e) ABCD চতুর্ভুজের A , B , C , D শীর্ষ চারটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (1, 2) , (-5, 6) , (7, -4) এবং (k, -2); এর ক্ষেত্রফল শূন্য হলে k এর মান নির্ণয় কর। [য.'০২; সি.'০৮]

সমাধান : ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 7 & k & 1 \\ 2 & 6 & -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক} \\ = \frac{1}{2} (6 + 20 - 14 + 2k) - (-10 + 42 - 4k - 2) \mid \\ \text{বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} \mid 12 + 2k - 30 + 4k \mid \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} \mid 6k - 18 \mid \text{ বর্গ একক}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \frac{1}{2} \mid 6k - 18 \mid = 0 \Rightarrow 6k - 18 = 0$$

$$k = 3 \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্নমালা III D

1. (a) A(2, 3) এবং B(-1, 4) দুইটি স্থির বিন্দু। A এবং B বিন্দু হতে একটি সেটের যেকোন বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 2 : 3 হলে সম্ভার পথটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'১১; রা.'০৭; দি.'১১; ব.'১২; ঢা.', কু., য.'১৪]

সমাধান : মনে করি, P(x, y) বিন্দুটি সম্ভার পথে উপর যেকোন একটি বিন্দু।

$$PA = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

$$PB = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } PA : PB = 2 : 3 \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 9 PA^2 = 4 PB^2$$

$$\Rightarrow 9 \{ (x-2)^2 + (y-3)^2 \}$$

$$= 4 \{ (x+1)^2 + (y-4)^2 \}$$

$$\Rightarrow 9(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9)$$

$$= 4(x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16)$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 36x + 9y^2 - 54y + 117$$

$$= 4x^2 + 4y^2 + 8x - 32y + 68$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 44x - 22y + 49 = 0, \text{ ইহাই সম্ভার পথের নির্ণেয় সমীকরণ।}$$

1(b) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(x, y), B(-6, -3) এবং C(6, 3). A বিন্দুটি একটি সেটের সদস্য যে সেটটির যেকোন বিন্দু হতে BC এর উপর অভিক্রম মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক। দেখাও যে, A বিন্দুর সম্ভারপথের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 25$ [চ.'০২]

সমাধান : BC এর মধ্যবিন্দু D (ধরি) এর স্থানাঙ্ক = $(\frac{-6+6}{2}, \frac{-3+3}{2}) = (0, 0)$

$$AD \text{ মধ্যমার দৈর্ঘ্য} = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ একক}$$

প্রশ্নমতে, AD মধ্যমার দৈর্ঘ্য 5 একক।

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 25 \text{ (Showed)}$$

1(c) A(0, 4) ও B(0, 6) দুইটি স্থির বিন্দু। কার্ভেসীয় সমতলে যেকোন উপাদানের সাথে AB রেখাংশ এক সমকোণ উৎপন্ন করে। ঐ সেটটি দ্বারা সৃষ্ট সম্ভারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৩; ঢা.'১০; রা.'১৪]

সমাধান : মনে করি, P(x, y) বিন্দুটি সম্ভার পথের উপর যেকোন একটি বিন্দু।

$$PA^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2$$

$$= x^2 + y^2 - 8y + 16$$

$$PB^2 = (x-0)^2 + (y-6)^2$$

$$= x^2 + y^2 - 12y + 36$$