(ii) $AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\-15 & -3\end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix}a-4 & 8\\2 & a+2\end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী বলে

$$\begin{vmatrix}a-4 & 8\\2 & a+2\end{vmatrix}=0\Rightarrow a^2-2a-8-8=0$$

$$\Rightarrow a^2-2a-16=0\Rightarrow a\neq-4,-6$$

$a=-4,-6$

Ans. A

1.(i) প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & p & p^2\\1 & p^2 & p^4\end{vmatrix}=p(p-1)^2(p^2-1)$

[ঢা.'০৭,'১২; রা.'১১; কু.', য.'০৯; চ.'১২; রুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & p & p^2\\1 & p & p^4\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\1-p & p(1-p) & p^2\\1-p^2 & p^2(1-p^2) & p^4\end{vmatrix}$$

$[c_1-c$ এবং $c_2-c_3]$

$=1\{(1-p)p^2(1-p^2-p(1-p)(1-p^2)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে]

$=(1-p)(1-p^2)(p^2\ \ p)$

$=(1-p)(1-p^2)\,p\,(p-1)$

$=p(p-1)^2(p^2-1)=$ R.H.S. (Proved)

1(i)(b) $\begin{vmatrix}a^2 & ab & b^2\\2a & a+b & 2b\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(a-b)^3$ [ঢা.'০১; সি.'০৩]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$=\begin{vmatrix}a & ab & b\\2a & +b & 2b\\1 & & \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}a(a\ \ b) & b(a-b & b^2\\a-b & a & 2b\\ & & \end{vmatrix}$$

$[c_1-c_2$ এবং $c_2-c_3]$

$=1\{a(a-b)(a-b)-b(a-b)(a-b)\}$

[শেষ সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$=(\ \ -b)^2(a-b)=(a-b)^3=$ R.H.S.

(Proved)

1(i)(c) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab\end{vmatrix}=0$

[য.'০৩;চুয়েট'০৫-০৬]

L.H.S.$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & c\\a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\a-b & b-c & c\\a^2-b^2+ca-bc & b^2-c^2+ab-ca & c^2-ab\end{vmatrix}$$

$[c_1'=c_1-c_2$ এবং $c_2'=c_2-c_3]$

$=1\{a-b)(b^2-c^2+ab-ca)$

$-(b-c)(a^2-b^2+ca-bc)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$=(a\ \ b)\{(b\ \ c)(b+c)+a(b\ \ c)\}$

$-(b-c)\{(a-b)(a+\ \ +c(a-b)\}$

$=(a-b)(b-c)(a+b+c)-(a-b)(b-c)$

$(a+b+c)=0=$ R.H.S. (Proved)

1(i)(d) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1+x & 1\\1 & 1 & 1+y\end{vmatrix}=xy$ **[ব.'০১]**

প্রমাণঃ**L.H.S.**$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1+x & 1\\1 & 1 & 1+y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\-x & x & 1\\0 & y & 1+y\end{vmatrix}$

$[c_1-c\ \ ,c\ \ -c\ \ ]$

$=1\{xy-0\}=xy=$ R.H.S. (Proved)

1(i) (e) $\begin{vmatrix} & 1 & 1\\ & b & c\\a & b^3 & c^3\end{vmatrix}=(a\ \ b)(b-c\ \ \ \ a$

$(a+b+c)$ [চ.'০৫; ব.'১০]

প্রমাণ ঃ **L.H.S.**$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a & b & \end{vmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^3-b^3 & b^3-c^3 & c^3 \end{bmatrix}$$

[$c_1 - c_2$ এবং $c_2 - c_3$]

$= 1\{(a-b)(b^3-c^3) - (b-c)(a^3-b^3)\}$

[১ম সারি বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2) - (b-c)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$= (a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2)$

$= (a-b)(b-c)\{b(c-a)+(c-a)(c+a)\}$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) =$ R.H.S. (Proved)

1(i)(f) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ **[চ.'১০]**

L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^2-b^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

[$r_1 - r_2, r_2 - r_3$]

$= 1\{(a-b)(b^2-c^2) - (a^2-b^2)(b-c)\}$

[১ম কলাম বরাবর বিস্তার করে ।]

$= (a-b)(b-c)(b+c) - (a-b)(a+b)(b-c)$

$= (a-b)(b-c)(b+c-a-b)$

$= (a-b)(b-c)(c-a)$

1(i)(g) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

প্রমাণ : L.H.S. $= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & a^2 & 1 \\ (c+a)^2-b^2 & b^2 & 1 \\ (a+b)^2-c^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix}$ [$c_1' = c_1 - c_2$]

$= \begin{vmatrix} (b+c+a)(b+c-a) & a^2 & 1 \\ (c+a+b)(c+a-b) & b^2 & 1 \\ (a+b+c)(a+b-c) & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} b+c-a & a^2 & 1 \\ c+a-b & b^2 & 1 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c) \begin{vmatrix} -2(a-b) & a^2-b^2 & 0 \\ -2(b-c) & b^2-c^2 & 0 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

[$r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3$]

$= (a+b+c)(a-b)(b-c) \begin{vmatrix} -2 & a+b & 0 \\ -2 & b+c & 0 \\ a+b-c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)\{1.(-2b-2c+2a+2b)\}$

$= -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

= R.H.S. (Proved)

1(i)(h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$

$= (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

প্রমাণ : L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ x^3-y^3 & y^3-z^3 & z^3 \end{vmatrix}$

[$c_1' = c_1 - c_2$ এবং $c_2' = c_2 - c_3$]

$= 1\{(x-y)(x+y)(y-z)(y^2+yz+z^2) - (y-z)(y+z)(x-y)(x^2+xy+y^2)\}$

$= (x-y)(y-z)(xy^2+xyz+xz^2+y^2z+yz^2-x^2y-xy^2-y^3-zx^2-xyz-y^2z)$

$= (x-y)(y-z)(xz^2+yz^2-x^2$ [illegible] $)$

$= (x-y)(y$ [illegible]

$= (x$ [illegible]

$= R.H.S.$ (Proved)

2. বিস্তার না করে প্রমাণ কর ঃ

(a) $\begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} = 0$

[ঢা.'০৯; য.'১৩; কুয়েট'০৯-১০]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & bc & bc(b+c) \\ 1 & ca & ca(c+a) \\ 1 & ab & ab(a+b) \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a & abc & abc(b+c) \\ b & abc & abc(c+a) \\ c & abc & abc(a+b) \end{vmatrix}$

$= \frac{abc.abc}{abc}\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= abc\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix} =$ M.H.S.

এখন , $abc\begin{vmatrix} a & 1 & b+c \\ b & 1 & c+a \\ c & 1 & a+b \end{vmatrix}$

$= abc\begin{vmatrix} a & 1 & a+b+c \\ b & 1 & a+b+c \\ c & 1 & a+b+c \end{vmatrix}$ $[c_3' = c_3 + c_1]$

$= abc(a+b+c)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= abc\,(a+b+c).0 = 0 =$ R.H.S.

[দুইটি কলাম একই ।]

2(b) $\begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & x-a & y-b \\ 1 & x_1-a & y_1-b \\ 1 & x_2-a & y_2-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y-b \\ 1 & x_1 & y_1-b \\ 1 & x_2 & y_2-b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & y-b \\ 1 & a & y_1-b \\ 1 & a & y_2-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & b \\ 1 & x_1 & b \\ 1 & x_2 & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & y-b \\ 1 & 1 & y_1-b \\ 1 & 1 & y_2-b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} - a.0$

$= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} - b.0 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$ R.H.S.

(Proved)

2(c) $\begin{vmatrix} 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \\ 1 & x_3+a & y_3+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

[সি.'০৭;চ.'১১]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} 1 & x_1+a & y_1+b \\ 1 & x_2+a & y_2+b \\ 1 & x_3+a & y_3+b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1+b \\ 1 & x_2 & y_2+b \\ 1 & x_3 & y_3+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & y_1+b \\ 1 & a & y_2+b \\ 1 & a & y_3+b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x_1 & b \\ 1 & x_2 & b \\ 1 & x_3 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1+b \\ 1 & 1 & y_2+b \\ 1 & 1 & y_3+b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 1 \\ 1 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + a.0$

$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} + b.0 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} =$ R.H.S.

2(d) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

প্রমাণ : L.H.S.= $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b & c & a+b \\ q & r & p+q \\ y & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a+b \\ q & p & p+q \\ y & x & x+y \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} c & c & a+b \\ r & r & p+q \\ z & z & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & b \\ q & r & q \\ y & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & a \\ q & p & p \\ y & x & x \end{vmatrix}$

$+ \begin{vmatrix} b & a & b \\ q & p & q \\ y & x & y \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} c & a & a \\ r & p & p \\ z & x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$

$= - \begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0$

$+ (-) \begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix}$

$= (-)(-) \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + (-)(-) \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

$= 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$ = R.H.S.(Proved)

3. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

[চ.'০০; ব.'০৬; য.'০৭; দি.'০৯.'১১]

L.H.S.

$= \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$

$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & a+b+c & -(a+b+c) \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= 2(a+b+c) \cdot 1\{-(a+b+c) \times -(a+b+c)\}$

$= 2(a+b+c)^3$ = R.H.S.

3(b) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + x_3$

প্রমাণ : L.H.S.= $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ 1+x_1+x_2+x_3 & 1+x_2 & x_3 \\ 1+x_1+x_2+x_3 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$

$= (1+x_1+x_2+x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1+x_2 & x_3 \\ 1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$= (1+x_1+x_2+x_3) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & x_2 & 1+x_3 \end{vmatrix}$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= (1+x_1+x_2+x_3).1(1-0)$

$= 1 + x_1 + x_2 + x_3$

3(c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\,(a-b)(b-c)(c-a)$

[সি.'০৮; মা.বো.'০৯; ব.'১২]

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \text{bc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \text{abc}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$= \text{abc}.1\{(\text{a}-\text{b})(\text{b}^2-\text{c}^2) - (\text{b}-\text{c})(\text{a}^2-\text{b}^2)\}$

$= \text{abc}\{(\text{a}-\text{b})(\text{b}-\text{c})(\text{b}+\text{c}) - (\text{a}-\text{b})(\text{b}-\text{c})(\text{a}+\text{b})\}$

$= \text{abc}\,(\text{a}-\text{b})(\text{b}-\text{c})(\text{b}+\text{c}-\text{a}-\text{b})$

$= \text{abc}\,(\text{a}-\text{b})(\text{b}-\text{c})(\text{c}-\text{a})$

= R.H.S. (Proved)

3(d) $\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$ [ঢা.'০১; কুয়েট'১০-১১]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a-b & b-c & c+x \\ a-b & b-c & c+y \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$

$$= (\text{a}-\text{b})(\text{b}-\text{c})\begin{vmatrix} 1 & 1 & c+x \\ 1 & 1 & c+y \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{a}-\text{b})(\text{b}-\text{c})\begin{vmatrix} 0 & 0 & x-y \\ 1 & 1 & c+y \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2]$

$= (\text{a}-\text{b})(\text{b}-\text{c})(\text{x}-\text{y})(\text{b}+\text{c}-\text{a}-\text{b})$

$= (\text{a}-\text{b})(\text{b}-\text{c})(\text{c}-\text{a})(\text{x}-\text{y})$

= R.H.S. (Proved)

3.(e) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = a^2(a-1)^2(a^2-1)$

[চ.'০৩ ; রা .'০৫]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix} = \text{a}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a^4 \end{vmatrix}$

$$= \text{a}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-a & a(1-a) & a^2 \\ (1-a)(1+a) & a^2(1-a)(1+a) & a^4 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$$= \text{a}^2(1-\text{a})^2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1+a & a(1+a) & a^4 \end{vmatrix}$$

$= \text{a}^2(1-\text{a})^2\{\text{a}(1+\text{a}) - (1+\text{a})\}$

$= \text{a}^2(1-\text{a})^2(\text{a}+\text{a}^2-1-\text{a})$

$= \text{a}^2(1-\text{a})^2(\text{a}^2-1)$ = R.H.S. (Proved)

3(f) $\begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ [য.'০০]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 2 & a & b+c \\ 2 & b & c+a \\ 2 & c & a+b \end{vmatrix}$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & c+a \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix} \quad [c_2' = c_2 + c_3]$$

$$= 2(\text{a}+\text{b}+\text{c})\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$= 2(\text{a}+\text{b}+\text{c}).\,0 = 0$ = R.H.S.

[∴ দুইটি কলাম একই ।]

3(g) $\begin{vmatrix} 3 & a & b+c \\ 3 & b & c+a \\ 3 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ [কু.'০৫]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 3 & a & b+c \\ 3 & b & c+a \\ 3 & c & a+b \end{vmatrix}$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & c+a \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix} \quad [c_2' = c_2 + c_3]$$

$$= 3(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$= 3(a + b + c).\ 0 = 0 =$ R.H.S.

[$\therefore$ দুইটি কলাম একই ।]

3(h) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ **[রা.'০৪; বুয়েট'১১-১২]**

$$\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 + (r_2 + r_3)]$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ (a+b+c) & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & (a+b+c) & c-a-b \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= (a+b+c).1(a+b+c)^2$

$= (a+b+c)^3 =$ R.H.S. (Proved)

4.(a) $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \lg z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = 0$

[ব.'১৩; কুয়েট'০৭-০৮; বুয়েট'০৯-১০; রুয়েট'১১-১২]

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} \log x & \log y & \lg z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \log x - \log y & \log y - \log z & \lg z \\ \log 2x - \log 2y & \log 2y - \log 2z & \log 2z \\ \log 3x - \log 3y & \log 3y - \log 3z & \log 3z \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$$= \begin{vmatrix} \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \lg z \\ \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log 2z \\ \log\frac{x}{y} & \log\frac{y}{z} & \log 3z \end{vmatrix}$$

$$= \log\frac{x}{y}\log\frac{y}{z}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lg z \\ 1 & 1 & \log 2z \\ 1 & 1 & \log 3z \end{vmatrix}$$

$= \log\frac{x}{y}\log\frac{y}{z} \times 0 = 0 =$ R.H.S.

4(b) $\begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 2(\sin\alpha - \sin\beta)$

$(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$ **[ব.'০৩]**

প্রমাণ ঃ $\text{L.H.S.} = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2\alpha & \sin\alpha \\ 1 & \cos 2\beta & \sin\beta \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos 2\alpha - \cos 2\beta & \sin\alpha - \sin\beta \\ 0 & \cos 2\beta - \cos 2\gamma & \sin\beta - \sin\gamma \\ 1 & \cos 2\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= 1\{(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)(\sin\beta - \sin\gamma) -$
$(\sin\alpha - \sin\beta)(\cos 2\beta - \cos 2\gamma)$

$= (1 - 2\sin^2\alpha - 1 + 2\sin^2\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$-(\sin\alpha - \sin\beta)(1 - 2\sin^2\beta - 1 + 2\sin^2\gamma)$

$= -2(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$+ 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin^2\beta - \sin^2\gamma)$

$= -2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$+ 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\beta + \sin\gamma)$

$= 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)$
$(-\sin\alpha - \sin\beta + \sin\beta + \sin\gamma)$

$= 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha)$

$=$ R.H.S. (Proved)

5. প্রমাণ কর যে,

(a) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

[চ.'০২,'০৪; সি.'০৬,'০৯; রা.'০৮]

প্রমাণ ঃ L.H.S.$= \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$

$= abc \begin{vmatrix} -a & a & a \\ b & -b & b \\ c & c & -c \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 0 & 2a & a \\ 0 & 0 & b \\ 2c & 0 & -c \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= abc\{2c(2ab - 0)\} = abc.4abc$

$= 4a^2b^2c^2 =$ R.H.S. (Proved)

5(b) $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

[কু.'০৪,'১২]

প্রমাণ ঃ L.H.S. $= \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a\ +b^2 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} ab^2+ac^2 & ab^2 & c^2a \\ a^2b & bc^2+a^2b & bc^2 \\ ca^2 & b^2c & ca^2+b^2c \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{abc} abc \begin{vmatrix} b^2+c^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & c^2+a^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & b^2 & c^2 \\ -2c^2 & c^2+a^2 & c^2 \\ -2b^2 & b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - (c_2 + c_3)]$

$= 2c^2(a^2b^2 + b^4 - b^2c^2) -$
$2b^2(b^2c^2 - c^4 - c^2a^2)$

$= 2b^2c^2(a^2 + b^2 - c^2) - b^2c^2(b^2 - c^2 - a^2)$

$= 2b^2c^2(a^2 + b^2 - c^2 - b^2 + c^2 + a^2\}$

$= 2b^2c^2.2a^2 = 4a^2b^2c^2 =$ R,H.S. (Proved)

5.(c) $\begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$

[য.'০৪,'০৮; রা.'১৩]

প্রমাণ ঃ L.H.S.$= \begin{vmatrix} x^2 & yz & zx+z^2 \\ x^2+xy & y^2 & zx \\ xy & y^2+yz & z^2 \end{vmatrix}$

$= xyz \begin{vmatrix} x & z & x+z \\ x+y & y & x \\ y & y+z & z \end{vmatrix}$

$= xyz \begin{vmatrix} -2z & z & x+z \\ 0 & y & x \\ -2z & y+z & z \end{vmatrix}$

$= xyz \begin{vmatrix} 0 & -y & x \\ 0 & y & x \\ -2z & y+z & z \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 - r_3]$

$= xyz(-2z)(-xy - xy) = -2xyz^2(-2xy)$

$= 4x^2y^2z^2 =$ R.H.S. (Proved)

5(d) $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$=(1+a^2+b^2)^3$

[রা.'০৯; য.'০২; সি.'১০,'১৩; কুয়েট'০৩-০৪, ১১-১২]

L.H.S.$= \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+a^2-b^2+2b^2 & 2ab-2ab & -2b \\ 2ab-2ab & 1-a^2+b^2+2a^2 & 2a \\ 2b-b+a^2b+b^3 & -2a+a-a^3-ab^2 & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$[c_1' = c_1 - bc_3, c_2' = c_2 + ac_3.$

$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a \\ b(1+a^2+b^2) & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= (1+a^2+b^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$$=(1+a^2+b^2)^2\{1(1-a^2-b^2+2a^2)+b(0+2b\}$$
$$=(1+a^2+b^2)^2(1+a^2-b^2+2b^2)$$
$$=(1+a^2+b^2)^3=\text{R.H.S.}\quad\text{(Proved)}$$

5(e) $\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}=(b^2-ac)$ $(ax^2+2bxy+cy^2)$

[য.,ঢা.'১০; দি., য., রা.,সি.'১২;চ.'১৩]

প্রমাণ : L.H.S. $=\begin{vmatrix} a & b & ax+by \\ b & c & bx+cy \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{xy}\begin{vmatrix} ax & bx & ax^2+bxy \\ by & cy & bxy+cy^2 \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{xy}\begin{vmatrix} 0 & 0 & ax^2+2bxy+cy^2 \\ by & cy & bxy+cy^2 \\ ax+by & bx+cy & 0 \end{vmatrix}$$

$[r_1'=r_1+(r_2-r_3)]$

$$=\frac{1}{xy}(ax^2+2bxy+cy^2)$$
$$(b^2xy+bcy^2-acxy-bcy^2)$$
$$=\frac{1}{xy}(ax^2+2bxy+cy^2)(b^2-ac)xy$$
$$=(b^2-ac)(ax^2+2bxy+cy^2)=\text{R.H.S.}$$

5(f) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}=(a^2+b^2+c^2)$ $(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)$ [চ.'০৬]

প্রমাণ : L.H.S.$=\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & a^2 & bc \\ (c+a)^2-b^2 & b^2 & ca \\ (a+b)^2-c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}\quad [c_1'=c_1-c_2]$$

$$=\begin{vmatrix} (a+b+c)(b+c-a) & a^2 & bc \\ (a+b+c)(c+a-b) & b^2 & ca \\ (a+b+c)(a+b-c) & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} b+c-a & a^2 & bc \\ c+a-b & b^2 & ca \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} -2(a-b) & (a-b)(a+b) & -c(a-b) \\ -2(b-c) & (b-c)(b+c) & -a(b-c) \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$[r_1'=r_1-r_2, r_2'=r_2-r_3]$

$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} -2 & a+b & -c \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)$$
$$\begin{vmatrix} 0 & -(c-a) & -(c-a) \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$[r_1'=r_1-r_2]$

$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & b+c & -a \\ a+b-c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & a+b+c & -a \\ a+b-c & c^2-ab & ab \end{vmatrix}$$

$[c_2'=c_2-c_3]$

$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).(-1)$$
$$[-2c^2+2ab-\{(a+b)^2-c^2\}]$$
$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)(-1)$$
$$(-2c^2+2ab-a^2-b^2-2ab+c^2)$$
$$=(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$
$$(-1)(-1)(a^2+b^2+c^2)$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$
$$=\text{R.H.S.}\quad\text{(Proved)}$$

6.(a) $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}$ [ব.'১১]

$=4(a+b)(b+c)(c+a)$

প্রমাণ ঃ L.H.S. $=\begin{vmatrix}-2a & a+b & a+c\\ b+a & -2b & b+c\\ c+a & c+b & -2c\end{vmatrix}$

$=-2a\{4bc-(b+c)^2\}-(a+b)\{-2c(b+a)-(b+c)(c+a)\}+(a+c)\{(a+b)(b+c)+2b(c+a)\}$

$=-8abc+2a(b+c)^2+2c(a+b)^2+2(a+b)(b+c)(c+a)+2b(c+a)^2$

$=-8abc+2a(b^2+2bc+c^2)+2c(a^2+2ab+b^2)+2b(c^2+2ca+a^2)+2(a+b)(b+c)(c+a)$

$=-8abc+2ab^2+4abc+2ac^2+2ca^2+4abc+2b^2c+2bc^2+4abc+2a^2b+2(a+b)(b+c)(c+a)$

$=2\{ab^2+2abc+ac^2+ca^2+a^2b+b^2c+bc^2\}+2(a+b)(b+c)(c+a)$

$=2\{a(b+c)^2+a^2(b+c)+bc(b+c)\}+2(a+b)(b+c)(c+a)$

$=2(b+c)(ab+ca+a^2+bc)+2(a+b)(b+c)(c+a)$

$=2(b+c)\{a(c+a)+b(c+a)\}+2(a+b)(b+c)(c+a)$

$=2(b+c)(c+a)(a+b)+2(a+b)(b+c)(c+a)$

$=4(a+b)(b+c)(c+a)=$ R.H.S.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে করি ,

$$D=\begin{vmatrix}-2a & a+b & a+c\\ b+a & -2b & b+c\\ c+a & c+b & -2c\end{vmatrix}$$

$a+b=0$ i.e. $b=-a$ বসিয়ে আমরা পাই ,

$$D=\begin{vmatrix}-2a & 0 & a+c\\ 0 & 2a & -a+c\\ c+a & c-a & -2c\end{vmatrix}$$

$=-2a(-4ac-(c-a)^2\}+(c+a)\{0-2a(c+a)\}$

$=2a(c+a)^2-2a(c+a)^2=0$

$\therefore (a+b)$, D এর একটি উৎপাদক ।

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $(b+c)$ এবং $(c+a)$ নির্ণায়ক D এর উৎপাদক ।

যেহেতু D একটি তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক এবং $(a+b)(b+c)(c+a)$ একটি তৃতীয় ক্রমের উৎপাদক , সুতরাং D এর অপর একটি উৎপাদক k থাকতে পারে যা ধ্রুবক ।

$$\therefore \begin{vmatrix}-2a & a+b & a+c\\ b+a & -2b & b+c\\ c+a & c+b & -2c\end{vmatrix}=k(a+b)(b+c)(c+a)$$

এখন, উভয় পক্ষে $a=b=c=1$ বসিয়ে আমরা পাই ,

$$\begin{vmatrix}-2 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -2\end{vmatrix}=k.2.2.2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 4 & 0 & -2\end{vmatrix}=8k\Rightarrow 32=k=4$$

$$\begin{vmatrix}-2a & a+b & a+c\\ b+a & -2b & b+c\\ c+a & c+b & -2c\end{vmatrix}=4(a+b)(b+c)(c+a)$$

6(b) $\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix}=abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

প্রমাণ ঃ L.H.S.$=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}a(\frac{1}{a}+1) & b.\frac{1}{b} & c.\frac{1}{c}\\ a.\frac{1}{a} & b(\frac{1}{b}+1) & c.\frac{1}{c}\\ a.\frac{1}{a} & b.\frac{1}{b} & c(\frac{1}{c}+1)\end{vmatrix}$$

$$=abc\begin{vmatrix}\frac{1}{a}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c}\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1\end{vmatrix}$$

$$=abc\begin{vmatrix}1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}\\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c}\\ 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1\end{vmatrix}$$

$[c_1'=c_1+(c_2+c_3)]$

$$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{c} \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ 1(1-0)$

$= abc(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = \text{R.H.S. (Proved)}$

7. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **নির্ণায়কে a_1, b_1, c_1 এর সহগুণক যথাক্রমে A_1, B_1, C_1 হলে, প্রমাণ কর যে, $a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1=0$.** [য.'০১; কু.'০৮,'০৯]

সমাধান : $A_1 = a_1$ এর সহগুণক $= b_2c_3 - b_3c_2$

$B_1 = b_1$ এর সহগুণক $= -(a_2c_3 - a_3c_2)$

$C_1 = c_1$ এর সহগুণক $= a_2b_3 - a_3b_2$

$\text{L.H.S.} = a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1$

$= a_2(b_2c_3 - b_3c_2) + b_2\{-(a_2c_3 - a_3c_2)\} + c_2(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2 - a_2b_2c_3 + a_3b_2c_2 + a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 = 0 = \text{R.H.S. (Proved)}$

8. মান নির্ণয় কর :

(a) সমাধান : $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ [য.'০৫]

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -2z & x+z & z \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} \quad [c_1' = c_1 - (c_2 + c_2)]$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} \quad [r_1' = r_1 - r_2]$$

$= -2z(-xy - xy) = -2z(-2xy) = 4xyz$

8(b) সমাধান : $\begin{vmatrix} b+c & b-c & c-b \\ a-c & c+a & c-a \\ a-b & b-a & a+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2b & 0 & c-b \\ 2a & 2c & c-a \\ 0 & 2b & a+b \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$$

$$= 2.2 \begin{vmatrix} b & 0 & c-b \\ a & c & c-a \\ 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

$= 4\{b(ca + bc - bc + ab) + (c - b)(ab - 0)\}$

$= 4\{abc + ab^2 + abc - ab^2\}$

$= 4.2abc = 8abc$ (Ans.)

9. সমাধান কর :

(a) $\begin{vmatrix} 3+x & 4 & 2 \\ 4 & 2+x & 3 \\ 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$ [কু.'০৭; চ.'০৭]

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x+9 & 4 & 2 \\ x+9 & 2+x & 3 \\ x+9 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_2)]$

$$\Rightarrow (x+9) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (x+9) \begin{vmatrix} 0 & 2-x & -1 \\ 0 & x-1 & -(x+1) \\ 1 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$\Rightarrow (x+9)\ 1.\{-(2-x)(x+1) + x - 1\} = 0$

$\Rightarrow (x+9)\ \{(x-2)(x+1) + x - 1\} = 0$

$\Rightarrow (x+9)\ (x^2 - x - 2 + x - 1) = 0$

$\Rightarrow (x+9)(x^2 - 3) = 0$

$\therefore x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

or, $x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = -9, \pm\sqrt{3}$

9(b) $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \\ -1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ [কুয়েট'০৪-০৫]

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ x-3 & x-5 & 1 \\ x-3 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

$[c_1' = c_1 + (c_2 + c_3)]$

$\Rightarrow (x-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & x-5 & 1 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x-3)\begin{vmatrix} 0 & -x+6 & -2 \\ 0 & x-6 & -x+4 \\ 1 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

$[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$\Rightarrow (x-3)\{+(x-6)(x-4) + 2(x-6)\} = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x^2 - 10x + 24 + 2x - 12) = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x^2 - 8x + 12) = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x^2 - 6x - 2x + 8) = 0$

$\Rightarrow (x-3)\{x(x-6) - 2(x-6)\} = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-2)(x-6) = 0$

$x = 2, 3, 6$ (Ans.)

9(c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & b \\ x^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$ [প্র.ভ.প.'০৪]

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-a & a-b & b \\ x^2-a^2 & a^2-b^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x-a)(a-b)(a+b) - (x-a)(x+a)(a-b) = 0$

$\Rightarrow (x-a)(a-b)(a+b-x-a) = 0$

$\Rightarrow (x-a)(x-b) = 0$ [এখানে $a - b \neq 0$]

$x = a, b$ (Ans.)

10. যদি x, y, z অসমান এবং $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ হয়, তাহলে দেখাও যে $xyz + 1 = 0$ [প্র.ভ.প.'৯০]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-y & (x-y)(x+y) & (x-y)(x^2+xy+y^2) \\ y-z & (y-z)(y+z) & (y-z)(y^2+yz+z^2) \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ $[r_1' = r_1 - r_2, r_2' = r_2 - r_3]$

$\Rightarrow (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x+y & x^2+xy+y^2 \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & x-z & x^2-z^2+xy-yz \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

$[r_1'' = r_1' - r_2']$

$\Rightarrow (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & x-z & (x-z)(x+y+z) \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x-y)(y-z)(x-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y+z \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y+z \\ 1 & y+z & y^2+yz+z^2 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$

[x,y , z অসমান বলে $(x-y)$, $(y-z)$, $(x-z)$ এর কোনটি শূন্য হতে পারেনা ।]

$\Rightarrow -\{1 + z^3 - z^2(x+y+z)\} + z\{y^2 + yz + z^2 - (y+z)(x+y+z)\}$

$\Rightarrow -\{1 + z^3 - z^2x - yz^2 - z^3\} + z\{y^2 + yz + z^2 - xy - zx - y^2 - 2yz - z^2\} = 0$

$\Rightarrow -1 + z^2x + yz^2 + z(-xy - zx - yz) = 0$

$\Rightarrow -1 + z^2x + yz^2 - xyz - z^2x - yz^2 = 0$

$\Rightarrow -1 - xyz = 0$

$\therefore xyz + 1 = 0$ (Showed)

11(a) $\begin{bmatrix} a+3 & 6 \\ 5 & a-4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\begin{bmatrix} a+3 & 6 \\ 5 & a-4 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী বলে,

$\begin{vmatrix} a+3 & 6 \\ 5 & a-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a+3)(a-4) - 30 = 0$

$\Rightarrow a^2 - a - 12 - 30 = 0 \Rightarrow a^2 - a - 42 = 0$

$\Rightarrow (a-7)(a+6) = 0 \Rightarrow a = -6, 7$

(b) $\begin{bmatrix} a-2 & 6 \\ 2 & a-3 \end{bmatrix}$ ম্যাটিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\begin{bmatrix} a-2 & 6 \\ 2 & a-3 \end{bmatrix}$ ব্যতিক্রমী বলে,

$\begin{vmatrix} a-2 & 6 \\ 2 & a-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-2)(a-3) - 12 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 5a + 6 - 12 \Rightarrow a^2 - 5a - 6 = 0$

$\Rightarrow (a-6)(a+1) = 0 \Rightarrow a = -1, 6$

12. বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর ঃ

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ **(d)** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

12.(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক

$|A| = 4 - 6 = -2$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = 4,\ A_{12} = -3$

$A_{21} = -2,\ A_{22} = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj }(A) = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (Ans.)

12(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক

$|A| = 6 - 5 = 1$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = 3,\ A_{12} = -1$

$A_{21} = -5,\ A_{22} = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj }(A) = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$= \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (Ans.)

12(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

$|A| = 3(0-15) - 4(-4-6) - 1(5-0)$
$= -45 + 40 - 5 = -10$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -15,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 10, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 11,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -10,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -7,\ A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12,$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10, A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$

$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj }(A)$

$= \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -15 & 10 & 5 \\ 11 & -10 & -7 \\ 12 & -10 & -4 \end{bmatrix}^T$

$= \frac{1}{-10}\begin{bmatrix} -15 & 11 & 12 \\ 10 & -10 & -10 \\ 5 & -7 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3/2 & -11/10 & -6/5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{bmatrix}$

[ক্যালকুলেটরের সাহায্যে উত্তর যাচাই করা যায়।]

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$|A| = 2(-4+1) + 1(2-1) - 1(-1+2)$

$= -6 + 1 - 1 = -6$

$|A|$ এর সহগুণকগুলি হচ্ছে, $A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$,

$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-6}\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/6 & -5/6 & 1/2 \\ -1/6 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ (Ans.)}$$

13. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান কর :

সমাধান : (a) দেওয়া আছে, $2x + 3y = 4$ **[চ.'০১]**

$x - y = 7$

ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 21 = -25,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 4 = 10$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-25}{-5} = 5, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{10}{-5} = -2$$

13(b) দেওয়া আছে, $x + y + z = 1$

$x + 2y + z = 2$

$x + y + 2z = 0$

ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(1 - 0) = 1$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(0 + 1) = 1$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(2 - 1) = 1$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= 1(-1 - 0) = -1$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-1}{1} = -1$$

13(c) দেওয়া আছে, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x + 2y - z \\ 3x - y + 3z \\ 2x + 3y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$x + 2y - z = 5$

$3x - y + 3z = 7$

$2x + 3y + z = 11$

এখন, ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে আমরা পাই ,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1(-1 - 9) - 2(3 - 6) - 1(9 + 2)$

$= -10 + 6 - 11 = -15$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 5(-1 - 9) - 2(7 - 33) - 1(21 + 11)$

$= -50 + 52 - 32 = -30$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1(7 - 33) - 5(3 - 6) - 1(33 - 14)$

$= -26 + 15 - 19 = -30$