অন্তরীকরণ (প্রশ্নমালা IXB)

1. যদি $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যখন } x \le 0 \\ x, & \text{যখন } 0 < x < 1 \\ 1-x, & \text{যখন } x \ge 1 \end{cases}$ হয়, তবে দেখাও যে x = 0 বিন্দুতে f(x) ফাংশন অবিচ্ছিন্ন এবং x = 1 বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

সমাধানঃ x = 0 বিন্দুতে, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$,

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$ এবং f(0) =–0=0

যেহেতু $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) =$ f(0) সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে f(x) অবিচ্ছিন্ন।

x =1 বিন্দুতে, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(1-x) = 1-1=0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$

যেহেতু $\lim_{x\to 1^+} f(x) \ne \lim_{x\to 1^-} f(x)$, সুতরাং x = 1 বিন্দুতে f(x) বিচ্ছিন্ন।

2. যদি $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 ax}{x^2}, & \text{যখন } x \ne 0 \\ 1 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে a = 1 না হলে x = 0 বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন হবে।

প্রমাণঃ x = 0 বিন্দুতে,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 .a^2$$

$$= 1\times a^2 = a^2$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2 ax}{x^2} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2 .a^2$$

$= 1\times a^2 = a^2$ এবং f(0) = 1

$a \ne 1$ হলে, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \ne f(0)$

এবং $a = 1$ হলে, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

কাজেই, a = 1 না হলে x = 0 বিন্দুতে f(x) ফাংশন বিচ্ছিন্ন হবে।

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{যখন } x \ne 2 \\ 3 & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$ দ্বারা প্রদত্ত একটি বাস্তব ফাংশন। দেখাও যে, f ফাংশনটি x = 2 বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। f ফাংশনটিকে এরূপে সংজ্ঞায়িত কর যেন তা x = 2 বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়।

প্রমাণঃ x = 2 বিন্দুতে, f(2) = 3,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}(x+2)$$

$$= 2+2 = 4$$

এবং $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}(x+2)$$

$$= 2+2 = 4$$

যেহেতু $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \ne$ f(2) সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে f(x) বিচ্ছিন্ন।

(দ্বিতীয় অংশ): x = 2 বিন্দুতে f(x) ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার জন্য নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করা হলো-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{যখন } x \ne 2 \\ 4 & \text{যখন } x = 2 \end{cases}$$

প্রশ্নমালা IX C

1. (a)]0, 4[ব্যবধিতে f(x) = (x – 1)(x – 2)(x– 3) ফাংশনের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান: এখানে, f(x) = (x – 1)(x – 2) (x–3)

$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x^2-5x+6)$
$= x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6$
$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$$Rf'(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}[(x+h)^3 - 6(x+h)^2 + 11(x+h) - 6 - x^3 + 6x^2 - 11x + 6]$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}[x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 6x^2 - 12xh - 6h^2 + 11x + 11h - x^3 + 6x^2 - 11x]$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}[3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 12xh - 6h^2 + 11h]$$

$$= \lim_{h\to 0+}[3x^2 + 3xh + h^2 - 12x - 6h + 11]$$

$= 3x^2 - 12x + 11$

তদ্রূপ, $Lf'(x) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0-}[3x^2 + 3xh + h^2 - 12x - 6h + 11]$$

$= 3x^2 - 12x + 11$

যেহেতু $Rf'(x) = Lf'(x)$, কাজেই x এর সকল মানের জন্য f(x) ফাংশন [0, 4] বন্ধ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন এবং] 0, 4[খোলা ব্যবধিতে অন্তরীকরণযোগ্য।

f(x) ফাংশন ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সকল শর্ত পালন করে। অতএব ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের শর্তানুসারে অন্তত:পক্ষে একটি বিন্দু $c \in]0, 4[$ এর জন্য $f(4) - f(0) = (4-0)f'(c) \cdots\cdots (1)$ হবে।

এখন, $f(4) = (4-1)(4-2)(4-3) = 6$

এবং $f(0) = (0-1)(0-2)(0-3) = -6$

প্রদত্ত সমীকরণকে অন্তরীকরণ করে পাই,

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$f'(c) = 3c^2 - 12c + 11$

(1) হতে পাই, $6 + 6 = 4(3c^2 - 12c + 11)$

$\Rightarrow 3 = 3c^2 - 12c + 11$

$\Rightarrow 3c^2 - 12c + 8 = 0$

$$c = \frac{12 \pm \sqrt{144-96}}{2\times 3} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{2\times 3}$$

$$= \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{2\times 3} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$c = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \in]0, 4[$$

$\therefore$]0, 4[ব্যবধিতে প্রদত্ত ফাংশনে ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণিত হলো।

(b)]–1, 1[ব্যবধিতে $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনের জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \frac{1}{x}$

$f(0) = \frac{1}{0}$, বিদ্যমান নয়।

অর্থাৎ $x = 0$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশন অবিচ্ছিন্ন নয়।

]–1, 1[ব্যবধিতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন নয়।

সুতরাং প্রদত্ত ব্যবধিতে ফাংশনটির জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য নয়।

(c) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যখন } -1 \le x < 0 \\ x, & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ ফাংশনের জন্য [–1, 1] ব্যবধিতে ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য কিনা যাচাই কর।

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{যখন } -1 \le x < 0 \\ x, & \text{যখন } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

$$Rf'(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0+} (1) = 1$$

$$Lf'(0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{-h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0+} (-1) = -1$$

যেহেতু $Rf'(0) \neq Lf'(0)$, সেহেতু $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অন্তরীকরণযোগ্য নয়।

∴ প্রদত্ত ব্যবধিতে ফাংশনটির জন্য ল্যাগ্রাঞ্জের গড়মান উপপাদ্য প্রযোজ্য নয়।

2. x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর :

2(a) $(2x)^n - b^n$ [চ.'০২]

ধরি, $y = (2x)^n - b^n = 2^n x^n - b^n$

$$\frac{dy}{dx} = 2^n \frac{d}{dx}(x^n) - \frac{d}{dx}(b^n)$$

$$= 2^n (nx^{n-1}) - 0$$

$$\frac{d}{dx}\{(2x)^n - b^n\} = 2^n nx^{n-1} \text{ (Ans.)}$$

2(b) $\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x} + \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^{1+\frac{1}{2}} + x^{2+\frac{1}{2}} + x^{2-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2.\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} + \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$= 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \text{ (Ans.)}$$

2(c) $\frac{d}{dx}(a^x + x^a - e^x)$

$$= \frac{d}{dx}(a^x) + \frac{d}{dx}(x^a) - \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= a^x \ln a + a x^{a-1} - e^x \text{ (Ans.)}$$

2(d) $\frac{d}{dx}(\log_a x + \log x^a + e^{\ln x} + \ln x + e^x)$

$$= \frac{d}{dx}(\log_a x + a\log x + x + \ln x + e^x)$$

$$= \frac{1}{x\ln a} + a\frac{1}{x\ln 10} + 1 + \frac{1}{x} + e^x$$

(e) $\frac{d}{dx}(3\sin x + 4\ln x - 2a^x + \ln x^a)$

$$= \frac{d}{dx}(3\sin x + 4\ln x - 2a^x + a\ln x)$$

$$= 3\cos x + 4.\frac{1}{x} - 2a^x \ln x + a\frac{1}{x}$$

3. মূল নিয়মে x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরক সহগ নির্ণয় কর :

(a) $\sin 2x$ [ঢা.'০৫; ব.'১৩]

মনে করি, $f(x) = \sin 2x$

$f(x+h) = \sin 2(x+h) = \sin(2x+2h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(2x+2h) - \sin 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[2\cos\frac{2x+2h+2x}{2}\sin\frac{2x+2h-2x}{2}]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos(2x+h)\sin h$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\cos(2x+h)$$

$$= 2.1.\cos(2x+0) = 2\cos 2x$$

3.(b) $\cos 3x$ [ঢা.'০২; রা.'১১]

মনে করি, $f(x) = \cos 3x$.

$f(x+h) = \cos 3(x+h) = \cos(3x+3h)$

অন্তরক সহগের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos 3x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(3x+3h) - \cos 3x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[2\sin\frac{3x+3h+3x}{2}\sin\frac{3x-3h-3x}{2}]$$

$$= 2\lim_{h\to 0}\sin(3x+\frac{3h}{2})\times -\lim_{\frac{3h}{2}\to 0}\frac{\sin(3h/2)}{3h/2}\times\frac{3}{2}$$

$$[\because h\to 0 \therefore \frac{3h}{2}\to 0]$$