$$\hat{\eta} = \pm \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm \frac{15\hat{i}-10\hat{j}+30\hat{k}}{\sqrt{225+100+900}}$$

$$= \pm\frac{1}{7}(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})$$

11. $|\vec{A}\times\vec{B}|^2 + |\vec{A}\cdot\vec{B}|^2$ **এর মান–**

***Sol**^{n}*. $|\vec{A}\times\vec{B}|^2 + |\vec{A}\cdot\vec{B}|^2$

$= (AB\sin\theta)^2 + (AB\cos\theta)^2$

$= A^2B^2$

12. $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ **একক ভেক্টর হলে** $\hat{i}\cdot(\hat{j}\times\hat{k}) = ?$

***Sol**^{n}*. $i\cdot(\hat{j}\times\hat{k}) = \hat{i}\cdot\hat{i} = 1$

13. m ভরের একটি বস্তর উপর প্রযুক্ত $\vec{F} = 5\vec{x}+4\vec{y}$ বলের কারণে বস্তটি একটি নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল বস্তটি উপর যে বল প্রয়োগ করলে বস্তটির গতিপথের সাথে 45° কোণ তৈরী করবে সে বলের মান কত? **[RU 07-08]**

***Sol**^{n}*. $(5\vec{x}+4\vec{y})\cos 45°$

14. যদি বল $\vec{F} = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ এর সরণ $\vec{S} = \hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$ হয় হবে কাজ W = ? **[RU 06-07]**

***Sol**^{n}*. $W = \vec{F}\ \vec{S} = 2+6+5 = 13$

15. যদি প্রযুক্ত বল $\vec{F} = 5\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এর ঘূর্ণায়মান কণার অক্ষের সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ হয় তবে বলের মোমেন্ট T এর মান কত? **[RU 06-07]**

***Sol**^{n}*.: $\vec{T} = \vec{F}\times\vec{r} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}$

$= (6-1)\hat{i} - (9+2)\hat{j} + (-3-4)\hat{k}$

$= 5\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$

$T = |\vec{T}| = \sqrt{25+121+49} = \sqrt{195}$

16. XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ **ভেক্টরের সাথে লম্ব একক ভেক্টর হবে–**

***Sol**^{n}*.: XOZ তলের সমান্তরাল বলে $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ উপাংশ থাকবে। XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব ভেক্টর $4\hat{i}-3\hat{k}$. **[BUET 10-11]**

নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \dfrac{4\hat{i}-3\hat{k}}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{4\hat{i}-3\hat{k}}{5}$

সরলরেখা

প্রশ্নমালা III A

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী ঃ

1. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ হলে, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

2. (i) $P(x, y)$ বিন্দুর দূরত্ব x-অক্ষ হতে $= |y|$ এবং y-অক্ষ হতে $= |x|$

(ii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

(iii) $P(r_1, \theta_1)$ এবং $Q(r_2, \theta_2)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{{r_1}^2+{r_2}^2-2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$

3. (i) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $R(x, y)$ বিন্দু $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে, $R \equiv \left(\dfrac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \dfrac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x_1-x}{x-x_2} = \dfrac{y_1-y}{y-y_2}$

বহির্বিভক্ত করলে, $R \equiv \left(\dfrac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \dfrac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{x_1-x_2}{x_2-x} = \dfrac{y_1-y_2}{y_2-y}$

(ii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

(iii) $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{kx_2+x_1}{k+1}, \dfrac{ky_2+y_1}{k+1}\right)$

4. (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

5. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ হলে, বিন্দুত্রয়ের নিশ্চায়ক,

$$\delta_{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} = (x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1)$$

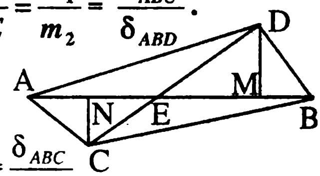
$= (x_1-x_2)(y_2-y_3)-(y_1-y_2)(x_2-x_3)$ এবং $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \mid \delta_{ABC} \mid = \dfrac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \right|$ বর্গ একক

6. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) বিন্দুগুলি সমরেখ হলে, $(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(y_1-y_2)(x_2-x_3) = 0$.

7. ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \mid (x_1y_2+x_2y_3+x_3y_4+x_4y_1)-(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_4+y_4x_1) \mid$

8. C ও D বিন্দুদ্বয় AB রেখার একই পার্শ্বে হলে , $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} > 0$ এবং বিপরীত পার্শ্বে হলে, $\delta_{ABC} \times \delta_{ABD} < 0$

9. AB রেখাটি CD রেখাংশকে E বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপতে বিভক্ত করলে $\dfrac{CE}{DE} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$.



প্রমাণ ঃ AB এর উপর CN ও DM লম্ব হলে, ΔCNE ও ΔDME সদৃশ।

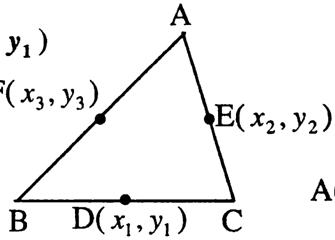
$$\frac{CN}{DM} = \frac{CE}{DE} = \frac{m_1}{m_2} \qquad \frac{\Delta ABC}{\Delta ABD} = \frac{\frac{1}{2}\delta_{ABC}}{\frac{1}{2}\delta_{ABD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times CN}{\frac{1}{2}AB \times DM} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\delta_{ABC}}{\delta_{ABD}}$$

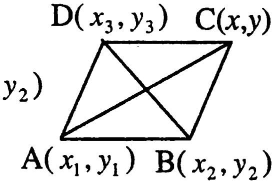
ক্রম ভিন্ন বলে অনুপাত ঋণাত্মক হবে। অতএব, অনুপাত (+) হলে বহির্বিভক্ত করবে এবং (−) হলে অন্তর্বিভক্ত করবে।

MCQ এর জন্য, 1. $A \equiv (x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$

$B \equiv (x_1 + x_3 - x_2, y_1 + y_3 - y_2)$

$C \equiv (x_1 + x_2 - x_3, y_1 + y_2 - y_3)$





2. ABCD সামান্তরিকের চতুর্থ শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$(x, y) = (x_2 + x_3 - x_1, y_2 + y_3 - y_1)$

3. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \sqrt{3}(y_1 - y_2)}{2}, \frac{y_1 + y_2 - \sqrt{3}(x_1 - x_2)}{2}\right) \text{ বা, } \left(\frac{x_1 + x_2 - \sqrt{3}(y_1 - y_2)}{2}, \frac{y_1 + y_2 + \sqrt{3}(x_1 - x_2)}{2}\right)$$

প্রশ্নমালা III A

1. x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব y-অক্ষ হতে এর দূরত্বের দ্বিগুণ। x- অক্ষ হতে এর দূরত্ব 4 একক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (α, β).

x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |\beta|$ এবং

y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= |\alpha|$

প্রশ্নমতে, $|\beta| = 4 \Rightarrow \beta = \pm 4$ এবং

$|\beta| = 2|\alpha| \Rightarrow 2|\alpha| = 4$

$\Rightarrow |\alpha| = 2 \Rightarrow \alpha = \pm 2$

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 4)$, $(2, -4)$, $(-2, 4)$ অথবা, $(-2, -4)$

2(i) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ককে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi[$ অথবা, $\theta \in]-\pi, \pi]$

(a) $(-1, -\sqrt{3})$ (b) $(1, -\sqrt{3})$

সমাধান ঃ (a) ধরি, $(-1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ এবং

$\theta \in [0, 2\pi[$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}$

$= \pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$

$\theta \in]-\pi, \pi]$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-\sqrt{3}}{-1}$

$= -\pi + \tan^{-1}\sqrt{3} = -\pi + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3}$

$(-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \dfrac{4\pi}{3})$ অথবা, $(2, -\dfrac{2\pi}{3})$.

(b) ধরি, $(1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ এবং

$\theta \in]-\pi, \pi]$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-\sqrt{3}}{1}$

$= -\tan^{-1}\sqrt{3} = -\dfrac{\pi}{3}$

$\theta \in]-\pi, \pi]$ হলে, $\theta = \tan^{-1}\dfrac{-\sqrt{3}}{1}$

$= 2\pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$

$(1, -\sqrt{3})$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, -\dfrac{\pi}{3})$.বা, $(2, \dfrac{5\pi}{3})$

(ii) পোলার স্থানাঙ্ককে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর ঃ

(a) $(\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4})$ (b) $(-2, 120^\circ)$ (c) $(\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{4})$

2(ii) সমাধান ঃ (a) $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$$= (\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}, \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4})$$

$$= (\sqrt{2}\cos(\pi+\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\pi+\frac{\pi}{4}))$$

$$= (\sqrt{2}\cos(\pi+\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(\pi+\frac{\pi}{4}))$$

$$= (-\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})$$

$$= (-\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-1, -1)$$

(b) $(-2, 120°)$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$$= (-2\cos 120^0, -2\sin 120^0)$$

$$= (-2\cos(90^0+30^0), -2\sin(90^0+30^0))$$

$$= (2\sin 30^0, -2\cos 30^0)$$

$$= (2\cdot\frac{1}{2}, -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}) = (1, -\sqrt{3})$$

(c) $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$$= (\sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}))$$

$$= (\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4})$$

$$= (\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = (1, -1)$$

3. পোলার সমীকরণকে কার্তেসীয় সমীকরণে এবং কার্তেসীয় সমীকরণকে পোলার সমীকরণে প্রকাশ কর ঃ

(a) $y = x\cot\alpha$ **(b)** $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

সমাধান : (a) $y = x\cot\alpha$

$$\Rightarrow r\sin\theta = r\cos\theta\cot\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}-\alpha \text{ (Ans.)}$$

(b) $r^2 = a^2\cos 2\theta$

$$\Rightarrow r^2 = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$\Rightarrow r^2 = a^2(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2})$$

$[\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$$\Rightarrow (r^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \text{ (Ans.)}$$

4(a) দেখাও যে, $(2\sqrt{3}, 90°)$, $(2, 120°)$ এবং $(2, 60°)$ বিন্দুগুলি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় $A(2\sqrt{3} \quad 90°)$, $B(2, 120°)$ ও $C(2, 60°)$

$$\therefore AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2.2\sqrt{3}.2\cos(90^0 - 120^0)}$$

$$= \sqrt{12+4-8\sqrt{3}\cos 30^0} = \sqrt{16 - 8\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{16-12} = 2$$

$$BC = \sqrt{4+4-8\cos 60^0} = \sqrt{8 - 8.\frac{1}{2}} = 2$$

$$CA = \sqrt{4+12-8\sqrt{3}\cos 30^0}$$

$$= \sqrt{16 - 8\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{16-12} = 2$$

AB,BC,CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং AB = CA = CA = 2.

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

4(b) P(4 , 0) এবং Q(0 , 4) বিন্দুদ্বয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $R(x, y)$. $\therefore PQ^2 = QR^2 = RP^2$

এখন, $QR^2 = RP^2$ হতে পাই,

$$\Rightarrow (0-x)^2 + (4-y)^2 = (x-4)^2 + (y-0)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 16 - 8y + y^2 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$\Rightarrow -8y = -8x \Rightarrow y = x \qquad (1)$$

$PQ^2 = QR^2$ হতে পাই,

$$\Rightarrow 4^2 + 4^2 = x^2 + 16 - 8y + y$$

$$\Rightarrow 32 = x^2 + 16 - 8x + x^2 \quad [\quad y = x]$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 16 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16-(-32)}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

$y = 2 + 2\sqrt{3}$, যখন $x = 2 + 2\sqrt{3}$ এবং

$y = 2 - 2\sqrt{3}$, যখন $x = 2 - 2\sqrt{3}$

তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(2 + 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3})$ বা, $(2 - 2\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3})$

[বি.দ্র.: MCQ এর ক্ষেত্রে ,তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক =

$$\left(\frac{4+0+\sqrt{3}(0-4)}{2}, \frac{0+4-\sqrt{3}(4-0)}{2}\right)$$ বা,

$$\left(\frac{4+0-\sqrt{3}(0-4)}{2}, \frac{0+4+\sqrt{3}(4-0)}{2}\right)$$ অর্থাৎ

$(2-2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3})$ বা, $(2+2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$]

4(c) A ও B দুইটি স্থির বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 4) ও (3 , 6) । AB বাহুর উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর C বিন্দুটি AB রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত হলে, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজের তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক $C(x, y)$. $\therefore\ AB^2 = BC^2 = CA^2$

এখন, $BC^2 = CA^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow (3-x)^2 + (6-y)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$

$\Rightarrow (6-y)^2 - (y-4)^2 = 0$

$\Rightarrow (6-y+y-4)(6-y-y+4) = 0$

$\Rightarrow 2(-2y+10) = 0 \Rightarrow y = 5 \cdots\cdots (1)$

$AB^2 = BC^2$ হতে পাই,

$\Rightarrow |4-6|^2 = (3-x)^2 + (6-y)^2$

$\Rightarrow 4 = 9 - 6x + x^2 + (6-5)^2$ [$\because y = 5$]

$\Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{36-24}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$$

A ও B বিন্দুর ভুজ 3 এবং C বিন্দুটি AB রেখার সাপেক্ষে মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত বলে, C এর ভুজ 3 অপেক্ষা বেশী হবে।

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3 + \sqrt{3}, 5)$

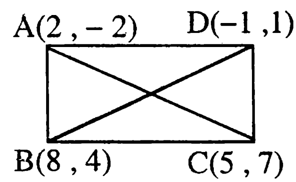
[বি. দ্র. MCQ এর ক্ষেত্রে , তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{3+3-\sqrt{3}(4-6)}{2}, \frac{4+6+\sqrt{3}(3-3)}{2}\right)$$

$= (3 + \sqrt{3}, 5)$]

5(a) দেখাও যে, (2 , – 2) , (8 , 4) , (5 , 7) এবং (– 1 , 1) বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(2 , – 2) , B(8, 4), C (5 , 7) , D(– 1, 1).



$$AB = \sqrt{(2-8)^2 + (4+2)^2}$$

$$= \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

$BC = \sqrt{(8-5)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(5+1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$

$DA = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

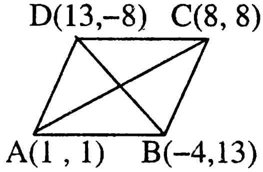
$AC = \sqrt{(2-5)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{9+81} = 3\sqrt{10}$

$BD = \sqrt{(8+1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}$

ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান অর্থাৎ $AB = CD = 6\sqrt{2}$, $BC = DA = 3\sqrt{2}$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান অর্থাৎ $AC = BD = 3\sqrt{10}$

প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি আয়তের কৌনিক বিন্দু।

5(b)দেখাও যে, (1,1), (–4, 13), (8, 8) এবং (13, – 4) বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌনিক বিন্দু। [দি.'১১]



প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(1 , 1), B(–4, 13), C (8 , 8) ও D(13, – 4).

$\therefore AB = \sqrt{(1+4)^2+(1-13)^2}$

$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$BC = \sqrt{(-4-8)^2+(13-8)^2}$

$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

$CD = \sqrt{(8-13)^2+(8+4)^2}$

$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

$DA = \sqrt{(13-1)^2+(-4-1)^2}$

$= \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$

$AC = \sqrt{(1-8)^2+(1-8)^2} = \sqrt{2\times 49} = 7\sqrt{2}$

$BD = \sqrt{(-4-13)^2+(13+4)^2} = 17\sqrt{2}$

ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পারস্পর সমান অর্থাৎ AB = BC = CD = DA =13 এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর অসমান অর্থাৎ AC ≠ BD

প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি রম্বসের কৌনিক বিন্দু।

5(c) দেখাও যে, A (a,b), B (a + α , b + β), C (a+α + p,b + β + q) এবং D(a + p,b + q) বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। কি শর্তে ABCD (i) একটি আয়তক্ষেত্র (ii) একটি রম্বস তা নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $AB = \sqrt{(a-a-\alpha)^2+(b-b-\beta)^2}$

$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$BC = \sqrt{(-p)^2+(-q)^2} = \sqrt{p^2+q^2}$

$CD = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$DA = \sqrt{p^2+q^2}$

$AC = \sqrt{(\alpha+p)^2+(\beta+q)^2}$

$BD = \sqrt{(\alpha-p)^2+(\beta-q)^2}$

ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান অর্থাৎ AB = CD এবং BC = DA .

বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

(i) ABCD একটি আয়তক্ষেত্র হলে, কর্ণ দুইটি পরস্পর সমান হবে। $AC = BD \Rightarrow AC^2 = BD^2$

$\Rightarrow (\alpha+p)^2+(\beta+q)^2 = (\alpha-p)^2+(\beta-q)^2$

$\Rightarrow (\alpha+p)^2-(\alpha-p)^2 = (\beta-q)^2-(\beta+q)^2$

$\Rightarrow 4\alpha p = -4\beta q \quad \alpha p + \beta q = 0$ ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

(ii) ABCD একটি রম্বস হলে, বাহু চারটি সমান হবে।

$AB = BC \Rightarrow AB^2 = BC^2$

$\Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = p^2+q^2$; ইহাই নির্ণেয় শর্ত ।

6(a) একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ এবং তা (4 , 3) বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত।[রা.'০৭; মা.'০৮,'১২, '১৪; ঢা.'১১; দি.'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (α, 2α).

(4 , 3) বিন্দু হতে (α, 2α) বিন্দুর দূরত্ব

$= \sqrt{(\alpha-4)^2+(2\alpha-3)^2}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{(\alpha-4)^2+(2\alpha-3)^2} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 10$

$\Rightarrow 5\alpha^2 - 20\alpha + 15 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Rightarrow (\alpha-3)(\alpha-1) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 1$ অথবা, $\alpha = 3$

বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (1, 2) বা, (3 , 6) (Ans.)

6(b) ($a + b$, $b - a$) এবং ($a - b$, $a + b$) বিন্দু থেকে (x , y) বিন্দুর দূরত্ব সমান হলে, দেখাও যে, $bx - ay = 0$.

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু তিনটি A(x y), B($a+b$, $b-a$) , C($a-b$, $a+b$)

প্রশ্নমতে, $AB = AC \Rightarrow AB^2 = AC^2$

$\Rightarrow (x-a-b)^2+(y-b+a)^2 =$

$(x-a+b)^2+(y-a-b)^2$

$\Rightarrow (x-a-b)^2-(x-a+b)^2$
$= (y-a-b)^2-(y-b+a)^2$
$\Rightarrow (x-a-b-x+a-b)(x-a-b+x-a+b)$
$= (y-a-b-y+b-a)(y-a-b+y-b+a)$
$\Rightarrow -2b.2(x-a) = -2a.2(y-b)$
$\Rightarrow bx-ab = ay-ab$
$bx-ay=0$ (Showed)

6(c) কোন বিন্দুর কোটি 6 এবং (5, 6) হতে বিন্দুটির দূরত্ব 4 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় কর। [ব.'০৩; কু.'১১]

সমাধান ঃ ধরি, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(\alpha, 6)$.
(5, 6) হতে বিন্দুটির দূরত্ব $= |\alpha-5|$
প্রশ্নমতে, $|\alpha-5| = 4 \Rightarrow \alpha-5 = \pm 4$
$\Rightarrow \alpha = 9$ অথবা, $\alpha = 1$
বিন্দুটির ভুজ 9 অথবা 1.

6(d) দেখাও যে, a এর যেকোন মানের জন্য $B(\sqrt{3}+1, 3\sqrt{3})$ এবং $C(3\sqrt{3}+1, \sqrt{3})$ বিন্দু থেকে $A(a+1, a)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান। ABC সমকোণী ত্রিভুজ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $AB = \sqrt{(a-\sqrt{3})^2+(a-3\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{a^2-2\sqrt{3}a+3+a^2-2.a.3\sqrt{3}+27}$
$= \sqrt{2a^2-8\sqrt{3}a+30}$
এবং $AC = \sqrt{(a-3\sqrt{3})^2+(a-\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{2a^2-8\sqrt{3}a+30}$
a এর যেকোন মানের জন্য AB = AC .

২য় অংশ ঃ
$BC = \sqrt{(\sqrt{3}+1-3\sqrt{3}-1)^2+(3\sqrt{3}-\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24}$
এখন ABC সমবাহু ত্রিভুজ হলে,
$\sqrt{2a^2-8\sqrt{3}a+30} = \sqrt{24}$
$\Rightarrow 2a^2-8\sqrt{3}a+30 = 24$
$\Rightarrow 2a^2-8\sqrt{3}a+6 = 0 \Rightarrow a^2-4\sqrt{3}a+3 = 0$
$\Rightarrow (a-2\sqrt{3})^2 = -3+12 = 3^2$
$\Rightarrow a-2\sqrt{3} = \pm 3 \therefore a = 2\sqrt{3}\pm 3$ (Ans.)

6(e) y-অক্ষ এবং (7 , 2) বিন্দু থেকে (a , 5) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, a এর মান নির্ণয় কর।
[রা.'১০; য.'০৬,'১০; কু.'০৭; চ.'১০; ঢা.'১৩]

সমাধান ঃ y-অক্ষ থেকে $(a, 5)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |a|$
এবং (7 , 2) বিন্দু থেকে (a 5) বিন্দুর দূরত
$= \sqrt{(a-7)^2+(5-2)^2}$
প্রশ্নমতে, $|a| = \sqrt{(a-7)^2+(5-2)^2}$
$\Rightarrow a^2 = a^2-14a+49+9$
$\Rightarrow 14a = 58 \Rightarrow a = \frac{58}{14} = \frac{29}{7}$ (Ans.)

6(f) x –অক্ষ এবং (–5 , –7) বিন্দু থেকে (4 , k) বিন্দুটির দূরত্ব সমান হলে, k এর মান নির্ণয় কর।
[কু.'০৯; মা.বো.'১৩]

সমাধান ঃ x–অক্ষ থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব $= |k|$
এবং $(-5, -7)$ বিন্দু থেকে $(4, k)$ বিন্দুটির দূরত্ব
$= \sqrt{(-5-4)^2+(-7-k)^2}$
$= \sqrt{81+49+14k+k^2} = \sqrt{130+14k+k^2}$
প্রশ্নমতে, $|k| = \sqrt{130+14k+k^2}$
$\Rightarrow k^2 = 130+14k+k^2 \therefore k = -\frac{130}{14} = -\frac{65}{7}$

7.(a) (5,7) , (–1, –1) ও (–2 , 6) বিন্দুত্রয় একটি বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত । এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃত্তের কেন্দ্র O(x , y) এবং এর পরিধিস্থ বিন্দু তিনটি A(5,7) , B(–1, –1) ও C(–2 , 6)।
OA = OB = OC, [∵ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।]
OA = OB অর্থাৎ $OA^2 = OB^2$ হতে পাই,
$(x-5)^2+(y-7)^2 = (x+1)^2+(y+1)^2$
$\Rightarrow x^2-10x+25+y^2-14y+49 =$
$x^2+2x+1+y^2+2y+1$
$\Rightarrow 12x+16y = 72 \Rightarrow 3x+4y-18 = 0 \cdots$(i)
OB = OC অর্থাৎ $OB^2 = OC^2$ হতে পাই,
$(x+1)^2+(y+1)^2 = (x+2)^2+(y-6)^2$

$\Rightarrow x^2+2x+1+y^2+2y+1=$
$x^2+4x+4+y^2-12y+36$

$\Rightarrow 2x-14y+38=0 \Rightarrow x-7y+19=0 \cdots$(ii)

(i) $-3\times$(ii) $\Rightarrow 4y+21y-18-57=0$

$\Rightarrow 25y=75 \Rightarrow y=3$

(ii) হতে পাই, $x=21-19=2$

বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (2,3) ।

7(b) কোন বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (5, 2) ও (–3 , – 4) হলে, এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বৃত্তের ব্যাসটির প্রান্ত বিন্দুদ্বয় A(5,2) ও B(–3 , – 4) . তাহলে,

বৃত্তটির ব্যাস $= AB=\sqrt{(5+3)^2+(2+4)^2}$
$=\sqrt{64+36}=10$ একক।

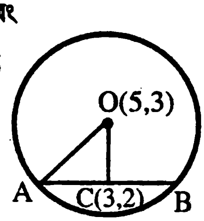
বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $=\frac{10}{2}=5$ একক।

7(c) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (5,3) ; এর যে জ্যা (3, 2) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[কু. '১০; চ.'১৩]**

সমাধানঃ ধরি, O(5, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু C(3 , 2)। তাহলে,

$OC\perp AB$, ব্যাসার্ধ OA = 5 এবং

$OC^2=(5-3)^2+(3-2)^2=5$



OAC সমকোণী ত্রিভুজ হতে

পাই, $OA^2=AC^2+OC^2$

$\Rightarrow 5^2=AC^2+5$

$\Rightarrow AC^2=25-5=20 \Rightarrow AC=2\sqrt{5}$

$AB=2\times AC=2\times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

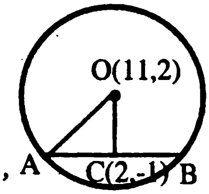
জ্যা এর দৈর্ঘ্য $4\sqrt{5}$ একক।

7(d) একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (11, 2) ; এর যে জ্যা (2, –1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[ব.'১১]**

সমাধানঃ ধরি, O(11, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু C(2 , –1)। তাহলে, $OC\perp AB$,

ব্যাসার্ধ OA =10 এবং

$OC^2=(11-2)^2$
$+(2+1)^2=81+9=90$



OAC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$OA^2=AC^2+OC^2$

$\Rightarrow 10^2=AC^2+90$

$\Rightarrow AC^2=100-90=10 \Rightarrow AC=\sqrt{10}$

$AB=2\times AC=2\times\sqrt{10}=2\sqrt{10}$

জ্যা এর দৈর্ঘ্য $2\sqrt{10}$ একক।

8. A(4 , 3), B(11, 2) ও C(2, –1) বিন্দুত্রয় ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

(a) মূলবিন্দু এবং অক্ষদ্বয় হতে C বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

(b) A বিন্দু হতে $\sqrt{10}$ একক দূরত্বে অবস্থিত একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর যার কোটি ভুজের দ্বিগুণ।
[রা.'০৭; মা.'০৮,'১২, '১৪; ঢা.'১১; দি.'১৩]

(c) B কেন্দ্র ও 10 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের যে জ্যা C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ।[ব.'১১]

সমাধান: (a) মূলবিন্দু হতে C(2, –1) বিন্দুর দূরত্ব
$=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ একক ।

x-অক্ষ হতে C(2, –1) বিন্দুর দূরত্ব $=|-1|=1$ একক।
এবং y-অক্ষ হতে C(2, –1) বিন্দুর দূরত্ব $=|2|=2$ একক ।

(b) 6(a) দ্রষ্টব্য।

(c) 7(d) দ্রষ্টব্য।

কাজ

1. P বিন্দুর কোটি – 6 । *x*- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব *y*-অক্ষ হতে এর দূরত্বের অর্ধেক হলে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x , – 6).

x- অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $=|-6|=6$ এবং

y-অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $=|x|$

প্রশ্নমতে, $6=\frac{1}{2}|x| \Rightarrow |x|=12 \Rightarrow x=\pm 12$

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (12 , – 6) বা, (– 12, – 6)

2. (1, 1) ও ($-\sqrt{3}$, 1) কে পোলার স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর, যখন $r \geq 0$ এবং $\theta \in [0, 2\pi[$ অথবা, $\theta \in]-\pi, \pi]$.

সমাধানঃ মনে করি , (1, 1) এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{1}{1} = \tan^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{4}$

(1, 1) এর পোলার স্থানাঙ্ক $(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4})$

ধরি, $(-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ).

$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ এবং

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{1}{-\sqrt{3}} = \pi - \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$= \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$

$(-\sqrt{3}, 1)$ এর পোলার স্থানাঙ্ক $(2, \dfrac{5\pi}{6})$

3. $(4, \dfrac{\pi}{3})$ ও $(\sqrt{2}, -\dfrac{3\pi}{4})$ কে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ কর।

$(4, \dfrac{\pi}{3})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $= (4\cos\dfrac{\pi}{3}, 4\sin\dfrac{\pi}{3})$

[$\because (r, \theta)$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $(r\cos\theta, r\sin\theta)$]

$= (4 \times \dfrac{1}{2}, 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}) = (2, 2\sqrt{3})$

এবং $(\sqrt{2}, -\dfrac{3\pi}{4})$ এর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

$= (\sqrt{2}\cos(-\dfrac{3\pi}{4}), \sqrt{2}\sin(-\dfrac{3\pi}{4}))$

$= (\sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{4})$

$= (\sqrt{2}\cos(\pi - \dfrac{\pi}{4}), -\sqrt{2}\sin(\pi - \dfrac{\pi}{4}))$

$= (-\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}, -\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4})$

$= (-\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = (-1, -1)$

4. $x^2 - y^2 = a^2$ কে পোলার সমীকরণে এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$ কে কার্তেসীয় সমীকরণে প্রকাশ কর ।

সমাধান :. $x^2 - y^2 = a^2$

$\Rightarrow (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = a^2$

[$\because x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$]

$\Rightarrow r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = a^2$

$\Rightarrow r^2 \cos 2\theta = a^2$ (Ans.)

এবং $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$

$\Rightarrow r^2 . 2\sin\theta\cos\theta = 2a^2$

$\Rightarrow 2(r\cos\theta)(r\sin\theta) = 2a^2$

$\Rightarrow 2xy = 2a^2 \quad xy = a^2$ (Ans.)

5. দেখাও যে, (3, 8) , (8 , 3) এবং (– 2 , 3) বিন্দুগুলি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(3 8) B(8 , 3) ও C (– 2 , 3).

$AB = \sqrt{(3-8)^2 + (8-3)^2} = 5\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2} = 10$

$CA = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-8)^2} = 5\sqrt{2}$

AB , BC, CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $AB = CA = 5\sqrt{2}$

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

6. দেখাও যে, (4 , 4) , (5 , 2) এবং (1 , 0) বিন্দুগুলি একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(4 , 4) , B(5 , 2) ও C (1 , 0).

$AB = \sqrt{(4-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$BC = \sqrt{(5-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$CA = \sqrt{(1-4)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$

AB,BC,CA এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর বলে বিন্দুত্রয় একটি ত্রিভুজ গঠন করে।

আবার, $AB^2 + BC^2 = 5 + 20 = 25 = CA^2$

অতএব, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু যার $\angle B = 90^0$.

২য় অংশ ঃ

ত্রিভুটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AB \times BC)$ $[\because \angle B = 90^0]$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}) = 5$ বর্গ একক।

7. দেখাও যে, A (– 3 , 2) , B (– 7 , – 5) , C(5, 4) এবং D(9, 11) বিন্দুগুলি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ ABCD চতুর্ভুজে,

$AB = \sqrt{(-3+7)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

$BC = \sqrt{(-7-5)^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{144+81}$

$= \sqrt{225} = 15$

$CD = \sqrt{(5-9)^2 + (4-11)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

$DA = \sqrt{(9+3)^2 + (11-2)^2} = \sqrt{144+81} = 15$

এখানে AB = CD এবং BC = DA অর্থাৎ ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় পারস্পর সমান।

বিন্দু চারটি একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

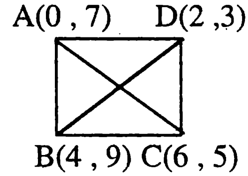
[**বি.দ্র.:** বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র ও রম্বস প্রত্যেকে সামান্তরিক । সুতরাং , সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান ও অসমান উভয়েই হতে পারে।]

8. দেখাও যে, (0 , 7), (4 , 9), (6, 5) এবং (2, 3) বিন্দুগুলি একটি বর্গের শীর্ষবিন্দু।

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু চারটি A(0 , 7) , B(4, 9), C (6 , 5) ও D(2, 3).

$AB = \sqrt{(0-4)^2 + (7-9)^2}$

$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



$BC = \sqrt{(4-6)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$CD = \sqrt{(6-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$DA = \sqrt{(2-0)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{(0-6)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10}$

$BD = \sqrt{(4-2)^2 + (9-3)^2} = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$

ABCD চতুর্ভুজের চারটি বাহু পারস্পর সমান অর্থাৎ $AB = BC = CD = DA = 2\sqrt{5}$ এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান অর্থাৎ $AC = BD = 2\sqrt{10}$.

প্রদত্ত বিন্দুগুলি একটি বর্গের কৌনিক বিন্দু।

9. x-অক্ষের উপর অবস্থিত P বিন্দু থেকে (0 , 2) এবং (6, 4)এর দূরত্ব সমান। P এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$.

P বিন্দু থেকে (0 , 2) এর দূরত্ব $= \sqrt{\alpha^2 + 4}$ এবং

P বিন্দু থেকে (6, 4) এর দূরত্ব

$= \sqrt{(\alpha - 6)^2 + 16}$

প্রশ্নমতে, $\sqrt{\alpha^2 + 4} = \sqrt{(\alpha - 6)^2 + 16}$

$\Rightarrow \alpha^2 + 4 = \alpha^2 - 12\alpha + 36 + 16$

$\Rightarrow 12\alpha = 48 \Rightarrow \alpha = 4$

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (4, 0). (Ans.)

প্রশ্নমালা III B

1.(a) দেখাও যে, (2 – 2) এবং (– 1 , 4) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হয়।
[সি.'০৫,'১৩; ব.'০৭ ; মা'০৫]

প্রমাণ ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় A(2, – 2) ও B(– 1, 4) এবং x-অক্ষ AB রেখাংশকে $P(\alpha, 0)$ বিন্দুতে m 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$0 = \frac{4m + 1 \times -2}{m+1} \Rightarrow 4m = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

অর্থাৎ x-অক্ষ AB রেখাংশকে 1 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

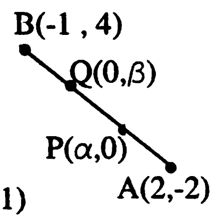
আবার, ধরি y-অক্ষ AB রেখাংশকে $Q(0, \beta)$ বিন্দুতে $n : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$0 = \frac{n \times -1 + 1 \times 2}{n+1} \Rightarrow n = 2 \Rightarrow n : 1 = 2 : 1$$

অর্থাৎ y-অক্ষ AB রেখাংশকে 2 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$\therefore$ AB রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়।

বিকল্প পদ্ধতি ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(2, -2)$ ও $B(-1, 4)$ এবং x-অক্ষ ও y-অক্ষ AB রেখাংশকে যথাক্রমে $P(\alpha, 0)$ ও $Q(0, \beta)$ বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত করে।



$$\frac{AP}{PB} = \frac{2 - \alpha}{\alpha + 1} = \frac{-2 - 0}{0 - 4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2AP = PB = PQ + QB$$

$$\Rightarrow PQ = 2AP - QB \cdots \cdots (1)$$

আবার, $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{2-0}{0+1} = \dfrac{-2-\beta}{\beta - 4} \Rightarrow \dfrac{AQ}{QP} = \dfrac{2}{1}$

$$\Rightarrow AQ = 2QB \Rightarrow AP + PQ = 2\,QB$$

$$\Rightarrow AP + 2AP - QB = 2\,QB \quad [\,(1) \text{ দ্বারা}\,]$$

$$\Rightarrow 3\,AP = 3\,QB \qquad AP = QB$$

$$(1) \Rightarrow PQ = 2AP - AP = AP$$

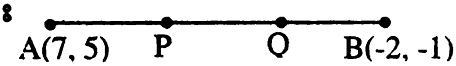
$$\therefore AP = PQ = QB$$

$\therefore$ AB রেখাংশ অক্ষদ্বয় দ্বারা সমান তিনভাগে বিভক্ত হয়।

1.(b) (7 , 5) ও (− 2 ,− 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের সমত্রিখণ্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ব.'০৫; রা.'০৯,'১১]

সমাধান ঃ



ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(7, 5)$ ও $B(-2, -1)$ এবং P ও Q সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয় AB রেখাংশকে যথাক্রমে 1 2 ও $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

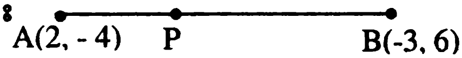
$$P \equiv \left(\frac{1 \times -2 + 2 \times 7}{1+2}, \frac{1 \times -1 + 2 \times 5}{1+2}\right) = (4, 3)$$

$$Q \equiv \left(\frac{2 \times -2 + 1 \times 7}{2+1}, \frac{2 \times -1 + 1 \times 5}{2+1}\right) = (1, 1)$$

সমত্রিখণ্ডক বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (4, 3) ও (1, 1)

1.(c) (2,–4) ও (–3,6) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y- অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [ঢা.'০৯; রা. '০৪, '০৮; য. '০২]

সমাধান ঃ



ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(2, -4)$ ও $B(-3, 6)$ এবং AB রেখাংশকে P বিন্দু $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$P \equiv \left(\frac{k \times -3 + 1 \times 2}{k+1}, \frac{k \times 6 + 1 \times -4}{k+1}\right)$$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

$$\frac{6k - 4}{k+1} = 0 \Rightarrow 6k - 4 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 2 : 3$

আবার, এ বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর ভুজ

$$\frac{-3k + 2}{k+1} = 0 \Rightarrow -3k + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 2 : 3$

x ও y-অক্ষরেখা প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $2 : 3$ এবং $2 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

1(d) (– 2 , 3) ও (4 , – 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ এবং y- অক্ষ যে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। [চ.'০৭; মা.'০৭]

সমাধান ঃ প্রদত্ত (– 2 , 3) ও (4 , – 7) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী

বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $= \left(\dfrac{k \times 4 + 1 \times -2}{k+1}, \dfrac{k \times -7 + 1 \times 3}{k+1}\right)$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

$$\frac{-7k + 3}{k+1} = 0 \Rightarrow -7k + 4 = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{7}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 3 : 7$

আবার, এ বিন্দুটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর ভুজ

$$\frac{4k - 2}{k+1} = 0 \Rightarrow 4k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 1 : 2$

x ও y-অক্ষরেখা প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে যথাক্রমে $3 : 7$ এবং $1 : 2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

1(e) (2 , – 5) ও (2 , 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর। ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কও নির্ণয় কর। [য.'০০]

সমাধান ঃ প্রদত্ত $(2 , -5)$ ও $(2 , 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $k:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $= (\dfrac{k\times 2+1\times 2}{k+1}, \dfrac{k\times 3+1\times -5}{k+1})$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে এর কোটি

$$\frac{3k-5}{k+1} = 0 \Rightarrow 3k - 5 = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{3}$$

অর্থাৎ $k : 1 = 5 \quad 3$

x-অক্ষরেখা প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে $5 : 3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং বিন্দুটির স্থানাঙ্ক

$$= (\frac{2.\frac{5}{3}+2}{\frac{5}{3}+1}, 0) = (\frac{10+6}{5+3}, 0) = (2 , 0)$$

[MCQ এর ক্ষেত্রে , বিন্দু দুইটির সাধারন ভুজ 2 বলে বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে x-অক্ষরেখা $(2, 0)$ বিন্দুতে এবং $\dfrac{-5-0}{0-3} = \dfrac{5}{3}$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।]

1.(f) দেখাও যে, মূলবিন্দু (– 3 ,– 2) এবং (6, 4) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের একটি সমত্রিখন্ডক বিন্দু । অপর সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[সি. '০২,'০৮; কু.'০৩; ঢা. '০৬; চ. '০৮; য. '০৯,'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি $A(-3, -2)$ ও $B(6 , 4)$ এবং P ও Q সমত্রিখন্ডক বিন্দু দুইটি AB রেখাংশকে যথাক্রমে $1 \quad 2$ ও $2 \quad 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

$$P \equiv (\frac{1\times 6+2\times -3}{1+2}, \frac{1\times 4+2\times -2}{1+2})$$

$$= (\frac{6-6}{3}, \frac{4-4}{3}) = (0 , 0)$$

এবং $Q \equiv (\dfrac{2\times 6+1\times -3}{2+1}, \dfrac{2\times 4+1\times -2}{2+1})$

$$= (\frac{12-3}{3}, \frac{8-2}{3}) = (3 , 2)$$

অতএব, মূলবিন্দু প্রদত্ত বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের একটি সমত্রিখন্ডক বিন্দু এবং অপর সমত্রিখন্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3 , 2)$.

1(g) AB সরলরেখাটি P(3 , 3) এবং Q(8 , 5) বিন্দু দুটি দ্বারা সমত্রিখন্ডিত করা হয়, A, B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'১১]

সমাধান ঃ

A(a, b) P(3,3) Q(8,5) C(c,d)

ধরি, A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (a,b) ও (c, d)

তাহলে, P, AQ এর মধ্যবিন্দু ।

$$\frac{a+8}{2} = 3 \Rightarrow a = 6 - 8 = -2 \text{ এবং}$$

$$\frac{b+5}{2} = 3 \Rightarrow b = 6 - 5 = 1$$

আবার, Q, PC এর মধ্যবিন্দু ।

$$\frac{3+c}{2} = 8 \Rightarrow c = 16 - 3 = 13 \text{ এবং}$$

$$\frac{3+d}{2} = 5 \Rightarrow d = 10 - 3 = 7$$

A ও B এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2,1)$ ও $(13, 7)$

2.(a) A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (–2, 4) ও (4, – 5). AB রেখাংশকে C বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল যেন AB = 3BC হয়। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[কু.'০৯; চ.'১১; দি'১২; সি.'১০; রা.'১৩; ঢা.'১৪]

সমাধান ঃ

A(–2, 4) B(4,–5) C (x,y)

ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) .

দেওয়া আছে, $AB = 3BC \Rightarrow \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{3}{1}$

B বিন্দু AC রেখাংশকে $3 \quad 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে । B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (\dfrac{3x-2}{3+1}, \dfrac{3y+4}{3+1})$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{3x-2}{4} = 4 \Rightarrow 3x - 2 = 16$

$\Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

এবং $\dfrac{3y+4}{4} = -5 \Rightarrow 3y + 4 = -20$

$\Rightarrow 3y = -24 \Rightarrow y = -8$

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6 , –8) (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি :

দেওয়া আছে, AB = 3BC $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = 3$

ধরি, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

$$\frac{AB}{BC} = \frac{-2-4}{4-x} = \frac{4+5}{-5-y} = 3$$

$\frac{-6}{4-x} = 3 \Rightarrow -6 = 12 - 3x \Rightarrow x = 6$ এবং

$\frac{9}{-5-y} = 3 \Rightarrow 9 = -15 - 3y \Rightarrow y = -8$

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6 , –8) (Ans.)

2(b) A(8 , 10) ও B(18, 20) বিন্দুর সংযোগ রেখাংশকে Q ও R বিন্দুদ্বয় 2 : 3 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে এবং P বিন্দু AB এর মধ্যবিন্দু। Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, $PQ \times PR = PB^2$ [রা.'০০]

সমাধান : $P \equiv (\frac{8+18}{2}, \frac{10+20}{2}) = (13, 15)$

$Q \equiv (\frac{36+24}{2+3}, \frac{40+30}{2+3}) = (\frac{60}{5}, \frac{70}{5}) = (12, 14)$

$R \equiv (\frac{36-24}{2-3}, \frac{40-30}{2-3}) = (-12, -10)$

Q ও R বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (12, 14) ও (– 12 , – 10)

এখন, $PQ = \sqrt{(13-12)^2 + (15-14)^2} = \sqrt{2}$

$PR = \sqrt{(13+12)^2 + (15+10)^2} = \sqrt{2 \times 25^2}$

$= 25\sqrt{2}$

$PB^2 = (13-18)^2 + (15-20)^2 = 50$

$PQ \times PR = \sqrt{2} \times 25\sqrt{2} = 50 = PB^2$

3. (a) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু (2 , 7) ও (6 , 1) এবং এর ভরকেন্দ্র (6 , 4) ; তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয় কর। [সি.'০৪,'১২; মা.বো.'০৭; ব.'১০,'১২; চ.'১২]

সমাধান : ধরি, তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x, y).

(2 , 7) , (6 , 1) ও (x, y) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $(\frac{2+6+x}{3}, \frac{7+1+y}{3})$.

প্রশ্নমতে, $\frac{2+6+x}{3} = 6 \Rightarrow x + 8 = 18 \Rightarrow x = 10$

এবং $\frac{7+1+y}{3} = 4 \Rightarrow y + 8 = 12 \Rightarrow y = 4$

তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (10 , 4).

3(b) একটি ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষ (3 , 5) ও (7 , – 1) এবং এর ভরকেন্দ্র (7 , 2) তৃতীয় শীর্ষ নির্ণয় কর। [ব.'০৬]

সমাধান : ধরি, তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (x, y).

(3 , 5) , (7, –1) ও (x, y) শীর্ষবিশিষ্ট ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র $(\frac{3+7+x}{3}, \frac{5-1+y}{3})$.

প্রশ্নমতে, $\frac{3+7+x}{3} = 7 \Rightarrow x + 10 = 21 \Rightarrow x = 11$

এবং $\frac{5-1+y}{3} = 2 \Rightarrow y + 4 = 6 \Rightarrow y = 2$

তৃতীয় শীর্ষের স্থানাঙ্ক (11, 2).

3(c) একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_1^2, 2at_2)$ এবং $(at_3^2, 2at_3)$ যদি এর ভরকেন্দ্র x–অক্ষের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে দেখাও যে, $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ [সি.'০৫; কু.'০৬; য.'০৯; মা.'০৯]

সমাধান : ত্রিভুজটির ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$= (\frac{at_1^2 + at_2^2 + at_3^2}{3}, \frac{2a(t_1 + t_2 + t_3)}{3})$$

এ বিন্দুটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত বলে এর কোটি শূন্য।

$$\frac{2a(t_1 + t_2 + t_3)}{3} = 0$$

$\Rightarrow t_1 + t_2 + t_3 = 0$ (Showed)

3(d) ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(10 20) , B(20 , 30) এবং C(30 , 10). ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G হলে GBC ত্রিভুজের GD মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.(প্রকৌশল ভর্তি পরীক্ষা)'০৪]

সমাধান :