এখানে, $\int_0^4 f(x)dx = \int_{0-1}^{4-1} f(x+1)dx$

$$= \int_{-1}^{3} f(x+1)dx = 6$$

(k) Sol^n : $pv = 5 \Rightarrow p = \frac{5}{v}$

$$\int_1^2 pdv = \int_1^2 \frac{5}{v}dv = 5\int_1^2 \frac{1}{v}dv$$
$$= 5(\ln 2 - \ln 1) = 5\ ln2$$

(*l*) Sol^n : ধনাত্মক x এর জন্য $F(x) = \int_1^x \ln t dt$ হলে

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(\int_1^x \ln t dt) = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

(m) Sol^n : $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi a^2$

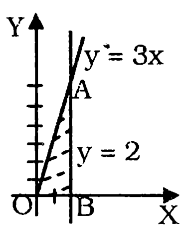
$y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ ও $y = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\pi a^2$

(n) Sol^n : রেখাঙ্কিত জায়গার ক্ষেত্রফল $= \int_2^5 ydx$

$$= \int_2^5 x^2 dx = = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{1}{3}(125-8) = 39$$

2.(a) $y = 3x$ সরলরেখা , x-অক্ষ এবং কোটি $x = 2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $y = 3x$ সরলরেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



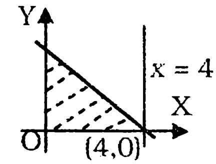
$$= \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 3x\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(2^2 - 0) = 6 \text{ বর্গ একক।}$$

2(b) $3x + 4y = 12$ সরলরেখা এবং স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[মা.বো.'০৩]**

সমাধান: $3x + 4y = 12$ অর্থাৎ $y = 3 - \frac{3}{4}x$ সরলরেখা x অক্ষকে (4, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = প্রদত্ত রেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$$= \int_0^4 y\,dx$$

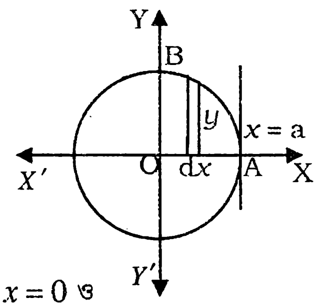
$$= \int_0^4 (3 - \frac{3}{4}x)dx$$

$$= \left[3x - \frac{3}{4}.\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 12 - \frac{3}{8}.16 = 6 \text{ বর্গ একক।}$$

3.(a) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'০৬,'০৯;ব.'১৩; প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ a ।

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$\Rightarrow y^2 = a^2 - x^2$$
$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$



ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল = $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = a$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^a y\,dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 = \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{a^2\pi}{4}$$

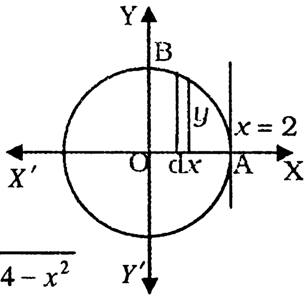
$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = 4 × ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$$= 4 \times \frac{a^2\pi}{4} \text{ বর্গ একক} = a^2\pi \text{ বর্গ একক ।}$$

3(b) $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[ঢা.'০৭]**

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 2

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$\Rightarrow y^2 = 4 - x^2$$



$\Rightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2}$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= y = \sqrt{4-x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{2^2-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{2^2-x^2}}{2} + \frac{2^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

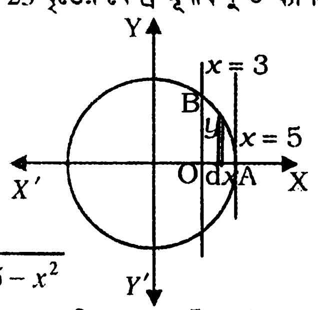
$$= \frac{4}{2}\sin^{-1}1 = 2.\frac{\pi}{2} = \pi$$

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= 4 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= 4\pi$ বর্গ একক

3(c) $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্ত এবং $x = 3$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[ঢা.'০৫,'০৯,'১৪; রা.'০৯,'১৪; য.'১৩; কু.,চ.'১৪]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 5 ।



$$x^2 + y^2 = 25$$

$$\Rightarrow y^2 = 25 - x^2$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{25-x^2}$$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= y = \sqrt{25-x^2}$

বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 3$ ও $x = 5$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_3^5 y\,dx$

$$= \int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = \int_3^5 \sqrt{5^2-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{5^2-x^2}}{2} + \frac{5^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right]_3^5$$

$$= (0 + \frac{25}{2}\sin^{-1}1) - (\frac{3\sqrt{25-9}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5})$$

$$= \frac{25}{2}.\frac{\pi}{2} - \frac{3\times4}{2} - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

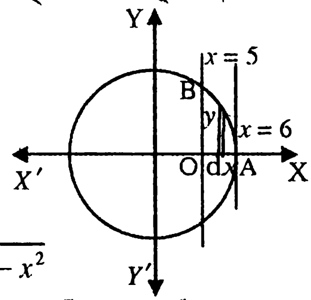
$$= \frac{25\pi}{4} - 6 - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\times(\frac{25\pi}{4} - 6 - \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5})$

$= (\frac{25\pi}{2} - 12 - 25\sin^{-1}\frac{3}{5})$ বর্গ একক।

3(d) $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্ত এবং $x = 5$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = 36$ বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু ও ব্যাসার্ধ 6 ।



$$x^2 + y^2 = 36$$

$$\Rightarrow y^2 = 36 - x^2$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{36-x^2}$$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $= y = \sqrt{36-x^2}$

বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 5$ ও $x = 6$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_5^6 y\,dx$

$$= \int_5^6 \sqrt{36-x^2}\,dx = \int_5^6 \sqrt{6^2-x^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{6^2-x^2}}{2} + \frac{6^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{6}\right]_5^6$$

$$= (0 + \frac{36}{2}\sin^{-1}1) - (\frac{5\sqrt{36-25}}{2} + \frac{36}{2}\sin^{-1}\frac{5}{6})$$

$$= 18.\frac{\pi}{2} - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 18\sin^{-1}\frac{5}{6}$$

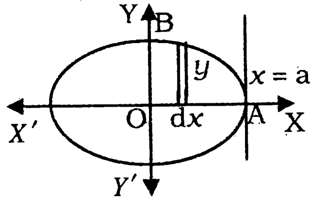
$$= 9\pi - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 18\sin^{-1}\frac{5}{6}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2[9\pi - \frac{5\sqrt{11}}{2} - 18\sin^{-1}\frac{5}{6}]$

$= (18\pi - 5\sqrt{11} - 36\sin^{-1}\frac{5}{6})$ বর্গ একক।

4. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ **উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০২; রা.'০৮; সি.'০৮; দি.'১৪]**

সমাধান ঃ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু।



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow \dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$

$\Rightarrow y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \Rightarrow y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x = a$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$=\int_0^3 y\,dx = \int_0^a \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$=\dfrac{b}{a}\left[\dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right]_0^a$

$=\dfrac{b}{a}(\dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}1)=\dfrac{ab}{2}.\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{ab\pi}{4}$ বর্গ একক।

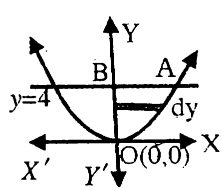
প্রদত্ত উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল = $4\times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল $=4\times\dfrac{ab\pi}{4}=ab\pi$ বর্গ একক।

5. (a) $y=4x^2$ **পরাবৃত্ত এবং** $y = 4$ **সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [কু.'০১]**

সমাধান ঃ $y=4x^2$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $O(0,0)$.

$y=4x^2 \Rightarrow x^2=\dfrac{1}{4}y$

$\Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{y}$



ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

$x=\dfrac{1}{2}\sqrt{y}$ বক্ররেখা, y-অক্ষ এবং $y = 0$ ও $y = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\int_0^4 x\,dy=\dfrac{1}{2}\int_0^4\sqrt{y}dy$

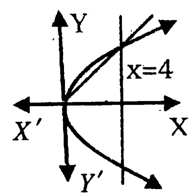
$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^4=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3}\times 8=\dfrac{8}{3}$ বর্গএকক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$=\dfrac{16}{3}$ বর্গএকক।

5(b) $y^2=4x$ **পরাবৃত্ত এবং** $y = x$ **সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**
[ঢা.'০৩,'১৩; সি.'০৯; '১১; ব.'১০; চ.,কু.'১৩]

সমাধান ঃ $y = x$ হতে y এর মান



$y^2 = 4x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2=4x \Rightarrow x = 0, 4$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল =

$y_1=2\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও $y_2=x$ সরলরেখা এবং $x=0$ ও $x=4$ রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

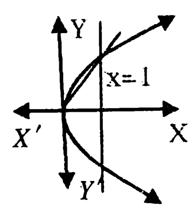
$=\int_0^4(y_1-y_2)\,dx=\int_0^4(2\sqrt{x}-x)\,dx$

$=\left[2\dfrac{x^{3/2}}{3/2}-\dfrac{x^2}{2}\right]_0^4=2\times\dfrac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{4^2}{2}$

$=\dfrac{32}{3}-8=\dfrac{32-24}{3}=\dfrac{8}{3}$ বর্গ একক।

5(c) $y^2=4x$ **পরাবৃত্ত এবং** $y = 2x$ **সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [য.'০২; চ.'১০]**

সমাধান ঃ $y = 2x$ হতে y এর মান



$y^2 = 4x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$4x^2=4x \Rightarrow x = 0, 1$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল =

$y_1=2\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও $y_2=2x$ সরলরেখা এবং $x=0$ ও $x=1$ রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$=\int_0^1(y_1-y_2)\,dx=\int_0^2(2\sqrt{x}-2x)\,dx$

$=\left[2\times\dfrac{x^{3/2}}{3/2}-2.\dfrac{x^2}{2}\right]_0^1=2\times\dfrac{2}{3}-1$

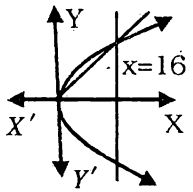
$=\dfrac{4}{3}-1=\dfrac{4-3}{3}=\dfrac{1}{3}$ বর্গ একক।

5(d) $y^2 = 16x$ **পরাবৃত্ত এবং** $y = x$ **সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [সি.'০২]

সমাধান ঃ $y = x$ হতে y এর মান

$y^2 = 16x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x^2 = 16x \Rightarrow x = 0, 16$



$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল =

$y_1 = 4\sqrt{x}$ বক্ররেখা ও $y_2 = x$ সরলরেখা এবং $x = 0$ ও $x = 16$ রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^{16} (y_1 - y_2)\, dx = \int_0^{16} (4\sqrt{x} - x)\, dx$$

$$= \left[4 \times \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{16} = 4 \times \frac{2}{3}(16)^{\frac{3}{2}} - \frac{16^2}{2}$$

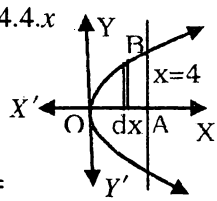
$$= \frac{512}{3} - 128 = \frac{512 - 384}{3} = \frac{128}{3}$$ বর্গ একক ।

5(e) $y^2 = 16x$ **পরাবৃত্ত এবং এর উপকেন্দ্রিক লম্ব দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [সি.'০৫]

সমাধান ঃ $y^2 = 16x \Rightarrow y^2 = 4.4.x$

পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ $x = 4$.

$y^2 = 16x \Rightarrow y = \pm 4\sqrt{x}$



ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল =

$y = 4\sqrt{x}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_0^4 y\, dx = \int_0^4 4\sqrt{x} dx$$

$$= 4\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = 4 \times \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \times 8 = \frac{64}{3}$$ বর্গএকক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = $2 \times$ ক্ষেত্র OAB এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{128}{3}$$ বর্গএকক ।

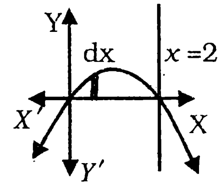
6.(a) $y = 2x - x^2$ **বক্ররেখা এবং** x**-অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [রা.'০১]

সমাধান ঃ $y = 2x - x^2 \cdots (1)$

x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0 \cdots (2)$

(1) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$0 = 2x - x^2 \Rightarrow x = 0, 2$



নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = প্রদত্ত বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

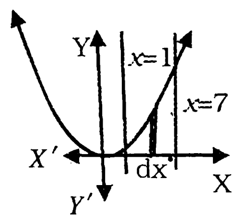
$$= \int_0^2 y\, dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx$$

$$= \left[2.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$ বর্গ একক

5(b) $y = x^2$ **বক্ররেখা,** x**-অক্ষ এবং** $x = 1$ **ও** $x = 7$ **রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [কু.'০২]

সমাধান ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল =

$x = \sqrt{y}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল



$$= \int_1^7 y\, dx = \int_1^7 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^7$$

$$= \frac{1}{3}(343 - 1) = 144$$ বর্গ একক

6(c) $y = x^2$ **বক্ররেখা এবং** $x - y + 2 = 0$ **সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [সি.'০৩]

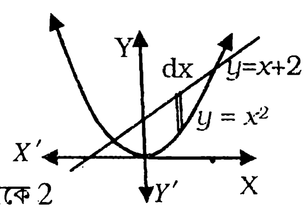
সমাধান ঃ $y = x^2 \cdots\cdots (1)$ হতে y এর মান $x - y + 2 = 0$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$x - x^2 + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = -1, 2$



এখানে x এর সীমা -1 থেকে 2

এবং $y_1 = x + 2$, $y_1 = x^2$

$$\therefore \text{নির্ণেয় ক্ষেত্রফল} = \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$= \frac{48-16-3-2}{6} = \frac{48-21}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$ বর্গএকক

7.(a) $x^2+y^2=1$ ও $y^2=1-x$ **বক্ররেখা দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [ঢা.'০১]

সমাধান ঃ $y^2 = 1-x = -(x-1)$ হতে y^2 এর মান $x^2+y^2=1$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

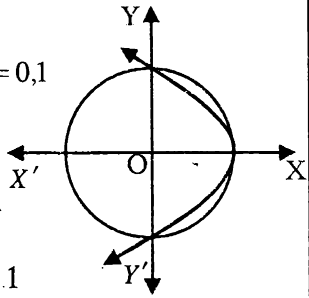
$x^2+1-x=1$

$\Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow x=0,1$

$x=1$ হলে $y=0$ এবং

$x=0$ হলে $y=\pm1$

বক্ররেখা দুইটির ছেদবিন্দু $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$



এখানে x এর সীমা 0 থেকে 1

এবং $y_1=\sqrt{1-x^2}$ $y_1=\sqrt{1-x}$.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^1 (y_1-y_2)\,dx$

$= 2\int_0^1 (\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x})\,dx$

$= 2\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x + \frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1$

$= 2(\frac{1}{2}\sin^{-1}1 - \frac{2}{3}) = 2(\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$

$= 2(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3})$ বর্গ একক

7(b) দেখাও যে, $y^2=4ax$ **এবং** $x^2=4ay$ **পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল** $\frac{16}{3}a^2$

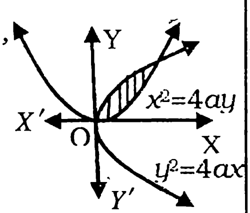
[সি. '০৪; ঢা. '০৮; কু. '০৮; দি.'০৯; প্র.ভ.প.'০৫]

প্রমাণ ঃ $x^2=4ay \Rightarrow y=\frac{x^2}{4a}$ হতে y এর মান $y^2=4ax$ সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$(\frac{x^2}{4a})^2 = 4ax \Rightarrow x^4 = 64a^3x$

$\Rightarrow x(x^3-64a^3)=0$

$\Rightarrow x=0,4a$



এখানে x এর সীমা 0 থেকে $4a$ এবং

$y_1=2\sqrt{a}\sqrt{x}$, $y_2=\frac{1}{4a}x^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^1 (y_1-y_2)\,dx$

$= \int_0^{4a} (2\sqrt{a}\sqrt{x}-\frac{1}{4a}x^2)\,dx$

$= \left[2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4a}.\frac{x^3}{3}\right]_0^{4a}$

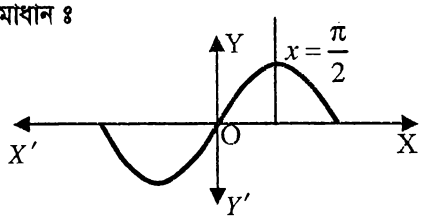
$= \frac{4\sqrt{a}}{3}(4a)^{3/2} - \frac{1}{12a}.64a^3$

$= \frac{4\sqrt{a}}{3}\times 8a\sqrt{a} - \frac{16}{3}a^2$

$= \frac{32}{3}a^2 - \frac{16}{3}a^2 = \frac{16}{3}a^2$ বর্গ একক।

8.(a) $y=\sin x$ **বক্ররেখা ,** x**-অক্ষ এবং** $x=\frac{\pi}{2}$ **রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** [চ.'০৫]

সমাধান ঃ



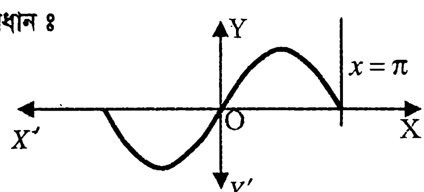
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=$ $y=\sin x$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=\frac{\pi}{2}$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \int_0^{\pi/2} y\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$

$= [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0 = 1$ বর্গ একক।

8(b) x**- অক্ষ এবং** $y=\sin x$ **বক্ররেখার একটি চাপ দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ



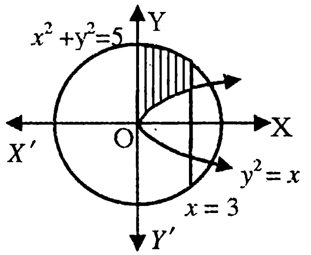
নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $=$ $y=\sin x$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=\pi$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের

ক্ষেত্রফল $= \int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$= [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0$

$= 1 + 1 = 2$ বর্গ একক।

9.



চিত্রে, $x = 3$ সরলরেখা $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তকে এবং $y^2 = x$ পরাবৃত্তকে ছেদ করেছে।

(a) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$ এর মান নির্ণয় কর।

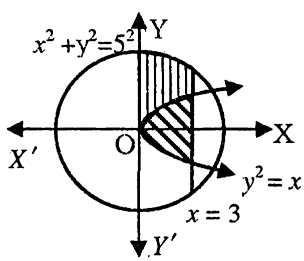
[সি.'০৯; কু.'১১; রা.'১১,'১৪; ঢা.'১১; য.'১০]

(b) প্রদত্ত বৃত্ত ও সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[য,'১৩; ঢা.'১৪; কু., রা.,চ.,'১৪]**

(c) প্রদত্ত পরাবৃত্ত ও সরলরেখার সাথে $y = 0$ সরলরেখা যে ক্ষেত্র তৈরি করে তার এবং রেখাঙ্কিত এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ (a) প্রশ্নমালা XD এর উদাহরণ 5 দ্রষ্টব্য।

(b) প্রশ্নমালা XE এর 3(c) দ্রষ্টব্য।



(c) নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\int_0^3 \sqrt{x}\,dx = 2\left[\dfrac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^3$

$= 2\times\dfrac{2}{3}(3)^{3/2} = \dfrac{4}{3}\times 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ বর্গ একক।

রেখাঙ্কিত এলাকার ক্ষেত্রফল $= \int_0^3 (y_1 - y_2)dx$, যেখানে

$y_1 = \sqrt{5^2 - x^2}, y_1 = \sqrt{x}$

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^3 (\sqrt{5^2-x^2} - \sqrt{x})dx$

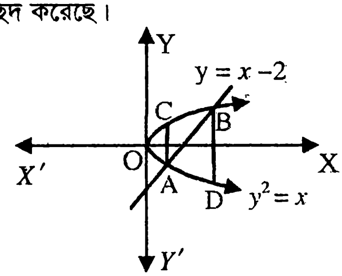
$$= \left[\frac{x\sqrt{25-x^2}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5} - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^3$$

$$= \frac{3\sqrt{25-3^2}}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} - 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{3\times4}{2} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5} - 2\sqrt{3}$$

$$= 6 - 2\sqrt{3} + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{3}{5}$$

10. চিত্রে $y = x - 2$ সরলরেখা $y^2 = x$ পরাবৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে।



(a) $\int_0^1 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[সি.'০৯; ঢা.,রা.,কু.'১০; দি.'১৩]

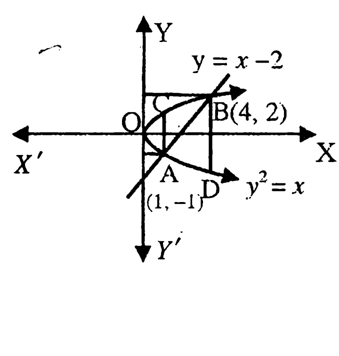
(b) $y = x - 2$ সরলরেখা ও $y^2 = x$ পরাবৃত্ত দ্বারা অবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[DU 12-13, BUET 13-14]

(c) A ও B বিন্দুগামী y-অক্ষের সমান্তরাল রেখা পরাবৃত্তটিকে যথাক্রমে D ও C বিন্দুতে ছেদ করে। ABC ও ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধানঃ (a) প্রশ্নমালা XD এর 9(d) দ্রষ্টব্য।

(b)



$y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2$ হতে x এর মান $y^2 = x$ সমীকরণে বসিয়ে পাই, $y^2 = y + 2 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0$

$\Rightarrow (y-2)(y+1) = 0$

$y = -1, 2$ এবং $x = 1, 4$

এখানে y এর সীমা -1 থেকে 2 এবং $x_1 = y + 2$, $x_2 = y^2$.

নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_{-1}^{2}(x_1 - x_2)dy$

$$= \int_{-1}^{2}(y + 2 - y^2)dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - (\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3})$$

$$= \frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{12 + 24 - 16 - 3 + 12 - 2}{6}$$

$= \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$ বর্গ একক।

(c) এখানে, A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -1)$ ও $(2, 4)$.

AOC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 0$ ও $x = 1$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ $= 2\int_0^1 y\,dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}dx$

$= 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ বর্গ একক

এখন, ABC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ AOB ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $-$ AOC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{9}{2} - \frac{4}{3} = \frac{27 - 8}{6} = \frac{19}{6}$ বর্গ একক।

এবং ADBC ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $x = 1$ ও $x = 4$ রেখাদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ

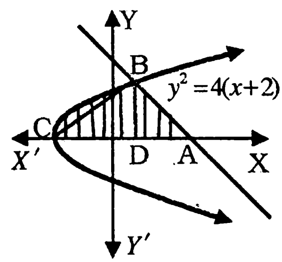
$$= 2\int_1^4 y dx = 2\int_1^4 \sqrt{x}dx = 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4$$

$$= 2 \times \frac{2}{3}(4^{3/2} - 1) = \frac{4}{3} \times (8 - 1)$$

$= \frac{28}{3}$ বর্গ একক

11. পাশের চিত্রে, $y^2 = 4(x + 2)$ বক্ররেখাটি x অক্ষকে C বিন্দুতে ও AB রেখাকে B বিন্দুতে ছেদ করে। AB রেখার ঢাল -1 ও B বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 6।

সমাধান ঃ



(a) ধরি, AB রেখার সমীকরণ $y = -x + c$ (i)

এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha \quad 6)$ যা (i) রেখা ও $y^2 = 4(x + 2)$ বক্ররেখার ছেদবিন্দু।

$\therefore$ $6 = -\alpha + c \Rightarrow c = \alpha + 6$ এবং

$6^2 = 4(\alpha + 2) \Rightarrow \alpha + 2 = 9 \Rightarrow \alpha = 7$

$\therefore$ $c = 7 + 6 = 13$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (7, 6) এবং AB রেখার সমীকরণ

$y = -x + 13 \Rightarrow x + y = 13 \Rightarrow \frac{x}{13} + \frac{y}{13} = 1$

$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (13,0)

(b) প্রদত্ত বক্ররেখা x অক্ষকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ C বিন্দুর y স্থানাঙ্ক 0

$y^2 = 4(x + 2)$ এ $y = 0$ বসিয়ে পাই, $x = -2$

$\therefore$ C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, 0)$

এখন, Δ ABC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 13 & 7 & -2 & 13 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right|$$

$= \frac{1}{2}|78+12| = \frac{90}{2} = 45$ বর্গ একক।

(c) B হতে AC এর উপর BD লম্ব টানি।

ΔBCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(CA \times BD)$

$= \frac{1}{2} \times |-2-7| \times 6 = 27$ বর্গ একক।

$y = 2\sqrt{x+2}$ বক্ররেখা, $x = 7$ সরলরেখা ও x অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_{-2}^{7} 2\sqrt{x+2}dx$

$= 2\left[\frac{(x+2)^{3/2}}{3/2}\right]_{-2}^{7}$

$= \frac{4}{3}\{(7+2)^{3/2} - (-2+2)^{3/2}\}$

$= \frac{4}{3} \times 27 = 36$ বর্গ একক।

দাগাঙ্কিত ABC সম্পূর্ণ এলাকার ক্ষেত্রফল

$= 45 + (36-27) = 54$ বর্গ একক।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $y = x^3$ বক্ররেখা, x-অক্ষ এবং $y = 0$, $x = 1$ ও $x = 3$ সরলরেখা তিনটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_1^3 y\,dx = \int_1^3 x^3\,dx$

$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{4}(81-1) = \frac{80}{4} = 20$ বর্গ একক।

2. $xy = c^2$ অধিবৃত্ত, x-অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ রেখা দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_a^b y\,dx = \int_a^b \frac{c^2}{x}dx$

$= c^2[\ln x]_a^b = c^2(\ln b - \ln a) = c^2 \ln\frac{b}{a}$

3. দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $a^2/6$.

প্রমাণ ঃ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$

$\Rightarrow y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x$

এখানে x এর সীমা 0 হতে a

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \int_0^a y\,dx$

$= \int_0^a (a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x)\,dx$

$= \left[ax - 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{x^2}{2}\right]_0^a$

$= a^2 - 2\sqrt{a}.\frac{2}{3}a^{3/2} + \frac{a^2}{2}$

$= a^2 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{6a^2 - 8a^2 + 3a^2}{6} = \frac{a^2}{6}$

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর

$\int_{1.5}^{3.5} \ln x\,dx$, $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

পরীক্ষণের নাম ঃ ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_{1.5}^{3.5} \ln x\,dx$ এর মান নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ক্ষেত্রফল $A = \int_{1.5}^{3.5} \ln x\,dx$

পাঁচটি কোটির জন্য $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2})$ ব্যবহার করে $\int_{1.5}^{3.5} \ln x\,dx$ এর মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. $1.5 \le x \le 3.5$ ব্যবধিতে সমদূরবর্তী 5টি কোটি y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপ্রান্ত ও উর্ধ্বপ্রান্তের বিয়োগফলকে $(5-1) = 4$ দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

$\therefore h = \frac{3.5 - 1.5}{4} = 0.5$

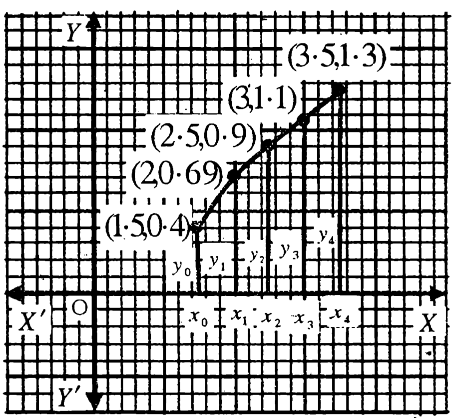
2. h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4 নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 1\cdot5$.

3. $y = f(x) = \ln x$ থেকে y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর মান নির্ণয় করি:

$x_0 = 1\cdot5$	$y_0 = \ln 1\cdot5 = 0\cdot405$
$x_1 = x_0 + h = 2$	$y_1 = \ln 2 = 0\cdot693$
$x_2 = x_1 + h = 2\cdot5$	$y_2 = \ln 2\cdot5 = 0\cdot916$
$x_3 = x_2 + h = 3$	$y_3 = \ln 3 = 1\cdot09$
$x_4 = x_3 + h = 3\cdot5$	$y_4 = \ln 3\cdot5 = 1\cdot25$

4. x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।

5. প্রাপ্ত পাঁচটি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 4টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।



হিসাব : $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2})$

$= 0\cdot5(\frac{0\cdot405}{2} + 0\cdot693 + 0\cdot916 + 1\cdot09$

$+ \frac{1\cdot25}{2}) = 1\cdot76325$ বর্গ একক (প্রায়)।

ফলাফল : নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$A = \int_{1\cdot5}^{3\cdot5} \ln x\, dx = 1\cdot76325$ বর্গ একক (প্রায়)।

মন্তব্য : n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ক্ষুদ্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুদ্ধ হবে।

পরীক্ষণের নাম পাঁচটি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ এর মান নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব : মনে করি, ক্ষেত্রফল $A = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$

পাঁচটি কোটির জন্য $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2})$ ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ এর মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি :

1. $0 \le x \le 1$ ব্যবধিতে সমদূরবর্তী 5টি কোটি y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপ্রান্ত ও ঊর্ধ্বপ্রান্তের বিয়োগফলকে (5 – 1) = 4 দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

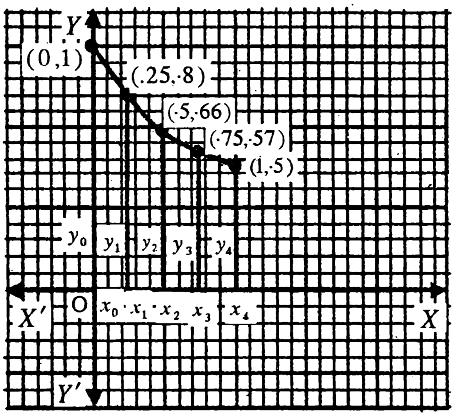
$$h = \frac{1-0}{4} = 0\cdot25$$

2. h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4 নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 0$.

3. $y = f(x) = \frac{1}{1+x}$ থেকে y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর মান নির্ণয় করি:

$x_0 = 0$	$y_0 = \frac{1}{1+0} = 1$
$x_1 = x_0 + h = 0\cdot25$	$y_1 = \frac{1}{1+0\cdot25} = 0\cdot8$
$x_2 = x_1 + h = 0\cdot5$	$y_2 = \frac{1}{1+0\cdot5} = 0\cdot66$
$x_3 = x_2 + h = 0\cdot75$	$y_3 = \frac{1}{1+0\cdot75} = 0\cdot57$
$x_4 = x_3 + h = 1$	$y_4 = \frac{1}{1+1} = 0\cdot5$

x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 15 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।



5. প্রাপ্ত পাঁচটি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 4টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।

হিসাব ঃ $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2})$

$= 0{\cdot}25(\frac{1}{2} + 0{\cdot}8 + 0{\cdot}66 + 0{\cdot}57$

$+ \frac{0{\cdot}5}{2}) = 0{\cdot}695$ বর্গ একক (প্রায়)।

ফলাফল ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$A = \int_{1.5}^{3.5} \ln x \, dx = 0{\cdot}695$ বর্গ একক (প্রায়)।

মন্তব্য : n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ক্ষুদ্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুদ্ধ হবে।

2. ছয়টি কোটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর $\int_1^2 x^2 dx$

পরীক্ষণের নাম ঃ ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_1^2 x^2 dx$ এর মান নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ক্ষেত্রফল $A = \int_1^2 x^2 dx$

পাঁচটি কোটির জন্য $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2})$ ব্যবহার করে $\int_1^2 x^2 dx$ এর মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. $1 \le x \le 2$ ব্যবধিতে সমদূরবর্তী 5টি কোটি $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপ্রান্ত ও উর্ধ্বপ্রান্তের বিয়োগফলকে (6 − 1) = 5 দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

$\therefore \quad h = \frac{2-1}{5} = 0{\cdot}2$

2. h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 1$.

3. y = f(x) = x^2 থেকে $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর মান নির্ণয় করি:

$x_0 = 1$	$y_0 = 1^2 = 1$
$x_1 = x_0 + h = 1{\cdot}2$	$y_1 = (1{\cdot}2)^2 = 1{\cdot}44$
$x_2 = x_1 + h = 1{\cdot}4$	$y_2 = (1{\cdot}4)^2 = 1{\cdot}96$
$x_3 = x_2 + h = 1{\cdot}6$	$y_3 = (1{\cdot}6)^2 = 2{\cdot}56$
$x_4 = x_3 + h = 1{\cdot}8$	$y_4 = (1{\cdot}8)^2 = 3{\cdot}24$
$x_4 = x_3 + h = 2$	$y_5 = (2)^2 = 4$

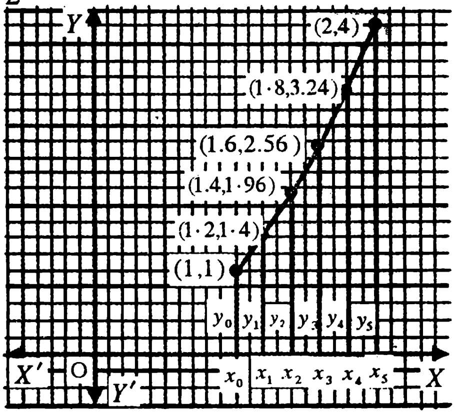
x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।

5. প্রাপ্ত ছয়টি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 5টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।

হিসাব ঃ $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2})$

$= 0{\cdot}2(\frac{1}{2} + 1{\cdot}44 + 1{\cdot}96 + 2{\cdot}56 + 3.24$

$+\frac{4}{2}) = 2{\cdot}34$ বর্গ একক (প্রায়)।



ফলাফল ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$A = \int_1^2 x^2 dx = 2{\cdot}34$ বর্গ একক (প্রায়)।

মন্তব্য : n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ক্ষুদ্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুদ্ধ হবে।

ছয়টি কোটি ব্যবহার করে মান নির্ণয় কর : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

পরীক্ষণের নাম ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ এর মান নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ মনে করি, ক্ষেত্রফল $A = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$

পাঁচটি কোটির জন্য $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2})$ ব্যবহার করে $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ এর মান নির্ণয় করি।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. $0 \le x \le 1$ ব্যবধিতে সমদূরবর্তী 5টি কোটি $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর জন্য এই জন্য ব্যবধির নিম্নপ্রান্ত ও উর্ধ্বপ্রান্তের বিয়োগফলকে (6 − 1) = 5 দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h এর মান নির্ণয় করি।

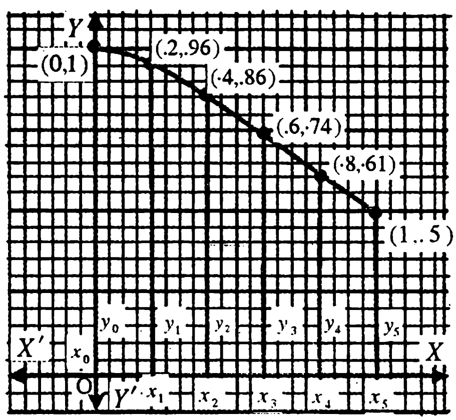
$\therefore \quad h = \frac{1-0}{5} = 0{\cdot}2$

2. h এর মান হতে $x_n = x_{n-1} + h$ সূত্র ব্যবহার করে x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 নির্ণয় করি যেখানে $x_0 = 0$.

3. $y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ থেকে $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর মান নির্ণয় করি:

$x_0 = 0$	$y_0 = \frac{1}{1+0^2} = 1$
$x_1 = x_0 + h = 0{\cdot}2$	$y_1 = \frac{1}{1+(0.2)^2} = 0{\cdot}96$
$x_2 = x_1 + h = 0{\cdot}4$	$y_2 = \frac{1}{1+(0.4)^2} = 0{\cdot}86$
$x_3 = x_2 + h = 0{\cdot}6$	$y_3 = \frac{1}{1+(0.6)^2} = 0{\cdot}74$
$x_4 = x_3 + h = 0{\cdot}8$	$y_4 = \frac{1}{1+(0.8)^2} = 0{\cdot}61$
$x_4 = x_3 + h = 1$	$y_5 = \frac{1}{1+(1)^2} = 0{\cdot}5$

x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 20 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 20 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।



5. প্রাপ্ত ছয়টি কোটিকে x অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 5টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করি।

হিসাব ঃ $A = h(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2})$

$= 0{\cdot}2(\frac{1}{2} + 0{\cdot}96 + 0{\cdot}86 + 0{\cdot}74 + 0{\cdot}61$

$+ \frac{0{\cdot}5}{2}) = 0{\cdot}784$ বর্গ একক (প্রায়)।

ফলাফল ঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল

$A = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = 0{\cdot}784$ বর্গ একক (প্রায়)।

মন্তব্য : n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ক্ষুদ্র হবে এবং A এর মান অধিকতর শুদ্ধ হবে।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$ **এর মান কত হবে? [DU 06-07,08-09;NU 06-07; KU 03-04]**

A. $\frac{\pi}{2}$ B. 1 C. 0 D. $\frac{\pi}{4}$

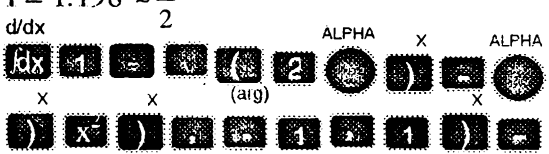
$Sol^n. I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = [\sin^{-1}(x-1)]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে Mode radian- এ নিতে হবে। অত:পর ধারাবাহিকভাবে নিম্নোক্ত Button গুলো Press করতে হবে।

$\boxed{\int dx}$ $\boxed{(}$ $\boxed{\text{Integrand}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{UpperLt}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{\text{Lower Lt}}$ $\boxed{,}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

Lower Limit বা Upper Limit এর জন্য Integrand সরাসরি অসংজ্ঞায়িত হলে Lower Limit বা Upper Limit এর নিকটবর্তী মান নিতে হয়। যেমন – 0 এর পরিবর্তে 0.01 এবং 1 এর পরিবর্তে 0.99 বসানো যেতে পারে। Calculator অনেক problem calculation করতে বেশ সময় নেয়।

$I = 1.198 \approx \frac{\pi}{2}$



$1.4293 \approx \pi/2$

2. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ **[DU,NU 05-06]**

$Sol^n. I = -\left[\frac{1}{2}(\cos^{-1} x)^2\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\{0 - (\frac{\pi}{2})^2\}$

$= \frac{\pi^2}{8}$. $I = 1.2237 \approx \frac{\pi^2}{8}$ (By Calculator)

[এখানে Upper Limit 0.99 ধরা হয়েছে।]

3. $\int_0^{\pi/2} (1 + \cos x)^2 \sin x dx = ?$ **[DU 03-04; RU 06-07, 07-08; BUET 08-09]**

Sol^n $I = -\left[\frac{1}{3}(1+\cos x)^3\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3}(1-8)$

$= \frac{7}{3}$ $I = 2.333 \approx \frac{7}{3}$ (By Calculator)

4. $\int_1^e \log_e x dx = ?$ **[DU 02-03; NU 04-05; 02-03; JU 05-06; BUET 05-06]**

$Sol^n. I = [(\log_e x - 1)x]_1^e = [(\log_e x - 1)x]_1^e = 1$

5. $\int_0^1 \frac{\cos^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}} = ?$ **[CDU 06-07,02-03; RU 02-03; 06-07; IU 04-05]**

$Sol^n. I = \left[\frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\{(\frac{\pi}{2})^2 - 0\}$

$= \frac{\pi^2}{8}$. $I = 1.02 \approx \frac{\pi^2}{8}$ (By Calculator)

[এখানে Upper Limit 0.99 ধরা হয়েছে।]

6. $\int_1^2 \frac{(x^2-1)^2 dx}{x^2} = ?$ **[JU 06-07; SU 04-05; CU 05-06]**

$Sol^n. I = 0.833 \approx \frac{5}{6}$ (By Calculator)

7. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\sqrt{\sin x} dx = ?$ **[CU 05-06]**

$Sol^n.$ $I = 0.3809 \approx \frac{8}{21}$ (By Calculator)

8. $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4} = ?$ **[BUET 06-07]**