

অধ্যায়-১০

দ্বিপদী বিস্তৃতি

অনুশীলনী-১০.২

অনুশীলনীটি পড়ে যা জানতে পারবে—

১. দ্বিপদী উপপাদ্য সম্পর্কে ধারণা।
২. $n!$ এবং nC_r এর মান নির্ণয়
৩. দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান।



১৮টি অনুশীলনীর প্রশ্ন।

৫৩টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ■ ৩০টি সাধারণ বহুনির্বাচনি ■ ৯টি বহুপদী সমাপ্তিসূচক ■ ১৪টি অভিন্ন তথ্যভিত্তিক
১৫টি সৃজনশীল প্রশ্ন ■ ১টি অনুশীলনী ■ ৯টি মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত ■ ৫টি প্রশ্নব্যাংক

১. i. ${}^8C_0 = {}^8C_8$
ii. $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$
iii. $(1+x)^n$ -এর বিস্তৃতিতে দ্বিতীয় পদটি $= \frac{n(n-1)}{2!} x^2$

নিচের কোনটি সঠিক?

- (ক) i ও ii (খ) ii ও iii
(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

❏ ব্যাখ্যা: সঠিক উত্তর নাই।

- i. সঠিক কারণ, ${}^nC_0 = 1$ এবং ${}^nC_n = 1$
ii. সঠিক নয় কারণ, $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$
iii. সঠিক নয় কারণ, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে দ্বিতীয় পদটি $= nx$
২. $(a+x)^n$ -এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ রয়েছে। এখানে n একটি—

- (ক) অঋণাত্মক রাশি (খ) ধনাত্মক রাশি
(গ) ঋণাত্মক রাশি (ঘ) ভগ্নাংশ

❏ ব্যাখ্যা: যেহেতু $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ রয়েছে সেহেতু n কে অবশ্যই শূন্য বা ধনাত্মক হতে হবে।
অতএব, n একটি অঋণাত্মক রাশি হবে।

৩. $(x+y)^5$ -এর বিস্তৃতিতে দ্বিপদী সহগ হলো:
(ক) 5, 10, 10, 5 (খ) 1, 5, 10, 10, 5, 1
(গ) 10, 5, 5, 10 (ঘ) 1, 2, 3, 3, 2, 1

❏ ব্যাখ্যা: প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে পাই $n = 5$ হলে দ্বিপদী সহগগুলো হলো: 1, 5, 10, 10, 5, 1

৪. $(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ—

- (ক) -1 (খ) $\frac{1}{2}$
(গ) 3 (ঘ) $-\frac{1}{2}$

❏ ব্যাখ্যা: $(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$

❏ অনুশীলনীর সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

$$= (1-x) \left\{ 1 + {}^8C_1 \cdot \frac{x}{2} + {}^8C_2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots \right\}$$

$$= 1 + {}^8C_1 \cdot \frac{x}{2} - x + {}^8C_2 \cdot \frac{x^2}{4} - {}^8C_1 x^2 + \dots$$

$$= 1 + \left(\frac{{}^8C_1}{2} - 1\right)x + \left(\frac{{}^8C_2}{4} - {}^8C_1\right)x^2 + \dots$$

$$x \text{ এর সহগ} = \frac{{}^8C_1}{2} - 1 = \frac{8}{2} - 1 = 4 - 1 = 3$$

৫. $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^4$ -এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদ কত?

- (ক) 4 (খ) 6
(গ) 8 (ঘ) 0

❏ ব্যাখ্যা: দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^4 = (x^2)^4 + {}^4C_1 (x^2)^3 \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) + {}^4C_2 (x^2)^2 \left(\frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$+ {}^4C_3 x^2 \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + \dots$$

$$= x^8 + {}^4C_1 x^4 + {}^4C_2 + {}^4C_3 \frac{1}{x^4} + \dots$$

এখানে, তৃতীয় পদটি x মুক্ত

$$\therefore x \text{ মুক্ত পদ} = {}^4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$$

৬. $(2-x)(1+ax)^5$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃত করলে যদি

$2+9x+cx^2$ পাওয়া যায়, তবে a ও c এর মান—

- (ক) $a=1, c=15$ (খ) $a=5, c=15$
(গ) $a=15, c=1$ (ঘ) $a=1, c=0$

❏ ব্যাখ্যা: $(2-x)(1+ax)^5$

$$= (2-x) \{ 1 + {}^5C_1 \cdot ax + {}^5C_2 \cdot (ax)^2 + \dots \}$$

$$= (2-x) \left\{ 1 + 5ax + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} a^2 x^2 + \dots \right\}$$

$$= (2-x) (1 + 5ax + 10a^2 x^2 + \dots)$$

$$= 2(1 + 5ax + 10a^2 x^2 + \dots) - x(1 + 5ax + 10a^2 x^2 + \dots)$$

$$= (2 + 10ax + 20a^2 x^2 + \dots) - (x + 5ax^2 + 10a^2 x^3 + \dots)$$

$$= 2 + (10a-1)x + (20a^2-5a)x^2 + \dots$$

প্রশ্নমতে,

$$2 + (10a-1)x + (20a^2-5a)x^2 + \dots = 2 + 9x + cx^2 \dots (i)$$

(i) নং এর উভয় পক্ষ থেকে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$10a - 1 = 9$$

$$\text{বা, } 10a = 10$$

$$\therefore a = 1$$

আবার, (i) নং এর উভয় পক্ষ থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$20a^2 - 5a = c$$

$$\text{বা, } 20(1)^2 - 5 \cdot 1 = c \quad [\because a = 1]$$

$$\text{বা, } 20 - 5 = c$$

$$\text{বা, } 15 = c$$

$$\therefore c = 15$$

$$\therefore a = 1, c = 15$$

নিচের অর্থের আলোকে ৭ ও ৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ হলে}$$

৭. ${}^nC_0 =$ কত?

(ক) 0

(গ) n

(খ) 1

(ঘ) নির্ণয় করা যায় না

৮. $n = r = 100$ হলে nC_r এর মান—

(ক) 0

(গ) 100

(খ) 1

(ঘ) 200

ব্যাখ্যা: $n = r = 100 \therefore {}^nC_r = {}^{100}C_{100}$
যেহেতু ${}^nC_n = 1 \therefore {}^{100}C_{100} = 1$

৯. $(x+y)^4$ বিস্তৃতির সহগগুলি সাজালে আমরা পাই—

(ক)
$$\begin{array}{ccccccc} & & 4 & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 5 & 5 & 1 & & \\ 1 & 6 & 10 & 6 & 1 & & \end{array}$$

(গ)
$$\begin{array}{ccccccc} & & 2 & & & & \\ & & 2 & 3 & 2 & & \\ 1 & 5 & 5 & 2 & & & \\ 2 & 7 & 10 & 7 & 2 & & \end{array}$$

(খ)
$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \end{array}$$

(ঘ)
$$\begin{array}{ccccccc} & & 6 & & & & \\ & & 6 & 12 & 6 & & \\ 6 & 18 & 18 & 6 & & & \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 & & \end{array}$$

ব্যাখ্যা: প্যাসকেলের ত্রিভুজের শীর্ষে, বামে ও ডান দিকে সর্বদা 1 থাকবে।

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১০. নিম্নোক্ত প্রতিটি ক্ষেত্রে বিস্তৃত কর :

(a) $(2+x^2)^5$ (b) $(2-\frac{1}{2x})^6$

সমাধান: (a) দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\begin{aligned} (2+x^2)^5 &= 2^5 + \binom{5}{1} \cdot 2^4 \cdot (x^2) + \binom{5}{2} \cdot 2^3 \cdot (x^2)^2 \\ &\quad + \binom{5}{3} \cdot 2^2 \cdot (x^2)^3 + \binom{5}{4} \cdot 2 \cdot (x^2)^4 + (x^2)^5 \\ [\text{অথবা } 2^5 + {}^5C_1 \cdot 2^4 \cdot (x^2) + {}^5C_2 \cdot 2^3 \cdot (x^2)^2 + {}^5C_3 \cdot 2^2 \cdot (x^2)^3 \\ &\quad + {}^5C_4 \cdot 2 \cdot (x^2)^4 + (x^2)^5] \\ &= 32 + 5 \cdot 16x^2 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 8 \cdot x^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4 \cdot x^6 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2 \cdot x^8 + x^{10} \\ &= 32 + 80x^2 + 80x^4 + 40x^6 + 10x^8 + x^{10} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

(b) দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\begin{aligned} (2-\frac{1}{2x})^6 &= 2^6 + \binom{6}{1} \cdot 2^5 \cdot (-\frac{1}{2x}) + \binom{6}{2} \cdot 2^4 \cdot (-\frac{1}{2x})^2 + \binom{6}{3} \cdot 2^3 \cdot (-\frac{1}{2x})^3 \\ &\quad + \binom{6}{4} \cdot 2^2 \cdot (-\frac{1}{2x})^4 + \binom{6}{5} \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{2x})^5 + (-\frac{1}{2x})^6 \\ [\text{অথবা } 2^6 + {}^6C_1 \cdot 2^5 \cdot (-\frac{1}{2x}) + {}^6C_2 \cdot 2^4 \cdot (-\frac{1}{2x})^2 + {}^6C_3 \cdot 2^3 \cdot (-\frac{1}{2x})^3 \\ &\quad + {}^6C_4 \cdot 2^2 \cdot (-\frac{1}{2x})^4 + {}^6C_5 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{2x})^5 + (-\frac{1}{2x})^6] \\ &= 64 + 6 \cdot 32 \cdot (-\frac{1}{2x}) + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 16 \cdot (\frac{1}{4x^2}) + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 8 \cdot (-\frac{1}{8x^3}) \\ &\quad + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 4 \cdot (\frac{1}{16x^4}) + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{32x^5}) + \frac{1}{64x^6} \\ &= 64 - \frac{96}{x} + \frac{60}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \frac{15}{4x^4} - \frac{3}{8x^5} + \frac{1}{64x^6} \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

১১. নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর।

(a) $(2+3x)^6$ (b) $(4-\frac{1}{2x})^5$

সমাধান: (a) দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই, $(2+3x)^6$

$$\begin{aligned} &= 2^6 + \binom{6}{1} \cdot 2^5 \cdot (3x) + \binom{6}{2} \cdot 2^4 \cdot (3x)^2 \\ &\quad + \binom{6}{3} \cdot 2^3 \cdot (3x)^3 + \dots \\ [\text{অথবা, } 2^6 + {}^6C_1 \cdot 2^5 \cdot (3x) + {}^6C_2 \cdot 2^4 \cdot (3x)^2 + {}^6C_3 \cdot 2^3 \cdot (3x)^3 + \dots] \\ &= 64 + 6 \cdot 32 \cdot 3x + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 16 \cdot 9x^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 8 \cdot 27x^3 + \dots \\ &= 64 + 576x + 2160x^2 + 4320x^3 + \dots \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

(b) দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\begin{aligned} (4-\frac{1}{2x})^5 &= 4^5 + \binom{5}{1} \cdot 4^4 \cdot (-\frac{1}{2x}) + \binom{5}{2} \cdot 4^3 \cdot (-\frac{1}{2x})^2 \\ &\quad + \binom{5}{3} \cdot 4^2 \cdot (-\frac{1}{2x})^3 + \dots \\ [\text{অথবা, } 4^5 + {}^5C_1 \cdot 4^4 \cdot (-\frac{1}{2x}) + {}^5C_2 \cdot 4^3 \cdot (-\frac{1}{2x})^2 + {}^5C_3 \cdot 4^2 \cdot (-\frac{1}{2x})^3 + \dots] \\ &= 1024 + 5 \cdot 256 \cdot (-\frac{1}{2x}) + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 64 \cdot (\frac{1}{4x^2}) + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 16 \cdot (-\frac{1}{8x^3}) + \dots \\ &= 1024 - \frac{640}{x} + \frac{160}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \dots \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

১২. $(p-\frac{1}{2}x)^6 = r - 96x + 5x^2 + \dots$ হলে, p এবং r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\begin{aligned} (p-\frac{1}{2}x)^6 &= p^6 + \binom{6}{1} \cdot p^5 \cdot (-\frac{1}{2}x) + \binom{6}{2} \cdot p^4 \cdot (-\frac{1}{2}x)^2 + \dots \\ &= p^6 + 6 \cdot p^5 \cdot (-\frac{1}{2}x) + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot p^4 \cdot (\frac{x^2}{4}) + \dots \\ &= p^6 - 3p^5x + \frac{15}{4}p^4x^2 - \dots \end{aligned}$$

$$\text{কিন্তু, } \left(p - \frac{1}{2}x\right)^6 = r - 96x + 5x^2 - \dots$$

$$\therefore p^6 - 3p^5x + \frac{15}{4}p^4x^2 - \dots = r - 96x + 5x^2 \dots (i)$$

(i) নং এর উভয় পক্ষ হতে ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,
 $p^6 = r \dots (ii)$

(i) নং এর উভয় পক্ষ হতে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,
 $3p^5 = 96$

$$\text{বা, } p^5 = 32$$

$$\text{বা, } p^5 = 2^5$$

$$\therefore p = 2$$

(ii) নং এ $p = 2$ বসিয়ে পাই,

$$r = 64.$$

$$\therefore p = 2, r = 64 \text{ (Ans.)}$$

১৩. $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতির x^3 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান: দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^8 &= 1 + \binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right) + \binom{8}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{8}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots \\ &= 1 + 8 \cdot \frac{x}{2} + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{8} + \dots \\ &= 1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{x}{2}\right)^8 \text{ এর বিস্তৃতিতে } x^3 \text{ এর সহগ } 7. \text{ (Ans.)}$$

১৪. x এর ঋণাত্মক উৎকর্ষ অনুসারে $\left(2 + \frac{x}{4}\right)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। উহার সাহায্যে $(1.9975)^6$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান: দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\begin{aligned} \left(2 + \frac{x}{4}\right)^6 &= 2^6 + \binom{6}{1} \cdot 2^5 \cdot \left(\frac{x}{4}\right) + \binom{6}{2} \cdot 2^4 \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \dots \\ &\quad + \binom{6}{3} \cdot 2^3 \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^3 + \dots \\ &= 64 + 6 \cdot 32 \cdot \frac{x}{4} + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 16 \cdot \frac{x^2}{16} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 8 \cdot \frac{x^3}{64} + \dots \\ &= 64 + 48x + 15x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \dots \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

$$\text{এখানে, } 2 + \frac{x}{4} = 1.9975$$

$$\text{বা, } \frac{x}{4} = 1.9975 - 2 = -0.0025$$

$$\text{বা, } x = (-0.0025) \times 4$$

$$\therefore x = -0.01$$

এখন, $x = -0.01$ বসিয়ে পাই,

$$\begin{aligned} \left\{2 + \frac{(-0.01)}{4}\right\}^6 &= 64 + 48(-0.01) + 15 \cdot (-0.01)^2 \\ &\quad + \frac{5}{2}(-0.01)^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\therefore (1.9975)^6 = 63.5215 \text{ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত] (Ans.)}$$

[বি.প্র. পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে ঘাত ৪ এর পরিবর্তে ৬ হবে।]

১৫. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে $(1.99)^5$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান: } (1.99)^5 = (2 - 0.01)^5$$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\begin{aligned} (2 - 0.01)^5 &= 2^5 + \binom{5}{1} 2^4 \cdot (-0.01) + \binom{5}{2} 2^3 \cdot (-0.01)^2 + \dots \\ &\quad + \binom{5}{3} 2^2 \cdot (-0.01)^3 + \binom{5}{4} 2 \cdot (-0.01)^4 + (-0.01)^5 \\ &= 32 + 5 \cdot 16 \cdot (-0.01) + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 8 \cdot (0.0001) + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4 \cdot (-0.000001) \\ &\quad + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 2 \cdot (0.00000001) + (-0.0000000001) \\ &= 32 - 0.8 + 0.008 - 0.00004 + 0.0000001 - 0.0000000001 \\ &= 31.2079601 \\ &= 31.2080 \text{ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত] (Ans.)} \end{aligned}$$

১৬. $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^n$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ। n এর মান নির্ণয় কর। বিস্তৃতির পদসংখ্যা ও মধ্যপদ নির্ণয় কর।

সমাধান: দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{4}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

প্রশ্নানুসারে,

$$\binom{n}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2 \binom{n}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\text{বা, } \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 2 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} = \frac{n-2}{12}$$

$$\text{বা, } 2n - 4 = 12$$

$$\text{বা, } 2n = 16$$

$$\text{বা, } n = \frac{16}{2}$$

$$\therefore n = 8$$

$$\text{যেহেতু, } n = 8$$

$$\therefore \text{বিস্তৃতির পদসংখ্যা} = 8 + 1 = 9$$

আবার, যেহেতু পদসংখ্যা ৯ (Ans.)

$$\begin{aligned} \therefore \text{৫ম পদ বিস্তৃতির মধ্যপদ এবং এটি } T_5 = T_{4+1} &= \binom{8}{4} \cdot 1^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ &= {}^8C_4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 256} = \frac{1680}{6144} = \frac{35}{128} \end{aligned}$$

$$\text{Ans. } n = 8, \text{ পদসংখ্যা } 9 \text{ ও মধ্যপদ } \frac{35}{128}$$

১৭. (a) $\left(k - \frac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 560 হলে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: (a) দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$\begin{aligned} \left(k - \frac{x}{3}\right)^7 &= k^7 + {}^7C_1 k^6 \left(-\frac{x}{3}\right) + {}^7C_2 k^5 \left(-\frac{x}{3}\right)^2 + {}^7C_3 k^4 \left(-\frac{x}{3}\right)^3 \\ &\quad + {}^7C_4 k^3 \left(-\frac{x}{3}\right)^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\text{এখানে, বিস্তৃতিটির } k^3 \text{ এর সহগ } {}^7C_4 \left(-\frac{x}{3}\right)^4$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{x^4}{3^4} = \frac{35}{81} x^4$$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{35}{81} x^4 = 560$

বা, $x^4 = 560 \times \frac{81}{35}$

বা, $x^4 = 1296$

বা, $x^4 = (\pm 6)^4$

$\therefore x = \pm 6$ (Ans.)

(b) $\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে k এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দ্বিপদী উপাদায় ব্যবহার করে পাই,

$$\left(x^2 + \frac{k}{x}\right)^6 = (x^2)^6 + {}^6C_1 (x^2)^5 \left(\frac{k}{x}\right) + {}^6C_2 (x^2)^4 \left(\frac{k}{x}\right)^2 +$$

$${}^6C_3 (x^2)^3 \left(\frac{k}{x}\right)^3 + \dots$$

$$= x^{12} + {}^6C_1 x^{10} \frac{k}{x} + {}^6C_2 x^8 \frac{k^2}{x^2} + {}^6C_3 x^6 \frac{k^3}{x^3} + \dots$$

এখানে, বিস্তৃতির x^3 এর সহগ,

$${}^6C_3 k^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot k^3 = 20k^3$$

প্রশ্নানুসারে, $20k^3 = 160$

বা, $k^3 = \frac{160}{20}$

বা, $k^3 = 8$

বা, $k^3 = 2^3$

$\therefore k = 2$ (Ans.)

৬২ অনুশীলনীর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

আবার, (ii) এর বিস্তৃতি

$$Q = (b + ax)^5 = b^5 + {}^5C_1 b^4 ax + {}^5C_2 b^3 a^2 x^2 + {}^5C_3 b^2 a^3 x^3 + {}^5C_4 b a^4 x^4 + a^5 x^5$$

$$b^2 a^3 x^3 + {}^5C_4 b a^4 x^4 + a^5 x^5$$

প্রথমতে, (i) এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ যথাক্রমে (ii)

এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অনুপাতের সমান

$$\frac{{}^6C_1 a^5 b x}{{}^6C_2 a^4 b^2 x^2} = \frac{{}^5C_1 b^4 a x}{{}^5C_2 b^3 a^2 x^2}$$

$$\frac{{}^6C_1 a^5 b x}{{}^6C_2 a^4 b^2 x^2} = \frac{{}^5C_1 b^4 a x}{{}^5C_2 b^3 a^2 x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{6 \cdot 5 \cdot b x}{1 \cdot 2 \cdot a^4 b^2 x^2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot b^4 a x}{1 \cdot 2 \cdot b^3 a^2 x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{6 \cdot a}{3 \cdot 5 \cdot b x} = \frac{5 \cdot b}{5 \cdot 2 \cdot a x}$$

$$\text{বা, } \frac{6a}{3 \cdot 5 \cdot b} = \frac{5b}{5 \cdot 2 \cdot a}$$

$$\text{বা, } \frac{a^2}{b^2} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 2 \cdot 6}$$

$$\text{বা, } \frac{a^2}{b^2} = \frac{5}{4}$$

$$\text{বা, } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\therefore a : b = \sqrt{5} : 2 \text{ (সেখানে হলে)}$$

উদাহরণ: এখন, $(a + bx)^9$ এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ যথাক্রমে

$${}^9C_1 a^8 b x \text{ ও } {}^9C_2 a^7 b^2 x^2$$

এবং $(b + ax)^8$ এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ যথাক্রমে

$${}^8C_1 b^7 a x \text{ ও } {}^8C_2 b^6 a^2 x^2$$

অতীতানুসারে,

$$\frac{{}^9C_1 a^8 b x}{{}^9C_2 a^7 b^2 x^2} = \frac{{}^8C_1 b^7 a x}{{}^8C_2 b^6 a^2 x^2}$$

$$\frac{{}^9C_1 a^8 b x}{{}^9C_2 a^7 b^2 x^2} = \frac{{}^8C_1 b^7 a x}{{}^8C_2 b^6 a^2 x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{9 \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot b x} = \frac{8 \cdot b}{1 \cdot 2 \cdot a x}$$

১৮. দেওয়া আছে,

$$P = (a + bx)^6 \dots\dots\dots (i)$$

$$Q = (b + ax)^5 \dots\dots\dots (ii)$$

$$R = (a + x)^n \dots\dots\dots (iii)$$

ক. (iii) এর বিস্তৃতিটি লেখ এবং সূত্রটি প্রয়োগ করে (i) এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. যদি (i) এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ যথাক্রমে (ii) এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদের অনুপাতের সমান হয় তবে দেখাও যে, $a : b = \sqrt{5} : 2$ । উপরিউক্ত উক্তির স্বাক্ষর একটি উদাহরণ দাও। ৪

গ. দেখাও যে, (ii) এর বিস্তৃতির মোট স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলির যোগফল বিজোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলির যোগফলের সমান। তুমি এমন একটি দ্বিপদী রাশি উল্লেখ কর, যার ক্ষেত্রেও উপরিউক্ত বিষয়টি সত্য হয়।

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

দেওয়া আছে,

$$P = (a + bx)^6 \dots\dots\dots (i)$$

$$Q = (b + ax)^5 \dots\dots\dots (ii)$$

$$R = (a + x)^n \dots\dots\dots (iii)$$

(iii) নং এর বিস্তৃতিটি নিম্নরূপ:

$$R = (a + x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + {}^nC_3 a^{n-3} x^3 + \dots\dots\dots + x^n \dots\dots\dots (iv) \text{ (Ans.)}$$

(iii) এর বিস্তৃতির সূত্র প্রয়োগ করলে (i) এর বিস্তৃতি নিম্নরূপ:

$$\begin{aligned} P &= (a + bx)^6 = a^6 + {}^6C_1 a^{6-1} b x + {}^6C_2 a^{6-2} (bx)^2 + \\ &{}^6C_3 a^{6-3} (bx)^3 + {}^6C_4 a^{6-4} (bx)^4 + {}^6C_5 a^{6-5} (bx)^5 + (bx)^6 \\ &= a^6 + {}^6C_1 a^5 b x + {}^6C_2 a^4 b^2 x^2 + {}^6C_3 a^3 b^3 x^3 + {}^6C_4 a^2 b^4 x^4 + {}^6C_5 a b^5 x^5 + b^6 x^6 \text{ (Ans.)} \end{aligned}$$

ক' হতে পাই (i) এর বিস্তৃতি

$$\begin{aligned} P &= (a + bx)^6 = a^6 + {}^6C_1 a^5 b x + {}^6C_2 a^4 b^2 x^2 + {}^6C_3 a^3 b^3 x^3 + \\ &{}^6C_4 a^2 b^4 x^4 + {}^6C_5 a b^5 x^5 + b^6 x^6 \end{aligned}$$

$$\text{বা, } \frac{9a}{9.4bx} = \frac{8b}{4.7ax}$$

$$\text{বা, } \frac{a}{4bx} = \frac{2b}{7ax}$$

$$\text{বা, } \frac{a^2}{b^2} = \frac{8}{7}$$

$$\text{বা, } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore a : b = \sqrt{8} : \sqrt{7}$$

$$1\text{ম অংশ হতে পাই } a : b = \sqrt{5} : 2 = \sqrt{6-1} : \sqrt{5-1}$$

$$2\text{দাহরণ অংশ হতে পাই, } a : b = \sqrt{8} : \sqrt{7} = \sqrt{9-1} : \sqrt{8-1}$$

সুতরাং উপরিউক্ত উক্তির স্বপক্ষে $(a + bx)^9$ ও $(b + ax)^8$ একটি উদাহরণ।

গ 'খ' হতে পাই (ii) এর বিস্তৃতি

$$Q = (b + ax)^5 = b^5 + \binom{5}{1} b^4 ax + \binom{5}{2} b^3 a^2 x^2 + \binom{5}{3} b^2 a^3 x^3 + \binom{5}{4} b a^4 x^4 + a^5 x^5$$

এখন, (ii) এর বিস্তৃতির জোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলির যোগফল $= \binom{5}{1} + \binom{5}{3} + 1$

$$= 5 + \frac{5.3.4}{1.2.3} + 1$$

$$= 5 + 10 + 1$$

$$= 16$$

এবং বিজোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলির যোগফল

$$= 1 + \binom{5}{2} + \binom{5}{4}$$

$$= 1 + \frac{5.4}{1.2} + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}$$

$$= 1 + 10 + 5$$

$$= 16$$

\therefore (ii) এর বিস্তৃতির জোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলির যোগফল বিজোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবকগুলির যোগফলের সমান।

(দেখানো হলো)

উদাহরণ:

দ্বিপদী রাশি $(a + bx)^3$ এর বিস্তৃতি:

$$a^3 + 3a^2bx + 3ab^2x^2 + b^3x^3$$

এখানে, জোড় স্থানীয় পরম ধ্রুবক 3 ও 1

এর যোগফল $= 3 + 1 = 4$ এবং বিজোড় স্থানীয়

পরম ধ্রুবক 1 ও 3 এর যোগফল $= 1 + 3 = 4$

একেত্রে উপরিউক্ত বিষয়টি সত্য।



মাস্টার ট্রেনার প্রণীত সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

★★★ $(x + y)^n$ এর দ্বিপদী বিস্তৃতি। Text পৃষ্ঠা-২১১

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3} x^{n-3}y^3 + \dots + y^n$$

[n যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা]

১. $(x + y)^n$ এর বিস্তৃতিতে 6 তম পদ নিচের কোনটি? (সহজ)

- ক ${}^nC_5 x^{n-5} y^5$ খ ${}^nC_6 x^{n-6} y^6$
গ ${}^nC_7 x^{n-7} y^7$ ঘ y^7

২. $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদ সংখ্যা কয়টি? (সহজ)

- ক 0 খ 1
গ 2 ঘ 3

৩. $\left(p - \frac{1}{2}x\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে 4 তম পদ কত? (সহজ)

- ক $6C_r \cdot p^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r$ খ $nC_4 (P)^{n-4} \left(-\frac{1}{2}x\right)^4$
গ $nC_3 P^{n-3} \left(-\frac{1}{2}x\right)^3$ ঘ $3C_r P^{3-r} \left(-\frac{1}{2}x\right)^3$

৪. $\left(2x + \frac{3}{x^2}\right)^7$ এর তৃতীয় পদ পর্যন্ত সঠিক বিস্তৃতি কোনটি? (মধ্যম)

- ক $142x^7 + 1221x^5 + 3048x^2 + \dots$
খ $128x^7 + 1221x^5 + \frac{6048}{x} + \dots$
গ $128x^7 + 1344x^4 + 6048x + \dots$
ঘ $256x^7 + 1334x^4 + 3024x^2 + \dots$

৫. $(2\sqrt{x} + \sqrt{y})^8$ হলে এর পঞ্চম পদ কোনটি? (মধ্যম)

- ক $16^8 C_4 x^2 y^2$ খ $12^8 C_5 x^5 y^3$
গ $18^8 C_4 xy^4$ ঘ $18^8 C_4 x^2 y^2$

৬. $\left(2x^2 - \frac{1}{4x}\right)^5$ এর বিস্তৃতিতে x^4 আছে কত তম পদে? (মধ্যম)

- ক 2 খ 3
গ 4 ঘ 5

$$\text{ব্যাখ্যা: } (r+1)\text{ তম পদ} = {}^5C_r (2x^2)^{5-r} \left(-\frac{1}{4x}\right)^r$$

$$= {}^5C_r 2^{5-r} \left(-\frac{1}{4}\right)^r x^{10-3r}$$

$$\therefore x^{10-3r} = x^4 \text{ বা, } 10 - 4 = 3r \text{ বা, } r = \frac{6}{3} = 2$$

\therefore 3 তম পদ।

৭. $(x + y)^8$ এর বিস্তৃতিতে শেষ পদের মান 256 হলে, y এর মান কত? (মধ্যম)

- ক -2 খ 0 গ 2 ঘ 8

৮. $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^{11} এর সহগ কত? (মধ্যম)

- ক -56 খ -108 গ 64 ঘ 70

$$\text{ব্যাখ্যা: } (r+1)\text{-তম পদ} = {}^8C_r x^{4(8-r)} \left(-\frac{1}{x^3}\right)^r$$

$$= {}^8C_r x^{32-4r-3r} (-1)^r = {}^8C_r x^{32-7r} (-1)^r$$

$$\therefore x^{32-7r} = x^{11} \text{ বা, } 7r = 32 - 11 = 21 \therefore r = 3$$

$$\therefore x^{11} \text{ এর সহগ} = {}^8C_3 (-1)^3 = -56$$

৯. $(1 + x) \left(1 + \frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কত? (কঠিন)

- ক -5 খ 5 গ 8 ঘ 16

$$\text{ব্যাখ্যা: } (1 + x) \left(1 + 8 \cdot \frac{x}{2} + \dots\right) = 1 + 4x + x + 4x^2$$

$$= 1 + 5x + \dots$$

১০. $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^8 = 1 + 8 \cdot \frac{x}{2} + 28 \cdot \frac{x^2}{4} + \dots$ হলে, x^3 এর সহগ কত? (মধ্যম)

- ক 7 খ 8 গ 56 ঘ 112

$$\text{ব্যাখ্যা: } {}^8C_3 \left(\frac{x}{2}\right)^3 = 56 \cdot \frac{x^3}{8} = 7x^3$$