শ্রেণির কাজ পৃষ্ঠা নং ৫৫০

সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

অনুশীলনী-৯.২

অনুশীলনীটি পড়ে যা জানতে পারবে—

১. লগারিদমের বিভিন্ন সূত্রের প্রমাণ ও প্রয়োগ।
২. লগারিদমের ভিত্তি পরিবর্তনের নিয়ম।
৩. সূচকীয়, লগারিদমীয় ও পরমমান ফাংশনের ধারণার ব্যাখ্যা এবং এ সংক্রান্ত গাণিতিক সমস্যার সমাধান।
৪. ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।
৫. বিভিন্ন প্রকার ফাংশনকে লেখচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন।
৬. ক্যালকুলেটরের সাহায্যে লগ ও প্রতিলগ নির্ণয়।

PRACTICE P

১৭টি অনুশীলনীর প্রশ্ন।
৭৯টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ■ ৩৯টি সাধারণ বহুনির্বাচনি ■ ১৭টি বহুপদী সমাপ্তিসূচক ■ ২৩টি অভিন্ন তথ্যভিত্তিক
৩৭টি সৃজনশীল প্রশ্ন ■ ৩টি অনুশীলনী ■ ১৫টি শ্রেণির কাজ ■ ১৪টি মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত ■ ৫টি প্রশ্নব্যাংক

অনুশীলনীর সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১. $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}}\right\}^{\frac{a}{a-b}}$ এর সরলমান কোনটি?

ক 0 খ 1
গ a ঘ x **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}}\right\}^{\frac{a}{a-b}} = \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}\times\frac{a}{a-b}}$

$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}\times\frac{a}{a-b}} = \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{a} = x$

২. যদি a, b, p > 0 এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হয়, তবে
i. $\log_a P = \log_b P \times \log_a b$
ii. $\log_a\sqrt{a} \times \log_b\sqrt{b} \times \log_c\sqrt{c}$ এর মান 2
iii. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii
গ i ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

ব্যাখ্যা: (i) সূত্রানুসারে।

(ii) $\log_a\sqrt{a} \times \log_b\sqrt{b} \times \log_c\sqrt{c} = \log_a a^{\frac{1}{2}} \times \log_b b^{\frac{1}{2}} \times \log_c c^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2}\log_a a \times \frac{1}{2}\log_b b \times \frac{1}{2}\log_c c$
$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{8}$

(iii) ধরি, $p = \log_a y$ এবং $q = \log_a x$.
সুতরাং $a^p = y$, $a^q = x$
বা, $(a^p)^q = y^q$
$\therefore y^q = a^{pq}$.
এবং $(a^q)^p = x^p$
বা, $x^p = a^{pq}$.
বা, $x^p = y^q$.
$\therefore x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

৩-৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও যখন $x, y, z \neq 0$ এবং $a^x = b^y = c^z$

৩. কোনটি সঠিক?

ক $a = b^{\frac{y}{z}}$ খ $a = c^{\frac{z}{y}}$
গ $a = c^{\frac{z}{x}}$ ঘ $a \neq \frac{b^2}{c}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $a^x = c^z$ বা, $a = (c^z)^{\frac{1}{x}}$ $\therefore a = c^{\frac{z}{x}}$

৪. নিচের কোনটি ac এর সমান?

ক $b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}}$ খ $b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{z}{y}}$
গ $b^{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}}$ ঘ $b^{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $a^x = b^y$
$a = (b^y)^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{y}{x}}$
$c^z = b^y$
$c = (b^y)^{\frac{1}{z}} = b^{\frac{y}{z}}$
$\therefore ac = b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}}$

৫. $b^2 = ac$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ খ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$
গ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{x}$ ঘ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{z}{2}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $a^x = b^y$ $\therefore a = b^{\frac{y}{x}}$
আবার, $c^z = b^y$ $\therefore c = b^{\frac{y}{z}}$
এখন, $b^2 = ac = b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}} = b^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$
বা, $\frac{y}{x}+\frac{y}{z} = 2$ $\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন-৬. দেখাও যে,

(ক) $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right) = 0$

সমাধান: বামপক্ষ $= \log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)$

$= \log_k \frac{a^n}{b^n}\cdot\frac{b^n}{c^n}\cdot\frac{c^n}{a^n}$

$= \log_k 1$

$= 0$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(খ) $\log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right) + \log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right) + \log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right) = 0$

সমাধান: বামপক্ষ

$= \log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right) + \log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right) + \log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right)$

$= (\log_k a + \log_k b)(\log_k a - \log_k b) + (\log_k b + \log_k c)(\log_k b - \log_k c) + (\log_k c + \log_k a)(\log_k c - \log_k a)$

$= (\log_k a)^2 - (\log_k b)^2 + (\log_k b)^2 - (\log_k c)^2 + (\log_k c)^2 - (\log_k a)^2$

$= 0$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(গ) $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$

সমাধান: বামপক্ষ $= \log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \log_{\sqrt{c}} a$

$= \log_{\sqrt{a}}(\sqrt{b})^2 \times \log_{\sqrt{b}}(\sqrt{c})^2 \times \log_{\sqrt{c}}(\sqrt{a})^2$

$= 2\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b} \times 2\log_{\sqrt{b}}\sqrt{c} \times 2\log_{\sqrt{c}}\sqrt{a}$ $[\because \log_a P^r = r\log_a P]$

$= 8\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}}\sqrt{c} \times \log_{\sqrt{c}}\sqrt{a}$

$= 8\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}}\sqrt{a}$ $[\because \log_a P = \log_a b \times \log_b P]$

$= 8\log_{\sqrt{a}}\sqrt{a}$ $[\because \log_a P = \log_a b \times \log_b P]$

$= 8\cdot 1$ $[\because \log_a a = 1]$

$= 8$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ঘ) $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b$

সমাধান: বামপক্ষ $= \log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right)$

$= \log_a \log_a a^{a^b} \log_a a$ $[\because \log_a P^r = r\log_a P]$

$= \log_a \log_a a^{a^b}.1$ $[\because \log_a a^1 = 1]$

$= \log_a a^b \log_a a$

$= \log_a a^b$ $[\because \log_a a = 1]$

$= b\log_a a$

$= b\cdot 1$

$= b$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন-৭. (ক) যদি $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b}$ **হয়, তবে দেখাও যে,** $a^a b^b c^c = 1$

সমাধান: ধরি, $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b} = m$

$\therefore$ $\log_k a = m(b-c)$

বা, $a\log_k a = ma(b-c)$ [উভয়পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $\log_k a^a = m(ab-ac)$ ...... (i)

আবার, $\log_k b = m(c-a)$

বা, $b\log_k b = mb(c-a)$ [উভয়পক্ষকে b দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $\log_k b^b = m(bc-ab)$ ...... (ii)

এবং $\log_k c = m(a-b)$

বা, $c\log_k c = mc(a-b)$ [উভয়পক্ষকে c দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $\log_k c^c = m(ac-bc)$ ...... (iii)

এখন, (i), (ii) এবং (iii) যোগ করে পাই,

বা, $\log_k a^a + \log_k b^b + \log_k c^c = m(ab - ca + bc - ab + ca - bc)$

বা, $\log_k a^a b^b c^c = 0$

বা, $\log_k a^a b^b c^c = \log_k 1$

$\therefore$ $a^a b^b c^c = 1$ **(দেখানো হলো)**

(খ) যদি $\frac{\log_k a}{y-z} = \frac{\log_k b}{z-x} = \frac{\log_k c}{x-y}$ **হয়, তবে দেখাও যে,**

(১) $a^{y+z} b^{z+x} c^{x+y} = 1$

(২) $a^{y^2+yz+z^2} . b^{z^2+zx+x^2} . c^{x^2+xy+y^2} = 1$

সমাধান: (১) ধরি, $\frac{\log_k a}{y-z} = \frac{\log_k b}{z-x} = \frac{\log_k c}{x-y} = m$

তাহলে, $\frac{\log_k a}{y-z} = m$

বা, $\log_k a = m(y-z)$

বা, $(y+z)\log_k a = m(y-z)(y+z)$

[উভয়পক্ষকে (y + z) দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $\log_k a^{y+z} = m(y^2 - z^2)$ .... (i)

আবার, $\frac{\log_k b}{z-x} = m$

বা, $\log_k b = m(z-x)$

বা, $(z+x)\log_k b = m(z+x)(z-x)$

[উভয়পক্ষকে (z + x) দ্বারা গুণ করে]

$\log_k b^{z+x} = m(z^2 - x^2)$ .... (ii)

এবং $\frac{\log_k c}{x-y} = m$

বা, $\log_k c = m(x-y)$

বা, $(x+y)\log_k c = m(x+y)(x-y)$

[উভয়পক্ষকে (x + y) দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $\log_k c^{x+y} = m(x^2 - y^2)$ .... (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\therefore$ $\log_k a^{y+z} + \log_k b^{z+x} + \log_k c^{x+y} = m(y^2 - z^2 + z^2 - x^2 + x^2 - y^2)$

বা, $\log_k a^{y+z} b^{z+x} c^{x+y} = 0 = \log_k 1$

$\therefore$ $a^{y+z} b^{z+x} c^{x+y} = 1$ **(দেখানো হলো)**

(২) ধরি $\frac{\log_k a}{y-z} = \frac{\log_k b}{z-x} = \frac{\log_k c}{x-y} = m$

$\therefore$ $\log_k a = m(y-z)$

বা, $(y^2 + yz + z^2)\log_k a = m(y-z)(y^2 + yz + z^2)$

$\therefore$ $\log_k a^{y^2+yz+z^2} = m(y^3 - z^3)$ .... (i)

আবার, $\log_k b = m(z-x)$

বা, $(z^2 + zx + x^2)\log_k b = m(z-x)(z^2 + zx + x^2)$

$\therefore \quad \log_k b^{z^2+zx+x^2} = m(z^3 - x^3)$ .... (ii)

এবং $\log_k c = m(x - y)$

বা, $(x^2 + xy + y^2)\log_k c = m(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$\therefore \quad \log_k c^{x^2+xy+y^2} = m(x^3 - y^3)$ .... (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\log_k a^{y^2+yz+z^2} + \log_k b^{z^2+zx+x^2} + \log_k c^{x^2+xy+y^2}$
$= m(y^3 - z^3) + m(z^3 - x^3) + m(x^3 - y^3)$

বা, $\log_k a^{y^2+yz+z^2} b^{z^2+zx+x^2} c^{x^2+xy+y^2} =$
$m(y^3 - z^3 + z^3 - x^3 + x^3 - y^3)$ $[\because \log_a P^r = r\log_a P]$

বা $\log_k a^{y^2+yz+z^2} b^{z^2+zx+x^2} c^{x^2+xy+y^2} = 0 = \log_k 1$

$\therefore \quad a^{y^2+yz+z^2} b^{z^2+zx+x^2} c^{x^2+xy+y^2} = 1$ **(দেখানো হলো)**

(গ) যদি $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$

বা, $\log_k(1 + x) = 2\log_k x$

বা, $\log_k(1 + x) = \log_k x^2$ $[(\log_a P^r = r\log_a P)]$

বা, $1 + x = x^2$

বা, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $4x^2 - 4x - 4 = 0$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2x)^2 - 2.2x.1 + 1^2 - 5 = 0$

বা, $(2x - 1)^2 = 5$

বা, $2x - 1 = \sqrt{5}$ [ঋনাত্মক মান বর্জন করে]

বা, $2x = 1 + \sqrt{5}$

বা, $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

(ঘ) দেখাও যে, $\log_k \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 2\log_k\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$

সমাধান: বামপক্ষ $= \log_k \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$= \log_k \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}$

[লগের ভিতরের রাশির লব ও হরকে $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \log_k \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x^2 - \left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$

$= \log_k \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x^2 - x^2 + 1}$

$= \log_k\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^2$

$= 2\log_k\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$ $[\because \log_a P^r = r\log_a P]$

$\therefore \log_k \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 2\log_k\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$ **(দেখানো হলো)**

(ঙ) যদি $a^{3-x} b^{5x} = a^{5+x} b^{3x}$ হয়, তবে দেখাও যে,

$x \log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a^{3-x} b^{5x} = a^{5+x} b^{3x}$

বা, $\frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{5+x}}{a^{3-x}}$ [উভয়পক্ষকে $a^{3-x}.b^{3x}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $b^{5x-3x} = a^{5+x-3+x}$

বা, $b^{2x} = a^{2+2x}$

বা, $b^{2x} = a^2 \cdot a^{2x}$

বা, $\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$ [উভয় পক্ষকে a^{2x} দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\log_k \frac{b^{2x}}{a^{2x}} = \log_k a^2$ [উভয়পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

বা, $\log_k\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = \log_k a^2$

বা, $2x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = 2\log_k a$

$\therefore \quad x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$ **(দেখানো হলো)**

(চ) যদি $xy^{a-1} = p$, $xy^{b-1} = q$, $xy^{c-1} = r$ হয়, তবে দেখাও যে, $(b - c)\log_k p + (c - a)\log_k q + (a - b)\log_k r = 0$

সমাধান: বামপক্ষ $= (b - c)\log_k p + (c - a)\log_k q + (a - b)\log_k r$

$= \log_k p^{b-c} + \log_k q^{c-a} + \log_k r^{a-b}$

$= \log_k(xy^{a-1})^{b-c} + \log_k(xy^{b-1})^{c-a} + \log_k(xy^{c-1})^{a-b}$

$= \log_k x^{b-c} + \log_k y^{ab-ac-b+c} + \log_k x^{c-a} + \log_k y^{bc-ab-c+a} + \log_k x^{a-b} + \log_k y^{ac-bc-a+b}$

$= \log_k x^{b-c} + \log_k x^{c-a} + \log_k x^{a-b} + \log_k y^{ab-ac-b+c} + \log_k y^{bc-ab-c+a} + \log_k y^{ac-bc-a+b}$

$= \log_k(x^{b-c}.x^{c-a}.x^{a-b}) + \log_k(y^{ab-ac-b+c}.y^{bc-ab-c+a}.y^{ac-bc-a+b})$

$= \log_k x^{b-c+c-a+a-b} + \log_k y^{ab-ac-b+c+bc-ab-c+a+ac-bc-a+b}$

$= \log_k x^0 + \log_k y^0$

$= \log_k 1 + \log_k 1$

$= 0 + 0 = 0$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ছ) যদি $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a = b^b = c^c$

সমাধান: ধরি, $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a} = m$

$\therefore \quad \log_k(ab) = \frac{m(a+b)}{ab}$ ... ... (i)

আবার $\log_k(bc) = \frac{m(b+c)}{bc}$ ... ... (ii)

এবং $\log_k(ca) = \frac{m(c+a)}{ca}$ ... ... (iii)

এখন, (i) নং, (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\log_k(ab) + \log_k(bc) + \log_k(ca) = \frac{m(a+b)}{ab} + \frac{m(b+c)}{bc} + \frac{m(c+a)}{ca}$

বা, $\log_k(ab \cdot bc \cdot ca) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right]$

বা, $\log_k(abc)^2 = 2m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$

বা, $2\log_k(abc) = 2m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$

$\therefore \log_k(abc) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$ ... ... (iv)

(iv) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ab) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right] - \frac{m(a+b)}{ab}$

$= m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$

বা, $\log_k \frac{abc}{ab} = \frac{m}{c}$

বা, $\log_k c = \frac{m}{c}$

বা, $c \log_k c = m$

বা, $\log_k c^c = m$

$\therefore \quad c^c = k^m$ ... ... (v)

আবার, (iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(bc) = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right] - \frac{m(b+c)}{bc}$

বা, $\log_k \frac{abc}{bc} = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right]$

বা, $\log_k a = \frac{m}{a}$

বা, $a \log_k a = m$

বা, $\log_k a^a = m$

$\therefore \quad a^a = k^m$ ... ... (vi)

পুনরায়, (iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ca) = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right] - \frac{m(c+a)}{ca}$

বা, $\log_k \frac{abc}{ca} = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right]$

বা, $\log_k b = \frac{m}{b}$

বা, $b \log_k b = m$

বা, $\log_k b^b = m$

$\therefore \quad b^b = k^m$ ... ... (vii)

সুতরাং, (v), (vi) ও (vii) নং থেকে লেখা যায়,

$a^a = b^b = c^c = k^m$

$\therefore \quad a^a = b^b = c^c$ **(দেখানো হলো)**

বিকল্প সমাধান:

ধরি, $\frac{ab \log_k ab}{a+b} = \frac{bc \log_k bc}{b+c} = \frac{ca \log_k ca}{c+a} = p$

তাহলে, $\log_k ab = \frac{p(a+b)}{ab}$

বা, $\log_k a + \log_k b = p\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে, $\log_k b + \log_k c = p\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)$ ... ... (ii)

এবং $\log_k c + \log_k a = p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$ ... ... (iii)

এখন, (i) + (ii) + (iii) থেকে পাই,

$2(\log_k a + \log_k b + \log_k c) = 2p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\log_k a + \log_k b + \log_k c = p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ ... ... (iv)

আবার, (iv) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k c = p\left(\frac{1}{c}\right)$

বা, $c \log_k c = p$

$\therefore \quad \log_k c^c = p$

(iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k a = p\left(\frac{1}{a}\right)$

বা, $a \log_k a = p$

$\therefore \quad \log_k a^a = p$

(iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k b = p\left(\frac{1}{b}\right)$

বা, $b \log_k b = p$

$\therefore \quad \log_k b^b = p$

সুতরাং, $\log_k a^a = \log_k b^b = \log_k c^c$

$\therefore \quad a^a = b^b = c^c$ **(দেখানো হলো)**

(জ) যদি $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$

সমাধান: ধরি, $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z} = m$

$\log_k x = \frac{x(y+z-x)}{m}$

আবার, $\log_k y = \frac{y(z+x-y)}{m}$

এবং $\log_k z = \frac{z(x+y-z)}{m}$

এখন, $y \log_k x + x \log_k y = \frac{xy(y+z-x)}{m} + \frac{xy(z+x-y)}{m}$

$= \frac{xy}{m}(y+z-x+z+x-y) = \frac{2xyz}{m}$

বা, $\log_k x^y + \log_k y^x = \frac{2xyz}{m}$

বা, $\log_k x^y y^x = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore \quad x^y y^x = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ... ... (i)

আবার, $z \log_k y + y \log_k z = \frac{yz(z+x-y)}{m} + \frac{yz(x+y-z)}{m}$

বা, $\log_k y^z + \log_k z^y = \frac{yz}{m}(z+x-y+x+y-z)$

বা, $\log_k y^z z^y = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore \quad y^z z^y = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ... ... (ii)

পুনরায়, $x \log_k z + z \log_k x = \frac{zx(x+y-z)}{m} + \frac{zx(y+z-x)}{m}$

বা, $\log_k z^x + \log_k x^z = \frac{zx}{m}(x+y-z+y+z-x)$

বা, $\log_k z^x x^z = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore \quad z^x x^z = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ... ... (iii)

সুতরাং (i), (ii) ও (iii) নং থেকে পাই,

$x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন-৮. লগ সারণি (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য) ব্যবহার করে P এর আসন্ন মান নির্ণয় কর যেখানে,

(ক) $P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ যেখানে $\pi \approx 3.1416$, $g = 981$ এবং $l = 25.5$

(খ) $P = 10000 \times e^{0.05t}$ যেখানে $e = 2.718$ এবং $t = 13.86$

সমাধান:

(ক) $P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

বা, $P = 2 \times 3.1416\sqrt{\frac{25.5}{981}}$ যেখানে $\pi = 3.1416$, $l = 25.5$, $g = 981$

বা, $\log P = \log 6.2832 + \frac{1}{2}\log 25.5 - \frac{1}{2}\log 981$ [log নিয়ে]

বা, $\log P = 0.79818 + \frac{1}{2}(1.40654 - 2.99167)$ [log সারণি থেকে]

বা, $\log P = 0.7818 - 0.79257$

বা, $\log P = 0.005615$

$\therefore$ $P = \text{antilog } 0.005615$

$\therefore$ $P = 1.01302$ (প্রায়)

উত্তর: 1.01302 (প্রায়)

(খ) $P = 10000 \times e^{0.05t}$ যেখানে $e = 2.718$ এবং $t = 13.86$

$\log P = \log 10000 + \log e^{0.05t}$ [log নিয়ে]

বা, $\log P = 4 + 0.05 \times 13.86 \log 2.718$

বা, $\log P = 4 + 0.693 \times 0.43425$ [log সারণি থেকে]

বা, $\log P = 4 + 0.30093$

বা, $\log P = 4.30093$

$\therefore$ $P = \text{antilog } 4.30093 = 19995.62$ (প্রায়)

উত্তর: 19995.62 (প্রায়)

[পাঠ্য বইয়ে $e = 1.718$ এর স্থলে $e = 2.718$ হবে]

প্রশ্ন-৯. $\ln P \approx 2.3026 \times \log P$ সূত্র ব্যবহার করে $\ln P$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর যখন—

(ক) $P = 10000$, (খ) $P = 0.001 e^2$ (গ) $P = 10^{100} \times \sqrt{e}$

সমাধান:

(ক) দেওয়া আছে,

$P = 10000$

বা, $\log P = \log 10000$ [উভয় পক্ষে log নিয়ে]

$= \log 10^4$

$= 4 \log 10$

$= 4 \times 1$

$\therefore$ $\log P = 4$

এখন, $\ell n P = 2.3026 \times \log P$

$= 2.3026 \times 4$ [মান বসিয়ে]

$= 9.2104$ (প্রায়) (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $P = 0.001 e^2$

বা, $\log P = \log (0.001 e^2)$ [উভয় পক্ষে log নিয়ে]

$= \log 0.001 + \log e^2$

$= \log 10^{-3} + 2\log e$

$= -3 \log 10 + 2\log 2.71828$ [$\because e = 2.71828$]

$= -3 \times 1 + 2 \times 0.434249452$ [log সরণি থেকে]

$= -3 + 0.868498904$

$\log P = -2.131501096$

$\ell n P = 2.3026 \times \log p$

$= 2.3026 \times (-2.13141162)$ [মান বসিয়ে]

$= -4.90779$ (প্রায়) (Ans.)

(গ) দেওয়া আছে, $P = 10^{100} \times \sqrt{e}$

বা, $\log P\ (10^{100} \times \sqrt{e})$ [উভয় পক্ষে log নিয়ে]

$= \log 10^{100} + \log\sqrt{e}$

$= 100 \log 10 + \frac{1}{2} \log e$

$= 100 \times 1 + \frac{1}{2}\log 2.718$ [$\because e = 2.718$]

$= 100 + \frac{1}{2} \times 0.434249452$ [log সরণি থেকে]

$= 100 + 0.217124726$

$\therefore \log P = 100.217124726$

এখন, $\ell n P = 2.3026 \times \log P$

$= 2.3026 \times 100.21712476$ [মান বসিয়ে]

$= 230.76$ (প্রায়) (Ans.)

প্রশ্ন-১০. লেখচিত্র অঙ্কন কর :

(ক) $y = 3^x$ (খ) $y = -3^x$ (গ) $y = 3^{x+1}$ (ঘ) $y = -3^{x+1}$

(ঙ) $y = 3^{-x+1}$ (চ) $y = 3^{x-1}$

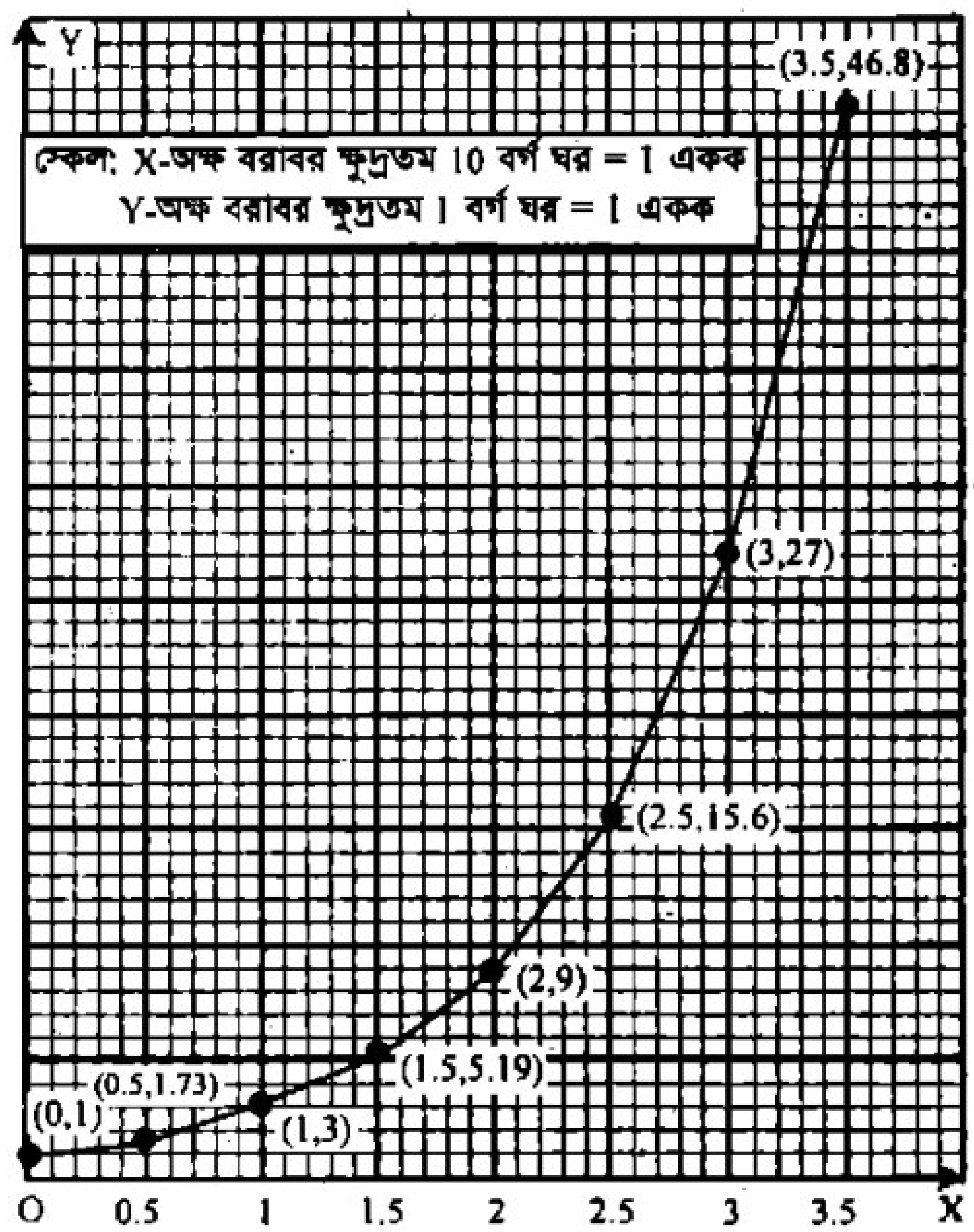
সমাধান :

(ক) ধরি, $y = f(x) = 3^x$

0 থেকে 3.5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো-

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X অক্ষ XOX' এবং Y অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = 3^x$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।

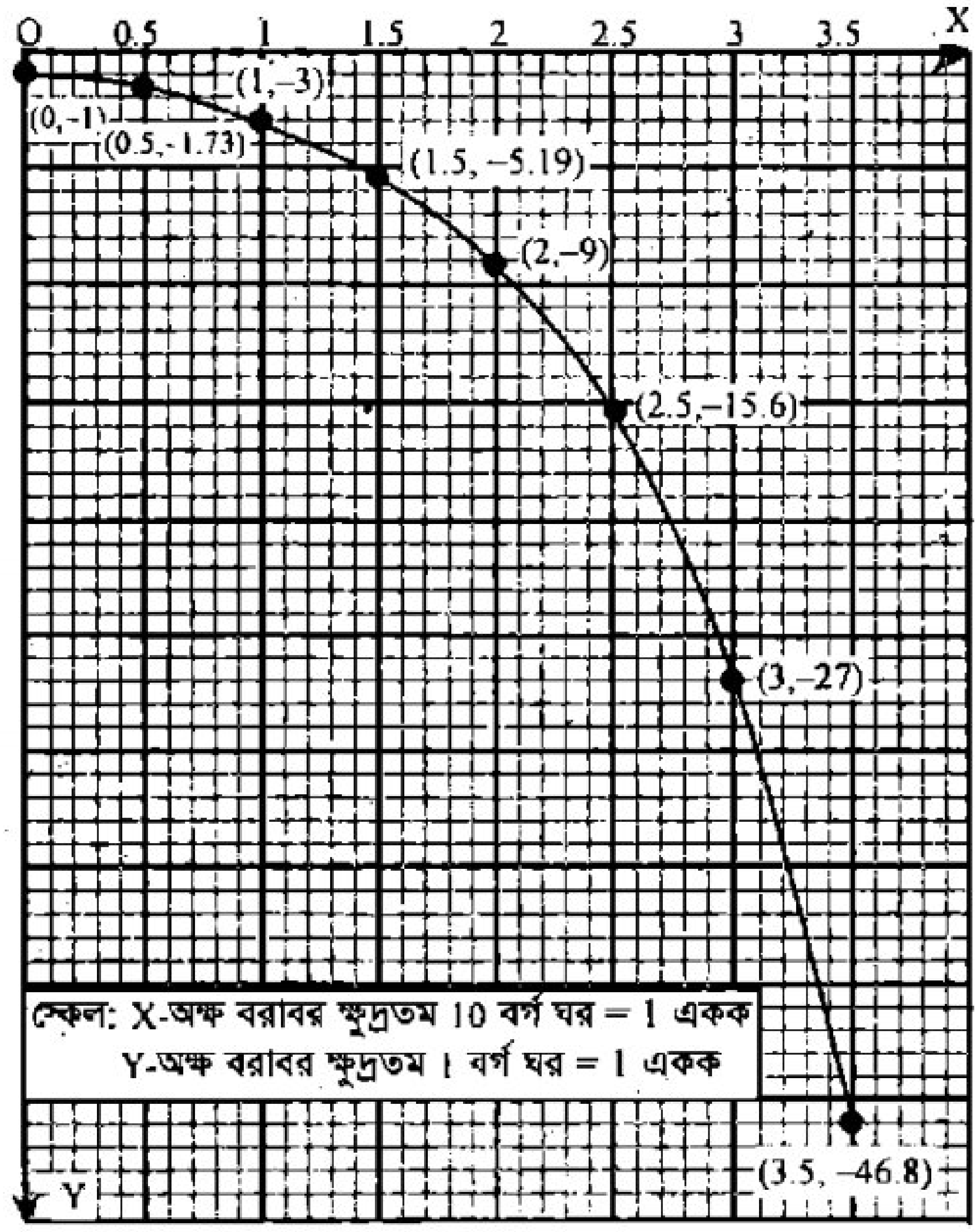


(খ) ধরি, $y = f(x) = -3^x$

0 থেকে 3.5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	−1	−1.73	−3	−5.19	−9	−15.6	−27	−46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X অক্ষ XOX' এবং Y অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = -3^x$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।

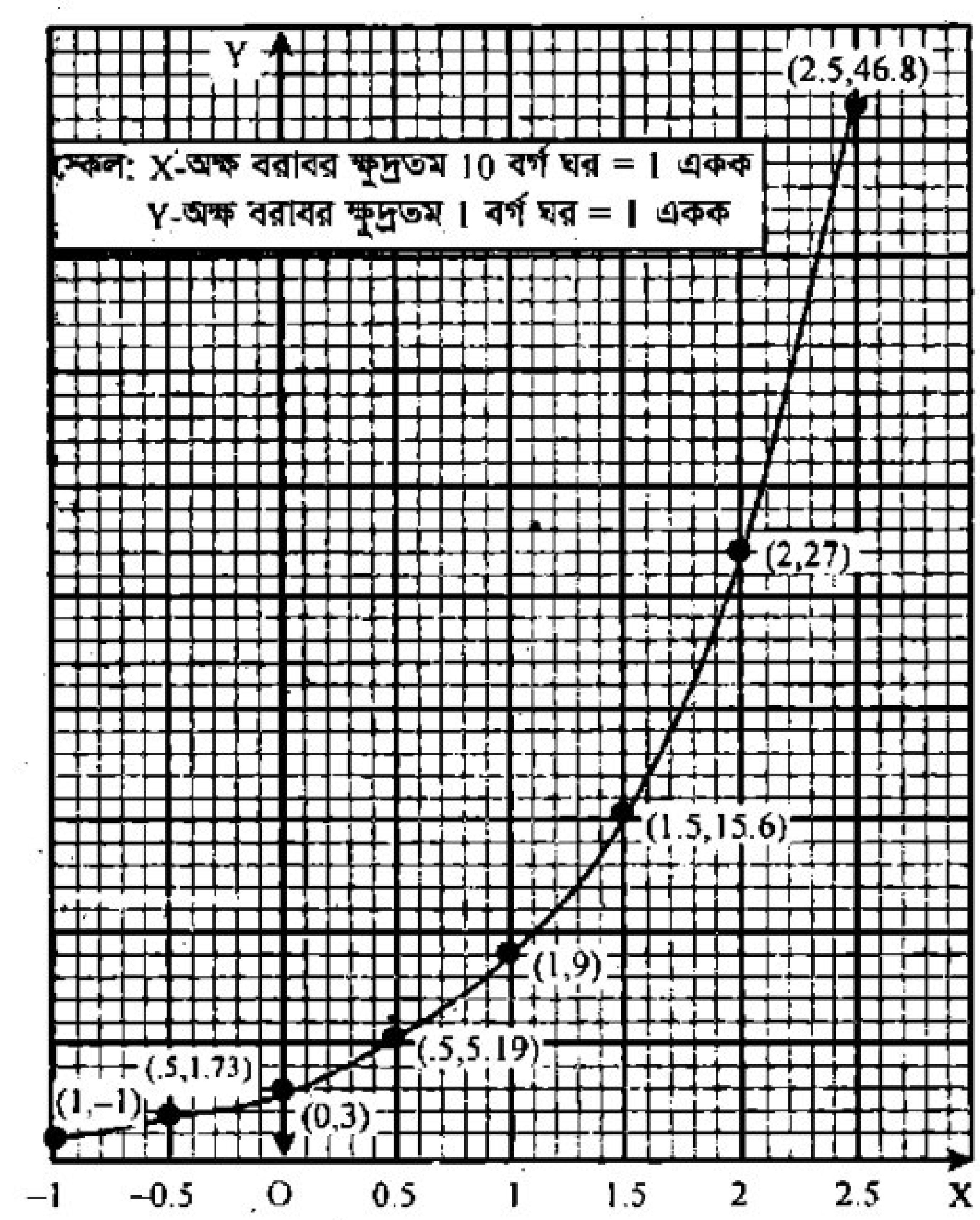


(গ) ধরি, $y = f(x) = 3^{x+1}$

-1 থেকে 3 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = 3^{x+1}$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



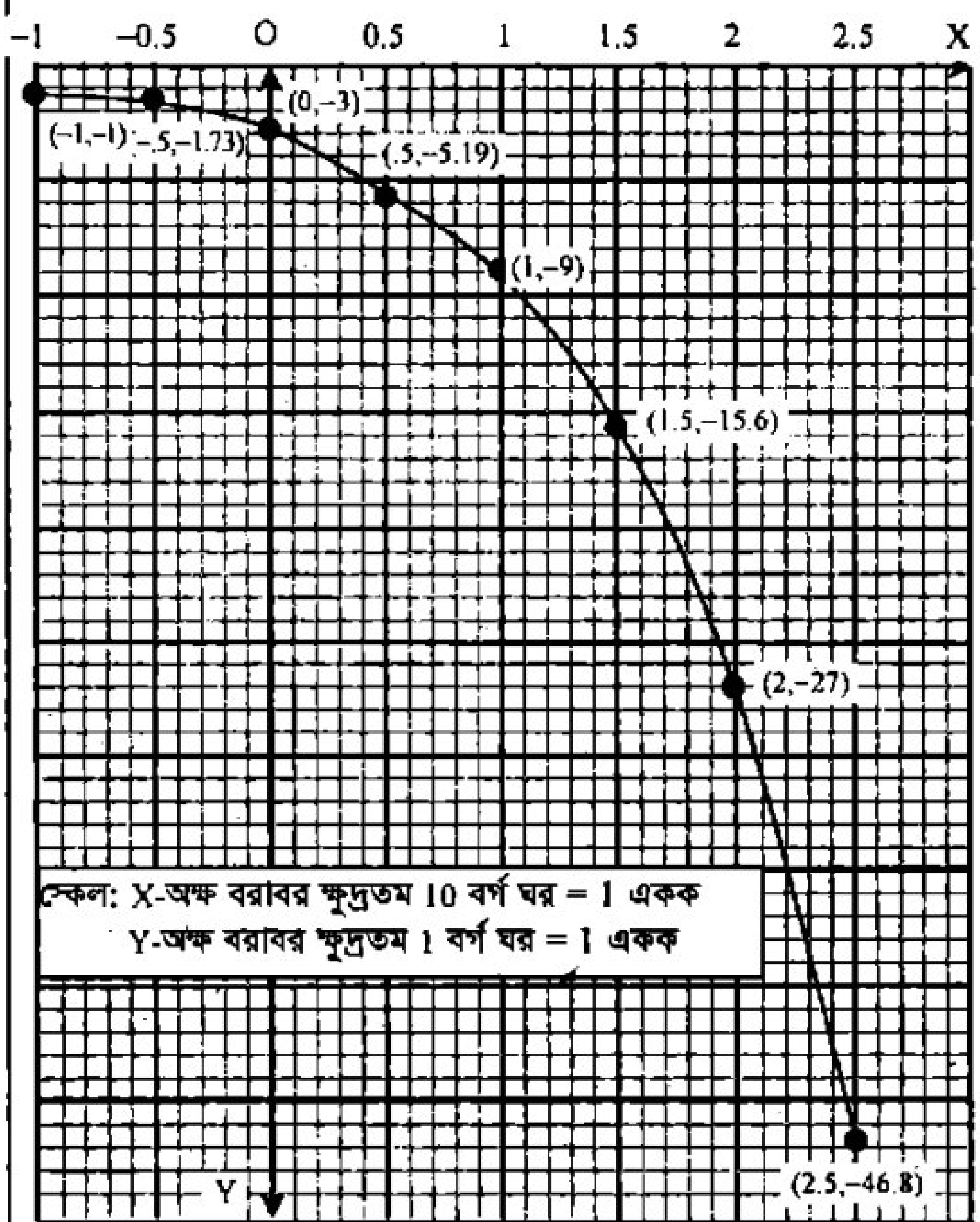
(ঘ) ধরি,

$y = f(x) = -3^{x+1}$

-1 থেকে 2.5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	-1	-1.73	-3	-5.19	-9	-15.6	-27	-46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = -3^{x+1}$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



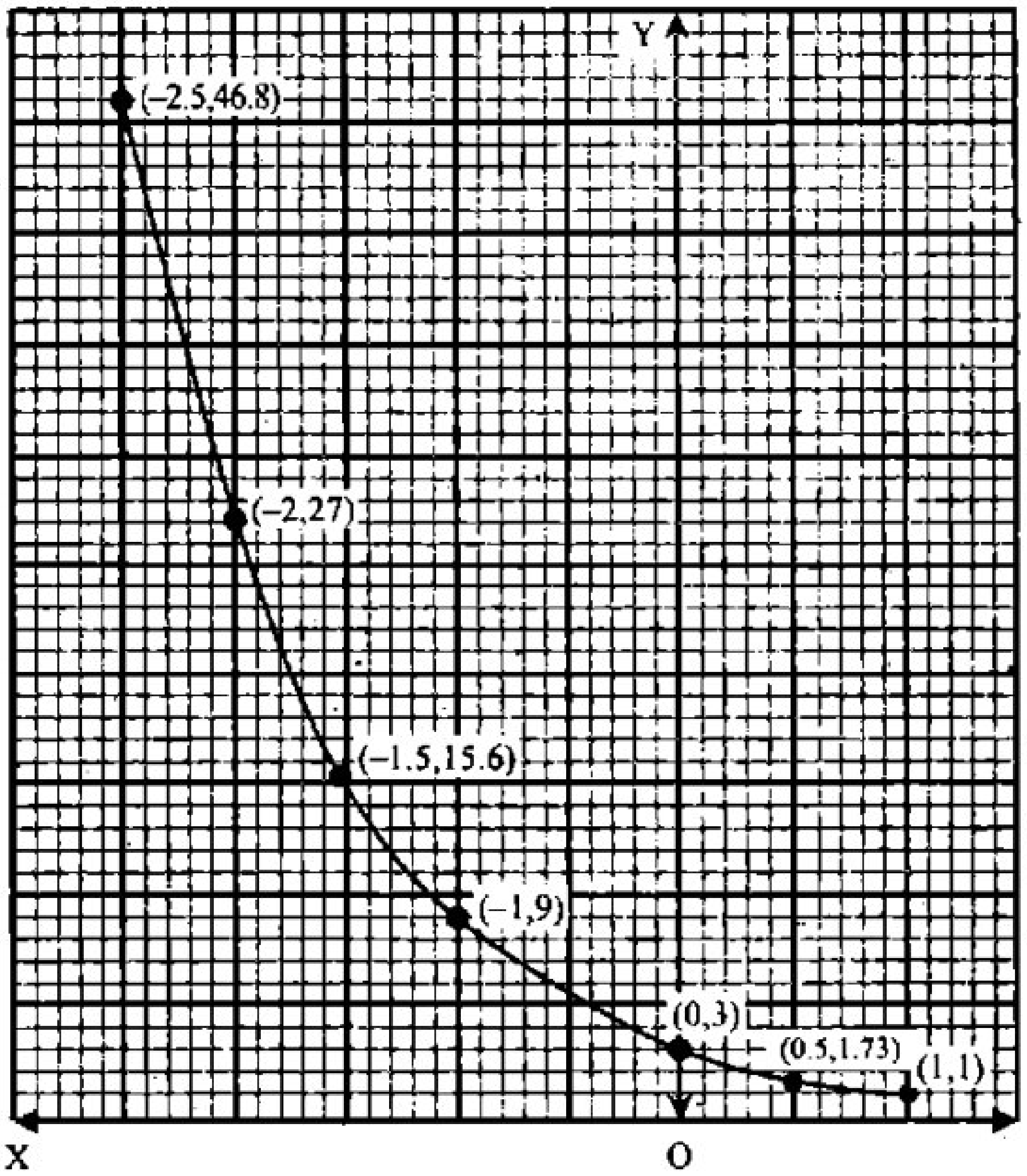
(ঙ) ধরি,

$y = f(x) = 3^{-x+1}$

-2.5 থেকে 1 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	1	0.5	0	-0.5	-1	-1.5	-2	-2.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = 3^{-x+1}$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।

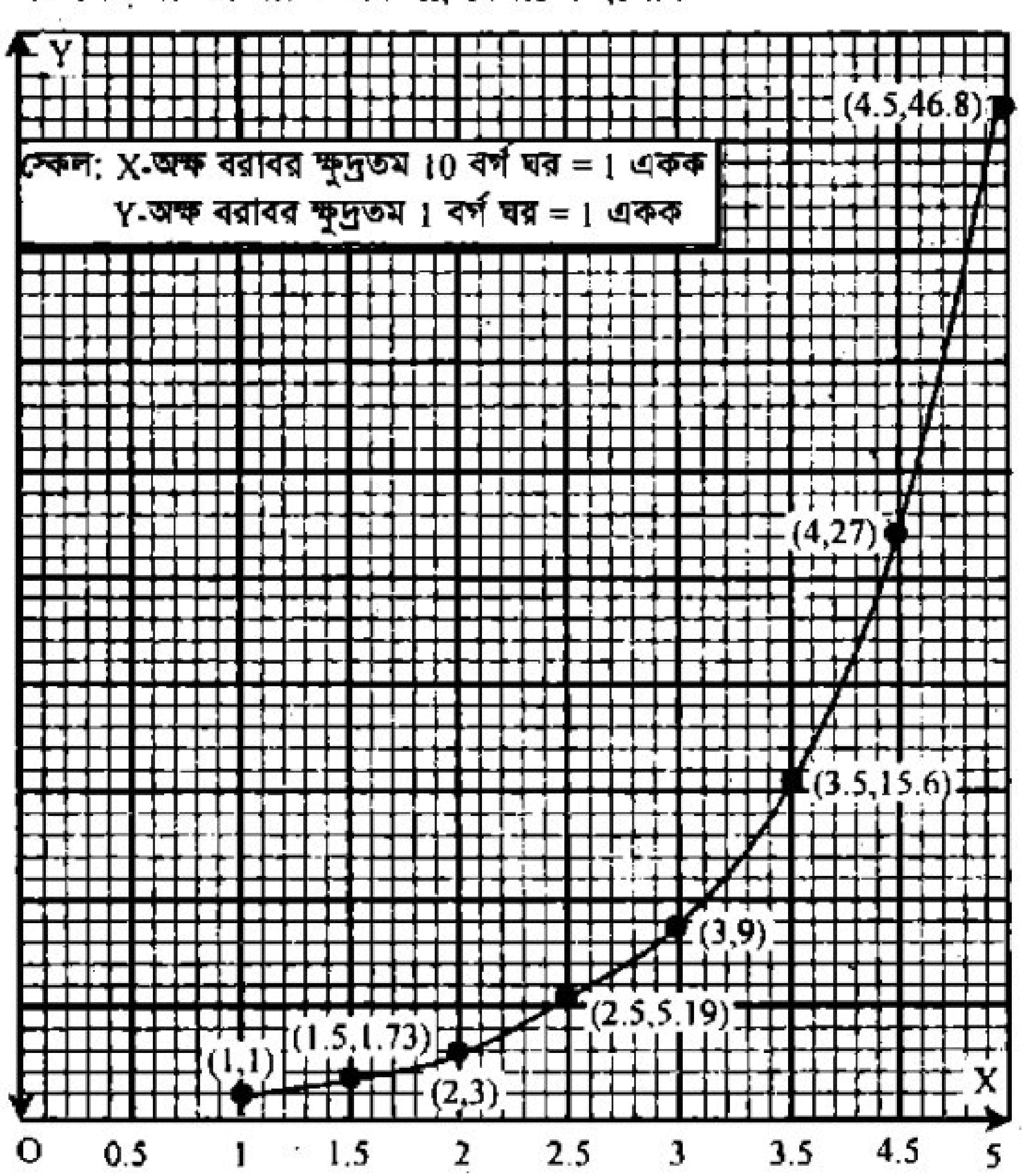


(চ) ধরি, $y = f(x) = 3^{x-1}$

1 থেকে 4.5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = 3^{x-1}$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



প্রশ্ন-১১. নিচের ফাংশনের বিপরীত ফাংশন লিখ এবং লেখচিত্র অঙ্কন করে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(ক) $y = 1 - 2^{-x}$

সমাধান: ধরি, $y = f(x) = 1 - 2^{-x}$

এখন, $y = 1 - 2^{-x}$

বা, $2^{-x} = 1 - y$

বা, $1 - y = 2^{-x}$

বা, $\log_2(1-y) = -x$

বা, $x = -\log_2(1-y)$

$\therefore\ x = \log_2\left(\frac{1}{1-y}\right)$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \to x$

যেখানে, $x = \log_2\left(\frac{1}{1-y}\right)$

বা, $f^{-1} : y \to \log_2\left(\frac{1}{1-y}\right)$

y এর পরিবর্তে x স্থাপন করলে পাই,

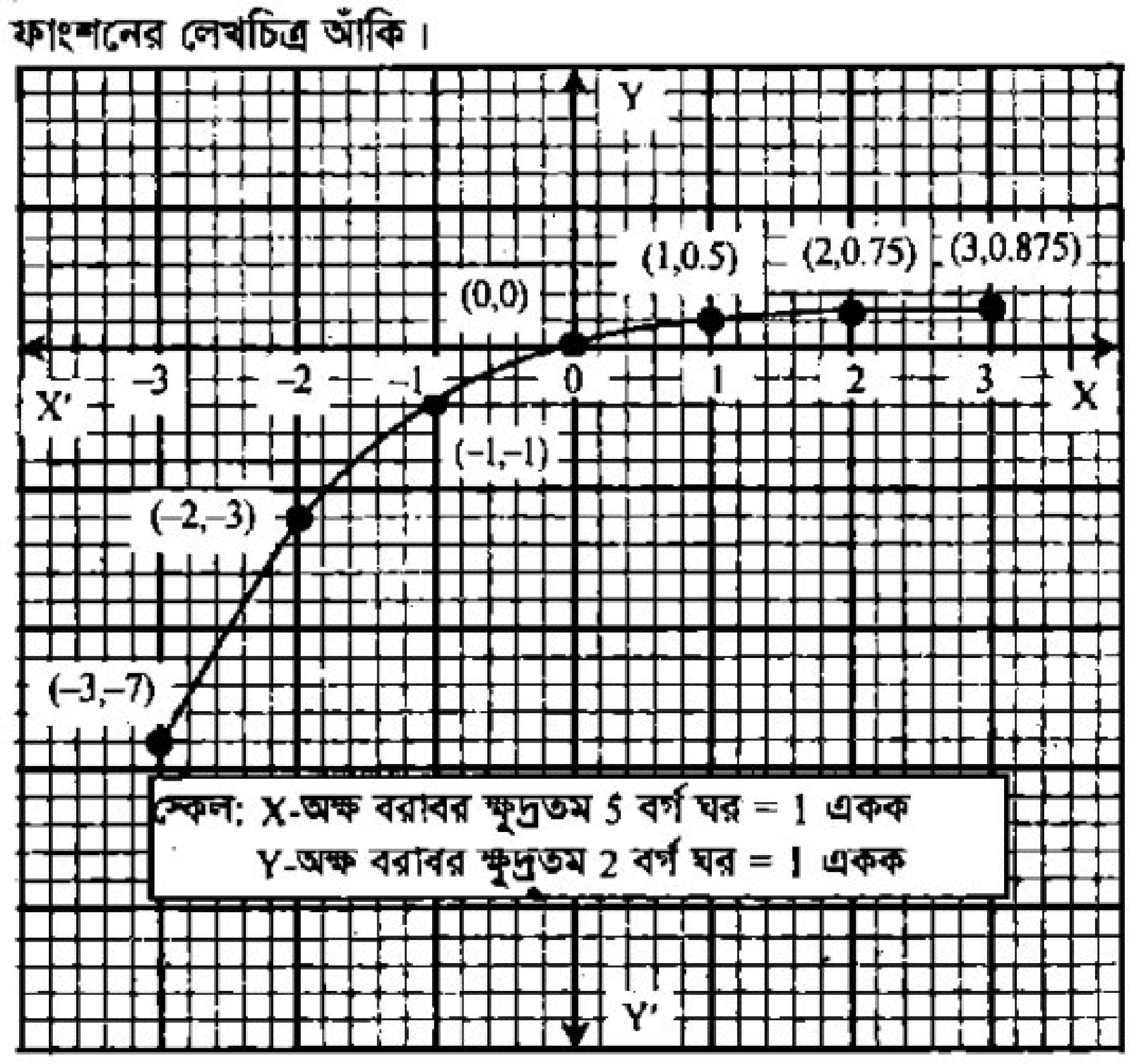
$f^{-1} : x \to \log_2\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$\therefore\ f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{1}{1-x}\right)$

লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–7	–3	–1	0	0.5	0.75	0.875

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে বসিয়ে বিন্দুগুলো সংযোগ করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র আঁকি।



চিত্র থেকে লক্ষ করলে দেখা যায়, যখন $x = 0$ তখন, $y = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$, কাজেই লেখটি (0, 0) বিন্দুগামী।

আবার, x এর মান যত বৃদ্ধি পায় y এর মান তত 1 এর কাছাকাছি পৌঁছায় কিন্তু 1 হয় না। অর্থাৎ যখন $x \to \infty$ তখন $y \to 1$

আবার, x এর মান ঋণাত্মক দিকে যত বৃদ্ধি পায় y এর মান ততই হ্রাস পেতে থাকে এবং ক্রমান্বয়ে $-\infty$ দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ যখন $x \to -\infty$ তখন $y \to -\infty$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = (-\infty, \infty)$ ও রেঞ্জ $R_f = (1, -\infty)$

[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ের উত্তর ভুল আছে]

(খ) $y = \log_{10}x$

সমাধান: মনে করি, $y = f(x) = \log_{10}x$

এখন, $y = \log_{10}x$

$\therefore \quad x = 10^y$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \to x$ যেখানে, $x = 10^y$

বা, $f^{-1} : y \to 10^y$

y এর স্থলে x স্থাপন করলে

$f^{-1} : x \to 10^x$

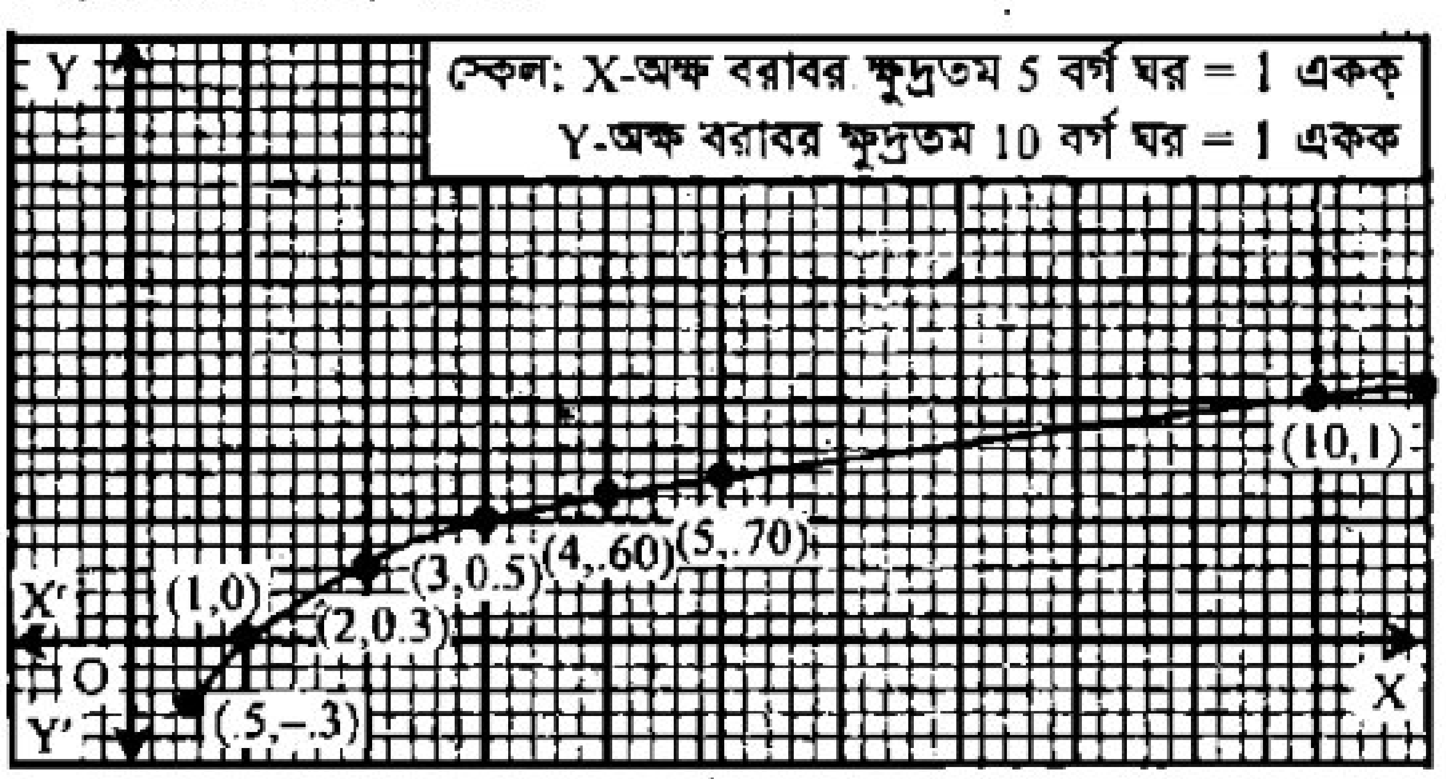
$\therefore \quad f^{-1}(x) = 10^x$

লেখচিত্র অঙ্কন:

লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

x	0.5	1	2	3	4	5	10
y	–0.3	0	0.3	0.5	0.6	0.7	1

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে বসিয়ে বিন্দুগুলো সংযোগ করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র আঁকি।



যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয় এবং শূন্যতে (০) অসংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ডোমেন $= (0, \infty)$

লেখচিত্র হতে পাই x যতই শূন্যের (০) কাছাকাছি হয় y ততই হ্রাস পায়, অর্থাৎ $x \to 0$, $y \to -\infty$, x ধনাত্মক দিকে বৃদ্ধি পেলে y ও অসীমের দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ

$x \to +\infty, y \to +\infty$

$\therefore$ রেঞ্জ $= (-\infty, +\infty)$

অর্থাৎ, ডোমেন $= (0, +\infty)$

রেঞ্জ $= (-\infty, +\infty)$

(গ) $y = x^2, x > 0$

সমাধান: মনে করি, $y = f(x) = x^2, x > 0$

এখন, $y = x^2$

$\therefore \quad x = \pm\sqrt{y}$

কিন্তু $x = \sqrt{y}$ [$\because x > 0$]

বিপরীত ফাংশন, $f^{-1} : y \to x$ যেখানে $x = \sqrt{y}$

বা, $f^{-1} : y \to \sqrt{y}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই,

$f^{-1} : x \to \sqrt{x}$

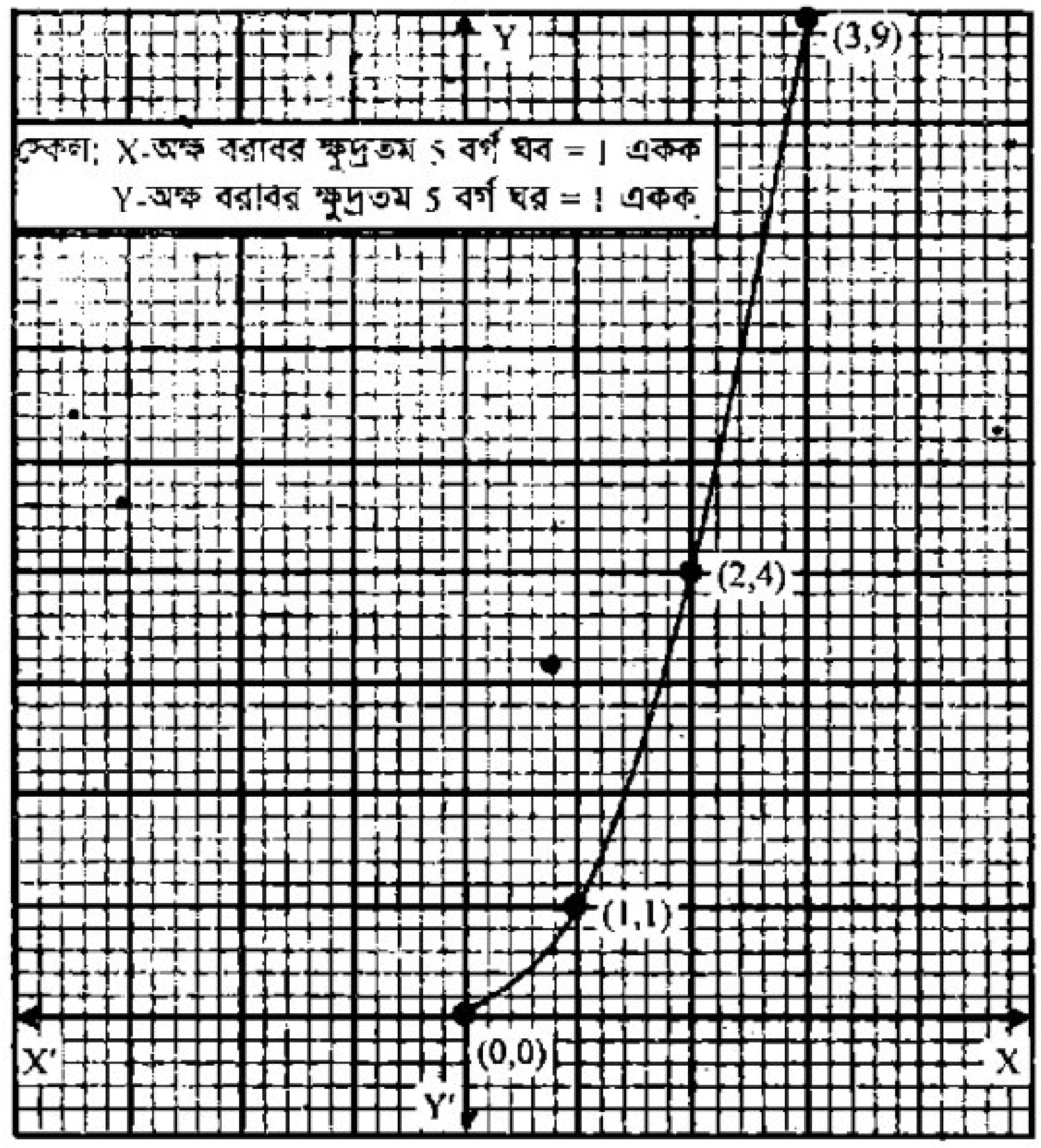
$\therefore \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

লেখচিত্র অঙ্কন:

লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে বসিয়ে বিন্দুগুলো সংযোগ করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র আঁকি।



প্রদত্ত তথ্যমতে, $f(x) = x^2, x > 0$, তাহলে শূন্য ব্যতীত সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত

$\therefore$ ডোমেন $= (0, +\infty)$

এবং লেখচিত্র হতে পাই রেঞ্জ $= (0, +\infty)$

প্রশ্ন-১২. $f(x) = ln(x-2)$ ফাংশনটির D_f ও R_f নির্ণয় কর:

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = ln(x-2)$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \quad x - 2 > 0$

$\therefore \quad x > 2$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : x > 2\} = (2, \infty)$

রেঞ্জ : $y = ln(x-2)$ [$\because y = f(x)$]

$\Rightarrow \quad e^y = x - 2$

$\therefore \quad x = e^y + 2$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

উত্তর : ডোমেন $D_f = (2, \infty)$ ও রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

প্রশ্ন-১৩. $f(x) = ln\dfrac{1-x}{1+x}$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = ln\dfrac{1-x}{1+x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \quad \dfrac{1-x}{1+x} > 0$ যদি (i) $1 - x > 0$ এবং $1 + x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $1 - x < 0$ এবং $1 + x < 0$ হয়।

(i) $-x > -1$ এবং $x > -1$

$\Rightarrow x < 1$ এবং $x > -1$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : -1 < x\} \cap \{x : x < 1\}$

$= (-1, \infty) \cap (-\infty, 1)$

$= (-1, 1)$

(ii) $-x < -1$ এবং $x < -1$

$\Rightarrow x > 1$ এবং $x < -1$

ডোমেন $D_f = \{x : x < -1\} \cap \{x : x > 1\} = \phi$

প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এর ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ সেট

$= (-1, 1) \cup \varnothing = (-1, 1)$

ধরি, রেঞ্জ : $y = f(x) = ln\frac{1-x}{1+x}$

$\Rightarrow \quad e^y = \frac{1-x}{1+x}$

$\Rightarrow \quad 1 - x = (1+x)e^y$

$\Rightarrow \quad 1 - x = e^y + xe^y$

$\Rightarrow \quad 1 - e^y = x(1 + e^y)$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1-e^y}{1+e^y}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

উত্তর : প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = (-1, 1)$

প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

প্রশ্ন-১৪. ডোমেন, রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর।

(ক) $f(x) = |x|$ যখন $-5 \le x \le 5$

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = |x|$, যখন, $-5 \le x \le 5$

x এর প্রদত্ত সীমার মধ্যে $f(x)$ সর্বদা সংজ্ঞায়িত।

$\therefore \quad D_f = \{x: -5 \le x \le 5\} = [-5, 5]$

আবার যেহেতু f(x) পরমমান ফাংশন তাই $-5 \le x \le 5$ ব্যবধিতে $f(x)$ এর মান হবে $0 \le f(x) \le 5$.

$\therefore \quad R_f = \{f(x): 0 \le f(x) \le 5\} = [0, 5]$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = [-5, 5]$, রেঞ্জ $R_f = [0, 5]$

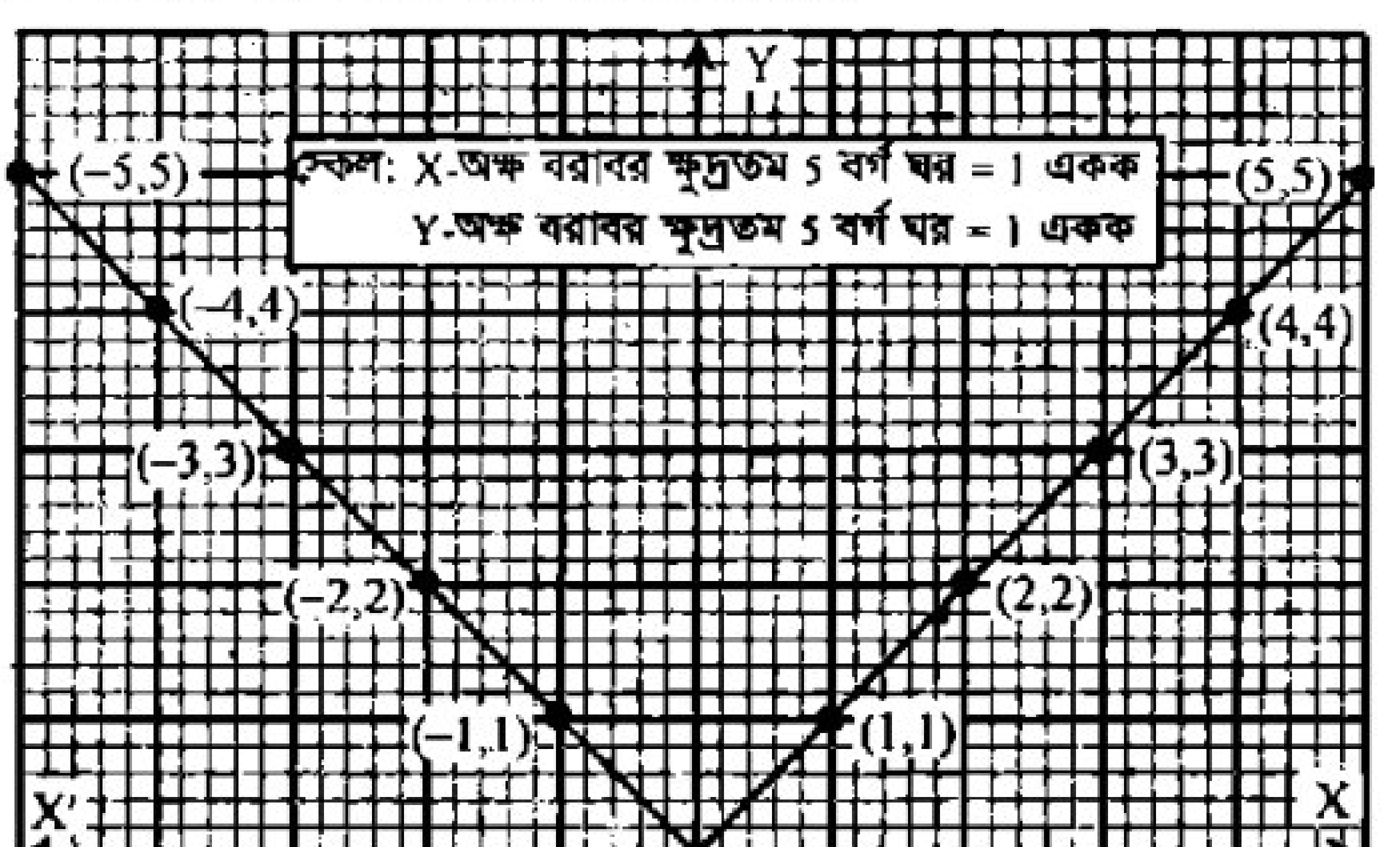
লেখচিত্র অঙ্কন:

ধরি, $y = f(x) = |x|$

-5 থেকে 5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = |x|$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



(খ) $f(x) = x + |x|$ যখন $-2 \le x \le 2$

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x + |x|$ যখন, $-2 \le x \le 2$

x এর প্রদত্ত সীমার মধ্যে $f(x)$ সর্বদা সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x: -2 \le x \le 2\} = [-2, 2]$

আবার x যখন ঋণাত্মক তখন $f(x) = -x + |-x| = -x + x = 0$

এবং যখন ধনাত্মক $f(x) = x + |x| = 2x$

$\therefore$ f(x) এর রেঞ্জ $R_f = \{f(x): 0 \le f(x) \le 4\} = [0, 4]$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = [-2, 2]$, রেঞ্জ $R_f = [0, 4]$

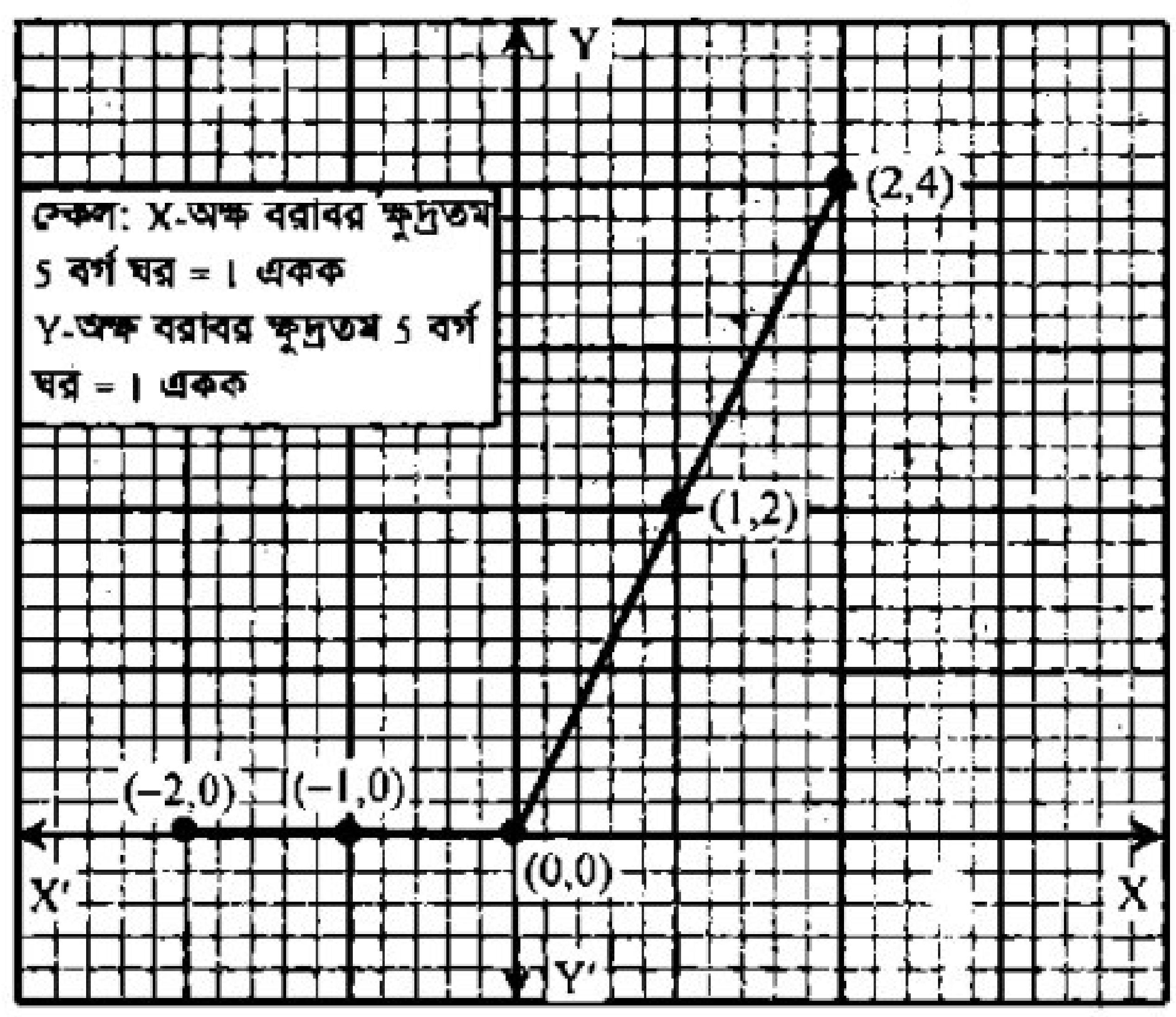
লেখচিত্র অঙ্কন:

ধরি, $y = f(x) = x + |x|$ যখন, $-2 \le x \le 2$

x এর -2 থেকে 2 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	−2	−1	0	1	2
y	0	0	0	2	4

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX′ এবং y-অক্ষ YOY′ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



(গ) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{যখন } x \ne 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{যখন } x \ne 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

এখানে, $x < 0$ এর জন্য $f(x) = -1$, $x = 0$ এর জন্য $f(x) = 0$ এবং $x > 0$ এর জন্য $f(x) = 1$ অর্থাৎ x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটি বিদ্যমান অর্থাৎ সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

এবং প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ : $R_f = \{-1, 0, 1\}$

লেখচিত্র অঙ্কন :

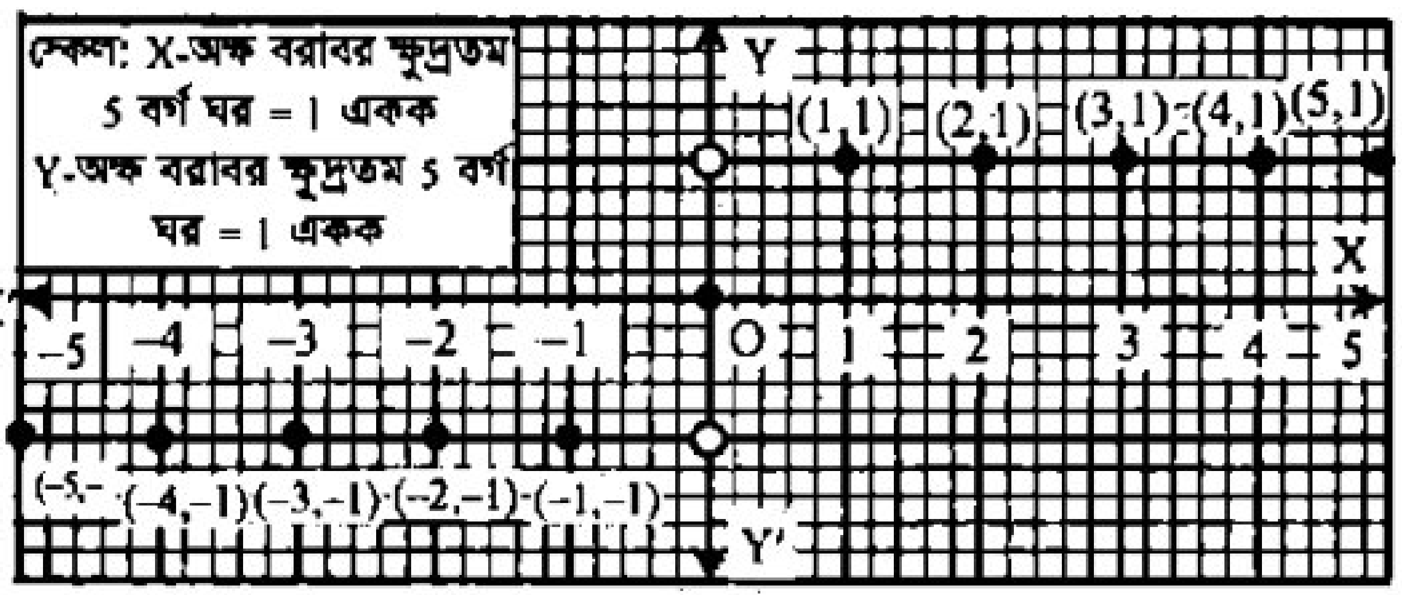
$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{যখন } x \ne 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	−1	−1	−1	−1	−1	0	1	1	1	1	1

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX′ এবং y-অক্ষ YOY′ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম পাঁচ বর্গঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ

বরাবর ক্ষুদ্রতম পাঁচ বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ে উত্তর ভুল আছে]

(ঘ) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x}{|x|}$

এখানে, $f(0) = \frac{0}{|0|} = \frac{0}{0}$, যা অসংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ x = 0 বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটি বিদ্যমান নয়। শূন্য ব্যতীত x এর অন্য বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটি বিদ্যমান।

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

আবার, $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} \text{ যখন } x > 0 \\ \frac{x}{-x} \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 \text{ যখন } x > 0 \\ -1 \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \{-1, 1\}$

লেখচিত্র অঙ্কন :

ধরি, $y = f(x)$

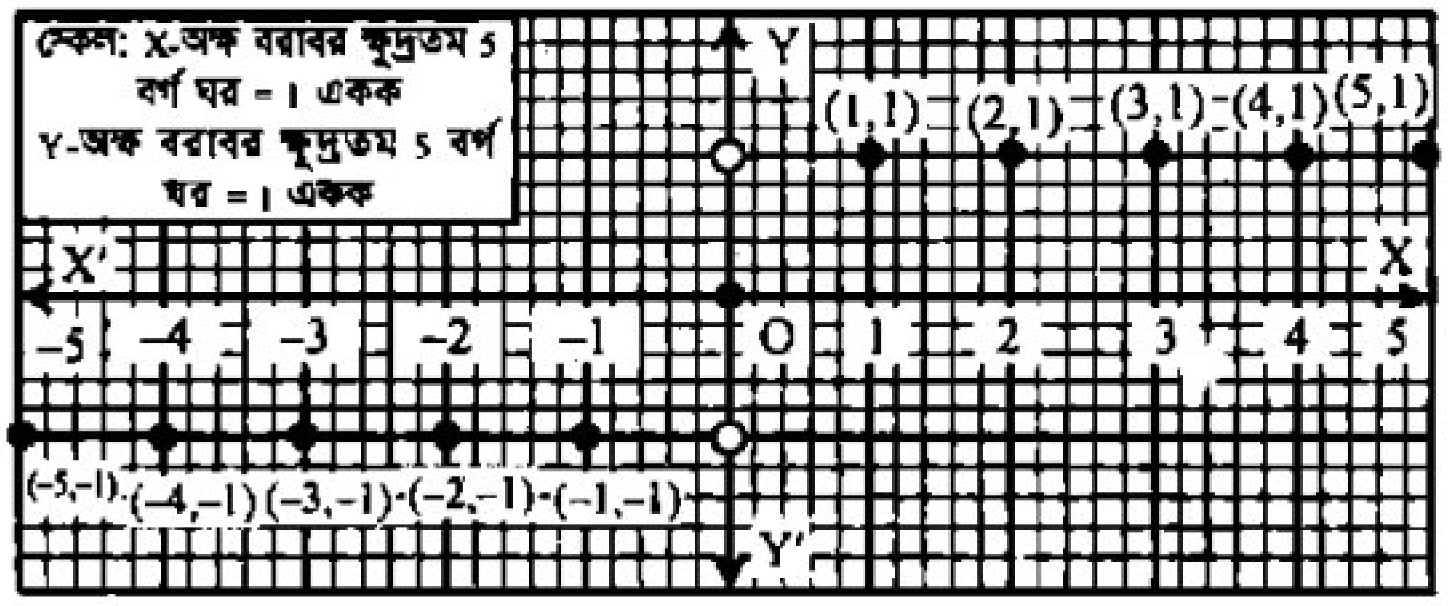
$= \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} \text{ যখন } x > 0 \\ \frac{x}{-x} \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 \text{ যখন } x > 0 \\ -1 \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

x এর –5 থেকে 5 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	–1	–1	–1	–1	–1	0	1	1	1	1	1

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে y = f(x) এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



(ঙ) $f(x) = \log\frac{5+x}{5-x}, -5 < x < 5$

সমাধান : ধরি, $y = f(x) = \ell n\frac{5+x}{5-x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{5+x}{5-x} > 0$ যদি (i) $5 + x > 0$ এবং $5 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $5 + x < 0$ এবং $5 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -5$ এবং $-x > -5$

বা, $x > -5$ এবং $x < 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -5 < x\} \cap \{x : x < 5\}$

$= (-5, \infty) \cap (-\infty, 5)$

$= (-5, 5)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -5$ এবং $-x < -5$

বা, $x < -5$ এবং $x > 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -5\} \cap \{x : x > 5\}$

$= \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ সেট

$= (-5, 5) \cup \varnothing = (-5, 5)$

রেঞ্জ : $y = f(x)\ \ell n\frac{5+x}{5-x}$

বা, $e^y = \frac{5+x}{5-x}$

বা, $5 + x = 5e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 5(e^y - 1)$

$\therefore x = \frac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

উত্তর: প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = (-5, 5)$, রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

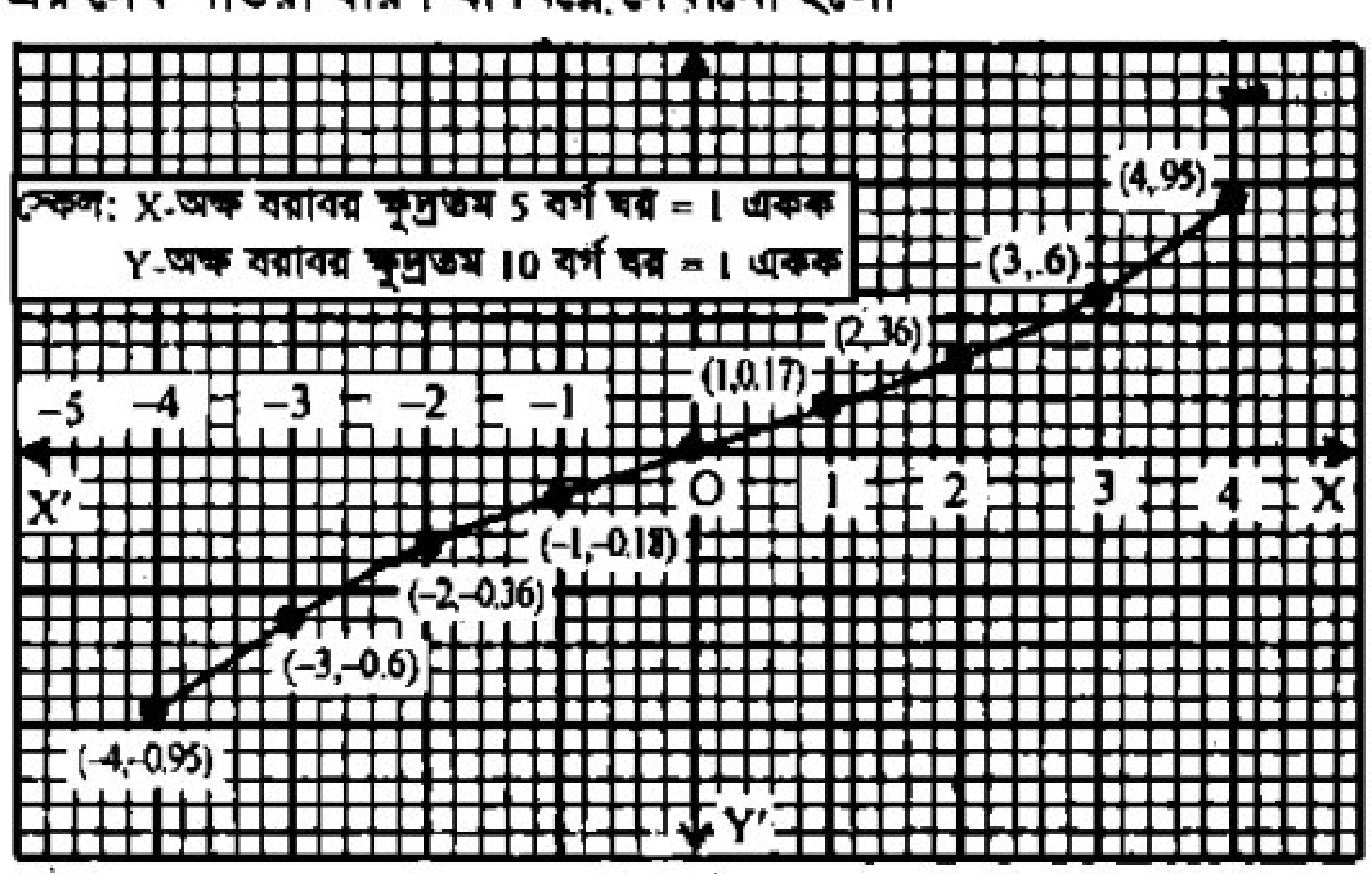
লেখচিত্র অঙ্কন:

$y = f(x) = \log\frac{5+x}{5-x} - 5 < x < 5$

x এর থেকে মধ্যে কয়েকটি মান নিচের সংশ্লিষ্ট y এর মান নিচের ছকে দেখানো হলো–

x	–4.5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	4.5
y	–1.27	–0.95	–0.6	–0.36	–1.8	0	.17	.36	0.6	0.95	1.27

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX′ এবং y অক্ষ YOY′ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো–



অনুশীলনীর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶১৫ দেওয়া আছে, $2^{2x}.2^{y-1} = 64$ ... ... (i)

এবং $6x.\frac{6^{y-2}}{3} = 72$ ... ... (ii)

ক. (i) ও (ii) কে x ও y চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণে পরিণত কর।

খ. সমীকরণদ্বয় সমাধান করে শুদ্ধতা যাচাই কর।

গ. x ও y মান যদি কোনো চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য হয় যেখানে বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90° তবে চতুর্ভুজটি আয়ত না বর্গ উল্লেখ কর এবং এর ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $2^{2x}.2^{y-1} = 64$ ....(i)

এবং $6^x.\frac{6^{y-2}}{3} = 72$ ....(ii)

(i) নং থেকে পাই,

$2^{2x+y-1} = 2^6$

বা, $2x + y - 1 = 6$ [$a^x = a^y$ হলে $x = y$]

$\therefore$ $2x + y - 7 = 0$ .... (iii)

(ii) নং থেকে পাই,

$6^x.6^{y-2} = 3 \times 72$

বা, $6^{x+y-2} = 3 \times 2 \times 36$

বা, $6^{x+y-2} = 6 \times 6^2$

বা, $6^{x+y-2} = 6^{1+2}$

বা, $6^{x+y-2} = 6^3$

বা, $x + y - 2 = 3$

বা, $x + y - 2 - 3 = 0$

$\therefore$ $x + y - 5 = 0$ ....(iv)

$\therefore$ (iii) ও (iv) নং সমীকরণদ্বয় (i) ও (ii) নং সমীকরণের x ও y চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ।

খ 'ক' থেকে প্রাপ্ত সমীকরণদ্বয়

$2x + y - 7 = 0$ .... (iii)

এবং $x + y - 5 = 0$ .... (iv)

(iii) নং থেকে (iv) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$2x + y - 7 - (x + y - 5) = 0$

বা, $2x + y - 7 - x - y + 5 = 0$

বা, $x - 2 = 0$

$\therefore$ $x = 2$

x এর মান (iv) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2 + y - 5 = 0$

বা, $y - 3 = 0$

$\therefore$ $y = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 2, y = 3$

(i) নং সমীকরণের বামপক্ষে x ও y এর মান বসিয়ে পাই,

বামপক্ষ $= 2^{2.2}.2^{3-1} = 2^4.2^2 = 16.4 = 64$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ (i) নং সমীকরণের শুদ্ধতা যাচাই করা হলো।

আবার (ii) নং সমীকরণের বামপক্ষে x ও y এর মান বসিয়ে পাই,

বামপক্ষ $= 6^2.\frac{6^{3-2}}{3} = 36.\frac{6}{3} = 72$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ (ii) নং সমীকরণের শুদ্ধতা যাচাই করা হলো।

$\therefore$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান $x = 2, y = 3$ শুদ্ধ।

[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে 6x এর পরিবর্তে 6^x হবে।]

গ ABCD চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুদ্বয় AB ও BC হলে $x = AB = 2$ এবং $y = BC = 3$

চতুর্ভুজের বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle ABC = 90°$

সুতরাং চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র।

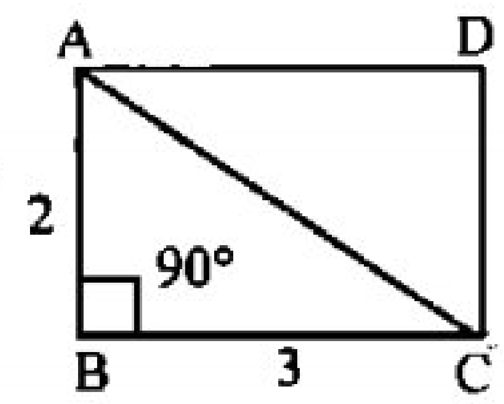
এখন, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= AB \times BC$

$= 2 \times 3$

$= 6$ বর্গ একক

আবার, ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণ AC.

পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই,



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 3^2}$ একক

$= \sqrt{4 + 9}$ একক

$\therefore$ $AC = \sqrt{13}$ একক

Ans. 6 বর্গ একক; $\sqrt{13}$ একক।

প্রশ্ন ▶১৬ দেওয়া আছে, $\frac{\log(1+x)}{\log x} = 2$

ক. প্রদত্ত সমীকরণটিকে x চলকসংবলিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণে পরিণত কর।

খ. প্রাপ্ত সমীকরণটিকে সমাধান কর এবং দেখাও যে, x এর কেবল একটি বীজ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

গ. প্রমাণ কর যে, মূলদ্বয়ের প্রতিটির বর্গ তার স্বীয় মান অপেক্ষা 1(এক) বেশি এবং তাদের লেখচিত্র পরস্পর সমান্তরাল।

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\frac{\log(1+x)}{\log x} = 2$

বা, $2\log x = \log(1 + x)$

বা, $\log x^2 = \log(1 + x)$ [$\because \log x^n = n\log x$]

বা, $x^2 = 1 + x$ [উভয় পক্ষ থেকে log বাদ দিয়ে]

$x^2 - x - 1 = 0$ এটি x চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ।

খ 'ক' থেকে প্রাপ্ত সমীকরণ,

$x^2 - x - 1 = 0$

বা, $(x)^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 1$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

বা, $x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ [বর্গমূল করে]

বা, $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

বা, $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

$\therefore$ $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ এবং $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

প্রদত্ত সমীকরণের বামপক্ষে $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ বসিয়ে পাই,

বামপক্ষ $= \frac{\log\{1 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\}}{\log\{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\}} = \frac{\log\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}$

$= 2$ (ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে)

= ডানপক্ষ

$\therefore x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

এখন, $x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\log\{1+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\}}{\log\{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\}} = \frac{\log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

= অসজ্ঞায়িত কারণ লগারিদম শুধু ধনাত্মক সংখ্যার হয়।

$\therefore x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণটি কেবল x এর একটি বীজ দ্বারাই সিদ্ধ হয়।

(দেখানো হলো)

গ 'খ' থেকে প্রাপ্ত x এর মান দুইটি হলো,

$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ .... (i)

এবং $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ .... (ii)

এখন, ১ম মূলটিকে বর্গ করে পাই,

$\left\{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right\}^2$

$= \frac{1}{4}(1+2\sqrt{5}+5)$

$= \frac{6}{4}+\frac{2}{4}\sqrt{5}$

$= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$

$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$

$= 1+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$; যা $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ থেকে 1 বেশি।

আবার, ২য় মূলটিকে বর্গ করে পাই,

$\left\{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right\}^2$

$= \frac{1}{4}(1-2\sqrt{5}+5)$

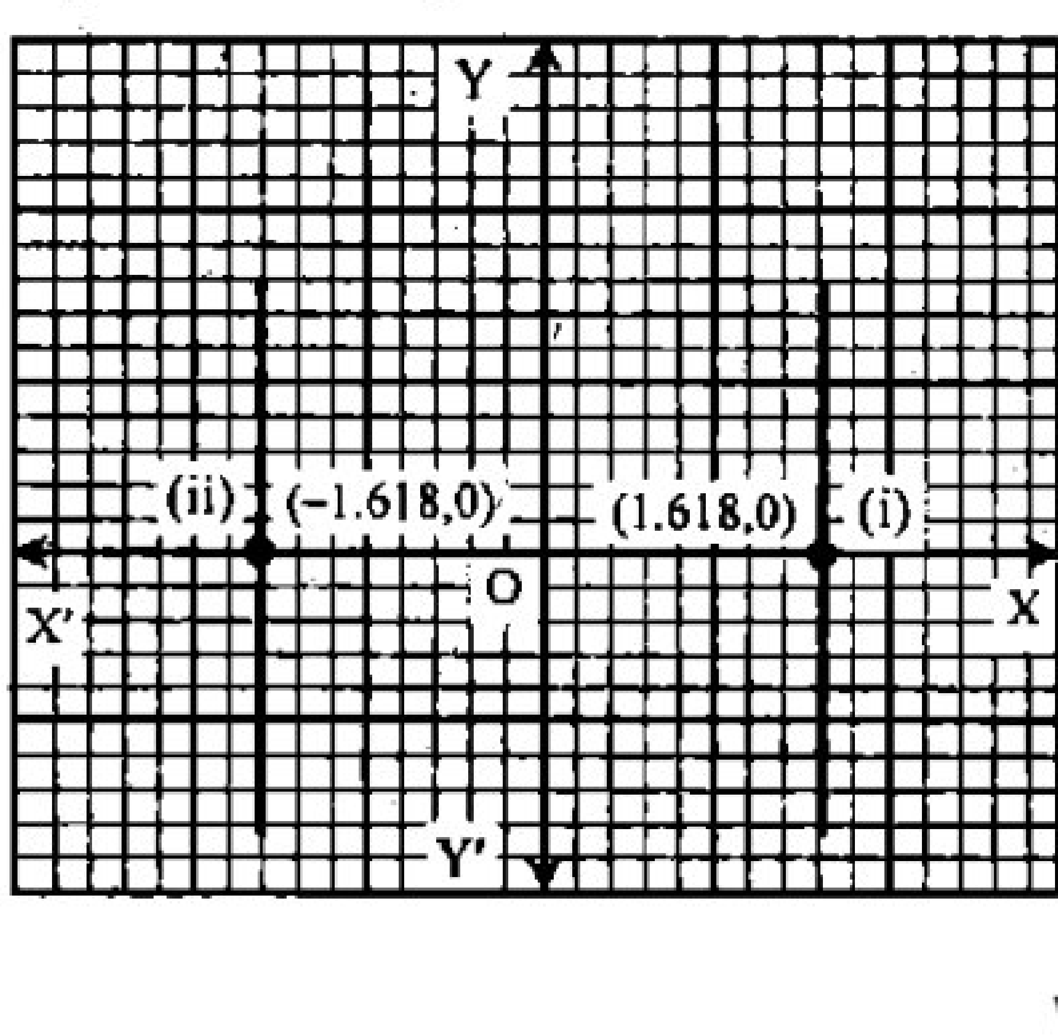
$= \frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})$

$= \frac{6}{4}-\frac{2\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$= 1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$= 1+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$; যা $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ থেকে 1 বেশি। **(প্রমাণিত)**



আবার, (i) নং অর্থাৎ x = 1.618 সমীকরণ হবে y-অক্ষের সমান্তরাল সমীকরণ। যা মূল বিন্দুর ডান দিকে অবস্থিত হবে এবং (ii) নং সমীকরণ x = −1.618 হবে y-অক্ষের সমান্তরাল সমীকরণ যা মূল বিন্দুর বাম দিকে অবস্থিত হবে।

অর্থাৎ (i) ও (ii) নং সমীকরণ পরস্পর সমান্তরাল। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ দেওয়া আছে, $y = 2^x$

ক. প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এর বৈশিষ্ট্যগুলি লিখ।

গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে এটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর এবং বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক।

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে $y = 2^x$

ধরি, $y = f(x) = 2^x$

x এর ঋণাত্মক যেকোনো মানের জন্য $f(x)$ এর মান কোনো সময় 0 (শূন্যের) খুবই কাছাকাছি পৌছায়। কিন্তু শূন্য (0) হয় না অর্থাৎ,

$x \to -\infty, y \to 0^+$

একইভাবে, x এর যেকোনো ধনাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমান্বয়ে ডানদিকে (উপরের) বৃদ্ধি পেতে থাকবে। অর্থাৎ

$-\infty$ দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ $x \to -\infty, y \to \infty$

সুতরাং ডোমেন (D) = $(-\infty, \infty)$

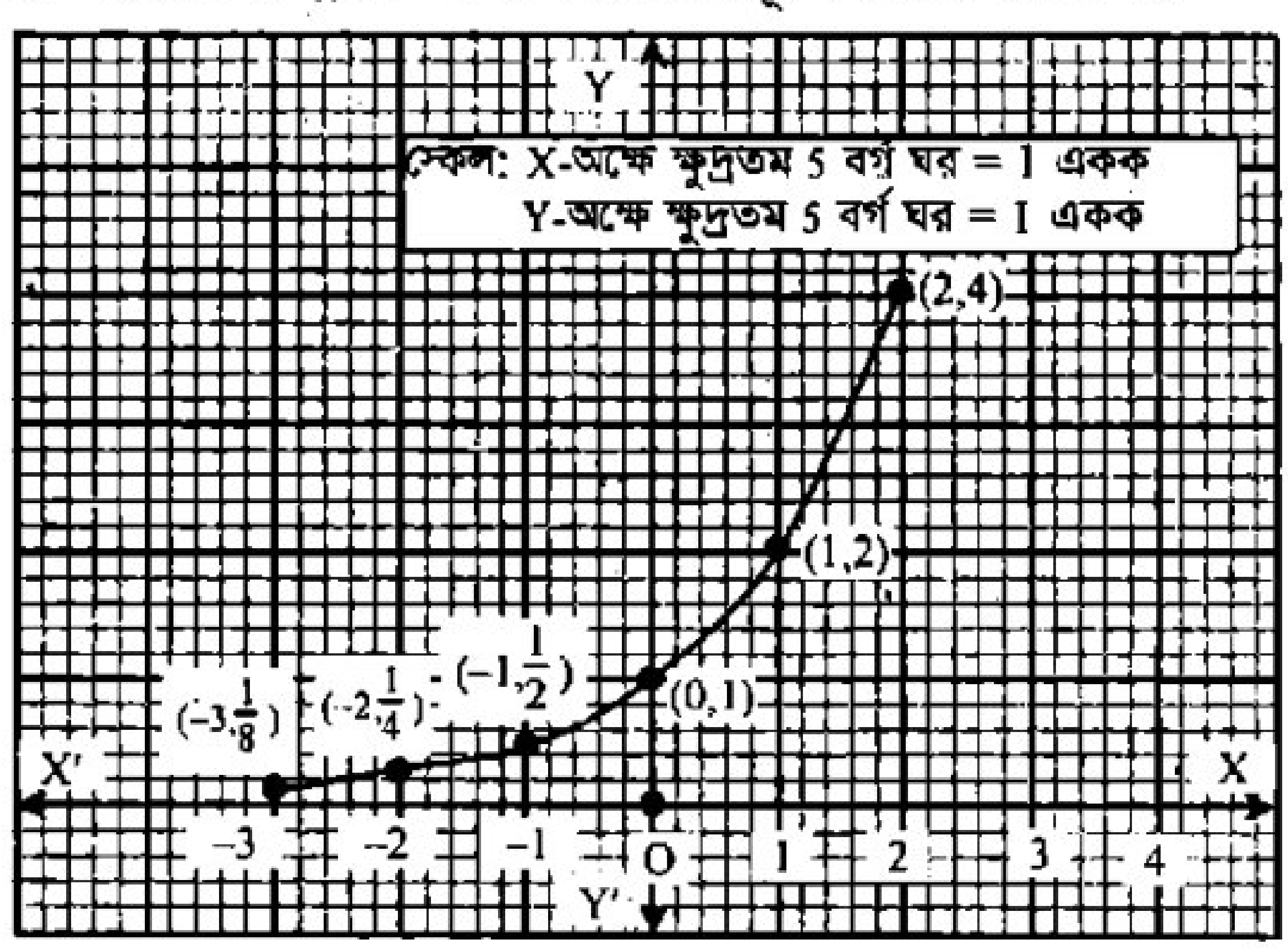
এবং রেঞ্জ (R) = $(0, \infty)$

খ ধরি $f(x) = 2^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো।

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়–



লেখচিত্রটির বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখচিত্রটি (0, 1) বিন্দুগামী।

(ii) x এর যেকোনো মানের জন্য y ধনাত্মক।

(iii) লেখচিত্রটি ক্রমবর্ধমান।

(iv) x এর মান হ্রাস পাওয়ার সাথে সাথে লেখটি x-অক্ষের নিকবর্তী হয়।

(v) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন।

গ দেওয়া আছে,

$y = 2^x$

বা, $x = \log_2 y$

আবার, $y = f(x)$ হলে $f^{-1}(y) = x$

$\therefore f^{-1}(y) = \log_2 y$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2 x$

$\therefore y = 2^x$ এর বিপরীত ফাংশন, $f^{-1}(x) = \log_2 x$

মনে করি, $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$

বা, $\log_2 x_1 = \log_2 x_2$

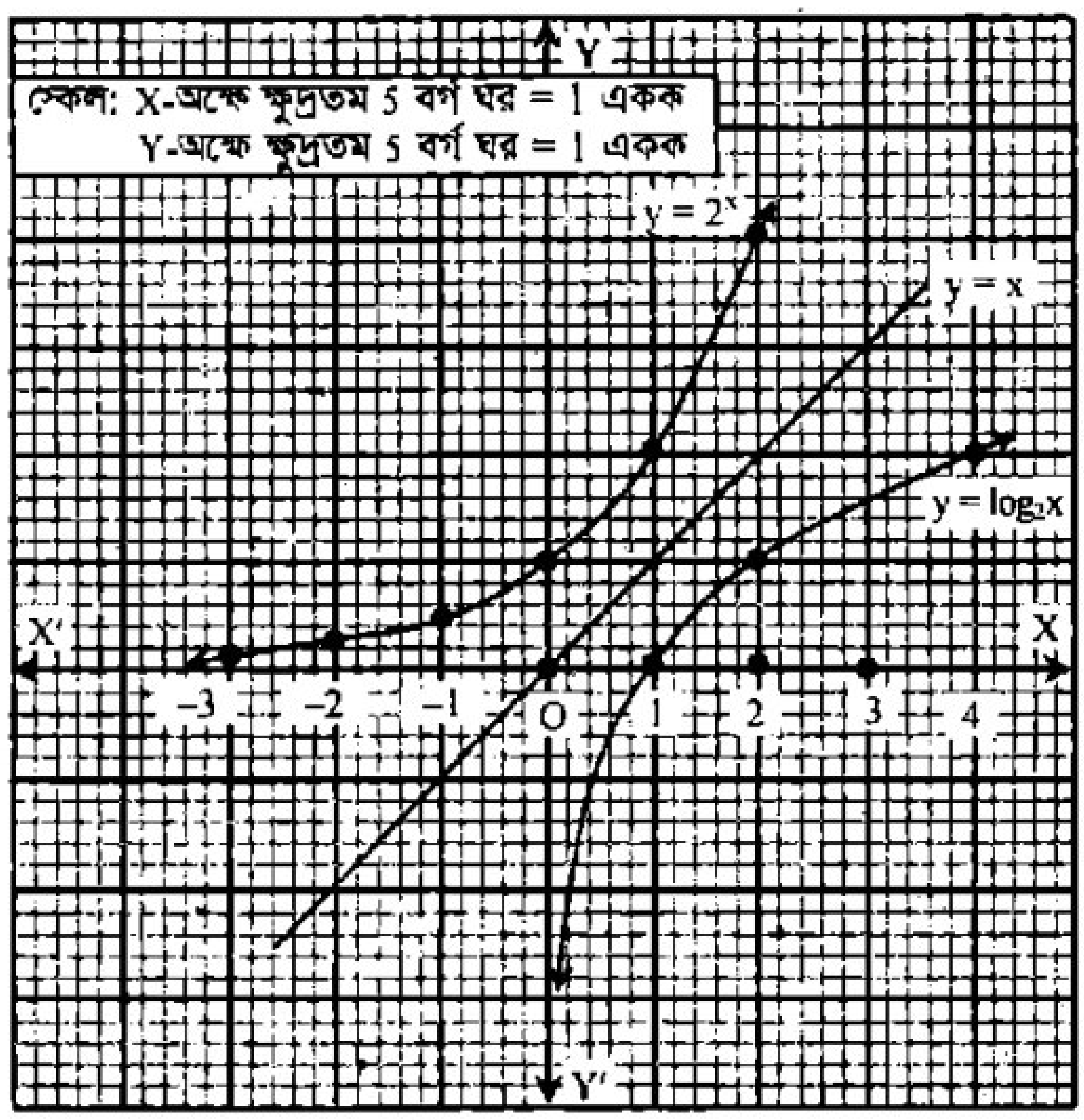
$\therefore x_1 = x_2$

সুতরাং বিপরীত ফাংশনটি এক-এক।

$y = \log_2 x$ লেখচিত্র অঙ্কন:

যেহেতু $\log_2 x$ হলো $y = 2^x$ এর বিপরীত। $y = x$ রেখা সাপেক্ষ সূচক ফাংশনের প্রতিফলন লগারিদমিক ফাংশন নির্ণয় করা হয়েছে যা $y = x$ রেখার সাপেক্ষে সদৃশ।

যখন $x \to -\infty$ তখন $y \to 0$



মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

★★★ ৯.৬ লগারিদম | Text পৃষ্ঠা-১৯৪

- যদি $a^x = b$ হয়, যেখানে $a > 0, a \neq 1$, তবে x কে বলা হয় b এর a ভিত্তিক লগারিদম অর্থাৎ $x = \log_a b$
- $x = \log_a b$ হয় তবে $a^x = b$; b কে ভিত্তি a এর প্রতিলগ বলে।
- কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম নির্ণয় করা যায় না।
- $a > 0, b > 0$ এবং $a \neq 1$ হলে b এর অনন্য a ভিত্তিক লগারিদমকে $\log_a b$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

১. $a > 0, a \neq 1$ হলে $a^x = y$ এর ক্ষেত্রে x কে কী বলা হয়? (সহজ)

ক y এর a ভিত্তিক লগারিদম খ a এর y ভিত্তিক লগারিদম

গ a এর 10 ভিত্তিক লগারিদম ঘ y এর e ভিত্তিক লগারিদম **ক**

২. $a^x = y$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক $a = \log_x y$ খ $y = \log_a x$ গ $x = \log_a y$ ঘ $x = \log_y a$ **গ**

৩. $\log a = n$ হলে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক $a^n = 1$ খ $a = \text{anti}\log n$

গ $a = \text{anti}\log_x n$ ঘ $n = \text{anti}\log a$ **খ**

৪. কোন সংখ্যাকে লগারিদমের ভিত্তি হিসেবে গণ্য করা হয়? (সহজ)

ক যে কোন মূলদ সংখ্যাকে খ সকল ঋণাত্মক সংখ্যাকে

গ যে কোন ধনাত্মক সংখ্যাকে ঘ শুধুমাত্র পূর্ণ সংখ্যাকে **গ**

৫. $\log_{64}256$ এর মান নিচের কোনটি? (কঠিন)

[আই.ই.টি. সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নারায়ণগঞ্জ]

ক $\frac{3}{2}$ খ $\frac{4}{3}$ গ $\frac{3}{4}$ ঘ $\frac{2}{3}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\log_{64}256 = \log_{64}(2)^8 = \log_{64}(2^6)^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\log_{64}(64) = \frac{4}{3}$

৬. $\log_2 \sqrt[1]{2}$ = কত? (মধ্যম)

ক -1 খ $-\frac{1}{2}$ গ $\frac{1}{2}$ ঘ 1 **ঘ**

৭. $\log_{2\sqrt{5}} 400 = x$ হলে x এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{4}$ খ 2 গ 3 ঘ 4 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\log_{2\sqrt{5}} 400 = \log_{2\sqrt{5}}(2\sqrt{5})^4 = 4\log_{2\sqrt{5}}2\sqrt{5} = 4$

৮. x কে b এর a ভিত্তিক লগারিদম বলা হবে যদি—

i. $a > 0$ হয়।

ii. $a \neq 1$ হয়।

iii. $a^x = b$ হয়।

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৯. $a^x = b$ হলে—

i. $x = \log_a b$

ii. $a = \log_b x$

iii. $b = \text{anti}\log_a x$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

১০. $a \neq 1$ এবং $b \neq 0$ হলে—

i. $\log_a b = x$ হলে, $a^x = b$

ii. $a^{\log_a b} = b$

iii. $7^{\log_7 9} = 7$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (১১-১৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$a^x = 16, a > 0$ এবং $a \neq 1$

১১. a = 2 হলে x এর মান কত? (সহজ)

ক $\frac{1}{2}$ খ 2 গ 4 ঘ 6 **গ**

ব্যাখ্যা: $2^x = 16$ বা, $2^x = 2^4$ $\therefore x = 4$

১২. x এর লগারিদমিক ফাংশন কোনটি? (মধ্যম)

ক $x = \log_2 16$ খ $x = \log_{16} 2$

গ $_x\log = \log_{-2}16$ ঘ $16x = \log 2$ **ক**

১৩. 16 = কোনটি? (মধ্যম)

ক $\text{anti}\log_2 4$ খ $\text{anti}\log_4 2$

গ $\log_4 2$ ঘ $\log_2 4$ **ক**

★★★ ৯.৭ লগারিদমের সূত্রাবলী | Text পৃষ্ঠা-১৯৫

- যদি $x > 0, y > 0$ এবং $a \neq 1$ তখন $x = y$; যদি এবং কেবল যদি $\log_a x = \log_a y$
- যদি $a > 1, x > 1$ হয় তবে $\log_a x > 0$
- যদি $0 < a < 1$ এবং $0 < x < 1$ হয়, তবে $\log_a x < 0$
- $f(x) = a^x$; x এর সকল মানের জন্য সংজ্ঞায়িত যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$.
- $f(x) = e^x$; x এর সকল মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।
- $f(x) = \ln x$; শুধু $x > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত।

১৪. $x = 2\sqrt{5}$ **হলে নিম্নের কোনটি সঠিক?** (কঠিন)

ⓚ $\log_x 400 = \frac{1}{4}$ ⓚ $\log_{400} x = 4$

ⓖ $\log_{400} x = \frac{1}{4}$ ⓖ $\log_4 400 = x$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\log_{400} 2\sqrt{5} = \log_{400}(400)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log_{400} 400$

$= \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$

১৫. $\log 3.2$ **এর মান নিচের কোনটি?** (মধ্যম)

ক) $\log 2 - \log 3 + \log 5$ খ) $2\log 5 - \log 2$

গ) $4\log 2 - \log 5$ ঘ) $\log 32 - \log 5$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\log\frac{32}{10} = \log\frac{16}{5} = \log 16 - \log 5 = \log 2^4 - \log 5$

$= 4\log 2 - \log 5$

১৬. $\log_p \log_p \log_p (p^{p^{q}}) =$ **কত?** (মধ্যম)

ক) q খ) p^q গ) $q\log_p$ ঘ) 1 **ক**

ব্যাখ্যা: $\log_p \log_p (p^{p^{q}})\ \log_p{}^p = \log_p{}^{p^q}.\log_p{}^p.1$

$= q\log_p{}^p.1.1 = q.1.1.1 = q$

১৭. $\log_2 5 + \log_2 7 + \log_2 3 =$ **কত?** (সহজ)

ক) $\log_2 105$ খ) $\log_2 150$

গ) $\log_{105} 2$ ঘ) 0 **ক**

ব্যাখ্যা: $\log_2(5 \times 7 \times 3) = \log_2 105$

১৮. $\log_x x\sqrt{x}\ \sqrt[3]{x} =$ **কত?** (মধ্যম)

ক) $\frac{4}{6}$ খ) $\frac{5}{6}$ গ) $\frac{3}{2}$ ঘ) $\frac{11}{6}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\log_x x.\ x^{\frac{1}{2}}.\ x^{\frac{1}{3}} = \log_x x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{11}{6}\log_x x = \frac{11}{6}$

১৯. $\log_a p \times \log_p q \times \log_q r \times \log_r b =$ **কত?** (মধ্যম)

ক) $\log_a r$ খ) $\log_p b$ গ) $\log_a b$ ঘ) $\log_r b$ **গ**

ব্যাখ্যা: $(\log_p q \times \log_a p) \times (\log_r b \times \log_q r)$

$= \log_a q \times \log_q b = \log_a b$

২০. $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a =$ **কত?** (কঠিন)

ক) 4 খ) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{c}$

গ) $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b}$ ঘ) 8 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\log_{\sqrt{a}} \sqrt{(b)}^2 \times \log_{\sqrt{b}} \sqrt{(c)}^2 \times \log_{\sqrt{c}} \sqrt{(a)}^2$

$= 2\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times 2\log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times 2\log_{\sqrt{c}} \sqrt{a}$

$= 8(\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times \log_{\sqrt{c}} \sqrt{a})$

$= 8 \times \log_{\sqrt{a}} \sqrt{a} = 8 \times 1 = 8$

২১. **লগারিদমে —**

i. $\log_2 5 + \log_2 7 + \log_2 3 = \log_2 35$

ii. $\log_5 64 = 6\log_5 2$

iii. $\frac{1}{3}\log_7 64 = \log_7 4$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii **গ**

২২. $a > 0, a \neq 1$ **হলে—**

i. $\log_a a = 1$ ।

ii. $\left(\frac{a^m}{a^n}\right)^1 = \left(\frac{a^n}{a^m}\right)^1$ ।

iii. $\log_a 1 = 0$ ।

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii **খ**

২৩. $a, b > 0$ **এবং** $a \neq b$ **হলে—**

i. $(a^p)^{qr} = a$ হলে, $pqr = 1$

ii. $(a^{xy})(a^{y})^{z^2} = a^2$ হলে $xyz = 1$

iii. $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right) = 0$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক) i ও ii খ) i ও iii

গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii **খ**

ব্যাখ্যা: (i) $a^{pqr} = a^1$ বা, $pqr = 1$

(ii) $a^{xy}.a^{xyz^2} = a^2$

বা, $a^{xy+xyz^2} = a^2$

বা, $xy + xyz^2 = 2$

(iii) $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n} \times \frac{b^n}{c^n} \times \frac{c^n}{a^n}\right) = \log_k 1 = 0$

২৪. $y = \log_{10} x$ **—**

i. $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$ ।

ii. এটি $(1, 0)$ বিন্দুগামী সরলরেখা।

iii. $10^y = x$ এর বিপরীত ফাংশন।

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (২৫-২৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$P = \log_a(bc)$, $q = \log_b(ca)$, $r = \log_c(ab)$

২৫. $1 + q =$ **কত?** (মধ্যম)

ক) $\log_a(abc)$ খ) $\log_b(abc)$ গ) $\log_a bc$ ঘ) $\log_a \frac{a}{bc}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $1 + q = 1 + \log_b(ca) = \log_b b + \log_b(ca) = \log_b abc$

২৬. $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+r} =$ **কোনটি?** (কঠিন)

ক) $\frac{1}{1+q}$ খ) $1+q$ গ) $\frac{q}{1+q}$ ঘ) $\frac{(1+q)}{q}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $1 + p = \log_a(abc)$, $1 + r = \log_c abc$

$\therefore \frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = \log_{abc} a + \log_{abc} c$

$\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+r} = \frac{1}{\log_a abc} + \frac{1}{\log_c abc} = \log_{abc} a + \log_{abc} c$

$= \log_{abc} ac + \log_{abc} b - \log_{abc} b = \log_{abc} abc - \log_{abc} b$

$= 1 - \frac{1}{\log_b abc} = 1 - \frac{1}{1+q} = \frac{1+q-1}{1+q} = \frac{q}{1+q}$

২৭. $r = 0$ **হলে** $ab =$ **কত?** (সহজ)

ক) 0 খ) 1

গ) $\log_a abc$ ঘ) $\log_a bc$ **খ**

★★★ ৯.৭ সূচকীয়, লগারিদমীয় ও পরমমান ফাংশন | Text পৃষ্ঠা-১৯৯

- $y = f(x) = a^x (a > 1)$ লেখচিত্রে x এর ঋণাত্মক মান ক্রমাগত বাড়ার সাথে সাথে $f(x)$ এর মান ক্রমাগত হ্রাস পায়। অর্থাৎ $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$
- $y = f(x) = \text{Log}_a x\ (a > 1)$, y এর সকল মানের জন্য x এর মান ধনাত্মক এবং y এর মানের ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে x এর মান বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়। অর্থাৎ $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$.

২৮. **সূচক ফাংশন** $f(x) = a^x$ **সকল বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত, নিচের কোন শর্তে?** (মধ্যম)

ক) $a > 0$ এবং $a \neq 1$ খ) $a < 0$ এবং $a \neq 1$

গ) $a < 0$ এবং $a = 1$ ঘ) $a > 0$ এবং $a = 1$ **ক**

২৯. $y = 3x^2$ **কী ধরনের ফাংশন?** (সহজ)

ক) লগারিদমিক ফাংশন খ) সূচকীয় ফাংশন

গ) পরম মান ফাংশন ঘ) বিপরীত ফাংশন **খ**

৩০. **নিচের কোনটি সূচক ফাংশন নির্দেশ করে?** (সহজ)

ক) e^x খ) $\log_x 4$

গ) $(1 + x^3)^{\frac{1}{3}}$ ঘ) x^{in} **ক**