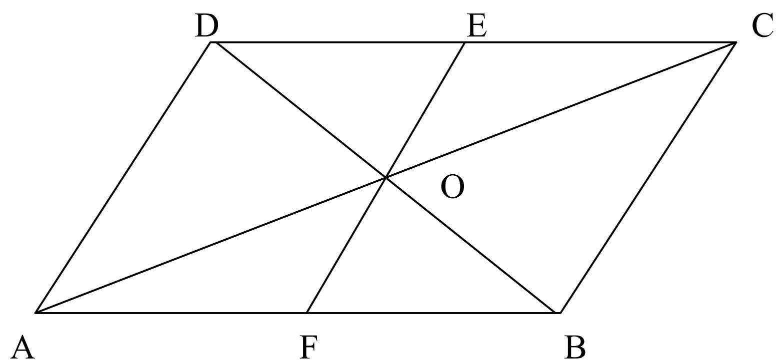
অনুশীলনী ৯

১। ABCD সামান্তরিকের অভ্যন্তরে O যেকোনো একটি বিন্দু।
প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র AOB + Δ ক্ষেত্র COD = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্রে ABCD)

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন :
দেওয়া আছে, ABCD সামান্তরিকের অভ্যন্তরে O যেকোনো একটি বিন্দু। O, A; O, B; O, C এবং O, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র AOB + Δ ক্ষেত্র COD = $\frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্রে ABCD)

অঙ্কন : O বিন্দু হতে AB- এর উপর OF লম্ব টানি। FO কে E পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন তা CD কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

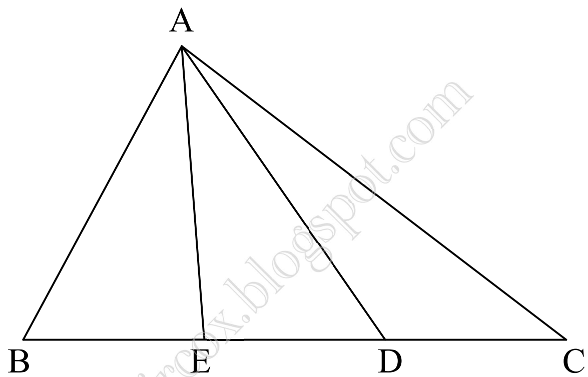
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু AB ‖ CD এবং EF তাদের ছেদক। $\therefore \angle DEF = \angle EFB$ = এক সমকোণ $\therefore$ ABCD সামান্তরিকের উচ্চতা EF সুতারাং ABCD = AB $\times$ EF এখানে, ΔAOB এ ভূমি AB এবং উচ্চতা OF $\therefore \Delta$ ক্ষেত্র AOB = $\frac{1}{2} \times AB \times OF$	[একান্তর কোণ এবং EF$\perp$AB বলে] [যেহেতু সামান্তরিক ক্ষেত্র = ভূমি $\times$ উচ্চতা] [$\because \angle OFB$ = এক সমকোণ]
(২) অনুরূপভাবে, Δ ক্ষেত্র COD = $\frac{1}{2} \times CD \times OE$ $= \frac{1}{2} \times AB \times OE$	[$\because \angle OED$ = এক সমকোণ তাই OF উচ্চতা] [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান]
(৩) Δ ক্ষেত্র AOB + Δ ক্ষেত্র COD	[(১) ও (২) থেকে]

$=\frac{1}{2}\times AB\times OF+\frac{1}{2}\times AB\times OE$ $=\frac{1}{2}AB(OF+OE)$ $=\frac{1}{2}AB.EF$ $=\frac{1}{2}$(সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD) **(প্রমাণিত)**	

২। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC- এ AD একটি মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র ABD = Δ ক্ষেত্র ACD

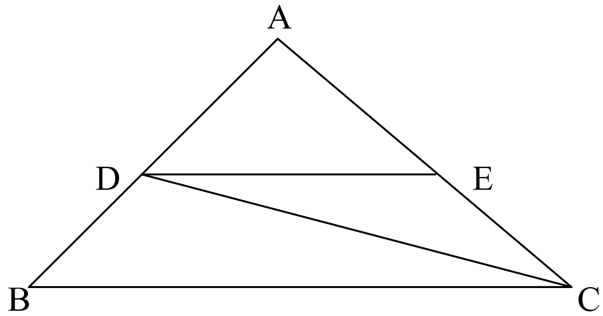
অঙ্কন : A বিন্দু থেকে BC - এর উপর AE লম্ব আঁকি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু AD মধ্যমা, সেহেতু BD = CD Δ ক্ষেত্র ABD- এর ক্ষেত্রফল = $=\frac{1}{2}\times BD\times AE$	[ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times$ভূমি$\times$উচ্চতা]
(২) আবার, Δ ক্ষেত্র ACD- এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times CD\times AE$ $=\frac{1}{2}\times BD\times AE$ $\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABD = Δ ক্ষেত্র ACD। **(প্রমাণিত)**	[(১) থেকে]

৩। ΔABC এ AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র CDE = $\frac{1}{2}$ (Δক্ষেত্র ABC).

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC- এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।
প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র CDE $= \frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র ABC)

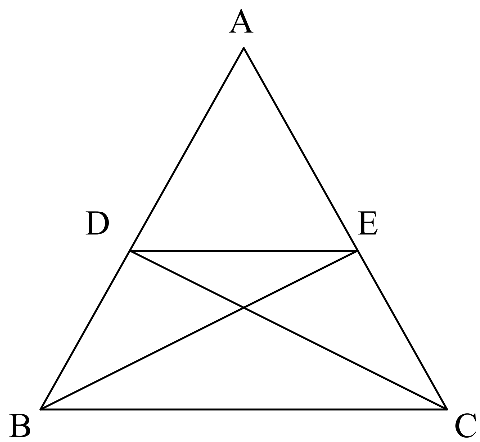
অঙ্কন : C, D এবং D, E যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু, D, AB- এর মধ্যবিন্দু। সেহেতু CD, ΔABC- এর মধ্যমা। $\therefore \Delta$ ক্ষেত্র CDE $= \frac{1}{2}$(Δ ক্ষেত্র ABC)	[ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজকে দুইটি সমান অংশে বিভক্র করে]
(২) আবার, যেহেতু ΔACD- এর AC বাহুর মধ্যবিন্দু E সুতারাং DE, ΔACD- এর মধ্যমা $\therefore \Delta$ ক্ষেত্র CDE $= \frac{1}{2}$(Δ ক্ষেত্র ACD) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABC) $= \frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র ABC) অর্থাৎ Δক্ষেত্র CDE $= \frac{1}{4}$(Δ ক্ষেত্র ABC) **(প্রমাণিত)**	[ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান দুইটি অংশে বিভক্ত করে] [(১) থেকে]

৪। ΔABC এ BC ভূমির সামান্তরাল যেকোণ সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র DBE = Δক্ষেত্র EBC এবং = Δক্ষেত্র CDE

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC- এর ভূমি BC - এর সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র DBC = Δক্ষেত্র EBC এবং Δক্ষেত্র BDE = Δক্ষেত্র CDE

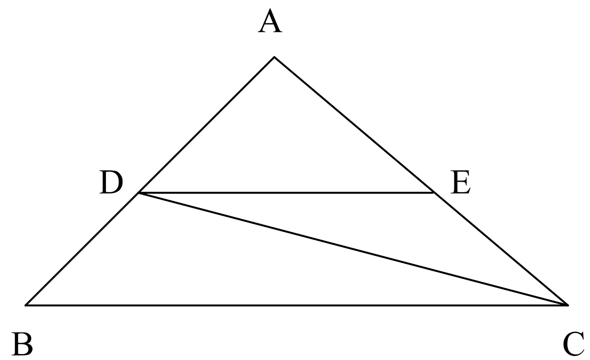
অঙ্কন :

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔDBC ও ΔEBC - এ ভুমি BC = ভুমি BC, BD = CE এবং $\angle EBC = \angle DCB$ $\therefore$ Δক্ষেত্র DBC = Δক্ষেত্র EBC	[ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি BC এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও DE এর মধ্যে অবস্থিত]
(২) ΔBDE ও ΔCDE- এ ভুমি DE = ভুমি DE, BD = CE এবং $\angle BED = \angle CDE$ অতএব, Δক্ষেত্র BDE = Δক্ষেত্র CDE **(প্রমাণিত)**	[ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি DE এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল DE ও BC এর মধ্যে অবস্থিত।]

৫। ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E । প্রমাণ কর যে, Δক্ষেত্র ADE $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC)

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC- এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র ADE $= \frac{1}{4}$ (Δক্ষেত্র ABC)

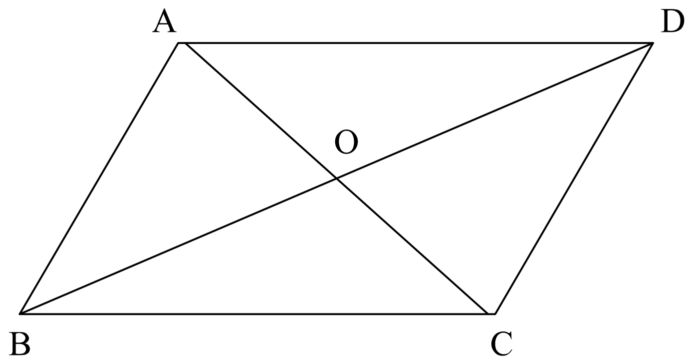
অঙ্কন : C, D এবং D, E যোগ করি

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু, D, AB- এর মধ্যবিন্দু সেহেতু CD, ΔABC-এর একটি মধ্যমা। $\therefore \Delta$ ক্ষেত্র ACD $= \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABC)	[ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি অংশে ভাগ করে]
(২) যেহেতু Δ ক্ষেত্র ACD- এর AC বাহুর মধ্যবিন্দু E. সেহেতু DE, ΔACD- এর মধ্যমা। $\therefore \Delta$ক্ষেত্র ADE $= \frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ACD) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ (Δক্ষেত্র ABC) $= \frac{1}{4}$ (Δক্ষেত্র ABC) অর্থাৎ Δক্ষেত্র ADE $= \frac{1}{4}$ (Δক্ষেত্র ABC). **(প্রমাণিত)**	[ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি অংশে ভাগ করে] [(১) থেকে]

৬। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান :



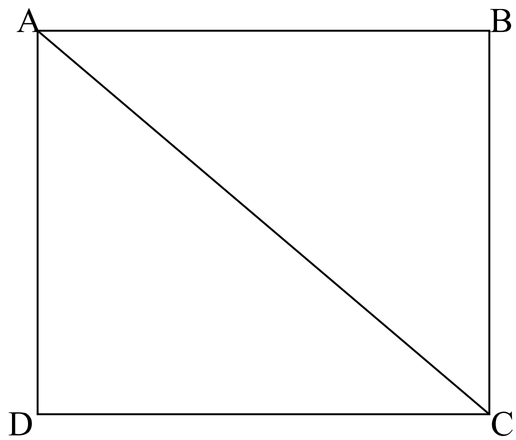
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক। এর AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, Δক্ষেত্র ΔAOB = Δক্ষেত্র BOC = Δক্ষেত্র COD = Δক্ষেত্র AOD.

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) AO = CO এবং BO = DO	[সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে]
(২) এখন, ΔABC- এ BO মধ্যমা $\therefore$ Δক্ষেত্র AOB = Δক্ষেত্র BOC $= \frac{1}{2}$ Δক্ষেত্র ABC	[ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি অংশে বিভক্ত করে]
(৩) ΔADC- এ DO মধ্যমা $\therefore$ Δক্ষেত্র COD = Δক্ষেত্র AOD $= \frac{1}{2}$ Δক্ষেত্র ADC $\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADC$	[সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিক ক্ষেত্রকে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে]
বা, Δক্ষেত্র ABC = Δক্ষেত্র ADC $\therefore \frac{1}{2}$ Δক্ষেত্র ABC = $\frac{1}{2}$ Δক্ষেত্র ADC	[সর্বস্ব ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান]
(৪) Δক্ষেত্র AOB = Δক্ষেত্র BOC = Δক্ষেত্র COD = Δক্ষেত্র AOD **(প্রমাণিত)**	[ধাপ (২) ও (৩) হতে]

৭। প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

সমাধান :



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। এর AC কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে,

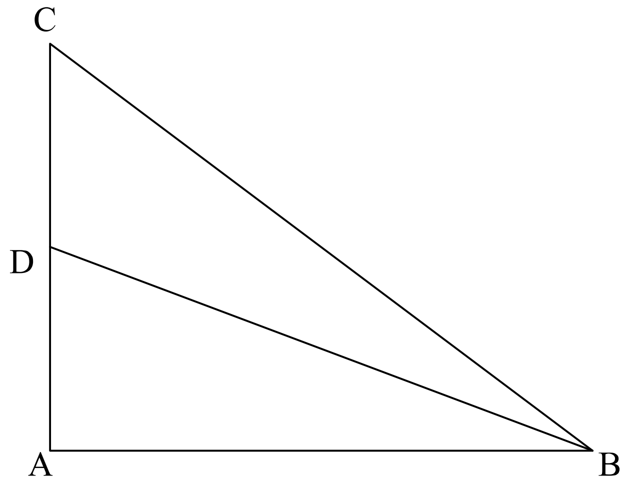
$AB^2 = \frac{1}{2}AC^2$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC- এ $\angle B =$ এক সমকোণ $\therefore \Delta ABC$ সমকোণী এবং AC এর অতিভুজ।	[বর্গক্ষেত্রের সকল কোণ সমকোণ]
(২) এখন, ΔABC- এ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ বা, $AC^2 = AB^2 + AB^2$ বা, $2AB^2 = AC^2$ $\therefore AB^2 = \frac{1}{2}AC^2$ **(প্রমাণিত)**	[পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী] [বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলো পরস্পর সমান]

৮। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ = এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে,
$BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$

সমাধান :



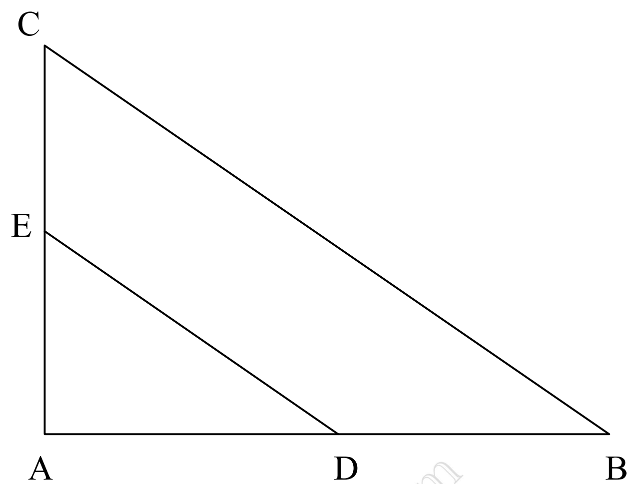
বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের $\angle A$ = এক সমকোণ এবং D, AC- এর উপস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) যেহেতু, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = এক সমকোণ এবং BC এর অতিভুজ। $BC^2 = AB^2 + AC^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]
(২) অনুরূপভাবে, ABD সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ BD $\therefore AB^2 + AD^2 = BD^2$ বা, $AD^2 = BD^2 - AB^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]
(৩) এখানে, $BC^2 + AD^2$ $= AB^2 + AC^2 + BD^2 - AB^2$ সুতারাং, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$ **(প্রমাণিত)**	[(১) ও (২) থেকে]

৯। ΔABC ত্রিভুজের $\angle A$ = একসমকোণ D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $DE^2 = CE^2 + BD^2$ ।

সমাধান :



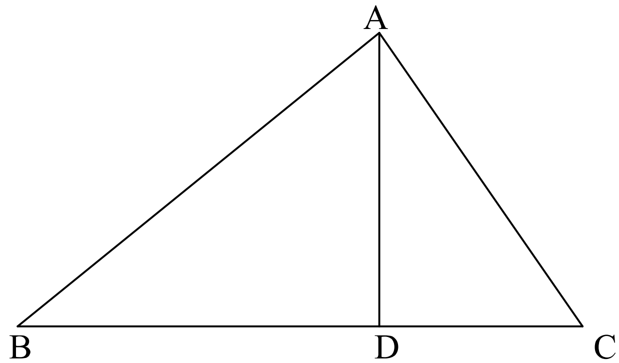
বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC- এর $\angle A$ = এক সমকোণ। D ও E যথাক্রমে AB ও AC- এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $DE^2 = CE^2 + BD^2$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) এখানে, AD = BD এবং AE = CE	[D ও E যথাক্রমে AB ও AC- এর মধ্যবিন্দু।]
(২) এখন ADE সমকোণী ত্রিভুজে, $DE^2 = AE^2 + AD^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
$\therefore DE^2 = CE^2 + BD^2$ **(প্রমাণিত)**	[(১) থেকে]

১০। ΔABC এ BC এর উপর লম্ব AD এবং AB > AC প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$

সমাধান :



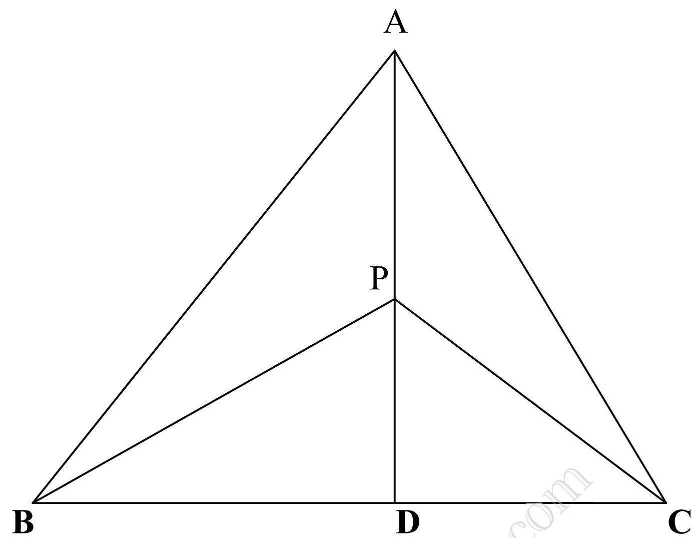
বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC- এ BC এর উপর লম্ব AD এবং AB > AC প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC এ AD, BC- এর উপর লম্ব। $\therefore \Delta ABC$ ও ΔACD উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।	
(২) এখন ABD সমকোণী ত্রিভুজে AB অতিভুজ $\therefore BD^2 + AD^2 = AB^2$ বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]
(৩) আবার, ACD সমকোণী ত্রিভুজে $AD^2 + CD^2 = AC^2$ বা, $AD^2 = AC^2 - CD^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]
(৪) $AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$ **(প্রমাণিত)**	[(২) ও (৩) থেকে]

১১। ΔABC এ BC এর উপর AD লম্ব এবং AD এর উপর P যেকোনো বিন্দু ও AB > AC প্রমাণ কর যে,
$AB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$

সমাধান :

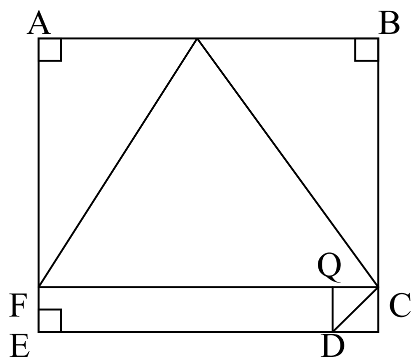


বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC- এ BC- এর উপর লম্ব AD এবং AD- এর উপর P যেকোনো বিন্দু ও AB > AC । P, B ও P, C যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে
$AB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC - এ $AD \perp BC$, ΔABD, ΔACD, ΔBPD এবং ΔCPD প্রত্যেকেই সমকোণী ত্রিভুজ	
(২) এখন ΔABD- এ, $AB^2 = BD^2 + AD^2$	[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান]
(৩) ΔACD- এ $AC^2 = AD^2 + CD^2$	[একই কারণে]
(৪) $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$	[(২) ও (৩) থেকে]
(৫) আবার, ΔBPD - এ $PB^2 = BD^2 + PD^2$	[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান]
(৬) ΔPCD - এ $PC^2 = PD^2 + CD^2$	[একই কারণে]
(৭) $PB^2 - PC^2 = BD^2 - CD^2$	[(৫) ও (৬) থেকে]
$PB^2 - PC^2 = AB^2 - AC^2$ **(প্রমাণিত)**	[(৪) থেকে]

১২। ABCD বহুভুজে AE ।। BC, CF ⊥ AE এবং DQ ⊥ CF, ED =10 মি.মি. EF = 2 মি.মি. BC = 8 মি.মি. AB = 12 মি.মি.



উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের (১- ৪) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

১। ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ মি.মি.?

(ক) 64 (খ) 96 (গ) 100 (ঘ) 144

২। নিচের কোনটি FPC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর?

(ক) 32 (খ) 48 (গ) 72 (ঘ) 60

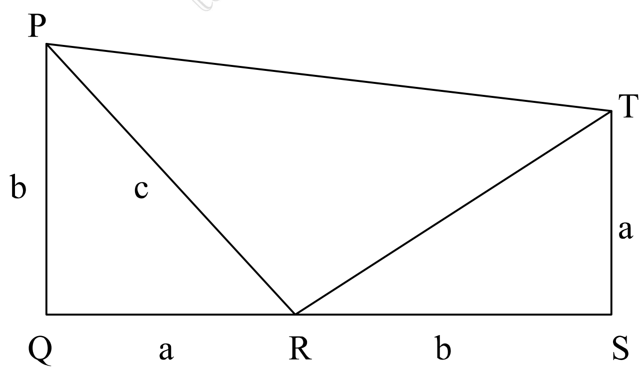
৩। CD - এর দৈর্ঘ্য নিচের কোনটিতে প্রকাশ পায়?

(ক) $2\sqrt{2}$ (খ) 4 (গ) $4\sqrt{2}$ (ঘ) 8

৪। নিচের কোনটিতে ΔFPC ও ΔDQC এর ক্ষেত্রফলের অন্তর নির্দেশ কর?

(ক) 46 বর্গ একক (খ) 48 বর্গ একক (গ) 50 বর্গ একক (ঘ) 52 বর্গ একক

১৩।



(ক) PQST কী ধরনের চতুর্ভুজ? স্বপক্ষে যুক্তি দাও।

(খ) দেখাও যে, ΔPRT সমকোণী।

(গ) প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2$

সমাধান :

(ক) PQST চতুর্ভজটি ট্রাপিজিয়াম। কারণ PQST চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু PQ ও TS বাহুদ্বয় সমান্তরাল এবং অপর বিপরীত PT ও QS বাহুদ্বয় অসমান্তরাল।

(খ) ΔPQR ও ΔRST এ $PQ = RS = b, QR = ST = a$ এবং $\angle PQR = \angle RST$ [প্রত্যেক 90^0]

$\Delta PQR \cong \Delta RST$ $\therefore PR = RT = c$ এবং $QPR = TRS$

আবার, $PQ \perp QS$ এবং $TS \perp QS$ বলে, $PQ \parallel TS$ সুতারাং, PQST একটি ট্রাপিজিয়াম.

এখন, $\angle PRO + \angle QPR = \angle PRO + \angle TRS = 1$ সমকোণ

$\therefore$ $\angle PRT$ = এক সমকোণ। সুতারাং ΔPQR সমকোণী ত্রিভুজ। **(দেখানো হলো)**

(গ) এখন, PQST ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র PQR + Δ ক্ষেত্র RST Δ ক্ষেত্র PRT

বা, $\frac{1}{2}QS(PQ+TS) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$

বা, $\frac{1}{2}(QR+RS)(PQ+TS) = \frac{1}{2}(2ab+c^2)$

বা, $\frac{1}{2}(a+b)(b+a) = \frac{1}{2}(2ab+c^2)$

বা, $a^2+2ab+b^2 = 2ab+c^2$

বা, $a^2+b^2 = c^2$

বা, $c^2 = b^2+a^2$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (প্রমাণিত)