প্রশ্নমালা IV B

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

1. $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তে $y = mx + c$ রেখাটি স্পর্শক হওয়ার শর্ত, $c = \pm r\sqrt{m^2+1}$ ।

$x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx \pm r\sqrt{m^2+1}$ এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-mr}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{r}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

2. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

3. বহিঃস্থ যেকোন বিন্দু (x_1, y_1) হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ, $(xx_1 + yy_1 + gx + gx_1 + fy + fy_1 + c)^2 = (x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)$ $(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)$

4. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপর $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$(y_1 + f)x - (x_1 + g)y + gy_1 - fx_1 = 0.$

5. (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য,

$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}$

6. (x_1, y_1) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শ জ্যা এর সমীকরণ,

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

7. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কোন জ্যা এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হলে তার সমীকরণ,

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

8. $S_1 = 0$ ও $S_2 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $S_1 - S_2 = 0.$

9. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর প্রতিবিম্ব

(a) x অক্ষের সাপেক্ষে $x^2+y^2 + 2gx - 2fy + c = 0$

(b) y অক্ষের সাপেক্ষে $x^2+y^2 - 2gx + 2fy + c = 0$

(c) $ax + by + c = 0$) রেখার সাপেক্ষে ঃ এ রেখার সাপেক্ষে প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ এর প্রতিবিম্ব (g', f') কে কেন্দ্র এবং প্রদত্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধকে ব্যাসার্ধ ধরে অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় প্রতিবিম্ব।

প্রশ্নমালা IV B

1. (a) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + c = 0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 হলে, c এর মান নিচের কোনটি?

$\text{Sol}^n : \sqrt{2^2 + 3^2 - c} = 3 \Rightarrow c = 13 - 9 = 4$

(b) Sol^n :

(i) সংশোধন : x-অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ 6

$2\sqrt{r^2 - k^2} = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6$

(ii) $\sqrt{2^2 + 3^2 - c} > 0 \Rightarrow c < 13$

(iii) সংশোধন : (1, 1) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 3x + 5y - c = 0$ বৃত্তের ভিতরে অবস্থান করলে $c > 10$ হবে।

$1^2 + 1^2 + 3.1 + 5.1 - c < 0 \Rightarrow c > 10.$

(c) Sol^n : $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

(d) Sol^n : $(x - h)^2 + (y - k)^2 = k^2$

(e) Sol^n : উভয় অক্ষ কে স্পর্শ করার শর্ত $g^2 = f^2 = c$

$k = \pm 4, c = 16$

(f) Sol^n : বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী বলে, $c = 0$ এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে বলে, $f^2 = c = 0$.

(g) Sol^n : (0,1) ও (1,0) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশের মধ্যবিন্দু স্থানাঙ্ক $\left(\frac{0+1}{2}, \frac{1+0}{2}\right)$.

(h) Sol^n : (i) $AB = 5 - 3 = 2$

(ii) স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 - 6 + 11} = 3$

(iii) জ্যা এর সমীকরণ, $x.2 + y.3 = 2^2 + 3^2$

$\Rightarrow 2x + 3y = 13.$

(i) Sol^n : $r = a\cos\theta \Rightarrow r^2 = a.r\cos\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - ax = 0 \therefore$ কেন্দ্র $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$

(j) Sol^n : সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $x^2+y^2+2x+3y+1-(x^2+y^2+4x+3y+2)=0$

$\Rightarrow 2x+1=0$

$x-3y=\text{k}$ রেখাটি $x^2+y^2-6x+8y+15=0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। পরবর্তী তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

(k) Sol^n : ব্যাসার্ধ $=\sqrt{3^2+4^2-15}=\sqrt{10}$,

y-অক্ষের খণ্ডিতাংশ $=2\sqrt{4^2-15}=2.$

(*l*) Sol^n : $\dfrac{|3-3(-4)-k|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$

$\Rightarrow |15-k|=10 \Rightarrow k-15=\pm 10 \Rightarrow k=5, 25$

(m) Sol^n : $x-3y=5$ স্পর্শকের সমান্তরাল বৃত্তটির অপর স্পর্শকের সমীকরণ, $x-3y=25.$

(n) ***Sol^n.:*** $x^2+y^2+2x+4y-1/3=0$

কেন্দ্র $=(-2/2, -4/2)=(-1,-2)\ \therefore$ Ans. D

(o) ***Sol^n.:*** বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=\sqrt{4^2+3^2}=5$

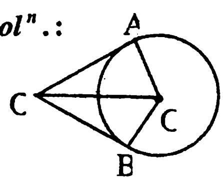
$(4, 3)$ ও $(-1, 3)$ এর দূরত্ব $=|4+1|=5$

$(4, 3)$ ও $(9, 3)$ এর দূরত্ব $=|4-9|=5$

$(4, 3)$ ও $(0, 3)$ এর দূরত্ব $=|4-0|=4$

$(0, 3)$ বৃত্তের উপর অবস্থিত নয়। Ans. C

(p) ***Sol^n.:***



বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

$OA=OB=\sqrt{0+c}=\sqrt{c}$

OABC চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$=2\times$OAC সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$=2\times\dfrac{1}{2}(OA\times AC)$

$=\sqrt{c}\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{c(g^2+f^2-c)}$

Ans. B

2(a) $(3, 7)$ ও $(9, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হয়েছে। দেখাও যে, $x+y=4$ রেখাটি ঐ বৃত্তের একটি স্পর্শক। স্পর্শবিন্দুটি নির্ণয় কর। [চ.'০৫]

প্রমাণ ঃ $(3 \quad 7)$ ও $(9 \quad 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)(x-9)+(y-7)(y-1)=0$

$\Rightarrow x^2-12x+27+y^2-8y+7=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-12x-8y+34=0 \quad (1)$

প্রদত রেখা $x+y=4 \Rightarrow y=4-x \cdots(2)$

(1) এ y এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2+(4-x)^2-12x-8(4-x)+34=0$

$\Rightarrow x^2+16-8x+x^2-12x-32+8x+34=0$

$\Rightarrow 2x^2-12x+18=0 \Rightarrow x^2-6x+9=0$

$\Rightarrow (x-3)^2 \Rightarrow x=3$

$(2) \Rightarrow y=4-3=1$

$\therefore$ (2) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের সাথে শুধুমাত্র $(3,1)$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

$x+y=4$ রেখাটি বৃত্তটির একটি স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দু $(3,1)$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $(3 \quad 7)$ ও $(9 \quad 1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)(x-9)+(y-7)(y-1)=0$

$\Rightarrow x^2-12x+27+y^2-8y+7=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-12x-8y+34=0 \quad (1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(6, 4)$ এবং

ব্যাসার্ধ $=\sqrt{36+16-34}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

বৃত্তের কেন্দ্র $(6, 4)$ থেকে প্রদত রেখা $x+y=4$ অর্থাৎ $x+y-4=0$ (2) এর লম্ব দূরত্ব

$=\dfrac{|6+4-4|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}=$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ ।

প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

২য় অংশ ঃ (2) রেখার উপর লম্ব এবং বৃত্তের কেন্দ্র $(6, 4)$ দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ রেখার সমীকরণ,

$x-y=6-4 \Rightarrow x-y=2 \quad (3)$

$(2)+(3) \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$

(3) হতে পাই, $3-y=2 \Rightarrow y=1.$

(2) ও (3) রেখার ছেদবিন্দু $(3 \quad 1)$ যা নির্ণের স্পর্শ বিন্দু।

2(b) দেখাও যে, $y - 3x = 10$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10$ বৃত্তকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব.'০১]

প্রমাণ প্রদত্ত রেখা $y - 3x = 10$ হতে $y = 3x + 10 \cdots(1)$ এর মান প্রদত্ত বৃত্তে বসিয়ে পাই, $x^2 + (3x + 10)^2 = 10$

$\Rightarrow x^2 + 9x^2 + 60x + 100 - 10 = 0$

$\Rightarrow 10x^2 + 60x + 90 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 0$

$\Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$(1) \Rightarrow y = 3.(-3) + 10 = -9 + 10 = 1$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তের সাথে শুধুমাত্র $(-3,1)$ বিন্দুতে মিলিত হয়।

প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে এবং বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(-3,1)$.

2(c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। c এর মান ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [ব. '০৪; ঢা. '০৪,'০৭'১১; রা. '০৫, '১২; য.'০৫, '০৮,'১১ ; চ.'০৫,'০৮; মা.বো.'০৫;]

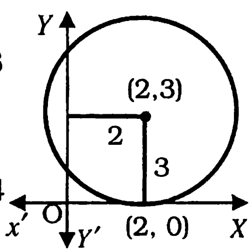
সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4 + 9 - c} = \sqrt{13 - c}$

x-অক্ষ থেকে বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 3)$ এর দূরত্ব $= |3| = 3$

বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$\sqrt{13 - c} = 3$

$\Rightarrow 13 - c = 9 \quad c = 4$



আবার, বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্রের ভুজ 2.

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, 0)$.

2(d) দেখাও যে, $x - 3y = 5$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৭; মা.'০৩]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 15 = 0 \cdots(1)$

বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -4)$ এবং

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9 + 16 - 15} = \sqrt{10}$

বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -4)$ থেকে $x - 3y = 5$ অর্থাৎ $x - 3y - 5 = 0$ (2) রেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|3 - 3\times(-4) - 5|}{\sqrt{1 + 9}} = \dfrac{|3 + 12 - 5|}{\sqrt{1 + 9}}$

$= \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ ।

প্রদত্ত রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

২য় অংশ ঃ $x - 3y - 5 = 0$ স্পর্শকের উপর লম্ব এবং বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -4)$ দিয়ে অতিক্রমকারী নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ $3x + y = 3\times3 - 4 = 9 - 4$

$3x + y = 5$ (Ans.)

3.(a) $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে k এর মান নির্ণয় কর।

[য.'০১; ব.'০৩,'০৭; রা.'০৬; সি.'১২]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 = 10x$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 10x = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{5^2} = 5$

বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 0)$ থেকে $3x + 4y = k$ অর্থাৎ $3x + 4y - k = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|15 - k|}{\sqrt{9 + 16}}$

$= \dfrac{|15 - k|}{5}$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\dfrac{|15 - k|}{5} = 5 \Rightarrow |k - 15| = 25$

$\Rightarrow k - 15 = \pm 25 \quad \therefore k = 40$ বা, -10

3(b) দেখাও যে, $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2m^2 + 2al = 1$ হয়। [কু. '০৬,'০৮; ঢা. '০৮; রা.'১১; সি. '০৪; ব. '০৫,'০৯; চ. '০৮,'১০; মা.'০৩; দি.'০৯; য.'১১]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{a^2} = a$

বৃত্তের কেন্দ্র $(a, 0)$ থেকে $lx + my = 1$ অর্থাৎ $lx + my - 1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|la - 1|}{\sqrt{l^2 + m^2}}$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\frac{|la-1|}{\sqrt{l^2+m^2}} = a$$

$\Rightarrow |la-1|^2 = a^2(l^2+m^2)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow (la-1)^2 = a^2l^2 + a^2m^2$

$\Rightarrow l^2a^2 - 2la + 1 = a^2l^2 + a^2m^2$

$a^2m^2 + 2al = 1$ (Showed)

3. (c) $px + qy = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। দেখাও যে, (p, q) বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত। [য.'০৬,'১২ ;কু.'০৪,'০৫,'১৩; রা.'০৫,'১৩; ঢা.'০৬; য.'০৬; ব.'০৮]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (0 , 0) এবং ব্যাসার্ধ = a

বৃত্তের কেন্দ্র (0 , 0) থেকে $px + qy = 1$ অর্থাৎ $px + qy - 1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|-1|}{\sqrt{p^2+q^2}}$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\left|\frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2}}\right| = a \Rightarrow p^2+q^2 = \frac{1}{a^2}$$ এ

থেকে স্পর্শ যে, (p , q) বিন্দুটি $x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2}$ বৃত্তের সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

(p , q) বিন্দুটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

3(d) $ax + 2y - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে a এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৪]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (4,1) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4^2+1^2-4} = \sqrt{13}$

বৃত্তের কেন্দ্র (4 , 1) থেকে $ax + 2y - 1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{4a+2-1}{\sqrt{a^2+4}}\right| = \left|\frac{4a+1}{\sqrt{a^2+4}}\right|$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\left|\frac{4a+1}{\sqrt{a^2+4}}\right| = \sqrt{13}$$

$\Rightarrow (4a+1)^2 = 13(a^2+4)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 16a^2 + 8a + 1 = 13a^2 + 52$

$\Rightarrow 3a^2 + 8a - 51 = 0$

$\Rightarrow 3a^2 + 17a - 9a - 51 = 0$

$\Rightarrow a(3a+17) - 3(3a+17) = 0$

$\Rightarrow (3a+17)(a-3) = 0$

$a = 3$ বা, $-17/3$

3(e) $3x + by - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। b এর মান নির্ণয় কর। [রা. '০৮,'১২; কু.'০৪,'১০; সি. '০৮; মা.'০৫, য.'১১; চ.'১১; ব.'১২; ঢা.'১৩]

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (4, 1) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{4^2+1^2-4} = \sqrt{13}$

বৃত্তের কেন্দ্র (4 , 1) থেকে $3x + by - 1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{12+b-1}{\sqrt{9+b^2}}\right| = \left|\frac{11+b}{\sqrt{9+b^2}}\right|$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র থেকে রেখার দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\left|\frac{11+b}{\sqrt{9+b^2}}\right| = \sqrt{13}$$

$\Rightarrow (11+b)^2 = 13(9+b^2)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 121 + 22b + b^2 = 117 + 13b^2$

$\Rightarrow 12b^2 - 22b - 4 = 0$

$\Rightarrow 6b^2 - 11b - 2 = 0$

$\Rightarrow 6b^2 - 12b + b - 2 = 0$

$\Rightarrow 6b(b-2) + 1(b-2) = 0$

$\Rightarrow (b-2)(6b+1) = 0$

$b = 2$ বা, $-1/6$

3(f) (4 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্ত $3x + 4y - 1 = 0$ ও $x - 3 = 0$ রেখা দুইটিকে স্পর্শ করে। r বৃত্তটির ব্যাসার্ধ হলে দেখাও যে, $r^2 - 20r + 40 = 0$.

প্রমাণ : ধরি, r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \cdots (1)$

(1) বৃত্ত (4 , 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$(4-h)^2 + (1-k)^2 = r^2 \cdots (2)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) হতে $3x + 4y - 1 = 0$ ও $x - 3 = 0$ রেখা দুইটির লম্ব দূরত্ব যথাক্রমে

$\frac{|3h+4k-1|}{\sqrt{9+14}} = \frac{|3h+4k-1|}{5}$ ও $\frac{|h-3|}{\sqrt{1}}$

(1) বৃত্তটি প্রদত্ত রেখা দুইটিকে স্পর্শ করলে ,

$|h-3| = r \Rightarrow h-3 = \pm r \Rightarrow h = \pm r + 3$

এবং $\frac{|3h+4k-1|}{5} = r \Rightarrow 3h + 4k - 1 = \pm 5r$

$\Rightarrow 3(\pm r + 3) + 4k - 1 = \pm 5r \quad [\because h = \pm r + 3]$

$\Rightarrow \pm 3r + 9 + 4k - 1 = \pm 5r$

$\Rightarrow 4k + 8 = \pm 2r \Rightarrow 2k = \pm r - 4$

$\Rightarrow k = \frac{\pm r - 4}{2}$

(2) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$(4 \mp r - 3)^2 + (1 - \frac{\pm r - 4}{2})^2 = r^2$

$\Rightarrow (1 \mp r)^2 + \frac{(2 \mp r + 4)^2}{4} = r^2$

$\Rightarrow 4(1 \mp 2r + r^2) + (36 \mp 12r + r^2) = 4r^2$

$\Rightarrow 4 \mp 8r + 4r^2 + 36 \mp 12r + r^2 = 4r^2$

$\Rightarrow r^2 \mp 20r + 40 = 0$

কিন্তু বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $r>0$ বলে r এর কোন ধনাত্মক বাস্তব মান $r^2 + 20r + 40 = 0$ কে সিদ্ধ করে না।

$r^2 - 20r + 40 = 0$ (Showed)

4.(a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব । স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[কু.'০৫; রা.'০৭; ঢা.'১০]**

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (1,2) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = 3$

ধরি, $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব স্পর্শকের সমীকরণ $4x + 3y + k = 0 \cdots$ (1)

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (1,2) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\frac{|4.1 + 3.2 + k|}{\sqrt{16+9}} = 3 \Rightarrow |4 + 6 + k| = 15$

$\Rightarrow k + 10 = \pm 15 \; \therefore k = 5, -25$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $4x + 3y - 25 = 0$, $4x + 3y + 5 = 0$

4(b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক $3x - 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[সি.'০১]**

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (1,2) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 4} = 3$

ধরি, $3x - 4y - 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ $3x - 4y + k = 0 \cdots$ (1)

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (1,2) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$\frac{|3.1 - 4.2 + k|}{\sqrt{9+16}} = 3 \Rightarrow |3 - 8 + k| = 15$

$\Rightarrow k - 5 = \pm 15 \; \therefore k = 20, -10$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $3x - 4y + 20 = 0$, $3x - 4y - 10 = 0$

5.(a) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[ঢা.'০১,'০৯; রা.'০৪; য.'০৭; কু.'১১]**

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র (–2 4) এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{2^2 + 4^2 - 2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

ধরি, অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্নবিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে এরূপ স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ অর্থাৎ $x + y - a = 0 \cdots \cdots (1)$

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (–2 , 4) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসাধ $3\sqrt{2}$ এর সমান হবে।

$\frac{|-2 + 4 - a|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2} \Rightarrow |2 - a| = 6$

$\Rightarrow a - 2 = \pm 6 \quad a = 8, -4$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $x + y + 4 = 0$, $x + y - 8 = 0$

5(b) $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[চ.'১০; ব.'১১; কু.'য,'১২]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = 4^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (0 ,0) এবং ব্যাসার্ধ = 4

ধরি, x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ

$$y = \tan 30^0 \times x + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \times x + c$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{3}y + \sqrt{3}c = 0 \cdots (1)$$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(0, 0)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ 4 এর সমান হবে।

$$\frac{|\sqrt{3}c|}{\sqrt{1+3}} = 4 \Rightarrow |\sqrt{3}c| = 8 \Rightarrow c = \pm \frac{8}{\sqrt{3}}$$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $x - \sqrt{3}y \pm 8 = 0$

6.(a) $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ বৃত্তের একটি ব্যাস মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। ব্যাসটির সমীকরণ এবং মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৪]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 5bx + 12by = 0 \cdots (1)$ বৃত্তের কেন্দ্র $(\frac{5b}{2}, -6b)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\frac{25b^2}{4} + 36b^2}$

$$= \sqrt{\frac{25b^2 + 144b^2}{4}} = \sqrt{\frac{169b^2}{4}} = \frac{13b}{2}$$

মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং কেন্দ্র $(\frac{5b}{2}, -6b)$ দিয়ে অতিক্রমকারী নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ $y = \frac{-6b}{5b/2}x$

$$\Rightarrow 5y = -12x \quad 12x + 5y = 0$$

২য় অংশ ঃ মূলবিন্দুগামী স্পর্শক মূলবিন্দুগামী ব্যাসের উপর লম্ব। অতএব, মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ $5x - 12y = 0$

6(b) দেখাও যে, $x + 2y = 17$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 10$ বৃত্তের একটি স্পর্শক । এ বৃত্তের যে ব্যাসটি স্পর্শ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা.'০২]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 10$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(1,3)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1+9+10} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

বৃত্তের কেন্দ্র $(1, 3)$ থেকে $x + 2y = 17$ অর্থাৎ $x + 2y - 17 = 0$ রেখার লম্বদূরত্ব $= \frac{|1+6-17|}{\sqrt{1+4}}$

$$= \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} = \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ}$$ ।

রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক ।

২য় অংশ ঃ স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাস স্পর্শকের উপর লম্ব এবং কেন্দ্র দিয়ে অতিক্রম করে। অতএব, $x + 2y = 17$ স্পর্শকের উপর লম্ব এবং কেন্দ্র $(1,3)$ দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ ব্যাসের সমীকরণ $2x - y = 2.1 - 3 = -1$

$$2x - y + 1 = 0$$

7(a) $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ বৃত্তের $(4, -11)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. '০২; রা.'০৯]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ বৃত্তের $(4, -11)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$x.4 + y.(-11) - \frac{3}{2}(x + 4) + 5(y - 11) - 15 = 0$$

[$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ সূত্র দ্বারা ।]

$$\Rightarrow 8x - 22y - 3x - 12 + 10y - 110 - 30 = 0$$
$$5x - 12y - 152 = 0 \text{ (Ans.)}$$

7(b) $x^2 + y^2 = 45$ বৃত্তের $(6, -3)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0$ বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পর লম্ব। [প্র.ভ.প.'০০]

প্রমাণ ঃ $x^2 + y^2 = 45$ বৃত্তের $(6, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $x.6 + y.(-3) = 45$

$$\Rightarrow 2x - y = 15 \Rightarrow y = 2x - 15 \cdots (1)$$
$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0 \quad \cdots (2)$$

বৃত্তে $y = 2x - 15$ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + (2x - 15)^2 - 4x + 2(2x - 15) - 35 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 60x + 225 - 4x + 4x - 30 - 35 = 0$$
$$\Rightarrow 5x^2 - 60x + 160 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 8) = 0$$
$$\Rightarrow x = 4, 8$$

(1) হতে পাই, $y = 2.4 - 15 = 8 - 15 = -7$

এবং $y = 2.8 - 15 = 16 - 15 = 1$

$\therefore$ (1) রেখাটি (2) বৃত্তকে $A(4, -7)$ ও $B(8, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 35 = 0$$

(2) বৃত্তের $A(4, -7)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ, $x.4 + y.(-7) -2(x + 4) + (y - 7) -35 = 0$

$\Rightarrow 4x - 7y - 2x - 8 + y - 7 - 35 = 0$

$\Rightarrow 2x -6y -50 = 0 \Rightarrow x -3y - 25 = 0$,যার ঢাল $= -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$

আবার (2) বৃত্তের $B(8, 1)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.8 + y.1 -2(x + 8) + (y + 1) -35 = 0$

$\Rightarrow 8x + y - 2x - 16 + y + 1 - 35 = 0$

$\Rightarrow 6x + 2y - 50 = 0 \Rightarrow 3x + y - 25 = 0$, যার ঢাল $= -\frac{3}{1} = -3$

এ ঢালদ্বয়ের গুণফল $= \frac{1}{3} \times -3 = -1$

A ও B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক পরস্পর লম্ব।

8.(a) $x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের 2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [ব.'০৫; সি.'০৯; রা.'১০; দি.'১১]

সমাধান ঃ ধরি, 2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, \beta)$, যা প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 20$ এর উপর অবস্থিত।

$4 + \beta^2 = 20 \Rightarrow \beta^2 = 16 \Rightarrow \beta = 4, -4$

2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক (2,4) এবং (2,–4)

প্রদত্ত বৃত্তের (2,4) এবং (2,–4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x.2 + y.4 = 20 \Rightarrow x + 2y = 10$ এবং $x.2 + y.(-4) = 20 \Rightarrow x - 2y = 10$

8(b) $x^2 + y^2 = 13$ বৃত্তের 2 কোটিবিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০৮]

সমাধান ঃ ধরি, 2 কোটিবিশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\alpha, 2)$, যা প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 13$ এর উপর অবস্থিত।

$\alpha^2 + 4 = 13 \Rightarrow \alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3, -3$

2 ভুজবিশিষ্ট বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3,2) এবং (–3,2)

প্রদত্ত বৃত্তের (3,2) এবং (–3,2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $x.3 + y.2 = 13 \Rightarrow 3x + 2y = 13$ এবং $x.(-3) + y.2 = 13 \Rightarrow 3x - 2y + 13 = 0$

9.(a) $(1, -1)$ বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [য.'০২; কু.'১৩; চ.'১১]

সমাধান ঃ $(1, -1)$ বিন্দু থেকে $2x^2 + 2y^2 - x + 3y + 1 = 0$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{1^2 + (-1)^2 - \frac{1}{2}.1 + \frac{3}{2}(-1) + \frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4-3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ একক।

9. (b) $(3, -3)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [য.'০১]

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 5 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-4, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{16 + 4 + 5} = 5$

ধরি, $(3, -3)$ বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ $y + 3 = m(x - 3)$ অর্থাৎ $mx - y - 3m - 3 = 0$

এ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(-4, -2)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{17}$ এর সমান হবে।

$$\left|\frac{-4m + 2 - 3m - 3}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 5$$

$\Rightarrow (-7m - 1)^2 = 25(m^2 + 1)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow 49m^2 + 14m + 1 = 25m^2 + 25$

$\Rightarrow 24m^2 + 14m - 24 = 0$

$\Rightarrow 12m^2 + 7m - 12 = 0$

$\Rightarrow 12m^2 + 16m - 9m - 12 = 0$

$\Rightarrow 4m(3m + 4) - 3(3m + 4) = 0$

$\Rightarrow (3m + 4)(4m - 3) = 0$

$m = -\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$

স্পর্শকের সমীকরণ $y + 3 = \frac{3}{4}(x - 3)$

$\Rightarrow 4y + 12 = 3x - 9 \therefore 3x - 4y = 21$ এবং

$y + 3 = -\frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y + 9 = -4x + 12$

$4x + 3y = 3$

২য় অংশ : (3, −3) বিন্দু থেকে $x^2+y^2+8x+4y-5=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$$=\sqrt{(3)^2+(-3)^2+8.3+4.(-3)-5}$$
$$=\sqrt{9+9+24-12-5}=\sqrt{25}=5 \text{ একক।}$$

10.(a) (1, − 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $2x-y-4=0$ রেখাকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।
[ব.'০৩; সি.'০৯; দি.'১০; য.'১২]

সমাধান : বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র (1, − 3) হতে $2x-y-4=0$ স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব

$$=\frac{|2.1+3-4|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt5}$$

(1, − 3) কেন্দ্র ও $\frac{1}{\sqrt5}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2+(y+3)^2=(\frac{1}{\sqrt5})^2$

$$\Rightarrow 5(x^2-2x+1+y^2+6y+9)=1$$
$$\Rightarrow 5x^2+5y^2-10x+30y+50-1=0$$
$$5x^2+5y^2-10x+30y+49=0$$

10(b) $\sqrt2$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $x+y+1=0$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যাদের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত। [সি.'০৩,'১১]

সমাধান : ধরি, x-অক্ষের উপর অবস্থিত বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\alpha, 0)$.

$x+y+1=0$ রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(\alpha, 0)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt2$ এর সমান হবে।

$$\frac{|\alpha+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt2\Rightarrow|\alpha+1|=2$$
$$\Rightarrow \alpha+1=\pm2 \therefore \alpha=1,-3$$

বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র (1 , 0) এবং (− 3, 0)

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2+y^2=(\sqrt2)^2$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2x+1=2$$
$x^2+y^2-2x-1=0$ (Ans.) এবং
$$(x+3)^2+y^2=(\sqrt2)^2$$
$$\Rightarrow x^2+6x+9+y^2=2$$
$x^2+y^2+6x+7=0$ (Ans.)

10(c) (p , q) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ হবে $px+qy=0$. [কু.'০৩; য.'০৭]

সমাধান : নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র (p , q) হতে মূলবিন্দুর দূরত্ব = $\sqrt{p^2+q^2}$

(p , q) কেন্দ্র ও $\sqrt{p^2+q^2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x-p)^2+(y-q)^2=p^2+q^2$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2=p^2+q^2$$
$x^2+y^2-px-qx=0$ (Ans.)

২য় অংশ : $x^2+y^2-px-qx=0$ বৃত্তে মূলবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$x.0+y.0-\frac12p(x+0)-\frac12q(y+0)=0$$
$$\Rightarrow -px-qy=0 \therefore px+qy=0 \text{ (Proved)}$$

11.(a) $y=2x$ রেখাটি $x^2+y^2=10x$ বৃত্তের একটি জ্যা। উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।[কু.'০৪; চ.'০৩; দি.'০৯; য.'১০]

সমাধান : ধরি, $y=2x$ অর্থাৎ $2x-y=0\cdots(1)$ রেখা এবং $x^2+y^2-10x=0$ বৃত্তের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2+y^2-10x+k(2x-y)=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+(-10+2k)x-ky=0\cdots(2)$$

(2) বৃত্তের কেন্দ্র $(-\frac{-10+2k}{2},-\frac{-k}{2})$
$$=(5-k,\frac{k}{2})$$

প্রদত্ত রেখাটি (2) বৃত্তের ব্যাস বলে এর কেন্দ্র $2x-y=0$ রেখার উপর অবস্থিত হবে।

$$2(5-k)-\frac{k}{2}=0\Rightarrow20-4k-k=0$$
$$\Rightarrow 5k=20\Rightarrow k=4$$

(2) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2+y^2+(-10+8)x-4y=0$$
$\therefore x^2+y^2-2x-4y=0$ (Ans.)

বিকল্প পদ্ধতি : $y=2x\cdots(1)$ হতে y এর মান প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^2+(2x)^2=10x$

$$\Rightarrow x^2+4x^2-10x=0\Rightarrow5x^2-10x=0$$
$$\Rightarrow 5x(x-2)=0\Rightarrow x=0,2$$

(1) হতে পাই, $y = 2.0 = 0$ এবং $y = 2.2 = 4$

প্রদত্ত বৃত্তের (1) জ্যা এর প্রান্তবিন্দু দুইটি (0,0) এবং (2,4).

(0,0) এবং (2,4) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-0)(x-2)+(y-0)(y-4)=0$

$x^2+y^2-2x-4y=0$ (Ans.)

11. (b) (3 , 7) ও (9 , 1) বিন্দু দুইটিকে একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, বৃত্তটি $x-y+4=0$ রেখাকে স্পর্শ করে। [চ.'০৫; কু.'০৯; ঢা.'১২]

সমাধান ঃ (3 , 7) ও (9 1) বিন্দু দুইটিকে একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)(x-9)+(y-7)(y-1)=0$

$\Rightarrow x^2-12x+27+y^2-8y+7=0$

$x^2+y^2-12x-8y+34=0\cdots(1)$

২য় অংশ ঃ (1) বৃত্তের কেন্দ্র (6 , 4) এবং ব্যাসার্ধ $=\sqrt{36+16-34}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

এখন কেন্দ্র (6 , 4) থেকে $x-y+4=0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $=\frac{6-4+4}{\sqrt{1+1}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}=$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ ।

বৃত্তটি প্রদত্ত রেখাকে স্পর্শ করে।

12.(a) (3, –1) বিন্দুগামী একটি বৃত্ত x-অক্ষকে (2, 0) বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৫; কু.'১২]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad (1)$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$c=g^2 \quad (2)$

(1) বৃত্তটি (2, 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$4+0+4g+0+c=0$

$\Rightarrow 4+4g+g^2=0 \ [\because c=g^2]$

$\Rightarrow (g+2)^2=0 \Rightarrow g+2=0 \Rightarrow g=-2$

(2) হতে পাই, $c=(-2)^2=4$

আবার (1) বৃত্তটি (3, –1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে বলে, $9+1+6g-2f+c=0$

$\Rightarrow 10+6.(-2)-2f+4=0$

$\Rightarrow 14-12-2f=0 \Rightarrow 2-2f=0 \Rightarrow f=1$

(1) এ g, f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2+y^2-4x+2y+4=0$

২য় অংশ ঃ ধরি, মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ $y=mx$ অর্থাৎ $mx-y=0$, $m\neq 0$.

এ রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (2, –1) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{4+1-4}=1$ এর সমান হবে।

$\left|\frac{2m+1}{\sqrt{m^2+1}}\right|=1 \Rightarrow (2m+1)^2=m^2+1$

$\Rightarrow 4m^2+4m+1=m^2+1$

$\Rightarrow 3m^2+4m=0 \Rightarrow 3m+4=0$

$\Rightarrow m=-\frac{4}{3}$

মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ $y=-\frac{4}{3}x \quad \therefore 4x+3y=0$ (Ans.)

12 (b) b ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত যার কেন্দ্রের ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক , x-অক্ষ এবং $3y=4x$ সরলরেখাকে স্পর্শ করে ; তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, b ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2+(y-k)^2=b^2\cdots(1)$; এখানে h, k উভয়ই ধনাত্মক ।

(1) বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $b=|$ কেন্দ্রের কোটি $|=|k|=k$

আবার, (1) বৃত্ত $3y=4x$ অর্থাৎ $4x-3y=0$ রেখাকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (h, k) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ b এর সমান হবে ।

$\frac{|4h-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=b \Rightarrow |4h-3b|=5b$

$\Rightarrow 4h-3b=\pm 5b$

$4h=8b$ অথবা, $4h=-2b$

$\Rightarrow h=2b$ অথবা, $h=-\frac{b}{2}$; কিন্তু $h>0$.

$h=2b$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$(x-2b)^2+(y-b)^2=b^2$

$\Rightarrow x^2-4bx+4b^2+y^2-2by+b^2+b^2=0$

$x^2 + y^2 - 4bx - 2by + 4b^2 = 0$ (Ans.)

12 (c) $2x + 3y - 5 = 0$ রেখাটি (3 , 4) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তটি y-অক্ষের যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ নির্ণয় কর। [য.'০৪; কু.'০৭]

সমাধান ঃ বৃত্তের ব্যাসার্ধ r = কেন্দ্র (3 , 4) হতে প্রদত্ত স্পর্শকের লম্বদূরত্ব $= \frac{|6+12-5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}}$

$= \sqrt{13}$

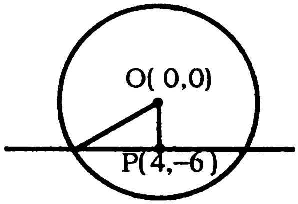
বৃত্তটি y-অক্ষের যে অংশ ছেদ করে তার পরিমাণ

$= 2\sqrt{r^2 - h^2}$, এখানে h = কেন্দ্রের ভুজ = 3

$= 2\sqrt{(\sqrt{13})^2 - 3^2} = 2\sqrt{13-9} = 2.2 = 4$

13.(a) $x^2 + y^2 = 144$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (4, – 6) বিন্দুতে অবস্থিত। [চ.'০৯; দি.'০৯,'১১;রা.'০৫;য.'০৬; ঢা.'০৭; মা.'০৪; কু.'১০; সি.'১১]

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 144$ এর কেন্দ্র O(0 , 0) এবং জ্যা এর মধ্যবিন্দু P(4, –6).



OP রেখার সমীকরণ $y = \frac{-6}{4}x \Rightarrow 2y = -3x$

$\Rightarrow 3x + 2y = 0$

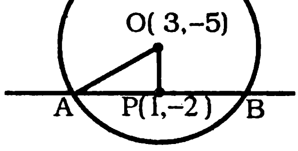
P(4, –6) বিন্দুগামী এবং 3x + 2y = 0 রেখার উপর লম্ব নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ,

$2x - 3y = 2.4 - 3.(-6) = 8 + 18 = 26$

$2x - 3y = 26$ (Ans.)

13.(b) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু (1, – 2) বিন্দুতে অবস্থিত।

সমাধান ঃ



ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$

এর কেন্দ্র O(3 , – 5) এবং AB জ্যা এর মধ্যবিন্দু P(1, – 2).

OP রেখার ঢাল $= \frac{-5+2}{3-1} = \frac{-3}{2}$

OP ⊥ AB বলে, AB এর ঢাল $= \frac{2}{3}$

P(1, –2) বিন্দুগামী $\frac{2}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট নির্ণেয় জ্যা AB এর সমীকরণ, $y + 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$

$\Rightarrow 3y + 6 = 2x - 2$

$2x - 3y - 8 = 0$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ $OP = \sqrt{(3-1)^2 + (-2+5)^2}$

$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

OA = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{3^2 + 5^2 + 21}$

$= \sqrt{9+25+21} = \sqrt{55}$

OAP সমকোণী ত্রিভুজে OA অতিভুজ।

$AP^2 = OA^2 - OP^2 = 55 - 13 = 42$

$\Rightarrow AP = \sqrt{42}$

নির্ণেয় জ্যা এর দৈর্ঘ্য $AB = 2\ AP = 2\sqrt{42}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 21 = 0$ বৃত্তের যে জ্যাটি (1 , –2) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তার সমীকরণ, $x.1 + y.(-2) - 3(x + 1) + 5(y - 2) - 21 = 1^2 + (-2)^2 - 6.1 + 10.(-2) - 21$ [$T = S_1$ সূত্রের সাহায্যে ।]

$\Rightarrow x - 2y - 3x - 3 + 5y - 10 = 1 + 4 - 6 - 20$

$\Rightarrow -2x + 3y - 13 + 21 = 0$

$2x - 3y - 8 = 0$ (Ans.)

২য় অংশ ঃ প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র (3 , –5) এবং ব্যাসার্ধ r $= \sqrt{9+25+21} = \sqrt{55}$.

কেন্দ্র (3 , –5) এবং জ্যা এর মধ্যবিন্দু (1, –2) এর দূরত্ব $d = \sqrt{(3-1)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{13}$

জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{55-13}$

$= 2\sqrt{44}$ একক।

14. (a) $x^2+y^2+6x+2y+6=0$ ও $x^2+y^2+8x+y+10=0$ **বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।** [ব.'০৫]

সমাধান ঃ ধরি, $S_1 \equiv x^2+y^2+6x+2y+6=0$

এবং $S_2 \equiv x^2+y^2+8x+y+10=0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$S_1-S_2=0 \Rightarrow -2x+y-4=0$

$\Rightarrow 2x-y+4=0 \cdots\cdots (1)$

ধরি, এ সাধারণ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+6x+2y+6+k(2x-y+4)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+(6+2k)x+(2-k)y+6+4k=0 \cdots (2)$

(2) বৃত্তের কেন্দ্র $(-k-3, \frac{k-2}{2})$, যা সাধারণ জ্যা (1) এর উপর অবস্থিত।

$2(-k-3)-\frac{k-2}{2}+4=0$

$\Rightarrow -4k-12-k+2+8=0$

$\Rightarrow -5k-2=0 \Rightarrow k=-\frac{2}{5}$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2+6x+2y+6-\frac{2}{5}(2x-y+4)=0$

$\Rightarrow 5(x^2+y^2)+30x+10y+30-4x+2y-8=0$

$5(x^2+y^2)+26x+12y+22=0$

14 (b) $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ ও $(x-q)^2+(y-p)^2=r^2$ **বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণদ্বয়কে লিখা যাই,

$x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2-r^2=0$

এবং $x^2+y^2-2qx-2py+p^2+q^2-r^2=0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$(-2p+2q)x+(-2q+2p)y=0$

$\Rightarrow x-y=0 \cdots\cdots (1)$

১ম বৃত্তের কেন্দ্র (p, q) এবং ব্যাসার্ধ $= r$

কেন্দ্র (p, q) থেকে (1) সাধারণ জ্যা এর লম্বদূরত্ব d

$= \frac{|p-q|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|p-q|}{\sqrt{2}}$

সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{r^2-d^2}$

$= 2\sqrt{r^2-\frac{|p-q|^2}{(\sqrt{2})^2}} = \sqrt{4r^2-\frac{4(p-q)^2}{2}}$

$= \sqrt{4r^2-2(p-q)^2}$ (Ans.)

14 (c) $x^2+y^2-4x+6y-36=0$ ও $x^2+y^2-5x+8y-43=0$ **বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর।** [প্র.ভ.প.'০৫;'০৬]

সমাধান ঃ ধরি, $S_1 \equiv x^2+y^2-4x+6y-36=0$

এবং $S_2 \equiv x^2+y^2-5x+8y-43=0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$S_1-S_2=0$

$\Rightarrow (-4+5)x+(6-8)y+(-36+43)=0$

$x-2y+7=0$ (Ans.)

15.(a) **দেখাও যে,** $x^2+y^2-2x+4y-31=0$ ও $x^2+y^2+4x-4y+7=0$ **বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে। সাধারণ স্পর্শক ও স্পর্শ বিন্দু নির্ণয় কর।** [ব.'১১]

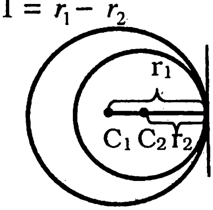
প্রমাণ ঃ $x^2+y^2-2x+4y-31=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_1(1,-2)$ ও ব্যাসার্ধ $r_1=\sqrt{1+4+31}=6$

এবং $x^2+y^2+4x-4y+7=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_2(-2, 2)$ ও ব্যাসার্ধ $r_2=\sqrt{4+4-7}=1.$

$C_1C_2=\sqrt{(1+2)^2+(-2-2)^2}$

$=\sqrt{9+16}=5=6-1=r_1-r_2$

প্রদত্ত বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে।



সাধারণ স্পর্শক অর্থাৎ সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$(-2-4)x+(4+4)y+(-31-7)=0$

$\Rightarrow -6x+8y-38=0$

$3x-4y+19=0$ (Ans.)

এ সাধারণ স্পর্শক কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশ C_1C_2 কে ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাতে অর্থাৎ $r_1 : r_2$ অনুপাতে

বহির্বিভক্ত করবে। অতএব, স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$= (\frac{6.(-2)-1.1}{6-1}, \frac{6.2-1.(-2)}{6-1}) = (-\frac{13}{5}, \frac{14}{5})$

15(b) দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যেকোন বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c' = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $\sqrt{c'-c}$.

প্রমাণ : ধরি, (α, β) প্রথম বৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু ।

$\alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta = -c \cdots(1)$

এখন (α, β) বিন্দু থেকে দ্বিতীয় বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2g\alpha + 2f\beta + c'}$

$= \sqrt{-c + c'} = \sqrt{c' - c}$ (Showed)

16.(a) $(-5, 4)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০১; ঢা.'০৫,'১৩]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \cdots(1)$

বৃত্তের কেন্দ্র $(1, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1+4-1} = 2$

ধরি, $(-5, 4)$ বিন্দুগামী সাপর্শকের সমীকরণ $y - 4 = m(x + 5)$ অর্থাৎ $mx - y + 5m + 4 = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(1, 2)$ থেকে এ স্পর্শকের লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ 2 এর সমান হবে।

$\frac{|m - 2 + 5m + 4|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow \frac{|6m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2$

$\Rightarrow (3m + 1)^2 = m^2 + 1$

$\Rightarrow 9m^2 + 6m + 1 = m^2 + 1$

$\Rightarrow 8m^2 + 6m = 0 \Rightarrow m(8m + 6) = 0$

$m = 0, -\frac{3}{4}$

স্পর্শকের সমীকরণ $y - 4 = 0$ এবং

$y - 4 = -\frac{3}{4}(x + 5)$

$\Rightarrow 4y - 16 = -3x - 15 \therefore 3x + 4y - 1 = 0$

16.(b) মূলবিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢা.'০৮,'১১; রা.'১০,'১৩; সি.'১০; য.'০৫; চ. '০৬,'০৯,'১৩ ব.'১২]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0 \cdots(1)$

বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{25-20} = \sqrt{5}$

ধরি, মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে অতিক্রমকারী সাপর্শকের সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(5, 0)$ থেকে এ স্পর্শকের লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{5}$ এর সমান হবে।

$\frac{|5m - 0|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow 25m^2 = 5(m^2 + 1)$

$\Rightarrow 5m^2 = m^2 + 1 \Rightarrow 4m^2 = 1 \therefore m = \pm\frac{1}{2}$

$(3m + 1)^2 = m^2 + 1$

স্পর্শক দুইটির সমীকরণ $y = \frac{1}{2}x \Rightarrow x - 2y = 0$

এবং $y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow x + 2y = 0$

16 (c) মূলবিন্দু থেকে $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান : $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \cdots(1)$

বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 2)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{9+4-9} = 2$

ধরি, মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে অতিক্রমকারী সাপর্শকের সমীকরণ $y = mx$ অর্থাৎ $mx - y = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 2)$ থেকে এ স্পর্শকের লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ 2 এর সমান হবে।

$\frac{|3m - 2|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \Rightarrow (3m - 2)^2 = 4(m^2 + 1)$

$\Rightarrow 9m^2 - 12m + 4 = 4m^2 + 4$

$\Rightarrow 5m^2 - 12m = 0 \Rightarrow m(5m - 12) = 0$

$\therefore m = 0, \frac{12}{5}$

স্পর্শক দুইটির সমীকরণ $y = 0$ এবং $y = \frac{12}{5}x.$

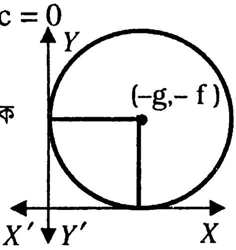
এখন $y = \frac{12}{5}x$ রেখা $y = 0$ রেখা অর্থাৎ x-অক্ষের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করলে, $\tan\theta = m$

$\theta = \tan^{-1}\frac{12}{5}$, যা স্পর্শক দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ।

17.(a) $x = 0, y = 0$ ও $x = a$ রেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য.'০১; রা.'০৫; কু.'০৪,'১১]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$



বৃত্তটি $x = 0$ রেখাকে অর্থাৎ y-অক্ষকে এবং $y = 0$ রেখাকে অর্থাৎ x-অক্ষকে স্পর্শ করে ।

$f^2 = c$ এবং $g^2 = c$

$g^2 = f^2 = c$

আবার, বৃত্তটি $x = a$ অর্থাৎ $x - a = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে । অতএব, বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ হতে রেখাটির লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ এর সমান হবে।

$$\frac{|-g-a|}{\sqrt{1}} = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$\Rightarrow g^2 + 2ag + a^2 = g^2 + f^2 - c$

$\Rightarrow 2ag + a^2 = f^2 - f^2 \quad [\quad c = f^2]$

$\Rightarrow 2ag + a^2 = 0 \ \therefore g = -\frac{a}{2}$

$c = g^2 = (-\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$ এবং

$f^2 = g^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow f = \pm\frac{a}{2}$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 2(-\frac{a}{2})x + 2(\pm\frac{a}{2})y + \frac{a^2}{4} = 0$

$x^2 + y^2 - ax \pm ay + \frac{1}{4}a^2 = 0$ (Ans.)

17.(b) $\sqrt{2}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। [প্র.ভ.প. '০৪]

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{2}$

বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।

$r = |h| = |k|$

$\Rightarrow r = -h = -k = \sqrt{2}$ [কেন্দ্র তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত, $\therefore h, k < 0$]

$h = k = -\sqrt{2}$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = 2$

$x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$

17(c) (– 5, – 6) বিন্দুগামী একটি বৃত্ত $3x + 4y - 11 = 0$ রেখাকে (1 , 2) বিন্দুতে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (1 2) বিন্দুতে বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0 \cdots (1)$

(– 5 , – 6) বিন্দুগামী এবং (1) বৃত্ত ও প্রদত্ত রেখা $3x + 4y - 11 = 0$ এর ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}{3x + 4y - 11} = \frac{25 + 36 + 10 + 24 + 5}{-15 - 24 - 11}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}{3x + 4y - 11} = \frac{100}{-50}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = -6x - 8y + 22$

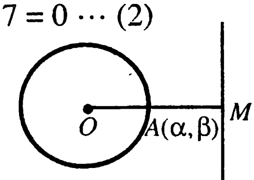
$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$

18. $12x + 5y = 212$ সরলরেখা হতে $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 167$ বৃত্তের উপর যে বিন্দুটির দূরত্ব ক্ষুদ্রতম তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র O(1, 1) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{1 + 1 + 167} = \sqrt{169} = 13$

$12x + 5y - 212 = 0 \cdots (1)$ রেখার উপর লম্ব এবং কেন্দ্র O(1 ,1) দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ রেখার সমীকরণ, $5x - 12y = 5 \times 1 - 12 \times 1 = -7$

$\Rightarrow 5x - 12y + 7 = 0 \cdots (2)$



(1) ও (2) রেখার ছেদবিন্দু M হলে,

$$M \equiv \left(\frac{35 - 2544}{-144 - 25}, \frac{-1060 - 84}{-144 - 25}\right)$$

$$= \left(\frac{-2509}{-169}, \frac{-1144}{-169}\right) = \left(\frac{193}{13}, \frac{88}{13}\right)$$

$$OM = \sqrt{(1-\frac{193}{13})^2 + (1-\frac{88}{13})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{32400+5625}{169}} = \sqrt{\frac{38025}{169}} = 15$$

ধরি, নির্ণেয় বিন্দুটি $A(\alpha, \beta)$।

$OA = 13$ এবং

$AM = OM - OA = 15 - 13 = 2$

$OA : AM = 13 : 2$

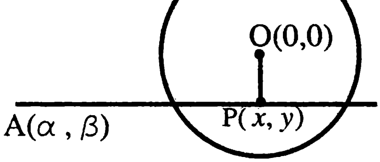
$$\therefore \alpha = \frac{13 \times \frac{193}{13} + 2\times 1}{13+2} = \frac{195}{15} = 13$$

এবং $$\beta = \frac{13\times\frac{88}{13} + 2\times 1}{13+2} = \frac{90}{15} = 6$$

নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(13, 6)$।

19.(a) $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের যেসব জ্যা (α, β) বিন্দুগামী তাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ



ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = r^2$ এর কেন্দ্র $O(0 \quad 0)$ এবং $A(\alpha, \beta)$ বিন্দুগামী জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের উপর $P(x, y)$ যেকোন একটি বিন্দু। তাহলে, $OP \perp AP$.

OP এর ঢাল $\times$ AP এর ঢাল $= -1$

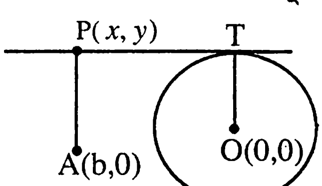
$$\Rightarrow \frac{0-y}{0-x} \times \frac{y-\beta}{x-\alpha} = -1$$

$$\Rightarrow y(y-\beta) = -x(x-\alpha)$$

$x(x-\alpha) + y(y-\beta) = 0$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

19. (b) $(b, 0)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। **[ঢা.'০৪]**

সমাধান ঃ



ধরি, $A(b,0)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথের উপর $P(x, y)$ যেকোন একটি বিন্দু PT যেকোন একটি স্পর্শক। তাহলে, $AP \perp PT$.

PT স্পর্শকের ঢাল, $m = -\frac{b-x}{0-y} = \frac{b-x}{y}$

PT স্পর্শকের সমীকরণ, $y = mx \pm a\sqrt{m^2+1}$

$$\Rightarrow y = \frac{b-x}{y}x \pm a\sqrt{\frac{(b-x)^2}{y^2}+1}$$

$$\Rightarrow y^2 = bx - x^2 \pm a\sqrt{(b-x)^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - bx = \pm a\sqrt{(b-x)^2 + y^2}$$

$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2\{(b-x)^2 + y^2\}^2$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

19 (c) (h, k) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = 12$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ। (h, k) বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (h, k) বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = 12$ অর্থাৎ $x^2 + y^2 - 12 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{h^2 + k^2 - 12}$ এবং $(h \quad k)$ বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 + 5x + 5y = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের $= \sqrt{h^2 + k^2 + 5h + 5k}$

প্রশ্নমতে,

$$\sqrt{h^2 + k^2 - 12} = 2\sqrt{h^2 + k^2 + 5h + 5k}$$

$$\Rightarrow h^2 + k^2 - 12 = 4(h^2 + k^2 + 5h + 5k)$$

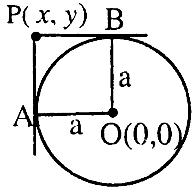
$$\Rightarrow 3h^2 + 3k^2 + 20h + 20k + 12 = 0$$

এখন h কে x দ্বার এবং k কে y দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $3x^2 + 3y^2 + 20x + 20y + 12 = 0$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

19 (d) যেসব বিন্দু থেকে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব হয় তাদের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[প্র.ভ.প.'০৪]**

সমাধান ঃ ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = a^2$ এর কেন্দ্র $O(0 \quad 0)$ এবং সঞ্চারপথের উপর $P(x, y)$ যেকোন একটি

বিন্দু থেকে অঙ্কিত PA ও PB স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব।

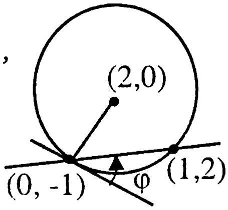


PAOB চতুর্ভুজে,
$\angle A = \angle B = \angle P = 90°$
$\angle O = 90°$ তাছাড়া, $AO = OB = a$
PAOB একটি বর্গক্ষেত্র যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক।
$PO^2 = PA^2 + AO^2$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 + a^2$
$\therefore x^2 + y^2 = 2a^2$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

বিকল্প পদ্ধতি ঃ ধরি, প্রদত্ত বৃত্তে স্পর্শকের সমীকরণ,
$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$
$\Rightarrow y - mx = \pm a\sqrt{1+m^2}$
$\Rightarrow y^2 - 2mxy + m^2x^2 = a^2(1+m^2)$
$\Rightarrow (x^2 - a^2)m^2 - 2mxy + y^2 - a^2 = 0$
মূলদ্বয় m_1 ও m_2 হলে, শর্তমতে, $m_1 m_2 = -1$
$\frac{y^2 - a^2}{x^2 - a^2} = -1 \Rightarrow y^2 - a^2 = -x^2 + a^2$
$\therefore x^2 + y^2 = 2a^2$, যা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ।

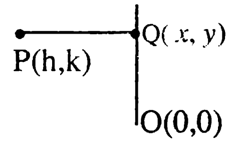
19(e) $3x - y - 1 = 0$ সরলরেখা $(x-2)^2 + y^2 = 5$ বৃত্তকে যে সূক্ষ্মকোণে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বৃত্ত $(x-2)^2 + y^2 = 5$ (1)
এবং সরলরেখা $3x - y - 1 = 0$
অর্থাৎ $y = 3x - 1$ (2)



(1) এ y- এর মান বসিয়ে পাই,
$(x-2)^2 + (3x-1)^2 = 5$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 6x + 1 = 5$
$\Rightarrow 10x^2 - 10x = 0$
$\Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$
(2) হতে পাই, $y = -1, 2$
(2) রেখা (1) বৃত্তকে $(0, -1)$ ও $(1,2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
(1) বৃত্তের কেন্দ্র (2,0).
$(0, -1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের ঢাল $= \frac{0+1}{2-0} = \frac{1}{2}$
$(0, -1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $= -2$
(2) রেখার ঢাল = 3.
ধরি, নির্ণেয় কোণ φ.
$\tan\varphi = \left|\frac{3+2}{1+3.(-2)}\right| = 1 \quad \varphi = 45°$

19(f) দেখাও যে, P(h , k) বিন্দু থেকে মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের প্রাদবিন্দুর সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।



প্রমাণ ঃ ধরি, P(h , k) বিন্দু থেকে মূলবিন্দু O(0,0) দিয়ে অতিক্রমকারী সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথের উপর Q(x,y) যেকোন একটি বিন্দু। তাহলে, $OQ \perp PQ$
OQ এর ঢাল × PQ এর ঢাল = −1
$\Rightarrow \frac{y}{x} \times \frac{y-k}{x-h} = -1 \Rightarrow y^2 - ky = -x^2 - hx$
$\Rightarrow \therefore x^2 + y^2 + hx + ky = 0$, যা একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে।
সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত।

20. সমাধান ঃ

(a) ব্যাসের দৈর্ঘ্য = $(2, -4)$ ও $(0, 0)$ বিন্দু দুইটির দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16}$
$= 2\sqrt{5}$ একক।

(b) ব্যাসটির সমীকরণ,
$(x-2)(-4-0) - (y+4)(2-0) = 0$
$\Rightarrow -4(x-2) - 2(y+4) = 0$
$\Rightarrow 2(x-2) + (y+4) = 0$
$\Rightarrow 2x - 4 + y + 4 = 0 \therefore 2x + y = 0$
আবার, (2 −4) ও (0 0) বিন্দু দুইটিকে একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,
$(x-2)(x-0) + (y+4)(y-0) = 0$
$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$
$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \cdots(1)$ (Ans.)

(c) (2 −4) ও (0 0) বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী ব্যাসের সমীকরণ, $y = \frac{-4}{2}x$
$\Rightarrow y = -2x \Rightarrow 2x + y = 0$

ধরি, $2x + y = 0$ ব্যাসের সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ $2x + y + k = 0$ (2)

(1) বৃত্ত (2) রেখাকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(1 ,-2)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ এর সমান হবে।

$$\frac{|2-2+k|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow |k| = 5 \Rightarrow k = \pm 5$$

(2) এ k এর মান বসিয়ে পাই, $2x + y \pm 5 = 0$

21. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + c = 0$ **বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।**

(a) প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2.(-3)y + c = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $(2, 3)$,

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{2^2 + 3^2 - c} = \sqrt{13-c}$

এবং বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশ $= 2\sqrt{2^2 - c}$

$= 2\sqrt{4-c}$

(b) প্রশ্নমালা IV B এর 2(c) দ্রষ্টব্য।

(c) প্রশ্নমালা IV A এর 4(c) দ্রষ্টব্য।

22. সমাধান: কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের সম্পর্ক হতে পাই, $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$r^2 = -4r\cos\theta$ হতে পাই,

$x^2 + y^2 = -4x \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x = 0$

(a) বৃত্তটির কেন্দ্র $= (-\frac{4}{2}, \frac{0}{2}) = (-2, 0)$

এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{2^2 + 0 - 0} =$

(b) খলিফার নিয়মানুসারে $(-6,5)$ ও $(-3, -4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ ,

$(x+6)(x+3) + (y-5)(y+4) + k\{(x+6)(5+4) - (y-5)(-6+3)\} = 0$

$\Rightarrow x^2 + 9x + 18 + y^2 - y - 20 + k(9x + 54 + 3y - 15) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 9x - y - 2 + k(9x + 3y + 39) = 0$ (1)

(1) বৃত্তটি $(2, 1)$ বিন্দুগামী বলে,

$4 + 1 + 18 - 1 - 2 + k(18 + 3 + 39) = 0$

$\Rightarrow 60k = -20 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 + 9x - y - 2 - 3x - y - 13 = 0$

$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ (1)

(c) দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র $(-3, 1)$.

$(-2, 0)$ ও $(-3, 1)$ কেন্দ্রগামী সরলরেখার সমীকরেণ

$$\frac{x+2}{-2+3} = \frac{y-0}{0-1} \Rightarrow y = -x - 2$$

$x^2 + y^2 + 4x = 0$ বৃত্তে $y = -x - 2$ বসিয়ে পাই, $x^2 + (x+2)^2 + 4x = 0$

$\Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 + 4x = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 8x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$= -2 \pm \sqrt{2}$

$x = -2 + \sqrt{2}$ হলে , $y = 2 - \sqrt{2} - 2 = -\sqrt{2}$

$x = -2 - \sqrt{2}$ হলে , $y = 2 + \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2}$

প্রথম বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু

$(-2 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ও $(-2 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$

কাজ

১। $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$ **বৃত্তের $(-2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 28 = 0$ বৃত্তের $(-2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.(-2) + y.4 + 2(x - 2) - 5(y + 4) + 28 = 0$

$\Rightarrow -2x + 4y + 2x - 4 - 5y - 20 + 28 = 0$

$\Rightarrow -y + 4 = 0 \quad y = 4$

এখন ধরি, $y = 4$ স্পর্শকের উপর লম্ব অভিলম্বের সমীকরণ $x = k$, যা $(-2, 4)$ বিন্দুগামী।

$-2 = k \Rightarrow k = -2$

অভিলম্বের সমীকরণ $x = -2 \Rightarrow x + 2 = 0$

২। $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সাথে $\tan^{-1}\frac{2}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (0 ,0) এবং ব্যাসার্ধ = a

ধরি, x-অক্ষের সাথে $\tan^{-1}\frac{2}{5}$ কোণ উৎপন্ন করে এরূপ রেখার সমীকরণ $y = \tan(\tan^{-1}\frac{2}{5})x + c$

$\Rightarrow y=\frac{2}{5}x+c \Rightarrow 2x-5y+5c=0\cdots(1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (0 0) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ a এর সমান হবে।

$$\frac{|5c|}{\sqrt{4+25}}=a \Rightarrow |5c|=\sqrt{29}\,a$$

$\Rightarrow 5c = \pm\sqrt{29}\,a \qquad c=\pm\frac{\sqrt{29}a}{5}$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ

$$2x-5y+5(\pm\frac{\sqrt{29}a}{5})=0$$

$$\Rightarrow 2x-5y\pm\sqrt{29}a=0 \text{ (Ans.)}$$

৩। $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক অক্ষ দুইটির সাথে a^2 ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ গঠন করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের কেন্দ্র (0 ,0) এবং ব্যাসার্ধ = a. ধরি, স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1$

অর্থাৎ $cx+by-ab=0\cdots(1)$

(1) রেখাটি অক্ষ দুইটির সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}bc$

প্রশ্নমতে , $\frac{1}{2}bc=a^2\Rightarrow bc=2a^2\cdots(2)$

আবার, (1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (0 , 0) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ a এর সমান হবে।

$$\left|\frac{0-0-bc}{\sqrt{c^2+b^2}}\right|=a\Rightarrow b^2c^2=a^2(b^2+c^2)$$

$\Rightarrow b^2c^2=\frac{bc}{2}(b^2+c^2)$ [(2) দ্বারা]

$\Rightarrow b^2+c^2=2bc\Rightarrow(b-c)^2=0$

$b-c=0\Rightarrow b=c$

$(2)\Rightarrow b^2=2a^2\Rightarrow b=c=\pm\sqrt{2}a$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{\pm\sqrt{2}a}+\frac{y}{\pm\sqrt{2}a}=1$

$x+y=\pm a\sqrt{2}$ (Ans.)

৪। দেখাও যে, x-অক্ষ $x^2+y^2-4x-5y+4=0$ বৃত্তের একটি স্পর্শক। মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী অপর স্পর্শকের সমীকরল নির্ণয় কর।

প্রমাণ ঃ $x^2+y^2-4x-5y+4=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(2,\frac{5}{2})$ এবং ব্যাসার্ধ = $\sqrt{4+\frac{25}{4}-4}=\frac{5}{2}$

এখন x-অক্ষ থেকে বৃত্তের কেন্দ্র $(2,\frac{5}{2})$ এর দূরত্ব

= | কেন্দ্রের কোটি | = $|\frac{5}{2}|=\frac{5}{2}$ = বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

x-অক্ষ প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক।

২য় অংশ ঃ ধরি মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ $y=mx$ অর্থাৎ $mx-y=0 \quad\cdots(1)$

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের একটি স্পর্শক হলে কেন্দ্র $(2,\frac{5}{2})$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসাধ $\frac{5}{2}$ এর সমান হবে।

$$\left|\frac{2m-5/2}{\sqrt{m^2+1}}\right|=\frac{5}{2}$$

$\Rightarrow \frac{(4m-5)^2}{4}=\frac{25}{4}(m^2+1)$

$\Rightarrow 16m^2-40m+25=25m^2+25$

$\Rightarrow 9m^2+40m=0 \;\therefore m=-\frac{40}{9}$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y=-\frac{40}{9}x$

$40x+9y=0$ (Ans.)

৫। 5 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যারা $3x-4y+8=0$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং

যাদের কেন্দ্র $3x + 4y - 1 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত। **[প্র.ভ.প. ৮৮]**

সমাধান ঃ ধরি, 5 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = 5^2 \cdots (1)$

(1) এর কেন্দ্র (h, k) , $3x + 4y - 1 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$3h + 4k - 1 = 0 \cdots \cdots (2)$

(1) বৃত্ত $3x - 4y + 8 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (h , k) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ 5 এর সমান হবে।

$$\frac{|3h-4k+8|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|3h-4k+8|}{5} = 5$$

$\Rightarrow |3h-4k+8| = 25 \Rightarrow 3h - 4k + 8 = \pm 25$

$3h - 4k - 17 = 0 \cdots \quad (3)$ এবং

$3h - 4k + 33 = 0 \quad \cdots (4)$

$(2) + (3) \Rightarrow 6h - 18 = 0 \Rightarrow h = 3$

(2) হতে , $9 + 4k - 1 = 0 \Rightarrow k = -2$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$ (Ans.)

আবার, $(2) + (4) \Rightarrow 6h + 32 = 0 \Rightarrow h = -\frac{16}{3}$

(2) হতে , $3(-\frac{16}{3}) + 4k - 1 = 0$

$\Rightarrow -16 + 4k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{17}{4}$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$(x + \frac{16}{3})^2 + (y - \frac{17}{4})^2 = 25$

৬। মূলবিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3y + x = 20$ রেখাকে স্পর্শ করে এবং যার একটি ব্যাসের সমীকরণ $y = 3x$.

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \cdots (1)$

(1) বৃত্ত মূলবিন্দুগামী। $c = 0$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র (–g , –f), $y = 3x$ ব্যাসের উপর অবস্থিত। $\therefore -f = 3(-g) \Rightarrow f = 3g \cdots (2)$

আবার, $3y + x = 20$ অর্থাৎ $x + 3y - 20 = 0$ রেখা (1) বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র (– g, –f) থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$ এর সমান হবে।

$$\frac{|-g-3f-20|}{\sqrt{1+9}} = \sqrt{g^2+f^2-c}$$

$\Rightarrow (g + 3f + 20)^2 = 10(g^2 + f^2)$ [c=0]

$\Rightarrow (g + 9g + 20)^2 = 10(g^2 + 9g^2)$ [$\because$ f = 3g]

$\Rightarrow 100(g+2)^2 = 100g^2$

$\Rightarrow g^2 + 4g + 4 = g^2 \Rightarrow g = -1$

(2) হতে পাই, $f = 3.(-1) = -3$

(1) এ f , g ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ (Ans.)

৭। $y = 2x$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তের একটি জ্যা। উক্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের (2 , 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $y = 2x$ (1) হতে y এর মান প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^2 + (2x)^2 = 10x$

$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 10x = 0 \Rightarrow 5x^2 - 10x = 0$

$\Rightarrow 5x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$

(1) হতে পাই, $y = 2.0 = 0$ এবং $y = 2.2 = 4$

প্রদত্ত বৃত্তের (1) জ্যা এর প্রান্তবিন্দু দুইটি (0,0) এবং (2,4).

(0,0) এবং (2,4) বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-0)(x-2) + (y-0)(y-4) = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

এখন $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ বৃত্তের (2, 4) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,

$x.2 + y.4 - (x+2) - 2(y+4) = 0$

$\Rightarrow 2x + 4y - x - 2 - 2y - 8 = 0$

$x + 2y - 10 = 0$ (Ans.)

৮। (3, –1) বিন্দুগামী একটি বৃত্ত $3x + y = 10$ রেখাকে (3, 1) বিন্দুতে স্পর্শ করে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (3, 1) কেন্দ্রবিশিষ্ট বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 0 \cdots$ (1)

(3, –1) বিন্দু দিয়ে যায় এবং (1) বৃত্ত ও $3x + y - 10 = 0$ রেখার ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-3)^2 + (y-1)^2}{(3-3)^2 + (-1-1)^2} = \frac{3x + y - 10}{3 \times (3) + (-1) - 10}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-6x+9+y^2-2y+1}{0+4}=\frac{3x+y-10}{9-1-10}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-6x+y^2-2y+10}{4}=\frac{3x+y-10}{-2}$$

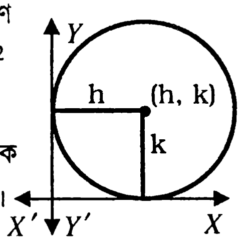
$$\Rightarrow x^2-6x+y^2-2y+10=-6x-2y+20$$

$x^2+y^2=10$ (Ans.)

৯। এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x = 0$, $y = 0$, $3x - 4y = 12$ রেখা তিনটিকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



বৃত্তটি $x = 0$ রেখাকে অর্থাৎ y-অক্ষকে এবং $y = 0$ রেখাকে অর্থাৎ x-অক্ষকে স্পর্শ করে ।

$r = |k| = k$ এবং

$r = |h| = h$

[$\because$ কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত, $\therefore h, k > 0$]

$h = k = r$

আবার, বৃত্তটি $3x - 4y = 12$ অর্থাৎ $3x - 4y - 12 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করে । অতএব, বৃত্তের কেন্দ্র (h, k) হতে রেখাটির লম্বদূরত্ব ব্যাসার্ধ r এর সমান হবে।

$$\frac{|3h-4k-12|}{\sqrt{9+16}}=r$$

$\Rightarrow |3h - 4h - 12| = 5h$ [$h = k = r$]

$\Rightarrow |h + 12| = 5h \Rightarrow h + 12 = \pm 5h$

$4h=12 \Rightarrow h= 3$ অথবা, $-6h=12 \Rightarrow h = -2$

কিন্তু $h > 0$ $\therefore h = k = r = 3$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

$\Rightarrow x^2-6x+9+y^2-6y+9=9$

$x^2+y^2-6x-6y+9=0$

১০। $2\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x - y = 6$ রেখাকে $(1, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সমাধান ঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \cdots(1)$

(1) বৃত্তের $(1, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$x.1 + y.(-3) + g(x+1) + f(y-3) + c = 0$

$\Rightarrow x - 3y + gx + g + fy - 3f + c = 0$

$\Rightarrow (1+g)x + (-3+f)y + g - 3f + c = 0$

প্রশ্নমতে, এ রেখা এবং $3x - y = 6$ অভিন্ন।

$$\frac{1+g}{3}=\frac{-3+f}{-1}=\frac{g-3f+c}{-6}$$

$\frac{1+g}{3}=\frac{-3+f}{-1}$ হতে পাই, $1 + g = 9 - 3f$

$\Rightarrow g = 8 - 3f \cdots(2)$

$\frac{-3+f}{-1}=\frac{g-3f+c}{-6}$ হতে পাই,

$-18 + 6f = g - 3f + c$

$\Rightarrow c = -18 + 9f - g = -18 + 9f - 8 + 3f$

$= 12f - 26$

আবার (1) বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

$\sqrt{g^2+f^2-c} = 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow (8-3f)^2 + f^2 - 12f + 26 = 40$

$\Rightarrow 64 - 48f + 9f^2 + f^2 - 12f - 14 = 0$

$\Rightarrow 10f^2 - 60f + 50 = 0$

$\Rightarrow f^2 - 6f + 5 = 0 \Rightarrow (f-5)(f-1) = 0$

$f = 1, 5$

$f = 1$ ধরে, $g = 8 - 3 = 5$, $c = 12 - 26 = -14$

$f = 5$ ধরে, $g = 8 - 15 = -7$, $c = 60 - 26 = 34$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2 + y^2 + 10x + 2y - 14 = 0$ এবং

$x^2 + y^2 - 14x + 10y - 34 = 0$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $(1, -3)$ বিন্দুতে বিন্দুবৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$.

ধরি, এ বৃত্ত ও প্রদত্ত রেখার ছেদ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)^2 + (y+3)^2 + k(3x - y - 6) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + 3kx - ky - 6k = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-2 + 3k)x + (6 - k)y + 10 - 6k = 0 \cdots (1)$

প্রশ্নমতে, (1) এর ব্যাসার্ধ $= 2\sqrt{10}$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{2-3k}{2}\right)^2+\left(\frac{k-6}{2}\right)^2-10+6k}=2\sqrt{10}$$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(4-12k+9k^2+k^2-12k+36)-10+6k=40$

$\Rightarrow 4-12k+k^2+k^2-12k+36-200+24k=0$

$\Rightarrow 10k^2-160=0 \Rightarrow k^2=16 \therefore k=\pm 4$

(1) হতে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$x^2+y^2+10x+2y-14=0$ এবং

$x^2+y^2-14x+10y+34=0$

১১। $(-2, 3)$ বিন্দু থেকে $2x^2+2y^2=3$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [ব.'০১]

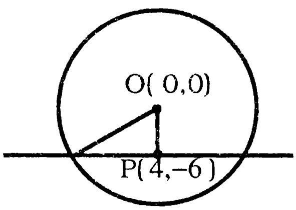
সমাধান ঃ $(-2, 3)$ বিন্দু থেকে $2x^2+2y^2=3$ অর্থাৎ $x^2+y^2-\frac{3}{2}=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের

দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(-2)^2+(3)^2-\frac{3}{2}}=\sqrt{4+9-\frac{3}{2}}$

$=\sqrt{13-\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{26-3}{2}}=\sqrt{\frac{23}{2}}$ একক।

১২। $x^2+y^2=16$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় কর যার মধ্যবিন্দু $(-2, 3)$ বিন্দুতে অবস্থিত। [য.'০০]

সমাধান ঃ



ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত $x^2+y^2=16$ এর কেন্দ্র $O(0, 0)$ এবং জ্যা এর মধ্যবিন্দু $P(-2, 3)$.

OP রেখার সমীকরণ $y=\frac{3}{-2}x \Rightarrow -2y=3x$

$\Rightarrow 3x+2y=0$

$P(-2, 3$ বিন্দুগামী এবং $3x+2y=0$ রেখার উপর লম্ব নির্ণেয় জ্যা এর সমীকরণ,

$2x-3y=2.(-2)-3.3=-4-9=-13$

$2x-3y+13=0$ (Ans.)

১৩। $x^2+y^2+4x-2y+3=0$ ও $x^2+y^2-4x+6y-21=0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ এবং দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, $S_1 \equiv x^2+y^2+4x-2y+3=0$

এবং $S_2 \equiv x^2+y^2-4x+6y-21=0$

বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ,

$S_1-S_2=0 \Rightarrow 8x-8y+24=0$

$x-y+3=0 \quad (1)$ (Ans.)

এখন S_1 বৃত্তের কেন্দ্র $(-2 \;\; 1)$ এবং ব্যাসার্ধ

$r=\sqrt{(-2)^2+1^2-3}=\sqrt{2}$

কেন্দ্র $(-2, 1)$ হতে $x-y+3=0$ এর লম্বদূরত্ব

$d=\frac{|-2-1+3|}{\sqrt{1+1}}=0$

সাধারণ জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=2\sqrt{r^2-d^2}$

$=2\sqrt{2-0}=2\sqrt{2}$ একক।

১৪। $3x^2+3y^2-29x-19y+56=0$ বৃত্তের একটি জ্যা এর সমীকরণ $x-y+2=0$. উক্ত জ্যা এর দৈর্ঘ্য এবং এ জ্যাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $3x^2+3y^2-29x-19y+56=0$

অর্থাৎ $x^2+y^2-\frac{29}{3}x-\frac{19}{3}y+\frac{56}{3}=0$ বৃত্তের

কেন্দ্র $(\frac{29}{6}, \frac{19}{6})$ এবং

ব্যাসার্ধ $r=\sqrt{(\frac{29}{6})^2+(\frac{19}{6})^2-\frac{56}{3}}$

$=\sqrt{\frac{841+361-672}{36}}=\sqrt{\frac{530}{36}}$

কেন্দ্র $(\frac{29}{6}, \frac{19}{6})$ থেকে $x-y+2=0$

জ্যা এর লম্বদূরত্ব $d=\frac{|\frac{29}{6}-\frac{19}{6}+2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{11}{3\sqrt{2}}$

জ্যা এর দৈর্ঘ্য $=2\sqrt{r^2-d^2}$

$=2\sqrt{\frac{530}{36}-\frac{121}{18}}=2\sqrt{\frac{530-242}{36}}$

$=2\sqrt{\frac{288}{36}}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$ একক।

২য় অংশ ঃ ধরি প্রদত্ত জ্যাকে ব্যাস ধরে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - \frac{29}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{56}{3} + k(x - y + 2) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-\frac{29}{3} + k)x + (-\frac{19}{3} - k)y + \frac{56}{3} + 2k = 0 \cdots(1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(\frac{29}{6} - \frac{k}{2}, \frac{19}{6} + \frac{k}{2})$, যা $x - 2y + 7 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$$\frac{29}{6} - \frac{k}{2} - \frac{19}{3} - k + 7 = 0$$

$\Rightarrow 29 - 3k - 38 - 6k + 42 = 0$

$\Rightarrow -9k = -33 \Rightarrow k = \frac{11}{3}$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - \frac{29}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{56}{3} + \frac{11}{3}(x - y + 2) = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) - 29x - 19y + 56 + 11x - 11y + 22 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 + y^2) - 18x - 30y + 78 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 26 = 0$ (Ans.)

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -4)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{3^2 + 4^2 - 21} = 2$

ধরি, x-অক্ষের সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ $y + k = 0$ (1)

(1) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তকে স্পর্শ করলে কেন্দ্র $(3, -4)$ থেকে এর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান হবে।

$$\frac{|-4 + k|}{\sqrt{1}} = 2 \Rightarrow |-4 + k| = 2$$

$\Rightarrow k - 4 = \pm 2 \therefore k = 6, 2$

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y + 6 = 0$, $y + 2 = 0$

ব্যবহারিক

পরীক্ষণের নাম ঃ $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর।সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ হতে পাই,

$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 5^2$

$\Rightarrow (y - 4)^2 = 5^2 - (x + 3)^2$

$\Rightarrow y - 4 = \pm\sqrt{(5 + x + 3)(5 - x - 2)}$

$\Rightarrow y = 4 \pm \sqrt{-(x + 8)(x - 3)}$ (i)

$(x + 8)(x - 3) \leq 0 \Rightarrow -8 \leq x \leq 3$ অর্থাৎ $x \in [-8, 3]$ এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি তৈরি করি

x	−8	−6	−6	−4	−4
y	4	8·24	−·24	9.29	−1·29
x	−2	−2	0	0	
y	9·48	−1·48	8·89	−0·89	

2. একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি

3. x অক্ষ ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে মুক্তহস্তে সংযোগ করে প্রদত্ত (i) এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।