কিছু বিশেষ সূত্র / কৌশল যা ভর্তি পরীক্ষায় দ্রুত উত্তর করতে সাহায্য করবে :

1. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ হলে, $f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$,
   ডোমেন $f=\mathbb{R}-\{-\dfrac{d}{c}\}$, রেঞ্জ $f=\mathbb{R}-\{\dfrac{a}{c}\}$
2. $f(x)=ax+b$ হলে, $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$,
   ডোমেন $f=\mathbb{R}$, রেঞ্জ $f=\mathbb{R}$
3. $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ হলে,
   ডোমেন $f=\mathbb{R}-\{a\}$, রেঞ্জ $f=\mathbb{R}-\{2a\}$
4. $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ হলে,
   ডোমেন $f=\{x\in\mathbb{R} \quad x\le -a \ or\ x\ge a\}$,
   রেঞ্জ $f=\{x\in\mathbb{R} \quad x\ge 0\}$
5. $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ হলে,
   ডোমেন $f=\{x\in\mathbb{R}:-a\le x\le a\}=[-a,a]$,
   রেঞ্জ $f=\{x\in\mathbb{R}:0\le x\le a\}=[0,a]$
6. $f(x)=\log(a+bx)$ হলে,
   ডোমেন $f=\{x\in\mathbb{R}:x>-\dfrac{a}{b}\}$, রেঞ্জ $f=\mathbb{R}$
7. $f(x)=e^x$ হলে, ডোমেন $f=\mathbb{R}$,
   রেঞ্জ $f=\{x\in\mathbb{R}:\ x>0\}$

প্রশ্নমালা VIII

1. (a) **Sol^n :** $f(x)=x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত f: [0 , 2]→ ফাংশনটি একক কিন্তু সার্বিক নয়।

[0 , 2] এর ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের ছবি ভিন্ন ভিন্ন কিন্তু ℝ সেটের সকল উপাদানই A সেটের উপাদানের ছবি নয়। ∴ Ans. **C.**

(b) Sol^n : [– 2 , 2] এর ভিন্ন উপাদান –2 ও 2 এর ছবি 4 কিন্তু [0 , 4] সেটের সকল উপাদানই [– 2 , 2] সেটের উপাদানের ছবি । ∴ Ans. **B.**

(c) Sol^n : সবগুলি তথ্য সত্য। ∴ Ans. **D.**

(d) Sol^n : দ্বিঘাত ফাংশনের লেখ y অক্ষ অথবা y অক্ষের সমান্তরাল রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম হয়।

Ans.B.

(e) Sol^n : f(x) এর রূপান্তরি ফাংশন f(x–4) ডানে স্থান্তরিত হয় । Ans. **B.**

(f) Sol^n : x অক্ষের সাপেক্ষে $y=x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y=-x^2$

(g) Sol^n : 3 বিজোড় বলে $\text{cosec}^3(4\theta+\dfrac{\pi}{3})$ এর পর্যায় $=\dfrac{\pi}{|4|}=\dfrac{\pi}{4}$. ∴ Ans.**D.**

(h) Sol^n : $1-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2-1\le 0$
$\Rightarrow -1\le x\le 1$ ∴ Ans. B

(i) Sol^n : x>0 হলে $\dfrac{x}{|x|}=1$, x<0 হলে $\dfrac{x}{|x|}=-1$

বিস্তার f = {–1, 1} ∴ Ans. A.

(j) Sol^n : f(x) ফাংশনের গ্রাফ থেকে এর রূপান্তরিত ফাংশন f(x + 2) এর গ্রাফ 2 একক স্থানান্তরিত হবে বামে। ∴ Ans. **A.**

(k) Sol^n : f(x) = x + 1 এবং g(x) = 2x হলে,
(fog)(2) = f(g(2)) = f(2×2)= f(4) =4 + 1= 5 এর মান নিচের কোনটি?
D. একক নয়, সার্বিক নয়
$g(x)=2x \quad \therefore g^{-1}(x)=\dfrac{x}{2}$.

$(fog^{-1})(2)=f(g^{-1}(2))=f(\dfrac{2}{2})=f(1)$
$=1+1=2$

2. (a) দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} 3x-1, x>3 \\ x^2-2, -2\le x\le 3 \\ 2x+3, x<-2 \end{cases}$

[ঢা.'১২; য.'০৭, রা '০৮; চ .'০৮,'১২; কু.'১৩]

$f(2) = 2^2 - 2$ $\quad [\because -2\le 2\le 3]$
$= 4 - 2 = 2$
$f(4) = 3\times 4 - 1$ $\quad [\quad 4>3]$
$= 12 - 1 = 11$
$f(-1) = (-1)^2 - 2$ $\quad [\because -2\le -1 \le 3]$
$= 1 - 2 = -1$
$f(-3) = 2\times(-3) + 3$ $\quad [\because -3<-2]$
$= -6 + 3 = -3$

2(b) $f(x) = x^2 + ax + b$, $f(1) = 1$ ও $f(2) = 2$ হলে, $f(3)$ এর মান নির্ণয় কর। [চ.'০৪]

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + ax + b \cdots(1)$
$f(1) = 1^2 + a.1 + b = 1 \Rightarrow a + b = 0 \cdots(2)$
$f(2) = 2^2 + a.2 + b = 1$
$\Rightarrow 2a + b = -3 \quad \cdots(3)$
(3) থেকে (2) বিয়োগ করে পাই, $a = -3$
(2) থেকে পাই, $-3 + b = 0 \Rightarrow b = 3$
$(1) \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 3$
$f(3) = 3^2 - 3\times 3 + 3 = 9-9+3 = 3$ (Ans.)

2.(c) $A = [-3, 5]$ এবং $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = 2x^2 - 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। $f(2)$, $f(6)$ এবং $f(t-2)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $2\in A = [-3, 5]$, সুতরাং $f(2)$ সংজ্ঞায়িত এবং $f(2) = 2.2^2 - 7 = 8 - 7 = 1$
$6 \notin A = [-3, 5]$, সুতরাং $f(6)$ অসংজ্ঞায়িত।
যদি $t - 2 \in A = [-3, 5]$ i.e. $-3 \le t - 2 \le 5$
i.e. $-1 \le t \le 7$ হয় তবে $f(t-2)$ সংজ্ঞায়িত হবে এবং $f(t-2) = 2.(t-2)^2 - 7$
$= 2(t^2 - 4t + 4) - 7 = 2t^2 - 8t + 8 - 7$
$= 2t^2 - 8t + 1$

3.(a) $f(x) = b\dfrac{x-a}{b-a} + a\dfrac{x-b}{a-b}$ হলে, দেখাও যে, $f(a) + f(b) = f(a+b)$ [ব.'০৮; য.'১২; ঢা.'০৭; রা.'০৮,'১৩; কু.'০৮]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = b\dfrac{x-a}{b-a} + a\dfrac{x-b}{a-b}$

$$f(a) = b\frac{a-a}{b-a} + a\frac{a-b}{a-b} = a$$

$$f(b) = b\frac{b-a}{b-a} + a\frac{b-b}{a-b} = b \text{ এবং}$$

$$f(a+b) = b\frac{a+b-a}{b-a} + a\frac{a+b-b}{a-b}$$

$$= \frac{b^2}{b-a} + \frac{a^2}{a-b} = \frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = a+b$$

$$= f(a) + f(b)$$

$f(a) + f(b) = f(a+b)$ (Showed)

3(b) $f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$, $g(x) = \frac{1}{2}(3 - 3^{-x})$ হলে, প্রমাণ কর যে, $f(x+y) = f(x)\,f(y) + g(x)\,g(y)$ [য.'০৯;সি.'১২; দি.'১৩; চ.'১৪]

প্রমাণঃ L.H.S. $= f(x+y) = \frac{1}{2}(3^{x+y} + 3^{-x-y})$

R.H.S.$= f(x)\,f(y) + g(x)\,g(y)$

$$= \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})\,\frac{1}{2}(3^y + 3^{-y}) + \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x})\,\frac{1}{2}(3^y - 3^{-y})$$

$$= \frac{1}{4}(3^{x+y} + 3^{x-y} + 3^{-x+y} + 3^{-x-y} + 3^{x+y} - 3^{x-y} - 3^{-x+y} + 3^{-x-y})$$

$$= \frac{1}{4}.2(3^{x+y} + 3^{-x-y}) = \frac{1}{2}(3^{x+y} + 3^{-x-y})$$

L.H.S. = R.H.S. (Proved)

4(a) $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$ হলে, x এর মাধ্যমে $f(y)$ এর মান নির্ণয় কর। [য.'০৭; প্র.ভ.প.'০৪]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx-a} \Rightarrow f(y) = \frac{ay+b}{cx-a} \cdots(1)$$

এবং $y = \dfrac{ax+b}{cx-a} \Rightarrow cxy - ay = ax + b$

$\Rightarrow cxy - ax = ay + b$

$\Rightarrow (cy-a)\,x = ay + b$

$\Rightarrow x = \dfrac{ay+b}{cy-a} = f(y)$ [(1) দ্বারা]

$f(y) = x$

4(b) $\phi(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\phi(x)-\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \dfrac{x-y}{1+xy}$ **[য.'০২; সি.'০৫]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে,

$\phi(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. $\quad \phi(y) = \dfrac{y-1}{y+1}$

$$\frac{\phi(x)-\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{\dfrac{x-1}{x+1} - \dfrac{y-1}{y+1}}{1+\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{y-1}{y+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{xy+x-y-1-(xy-x+y-1)}{(x+1)(y+1)}}{\dfrac{xy+x+y+1+xy-x-y+1}{(x+1)(y+1)}}$$

$$= \frac{xy+x-y-1-xy+x-y+1}{2xy+2} = \frac{2(x-y)}{2(1+xy)}$$

$$\frac{\phi(x)-\phi(y)}{1+\phi(x)\phi(y)} = \frac{x-y}{1+xy} \text{ (Proved)}$$

3(c) যদি $f(x) = \dfrac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x$ **[দি.'১০; ব.'১৩]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x) \quad \dfrac{2x+1}{2x-1}$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{1} = \dfrac{2x+1}{2x-1}$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = \dfrac{(2x+1)+(2x-1)}{(2x+1)-(2x-1)}$

[যোজন-বিয়োজন করে ।]

$\Rightarrow \dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = \dfrac{4x}{2} \qquad \dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x$

4(d) যদি $f(x) = \dfrac{3x+5}{3x-5}$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = \dfrac{3x}{5}$. **[চ.'১১]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{3x+5}{3x-5}$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{1} = \dfrac{3x+5}{3x-5}$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)+1}{f(x)\mp 1} = \dfrac{(3x+5)+(3x-5)}{(3x+5)-(3x-5)}$

[যোজন-বিয়োজন করে ।]

$\Rightarrow \dfrac{f(x)+1}{f(x)\mp 1} = \dfrac{6x}{10} \qquad \dfrac{f(x)+1}{f(x)-1} = \dfrac{3x}{5}$

4(e) যদি $y = f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x = f(y)$. **[ঢা.'১১; সি.'১৩]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $y = f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}$

$f(y) = \dfrac{5y+3}{4y-5}$, $[\because f(x) = \dfrac{5x+3}{4x-5}]$

এখন, $y = \dfrac{5x+3}{4x-5} \Rightarrow 4xy - 5y = 5x + 3$

$\Rightarrow 4xy - 5x = 5y + 3$

$\Rightarrow (4y-5)x = 5y + 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{5y+3}{4y-5} = f(y) \quad \therefore x = f(y)$

4(f) $y = f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-4}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $f(y) = x$ [রা.'১২; ব.'১১; চ.'১২; দি. '০৯,'১৪; সি.'০৯; ঢা.'কু.'১৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $y = \dfrac{4x-7}{2x-4}$

$\Rightarrow 4x - 7 = 2xy - 4y$

$\Rightarrow 4x - 2xy = -4y + 7$

$\Rightarrow -x(2y-4) = -(4y-7)$

$\Rightarrow x = \dfrac{4y-7}{2y-4} \quad \cdots$ (i)

আবার, $f(x) = \dfrac{4x-7}{2x-4}$

$f(y) = \dfrac{4y-7}{2y-4} \cdots \quad$ (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই, f(y) = x

4(g) $f(x) = \dfrac{1+x^2+x^4}{x^2}$ **হলে, দেখাও যে,** $f(\frac{1}{x}) = f(x)$ **[রা.'০৬; মা.'০৩]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{1+x^2+x^4}{x^2}$

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^4+x^2+1}{x^4} \times \frac{x^2}{1}$$

$$= \frac{1+x^2+x^4}{x^2} = f(x)$$

5(a) $f(x) = e^x + e^{-x}$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $f(x+y)f(x-y) = f(2x) + f(2y)$
[চ.'০৯,'১৩; কু.'১০; রা.'১০, '১৪; ব. '০৯; সি.'০৭; ঢা.'১২; য. '০৮,'১২]

প্রমাণ ঃ L.H.S.$= f(x+y)f(x-y)$

$= \{e^{x+y} + e^{-(x+y)}\}\{e^{x-y} + e^{-(x-y)}\}$

$= e^{x+y+x-y} + e^{x+y-x+y} + e^{-x-y+x-y} + e^{-x-y-x+y}$

$= e^{2x} + e^{2y} + e^{-2y} + e^{-2x}$

$= (e^{2x} + e^{-2x}) + (e^{2y} + e^{-2y})$

$= f(2x) + f(2y) =$ R.H.S.

L.H.S. = R.H.S. (Proved)

5(b) $\phi(x) = \ln(\dfrac{1-x}{1+x})$ **হলে, দেখাও যে,** $\phi(y) + \phi(z) = \phi(\dfrac{y+z}{1+yz})$ **[রা.'১০; য.'০৬; কু.'১১; ব.'১২]**

প্রমাণ : $\phi(y) + \phi(z) = \ln(\dfrac{1-y}{1+y}) + \ln(\dfrac{1-z}{1+z})$

$= \ln(\dfrac{1-y}{1+y})(\dfrac{1-z}{1+z}) = \ln\dfrac{1-y-z+yz}{1+y+z+yz}$

$$\phi(\frac{y+z}{1+yz}) = \ln\frac{1-\frac{y+z}{1+yz}}{1+\frac{y+z}{1+yz}} = \ln\frac{1+yz-y-z}{1+yz+y+z}$$

$\phi(y) + \phi(z) = \phi(\dfrac{y+z}{1+yz})$

5(c) $f(x) = \ln(\sin x)$ **ও** $\phi(x) = \ln(\cos x)$ **হলে, দেখাও যে,** $e^{2\phi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)}$
[য.'১০; ব.'১০,'১৪; ঢা.'১০; সি. '০৮,'১০,'১৪; রা.'০৯]

প্রমাণ ঃ $f(x) = \ln(\sin x) \quad f(a) = \ln(\sin a)$

$\phi(x) = \ln(\cos x) \quad \therefore \phi(a) = \ln(\cos a)$ এবং

$\phi(2a) = \ln(\cos 2a)$

এখন, $e^{2\varphi(a)} - e^{2f(a)} = e^{2\ln(\cos a)} - e^{2\ln(\sin a)}$

$= e^{\ln(\cos^2 a)} - e^{\ln(\sin^2 a)} = \cos^2 a - \sin^2 a$

$= \cos 2a = e^{\ln(\cos 2a)} = e^{\phi(2a)}$

$e^{2\varphi(a)} - e^{2f(a)} = e^{\phi(2a)}$ (Showed)

5(d) $f(x) = \ln(\sin x)$ **ও** $\phi(x) = \ln(\cos x)$ **হলে,দেখাও যে,** $e^{2\phi(x)} + e^{2f(x)} = 1$ **[প্র.ভ.প. '৯৯]**

প্রমাণ ঃ $f(x) = \ln(\sin x) \quad \therefore f(a) = \ln(\sin a)$ এবং

$\phi(x) = \ln(\cos x) \quad \phi(a) = \ln(\cos a)$

এখন, $e^{2\varphi(a)} + e^{2f(a)} = e^{2\ln(\cos x)} + e^{2\ln(\sin x)}$

$= e^{\ln(\cos^2 x)} + e^{\ln(\sin^2 x)} = \cos^2 x + \sin^2 x$

$e^{2\varphi(a)} + e^{2f(a)} = 1$ (Showed)

5(e) $f(x) = \ln(x)$ **ও** $\phi(x) = x^3$ **হলে, দেখাও যে,** $f(\phi(x)) = 3f(x)$ **[ব.'০২]**

প্রমাণ ঃ $f(\phi(x)) = f(x^3) \quad [\because \phi(x) = x^3]$

$= ln(x^3) \quad [\because f(x) = \ln(x)]$

$= 3\,ln(x) = 3f(x) \quad [\because f(x) = \ln(x)]$

$f(\phi(x)) = 3f(x)$ (Showed)

5(f) $f(x)=\ln(x)$ ও $\phi(x)=x^n$ হলে, দেখাও যে, $f(\phi(x))=n\,f(x)$ [রা. '০৩,'০৭; সি. '০৬]

প্রমাণ ঃ $f(\phi(x))=f(x^n)$ [$\because \phi(x)=x^n$]

$= ln\,(x^n)$ [$\because f(x)=\ln(x)$]

$= n\,ln(x) = n\,f(x)$ [$\because f(x)=\ln(x)$]

$f(\phi(x))=nf(x)$ (Showed)

6. (a) $f(x)=\cos x$ হলে,দেখাও যে, $f(2x)=2\{f(x)\}^2-1$ এবং $f(3x)=4\{f(x)\}^3-3f(x)$ [ঢা.'০১, য.'১৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\cos x$

$f(2x)=\cos 2x = 2\cos^2 x-1$

$= 2(\cos x)^2-1$

$f(2x) = 2\{f(x)\}^2-1$ (Showed)

$f(3x)=\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

$=4(\cos x)^3-3\cos x$

$\therefore f(3x)=4\{f(x)\}^3-3f(x)$ (Showed)

6(b) $f(x) = \sin^3 x\cos x$ হলে, $f(x-\frac{3\pi}{2})$ এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৬]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\sin^3 x\cos x$

$f(x-\frac{3\pi}{2}) = \sin^3(x-\frac{3\pi}{2})\cos(x-\frac{3\pi}{2})$

$=[\sin\{-(\frac{3\pi}{2}-x)\}]^3\cos\{-(\frac{3\pi}{2}-x)\}$

$=[-\sin(\frac{3\pi}{2}-x)]^3\cos(\frac{3\pi}{2}-x)$

$= [+\cos x]^3\{-\sin x\}$

$=-\cos^3 x\sin x$ (Ans.)

6.(c) $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $f(\cos\theta)=\tan^2\frac{\theta}{2}$ [কু.'০৭,'০৯,'১৪;দি.'১১; সি.'১১]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$

$$f(\cos\theta)=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$f(\cos\theta)=\tan^2\frac{\theta}{2}$ (Showed)

7.(a) $\phi(x)=\tan x$ হলে, দেখাও যে, $\phi(a-b)=\frac{\phi(a)-\phi(b)}{1+\phi(a)\phi(b)}$ [সি.'০৩]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\phi(x)=\tan x$

$\phi(a)=\tan a$, $\phi(b)=\tan b$ এবং

$$\phi(a-b)=\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$$

$\phi(a-b)=\frac{\phi(a)-\phi(b)}{1+\phi(a)\phi(b)}$ (Showed)

7(b) $f(x)=\tan x$ হলে, দেখাও যে, $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ [ঢা.'০৫]

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\tan x$

$f(y)=\tan y$ এবং

$$f(x+y)=\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ (Showed)

7(c) $f(x) = \cos(lnx)$ হলে, $f(x)\,f(y)-\frac{1}{2}[f(\frac{x}{y})+f(xy)]$ এর মান নির্ণয় কর।

[য.'০৫; কু.'০৭, '০৯; সি.,দি.'১১]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x)=\cos(lnx)$

$f(x)\,f(y)-\frac{1}{2}[f(\frac{x}{y})+f(xy)]$

$=\cos(lnx)\cos(ln\,y)-$

$\frac{1}{2}[\cos(\ln\frac{x}{y})+\cos(ln\,xy)]$

$=\cos(ln\,x)\cos(ln\,y)-$

$\frac{1}{2}[\cos(lnx-lny)+\cos(lnx+lny)]$

$=\cos(ln\,x)\cos(ln\,y)-$

$\frac{1}{2}[2\cos(\ln x)\cos(\ln y)]$

$=\cos(\ln x)\cos(\ln y)-\cos(\ln x)\cos(\ln y)$
$=0$ (Ans.)

8. (a) দেওয়া আছে, $f(x)=x^2-2|x|$ এবং

$g(x)=x^2+1$

(i) $(gof)(-4)=g(f(-4))$ [ঢা.'০৫ ; সি'০৮]

$=g((-4)^2-2|-4|)=g(16-2.4)$

$=g(16-8)=g(8)=8^2+1$
$=64+1=65$

(ii) $(fog)(5)=f(g(5))$ [ঢা.'০৫ ; সি'০৮]

$=f(5^2+1)=f(25+1)=f(26)$
$=26^2-2|26|=676-2\times26$
$=676-52=624$

(iii) $(g\text{ o }f)(3)=g(f(3))$ [ব.'০৭]

$=g(3^2-2|3|)=g(9-6)$
$=g(3)=3^2+1=9+1=10$

(iv) $(f\text{ o }g)(-2)=f(g(-2))$ [য.'০৩; ব.'০৭]

$=f((-2)^2+1)=f(4+1)=f(5)$

$=5^2-2|5|=25-10=15$

8. (b) দেওয়া আছে, $f(x)=2x-5$ এবং
$g(x)=x^2+6$
[ব.'০৬; সি.'০৬ ; চ.'০৭; য.'০৬,'০৯; রা.'১৩]

$g(f(2))=g(2\times2-5)=g(4-5)$
$=g(-1)=(-1)^2+6=1+6=7$

$f(g(5))=f(5^2+6)=f(25+6)=f(31)$
$=2\times31-5=62-5=57$

8(c) দেওয়া আছে, $f(x)=x^2+3x+1$ এবং
$g(x)=2x-3$ [চ.'০৭; ব.'১২; দি.'১৩]

$(gof)(2)=g(f(2))=g(2^2+3.2+1)$
$=g(4+6+1)=g(11)=2\times11-3$
$=22-3=19$

$fog)(2)=f(g(2))=f(2.2-3)=f(4-3)$
$=f(1)=1^2+3\times1+1=1+3+1=5$

(d) $f\ \ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, যেখানে $f(x)=x^2$; $g\ \ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, যেখানে $g(x)=x^3+1$ এবং $x=-3$ হলে দেখাও যে, $(f\text{ o }g)(x)\neq(g\text{ o }f)(x)$
[ঢা.'০৭,'১১]

8(e) দেওয়া আছে, $f(x)=x^2+2x-3$ এবং
$g(x)=3x-4$ [কু.'০৬; দি.'১০; সি.'১২]

$(f\text{ o }g)(x)=f(g(x))=f(3x-4)$
$=(3x-4)^2+2(3x-4)-3$
$=9x^2-24x+16+6x-8-3$
$=9x^2-18x+5$ (Ans.)

$(f\text{ o }g)(3)=9\times3^2-18\times3+5$
$=81-54+5=32$ (Ans.)

8(f) $f(x)=2x^3+3$ এবং $g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{2}}$ হলে, দেখাও যে, $(fog)(x)=(g\text{ o }f)(x)$ [প্র.ভ.প.'০৩]

সমাধান : $(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{2}}\right)$

$=2\left(\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{2}}\right)^3+3=2\times\dfrac{x-3}{2}+3$

$=x-3+3=x$

$(g\text{ o }f)(x)=g(f(x))=g(2x^3+3)$

$=\sqrt[3]{\dfrac{2x^3+3-3}{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{2x^3}{2}}=\sqrt[3]{x^3}=x$

$\therefore (fog)(x)=(g\text{ o }f)(x)$ (Showed

9.(a) নিম্নের ফাংশনসমূহের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর

(i) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ [য.'১০] **(ii)** $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$

(iii) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ **(iv)** $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

(i) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}\in\mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x\in\mathbb{R}$ এবং $x-1\neq0$ i.e., $x\neq1$ হয়।

ডোমেন $f=\mathbb{R}-\{1\}$.

মনে করি, f এর অধীন x এর ছবি y

$y=f(x)=\dfrac{x}{x-1}\Rightarrow xy-y=x$

$\Rightarrow xy - x = y \Rightarrow x(y-1) = y \Rightarrow x = \dfrac{y}{y-1}$

$x = \dfrac{y}{y-1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y - 1 \neq 0$ i.e. $y \neq 1$ হয়।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{1\}$

(ii) $x = 0$ ব্যতীত সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ সংজ্ঞায়িত হয়।

ডোমেন $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$x > 0$ হলে $|x| = x$ অতএব, ডোমেন f এর সকল $x > 0$ উপাদানের জন্য , $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$

$x < 0$ হলে $|x| = -x$ অতএব, ডোমেন f এর সকল $x < 0$ উপাদানের জন্য, $f(x) = \dfrac{x}{-x} = -1$

রেঞ্জ $f = \{-1, 1\}$

(iii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) \geq 0$ অর্থাৎ $x \geq 3$ অথবা, $x \leq -3$ হয়।

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3$ অথবা, $x \leq -3\}$

$x = \pm 3 \in$ ডোমেন f এর জন্য $f(x) = 0$ এবং $x > 3$ অথবা $x < -3$ এর জন্য $f(x) > 0$.

রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

(iv) $f(x) = \sqrt{16 - x^2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 16 \leq 0$

$\Rightarrow (x-4)(x+4) \leq 0$ অর্থাৎ $-4 \leq x \leq 4$ হয়।

ডোমেন $= \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 4\}$

$x = \pm 4$ এর জন্য $f(x) = 0$, যা $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান এবং $x = 0$ এর জন্য $f(x) = 4$, যা $f(x)$ এর বৃহত্তম মান।

রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$

9.(b) f $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি (i) $f(x) = x^3$ (ii) $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা প্রকাশিত হলে , উহাদের রেঞ্জ নির্নয় কর । [কু.'০৭]

(i) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^3$

$x \in \mathbb{R}$ এর যেকোন মানের জন্য $f(x) = x^3$ এর মান যেকোন বাস্তব সংখ্যা ।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$

(ii) প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = x^2 + 1$

মনে করি , f এর অধীন x এর ছবি y

$y = f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1} \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 1$

রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} \quad y \geq 1\}$ (Ans.)

9(c) $\mathbb{R}$ বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $A = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$; $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে , $f(x)$ এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। [য.'০০]

সমাধান ঃ $f(-3) = (-3)^2 + (-3) + 1$

$= 9 - 3 + 1 = 7$

$f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$

$f(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

$f(3) = 3^2 + 3 + 1 = 9 + 3 + 1 = 13$

$f(x)$ -এর রেঞ্জ $= \{7, 1, 3, 13\}$

9(d) $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ এবং $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 2x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। [চ.'০১]

সমাধান ঃ $f(-4) = (-4)^2 + 2(-4) + 3$

$= 16 - 8 + 3 = 11$

$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$

$f(0) = 0^2 + 2 \times 0 + 3 = 3$

$f(2) = 2^2 + 2 \times 2 + 3 = 4 + 4 + 3 = 11$

$f(4) = 4^2 + 2 \times 4 + 3 = 16 + 8 + 3 = 27$

$\therefore$ f -এর রেঞ্জ $= \{11, 3, 3, 11, 27\}$

$= \{3, 11, 27\}$ (Ans.)

9(e) দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x}$ এবং $g(x) = x^2 - 1$ [চ.'০২ ; সি.'০৫]

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1)$

$= \sqrt{x^2-1}$ $\quad$ $fog = \sqrt{x^2-1}$

$(fog)(x) = \sqrt{x^2-1} = \sqrt{(x-1)(x+1)} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $(x-1)(x+1) \geq 0$.

$x \geq 1$ অথবা $x \leq -1$ $\quad$ $[\because 1 > -1]$

ডোমেন $(fog) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1$ অথবা $x \leq -1\}$

$x = 1 \in$ ডোমেন (fog) অথবা $x = -1 \in$ ডোমেন (fog) এর জন্য $(fog)(x) = 0$; যা fog এর ক্ষুদ্রতম মান এবং এর বৃহত্তম মান $\to \infty$.

রেঞ্জ $(f\,o\,g) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \infty\}$

আবার, $(g\,o\,f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x})$

$= (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$

$g\,o\,f = x - 1$

এখন, $g\,o\,f = x - 1 \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$

ডোমেন $(gof) = \mathbb{R}$

সকল $x \in$ ডোমেন $(gof) = \mathbb{R}$ এর জন্য gof এর মান বাস্তব সংখ্যা।

রেঞ্জ $(g\,o\,f) = \mathbb{R}$

10. (a) নিম্নের ফাংশনসমূহে কোনটি এক–এক এবং সার্বিক কারণসহ উল্লেখ কর। এক – এক এবং সার্বিক ফাংশনগুলোর জন্য বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর।

(i) $f(x) = 2x - 3$ $\quad$ **[চ.'১০; রা.'১১]**

সমাধান ঃ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = 2x - 3$

যদি সম্ভব হয় কল্পনা করি, $f(x) = 2x - 3$ একটি এক – এক ফাংশন নয় এবং যেকোন দুইটি অসমান উপাদান $x_1, x_2 \in$ ডোমেন f এর ছবি সমান, অর্থাৎ

$f(x_1) = f(x_2)$

$2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$; যা আমাদের কল্পনাকে অযৌক্তিক প্রতিপন্ন করে, কেননা $x_1 \neq x_2$

$f(x)$ একটি এক – এক ফাংশন নয় তা সম্ভব নয়।

$f(x)$ একটি এক – এক ফাংশন।

$x \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য, $f(x) = 2x - 3$ এর মান সকল বাস্তব সংখ্যা।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$. অর্থাৎ, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

এখন, $f(x) = 2x - 3$

$f(f^{-1}(x)) = 2\,f^{-1}(x) - 3$

$\Rightarrow x = 2\,f^{-1}(x) - 3 \Rightarrow 2\,f^{-1}(x) = x + 3$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

(ii) প্রদত্ত ফাংশন, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 + 5$

[সি.'০৩;ব.'১৩]

যেকোন $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ যদি ও কেবল যদি, $x_1^3 + 5 = x_2^3 + 5$

$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x)$ একটি এক – এক ফাংশন।

$x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x) = x^3 + 5$ এর মান সকল বাস্তব সংখ্যা।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$. i.e., $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন।

যদি ফাংশন f -এর অধীন x এর ছবি y অর্থাৎ $y = f(x)$ হয়, তবে ফাংশন f^{-1} -এর অধীন y এর ছবি x অর্থাৎ $x = f^{-1}(y)$ হবে।

এখন, $y = f(x) \Rightarrow y = x^3 + 5 \Rightarrow x^3 = y - 5$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y-5}$ $\quad \therefore f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-5}$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$

10(a) (iii) প্রদত্ত ফাংশন, $A = \mathbb{R} - \{3\}, B = \mathbb{R} - \{1\}$, $f : A \to B$ এবং $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3}$

যেকোন $x_1, x_2 \in A$ -এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $\dfrac{x_1 - 2}{x_1 - 3} = \dfrac{x_2 - 2}{x_2 - 3}$

$\Rightarrow x_1x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 6 = x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6$

$\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব, $f(x)$ একটি এক – এক ফাংশন।

মনে করি, f -এর অধীন x এর ছবি y

$$y = f(x) = \frac{x-2}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = x - 2$$

$$\Rightarrow x(y-1) = 3y - 2 \Rightarrow x = \frac{3y-2}{y-1} \cdots\cdots (1)$$

এখন, $x = \dfrac{3y-2}{y-1} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y - 1 \neq 0$ i.e., $y \neq 1$ হয়।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{1\} = B$

$f(A) = B$

অতএব , $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন ।

(1) হতে পাই , $x = \frac{3y-2}{y-1}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{3y-2}{y-1} [\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

10(a) (iv) প্রদত্ত ফাংশন, $A = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \}$ এবং $f \quad A \rightarrow A$, $f(x) = x^2$

যেকোন $x_1, x_2 \in A$ -এর জন্য , $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি , $x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad [\because x \geq 0]$

অতএব , $f(x)$ একটি এক – এক ফাংশন ।

মনে করি , $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$\Rightarrow x = \sqrt{y} \qquad (1) \quad [\because x \geq 0]$

$x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 0$ হয়।

রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R}: y \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0] = A$

$f(A) = A$

অতএব , $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন ।

এখন , (1) হতে পাই , $x = \sqrt{y}$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad [\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

10(a) (v) প্রদত্ত ফাংশন, $f \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$x_1 = 1, x_2 = -1 \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য,

$f(x_1) = f(1) = (1)^2 = 1$ এবং

$f(x_2) = f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(x_1) = f(x_2) = 1$, কিন্তু $x_1 \neq x_2$.

অতএব , $f(x)$ এক – এক ফাংশন নয় ।

মনে করি , $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$\Rightarrow x = \pm \sqrt{y}$

$x = \pm\sqrt{y} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 0$ হয়।

রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} \quad y \geq 0\}$

অর্থাৎ রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$

$f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

অতএব , $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন নয় ।

10(a)(vi) প্রদত্ত ফাংশন, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$

যেকোন $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$-এর জন্য , $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি $x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$

$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব , $f(x)$ একটি এক – এক ফাংশন ।

এখন, $x \in \mathbb{R}$(ডোমেন f) এর জন্য, $f(x) = x^3 + 1$ - এর মান সকল বাস্তব সংখ্যা ।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$ i.e., $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

অতএব , $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন ।

এখন , $y = f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y - 1$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1}$

$\therefore f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1} \; [\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

10(a) (vii) প্রদত্ত ফাংশন ,

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$

$x_1 = 0, x_2 = 2 \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য,

$f(x_1) = f(0) = |0 - 1| = |-1| = 1$ এবং

$f(x_2) = f(2) = |2 - 1| = |1| = 1$

$f(x_1) = f(x_2) = 1$, কিন্তু $x_1 \neq x_2$.

অতএব , $f(x)$ এক – এক ফাংশন নয় ।

$x \in \mathbb{R}$ (ডোমেন f) এর জন্য, $f(x) = |x - 1|$ এর মান সকল বাস্তব সংখ্যা ।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R}$. অর্থাৎ , $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

অতএব, $f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন ।

10(a) (viii) প্রদত্ত ফাংশন , $A = [-2 , 2]$

$B = [0,4]$, $f \quad A \rightarrow B$, $f(x) = x^2$

$x_1 = -2$, $x_2 = 2 \in \mathbb{R}$ (ডোমেনf) এর জন্য ,

$f(x_1) = f(-2) = (-2)^2 = 4$ এবং

$f(x_2) = f(2) = 2^2 = 4$

$f(x_1) = f(x_2) = 4$, কিন্তু $x_1 \neq x_2$

অতএব , f(x) এক – এক ফাংশন নয় ।

সকল x∈ ডোমেন f এর জন্য, $f(x) = x^2$ এর মান অঋণাত্মক এবং $x \le 4$

রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0$ এবং $x \le 4\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 4\} = [0, 4] = B$

$f(A) = B$

অতএব , f(x) একটি সার্বিক ফাংশন ।

10.(b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $f: A \to B$ ফাংশনটি $f(x) = x + 1$ দ্বারা প্রকাশিত । ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর । ফাংশনটি কি এক–এক ? [কু.'১২; প্র.ভ.প. ০৫]

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = x + 1$

$f(1) = 1 + 1 = 2$, $f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(3) = 4$; $f(4) = 5$

ডোমেন $f = \{1, 2, 3, 4\} = A$

রেঞ্জ $f = \{2, 3, 4, 5\}$

প্রতীয়মান হয় যে, $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = x + 1$ এর ভিন্ন ভিন্ন মান পাওয়া যায়।

অতএব , f(x) একটি এক – এক ফাংশন ।

10(c) বাস্তব সংখ্যা সেট $\mathbb{R}$ এর উপর $S = \{(x, y) : y = \sqrt{x}\}$ অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর । S^{-1} নির্ণয় কর ।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : y = \sqrt{x}\}$

S সেটের বর্ণনাকারী শর্ত , $y = \sqrt{x}$.

$y = \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি $x \in \mathbb{R}$ এবং $x \ge 0$ হয়।

ডোমেন $S = \{x \in \mathbb{R} \quad x \ge 0\}$

সকল $x \in$ ডোমেন S এর জন্য, $f(x) = x^2$ এর মান অঋণাত্মক ।

রেঞ্জ $S = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$

এখন , $y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$

$S^{-1} = \{(y, x) \quad x = y^2\}$

x কে y দ্বারা y এবং কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$S^{-1} = \{(x, y) : y = x^2\}$

10.(d) $A = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ এবং $B = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ -এর দুইটি উপসেট এবং $f: A \to B$; যেখানে $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$. দেখাও যে, ফাংশনটি এক–এক ও সার্বিক। [ঢা. '০৯]

সমাধান ঃ যেকোন $x_1, x_2 \in A = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ যদি ও কেবল যদি,

$$\frac{x_1 - 3}{2x_1 + 1} = \frac{x_2 - 3}{2x_2 + 1}$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 - 6x_2 + x_1 - 3x_1 - 1 = 2x_1x_2 - 6x_1 + x_2 - 3$$

$$\Rightarrow 7x_1 = 7x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

অতএব , f (x) একটি এক – এক ফাংশন ।

ধরি , $y = f(x) = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow 2xy + y = x - 3$

$$\Rightarrow (2y - 1)x = -y - 3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{1-2y}$$

এখন , $x = \frac{y+3}{1-2y} \in A = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $1 - 2y \ne 0$ অর্থাৎ $y \ne \frac{1}{2}$.

রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} = B$.

$f(A) = B$.

অতএব , f(x) একটি সার্বিক ফাংশন ।

10(e) $A = \mathbb{R} - \{3\}$ এবং $B = \mathbb{R} - \{1\}$ বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$ -এর দুইটি উপসেট এবং $f: A \to B$; যেখানে $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$. দেখাও যে, ফাংশনটি এক–এক ও সার্বিক।

সমাধান ঃ যেকোন $x_1, x_2 \in A = \mathbb{R} - \{3\}$ এর জন্য ,

$f(x_1) = f(x_2)$ যদি ও কেবল যদি, $\frac{x_1 - 2}{x_1 - 3} = \frac{x_2 - 2}{x_2 - 3}$

$$\Rightarrow x_1x_2 - 2x_2 - 3x_1 + 6$$

$= x_1x_2 - 2x_1 - 3x_2 + 6$

$\Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

অতএব , f (x) একটি এক - এক ফাংশন ।

ধরি , $y = f(x) = \dfrac{x-2}{x-3} \Rightarrow xy - 3y = x - 2$

$\Rightarrow (y-1)x = 3y - 2 \Rightarrow x = \dfrac{3y-2}{y-1}$

এখন , $x = \dfrac{3y-2}{y-1} \in A = \mathbb{R} - \{3\}$ হবে যদি ও কেবল যদি $y \in \mathbb{R}$ এবং $y - 1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$ হয়।

রেঞ্জ $f = \mathbb{R} - \{1\} = B$.

$f(A) = B$.

অতএব , f(x) একটি সার্বিক ফাংশন ।

11. (*a*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $f^{-1}(25)$ [কু.'০৫; য.'১১]

(ii) $f^{-1}(-16)$ [য.'০৪, '১১]

(iii) $f^{-1}([16,36])$ **(iv)** $f^{-1}(\{16,36\})$

সমাধান ঃ (i) মনে করি , $f^{-1}(25) = x$

$f(x) = 25$ [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

$f^{-1}(25) = \{-5 , 5\}$

(ii) মনে করি , $f^{-1}(-16) = x$

$f(x) = -16 \Rightarrow x^2 = -16$

x এর এমন কোন বাস্তব মান নেয় যার বর্গ ঋণাত্মক ।

$f^{-1}(-16) = \emptyset$

(iii) মনে করি , $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$

[$y = f(x)$ iff $x = f^{-1}(y)$]

$f^{-1}(16) = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ এবং

$f^{-1}(36) = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

$f^{-1}([16,36]) = [-6 , -4] \cup [4 , 6]$

$= \{x \in \mathbb{R} \quad -6 \leq x \leq -4$ অথবা $4 \leq x \leq 6\}$

(iv) মনে করি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$

[$\because y = f(x)$ iff $x = f^{-1}(y)$]

$f^{-1}(16) = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ এবং

$f^{-1}(36) = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

$f^{-1}(\{16,36\}) = \{-6 , -4 , 4, 6\}$ (Ans.)

11(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে , মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $f^{-1}(5)$ [চ.'০০] **(ii)** $f^{-1}(0)$ [ব.'১১]

(iii) $f^{-1}([5,37])$ [ব.'১১]

(iv) $f^{-1}(-5)$ [কু.'০৩; য.'০৮]

(v) $f^{-1}(10)$ [য.'০৮] **(vi)** $f^{-1}(\{1 , 10\})$

(i) মনে করি , $f^{-1}(5) = x$

$f(x) = 5$, [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$f^{-1}(5) = \{-2 \quad 2\}$

(ii) মনে করি , $f^{-1}(0) = x$

$f(x) = 0$ [$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$; যা x এর বাস্তব মানের জন্য সম্ভব নয় ।

$f^{-1}(0) = \emptyset$

(iii) মনে করি, $y = f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$

$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y-1}$

[$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$f^{-1}(5) = \pm\sqrt{5-1} = \pm 2$ এবং

$f^{-1}(37) = \pm\sqrt{37-1} = \pm 6$

$f^{-1}([16,36]) = [-6 , -2] \cup [2 , 6]$

$= \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq -2$ অথবা $2 \leq x \leq 6\}$

(iv) মনে করি , $f^{-1}(-5) = x \quad f(x) = -5$

[$\because f(x) = y$ iff $f^{-1}(y) = x$]

$\Rightarrow x^2 + 1 = -5 \Rightarrow x^2 = -6$; যা x এর বাস্তব মানের জন্য সম্ভব নয়।

$f^{-1}(-5) = \emptyset$

(v) মনে করি, $f^{-1}(10) = x$ $\quad$ $f(x) = 10$

$[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

$\Rightarrow x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$f^{-1}(10) = \{-3, 3\}$

(vi) মনে করি, $y = f(x) = x^2 + 1$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$

$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y-1}$

$[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

$f^{-1}(1) = \pm\sqrt{1-1} = 0$ এবং

$f^{-1}(10) = \pm\sqrt{10-1} = \pm 3$

$f^{-1}(\{1,10\}) = \{-3, 0, 3\}$

11.(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 - 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, মান নির্ণয় কর:

(i) $f^{-1}(2)$ [চ.'০৩; রা.'১০] **(ii) $f^{-1}(-3)$**

(i) মনে করি, $f^{-1}(2) = x$

$f(x) = 2$ $\quad$ $[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

$\Rightarrow x^2 - 7 = 2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$f^{-1}(2) = \{-3, 3\}$

(ii) মনে করি, $f^{-1}(-3) = x$

$f(x) = -3$ $[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

$\Rightarrow x^2 - 7 = -3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\therefore f^{-1}(-3) = \{-2, 2\}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^3 + 7$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে $f^{-1}(x)$, $f^{-1}(34)$ এবং $f^{-1}(-57)$ এর মান নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.'০৪]

সমাধান: মনে করি, $y = f(x) = x^3 + 7$

$x^3 = y - 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-7}$

$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-7}$

$[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

y এর পরিবর্তে x লিখে পাই,

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-7}$ (Ans.)

$f^{-1}(2) = \sqrt[3]{34-7} = \sqrt[3]{27} = 3$ এবং

$f^{-1}(-57) = \sqrt[3]{-57-7} = \sqrt[3]{-64} = -4$

12(a) $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ হলে, দেখাও যে, $f^{-1}(x) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$.

প্রমাণ: ধরি, $y = f(x) = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \cdots (1)$ এবং

$y = ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = e^y$

$\Rightarrow e^y + xe^y = 1 - x \Rightarrow x + xe^y = 1 - e^y$

$\Rightarrow (1 + e^y)x = 1 - e^y \Rightarrow x = \frac{1-e^y}{1+e^y}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1-e^y}{1+e^y}$ [(1) দ্বারা]

$f^{-1}(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ (Showed)

12(b) $f(2x-1) = x + 2$ হলে, $f(x+3)$ এবং $f^{-1}(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

প্রমাণ: ধরি, $2x - 1 = y$ $\therefore f(y) = x + 2$ এবং

$2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y+1)$

$\Rightarrow x + 2 = 2 + \frac{1}{2}(y+1) = \frac{4+y+1}{2}$

$\Rightarrow f(y) = \frac{y+5}{2}$

$f(x+3) = \frac{x+3+5}{2} = \frac{x+8}{2}$ (Ans.)

আবার, $f(2x-1) = x + 2$

$\Rightarrow f^{-1}(x+2) = 2x - 1$

$f^{-1}\{(x-2)+2\} = 2(x-2) - 1$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 4 - 1 = 2x - 5$ (Ans.)

12(c) $\varphi(x) = \cot^{-1}(1 + x + x^2)$ **হলে দেখাও যে,**
$\varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2) = \frac{\pi}{2}$ **[ঢা.'০৯]**

প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, $\varphi(x) = \cot^{-1}(1 + x + x^2)$

$\varphi(0) = \cot^{-1}(1+0+0) = \cot^{-1}(1) = \tan^{-1}(1)$

$\varphi(1) = \cot^{-1}(1+1+1) = \cot^{-1}(3) = \tan^{-1}\frac{1}{3}$

$\varphi(2) = \cot^{-1}(1+2+4) = \cot^{-1}(7) = \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$\varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2)$

$= \tan^{-1}(1) + 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$= \{\tan^{-1}(1) + \tan^{-1}\frac{1}{7}\} + 2\tan^{-1}\frac{1}{3}$

$= \tan^{-1}\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} + \tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}$

$= \tan^{-1}\frac{7+1}{7-1} + \tan^{-1}(\frac{2}{3}\times\frac{9}{9-1})$

$= \tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{6}{8} = \tan^{-1}\frac{4}{3} + \cot^{-1}\frac{4}{3}$

$\varphi(0) + 2\varphi(1) + \varphi(2) = \frac{\pi}{2}$ (Showed),

$[\because \tan^{-1}\theta + \cot^{-1}\theta = \frac{\pi}{2}]$

12(d) যদি $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ **,** $-1 \le x \le 0$ **হয়, তবে** $f^{-1}(x)$ **নির্ণয় কর এবং** $f^{-1}(\frac{1}{2})$ **-এর মান নির্ণয় কর।** **[রা.'১১]**

সমাধান ঃ ধরি, $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2$

$\Rightarrow x = -\sqrt{1-y^2}$, $[\because -1 \le x \le 0]$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = -\sqrt{1-y^2}$ $\quad f^{-1}(x) = -\sqrt{1-y^2}$

$[\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

এখন, $f^{-1}(\frac{1}{2}) = -\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = -\sqrt{\frac{4-1}{4}}$

$f^{-1}(\frac{1}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (Ans.)

13. (a) $F = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ **এবং** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\}$**. অন্বয় F এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।** F^{-1} **নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ F সেটের বর্ণনাকারী শর্ত $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{16} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{16}(16 - x^2)$

$\Rightarrow y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ ……… (1)

$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি

$x \in \mathbb{R}$ এবং $16 - x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 - 4^2 \le 0$

$\Rightarrow (x-4)(x+4) \le 0 \Rightarrow -4 \le x \le 4$ হয়।

ডোমেন $F = \{x \in \mathbb{R} : -4 \le x \le 4\} = [-4, 4]$

এখন, $x = 0 \in$ ডোমেন F এর জন্য,

$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{16-0^2} = \pm\frac{3}{4}\times 4 = \pm 3$ যা রেঞ্জ F এর যথাক্রমে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান।

রেঞ্জ $F = [-3, 3]$

$F^{-1} = \{(y, x) : y \in [-3, 3], x \in [-4, 4]$ এবং $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\}$

x কে y দ্বারা এবং y কে x দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই;

$F^{-1} = \{(x, y) : x \in [-3, 3], y \in [-4, 4]$ এবং $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1\}$

$F^{-1} = \{(x, y) : x \in [-3, 3], y \in [-4, 4]$ এবং $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1\}$

13(b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ **দ্বারা প্রকাশিত** $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

অন্বয়ের রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f^{-1}([\sqrt{5}, \frac{5}{2}])$ ও নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

$f(0) = \sqrt{4} = 2$ যা $x \in [-2, 2]$ এর জন্য $f(x)$ অর্থাৎ রেঞ্জ f এর ক্ষুদ্রতম মান।

$f(\pm 2) = \sqrt{(\pm 2)^2 + 4} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

যা $x \in [-2, 2]$ এর জন্য $f(x)$ অর্থাৎ রেঞ্জ f এর বৃহত্তম মান।

রেঞ্জ $f = [2, 2\sqrt{2}]$

মনে করি, $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

$$y^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = y^2 - 4$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 4}$$

$$f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y^2 - 4}$$

$[\quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$

$f^{-1}(\sqrt{5}) = \pm\sqrt{5-4} = \pm 1$ এবং

$$f^{-1}(\frac{5}{2}) = \pm\sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \pm\sqrt{\frac{25-16}{4}} = \pm\frac{3}{2}$$

$$f^{-1}([\sqrt{5}, \frac{5}{2}]) = [-\frac{3}{2} \quad -1] \cup [1, \frac{3}{2}]$$

13(c) $f(x) = 5 - 3x$ দ্বারা প্রকাশিত $f : [-5, 3] \to \mathbb{R}$ ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f^{-1}([-4, \frac{1}{2}])$ ও নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = 5 - 3x$

$f(-5) = 5 - 3 \times (-5) = 5 + 20 = 20$

যা $x \in [-5, 3]$ এর জন্য $f(x)$ এর বৃহত্তম মান।

$f(3) = 5 - 3 \times (3) = 5 - 9 = -4$ যা $x \in [0, 2]$ এর জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

রেঞ্জ $f = [-4, 20]$ (Ans.)

মনে করি, $y = f(x) \quad y = 5 - 3x$

$$\Rightarrow 3x = 5 - y \Rightarrow x = \frac{5-y}{3}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{5-y}{3}$$

$[\quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$

$\therefore f^{-1}(-4) = \frac{5+4}{3} = 3$; যা $y \in [-4, \frac{1}{2}]$ এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর বৃহত্তম মান।

$f^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{5 - \frac{1}{2}}{3} = \frac{9}{2 \times 3} = \frac{3}{2}$; যা $y \in [-4, \frac{1}{2}]$ এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$$f^{-1}([-4, \frac{1}{2}]) = [\frac{3}{2}, 3] \quad \text{(Ans.)}$$

13(d) $f(x) = 2x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর। $f^{-1}([\frac{3}{2}, 3])$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $f(x) = 2x^2 + 1$

$f(0) = 2 \times (0)^2 + 1 = 1$; যা $x \in [0, 2]$ এর জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$f(2) = 2 \times (2)^2 + 1 = 9$; যা $x \in [0, 2]$ এর জন্য $f(x)$ এর বৃহত্তম মান।

রেঞ্জ $f = [1, 9]$ (Ans.)

মনে করি, $y = f(x) \quad y = 2x^2 + 1$

$$\Rightarrow 2x^2 = y - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{y-1}{2}} \quad [\quad x \in [0, 2]]$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y-1}{2}}$$

$[\quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)]$

$\therefore f^{-1}(3) = \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$; যা $y \in [\frac{3}{2}, 3]$ এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর বৃহত্তম মান।

$f^{-1}(\frac{3}{2}) = \sqrt{\frac{\frac{3}{2} - 1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$; যা $y \in [\frac{3}{2}, 3]$ এর জন্য $f^{-1}(y)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$$f^{-1}([\frac{3}{2}, 3]) = [\frac{1}{2}, 1] \quad \text{(Ans.)}$$

14(a) $f(\frac{1-x}{1+x}) = x + 2$ হলে $f(x+3)$ এবং

$f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $\frac{1-x}{1+x} = y \quad \therefore f\ (y) = x+2$

এবং $y + xy = 1 - x \Rightarrow x(y+1) = 1 - y$

$\Rightarrow x = \frac{1-y}{1+y} \Rightarrow x + 2 = \frac{1-y}{1+y} + 2$

$\Rightarrow f(y) = \frac{1-y+2+2y}{1+y} \quad [\because f(y) = x+2]$

$\Rightarrow f(y) = \frac{3+y}{1+y}$

$f(x+3) = \frac{3+(x+3)}{1+(x+3)} = \frac{x+6}{x+4}$ (Ans.)

২য় অংশ: দেওয়া আছে, $f(\frac{1-x}{1+x}) = x+2$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(x+2) = \frac{1-x}{1+x}$

$f^{-1}\{(x-2)+2\} = \frac{1-(x-2)}{1+(x-2)}$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-1}$ (Ans.)

14 (b) $f(2x-1) = x+2$ হলে $f(x+3)$ এবং $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি, $2x - 1 = y \quad \therefore f\ (y) = x+2$

এবং $2x = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$

$\Rightarrow x + 2 = \frac{y+1}{2} + 2$

$\Rightarrow f(y) = \frac{y+1+4}{2} \quad [\because f(y) = x+2]$

$\Rightarrow f(y) = \frac{y+5}{2}$

$f(x+3) = \frac{(x+3)+5}{2} = \frac{x+8}{2}$ (Ans.)

২য় অংশ: দেওয়া আছে, $f(2x-1) = x+2$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(x+2) = 2x-1$

$f^{-1}\{(x-2)+2\} = 2(x-2)-1$

$\Rightarrow \quad f^{-1}(x) = 2x-5$ (Ans.)

14(c) দেখাও যে, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ এবং $f : A \to A$, $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশনের $f^{-1}(x)$ বিদ্যমান। $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

যেকোন $x_1, x_2 \in A$ এর জন্য, $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ হয়।$[\because x \geq 0]$

$f(x)$ একটি এক– এক ফাংশন ।

ধরি, $y = f(x) = x^2 \Rightarrow x^2 = y$

$\Rightarrow x = \sqrt{y} \cdots\cdots (1) \quad [\because x \geq 0]$

এখন, $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি, $y \in \mathbb{R}$ এবং $y \geq 0$

রেঞ্জ $f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0] = A$

$f(A) = A$

$f(x)$ একটি সার্বিক ফাংশন ।

যেহেতু $f(x)$ একটি এক – এক ও সার্বিক ফাংশন

সুতরাং $f(x)$ -এর বিপরীত ফাংশন বিদ্যমান ।

এখন (1) হতে পাই, $x = \sqrt{y}$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad [\because y = f(x) \text{ iff } x = f^{-1}(y)]$

y কে x দ্বারা প্রতিস্থান করে পাই, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

14 (d) $A, B \subseteq \mathbb{R}$ এবং $f(x) : A \to B$ হলে এবং (i) $f(x) = \sqrt{x-2}$ (ii) $f(x) = x^2$ (iii) $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনগুলোর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x)$ বিদ্যমান থাকলে A এবং B সেটের মান নির্ণয় কর ; যেখানে A বৃহত্তম।

(*i*) যেহেতু $f(x) = \sqrt{x-2}$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক – এক এবং সার্বিক ।

রেঞ্জ $f = B$.

এখন, $f(x) = \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x \in \mathbb{R}$ এবং $x - 2 \geq 0$ i.e., $x \geq 2$ হয়।

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$

ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ এর জন্য, $f(x) = \sqrt{x-2}$ একটি এক – এক ফাংশন।

$A =$ ডোমেন $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$

$x \in$ ডোমেন f এর জন্য, $f(x)$ এর মান অঋণাত্মক ।

রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

$B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

(ii) যেহেতু $f(x) = x^2$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান, সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক – এক এবং সার্বিক।

রেঞ্জ $f = B$

এখন, $f(x) = x^2 \in \mathbb{R}$ যদি ও কেবল যদি, $x \in \mathbb{R}$.

ডোমেন.$f = \mathbb{R}$

ডোমেন $f = \mathbb{R}$ এর জন্য, $f(x) = x^2$ ফাংশনটি এক – এক নয়।

কিন্তু ডোমেন f-এর সর্বাধিক মান $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ অথবা $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$এর জন্য $f(x) = x^2$ ফাংশনটি এক–এক।

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ অথবা $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

$x \in$ ডোমেন f এর জন্য, $f(x)$ -এর মান অঋণাত্মক।

রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

(iii) যেহেতু $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান, সুতরাং প্রদত্ত ফাংশনটি এক – এক এবং সার্বিক।

রেঞ্জ $f = B$

এখন, $f(x) = (x-1)^2 \in \mathbb{R}$ হবে যদি ও কেবল যদি, $x \in \mathbb{R}$

ডোমেন $f = \mathbb{R}$

ডোমেন $f = \mathbb{R}$-এর জন্য, পদত্ত ফাংশন $f(x) = (x-1)^2$ এক–এক নয়।

কিন্তু ডোমেন f -এর সর্বাধিক মান $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ অথবা $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$এর জন্য $f(x) = (x-1)^2$ ফাংশনটি এক–এক।

$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ অথবা $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$

$x \in$ ডোমেন f এর জন্য, $f(x)$ এর মান অঋণাত্মক

রেঞ্জ $f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

$B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

15. নিম্নের অন্বয়গুলোর লেখ অঙ্কন কর। কোনগুলো ফাংশন এবং কোনগুলো ফাংশন নয় তা লেখচিত্র থেকে কারণসহ উল্লেখ কর।

সমাধান :

(a) নিচের তালিকায় $x \in [-3, 3]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি

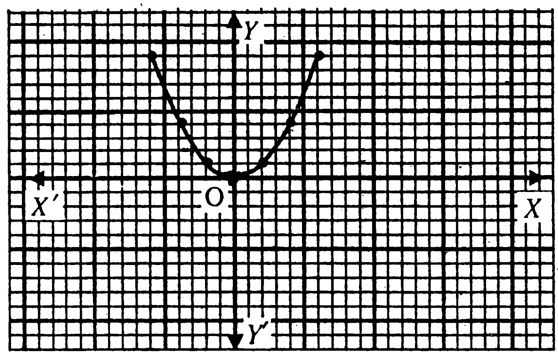
x	± 3	± 2	± 1	0
$y = x^2$	9	4	1	0

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নিধারণ ঃ

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 1 বাহু = 1 একক।



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R = \{(x, y) \quad y = x^2$ এবং $-3 \leq x \leq 3\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$-3 \leq x \leq 3$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন।

15(b) নিচের তালিকায় $x \in [0, 4]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y^2 = x \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	1	2	3	4
$y = \pm\sqrt{x}$	0	± 1	± 1.42	± 1.73	± 2

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

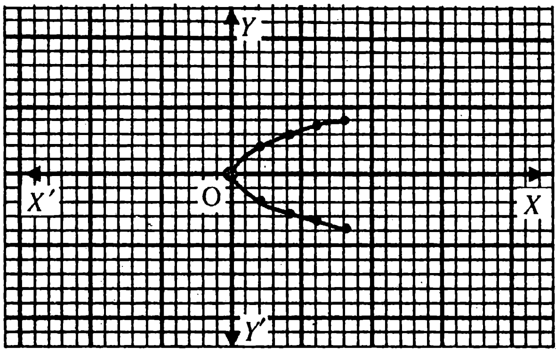
স্কেল নিধারণ ঃ

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে

বক্রাকারে যোগ করে $R = \{(x , y) \quad y^2 = x$ এবং $0 \le x \le 4\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।



$0 < x \le 4$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একাধিক (দুইটি) বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় ফাংশন নয়।

15(c) নিচের তালিকায় $x \in [0 \ , 4 \ ]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{x} \ (\quad y \ge 0)$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

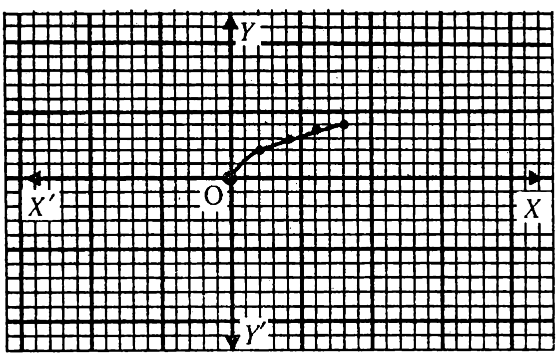
x	0	1	2	3	4
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.42	1.73	2

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

স্কেল নিধারণ ঃ

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

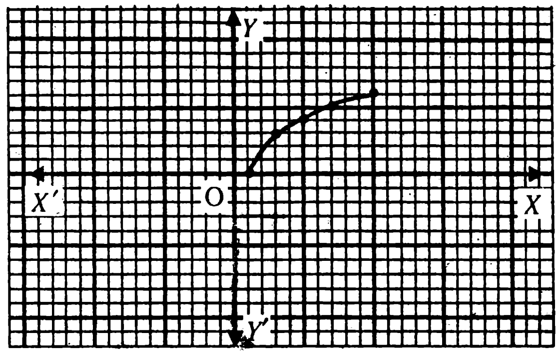


এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R=\{(x , y): y^2 = x , 0 \le x \le 4$ এবং $y \ge 0\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$0 \le x \le 4$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন।

15(d) নিচের তালিকায় $x \in [0 \ , 10 \ ]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \sqrt{x-1}$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি

x	1	3	5	7	10
$y = \sqrt{x-1}$	0	1.42	2	2.45	3



এখন নির্ধারিত স্কেল অনুযায়ী তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। স্থাপিত বিন্দুগুলো মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $R = \{(x , y) \quad y = \sqrt{x-1}$ এবং $1 \le x \le 10\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।

$1 \le x \le 10$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন।

15(e) প্রদত্ত অন্বয় R এর বর্ণনাকারী সমীকরণ

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ একটি বৃত্ত, যার কেন্দ্রের স্থানাংক $(1 , -2)$ এবং ব্যাসার্ধ 3

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।

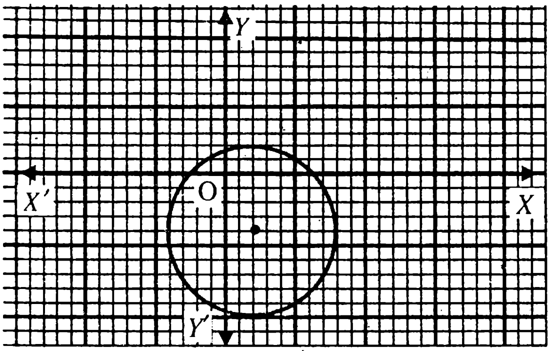
স্কেল নিধারণ ঃ

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

$(1 , -2)$ বিন্দুকে কেন্দ্র করে 3 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি।

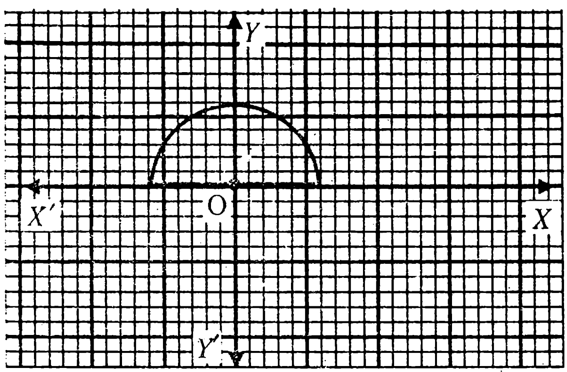
$R = \{(x , y) \quad (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9\}$ এর লেখ অঙ্কন করা হল।



$2 < x < 4$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একাধিক (দুইটি) বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় ফাংশন নয়।

15(f) প্রদত্ত অন্বয় R এর বর্ণনাকারী শর্ত $x^2 + y^2 = 9$ এবং $y \geq 0$ একটি অর্ধবৃত্ত যার কেন্দ্রের স্থানাংক $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ 3

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা $X'OX$ ও YOY' আঁকি।



স্কেল নিধারণ ঃ

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের 2 বাহু = 1 একক।

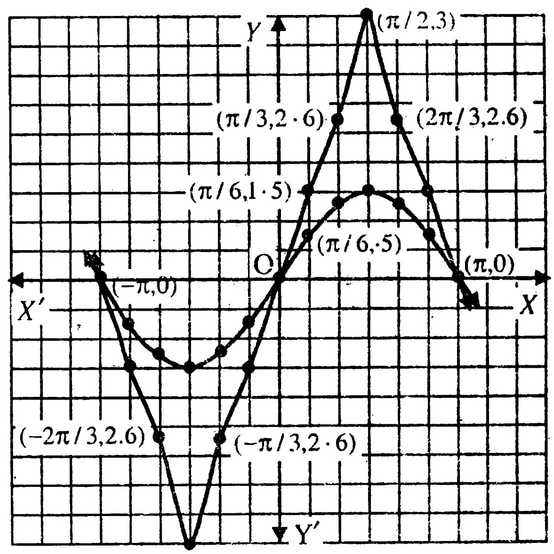
y-অক্ষের সমান্তরাল কোন সরললেখা প্রদত্ত অন্বয়ের লেখকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করেনা। অতএব প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন।

$y \geq 0$ সীমার মধ্যে y-অক্ষের সমান্তরাল প্রতিটি উলম্ব রেখায় প্রদত্ত অন্বয়ের লেখচিত্রটির একটি মাত্র বিন্দু আছে। অতএব, প্রদত্ত অন্বয় একটি ফাংশন।

16. (a) $y = \sin x, \ -\pi \leq x \leq \pi$ এর গ্রাফ হতে $y = 3 \sin x$ এর গ্রাফ অঙ্কন কর।

সমাধান: x-অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের এক বাহু $= 30°$ এবং y- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 3 বাহু = 1 ধরে $y = \sin x, \ -\pi \leq x \leq \pi$ লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$y = \sin x$ এর রূপান্তরিত ফাংশন $y = 3 \sin x$, y অক্ষের দিকে সংকুচিত হয়। $y = \sin x$ লেখের প্রতিটি বিন্দুর y –স্থানাঙ্ককে 3 গুণ বৃদ্ধি করে বিন্দুটিকে উপরের দিকে সরিয়ে $y = 3 \sin x$ লেখ নিচে অঙ্কন করা হলো।।



(b) $y = e^x$ এর লেখ হতে $y = ln\, x$ এর লেখ অঙ্কন কর।

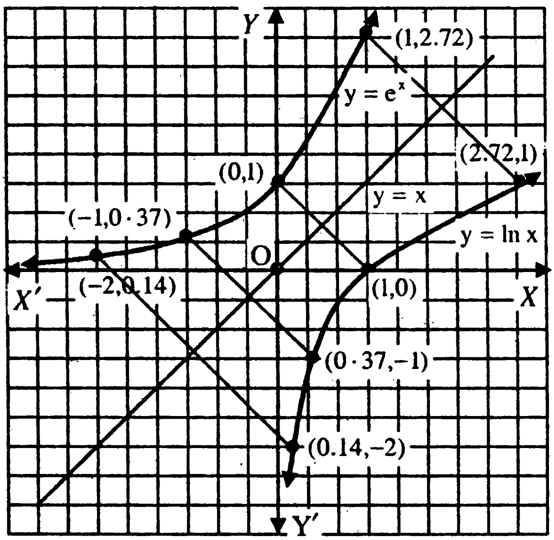
নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = e^x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	−2	−1	0	1	2
$y = e^x$	0·14	0·37	1	2.72	7·39

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 3 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = e^x$ এর লেখ অঙ্কন করি।

$f(x) = e^x$ ফাংশনের লেখের উপরস্থ $(-2, 0·14)$, $(-1, 0·37)$, $(0,1)$ ও $(1, 2·72)$ বিন্দুগুলির x স্থানাঙ্ক ও y স্থানাঙ্কের স্থান বিনিময় করে যথাক্রমে $(0·14, -2)$ $(0·37, -1)$, $(1,0)$ ও $(2·72,1)$ বিন্দুগুলি ছক

কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = e^x$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \ln x$ এর লেখ অঙ্কন করা হলো। (অন্যভাবে, $y = x$ সরলরেখা হতে $(-2, 0.14)$ $(-1, 0.37)$, $(0,1)$ ও $(1, 2.72)$ বিন্দুগুলির সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সাহায্যে $f^{-1}(x) = \ln x$ এর লেখ অঙ্কন করা যায়।)



17. **ফাংশনগুলির পর্যায় নির্ণয় কর:** **(a)** $\sin\left(5\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ **(b)** $7\tan(-3\theta)$ **(c)** $\cos\frac{1}{2}\theta\tan\theta$

সমাধান: **(a)** ধরি, $f(\theta) = \sin\left(5\theta + \frac{\pi}{4}\right)$

$$f(\theta) = \sin\left(5\theta + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$$

[$\because \sin\theta$ এর পর্যায় 2π]

$$= \sin 5\left(\theta + \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}\right) = f\left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right)$$

$\sin\left(5\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ এর পর্যায় $\frac{2\pi}{5}$.

(b) ধরি, $f(\theta) = 7\tan(-3\theta)$

$$f(\theta) = 7\tan(-3\theta + \pi)$$

[$\because \tan\theta$ এর পর্যায় π]

$$= 7\tan 3\left(-\theta + \frac{\pi}{3}\right) = f\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$7\tan(-3\theta)$ এর পর্যায় $\frac{\pi}{3}$.

(c) ধরি, $f(\theta) = \cos\frac{1}{2}\theta\tan\theta$

$$\cos\frac{1}{2}\theta = \cos\left(\frac{1}{2}\theta + 2\pi\right) = \cos\frac{1}{2}(\theta + 4\pi)$$

[$\because \sin\theta$ এর পর্যায় 2π]

এবং $\tan\theta = \tan(\theta + \pi) = \tan(\theta + 2\pi)$

$$= \tan(\theta + 3\pi) = \tan(\theta + 4\pi)$$

[$\because \tan\theta$ এর পর্যায় π]

$$f(\theta) = \cos\frac{1}{2}(\theta + 4\pi)\tan(\theta + 4\pi)$$

$$= f(\theta + 4\pi)$$

$\cos\frac{1}{2}\theta\tan\theta$ এর পর্যায় 4π.

18. দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 2x - 3$.

(a) $g\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর। $f(x) = 19$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

(b) $(g \circ f)(2)$ এবং $(f \circ g)(2)$ নির্ণয় কর।

[চ.'০৭; ব.'১২; দি.'১৩]

(c) $f(x)$ ফাংশনের এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $f(x + 4)$ ও $f(x - 4)$ এর স্কেচ অঙ্কন কর।

সমাধান: **(a)** দেওয়া আছে, $g(x) = 2x - 3$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$f(x) = 19 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 19$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 6)(x - 3) = 0$$

$x + 6 = 0$ হলে, $x = -6$

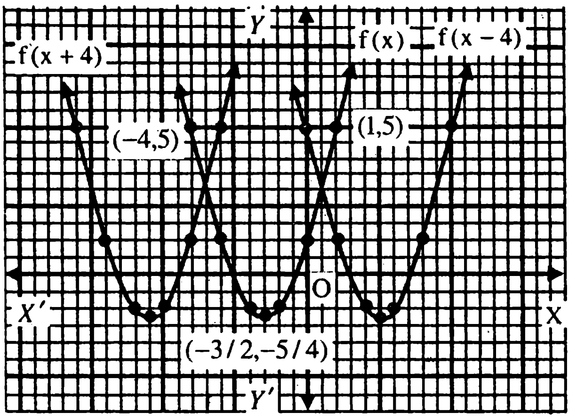
$x - 3 = 0$ হলে, $x = 3$.

(b) 8(c) দ্রষ্টব্য।

(c) নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	-1	−2	−3	1	−4	$-\frac{3}{2}$
$f(x) = x^2 + 3x + 1$	1	-1	−1	1	5	5	$-\frac{5}{4}$

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এর স্কেচ অঙ্কন করি ।



$f(x)$ ফাংশনের লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 4 একক অর্থাৎ 8 ঘর বামে সরিয়ে $f(x)$ এর রূপান্তরিত ফাংশন $f(x + 4)$ এর এবং 4 একক অর্থাৎ 8 ঘর ডানে সরিয়ে $f(x - 4)$ এর স্কেচ অঙ্কন করা হলো ।

19. দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$.

(a) $g^{-1}(\{-1, 8\})$ এর মান নির্ণয় কর ।

(b) $(fog)(x)$ এবং $(gof)(x)$ নির্ণয় কর । প্রথম

[চ.'০৯ ; সি.'০৫; ব.'০৯]

(c) $g(x)$ ফাংশনের এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $g(2x)$ ও $f(0{\cdot}5x)$ এর স্কেচ অঙ্কন কর ।

সমাধান : ধরি, $y = g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = y + 1$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y+1}$

$g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y+1}$

$[\quad y = g(x) \text{ iff } x = g^{-1}(y)]$

এখন, $g^{-1}(-1) = \pm\sqrt{-1+1} = 0$ এবং

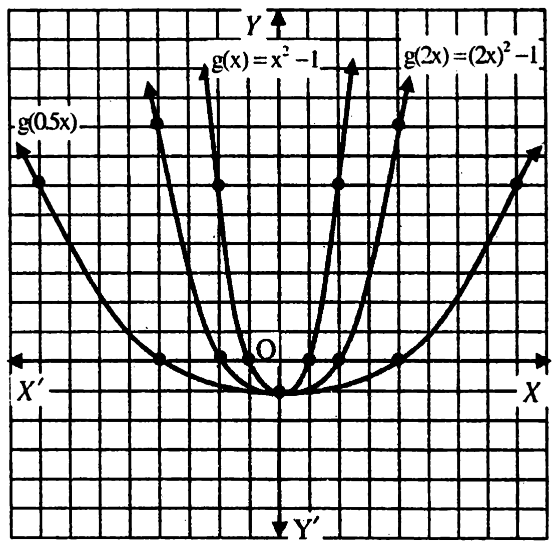
$g^{-1}(8) = \pm\sqrt{8+1} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

$g^{-1}(\{-1, 8\}) = \{-3, 0, 3\}$

(b) **9(e) দ্রষ্টব্য ।**

$f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$

(c) x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে $g(x)$ ফাংশনের এবং এর রূপান্তরিত ফাংশন $g(2x)$ ও $g(0{\cdot}5x)$ এর নিচে স্কেচ অঙ্কন করা হলো ।



20. f $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে ,

সমাধান ঃ (a) $x = 0$ হলে $f(0) = 0 + 1 = 1$, যা $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান এবং $x > 0$ হলে $f(x) > 1$.

$f(x)$ এর রেঞ্জ $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$

(b) মনে করি, $y = f(x) = x^2 + 1$

$\Rightarrow x^2 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$, $[\because x \geq 0]$

$f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$

$[\because f(x) = y \text{ iff } f^{-1}(y) = x]$

$f^{-1}(1) = \sqrt{1-1} = 0$ এবং

$f^{-1}(10) = \sqrt{10-1} = 3$

$f^{-1}([1,10]) = [0\ ,\ 3]$ এবং

$f^{-1}(\{1,10\}) = \{0,3\}$

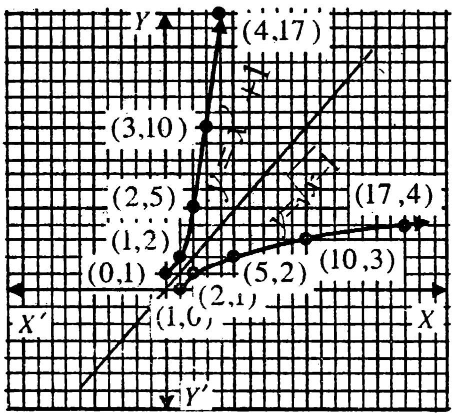
(c) f(x) এর লেখচিত্র থেকে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

2. সংযুক্ত তালিকায় $x \geq 0$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2 + 1$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	1	2	3	4
f (x)	1	2	5	10	17

x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = x^2 + 1$ এর লেখ অঙ্কন করি ।



y = x সরলরেখার লেখ অঙ্কন করি। y = x রেখা হতে (0, 1) (1, 2), (2,5), (3,10), (4, 17) ইত্যাদি বিন্দুগুলির সমদূরবর্তী যথাক্রমে (1,0), (2,1), (5,2), (10,3), (17,4) ইত্যাদি বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে f(x) এর লেখ থেকে $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$ এর লেখ অঙ্কন করা হলো।

ব্যবহারিক অনুশীলনী

1. $y = -x^2$ ফাংশনের এবং রূপান্তরিত $y = -(x+3)^2$ ও $y = (x-3)^2$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = -x^2$ ফাংশনের ও রূপান্তরিত $y = -(x+3)^2$ ও $y = (x-3)^2$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

মূলতত্ত্ব ঃ $y = -x^2$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে এবং অক্ষ y -অক্ষ। $y = -x^2$ এর লেখ নিজের সমান্তরালে 3 একক বামে সরিয়ে দিয়ে $y = -(x+3)^2$ পরাবৃত্তের লেখ পাওয়া যায় যার শীর্ষবিন্দু (−3, 0) । আবার, x অক্ষের সাপেক্ষে $y = -x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = x^2$ এর লেখকে 3 একক ডানে সরিয়ে দিয়ে $y = (x-3)^2$ পরাবৃত্তের লেখ পাওয়া যায় যার শীর্ষবিন্দু (3, 0) .

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

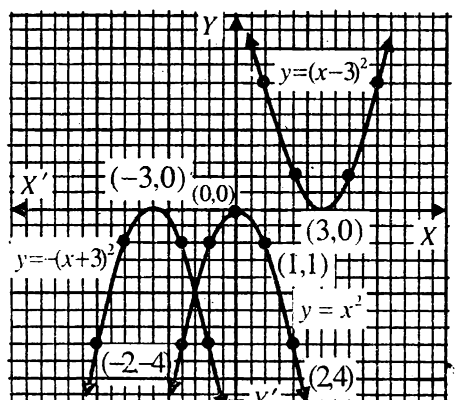
কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = -x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	−2	−1	0	1	2
f (x)	−4	− 1	0	−1	−4

3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = -x^2$ এর লেখ অঙ্কন করি ।



4. লেখটির প্রতিটি বিন্দুকে 2×3 বা 6 বর্গের বাহুর সমান অর্থাৎ 3 একক বাম দিকে সরিয়ে $y = -(x+3)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি ।

5. আবার, x অক্ষের সাপেক্ষে $y = -x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = x^2$ এর লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 2×3 বা 6 বর্গের বাহুর সমান অর্থাৎ 3 একক ডানে সরিয়ে দিয়ে $y = (x-3)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি ।

বৈশিষ্ট্য ঃ (i) লেখচিত্র তিনটি পরাবৃত্ত। $y = -x^2$ এর শীর্ষবিন্দু (0, 0), $y = -(x+3)^2$ এর শীর্ষবিন্দু (−3,0) এবং $y = (x-3)^2$ এর শীর্ষবিন্দু (3, 0) ।
(ii) $y = -x^2$ এর লেখ y অক্ষের সাপেক্ষে, $y = -(x+3)^2$ এর লেখ $x = -3$ রেখার সাপেক্ষে ও $y = (x-3)^2$ এর লেখ $x = 3$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

2. $y = x^2$ ফাংশনের ও রূপান্তরিত $y = -2x^2 + 4x - 5$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = x^2$ ফাংশনের ও রূপান্তরিত $y = -2x^2 + 4x - 5$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন

মূলতত্ত্ব ঃ $y = x^2$ একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে এবং অক্ষ y -অক্ষ। $y = x^2$ এর লেখ থেকে $y = -2x^2 + 4x - 5 = -2(x^2 - 2x + 1) - 3$ $= -2(x-1)^2 - 3$ এর লেখ অঙ্কন করা যায়।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

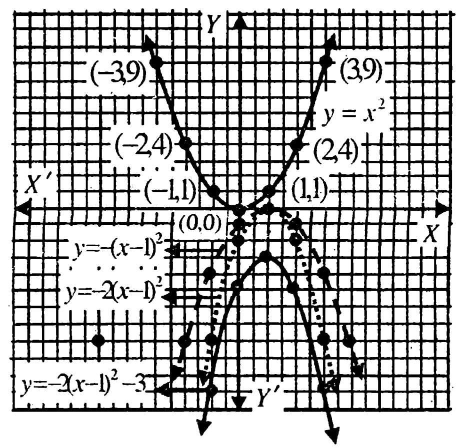
1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = x^2$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	±1	±2	±3
$f(x)$	0	1	4	9

3. x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = x^2$ এর লেখ অঙ্কন করি ।

4. x অক্ষের সাপেক্ষে $y = x^2$ এর প্রতিচ্ছবি $y = -x^2$ এর লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 2×1 বা 2 বর্গের বাহুর সমান অর্থাৎ 1 একক ডানে সরিয়ে দিয়ে $y = -(x-1)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি । এ লেখকে y অক্ষের দিকে 2 গুণ সংকুচিত করে $y = -2(x-1)^2$ এর লেখ অঙ্কন করি। সর্বশেষে এ লেখের প্রতিটি বিন্দুকে 3 একক নিচে স্থানান্তরিত করে $y = -2(x-1)^2 - 3$ এর লেখ অঙ্কন করা হলো।



বৈশিষ্ট্য ঃ (i) লেখচিত্র দুইটি পরাবৃত্ত। $y = x^2$ এর শীর্ষবিন্দু (0, 0), এবং $y = -2(x-1)^2 - 3$ এর শীর্ষবিন্দু (1, −3) ।

(ii) $y = x^2$ এর লেখ y অক্ষের সাপেক্ষে, $y = y = -2(x-1)^2 - 3$ এর লেখ $x = 1$ রেখার সাপেক্ষে সাপেক্ষে প্রতিসম।

3. একই লেখচিত্রে $y = 2x + 5$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

পরীক্ষণের নাম ঃ একই লেখচিত্রে $f(x) = y = 2x + 5$ ফাংশনের ও তার বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$ এর লেখচিত্র অঙ্কন

মূলতত্ত্ব : $f(x) = 2x + 5$ লেখের উপরস্থ বিন্দুগুলির ভুজ ও কোটির স্থান বিনিময় করে $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করা যায় অথবা $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $f(x) = 2x + 5$ এর প্রতিচ্ছবি অঙ্কন করে $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ এর লেখ পাওয়া যায়।

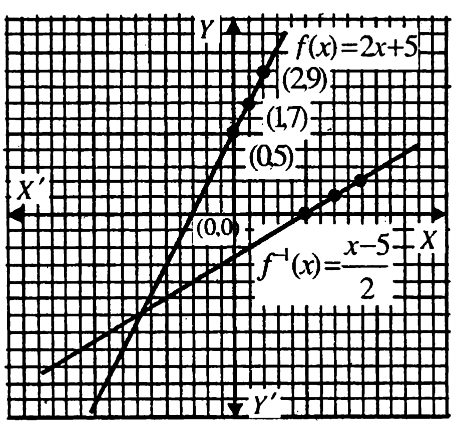
প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি।
2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = 2x + 5$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	0	1	2
y	5	7	9

3. x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = 2x + 5$ এর লেখ অঙ্কন করি।
4. একই স্কেলে (5, 0), (7, 1), (9, 2) বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ এর লেখ অঙ্কন করি।



4. $y = 5^x$ সূচক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় কর।

পরীক্ষণের নাম : $y = 5^x$ ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব : x এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য $f(x) = 5^x$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে এবং লেখের বৈশিষ্ট নির্ণয় করতে হবে।

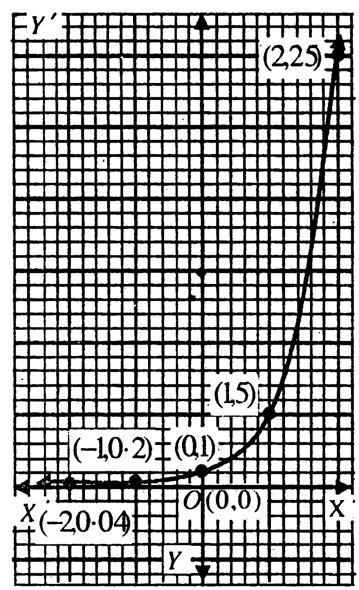
প্রয়োজনীয় উপকরণ : (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি :

1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি।
2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = 5^x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি :

x	−2	−1	0	1	2
y	0·04	0·2	1	5	25

3. x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $f(x) = 5^x$ এর লেখ অঙ্কন করি।



বৈশিষ্ট্য : (1) লেখচিত্রটি x অক্ষের নিচে আসবে না (2) x অক্ষটি লেখটির একটি অসীমতট রেখা।

(3) লেখচিত্রটি y অক্ষকে (0, 1) বিন্দুতে ছেদ করে।
(4) x অক্ষ বা y অক্ষের সাপেক্ষে লেখচিত্রটি প্রতিসম নয়।
(v) লেখচিত্রটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিদ্যমান।

5. $y = \log_{10} x$ লগারিদমিক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় ।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = \log_{10} x$ লগারিদমিক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় ।

মূলতত্ত্ব ঃ $y = \log_{10} x$ সমীকরণটি $x \leq 0$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত হয় বিধায় $x>0$ এর যেকোন বাস্তব মানের জন্য $y = \log_{10} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে এবং লেখের বৈশিষ্ট নির্ণয় করতে হবে।

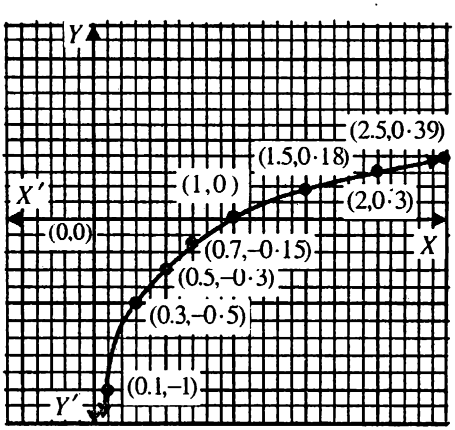
প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) পেন্সিল কম্পাস (vii) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থানাংকের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $f(x) = \log_{10} x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0.1	0.3	0.5	0·7
$\log_{10} x$	–1	–0·5	–0.3	–0.15
x	1	1·5	2	2.5
$\log_{10} x$	0	0·18	0·3	0·39



3. x - অক্ষ ও y - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = \log_{10} x$ এর লেখ অঙ্কন করি।

বৈশিষ্ট্য ঃ (i) লেখচিত্রটি x অক্ষ বা y অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম নয়।
(ii) লেখচিত্রটি ১ম চতুর্ভাগ ও ৪র্থ চতুর্ভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।
(iii) লেখচিত্রটি x অক্ষকে (1,0) বিন্দুতে ছেদ করে।
(iv) y অক্ষ লেখটির একটি অসীমতট রেখা।
(v) লেখচিত্রটি y অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিদ্যমান।

6. $y = \cos^{-1} x$ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় ।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = \cos^{-1} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়, যখন $-1 \leq x \leq 1$.

মূলতত্ত্ব: $x \in [-1,1]$ এর বিভিন্ন বাস্তব মানের জন্য $y = \cos^{-1} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে এবং লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয় করতে হবে ।

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

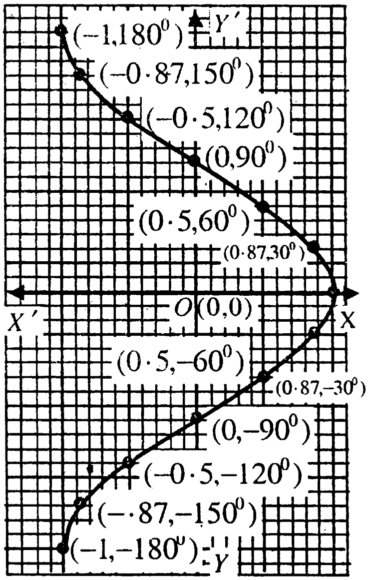
1. একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষ রেখা X′OX ও YOY′ আঁকি ।

2. নিচের তালিকায় $x \in [-1,1]$ এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = \cos^{-1} x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	–1	–0·87	–0·5	0
y	± 180°	± 150°	± 120°	± 90°
x	0·5	0·87	1	
y	± 60°	± 30°	90°	

3. x - অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 10 বাহু = 1 একক ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 10° একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিল দিয়ে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত

হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = \cos^{-1} x$ এর লেখ অঙ্কন করি।



বৈশিষ্ট্য ঃ (i) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন। (ii) লেখচিত্রটি ঢেউয়ের আকৃতি। (iii) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুগামী নয়।

7. y = | 2x − 1| পরমমান ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট্য নির্ণয়।

পরীক্ষণের নাম ঃ $y = |x|$ পরমমান ফাংশনটির লেখ অঙ্কন করে লেখের বৈশিষ্ট নির্ণয়।

মূলতত্ত্ব ঃ $y = |2x - 1|$ সমীকরণে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর মান অঋণাত্মক।

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x-1, \text{ যখন } 2x-1 \geq 0 \\ -(2x-1)x, \text{ যখন } 2x-1 < 0 \end{cases}$$

প্রয়োজনীয় উপকরণ ঃ (i) পেন্সিল (ii) স্কেল (iii) গ্রাফ পেপার (iv) ইরেজার (v) শার্পনার (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

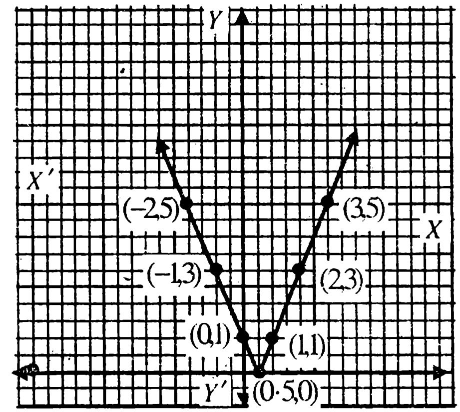
কার্যপদ্ধতি ঃ

1. একটি ছক কাগজে স্থান.. অক্ষ রেখা X'OX ও YOY' আঁকি।

2. নিচের তালিকায় x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য $y = |2x-1|$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করি ঃ

x	0	−2	−1	1	2	3	0·5
y	1	5	3	1	3	5	0

3. x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহু = 1 একক ধরে তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সরু পেন্সিলের সাহায্যে স্থাপিত বিন্দুগুলি মুক্ত হস্তে বক্রাকারে যোগ করে $y = |x|$ এর লেখ অঙ্কন করি।



বৈশিষ্ট্য ঃ (i) লেখচিত্রটি $x = \frac{1}{2}$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম। (ii) লেখচিত্রটি ১ম চতুর্ভাগ ও ২য় চতুর্ভাগে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত। (iii) লেখচিত্রটি মূলবিন্দুতে ছেদ করে না। (iv) লেখচিত্রটি y অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিদ্যমান।

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1(a) $4f(x) + 2x\, f\left(\frac{1}{x}\right) = 10x + 17$ হলে, $f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$$4\, f(x) + 2x\, f\left(\frac{1}{x}\right) = 10x + 17 \qquad \text{(i)}$$

x কে $\frac{1}{x}$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$$4\, f\left(\frac{1}{x}\right) + 2\frac{1}{x}\, f(x) = 10\frac{1}{x} + 17$$

$$\Rightarrow 4x\, f\left(\frac{1}{x}\right) + 2\, f(x) = 10 + 17x$$

$$\Rightarrow 2\, f(x) + 4x\, f\left(\frac{1}{x}\right) = 17x + 10 \cdots \qquad \text{(ii)}$$

$(i) \times 2 - (ii) \Rightarrow$

$$(8-2)\, f(x) = (20-17)x + 34 - 10$$

$$\Rightarrow 6\, f(x) = 3x + 24$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 \quad \text{(Ans.)}$$

1(b) $2f(x)+3f(-x)=x^2-x+1$ হলে, $f(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$2f(x)+3f(-x)=x^2-x+1 \quad \cdots (i)$

x কে $(-x)$ দ্বারা প্রতিস্থাপন করে পাই,

$2f(-x)+3f(x)=(-x)^2-(-x)+1$

$\Rightarrow 3f(x)+2f(-x)=x^2+x+1 \quad \cdots (ii)$

$(ii)\times 3-(i)\times 2 \Rightarrow$

$(9-4)f(x)=(3-2)x^2+(3+2)x+3-2$

$\Rightarrow 5f(x)=x^2+5x+1$

$f(x)=\frac{1}{5}(x^2+5x+1)$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ ঃ

1. $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ হলে $f(\cos\theta)$ এর মান নির্ণয় কর। **[RU 07-08; JU 09-10]**

Sol^n.: $f(\cos\theta)=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$=\tan^2\frac{\theta}{2}$

2. $f(x)=\frac{x}{1+x}$ হলে $f(2/3)+f(3/2)$ সমান– **[DU 04-05]**

Sol^n.: $f(2/3)+f(3/2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{2}\times\frac{2}{5}=1$

3. $f(a)=\ln(a)$ হলে $f(\frac{1}{a})=$ কত? **[KUET 05-06; JU 09-10]**

Sol^n.: $f(\frac{1}{a})=\ln(\frac{1}{a})=\ln(a^{-1})=-\ln(a)$

4. $g(\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ হলে $g(\frac{\pi}{4}-\theta)=?$ **[KUET 08-09]**

Sol^n.: $g(\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)$

$g(\frac{\pi}{4}-\theta)=\tan\{\frac{\pi}{4}-(\frac{\pi}{4}-\theta)\}=\tan\theta$

5. $f(x)=x^2+4$ এবং $g(x)=2x-1$ হলে $(gof)(x)=?$ **[DU 07-08, 05-06; Jt.U 05-06; JU, CU 09-10]**

Sol^n.: $(gof)(x)=g(x^2+4)$

$=2(x^2+4)-1=2x^2+7$

6. $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2$ হলে $f(g(\frac{\sqrt{\pi}}{2}))=?$ **[DU 09-10]**

Sol^n.: $f(g(\frac{\sqrt{\pi}}{2}))=f(\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

7. $f(x)=3x^3+2$, $g(x)=\sqrt[3]{\frac{x-2}{2}}$ হলে $(fog)(5)$ এর মান হবে– **[BUET 08-09]**

Sol^n.: $(fog)(5)=f(\sqrt[3]{\frac{5-2}{2}})=f(1)=3.1^3+2$

8. $f(x)=x^2+3$ হলে $f(f(-3))=?$ **[KUET 07-08]**

Sol^n.: $f(f(-3))=f((-3)^2+3)=f(12)$

$=12^2+3=147$

9. $f(x)=x^3+5$ এর বিপরীত ফাংশন **[JU 09-10]**

Sol^n.: $f(f^{-1}(x))=\{f^{-1}(x)\}^3+5$

$\Rightarrow x=\{f^{-1}(x)\}^3+5 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-5}$

10. একটি ফাংশন $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(2)$ এর মান হবে– **[BUET 06-07; JU, RU 09-10]**

Sol^n.: $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2} \therefore f^{-1}(2)=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$

11. যদি $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ এবং $f(x)=x^2$ হয় তবে $f^{-1}(4)=$ কত? **[CU 04-05; JU,Jt.U,RU 09-10]**

Sol^n.: $x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$

$f^{-1}(4)=\{-2,2\}$

12. $f(x)=\frac{5x+3}{4x-5}$ হলে $f^{-1}(x)=$? **[DU10- 11]**

Sol^n.: $f^{-1}(x)=\frac{5x+3}{4x-5}$ [সূত্র ব্যবহার করে।]

13. একটি ফাংশন $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(0)$ সমান– **[BUET 08-09]**

$Sol^n.:$ $f^{-1}(x)=\dfrac{+3x-2}{x-1}$ $\quad f^{-1}(0)=2$

14. $f(x)=\dfrac{x-3}{2x+1}$ এবং $x\neq-\dfrac{1}{2}$ হলে $f^{-1}(-2)$ এর মান– **[DU,RU 08-09]**

$Sol^n.:$ $f^{-1}(x)=\dfrac{-x-3}{2x-1}$

$$f^{-1}(-2)=\frac{-(-2)-3}{2(-2)-1}=\frac{2-3}{-4-1}=\frac{1}{5}$$

15. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$ ফাংশনের ডোমেন , রেঞ্জ এবং বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। **[IU, SU 07-08; CU 05-06, 08-09; JU 09-10]**

$Sol^n.:$ ডোমেন $=\mathbb{R}-\{2$, রেঞ্জ $=\mathbb{R}-\{\dfrac{2}{1}\}=\mathbb{R}-\{2\}$

এবং $f^{-1}(x)=\dfrac{-2x-1}{x-(-2)}=\dfrac{-2x-1}{x+2}$

16. $\log(5x^2-7)$ ফাংশনের ডোমেন হবে– **[CU 07-08]**

$Sol^n.:$ $5x^2-7>0\Rightarrow x^2-\dfrac{7}{5}>0$

$\Rightarrow (x-\sqrt{7/5})(x+\sqrt{7/5})>0$

ডোমেন $=\{x\in\mathbb{R}: x>\sqrt{7/5}$ অথবা $x<-\sqrt{7/5}\}$

17. $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ ফাংশনের ডোমেন ও বিস্তার হবে– **[CU 04-05, 06,07]**

$Sol^n.:$ ডোমেন $f=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,\infty)-\{0\}$

বিস্তার $f=\{-1,1\}$

18. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ ফাংশনটির ডোমেন কত? **[SU 05-06]**

A. (0,1) **B.** [0,1) **C.** (0,1] **D.** [0,1]

$Sol^n.:$ $f(x)\in\mathbb{R}$ iff $(1-x)x\geq 0$ but $x\neq 0$

$\Rightarrow (x-0)(x-1)\leq 0$ but $x\neq 0\Rightarrow 0<x\leq 1$

19. $f(x)=x^2-1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত ফাংশন f এর ডোমেন $[-1,1]$ হলে রেঞ্জ কত ? **[IU 04-05]**

$Sol^n.:$ $f(0)=0^2-1=-1$; যা $x\in[-1,1]$ এর জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

$f(\pm1)=(\pm1)^2-1=0$; যা $x\in[-1,1]$ এর জন্য $f(x)$ এর বৃহত্তম মান । f এর রেঞ্জ $=[-1,0]$

20. $f(x)=\sqrt{x}+1$ হলে এর ডোমেন এবং রেঞ্জ কত? **[CU '03-04]**

$Sol^n.:$ এখানে ডোমেন হল সকল অঋণাত্মক সংখ্যার সেট অর্থাৎ $[0,\infty)$ । $f(0)=\sqrt{0}+1=1$; য $x\in[0,\infty)$ এর জন্য $f(x)$ এর ক্ষুদ্রতম মান।

রেঞ্জ $f=[1,\infty)$

21. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ফাংশনের ডোমেন কত? **[CU 03-04, 08-09]**

$Sol^n.:$ $1-x^2\geq 0\Rightarrow x^2-1\leq 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+1)\leq 0\Rightarrow -1\leq x\leq 1$

ডোমেন $f=\{x\in\mathbb{R}: -1\leq x\leq 1\}$

22. $f(x)=\sqrt{x-2}$ এবং $g(x)=x^2+1$ হয় fog এর ডোমেন হবে– **[BUET 10-11]**

$Sol^n.:$ $fog=f(g(x)=f(x^2+1)$

$=\sqrt{x^2+1-2}=\sqrt{x^2-1}=\sqrt{(x-1)(x+1)}$

For Dom, $(x-1)(x+1)\geq 0\Rightarrow x\leq -1$ or, $x\geq 1$

Dom (fog) $=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

ফাংশনে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার ঃ

$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ হলে f(2/5) ÷ f(5/2) সমান–

ALPHA X ALPHA X X
[ALPHA] [)] [÷] [(] [1] [+] [ALPHA] [)] [)]

SOLVE=
[CALC] Screen এ দেখাবে x?

Press [2] [ab/c] [5] [=] মান আসে 2 / 7

Again, press [=] Screen এ দেখাবে x?

Press [5] [ab/c] [2] [=] মান আসে 5 / 7

Press 2 / 7 [÷] 5 /7 [=] Screen এ আসে 2/5. Ans. 2/5.