অধ্যায়-৩

জ্যামিতি

অনুশীলনী-৩.২

অনুশীলনীটি পড়ে যা জানতে পারবে—

১. ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলোর প্রমাণ ও প্রয়োগ।

২. ব্রক্ষগুপ্তের উপপাদ্যের প্রমাণ ও প্রয়োগ।

৩. টলেমির উপপাদ্যের প্রমাণ ও প্রয়োগ।

PRACTICE

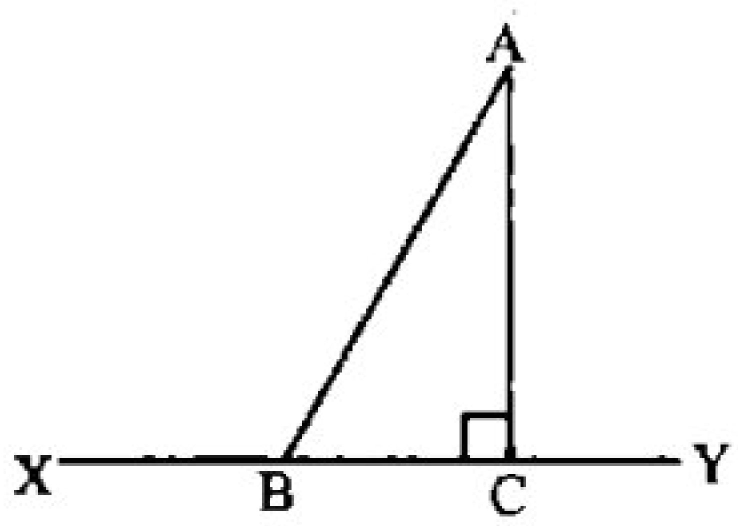
১৬টি অনুশীলনীর প্রশ্ন|

৭৫টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ■ ৩৫টি সাধারণ বহুনির্বাচনি ■ ১০টি বহুপদী সমাপ্তিসূচক ■ ৩০টি অভিন্ন তথ্যভিত্তিক

১৮টি সৃজনশীল প্রশ্ন ■ ২টি অনুশীলনী ■ ১০টি মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত ■ ৬টি প্রশ্নব্যাংক

অনুশীলনীর সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১.

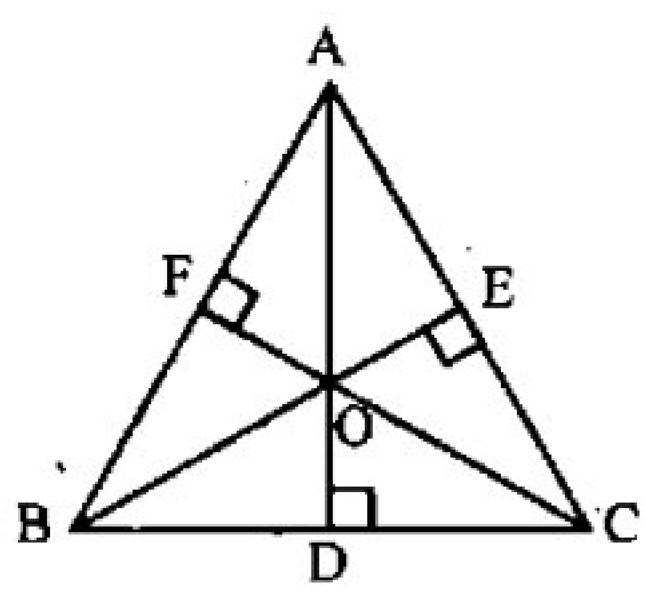


XY রেখাংশে AB এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?

ক. AB খ. BC

গ. AC ঘ. XY (খ)

২.



ওপরের চিত্রে কোনটি লম্ব বিন্দু?

ক. D খ. E

গ. F ঘ. O (ঘ)

৩. i. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদ বিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলে।

ii. ভরকেন্দ্র যেকোনো মধ্যমাকে 3 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

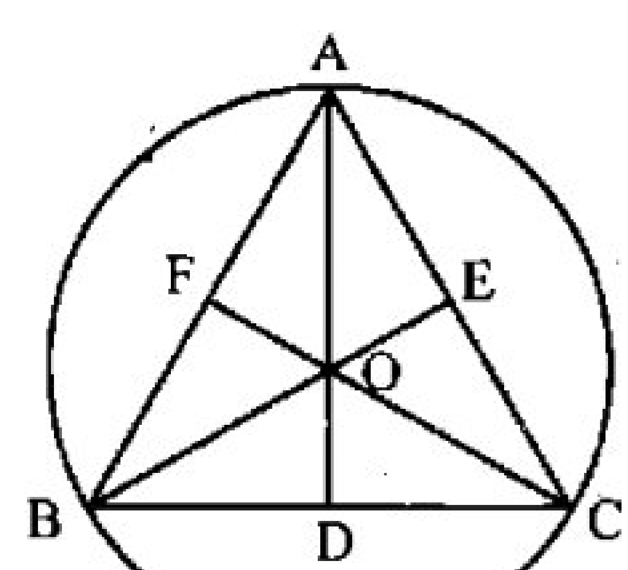
iii. সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।

নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii (গ)

ব্যাখ্যা: (ii) সঠিক নয়, কারণ ভরকেন্দ্র যেকোনো মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।



D, E, F যথাক্রমে BC, AC ও AB এর মধ্যবিন্দু হলে ওপরের চিত্রের আলোকে (৪-৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৪. **G বিন্দুর নাম কী?**

ক. লম্ব বিন্দু খ. অন্ত:কেন্দ্র

গ. ভরকেন্দ্র ঘ. পরিকেন্দ্র (গ)

৫. **ΔABC এর শীর্ষ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের নাম কী?**

ক. পরিবৃত্ত খ. অন্ত:বৃত্ত

গ. বহি:বৃত্ত ঘ. নববিন্দু বৃত্ত (ক)

৬. **ΔABC এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে?**

ক. $AB^2 + AC^2 = BC^2$

খ. $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

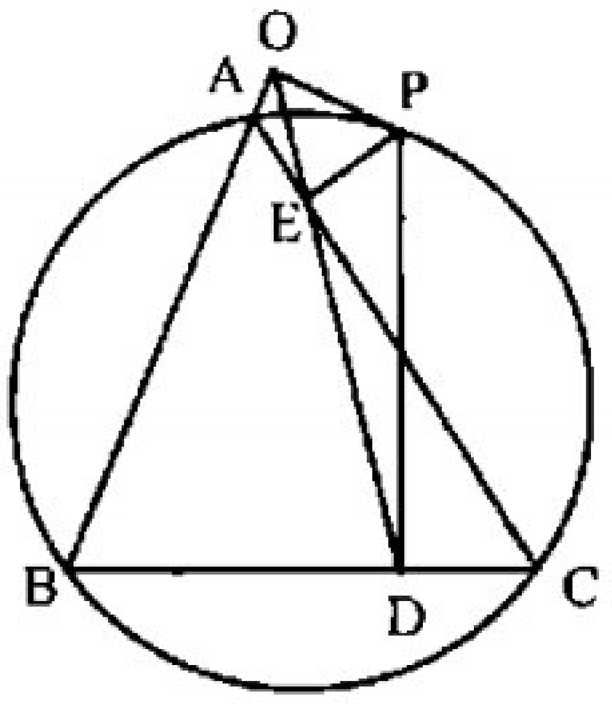
গ. $AB^2 + AC^2 = 2(AG^2 + GD^2)$

ঘ. $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + CD^2)$ (খ)

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

৭. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যেকোনো P বিন্দু থেকে BC ও CA এর উপর PD ও PE লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। যদি ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, PO রেখা AB এর উপর লম্ব। অর্থাৎ $PO \perp AB$.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, P, ΔABC এর পরিবৃত্তস্থ যেকোনো একটি বিন্দু। $PD \perp BC$ ও $PE \perp CA$। ED রেখাংশ AB এর বর্ধিতাংশকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PO \perp AB$।

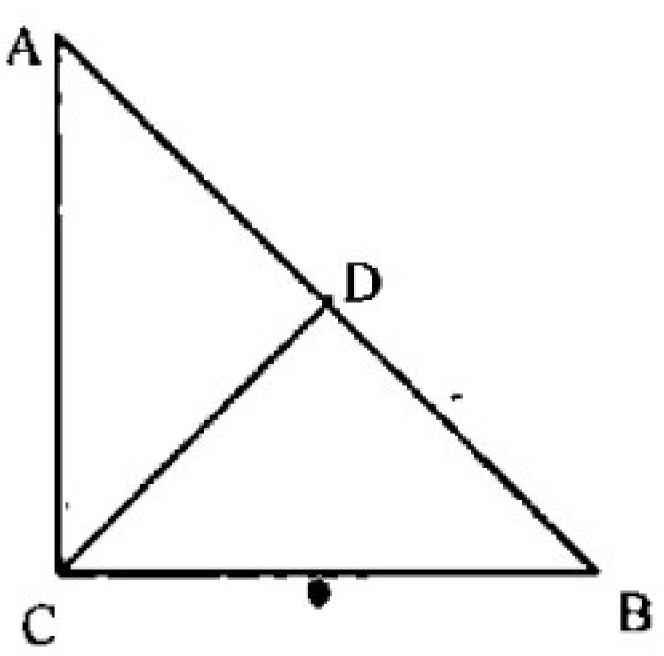
প্রমাণ: আমরা জানি, পরিবৃত্তস্থ কোনো বিন্দু হতে কোনো ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের ওপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুগুলো সমরেখ।

এখানে, $PD \perp BC$, $PE \perp AC$ এবং ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করায় D, E, O সমরেখ। সুতরাং O বিন্দু অবশ্যই P হতে AB এর ওপর লম্বের পাদবিন্দু হবে।

$\therefore PO \perp AB$ **(প্রমাণিত)**

৮. ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ। C থেকে অতিভুজের ওপর অঙ্কিত লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD.\ BD$.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর $\angle C = 90°$। CD, AB এর ওপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $CD^2 = AD.\ BD$

প্রমাণ: ΔABC-এ $\angle C = 90°$

$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90°$ .... (i)

আবার, Δ ADC-এ $\angle ADC = 90°$ [$\because CD \perp AB$]

$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90°$.............. (ii)

[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\angle ACD + \angle BCD = \angle CAD + \angle ACD$

$\therefore \angle BCD = \angle CAD$

এখন, ΔADC ও ΔBDC-এ

$\angle ADC = \angle BDC = 90°$

এবং $\angle CAD = \angle BCD$

সুতরাং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

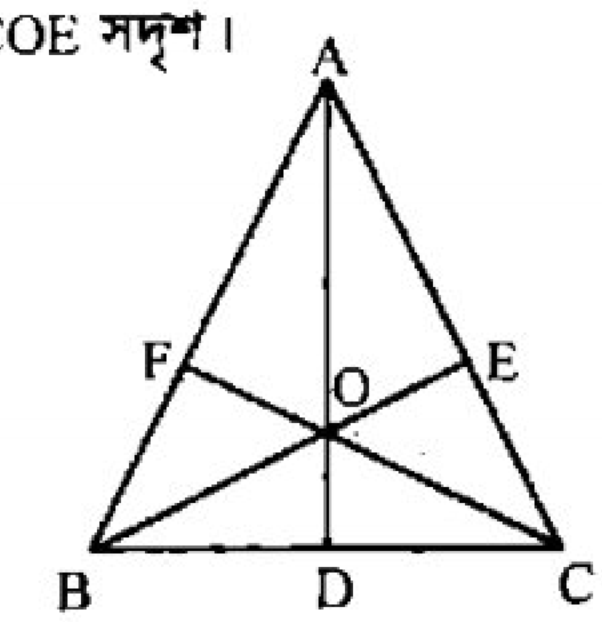
$\therefore \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$

অর্থাৎ, $CD^2 = AD.BD$ (প্রমাণিত)

৯. ΔABC এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর ওপর লম্ব AD, BE ও CF রেখাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AO.\ OD = BO.OE = CO.\ OF$.

[সংকেত: ΔBOF এবং ΔCOE সদৃশ। $\therefore BO : CO = OF : OE$]

সমাধান: ΔCOE সদৃশ।



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, Δ ABC-এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের ওপর লম্ব AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AO.\ OD = BO.OE = CO.OF$.

প্রমাণ: ΔBOF ও ΔCOE-এ

$\angle OFB = \angle OEC = 90°$ [$\because CF \perp AB, BE \perp AC$]

এবং $\angle BOF = \angle COE$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \dfrac{BO}{CO} = \dfrac{OF}{OE}$

$\therefore BO.\ OE = CO.\ OF$. .... (i)

আবার, Δ BOD ও Δ AOE-এ

$\angle ODB = \angle OEA = 90°$ [$\because AD \perp BC, BE \perp AC$]

এবং $\angle BOD = \angle AOE$. [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \dfrac{BO}{AO} = \dfrac{OD}{OE}$

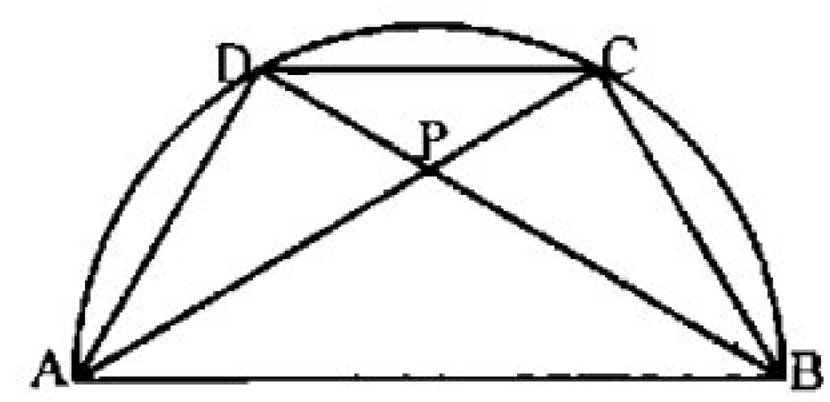
$\therefore AO.OD = BO.\ OE$ ... ... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\therefore AO.OD = BO.OE = CO.\ OF$ **(প্রমাণিত)**

১০. AB ব্যাসের ওপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুইটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.\ AP + BD.\ BP$

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, AB ব্যাসের ওপর ABCD একটি অর্ধবৃত্ত। AC ও BD জ্যাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC.\ AP + BD.\ BP$।

অঙ্কন: A, D; B, C ও C, D যোগ করি।

প্রমাণ: ΔCPD ও ΔAPB-এ

$\angle PDC = \angle PAB$ [একই চাপ BC-এর ওপর অবস্থিত]

এবং $\angle DPC = \angle APB$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$$

বা, $AP.CP = BP.DP.$

বা, $AP.CP + AP^2 = BP.DP + AP^2$

[উভয়পক্ষে AP^2 যোগ করে]

বা, $AP(CP + AP) = BP.DP + DP^2 + AD^2$

[AB ব্যাস বলে $\angle ADP = \angle ADB = 90°$;

$\therefore AP^2 = AD^2 + DP^2$]

বা, $AP.AC = DP(BP + DP) + AD^2$

বা, $AP.AC = DP.BD + AB^2 - BD^2$

[$\angle ADB = 90°$ বলে $\triangle ABD$ -এ $AB^2 = AD^2 + BD^2$

বা $AD^2 = AB^2 - BD^2$]

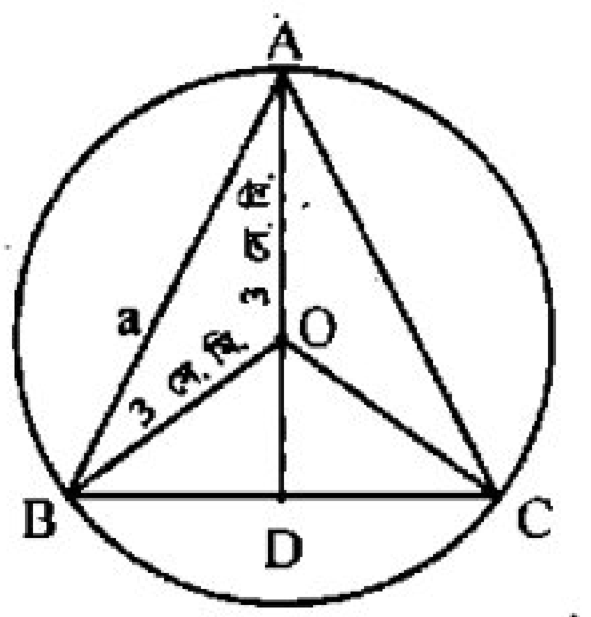
বা, $AP.AC = AB^2 - BD(BD - DP)$

বা, $AP.AC = AB^2 - BD.BP$

$\therefore$ $AB^2 = AP.AC + BD.BP$ **(প্রমাণিত)**

১১. কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3.0 সে. মি. হলে, ঐ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O, ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র। তাহলে এর ব্যাসার্ধ, OA = OB = OC = 3.0 সে. মি. (দেওয়া আছে)। বাহুর দৈর্ঘ্য AB = BC = CA = a (ধরি) নির্ণয় করতে হবে।

বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়: $AD \perp BC$ আঁকি যা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। $AD \perp BC$ হওয়ায় $\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$ উভয়ে সমকোণী ত্রিভুজ।

ABD ও ACD সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ AB = অতিভুজ AC [$\because$ ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

এবং AD সাধারণ বাহু।

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$

$\therefore$ BD = CD অর্থাৎ AD একটি মধ্যমা।

এখন, যেহেতু D, BC এর মধ্যবিন্দু এবং $AD \perp BC$.

সেহেতু AD অবশ্যই কেন্দ্র O দিয়ে যাবে।

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, B ও C শীর্ষ হতে অঙ্কিত মধ্যমা দুইটিও O বিন্দু দিয়ে যায়। সুতরাং O, $\triangle ABC$ এর ভরকেন্দ্র।

$\therefore AO : OD = 2 : 1$

$$\frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$$

বা, $OD = \frac{1}{2} AO$ বা, $OD = \frac{1}{2} \times 3.0$ সে.মি. [$\because AO = 3.0$ সে.মি.]

$OD = \frac{3}{2}$ সে.মি.

এবং $BD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a$ সে.মি.

আবার, OBD সমকোণী ত্রিভুজে,

$OB^2 = OD^2 + BD^2$

বা, $(3.0)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

বা, $9 = \frac{9}{4} + \frac{a^2}{4}$

বা, $\frac{a^2 + 9}{4} = 9$

বা, $a^2 + 9 = 36$

বা, $a^2 = 27$

বা, $a = \sqrt{27}$

$\therefore a = 3\sqrt{3}$ সে.মি.

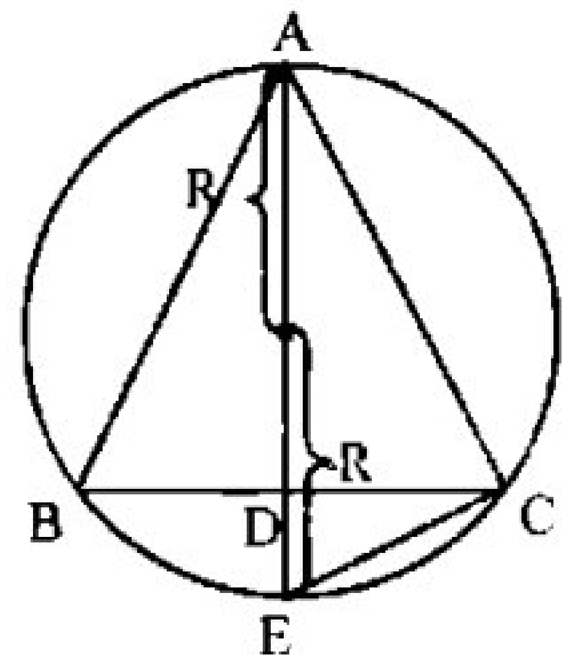
$\therefore AB = BC = CA = 3\sqrt{3}$ সে.মি.

অর্থাৎ, প্রদত্ত ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য $3\sqrt{3}$ সে.মি.।

Ans. $3\sqrt{3}$ সে.মি.।

১২. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2R.AD$.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, সমদ্বিবাহু $\triangle ABC$-এ AB = AC। A থেকে BC-এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = 2R.AD$.

অঙ্কন: AD-কে বর্ধিত করি, যেন তা পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।

প্রমাণ: $\triangle ADC$ ও $\triangle ACE$-এ,

$\angle ADC = \angle ACE$

[$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ACE = 90°$ এবং AD, BC এর ওপর লম্ব বলে $\angle ADC = 90°$]

$\angle EAC$ সাধারণ কোণ।

এবং অবশিষ্ট $\angle ACD$ = অবশিষ্ট $\angle AEC$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী তথা সদৃশ।

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AE}$$

[$\because$ সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

বা, $AC^2 = AE.AD$

$\therefore$ $AB^2 = AE.AD$ [$\because AB = AC$] ....(i)

সমকোণী ত্রিভুজ $\triangle ABD$ ও $\triangle ACD$ এর মধ্যে

অতিভুজ AB = অতিভুজ AC [দেওয়া আছে]

এবং AD সাধারণ বাহু।

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$

$\therefore BD = CD$

অর্থাৎ $AD \perp BC$ এবং AD, BC এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ AD, বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়।

[কেন্দ্র থেকে জ্যায়ের ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

$\therefore$ AE, $\triangle ABC$ -এর পরিব্যাস

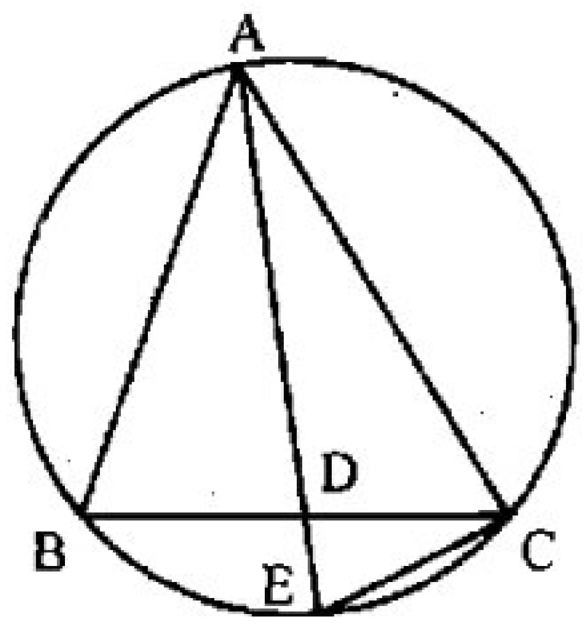
AE = 2R [$\because$ R, $\triangle ABC$-এর পরিব্যাসার্ধ]

তাহলে (i) হতে পাই,

অর্থাৎ, $AB^2 = 2R.AD$ **(প্রমাণিত)**

১৩. ABC ত্রিভুজের $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে এবং ΔABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, $AD^2 = AB.AC - BD.DC$.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাংশ BC কে D বিন্দুতে এবং ABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD^2 = AB.AC - BD.DC$.

অঙ্কন: C, E যোগ করি।

প্রমাণ: ΔABD ও ΔACE- এ

$\angle BAD = \angle CAE$ [$\because$ AD, $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

এবং $\angle ABD = \angle AEC$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ADB$ = অবশিষ্ট $\angle ACE$ [$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE}$

[$\because$ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

অর্থাৎ, $AB.AC = AD.AE$ .... (i)

আবার, ΔABD ও ΔCDE- এ

$\angle ABD = \angle CED$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

এবং $\angle ADB = \angle CDE$ [$\because$ বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAD$ = অবশিষ্ট $\angle DCE$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\dfrac{BD}{DE} = \dfrac{AD}{DC}$

[$\because$ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

অর্থাৎ, $AD.DE = BD.DC$ .... (ii)

এখন, সমীকরণ (i) হতে পাই,

$AB.AC = AD.AE$
$= AD(AD + DE)$ [$\because AE = AD + DE$]
$= AD.AD + AD.DE$
$= AD^2 + AD.DE$

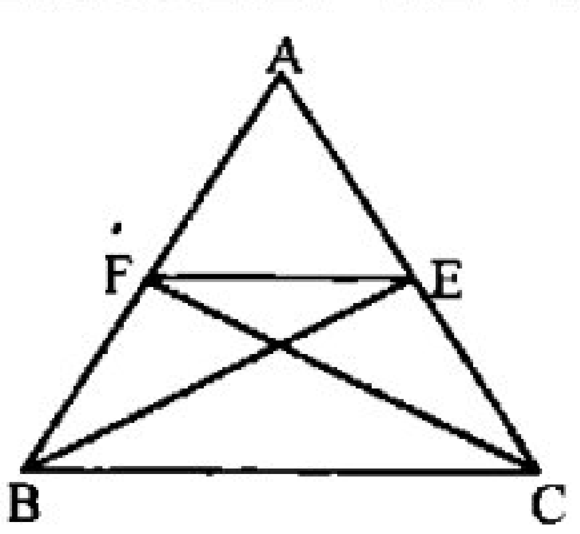
বা, $AD^2 = AB.AC - AD.DE$

$\therefore AD^2 = AB.AC - BD.DC$ [সমীকরণ (ii) হতে মান বসিয়ে]

অর্থাৎ, $AD^2 = AB.AC - BD.DC$ **(দেখানো হলো)**

১৪. ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর ওপর যথাক্রমে BE ও CF লম্ব। দেখাও যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এ $BE \perp AC$ এবং $CF \perp AB$. E, F যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$.

প্রমাণ: $\angle BEC = 90° = \angle BFC$ [$\because BE \perp AC, CF \perp AB$]

$\therefore$ BC কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তটি E ও F বিন্দু দিয়ে যাবে।

কারণ, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

$\therefore$ BCEF একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

CE বাহুকে বর্ধিত করায় উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ $\angle AEF$.

$\therefore \angle AEF = \angle ABC$ [বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান।]

অনুরূপে, $\angle AFE = \angle ACB$ [একই কারণে]

ΔABC ও ΔAEF এর মধ্যে

$\angle ABC = \angle AEF, \angle ACB = \angle AFE$.

এবং $\angle A$ সাধারণ।

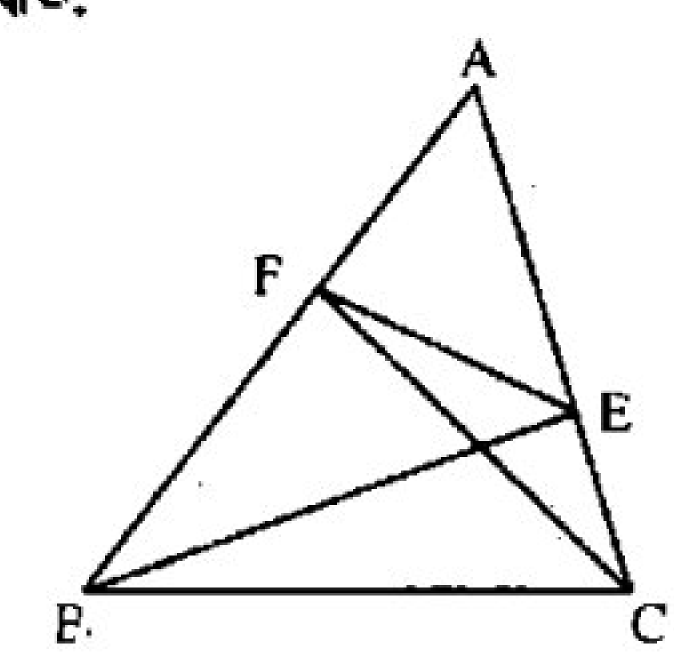
$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী তথা এরা সদৃশ।

অধিকন্তু AB ও AE তাদের অনুরূপ বাহু।

$\therefore \dfrac{\Delta ABC}{\Delta AEF} = \dfrac{AB^2}{AE^2}$

অর্থাৎ $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$. **(দেখানো হলো)**

বিকল্প পদ্ধতি:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এ $BE \perp AC$ এবং $CF \perp AB$. E, F যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$.

প্রমাণ: $\angle BEC = \angle BFC$ = 1 সমকোণ [$\because BE \perp AC$ এবং $CF \perp AB$] যেহেতু কোণ দুইটি BC এর একই পাশে অবস্থিত।

$\therefore$ B, C, E, F বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

$\therefore$ BCEF চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

$\therefore \angle AFE = \angle BCE$ [বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থকোণ বিপরীত অন্তঃস্থকোণের সমান]

অর্থাৎ $\angle AFE = \angle ACB$

অনুরূপভাবে, $\angle AEF = \angle ABC$

এখন, ΔABC ও ΔAEF -এ

$\angle ABC = \angle AEF$. $\angle ACB = \angle AFE$ এবং $\angle A$ সাধারণ।

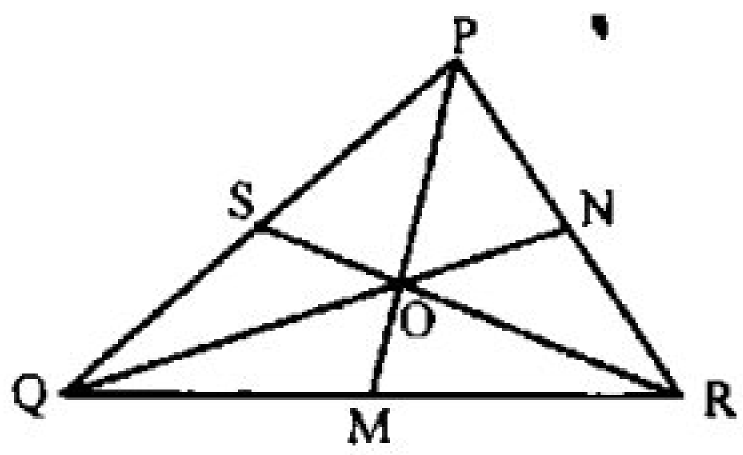
$\therefore \Delta ABC$ ও ΔAEF সদৃশ।

$\therefore \dfrac{\Delta ABC}{\Delta AEF} = \dfrac{AB^2}{AE^2}$ [দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত, যেকোনো দুইটি অনুরূপ বাহুর বর্গের অনুপাতের সমান।]

অর্থাৎ $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$ **(দেখানো হলো)**

অনুশীলনীর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

১৫. ΔPQR-এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।



ক. O বিন্দুটির নাম কী? O বিন্দু PM কে কী অনুপাতে বিভক্ত করে?

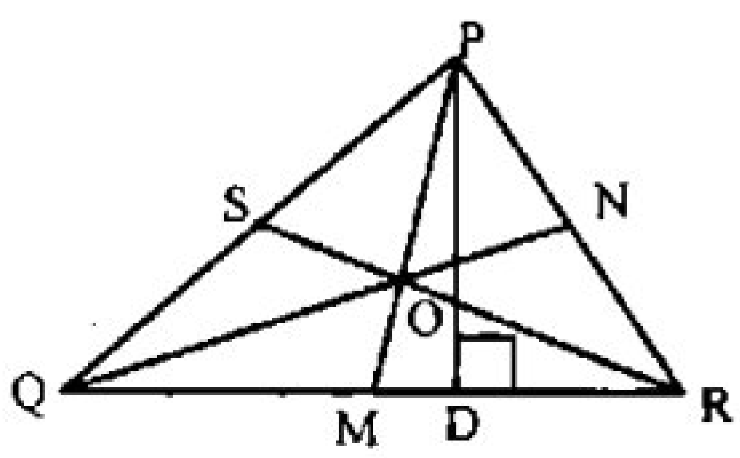
খ. ΔPQR হতে $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত কর।

গ. দেখাও যে, ΔPQR-এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ।

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক O বিন্দুর নাম ভরকেন্দ্র।
O বিন্দু PM কে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

খ ΔPQR-এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রায় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। QR বাহুর উপর PD লম্ব আঁকি।



এখন ΔPQM-এ $\angle PMQ$ স্থূলকোণ

$\therefore PQ^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.DM$ .... (i)

[স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি হতে]

আবার, ΔPRM--এ $\angle PMR$ সূক্ষ্মকোণ

$\therefore PR^2 = PM^2 + RM^2 - 2RM.DM$ .... (ii)

[সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি হতে]

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.DM + PM^2 + RM^2 - 2RM.DM$

$= 2PM^2 + 2QM^2 + 2QM.DM - 2.QM.DM$ [মধ্যমা বলে RM = QM]

$= 2(PM^2 + QM^2)$

সুতরাং $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত হলো।

গ 'খ' হতে পাই,

$PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $PQ^2 + QR^2 = 2(QN^2 + RN^2)$ .... (ii)

এবং $QR^2 + PR^2 = 2(RS^2 + QS^2)$ .... (iii)

এখন সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2PQ^2 + 2QR^2 + 2PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2 + 2QN^2 + 2RN^2 + 2RS^2 + 2QS^2$

বা, $2(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 2(PM^2 + QN^2 + RS^2) + 2(QM^2 + RN^2 + QS^2)$

বা, $4(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + 4(QM^2 + RN^2 + QS^2)$

[উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

$4(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + (2QM)^2 + (2RN)^2 + (2QS)^2$

বা, $4(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2) + QR^2 + PR^2 + PQ^2$

[$\because$ M, N, S যথাক্রমে QR, RP এবং PQ এর মধ্যবিন্দু বলে, 2QM = QR, 2RN = PR এবং 2QS = PQ]

বা, $3(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 4(PM^2 + QN^2 + RS^2)$ ...... (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সম্পাত বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \frac{PO}{OM} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{OM}{PO} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{OM + PO}{PO} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{PM}{PO} = \frac{3}{2}$

বা, $2PM = 3PO$

বা, $4PM^2 = 9PO^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপভাবে $4QN^2 = 9QO^2$

এবং $4RS^2 = 9RO^2$

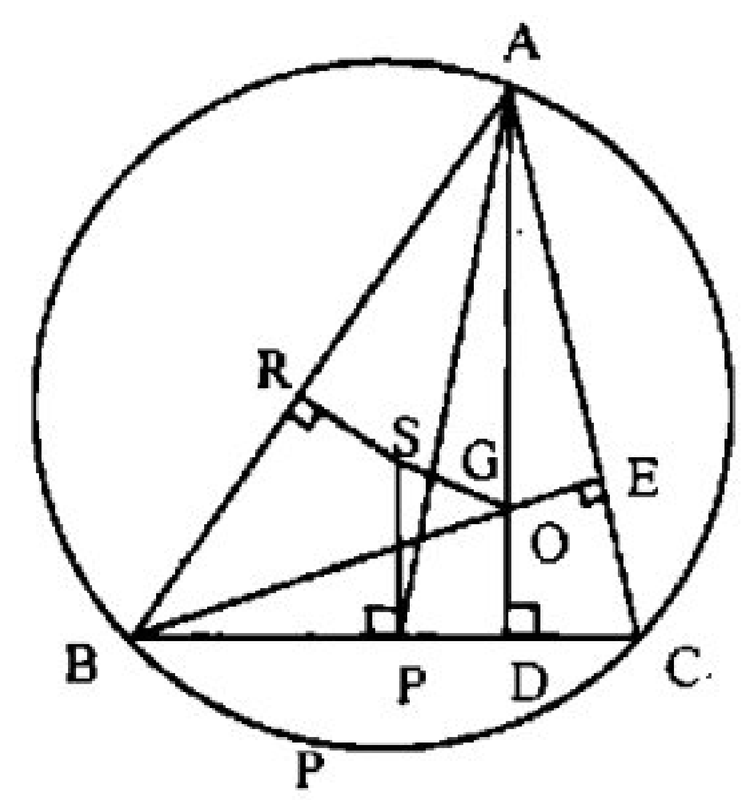
সুতরাং (iv) নং সমীকরণ থেকে পাই

$3(PQ^2 + QR^2 + PR^2) = 9PO^2 + 9QO^2 + 9RO^2$

$\therefore PQ^2 + QR^2 + PR^2 = 3(PO^2 + QO^2 + RO^2)$ [3 দ্বারা ভাগ করে]

(দেখানো হলো)

১৬.



ওপরের চিত্রে S, O যথাক্রমে পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, BC = a, AC = b এবং AB = c [সরকারী জুবিলী উচ্চ বিদ্যালয়, সুনামগঞ্জ]

ক. OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত।

গ. $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে a.CD = b.CE সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত কর।

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের লম্ব বিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ। ΔABC এর লম্ব বিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্ব OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP.

$\therefore OA = 2SP$ ...... (i)

ইহাই OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক।

খ চিত্রানুসারে, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S। A, P যোগ করি, তাহলে AP, ΔABC এর একটি মধ্যমা। S, O যোগ করি। মনে করি, SO রেখাংশ AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।

'ক' থেকে প্রাপ্ত (i) নং সমীকরণ থেকে $OA = 2SP$.
এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর ওপর লম্ব সেহেতু $AD \parallel SP$। এখন $AD \parallel SP$ এবং AP এদের ছেদক।
$\therefore \angle PAD = \angle APS$ [একান্তর কোণ]
অর্থাৎ $\angle OAG = \angle SPG$.
এখন, ΔAGO এবং ΔPGS এর মধ্যে
$\angle AGO = \angle PGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]
$\angle OAG = \angle SPG$ [একান্তর কোণ]
$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AOG$ = অবশিষ্ট $\angle PSG$.
$\therefore \Delta AGO$ এবং ΔPGS সদৃশকোণী।
সুতরাং $\frac{AG}{GP} = \frac{OA}{SP}$
বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2SP}{SP}$ [(i) নং দ্বারা]
বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2}{1}$
$\therefore AG : GP = 2 : 1$
অর্থাৎ G বিন্দু AP মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।
$\therefore$ G বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র।

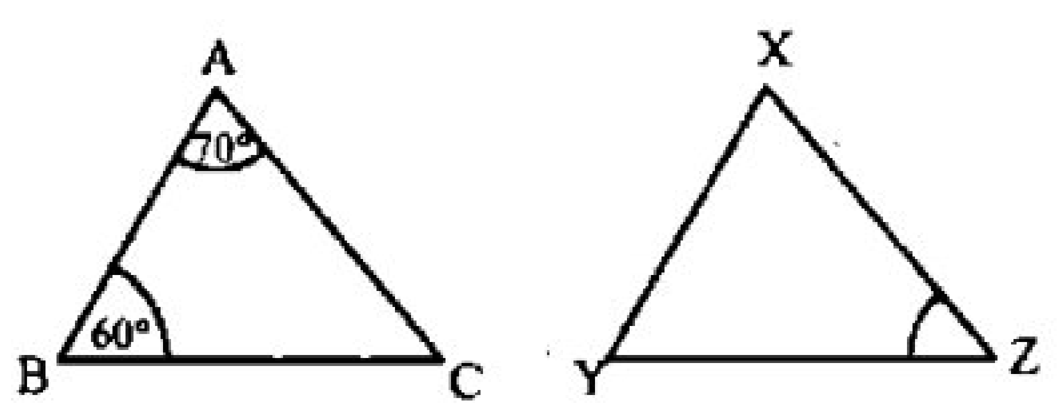
অর্থাৎ S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। **(দেখানো হলো)**

গ আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অংকিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অংকিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।
এখন $AD \perp BC$ হওয়ায় ΔABC এর $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ।
[$\therefore \angle ACB <$ সমকোণ $\angle ADC$]
এবং CD, BC বাহুতে AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ বলে।
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ .... (i)
আবার, CE, AC বাহুতে BC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ।
$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$
(i) নং এবং (i) নং সমীকরণ থেকে পাই,
$AC^2 + BC^2 - 2BC.CD = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$
বা, $-2BC.CD = -2AC.CE$
[উভয় পক্ষ হতে $AC^2 + BC^2$ বিয়োগ করে]
বা, $BC.CD = AC.CE$ [উভয় পক্ষকে (– 2) দ্বারা ভাগ করে]
$\therefore a.CD = b.CE$. সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত হলো।

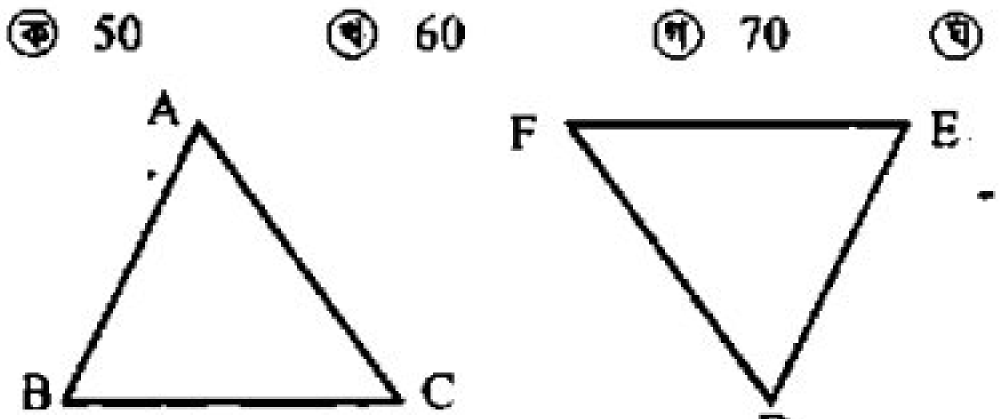
মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

★★★ ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্য | Text পৃষ্ঠা-৭২

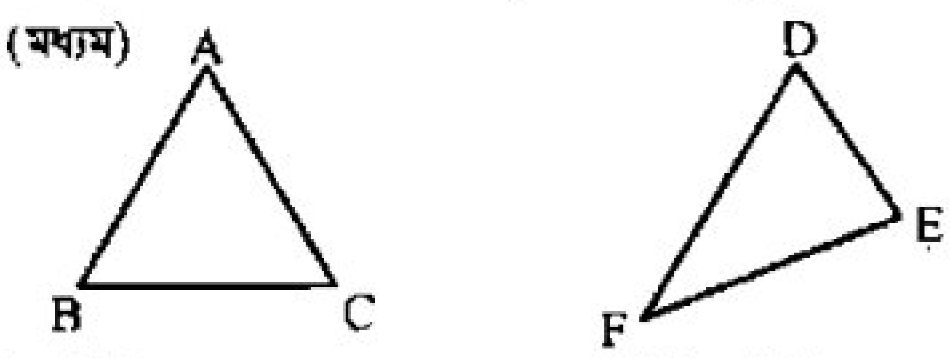
- ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ।
- নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান।
- ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলা হয়। ভরকেন্দ্র প্রত্যেক মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।
- ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র বলা হয়। এই বিন্দু ত্রিভুজে অন্তর্লিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।
- ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলা হয়। এই বিন্দু ত্রিভুজে পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।
- ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় হতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের লম্বকেন্দ্র বা লম্ববিন্দু বলা হয়। লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় সংযোজন করে উৎপন্ন ত্রিভুজকে মূল ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ (Pedal triangle) বলা হয়।

১.


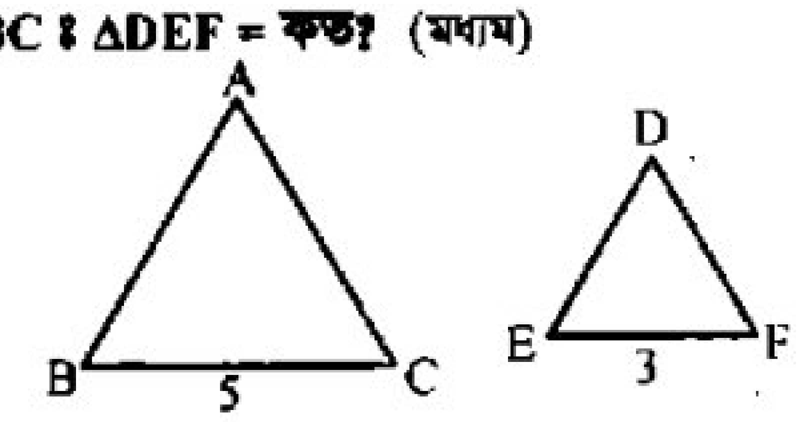
$\angle A = 70°$, $\angle B = 60°$ এবং ΔABC ও ΔXYZ পরস্পর সদৃশ হলে, $\angle Z$ = কত ডিগ্রি? (মধ্যম)
ক 50 খ 60 গ 70 ঘ 80 — ক

২.


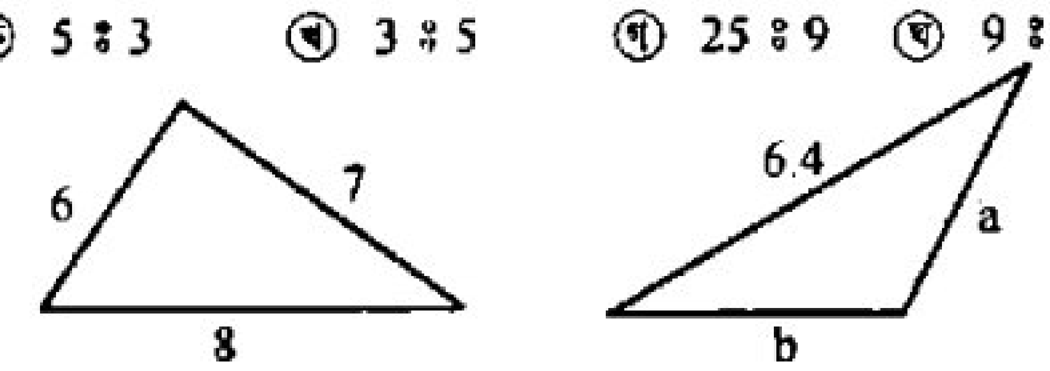
ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী হলে নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ক $AB = DE$ খ $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$
গ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ ঘ $\frac{BC}{AC} = \frac{DF}{EF}$ — গ

৩. নিচের চিত্রে ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী ত্রিভুজ। নিচের কোনটি সঠিক (মধ্যম)


ক $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{DF}$ খ $\frac{AC}{AB} = \frac{EF}{DE}$
গ $\frac{BC}{AC} = \frac{DF}{EF}$ ঘ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ — ঘ

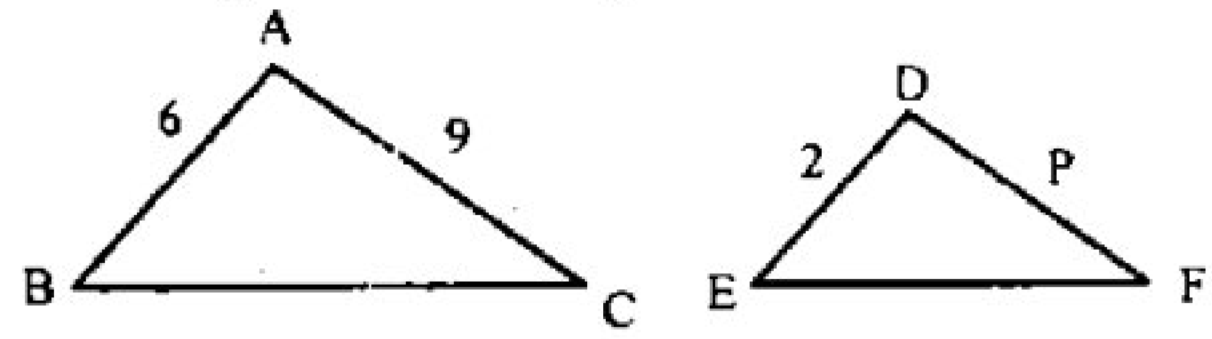
৪. নিচের চিত্রে ΔABC ও ΔDEF সদৃশ হলে, $\Delta ABC : \Delta DEF$ = কত? (মধ্যম)


ক 5 : 3 খ 3 : 5 গ 25 : 9 ঘ 9 : 25 — গ

৫.


উপরের ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হলে a ও b এর মান কত? (মধ্যম)
ক 5.0, 4.5 খ 5.6, 4.8
গ 5.8, 4.6 ঘ 5.5, 4.4 — খ

ব্যাখ্যা: $a = \frac{6.4}{8} \times 7 = 5.6$, $b = \frac{6.4}{8} \times 6 = 4.8$

৬.


উপরের চিত্রে, ΔABC ও ΔDEF সদৃশ হলে P এর মান কত? (মধ্যম)
ক 2 খ 3 গ 4 ঘ 5 — খ