

ত্রিকোণমিতি

অনুশীলনী-৮.৩

অনুশীলনীটি পড়ে যা জানতে পারবে—

১. ঋণাত্মক কোণ $(-\theta)$ এর অনুপাতসমূহ নির্ণয়।
২. বিভিন্ন প্রকার কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়।
৩. পূর্ণ সংখ্যা $n(n \leq 4)$ এর জন্য $(n \cdot \frac{\pi}{2} \pm \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় ও প্রয়োগ।
৪. সহজ ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান নির্ণয়।



১৫টি অনুশীলনীর প্রশ্ন।

৭৬টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ■ ৪২টি সাধারণ বহুনির্বাচনি ■ ১৩টি বহুপদী সমান্তরীক ■ ২১টি অভিন্ন তথ্যভিত্তিক
২৮টি সৃজনশীল প্রশ্ন ■ ২টি অনুশীলনী ■ ২টি শ্রেণির কাজ ■ ১৯টি মাস্টার ট্রেনার প্রশ্ন ■ ৫টি প্রশ্নব্যাংক



অনুশীলনীর সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে $\sin 2A$ এর মান কত?

- ক. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ. $\frac{1}{2}$
গ. ১ ঘ. $\sqrt{2}$

২. ব্যাখ্যা: $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

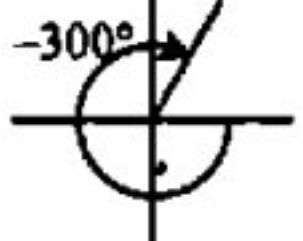
$$\sin A = \sin 45^\circ \therefore A = 45^\circ$$

$$\text{এখন, } \sin 2A = \sin (2 \times 45^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

৩. -300° কোণটি কোল চতুর্ভাগে থাকবে?

- ক. প্রথম খ. দ্বিতীয়
গ. তৃতীয় ঘ. চতুর্থ

৪. ব্যাখ্যা: ঋণাত্মক কোণ ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরবে এবং ধনাত্মক কোণ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরবে।



৫. $\sin \theta + \cos \theta = 1$ হলে θ এর মান হবে—

- i. 0°
ii. 30°
iii. 90°

নিচের কোনটি সঠিক?

- ক. i ও ii খ. i ও iii
গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

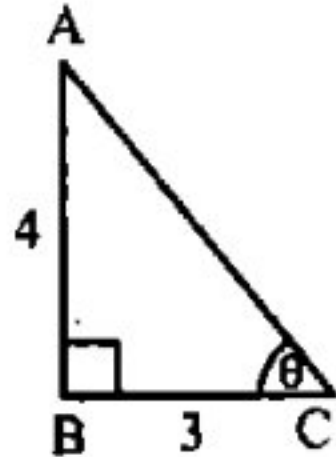
৬. ব্যাখ্যা: (i) 0° দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় $\therefore \theta = 0^\circ$

(ii) 30° দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

(iii) 90° দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় $\therefore \theta = 90^\circ$

৭. পাশের চিত্র অনুসারে

- i. $\tan \theta = \frac{4}{3}$
ii. $\sin \theta = \frac{5}{3}$
iii. $\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$



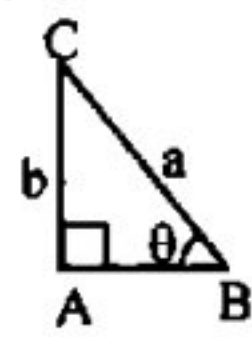
নিচের কোনটি সঠিক?

- ক. i ও ii খ. i ও iii
গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

৮. ব্যাখ্যা: এখানে, লম্ব ৪ একক, ভূমি ৩ একক এবং অতিভুজ $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ একক

- i. সঠিক, কারণ $\tan \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{4}{3}$
ii. সঠিক নয়, কারণ $\sin \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{4}{5}$
iii. সঠিক, কারণ $\cos^2 \theta = \frac{\text{ভূমি}^2}{\text{অতিভুজ}^2} = \frac{9}{25}$

নিচের চিত্রের আলোকে ৫ ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৫. $\sin B + \cos C =$ কত?

- ক. $\frac{2b}{a}$ খ. $\frac{2a}{b}$
গ. $\frac{a^2 + b^2}{ab}$ ঘ. $\frac{ab}{a^2 + b^2}$

৬. ব্যাখ্যা: $\sin B + \cos C = \frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC} = \frac{b}{a} + \frac{b}{a} = \frac{2b}{a}$

৭. $\tan B$ এর মান কোনটি?

- ক. $\frac{a}{a^2 - b^2}$ খ. $\frac{b}{a^2 - b^2}$
গ. $\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ ঘ. $\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

৮. ব্যাখ্যা: $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

$$[\because AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{a^2 - b^2}]$$

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

৭. মান নির্ণয় কর:

(i) $\sin 7\pi$

সমাধান: $\sin 7\pi = \sin \left(14 \cdot \frac{\pi}{2} + 0\right)$ এখানে, $n = 14$ জোড় সংখ্যা। তাই \sin অপরিবর্তিত থাকবে এবং কোণটি তৃতীয় চতুর্ভাগে থাকে ফলে \sin এর চিহ্ন হবে ঋণাত্মক।

$$\therefore \sin \left(14 \cdot \frac{\pi}{2} + 0\right) = -\sin 0 = 0$$

\therefore নির্ণেয় মান = 0

(ii) $\cos \frac{11\pi}{2}$

$$\text{সমাধান: } \cos 11 \cdot \frac{\pi}{2} = \cos \left(11 \cdot \frac{\pi}{2} + 0\right)$$

এখানে, $n = 11$ বিজোড় সংখ্যা। তাই \cos পরিবর্তিত হয়ে \sin হবে। এবং কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকে ফলে \cos এর চিহ্ন হবে ধনাত্মক।

$$\therefore \cos \frac{11\pi}{2} = \cos \left(11 \cdot \frac{\pi}{2} + 0\right) = \sin 0 = 0$$

\therefore নির্ণেয় মান = 0

(iii) $\cot 11\pi$

সমাধান: $\cot 11\pi$ এখানে, $n = 22$ জোড় সংখ্যা। তাই \cot অপরিবর্তিত থাকবে। এবং কোণটি তৃতীয় চতুর্ভাগে থাকে ফলে \cot এর চিহ্ন ধনাত্মক হবে।

$$\cot 11\pi = \cot \left(22 \cdot \frac{\pi}{2} + 0\right) = \cot 0 = \text{অসংজ্ঞায়িত।}$$

(iv) $\tan \left(-\frac{23\pi}{6}\right)$

$$\text{সমাধান: } -\tan \frac{23\pi}{6} \quad [\because \tan(-\theta) = -\tan\theta]$$

$$= -\tan \left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\tan \left(8 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

এখানে, $n = 8$ জোড় সংখ্যা, তাই \tan অপরিবর্তিত থাকবে এবং কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। তাই \tan ঋণাত্মক।

$$= \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় মান} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(v) $\operatorname{cosec} \frac{19\pi}{3}$

$$\text{সমাধান: } \operatorname{cosec} \frac{19\pi}{3} = \operatorname{cosec} \left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \operatorname{cosec} \left(12 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

এখানে, $n = 12$, জোড় সংখ্যা, অতএব cosec অপরিবর্তিত থাকবে এবং কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করছে বলে cosec এর চিহ্ন ধনাত্মক হবে।

$$\therefore \operatorname{cosec} \frac{19\pi}{3} = \operatorname{cosec} \left(12 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \quad [\because \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}]$$

$$\text{উত্তর: } \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(vi) $\sec \left(-\frac{25\pi}{2}\right)$

$$\text{সমাধান: } \sec \left(\frac{25\pi}{2}\right) = \sec \left(\frac{25\pi}{2}\right) \quad [\because \sec(-\theta) = \sec\theta]$$

$$= \sec \left(12\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sec \left(24 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

এখানে, $n = 24$ জোড় সংখ্যা এবং কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$$\therefore \sec \left(-\frac{25\pi}{2}\right) = \sec \frac{\pi}{2} = \text{অসংজ্ঞায়িত।}$$

(vii) $\sin \frac{31\pi}{6}$

$$\text{সমাধান: } \sin \frac{31\pi}{6} = \sin \left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin \left(10 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

এখানে $n = 10$ জোড় সংখ্যা। তাই \sin অপরিবর্তিত থাকবে এবং কোণটির অবস্থান তৃতীয়-চতুর্ভাগে ফলে \sin এর চিহ্ন ঋণাত্মক হবে।

$$= -\sin \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \sin \left(10 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় মান} = -\frac{1}{2}$$

(viii) $\cos \left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

$$\text{সমাধান: } \cos \frac{25\pi}{6} \quad [\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$$

$$= \cos \left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos \left(8 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

[$n = 8$ জোড় সংখ্যা, তাই \cos অপরিবর্তিত থাকবে এবং $\left(8 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ প্রথম চতুর্ভাগে থাকে বলে \cos এর চিহ্ন হবে ধনাত্মক।

$$= \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \cos \left(8 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় মান} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

৮. প্রমাণ কর যে,

$$(i) \cos \frac{17\pi}{10} + \cos \frac{13\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{10} = 0$$

$$\text{সমাধান: বামপক্ষ} = \cos \frac{17\pi}{10} + \cos \frac{13\pi}{10} + \cos \frac{9\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{10}$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos\left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right) + \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{10}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) + \cos\frac{\pi}{10} \\
 &= \cos\frac{3\pi}{10} - \cos\frac{3\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10} \\
 &= 0 \\
 &= \text{ডানপক্ষ}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos\frac{17\pi}{10} + \cos\frac{13\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10} = 0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(ii) \tan\frac{\pi}{12} \tan\frac{5\pi}{12} \tan\frac{7\pi}{12} \tan\frac{11\pi}{12} = 1$$

সমাধান: বামপক্ষ

$$\begin{aligned}
 &= \tan\frac{\pi}{12} \tan\frac{5\pi}{12} \tan\frac{7\pi}{12} \tan\frac{11\pi}{12} \\
 &= \tan 15^\circ \tan 75^\circ \tan 105^\circ \tan 165^\circ \\
 &= \tan 15^\circ \tan (90^\circ - 15^\circ) \tan (90^\circ + 15^\circ) \tan (180^\circ - 15^\circ) \\
 &= \tan 15^\circ \cot 15^\circ (-\cot 15^\circ) (-\tan 15^\circ) \\
 &= \tan^2 15^\circ \cot^2 15^\circ = \tan^2 15^\circ \times \frac{1}{\tan^2 15^\circ} = 1 \text{ ডানপক্ষ}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \tan\frac{\pi}{12} \tan\frac{5\pi}{12} \tan\frac{7\pi}{12} \tan\frac{11\pi}{12} = 1 \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(iii) \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14} = 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{সমাধান: বামপক্ষ} &= \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14} \\
 &= \sin^2\frac{\pi}{7} + \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 \\
 &= \sin^2\frac{\pi}{7} + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(-\sin\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 \\
 &= \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} \\
 &= 2\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}\right) = 2 = \text{ডানপক্ষ}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14} = 2 \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(iv) \sin\frac{7\pi}{3} \cos\frac{13\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{3} \sin\frac{11\pi}{6} = 1$$

সমাধান:

$$\begin{aligned}
 \text{বামপক্ষ} &= \sin\frac{7\pi}{3} \cos\frac{13\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{3} \sin\frac{11\pi}{6} \\
 &= \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} \cdot \left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{6} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\
 &= \text{ডানপক্ষ}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin\frac{7\pi}{3} \cos\frac{13\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{3} \sin\frac{11\pi}{6} = 1 \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(v) \sin\frac{13\pi}{3} \cos\frac{13\pi}{6} - \sin\frac{11\pi}{6} \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 1$$

$$\text{সমাধান: বামপক্ষ} = \sin\frac{13\pi}{3} \cos\frac{13\pi}{6} - \sin\frac{11\pi}{6} \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\
 &\quad [\because \cos(-\theta) = \cos\theta]
 \end{aligned}$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{6} - \left(-\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \sin\frac{13\pi}{3} \cos\frac{13\pi}{6} - \sin\frac{11\pi}{6} \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 1 \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(vi) \tan\theta = \frac{3}{4} \text{ এবং } \sin\theta \text{ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, } \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$\tan\theta = \frac{3}{4} \text{ এবং } \sin\theta \text{ ঋণাত্মক।}$$

$$\text{বা, } \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$$

$$\text{বা, } 3\cos\theta = 4\sin\theta$$

$$\text{বা, } 9\cos^2\theta = 16\sin^2\theta \text{ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 9(1 - \sin^2\theta) = 16\sin^2\theta$$

$$\text{বা, } 9 - 9\sin^2\theta - 16\sin^2\theta = 0$$

$$\text{বা, } -25\sin^2\theta = -9$$

$$\text{বা, } \sin^2\theta = \frac{9}{25}$$

$$\text{বা, } \sin\theta = \pm \frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin\theta = -\frac{3}{5} \text{ } [\because \sin\theta \text{ ঋণাত্মক}]$$

$$\text{আবার, } \tan\theta = \frac{3}{4}$$

$$\text{বা, } \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$$

$$\text{বা, } 3\cos\theta = 4\sin\theta$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\text{এবং } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$$

$$= \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{3-4}{5}}{-\frac{5+3}{4}}$$

$$= \frac{-\frac{-1}{5}}{-\frac{8}{4}} = \frac{\frac{1}{5}}{-2}$$

$$= \frac{-1}{10} \times \frac{4}{-2} = \frac{14}{5}$$

$$= \frac{14}{5}$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5} \text{ (দেখানো হলো)}$$

৯. মান নির্ণয় কর:

(i) $\cos \frac{9\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{31\pi}{36} - \sin \frac{5\pi}{36}$

সমাধান: $\cos \frac{9\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{31\pi}{36} - \sin \frac{5\pi}{36}$
 $= \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin \left(\pi - \frac{5\pi}{36}\right) - \sin \frac{5\pi}{36}$
 $= \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{5\pi}{36} - \sin \frac{5\pi}{36}$
 $= 0$
 \therefore নির্ণেয় মান = 0

(ii) $\cot \frac{\pi}{20} \cot \frac{3\pi}{20} \cot \frac{5\pi}{20} \cot \frac{7\pi}{20} \cot \frac{9\pi}{20}$

সমাধান: $\cot \frac{\pi}{20} \cot \frac{3\pi}{20} \cot \frac{5\pi}{20} \cot \frac{7\pi}{20} \cot \frac{9\pi}{20}$
 $= \cot \frac{\pi}{20} \cot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{20}\right) \cot \frac{\pi}{4} \cot \frac{7\pi}{20} \cot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20}\right)$
 $= \cot \frac{\pi}{20} \tan \frac{7\pi}{20} \cdot \cot \frac{7\pi}{20} \tan \frac{\pi}{20}$
 $= \cot \frac{\pi}{20} \cdot \frac{1}{\cot \frac{7\pi}{20}} \cdot \cot \frac{7\pi}{20} \cdot \frac{1}{\cot \frac{\pi}{20}} = 1$
 \therefore নির্ণেয় মান = 1

(iii) $\sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{3\pi}{4} + \sin^2 \frac{5\pi}{4} + \sin^2 \frac{7\pi}{4}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি
 $= \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{3\pi}{4} + \sin^2 \frac{5\pi}{4} + \sin^2 \frac{7\pi}{4}$
 $= \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{3\pi}{4} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$
 $= \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{3\pi}{4} + \cos^2 \frac{3\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4}$
 $= \left(\sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4}\right) + \left(\sin^2 \frac{3\pi}{4} + \cos^2 \frac{3\pi}{4}\right)$
 $= 1 + 1 = 2$
 \therefore নির্ণেয় মান = 2

(iv) $\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি
 $= \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$
 $= \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}\right)$
 $= \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8}$
 $= \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) + \left(\cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8}\right)$
 $= 1 + 1$
 $= 2$
 \therefore নির্ণেয় মান = 2

(v) $\sin^2 \frac{17\pi}{18} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{37\pi}{18} + \cos^2 \frac{5\pi}{8}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি
 $= \sin^2 \frac{17\pi}{18} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{37\pi}{18} + \cos^2 \frac{5\pi}{8}$

$$= \left(\sin \frac{17\pi}{18}\right)^2 + \left(\sin \frac{5\pi}{8}\right)^2 + \left(\cos \frac{37\pi}{18}\right)^2 + \left(\cos \frac{5\pi}{8}\right)^2$$

$$= \sin^2 \left(\frac{17\pi}{18}\right) + \cos^2 \left(\frac{37\pi}{18}\right) + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8}$$

$$= \left\{\sin \left(\pi - \frac{\pi}{18}\right)\right\}^2 + \left\{\cos \left(2\pi + \frac{\pi}{18}\right)\right\}^2 + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8}$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{18} + \cos^2 \frac{\pi}{18} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8}$$

$$= \left(\sin^2 \frac{\pi}{18} + \cos^2 \frac{\pi}{18}\right) + \left(\sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8}\right)$$

$$= 1 + 1 \quad [\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$= 2$$

$$\therefore$$
 নির্ণেয় মান = 2

১০. $\theta = \frac{\pi}{3}$ হলে নিম্নোক্ত অভেদসমূহ প্রমাণ কর।

(i) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi}{3}$

বামপক্ষ = $\sin 2\theta = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{3} \quad [\because \theta = \frac{\pi}{3}]$
 $= \sin \frac{2\pi}{3}$
 $= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$
 $= \sin \frac{\pi}{3}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

মধ্যপক্ষ = $2 \sin \theta \cos \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \quad [\because \theta = \frac{\pi}{3}]$
 $= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ = $\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{3}}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{3}} \quad [\because \theta = \frac{\pi}{3}]$
 $= \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 + (\sqrt{3})^2}$
 $= \frac{2\sqrt{3}}{1 + 3}$
 $= \frac{2\sqrt{3}}{4}$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ (প্রমাণিত)

(ii) $\sin 3\theta = 3 \cos \theta - 4 \sin^3 \theta$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\theta = \frac{\pi}{3}$

বামপক্ষ = $\sin 3\theta$
 $= \sin \left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \quad [\because \theta = \frac{\pi}{3}]$
 $= \sin \pi$
 $= \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + 0\right)$
 $= \sin 0$
 $= 0$

$$\begin{aligned}
\text{ডানপক্ষ} &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\
&= 3\sin\frac{\pi}{3} - 4\sin^3\frac{\pi}{3} \quad [\because \theta = \frac{\pi}{3}] \\
&= 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2} - 4 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(iii) \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

$$\text{সমাধান: দেওয়া আছে, } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{বামপক্ষ} &= \cos 3\theta \\
&= \cos 3 \cdot \frac{\pi}{3} \quad [\because \theta = \frac{\pi}{3}] \\
&= \cos \pi \\
&= \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + 0\right) \\
&= -\cos 0^\circ \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ডানপক্ষ} &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\
&= 4\cos^3\frac{\pi}{3} - 3\cos\frac{\pi}{3} \quad [\because \theta = \frac{\pi}{3}] \\
&= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 4 \cdot \frac{1}{8} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\
&= \frac{1-3}{2} \\
&= \frac{-2}{2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\therefore \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \text{ (প্রমাণিত)}$$

$$(iv) \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\text{সমাধান: দেওয়া আছে, } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{বামপক্ষ} &= \tan 2\theta \\
&= \tan 2 \cdot \frac{\pi}{3} \quad [\because \theta = \frac{\pi}{3}] \\
&= \tan \frac{2\pi}{3} \\
&= \tan \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\
&= -\tan \frac{\pi}{3} \\
&= -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ডানপক্ষ} &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \\
&= \frac{2\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan^2\frac{\pi}{3}} \quad [\because \theta = \frac{\pi}{3}] \\
&= \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1-(\sqrt{3})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{3}}{1-3} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{-2} \\
&= -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \text{ (প্রমাণিত)}$$

১১. প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে α (আলফা) এর মান নির্ণয় কর:

$$(i) \cot \alpha = -\sqrt{3}; \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

$$\text{সমাধান: চতুর্থ চতুর্ভাগে } \cot \alpha = -\sqrt{3}$$

$$\cot \alpha = -\cot \frac{\pi}{6}$$

$$= \cot \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cot \left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right)$$

$$= \cot \frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore \alpha = \frac{11\pi}{6} \text{ এটি গ্রহণযোগ্য মান কারণ } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় মান } \alpha = \frac{11\pi}{6}$$

[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ের প্রক্বে $\frac{\sqrt{3}}{2}$ এর পরিবর্তে $-\sqrt{3}$ এবং 3π এর পরিবর্তে $\frac{3\pi}{2}$ হবে।]

$$(ii) \cos \alpha = -\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{সমাধান: দ্বিতীয় চতুর্ভাগে } \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos \alpha = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{বা, } \alpha = \frac{3\pi - \pi}{3}$$

$$\text{বা, } \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{যা } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ শর্ত পালন করে}$$

$$\text{আবার, তৃতীয় চতুর্ভাগে, } \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos \alpha = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{বা, } \alpha = \frac{3\pi + \pi}{3}$$

$$\text{বা, } \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{যা } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ শর্ত পালন করে}$$

$$\text{নির্ণেয় মান : } \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ এবং } \frac{4\pi}{3}$$

$$(iii) \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{সমাধান: } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \alpha = -\sin \frac{\pi}{3}$$

বা, $\sin \alpha = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right)$ [\because তৃতীয় চতুর্ভাগে \sin ঋণাত্মক]

বা, $\alpha = \pi + \frac{\pi}{3}$

$\therefore \alpha = \frac{4\pi}{3}$ যা, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ শর্ত পূরণ করে

\therefore নির্ণেয় মান $= \frac{4\pi}{3}$

(iv) $\cot \alpha = -1$; $\pi < \alpha < 2\pi$

সমাধান: $\cot \alpha = -1$

বা, $\cot \alpha = -\cot \frac{\pi}{4}$

বা, $\cot \alpha = \cot \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right)$; [চতুর্থ চতুর্ভাগে \cot ঋণাত্মক]

বা, $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{4}$, যা, $\pi < \alpha < 2\pi$ শর্ত পূরণ করে

\therefore নির্ণেয় মান $= \frac{7\pi}{4}$

১২. সমাধান কর: (যখন $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

(i) $2 \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin^2 \theta$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$2 \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin^2 \theta$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 1$$

$$\text{বা, } 2(1 - \sin^2 \theta) - 2 \sin^2 \theta = 1 \quad [\because \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta]$$

$$\text{বা, } 2 - 2 \sin^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 1$$

$$\text{বা, } 2 - 4 \sin^2 \theta = 1$$

$$\text{বা, } -4 \sin^2 \theta = -1$$

$$\text{বা, } \sin^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \pm \frac{1}{2}$$

যেহেতু $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, সুতরাং $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6} \quad [\because \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}]$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান, } \theta = \frac{\pi}{6}$$

(ii) $2 \sin^2 \theta - 3 \cos \theta = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$2 \sin^2 \theta - 3 \cos \theta = 0$$

$$\text{বা, } 2(1 - \cos^2 \theta) - 3 \cos \theta = 0$$

$$\text{বা, } 2 - 2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta = 0$$

$$\text{বা, } -(2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2) = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta - \cos \theta - 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos \theta (\cos \theta + 2) - 1 (\cos \theta + 2) = 0$$

$$\text{বা, } (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 2) = 0$$

এখানে $\cos \theta + 2 \neq 0$ কারণ, $\cos \theta + 2 = 0$ হলে $\cos \theta = -2$ হয় যা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $\cos \theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

$$\therefore 2 \cos \theta - 1 = 0 \text{ যখন } 0^\circ < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{বা, } 2 \cos \theta = 1$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান, } \theta = \frac{\pi}{3}$$

(iii) $6 \sin^2 \theta - 11 \sin \theta + 4 = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$6 \sin^2 \theta - 11 \sin \theta + 4 = 0$$

$$\text{বা, } 6 \sin^2 \theta - 8 \sin \theta - 3 \sin \theta + 4 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta (3 \sin \theta - 4) - 1(3 \sin \theta - 4) = 0$$

$$\text{বা, } (2 \sin \theta - 1)(3 \sin \theta - 4) = 0$$

এখানে, $3 \sin \theta - 4 \neq 0$ কেননা $3 \sin \theta - 4 = 0$ হলে

$\sin \theta = \frac{4}{3}$, যা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $\sin \theta$ এর মান 1 অপেক্ষা

বৃহত্তর এবং -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

$$\text{অতএব } 2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান, } \theta = \frac{\pi}{6}$$

(iv) $\tan \theta + \cot \theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$\tan \theta + \cot \theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan \theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan^2 \theta + 1 = \frac{4 \tan \theta}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} \tan^2 \theta + \sqrt{3} = 4 \tan \theta$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} \tan^2 \theta - 4 \tan \theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} \tan^2 \theta - 3 \tan \theta - \tan \theta + \sqrt{3} = 0$$

$$\text{বা, } \sqrt{3} \tan \theta (\tan \theta - \sqrt{3}) - 1 (\tan \theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\text{বা, } (\tan \theta - \sqrt{3})(\sqrt{3} \tan \theta - 1) = 0$$

$$\text{হয় } \tan \theta - \sqrt{3} = 0 \quad \text{অথবা, } \sqrt{3} \tan \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \frac{\pi}{3}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad [\because \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}] \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6} \quad [\because \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}]$$

যা, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ শর্ত পূরণ করে

\therefore নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$

(v) $2\sin^2 \theta + 3 \cos \theta = 3$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$2\sin^2 \theta + 3 \cos \theta = 3$$

$$\text{বা, } 2(1 - \cos^2 \theta) + 3 \cos \theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2 - 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } -2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } -(2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 1) = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - \cos \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos \theta (\cos \theta - 1) - 1 (\cos \theta - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta - 1) = 0$$

$$\therefore \text{ হয় } 2 \cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{অথবা, } \cos \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = 1$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos 0$$

$$\therefore \theta = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{কিন্তু } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \theta \neq 0^\circ$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সমাধান, } \theta = \frac{\pi}{3}$$

১৩. সমাধান কর: (যখন $0 < \theta < 2\pi$)

(i) $2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$2 \sin^2 \theta + 3 \cos \theta = 0$$

$$\text{বা, } 2(1 - \cos^2 \theta) + 3 \cos \theta = 0$$

$$\text{বা, } 2 - 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta - 2 = 0 \text{ [উভয়পক্ষে } (-1) \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + \cos \theta - 2 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos \theta (\cos \theta - 2) + 1 (\cos \theta - 2) = 0$$

$$\text{বা, } (2 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 2) = 0$$

$$\text{কিন্তু, } \cos \theta - 2 \neq 0 \text{ কেননা } \cos \theta - 2 = 0 \text{ হলে}$$

$$\cos \theta = 2, \text{ যা অসম্ভব।}$$

$$\text{অতএব } 2 \cos \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = -\frac{1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}), \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) \text{ [শর্তানুসারে } 0 < \theta < 2\pi]$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \cos \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \text{ যা } 0 < \theta < 2\pi \text{ শর্ত পূরণ করে}$$

$$\therefore \text{ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে } \theta \text{ এর সম্ভাব্য মানসমূহ} = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

(ii) $4(\cos^2 \theta + \sin \theta) = 5$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$4(\cos^2 \theta + \sin \theta) = 5$$

$$\text{বা, } 4(1 - \sin^2 \theta + \sin \theta) = 5$$

$$\text{বা, } 4 - 4 \sin^2 \theta + 4 \sin \theta = 5$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 1 = 0 \text{ [উভয়পক্ষে } (-1) \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } (2 \sin \theta - 1)^2 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \sin \theta - 1 = 0 \text{ [বর্গমূল করে]}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6}, \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) \text{ [শর্তানুসারে]}$$

$$\text{বা, } \sin \theta = \sin \frac{\pi}{6}, \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \text{ যা, } 0 < \theta < 2\pi \text{ শর্ত পূরণ করে}$$

$$\therefore \text{ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে } \theta \text{ এর সম্ভাব্য মানসমূহ} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

(iii) $\cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = 3$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$\cot^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta = 3$$

$$\text{বা, } \cot^2 \theta + 1 + \cot^2 \theta = 3$$

$$\text{বা, } 2 \cot^2 \theta = 2$$

$$\text{বা, } \cot^2 \theta = 1$$

$$\text{বা, } \cot \theta = \pm 1$$

$$\cot \theta = 1 \text{ নিয়ে পাই}$$

$$\cot \theta = \cot \frac{\pi}{4}, \cot(\pi + \frac{\pi}{4}) \text{ [শর্তানুসারে]}$$

$$\text{বা, } \cot \theta = \cot \frac{\pi}{4}, \cot \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{আবার, } \cot \theta = -1 \text{ থেকে পাই,}$$

$$\cot \theta = -\cot \frac{\pi}{4}$$

$$\text{বা, } \cot \theta = \cot(\pi - \frac{\pi}{4}), \cot(2\pi - \frac{\pi}{4}) \text{ [শর্তানুসারে]}$$

$$\text{বা, } \cot \theta = \cot \frac{3\pi}{4}, \cot \frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \text{ যা } 0 < \theta < 2\pi \text{ শর্ত পূরণ করে।}$$

$$\therefore \text{ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে } \theta \text{ এর সম্ভাব্য মানসমূহ,}$$

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

(iv) $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta = 2$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$\tan^2 \theta + \cot^2 \theta = 2$$

$$\text{বা, } \tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} = 2$$

$$\text{বা, } \tan^4 \theta + 1 = 2 \tan^2 \theta \text{ [উভয় পক্ষে } \tan^2 \theta \text{ দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } \tan^4 \theta - 2 \tan^2 \theta + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (\tan^2 \theta - 1)^2 = 0$$

$$\text{বা, } \tan^2 \theta - 1 = 0$$

$$\text{বা, } \tan^2 \theta = 1$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \pm 1$$

এখন, $\tan \theta = 1$ নিয়ে পাই:

$$\tan \theta = \tan \frac{\pi}{4}, \tan \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \text{ (শর্তানুসারে)}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \frac{\pi}{4}, \tan \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

আবার, $\tan \theta = -1$ নিয়ে পাই,

$$\tan \theta = -\tan \frac{\pi}{4}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right), \tan \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) \text{ (শর্তানুসারে)}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \frac{3\pi}{4}, \tan \frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

\therefore নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ,

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$(v) \sec^2 \theta + \tan^2 \theta = \frac{5}{3}$$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$(\sec^2 \theta + \tan^2 \theta) = \frac{5}{3}$$

$$\text{বা, } 3(1 + \tan^2 \theta + \tan^2 \theta) = 5$$

$$\text{বা, } 3 + 6 \tan^2 \theta - 5 = 0$$

$$\text{বা, } 6 \tan^2 \theta = 2$$

$$\text{বা, } \tan^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

এখন, $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ নিয়ে পাই,

$$\tan \theta = \tan \frac{\pi}{6}, \tan \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \text{ [শর্তানুসারে]}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \frac{\pi}{6}, \tan \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

আবার, $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ নিয়ে পাই,

$$\text{বা, } \tan \theta = -\tan \frac{\pi}{6}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right), \tan \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) \text{ [শর্তানুসারে]}$$

$$\text{বা, } \tan \theta = \tan \frac{5\pi}{6}, \tan \frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

\therefore নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য সকল মানসমূহ,

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$(vi) 5 \operatorname{cosec}^2 \theta - 7 \cot \theta \operatorname{cosec} \theta - 2 = 0$$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$5 \operatorname{cosec}^2 \theta - 7 \cot \theta \operatorname{cosec} \theta - 2 = 0$$

$$\text{বা, } \frac{5}{\sin^2 \theta} - \frac{7 \cos \theta}{\sin^2 \theta} - 2 = 0$$

$$\text{বা, } 5 - 7 \cos \theta - 2 \sin^2 \theta = 0$$

$$\text{বা, } 5 - 7 \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) = 0$$

$$\text{বা, } 5 - 7 \cos \theta - 2 + 2 \cos^2 \theta = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta - 7 \cos \theta + 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos^2 \theta - 6 \cos \theta - \cos \theta + 3 = 0$$

$$\text{বা, } 2 \cos \theta (\cos \theta - 3) - 1(\cos \theta - 3) = 0$$

$$\text{বা, } (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta - 3) = 0$$

$$\text{হয়, } 2 \cos \theta - 1 = 0 \text{ অথবা, } \cos \theta - 3 = 0$$

$$\text{বা, } \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \cos \theta = 3$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \text{অথবা } 3$$

কিন্তু $\cos \theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \cos \frac{\pi}{3}, \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) \text{ [শর্তানুসারে]}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \text{ যা প্রদত্ত সীমা } 0 < \theta < 2\pi \text{ এর মধ্যে অবস্থিত}$$

$$\therefore \text{নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে } \theta \text{ এর সম্ভাব্য সকল মানসমূহ } \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$(vii) 2 \sin x \cos x = \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi).$$

সমাধান: $2 \sin x \cos x = \sin x$

$$\text{বা, } (2 \sin x \cos x)^2 = (\sin x)^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 x - 4 \sin^4 x - \sin^2 x = 0$$

$$\text{বা, } -4 \sin^4 x + 3 \sin^2 x = 0$$

$$\text{বা, } -\sin^2 x (4 \sin^2 x - 3) = 0$$

$$\text{বা, } \sin^2 x (4 \sin^2 x - 3) = 0$$

$$\text{হয়, } \sin^2 x = 0$$

$$\text{অথবা, } 4 \sin^2 x - 3 = 0.$$

$$\text{বা, } \sin x = 0$$

$$\text{বা, } 4 \sin^2 x = 3$$

$$\text{বা, } \sin x = \sin 0^\circ, \sin(\pi - 0), \sin(2\pi - 0) \quad \text{বা, } \sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\text{বা, } \sin x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\text{বা, } \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = 0, \pi, 2\pi$$

$$\text{বা, } \sin x = \sin \frac{\pi}{3}, \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right), \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\therefore \sin x = \sin \frac{\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{5\pi}{3}$$

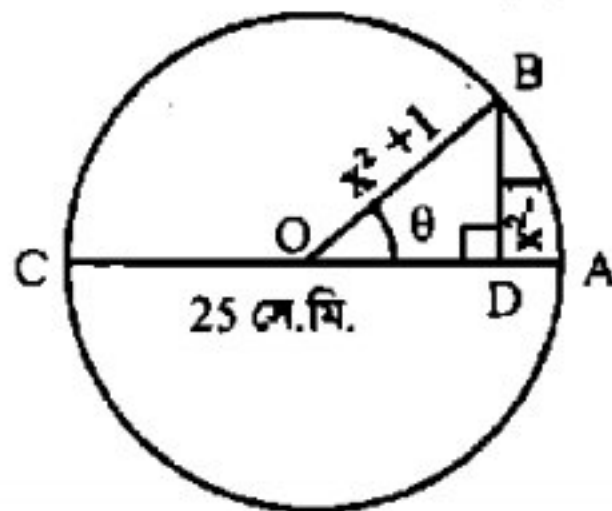
$$\therefore x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}; \text{ যা সীমা } 0 \leq x \leq 2\pi \text{ এর মধ্যে অবস্থিত}$$

\therefore নির্ণেয় সীমার মধ্যে x এর সম্ভাব্য মান সমূহ:

$$0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$$

৬? অনুশীলনীর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ১৪



- ক. চিত্রে ABC একটি বৃত্তাকার চাকা এবং চাকাটির AB চাপের দৈর্ঘ্য 25 সে.মি. হলে $\theta =$ কত? চাকাটি 1 বার ঘুরে কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে?
- খ. ABC চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 5 বার আবর্তিত হলে চাকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত হবে?
- গ. চিত্রে $\triangle BOD$ হলে $\sin\theta$ এর মান ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta + \sec\theta = x$.

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. মনে করি, চাকাটির AB চাপের দৈর্ঘ্য, $S = 25$ সে.মি.

চিত্র হতে পাই, ব্যাসার্ধ, $r = 25$ সে.মি.

সূত্রাং আমরা জানি, $S = r\theta$

$$\text{বা, } \theta = \frac{S}{r}$$

$$\text{বা, } \theta = \frac{25}{25} \text{ রেডিয়ান}$$

$$= 1 \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= 57.30^\circ$$

\therefore নির্ণেয় θ এর মান 57.30°

উত্তর: 57.30°

চাকাটি 1 বার ঘুরে অতিক্রম করবে $2\pi r$

$$= 2 \times 3.1416 \times 25 \text{ সে.মি.}$$

$$= 157.08 \text{ সে.মি.}$$

$$= 1.5708 \text{ মি. (প্রায়)}$$

$$= 1.57 \text{ মি. (প্রায়)}$$

\therefore চাকাটি 1 বার ঘুরে দূরত্ব অতিক্রম করে 1.57 মি. (প্রায়)

খ. 1 ঘণ্টা = 60 মিনিট = 60×60 সেকেন্ড

$$= 3600 \text{ সেকেন্ড}$$

ABC চাকাটি 1 সেকেন্ডে আবর্তিত হয় 5 বার

\therefore চাকাটি 1 ঘণ্টায় আবর্তিত হবে = (3600×5) বার

$$= 18000 \text{ বার}$$

\therefore চাকাটি 1 ঘণ্টায় দূরত্ব অতিক্রম করবে 18000×1.57 মি.

[‘ক’ হতে]

$$= 28260 \text{ মি.}$$

$$= 28.26 \text{ কি.মি. (প্রায়)}$$

সূত্রাং চাকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় 28.26 কি.মি. (প্রায়)

Ans. 28.26 কি.মি. (প্রায়)

গ. চিত্র হতে পাই, $\sin\theta = \frac{BD}{BO}$

$$\text{বা, } \sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$\therefore \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{(x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(x^2 + 1)^2 - (x^2 - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4x^2}{(x^2 + 1)^2}} \\ &= \frac{2x}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{এখন, } \tan\theta + \sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$= \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \times \frac{x^2 + 1}{2x}\right) + \left(1 \times \frac{x^2 + 1}{2x}\right)$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2x} + \frac{x^2 + 1}{2x}$$

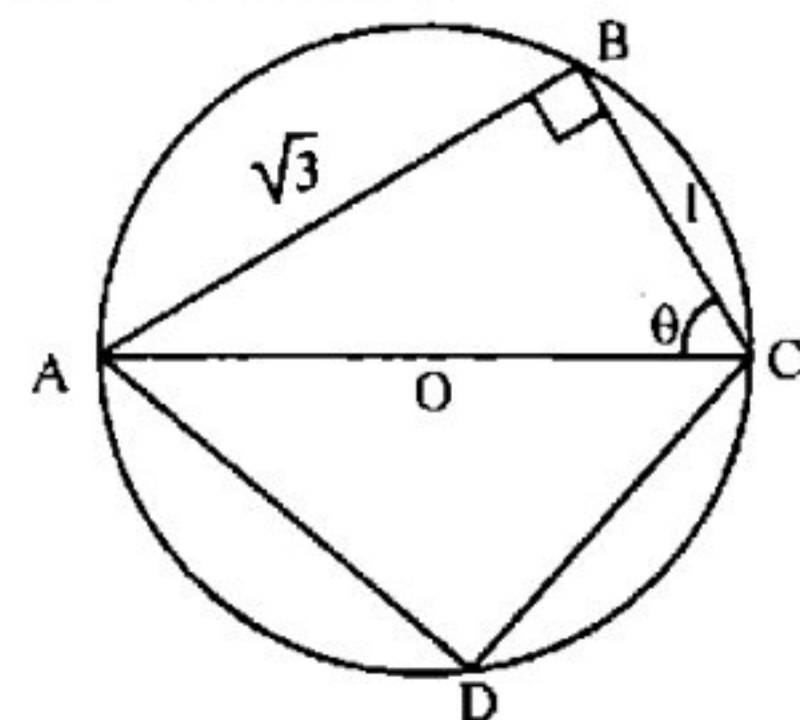
$$= \frac{x^2 - 1 + x^2 + 1}{2x}$$

$$= \frac{2x^2}{2x}$$

$$= x$$

$$\therefore \tan\theta + \sec\theta = x \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ▶ ১৫



- ক. চিত্রে O, বৃত্তের কেন্দ্র হলে $\angle B$ এর বৃত্তীয়মান এবং AC নির্ণয় কর।
- খ. প্রমাণ কর যে, $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$
- গ. $\sec\theta + \cos\theta = P$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর।

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক. চিত্রে $\angle B = 90^\circ$

আমরা জানি, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান।

$$\therefore 90^\circ = \left(\frac{\pi}{180} \cdot 90\right) "$$

$$= \frac{\pi}{2} "$$

$\therefore \angle B$ এর বৃত্তীয়মান $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান। (Ans.)

আবার, $\triangle ABC$ -এ $\angle B = 90^\circ$

\therefore পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\text{বা, } AC^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$$

বা, $AC^2 = 3 + 1$

বা, $AC^2 = 4$

$\therefore AC = 2$ একক (উত্তর)

■ O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABCD বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত।

$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$

এবং $\angle B + \angle D = 180^\circ$

এখন, বামপক্ষ = $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D$

= $\tan A + \tan(180^\circ - D) + \tan(180^\circ - A) + \tan D$

= $\tan A + \tan(2 \times 90^\circ - D) + \tan(2 \times 90^\circ - A) + \tan D$

= $\tan A - \tan D - \tan A + \tan D$ [\because ২য় চতুর্ভুজগে \tan ঋণাত্মক]

= 0

= ডানপক্ষ।

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$ (প্রমাণিত)

■ দেওয়া আছে, $\sec \theta + \cos \theta = P$ (i)

এখানে, $\sec \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{1} = 2$ [$\because AC = 2$ এবং $BC = 1$]

আবার, $\cos \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

$\sec \theta$ এবং $\cos \theta$ এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$2 + \frac{1}{2} = P$

বা, $\frac{4+1}{2} = P$ বা, $P = \frac{5}{2}$

\therefore নির্ণেয় P এর মান $\frac{5}{2}$

এখন, (i) নং থেকে, $\sec \theta + \cos \theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1}{\cos \theta} + \cos \theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{5}{2}$

বা, $2\cos^2 \theta + 2 = 5\cos \theta$

বা, $2\cos^2 \theta - 5\cos \theta + 2 = 0$

বা, $2\cos^2 \theta - 4\cos \theta - \cos \theta + 2 = 0$

বা, $2\cos \theta (\cos \theta - 2) - 1 (\cos \theta - 2) = 0$

বা, $(2\cos \theta - 1)(\cos \theta - 2) = 0$

হয়, $2\cos \theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos \theta - 2 = 0$

বা, $2\cos \theta = 1$ $\therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos \theta = \frac{1}{2}$ কিন্তু $\cos \theta \neq 2$

কারণ, $\cos \theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।

বা, $\cos \theta = \cos \frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $\theta = \frac{\pi}{3}$

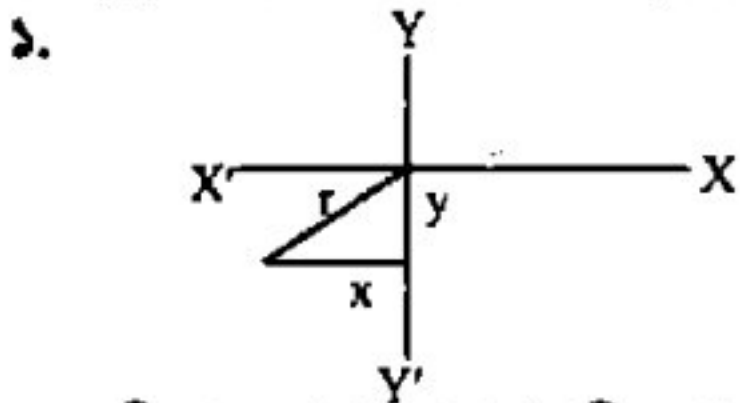


মাস্টার ট্রেনার প্রণীত সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

★ ★ ★ ১২. (-θ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ। Text পৃষ্ঠা-১৬৮

• (-θ) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta$
$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\sec(-\theta) = \sec \theta$
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\cot(-\theta) = -\cot \theta$



চিত্রে $\sec(-\theta)$ এর মান নিচের কোনটি? (সহজ)

- ক) $\frac{r}{x}$ খ) $-\frac{r}{x}$ গ) $\frac{x}{r}$ ঘ) $-\frac{x}{r}$

২. $\cos(-\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ হলে, θ এর মান কত ডিগ্রি? (মধ্যম)

- ক) -30 খ) 0 গ) 30 ঘ) 60

■ ব্যাখ্যা: $\cos(-\theta) = \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ বা, $\cos \theta = \cos 30^\circ \therefore \theta = 30^\circ$

৩. $\sin(-\theta) = \frac{1}{2}$ হলে, θ এর মান কত ডিগ্রি? (মধ্যম)

- ক) $-\frac{\pi}{6}$ খ) $-\frac{\pi}{3}$ গ) $\frac{\pi}{6}$ ঘ) $\frac{\pi}{3}$

৪. $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ এর মান কত? (সহজ)

- ক) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ) $\frac{1}{3}$ গ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ঘ) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

৫. $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ এর মান কত? (সহজ)

- ক) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ গ) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ঘ) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

৬. $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ হলে—

- i. $\tan(-60^\circ) = -\sqrt{3}$
ii. $\tan^2(-60^\circ) = 3$

iii. $\sec^2(-60^\circ) = 4$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

- ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

■ ব্যাখ্যা: $\sec^2(-60^\circ) = 1 + \tan^2(-60^\circ) = 4$

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (৭-৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$\operatorname{cosec}(-\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

৭. θ এর মান কত ডিগ্রি? (মধ্যম)

- ক) -60 খ) 0 গ) 45 ঘ) 60

■ ব্যাখ্যা: $\operatorname{cosec}(-\theta) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ বা, $\operatorname{cosec}(-\theta) = \operatorname{cosec} 60^\circ \therefore \theta = -60^\circ$

৮. $\sin \theta$ এর মান কত? (সহজ)

- ক) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ খ) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ গ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

৯. $\operatorname{cosec}^2(-\theta) + \sin^2 \theta =$ কত? (মধ্যম)

- ক) $-\frac{25}{12}$ খ) $-\frac{12}{25}$ গ) $\frac{12}{25}$ ঘ) $\frac{25}{12}$

★ ★ ★ ১৩. $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ এবং $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ। Text পৃষ্ঠা-১৬৮

• $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ এবং $\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$	$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec \theta$
$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$	$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$
$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$	$\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$
$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$	$\operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec \theta$
$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$	$\sec(90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$
$\tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta$	$\cot(90^\circ + \theta) = -\tan \theta$

১০. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ এর মান কত? (সহজ)

- ক) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ খ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ গ) $\frac{3}{4}$ ঘ) $\frac{9}{4}$