শ্রেণির কাজ পৃষ্ঠা নং ৫৪৯

সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

অনুশীলনী-৯.১

অনুশীলনীটি পড়ে যা জানতে পারবে—

১. মূলদ সূচক ও অমূলদ সূচকের ব্যাখ্যা।
২. সূচকের বিভিন্ন সূত্রের প্রমাণ ও প্রয়োগ।
৩. সূচক ও লগারিদমের পারস্পরিক সম্পর্কের ব্যাখ্যা।
৪. মূল এর ব্যাখ্যা।
৫. মূলদ ভগ্নাংশের ব্যাখ্যা।

স্কটিস গণিতবিদ জন নেপিয়ার (*John Napier*, 1550-1671) জ্যোতির্বিদ্যার প্রতি তাঁর আগ্রহ ছিল যা গণিতে অবদান রাখতে সাহায্য করে। বড় বড় সংখ্যার গণনাকে অধিকতর ভালো ও সহজতর করতে একটি বিশেষ পদ্ধতি আবিষ্কার করেন যা বর্তমানে লগারিদম *logarithm)* নামে পরিচিত।

PRACTICE

৯টি অনুশীলনীর প্রশ্ন।
৮৪টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ■ ৪৭টি সাধারণ বহুনির্বাচনি ■ ১৬টি বহুপদী সমাপ্তিসূচক ■ ২১টি অভিন্ন তথ্যভিত্তিক
১৮টি সৃজনশীল প্রশ্ন ■ ৯টি শ্রেণির কাজ ■ ৫টি মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত ■ ৪টি প্রশ্নব্যাংক

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}}$ যেখানে $m, p \in \mathbb{Z}$ এবং $n \in \mathbb{N}$

সমাধান: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = \left\{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right\}^p \quad \left[\because a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right]$

$= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mp} \quad [\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$= a^{\frac{mp}{n}} \quad \left[\because a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right]$

$\therefore \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}}$ **(প্রমাণিত)**

২. প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$ যেখানে $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0, n \neq 0$

সমাধান: ধরি, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = x$

বা, $a^{\frac{1}{m}} = x^n \quad [\because \sqrt[n]{a^m} = x$ হলে $a^m = x^n]$

বা, $a = (x^n)^m$

বা, $a = x^{mn} \quad [\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$\therefore x = a^{\frac{1}{mn}}$

অর্থাৎ, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} \quad \left[\because x = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$ **(প্রমাণিত)**

৩. প্রমাণ কর যে, $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$, যেখানে $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

সমাধান: ধরি, $(ab)^{\frac{1}{n}} = x, a^{\frac{1}{n}} = y, b^{\frac{1}{n}} = z$

$\therefore x^n = ab, y^n = a, z^n = b$

এখন, $x^n = ab$

বা, $x^n = y^n z^n$ [মান বসিয়ে]

বা, $x^n = (yz)^n \quad [\because (ab)^n = a^n b^n]$

$\therefore x = yz$

অর্থাৎ, $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$

$\therefore \left\{(ab)^{\frac{1}{n}}\right\}^m = \left(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}\right)^m$ [উভয় পক্ষের ঘাত m এ উন্নীত করে]

বা, $(ab)^{\frac{m}{n}} = \left\{(a)^{\frac{1}{n}}\right\}^m \left\{(b)^{\frac{1}{n}}\right\}^m$

$\left[\because a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \text{ এবং } \{(ab)^n = a^n b^n\}\right]$

$\therefore (ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$ **(প্রমাণিত)**

৪. দেখাও যে, (ক) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = a - b$

(খ) $\dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = (a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1)$

সমাধান:

(ক) বামপক্ষ $= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$

$= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 \quad [\because (x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3]$

$= a^{\frac{3}{3}} - b^{\frac{3}{3}} \quad \left[\because \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}\right]$

$= a^1 - b^1$

$= a - b =$ ডানপক্ষ

$\therefore (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = a - b$ **(দেখানো হলো)**

(খ) বামপক্ষ $= \dfrac{a^3+a^{-3}+1}{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+1}$

$= \dfrac{\left(a^{3/2}\right)^2+\left(a^{-3/2}\right)^2+1}{a^{3/2}+a^{-3/2}+1}$

$= \dfrac{\left(a^{3/2}+a^{-3/2}\right)^2-2\cdot a^{3/2}.a^{-3/2}+1}{a^{3/2}+a^{-3/2}+1}$

$[\because x^2+y^2=(x+y)^2-2xy]$

$= \dfrac{\left(a^{3/2}+a^{-3/2}\right)^2-2\cdot a^0+1}{a^{3/2}+a^{-3/2}+1}$

$\left[\because a^{3/2}\cdot a^{-3/2}=a^{3/2-3/2}=a^0\right]$

$= \dfrac{\left(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}\right)^2-1}{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+1}$ $[\because a^0=1]$

$= \dfrac{\left(a^{3/2}+a^{-3/2}+1\right)\left(a^{3/2}+a^{-3/2}-1\right)}{a^{3/2}+a^{-3/2}+1}$

$[\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)]$

$= (a^{3/2}+a^{-3/2}-1)$

= ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{a^3+a^{-3}+1}{a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{-3}{2}}+1} = (a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{-3}{2}}-1)$ **(দেখানো হলো)**

৫. সরল কর:

(ক) $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

সমাধান: $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}} = \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}\times\frac{a}{a+b}}$ $[\because (a^r)^s=a^{rs}]$

$= x^{\frac{1}{a}\times\frac{a^2-b^2}{a-b}\times\frac{a}{a+b}}$

$= x^{\frac{1}{a}\times\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)}\times\frac{a}{(a+b)}}$

$= x^1 = x$

Ans. x

(খ) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$

সমাধান: $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$

$= \dfrac{a\left(\sqrt{a}+b\right)}{b\left(a-b^2\right)}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$ $\left[\because a^{\frac{3}{2}}=a.a^{\frac{1}{2}}=a\sqrt{a}\right]$

$= \dfrac{a(\sqrt{a}+b)}{b\{(\sqrt{a})^2-(b)^2\}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$

$= \dfrac{a\left(\sqrt{a}+b\right)}{b\left(\sqrt{a}+b\right)\left(\sqrt{a}-b\right)}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$

$= \dfrac{a}{b\left(\sqrt{a}-b\right)}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b} = \dfrac{a-b\sqrt{a}}{b\left(\sqrt{a}-b\right)}$

$= \dfrac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-b\right)}{b\left(\sqrt{a}-b\right)}$. $[\because a=a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}.\sqrt{a}]$

$= \dfrac{\sqrt{a}}{b}$

Ans. $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$

(গ) $\dfrac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

সমাধান: $\dfrac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

$= \dfrac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}}\times\dfrac{\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

$= \left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}}$ $\left[\because\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}\right]$

$= \left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a-b}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a-b}{a-b}} = \left(\frac{a+b}{b}\right)^1\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^1$

$= \dfrac{a+b}{b}\times\dfrac{a-b}{a} = \dfrac{a^2-b^2}{ab}$

উত্তর: $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$

বিকল্প সমাধান:

$\dfrac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

$= \dfrac{\left(\frac{a+b}{b}\times\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\times\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}} = \dfrac{\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

$= \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}} = \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{a-b}{a-b}}$

$= \dfrac{a^2-b^2}{ab}$

Ans. $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$

(ঘ) $\frac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}+\frac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m}+\frac{1}{1+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$

সমাধান:

$$\frac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}+\frac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m}+\frac{1}{1+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$$

প্রদত্ত রাশির প্রথম অংশ $=\frac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}$

$$=\frac{a^m}{a^m(1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p)}$$

[লব ও হরকে a^m দ্বারা গুণ করে]

$$=\frac{a^m}{a^m+a^{-m+m}b^n+a^{-m+m}c^p}$$

$$=\frac{a^m}{a^m+a^0b^n+a^0c^p}$$

$$=\frac{a^m}{a^m+b^n+c^p} \quad [\because a^0=1]$$

অনুরূপভাবে, দ্বিতীয় অংশ $=\frac{b^n}{a^m+b^n+c^p}$

এবং তৃতীয় অংশ $=\frac{c^p}{a^m+b^n+c^p}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}+\frac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m}+\frac{1}{1+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$

$$=\frac{a^m}{a^m+b^n+c^p}+\frac{b^n}{a^m+b^n+c^p}+\frac{c^p}{a^m+b^n+c^p}$$

$$=\frac{a^m+b^n+c^p}{a^m+b^n+c^p}=1$$

Ans. 1

(ঙ) $\sqrt[bc]{\frac{x^{b/c}}{x^{c/b}}}\times\sqrt[ca]{\frac{x^{c/a}}{x^{a/c}}}\times\sqrt[ab]{\frac{x^{a/b}}{x^{b/a}}}$

সমাধান: $\sqrt[bc]{\frac{x^{b/c}}{x^{c/b}}}\times\sqrt[ca]{\frac{x^{c/a}}{x^{a/c}}}\times\sqrt[ab]{\frac{x^{a/b}}{x^{b/a}}}$

$$=\left(\frac{x^{b/c}}{x^{c/b}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(\frac{x^{c/a}}{x^{a/c}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(\frac{x^{a/b}}{x^{b/a}}\right)^{\frac{1}{ab}}$$

$$=\left(x^{\frac{b}{c}-\frac{c}{b}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(x^{\frac{c}{a}-\frac{a}{c}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(x^{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}\right)^{\frac{1}{ab}} \quad \left[\because \frac{x^r}{x^s}=x^{r-s}\right]$$

$$=\left(x^{\frac{b^2-c^2}{bc}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(x^{\frac{c^2-a^2}{ca}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(x^{\frac{a^2-b^2}{ab}}\right)^{\frac{1}{ab}}$$

$$=x^{\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}}.x^{\frac{c^2-a^2}{c^2a^2}}.x^{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}} \quad [\because (x^r)^s=x^{rs}]$$

$$=x^{\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}+\frac{c^2-a^2}{c^2a^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}}$$

$$=x^{\frac{a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)}{a^2b^2c^2}}$$

$$=x^{\frac{a^2b^2-c^2a^2+b^2c^2-a^2b^2+c^2a^2-b^2c^2}{a^2b^2c^2}}$$

$$=x^{\frac{0}{a^2b^2c^2}}=x^0=1$$

Ans. 1

বিকল্প সমাধান: $\sqrt[bc]{\frac{x^{b/c}}{x^{c/b}}}\times\sqrt[ca]{\frac{x^{c/a}}{x^{a/c}}}\times\sqrt[ab]{\frac{x^{a/b}}{x^{b/a}}}$

$$=\frac{x^{\frac{b}{c}\times\frac{1}{bc}}}{x^{\frac{c}{b}\times\frac{1}{bc}}}\times\frac{x^{\frac{c}{a}\times\frac{1}{ca}}}{x^{\frac{a}{c}\times\frac{1}{ca}}}\times\frac{x^{\frac{a}{b}\times\frac{1}{ab}}}{x^{\frac{b}{a}\times\frac{1}{ab}}}$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{c^2}}}{x^{\frac{1}{b^2}}}\times\frac{x^{\frac{1}{a^2}}}{x^{\frac{1}{c^2}}}\times\frac{x^{\frac{1}{b^2}}}{x^{\frac{1}{a^2}}}$$

$$=1$$

Ans. 1

(চ) $\frac{(a^2-b^{-2})^a(a-b^{-1})^{b-a}}{(b^2-a^{-2})^b(b+a^{-1})^{a-b}}$

সমাধান: $\frac{(a^2-b^{-2})^a(a-b^{-1})^{b-a}}{(b^2-a^{-2})^b(b+a^{-1})^{a-b}}$

$$=\frac{\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right)^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left(b^2-\frac{1}{a^2}\right)^b\left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$=\frac{\left\{\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(a-\frac{1}{b}\right)\right\}^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left\{(b+\frac{1}{a})(b-\frac{1}{a})\right\}^b(b+\frac{1}{a})^{a-b}}$$

$$=\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^b\left(b-\frac{1}{a}\right)^b\left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$=\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^{a+b-a}}{\left(b-\frac{1}{a}\right)^b\left(b+\frac{1}{a}\right)^{b+a-b}}$$

$$=\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^b}{\left(b-\frac{1}{a}\right)^b\left(b+\frac{1}{a}\right)^a}$$

$$=\frac{\left(\frac{ab+1}{b}\right)^a\left(\frac{ab-1}{b}\right)^b}{\left(\frac{ab-1}{a}\right)^b\left(\frac{ab+1}{a}\right)^a}$$

$$=\left(\frac{\frac{ab+1}{b}}{\frac{ab+1}{a}}\right)^a\times\left(\frac{\frac{ab-1}{b}}{\frac{ab-1}{a}}\right)^b$$

$$=\left(\frac{ab+1}{b}\times\frac{a}{ab+1}\right)^a\times\left(\frac{ab-1}{b}\times\frac{a}{ab-1}\right)^b$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^a\times\left(\frac{a}{b}\right)^b$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$$

Ans. $\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$

[বি.দ্র. পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে b^2 এর স্থলে b^{-2} হবে।]

৬. দেখাও যে,

(ক) যদি $x = a^{q+r}b^p, y = a^{r+p}b^q, z = a^{p+q}b^r$ হয়, তবে $x^{q-r}.y^{r-p}.z^{p-q} = 1$

(খ) যদি $a^p = b, b^q = c$ এবং $c^r = a$ হয়, তবে $pqr = 1$

(গ) যদি $a^x = p, a^y = q$ এবং $a^2 = (p^y.q^x)^z$ হয়, তবে $xyz = 1$

সমাধান:

(ক) দেওয়া আছে, $x = a^{q+r}b^p, y = a^{r+p}b^q, z = a^{p+q}b^r$

$$
\begin{aligned}
\text{বামপক্ষ} &= x^{q-r}.y^{r-p}.z^{p-q} \\
&= (a^{q+r}b^p)^{q-r}(a^{r+p}b^q)^{r-p}(a^{p+q}b^r)^{p-q} \quad [\text{মান বসিয়ে}] \\
&= a^{(q+r)(q-r)}b^{p(q-r)}a^{(r+p)(r-p)}b^{q(r-p)}a^{(p+q)(p-q)}b^{r(p-q)} \\
&= a^{q^2-r^2}.b^{pq-rp}.a^{r^2-p^2}.b^{qr-pq}.a^{p^2-q^2}.b^{rp-qr} \\
&= a^{q^2-r^2+r^2-p^2+p^2-q^2}.b^{pq-rp+qr-pq+rp-qr} \\
&= a^0.b^0 \\
&= 1.1 \quad [\because a^0 = 1] \\
&= 1 = \text{ডানপক্ষ}
\end{aligned}
$$

$\therefore x^{q-r}y^{r-p}z^{p-q} = 1$ **(দেখানো হলো)**

(খ) দেওয়া আছে, $a^p = b, b^q = c, c^r = a$

এখানে, $c^r = a$

বা, $(b^q)^r = a \quad [\because b^q = c]$

বা, $b^{qr} = a \quad [\because (a^r)^s = a^{rs}]$

বা, $(a^p)^{qr} = a \quad [\because a^p = b]$

বা, $a^{pqr} = a \quad [\because (a^r)^s = a^{rs}]$

বা, $a^{pqr} = a^1$

$\therefore pqr = 1$ **(দেখানো হলো)**

(গ) দেওয়া আছে, $a^x = p, a^y = q$ এবং $a^2 = (p^yq^x)^z$

এখানে, $(p^yq^x)^z = a^2$

বা, $\left\{(a^x)^y(a^y)^x\right\}^z = a^2 \quad [\because p = a^x, q = a^y]$

বা, $(a^{xy}a^{xy})^z = a^2 \quad [\because (a^r)^s = a^{rs}]$

বা, $(a^{xy+xy})^z = a^2 \quad [\because a^r.a^s = a^{r+s}]$

বা, $(a^{2xy})^z = a^2$

বা, $a^{2xyz} = a^2 \quad [\because (a^r)^s = a^{rs}]$

বা, $2xyz = 2$

$\therefore xyz = 1$ **(দেখানো হলো)**

৭. (ক) যদি $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^2 = bc$ হয়, তবে দেখাও যে, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^2 = bc$

এখানে, $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

বা, $x\sqrt[3]{a} = -(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c})$

বা, $(x\sqrt[3]{a})^3 = \left\{-(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c})\right\}^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $x^3\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = -y^3\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 - z^3\left(c^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 3y\sqrt[3]{b}\,z\sqrt[3]{c}(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c})$

$[\because (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)]$

বা, $ax^3 = -by^3 - cz^3 - 3yz\sqrt[3]{bc}(-x\sqrt[3]{a})$

$[\because x\sqrt[3]{a} = -(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c})]$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3xyz(a^2)^{\frac{1}{3}}(a)^{\frac{1}{3}} \quad [\because a^2 = bc]$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3xyz\,a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}$

$\therefore ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$ **(দেখানো হলো)**

(খ) যদি $x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$

এখানে, $x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$

বা, $x^3 = \left\{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $x^3 = \left\{(a+b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + 3.(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}\left\{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}$ $[\because (x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)]$

বা, $x^3 = a + b + a - b + 3(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}}.x$

$\left[\because (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}} = x\right]$

বা, $x^3 = 2a + 3.(c^3)^{\frac{1}{3}}.x \quad [\because a^2 - b^2 = c^3]$

বা, $x^3 = 2a + 3cx$

$\therefore x^3 - 3cx - 2a = 0$ **(দেখানো হলো)**

(গ) যদি $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$

$[\because (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)]$

বা, $a^3 = 2^1 + 2^{-1} + 3 \cdot 2^0 \cdot a$

$\left[\because 2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 2^0 \text{ এবং } 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}} = a\right]$

বা, $a^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3a$

বা, $a^3 = \frac{4+1+6a}{2}$

বা, $2a^3 = 4 + 1 + 6a$

$\therefore 2a^3 - 6a = 5$ **(দেখানো হলো)**

(ঘ) যদি $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ এবং $a \geq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $3a^3 + 9a = 8$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \quad \left[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^0 = 1\right]$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ [উভয় পক্ষে বর্গমূল এবং $\because a \geq 0$ যেহেতু ধনাত্মক মান নিয়ে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3\cdot 3^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

$[\because (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)]$

বা, $a^3 = 3 - 3^{-1} - 3\,.\,3^0.a$

$\left[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 3^0 \text{ এবং } 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}} = a\right]$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3a$

বা, $a^3 + 3a = \frac{8}{3}$

$\therefore 3a^3 + 9a = 8$ **(দেখানো হলো)**

[বি. দ্র. পাঠ্য বইয়ের প্রশ্নে $3^{\frac{1}{3}}$এর স্থলে $3^{\frac{2}{3}}$ হবে]

(ঙ) যদি $a^2 = b^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$

সমাধান: এখানে, $a^2 = b^3 \quad \therefore a = b^{\frac{3}{2}}$

আবার, $a^2 = b^3$

বা, $b^3 = a^2$

$\therefore b = a^{\frac{2}{3}}$

এখন, বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{a^{3/2}}{b^{3/2}} + \frac{b^{2/3}}{a^{2/3}}$

$= \frac{a^{3/2}}{a} + \frac{b^{2/3}}{b} \quad \left[\because a = b^{3/2}, b = a^{2/3}\right]$

$= a^{\frac{3}{2}-1} + b^{\frac{2}{3}-1}$

$= a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$

= ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$ **(দেখানো হলো)**

(চ) যদি $b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ হয়,তবে দেখাও যে, $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$

সমাধান: এখানে,

$b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $b - 1 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $(b-1)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)$

$[\because (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x+y)]$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 3^2 + 3 + 3\cdot 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}\cdot(b-1)$

$\left[\because 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} = b - 1\right]$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 9 + 3 + 3\cdot 3^1(b-1)$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 12 + 9b - 9$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 - 12 - 9b + 9 = 0$

$\therefore b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$ **(দেখানো হলো)**

(ছ) যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1} = 1$$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

$= \frac{1}{x^b + \frac{1}{x^c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{x^a + \frac{1}{x^b} + 1}$

$[\because a + b + c = 0 \therefore b + c = -a]$

$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{a+b} + x^b + 1}$

$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{-c} + x^b + 1}$

$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{\frac{1}{x^c} + x^b + 1}$

$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b.x^c}{1 + x^c + x^{b+c}}$

$= \frac{x^c + 1 + x^{b+c}}{1 + x^c + x^{b+c}} = \frac{1 + x^c + x^{b+c}}{1 + x^c + x^{b+c}} = 1$

$\therefore \frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1} = 1$ **(দেখানো হলো)**

৮. (ক) যদি $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = 1$ হয়, তবে $xyz =$ কত?

সমাধান: দেওয়া আছে,

$c^z = 1$

বা, $(b^y)^z = 1 \quad [\because b^y = c]$

বা, $\{(a^x)^y\}^z = 1 \quad [\because a^x = b]$

বা, $\{a^{xy}\}^z = 1$

বা, $a^{xyz} = a^0$

$\therefore xyz = 0$ **(Ans.)**

[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ের উত্তর ভুল আছে]

(খ) যদি $x^a = y^b = z^c$ এবং $xyz = 1$ হয়, তবে $ab + bc + ca =$ কত?

সমাধান: ধরি, $x^a = y^b = z^c = k$

$\therefore x^a = k$

$\therefore x = k^{\frac{1}{a}}$

অনুরূপভাবে, $y = k^{\frac{1}{b}}$ এবং $z = k^{\frac{1}{c}}$

এখন, $xyz = 1$

বা, $k^{\frac{1}{a}}.k^{\frac{1}{b}}.k^{\frac{1}{c}} = 1 \quad [\because x = k^{\frac{1}{a}}, y = k^{\frac{1}{b}} \text{ এবং } z = k^{\frac{1}{c}}]$

বা, $k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = 1$

বা, $k^{\frac{bc+ca+ab}{abc}} = k^{\circ}$

বা, $\frac{ab+bc+ca}{abc} = 0$

বা, $ab + bc + ca = 0 \times abc$

$\therefore ab + bc + ca = 0$ **(Ans.)**

(গ) যদি $9^x = (27)^y$ হয়, তাহলে $\frac{x}{y}$ এর মান কত?

সমাধান: দেওয়া আছে, $9^x = (27)^y$

বা, $(3^2)^x = (3^3)^y$

বা, $3^{2x} = 3^{3y}$

বা, $2x = 3y$

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ **(Ans.)**

৯. সমাধান কর:

(ক) $3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$

সমাধান: $3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$

বা, $3^{2x+2} + (3^3)^{x+1} = 36$

বা, $3^{2x+2} + 3^{3x+3} = 36$

বা, $\{3^{(x+1)}\}^2 + \{3^{(x+1)}\}^3 = 36$

বা, $a^2 + a^3 = 36$ $[3^{(x+1)} = a$ ধরে$]$

বা, $a^3 + a^2 - 36 = 0$

বা, $a^3 - 3a^2 + 4a^2 - 12a + 12a - 36 = 0$

বা, $a^2(a-3) + 4a(a-3) + 12(a-3) = 0$

বা, $(a-3)(a^2 + 4a + 12) = 0$

হয়, $a - 3 = 0$

$\therefore a = 3$

বা, $3^{x+1} = 3^1$ [a এর মান বসিয়ে]

বা, $x + 1 = 1$

$\therefore x = 0$

অথবা, $a^2 + 4a + 12 = 0$

$\therefore a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.12}}{2.1}$

$\therefore a = \frac{-4 \pm \sqrt{16-48}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{2}$

$\therefore a^2 + 4a + 12 \neq 0$

কারণ a এর কোনো বাস্তবমান উপরিউক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0$

(খ) $5^x + 3^y = 8$

$5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$

সমাধান: $5^x + 3^y = 8$ .... (i)

$5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$ .... (ii)

(ii) নং থেকে পাই,

$5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$

বা, $\frac{5^x}{5} + 3^{y-1} = 2$

$\therefore 5^x + 5.3^{y-1} = 10$ .... (iii)

সমীকরণ, (iii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাই,

$5.3^{y-1} - 3^y = 2$

বা, $5.\frac{3^y}{3} - 3^y = 2$

বা, $5.3^y - 3^y.3 = 6$

বা, $2.3^y = 6$

বা, $3^y = 3$

বা, $3^y = 3^1$

$\therefore y = 1$

(iii) নং এ $y = 1$ বসিয়ে পাই,

$5^x + 5.3^{1-1} = 10$

বা, $5^x + 5.1 = 10$ $[\because 3^0 = 1]$

বা, $5^x = 10 - 5$

বা, $5^x = 5$

বা, $5^x = 5^1$

$\therefore x = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (1,1)$

(গ) $4^{3y-2} = 16^{x+y}$

$3^{x+2y} = 9^{2x+1}$

সমাধান: $4^{3y-2} = 16^{x+y}$ .... (i)

$3^{x+2y} = 9^{2x+1}$ .... (ii)

(i) নং থেকে পাই,

$4^{3y-2} = (4^2)^{x+y}$

বা, $4^{3y-2} = 4^{2x+2y}$

বা, $3y - 2 = 2x + 2y$

$\therefore 2x - y + 2 = 0$ .... (iii)

(ii) নং থেকে পাই,

$3^{x+2y} = (3^2)^{2x+1}$

বা, $3^{x+2y} = 3^{4x+2}$

বা, $x + 2y = 4x + 2$

$\therefore 3x - 2y + 2 = 0$ .... (iv)

(iii) নং কে 3 দ্বারা এবং (iv) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে বিয়োগ করে পাই,

$$\begin{array}{l} 6x - 3y + 6 = 0 \\ 6x - 4y + 4 = 0 \\ \underline{-\quad +\quad -} \\ \therefore \quad y + 2 = 0 \end{array}$$

$\therefore y = -2$

y এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই,

$3x + 4 + 2 = 0$

বা, $3x + 6 = 0$

বা, $3x = -6$

$\therefore x = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (-2, -2)$

[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ের উত্তর ভুল আছে]

(ঘ) $2^{2x+1}.2^{3y+1} = 8$

$2^{x+2}.2^{y+2} = 16$

সমাধান:

$2^{2x+1}.2^{3y+1} = 8$ ....(i)

$2^{x+2}.2^{y+2} = 16$ ....(ii)

(i) নং থেকে পাই,

$2^{2x+1}.2^{3y+1} = 8$

বা, $2^{2x+1+3y+1} = 2^3$

বা, $2^{2x+3y+2} = 2^3$

বা, $2x + 3y + 2 = 3$

$\therefore 2x + 3y - 1 = 0$ .... (iii)

(ii) নং থেকে পাই,

$2^{x+2}.2^{y+2} = 16$

বা, $2^{x+2+y+2} = 2^4$

বা, $x + y + 4 = 4$

বা, $x + y = 0$

$\therefore x = -y$ .... (iv)

(iv) নং থেকে x এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$-2y + 3y - 1 = 0$

$\therefore y = 1$

(iv) নং $y = 1$ বসিয়ে পাই,

$\therefore x = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (-1, 1)$