অধ্যায়-১১

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

অনুশীলনী-১১.১

অনুশীলনীটি পড়ে যা জানতে পারবে—

১. সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ধারণা ব্যাখ্যা।
২. দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়।
৩. দুইটি বিন্দুর দূরত্ব সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান।

স্কটিস গণিতবিদ জন নেপিয়ার (*John Napier*, 1550-1671) জোতির্বিদ্যার প্রতি তাঁর আগ্রহ ছিল যা গণিতে অবদান রাখতে সাহায্য করে। বড় বড় সংখ্যার গণনাকে অধিকতর ভালো ও সহজতর করতে একটি বিশেষ পদ্ধতি আবিষ্কার করেন যা বর্তমানে লগারিদম (*logarithm*) নামে পরিচিত।

১০টি অনুশীলনীর প্রশ্ন।
৪৮টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ■ ২৪টি সাধারণ বহুনির্বাচনি ■ ৫টি বহুপদী সমাপ্তিসূচক ■ ১৯টি অভিন্ন তথ্যভিত্তিক
১৬টি সৃজনশীল প্রশ্ন ■ ১১টি মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত ■ ৫টি প্রশ্নব্যাংক

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. প্রতিক্ষেত্রে প্রদত্ত বিন্দুসমূহের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

(i) (2, 3) ও (4, 6) **(ii) (−3, 7) ও (−7, 3)**

(iii) (a, b) ও (b, a) **(iv) (0, 0) ও (sinθ, cosθ)**

(v) $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ ও $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

সমাধান:

(i) ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় P(2, 3) এবং Q(4, 6)।

$\therefore$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব PQ $= \sqrt{(4-2)^2 + (6-3)^2}$
$= \sqrt{(2)^2 + (3)^2}$
$= \sqrt{4+9}$
$= \sqrt{13}$ একক

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{13}$ একক।

(ii) ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় P(−3, 7) এবং Q(−7, 3)

$\therefore$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব PQ $= \sqrt{\{-7-(-3)\}^2 + (3-7)^2}$
$= \sqrt{(-7+3)^2 + (-4)^2}$
$= \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2}$
$= \sqrt{16+16}$
$= \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$
$= \sqrt{16} \times \sqrt{2}$
$= 4\sqrt{2}$ একক

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= 4\sqrt{2}$ একক।

(iii) ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় P(a, b) এবং Q(b, a)

$\therefore$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব PQ $= \sqrt{(b-a)^2 + (a-b)^2}$
$= \sqrt{(a-b)^2 + (a-b)^2}$
$= \sqrt{2(a-b)^2}$
$= (a-b)\sqrt{2}$ একক

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= (a-b)\sqrt{2}$ একক।

(iv) ধরি,
প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় P(0, 0) এবং Q(sinθ, cosθ)

$\therefore$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব PQ $= \sqrt{(\sin\theta - 0)^2 + (\cos\theta - 0)^2}$
$= \sqrt{(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2}$
$= \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}$
$= \sqrt{1}$
$= 1$ একক

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব = 1 একক।

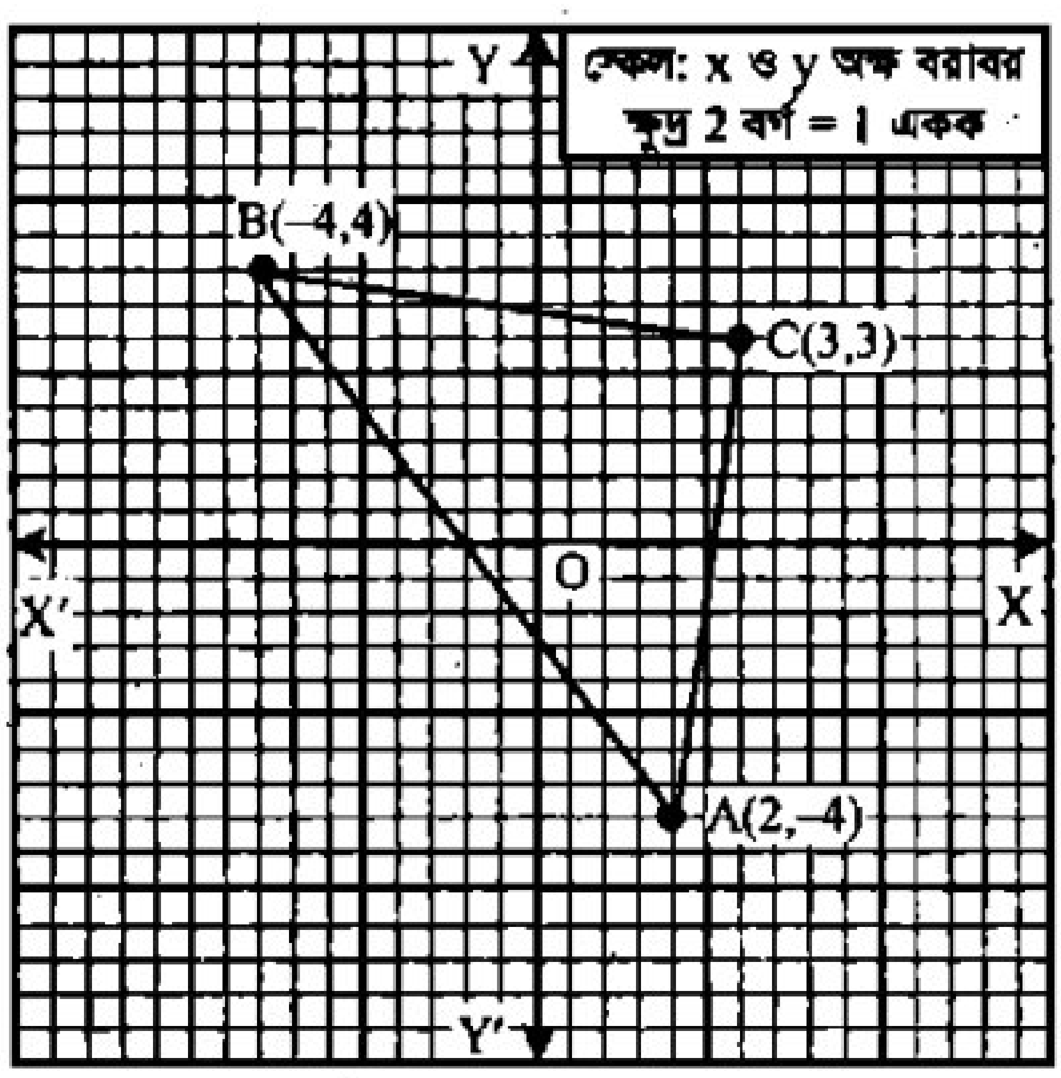
(v) ধরি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $P\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$
এবং $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$\therefore$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব PQ $= \sqrt{\left\{\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right\}^2 + \{2-(-1)\}^2}$
$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 + (2+1)^2}$
$= \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + (3)^2}$
$= \sqrt{4+9}$
$= \sqrt{13}$ একক

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{13}$ একক।

২. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে A(2, − 4), B(−4, 4) ও C(3, 3)। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং দেখাও যে, এটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দুসমূহ A(2, −4), B(−4, 4) এবং C(3, 3)। xy সমতলে বিন্দুগুলোর অবস্থান দেখানো হলো এবং A, B; B, C ও C, A যোগ করে ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হলো।



এখন, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-2)^2 + (4+4)^2}$

$= \sqrt{(-6)^2 + (8)^2}$

$= \sqrt{36 + 64}$

$= \sqrt{100}$

$= 10$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3+4)^2 + (3-4)^2}$

$= \sqrt{(7)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{49 + 1}$

$= \sqrt{50}$

$= 5\sqrt{2}$ একক

এবং AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-2)^2 + (3+4)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (7)^2}$

$= \sqrt{1 + 49}$

$= \sqrt{50}$

$= 5\sqrt{2}$ একক

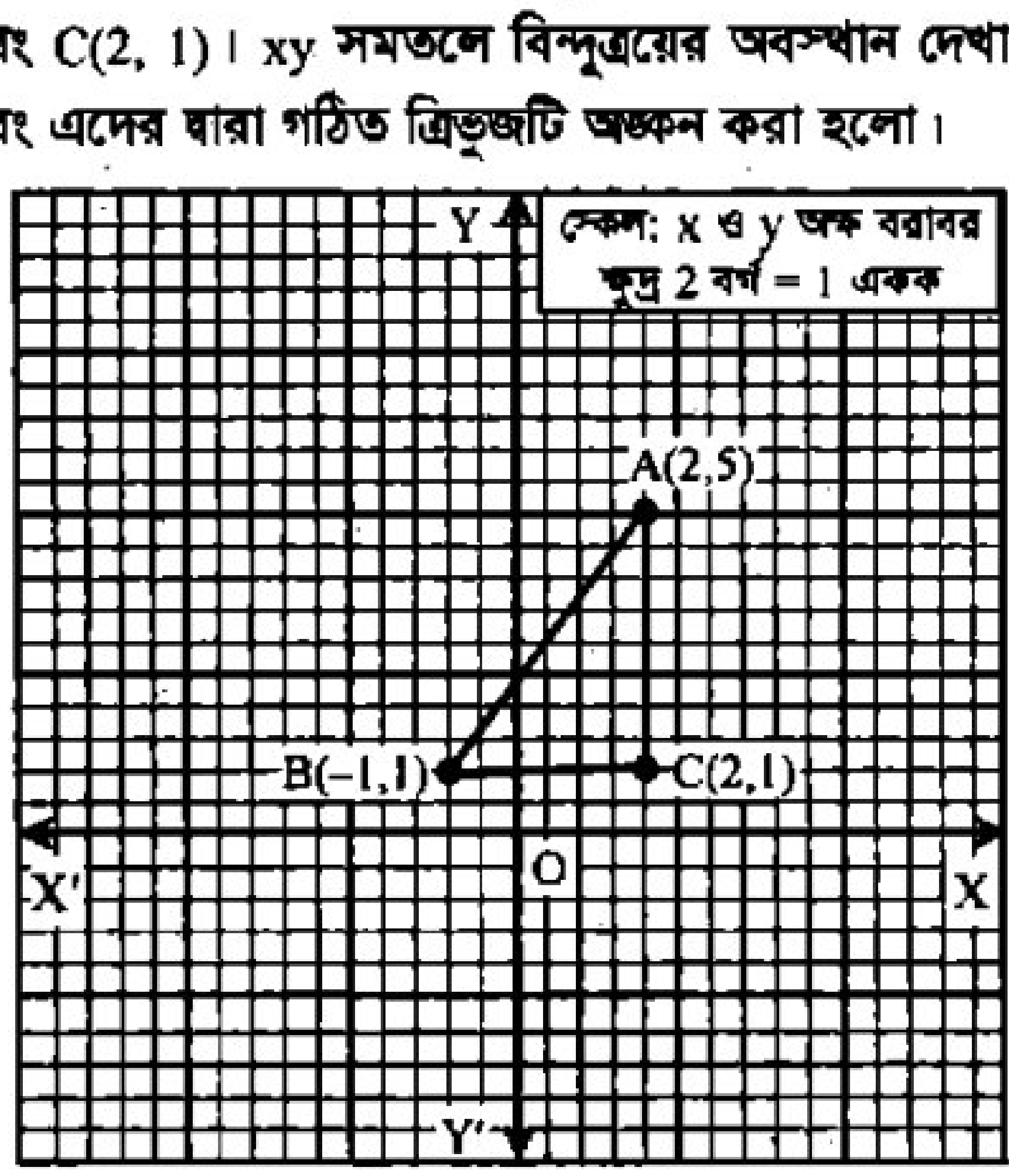
$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য $\neq$ BC বাহুর দৈর্ঘ্য = AC বাহুর দৈর্ঘ্য।

$\therefore$ A, B, C বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

(দেখানো হলো)

৩. A(2, 5), B(−1, 1) ও C(2, 1) একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। ত্রিভুজটি আঁক ও দেখাও যে এটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

সমাধান: দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(2, 5), B(−1, 1) এবং C(2, 1)। xy সমতলে বিন্দুত্রয়ের অবস্থান দেখানো হলো এবং এদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হলো।



এখন, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-2)^2 + (1-5)^2}$

$= \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2+1)^2 + (1-1)^2}$

$= \sqrt{(3)^2 + (0)^2}$

$= \sqrt{3^2}$

$= 3$ একক

এবং AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2-2)^2 + (1-5)^2}$

$= \sqrt{(0)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{4^2}$

$= 4$ একক

কিন্তু, $BC^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2$

$= 25$

$= 5^2$

$= AB^2$

$\therefore$ পীথাগোরাসের সূত্র অনুযায়ী ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

(দেখানো হলো)

৪. A(1, 2), B(−3, 5) ও C(5, −1) বিন্দুত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যায় কি না যাচাই কর।

সমাধান: প্রদত্ত বিন্দুত্রয় A(1, 2), B(−3, 5) ও C(5, −1)

এখন, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-3-1)^2 + (5-2)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{16 + 9}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+3)^2 + (-1-5)^2}$

$= \sqrt{(8)^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{64 + 36}$

$= \sqrt{100}$

$= 10$ একক

এবং AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-1)^2 + (-1-2)^2}$

$= \sqrt{(4)^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{16+9}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ একক

দেখা যাচ্ছে, $AB + AC = 5 + 5 = 10 = BC$

অর্থাৎ দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমান।

$\therefore$ বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং এদের দ্বারা কোনো ত্রিভুজ গঠন করা সম্ভব নয়।

৫. মূলবিন্দু থেকে (−5, 5) ও (5, k) বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী হলে k এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: মূলবিন্দু (0, 0) থেকে (−5, 5) বিন্দুর

দূরত্ব $= \sqrt{(-5-0)^2 + (5-0)^2}$

$= \sqrt{25 + 25}$

$= \sqrt{50}$

$= 5\sqrt{2}$ একক

আবার,

মূলবিন্দু (0, 0) থেকে (5, k) বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(5-0)^2 + (k-0)^2}$

$= \sqrt{5^2 + k^2}$

$= \sqrt{25 + k^2}$ একক

প্রশ্নানুসারে, $\sqrt{25+k^2} = 5\sqrt{2}$

বা, $25 + k^2 = 50$ [বর্গ করে]

বা, $k^2 = 25$

$\therefore\ k = \pm 5$

$\therefore$ নির্ণেয় মান, $k = 5, -5$

৬. দেখাও যে, $A(2, 2)$, $B(-2, -2)$ এবং $C(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। এর পরিসীমা তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A(2, 2)$, $B(-2, -2)$ এবং $C(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

এখানে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-2)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{4^2 + 4^2}$

$= \sqrt{2\times4^2}$

$= 4\sqrt{2}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2\sqrt{3}+2)^2 + (2\sqrt{3}+2)^2}$

$= \sqrt{(12 - 8\sqrt{3} + 4) + (12 + 8\sqrt{3} + 4)}$

$= \sqrt{16 - 8\sqrt{3} + 16 + 8\sqrt{3}}$

$= \sqrt{32}$

$= 4\sqrt{2}$ একক

এবং AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2\sqrt{3}-2)^2 + (2\sqrt{3}-2)^2}$

$= \sqrt{(12 + 8\sqrt{3} + 4) + (12 - 8\sqrt{3} + 4)}$

$= \sqrt{16 + 8\sqrt{3} + 16 - 8\sqrt{3}}$

$= \sqrt{32}$

$= 4\sqrt{2}$ একক

দেখা যাচ্ছে, $AB = BC = AC = 4\sqrt{2}$ একক

A, B, C বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। **(দেখানো হলো)**

ত্রিভুজটির পরিসীমা $= (AB + BC + AC)$

$= (4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$ একক

$= 12\sqrt{2}$ একক

$= 16.971$ একক

[তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত] (প্রায়) **(Ans.)**

৭. দেখাও যে, $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ ও $D(-5, 5)$ একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু।

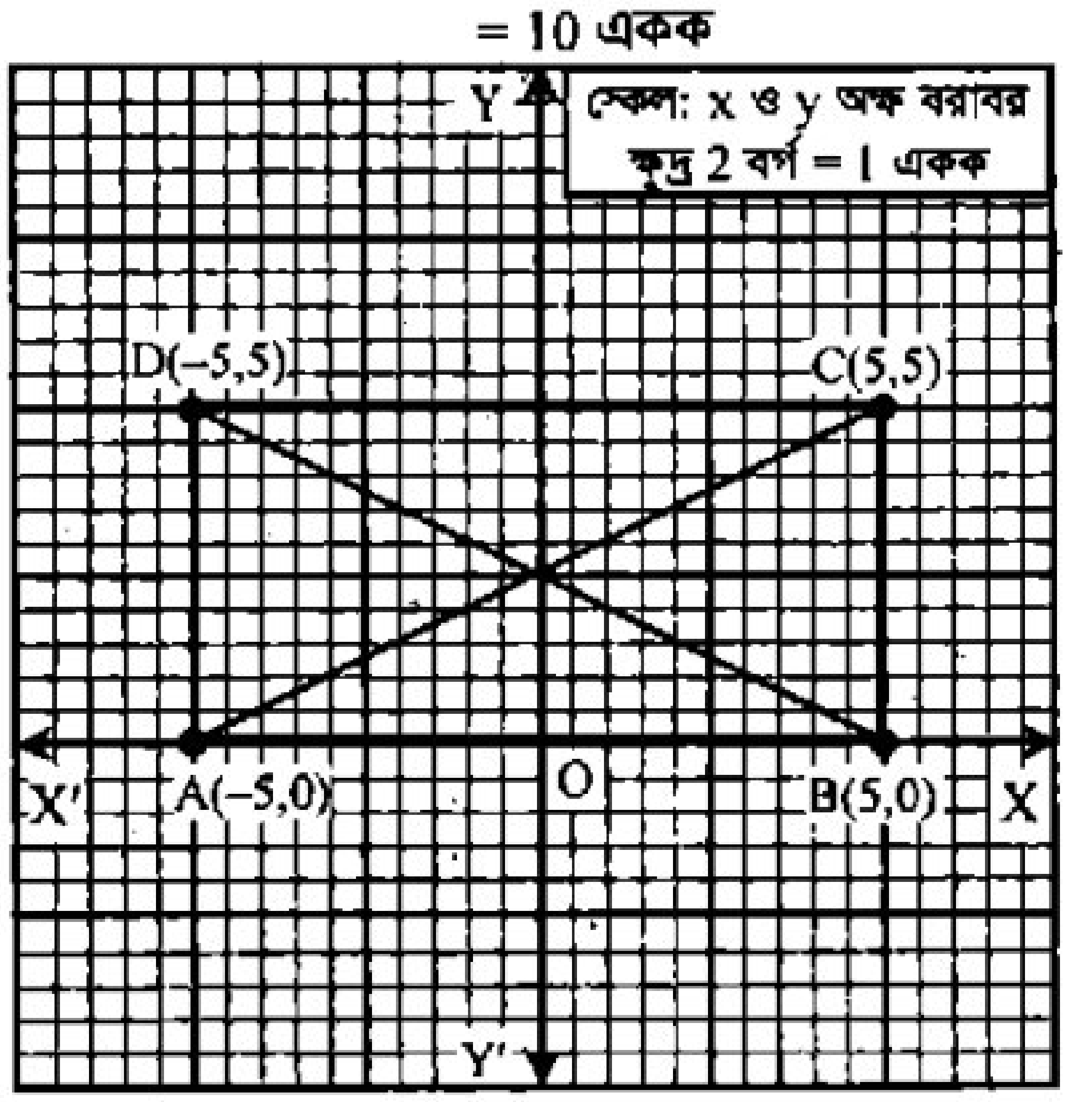
সমাধান: দেওয়া আছে, $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ ও $D(-5, 5)$

তাহলে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+5)^2 + (0-0)^2}$

$= \sqrt{(10)^2 + (0)^2}$

$= \sqrt{100}$

$= 10$ একক



BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-5)^2 + (5-0)^2}$

$= \sqrt{0^2 + 5^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (5-5)^2}$

$= \sqrt{(-10)^2 + 0^2}$

$= \sqrt{100}$

$= 10$ একক

এবং AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5+5)^2 + (5-0)^2}$

$= \sqrt{0^2 + 5^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$ একক

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (5-0)^2}$

$= \sqrt{10^2 + 5^2}$

$= \sqrt{100 + 25}$

$= \sqrt{125}$

$= 5\sqrt{5}$ একক

এবং BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (5-0)^2}$

$= \sqrt{(-10)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{100 + 25}$

$= \sqrt{125}$

$= 5\sqrt{5}$ একক

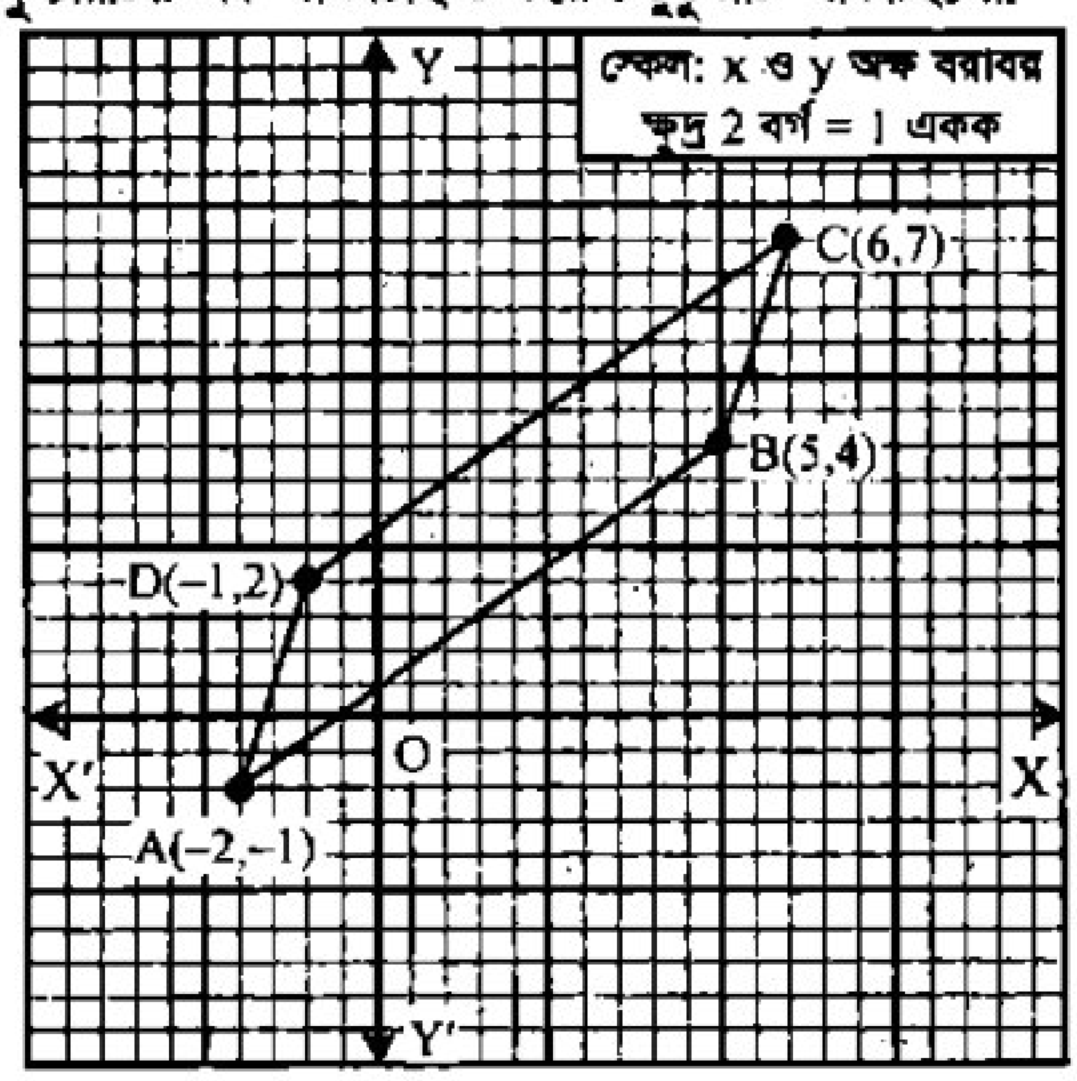
এখানে, $AB = CD$; $BC = AD$ এবং কর্ণ $AC =$ কর্ণ BD.

$\therefore$ A, B, C, D বিন্দু চারটি একটি আয়তক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু।

(দেখানো হলো)

৮. $A(-2, -1)$, $B(5, 4)$, $C(6, 7)$ এবং $D(-1, 2)$ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়তক্ষেত্র তা নির্ণয় কর।

সমাধান: xy সমতলে $A(-2, -1)$, $B(5, 4)$, $C(6, 7)$ এবং $D(-1, 2)$ বিন্দু চারটির অবস্থান চিহ্নিত করে চতুর্ভুজটি আঁকা হলো:



$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+2)^2 + (4+1)^2}$

$= \sqrt{(7)^2 + (5)^2}$

$= \sqrt{49 + 25}$

$= \sqrt{74}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-5)^2 + (7-4)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{1 + 9}$

$= \sqrt{10}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-6)^2 + (2-7)^2}$
$= \sqrt{(-7)^2 + (-5)^2}$
$= \sqrt{49 + 25}$
$= \sqrt{74}$ একক

এবং AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1+2)^2 + (2+1)^2}$
$= \sqrt{(1)^2 + (3)^2}$
$= \sqrt{1+9}$
$= \sqrt{10}$ একক

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+2)^2 + (7+1)^2}$
$= \sqrt{(8)^2 + (8)^2}$
$= \sqrt{64 + 64}$
$= \sqrt{128}$
$= 8\sqrt{2}$ একক

এবং BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-5)^2 + (2-4)^2}$
$= \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2}$
$= \sqrt{36+4}$
$= \sqrt{40}$
$= 2\sqrt{10}$ একক

এখানে, AB = CD এবং BC = AD। কিন্তু কর্ণ AC $\neq$ কর্ণ BD.

$\therefore$ A, B, C, D দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি সামান্তরিক।

৯. A(10, 5), B(7, 6), C(–3, 5) বিন্দুগুলোর মধ্যে কোনটি P(3, –2) এর সবচেয়ে নিকটবর্তী ও কোনটি সবচেয়ে দূরবর্তী।

সমাধান: দেওয়া আছে, A(10, 5), B(7, 6), C(–3, 5) এবং P(3, –2)

এখানে, A, P বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী

দূরত্ব AP $= \sqrt{(3-10)^2 + (-2-5)^2}$
$= \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2}$
$= \sqrt{49 + 49}$
$= \sqrt{98}$
$= 7\sqrt{2}$ একক $= 9.899$ একক (প্রায়)

B, P বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব BP $= \sqrt{(3-7)^2 + (-2-6)^2}$
$= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2}$
$= \sqrt{16 + 64}$
$= \sqrt{80}$
$= 4\sqrt{5}$ একক
$= 8.944$ একক (প্রায়)

C, P বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব CP $= \sqrt{(3+3)^2 + (-2-5)^2}$
$= \sqrt{(6)^2 + (-7)^2}$
$= \sqrt{36 + 49}$
$= \sqrt{85}$ একক
$= 9.220$ একক (প্রায়)

$\therefore$ P বিন্দুর সবচেয়ে নিকটবর্তী বিন্দু B এবং সবচেয়ে দূরবর্তী বিন্দু A।

১০. P(x, y) বিন্দু থেকে y-অক্ষের দূরত্ব এবং Q(3, 2) বিন্দুর দূরত্ব সমান। প্রমাণ কর যে, $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$

সমাধান: ধরি, y-অক্ষের উপর যে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক, A(0, y)।

এখন, P(x, y) ও A(0, y) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী

দূরত্ব PA $= \sqrt{(0-x)^2 + (y-y)^2}$
$= \sqrt{(-x)^2 + 0^2}$
$= \sqrt{x^2}$
$= x$ একক

এবং P(x, y) ও Q(3, 2) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী

দূরত্ব PQ $= \sqrt{(3-x)^2 + (2-y)^2}$
$= \sqrt{(9 - 6x + x^2) + (4 - 4y + y^2)}$
$= \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}$ একক

প্রশ্নানুসারে, PQ = PA

বা, $\sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13} = x$

বা, $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = x^2$ [বর্গ করে]

$\therefore$ $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$ (প্রমাণিত)

মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

★★★ **১১.১ আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক** | Text পৃষ্ঠা-২২৫

- পরস্পরছেদী দুইটি সরলরেখা হতে কোনো নির্দিষ্ট দূরত্বে কেবলমাত্র একটি বিন্দুই থাকতে পারে।
- পরস্পর সমকোণে ছেদ করে এরূপ একজোড়া অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ককে আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলা হয়।
- বিন্দুর স্থানাঙ্ক সূচক (x, y) একটি ক্রমজোড় যার প্রথমটি ভুজ ও দ্বিতীয়টি কোটি।
- x-অক্ষের উপর কোনো বিন্দুর y এর স্থানাঙ্ক শূন্য এবং y-অক্ষের উপর কোনো বিন্দুর x এর স্থানাঙ্ক শূন্য।

১. আয়তাকার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় পরস্পরচ্ছেদী অক্ষ দুইটি হতে একটি নির্দিষ্ট দূরত্বে কয়টি বিন্দু থাকতে পারে? (সহজ)

ক 1 খ 2 গ 3 ঘ 4 — ক

২. আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে পরস্পরচ্ছেদী অক্ষ দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত ডিগ্রি? (সহজ)

ক 0 খ 45 গ 90 ঘ 180 — গ

ব্যাখ্যা: আয়তাকার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় অক্ষ দুটি পরস্পর লম্ব বলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ 90°.

৩. মূল বিন্দু হতে 3 একক ডানে x-অক্ষের উপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নিচের কোনটি? (সহজ)

ক (0, 3) খ (0, – 3) গ (3, 0) ঘ (–3, 0) — গ

৪. মূলবিন্দু থেকে y-অক্ষের ধনাত্মক দিক বরাবর একটি বিন্দুর অবস্থান 4 একক দূরে, বিন্দুটির স্থানাঙ্ক কোনটি? (সহজ)

ক (0, 3) খ (0, 0) গ (0, 4) ঘ (7, 1) — গ

৫. x অক্ষের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর y-স্থানাঙ্ক (কোটি) কত? (সহজ)

ক 2 খ y গ 10 ঘ 0 — ঘ

৬. y-অক্ষের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর x-স্থানাঙ্ক (ভুজ) কত? (সহজ)

ক 2 খ y গ 7 ঘ 0 — ঘ

৭. A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (–4, 2)। A বিন্দুটির অবস্থান কোন চতুর্ভাগে? (সহজ)

ক ১ম খ ২য় গ ৩য় ঘ ৪র্থ — খ

৮. কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় মূলবিন্দু 'O' এর স্থানাঙ্ক কোনটি? (সহজ)

ক (2, 10) খ (0, 0) গ (7, 3) ঘ (1, 2) — খ