শ্রেণির কাজ পৃষ্ঠা নং ৫৪৪

অধ্যায়-৭

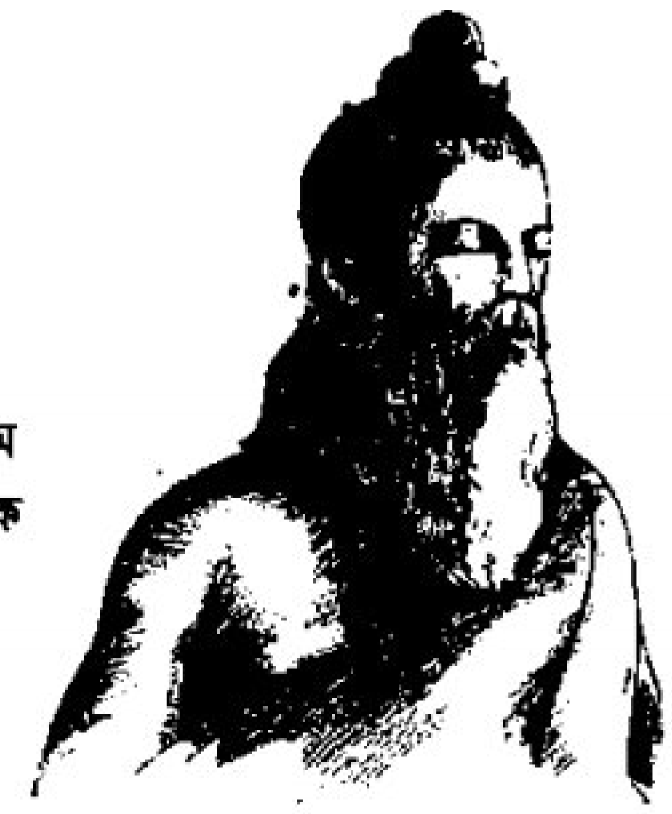
অসীম ধারা

অনুশীলনী-৭

অধ্যায়টি পড়ে যা জানতে পারবে—

১. অনুক্রমের ধারণা ব্যাখ্যা
২. অসীম ধারা চিহ্নিত
৩. অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি থাকার শর্ত ব্যাখ্যা
৪. অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয়
৫. আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাকে অনন্ত গুণোত্তর ধারায় প্রকাশ এবং সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর।

প্রাচীন ভারতীয় গণিতবিদ ও জ্যোতির্বিদ ব্রহ্মগুপ্ত (*Brahmagupta*, 598-665) শূন্যকে (0) সংখ্যা হিসাবে প্রথম ব্যবহার করেন। তিনি n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের ও ঘনের যোগফল নির্ণয়ের সূত্র আবিষ্কার করেন।



PRACTICE

১৬টি অনুশীলনীর প্রশ্ন |
১৩১টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ■ ৬৫টি সাধারণ বহুনির্বাচনি ■ ২৫টি বহুপদী সমাপ্তিসূচক ■ ৪১টি অভিন্ন তথ্যভিত্তিক
২৭টি সৃজনশীল প্রশ্ন ■ ২টি অনুশীলনী ■ ৩টি শ্রেণির কাজ ■ ১৪টি মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত ■ ৮টি প্রশ্নব্যাংক

অনুশীলনীর সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১. 1, 3, 5, 7, ধারাটির 12 তম পদ কোনটি?

ক. 12　　খ. 13
গ. 23　　ঘ. 25　　(গ)

ব্যাখ্যা: ১ম পদ $a = 1$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 2$

$\therefore$ r তম পদ $= a + (r-1)d$

$\therefore$ 12 তম পদ $= 1 + (12-1) \times 2 = 23$

২. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $= \frac{1}{n(n+1)}$, এর ৩য় পদ কোনটি?

ক. $\frac{1}{3}$　　খ. $\frac{1}{6}$
গ. $\frac{1}{12}$　　ঘ. $\frac{1}{20}$　　(গ)

ব্যাখ্যা: n তম পদ $= \frac{1}{n(n+1)}$

$\therefore$ ৩য় পদ $= \frac{1}{3(3+1)} = \frac{1}{12}$

৩. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $= \frac{1-(-1)^n}{2}$ হলে 20 তম পদ কোনটি?

ক. 0　　খ. 1
গ. −1　　ঘ. 2　　(ক)

ব্যাখ্যা: n তম পদ $= \frac{1-(-1)^n}{2}$

$\therefore$ 20 তম পদ $= \frac{1-(-1)^{20}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$

৪. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $U_n = \frac{1}{n}$ এবং $U_n < 10^{-4}$ হলে n এর মান হবে—

i $n < 10^3$
ii $n < 10^4$
iii $n > 10^4$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i　　খ. ii ও iii
গ. i ও iii　　ঘ. i, ii ও iii

[বি:দ্র: সঠিক উত্তর নেই।]

ব্যাখ্যা: $U_n = \frac{1}{n}$ এবং $U_n < 10^{-4} = \frac{1}{10^4}$

$\therefore \frac{1}{n} < \frac{1}{10^4}$

বা, $n > 10^4$

নিম্নের ধারাটি লক্ষ কর এবং (৫-৭) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

$4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \ldots\ldots\ldots$

৫. ধারাটির 10 তম পদ কোনটি?

ক. $\frac{4}{3^{10}}$　　খ. $\frac{4}{3^9}$
গ. $\frac{4}{3^{11}}$　　ঘ. $\frac{4}{3^{12}}$　　(খ)

ব্যাখ্যা: প্রথম পদ $a = 4$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{3}$

$\therefore$ n তম পদ $= a.r^{n-1}$

$\therefore$ 10 পদ $= 4.\left(\frac{1}{3}\right)^{10-1} = \frac{4}{3^9}$

৬. ধারাটির প্রথম 5 পদের সমষ্টি কত?

ক. $\frac{160}{27}$　　খ. $\frac{484}{81}$
গ. $\frac{12}{9}$　　ঘ. $\frac{20}{9}$　　(খ)

ব্যাখ্যা: $S_5 = 4.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\frac{1}{3}}$ $\left[\because r = \frac{1}{3} < 1\right]$

$= 4.\frac{\frac{242}{243}}{\frac{2}{3}} = 4 \times \frac{242}{243} \times \frac{3}{2} = \frac{484}{81}$

৭. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

ক. 0　　খ. 5
গ. 6　　ঘ. 7　　(গ)

ব্যাখ্যা: $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{2}{3}} = 6$

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

৮. প্রদত্ত অনুক্রমের 10 তম পদ, 15 তম পদ এবং r তম পদ নির্ণয় কর:

(ক) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

সমাধান: এখানে, 2, 4, 6, 8, 10, 12 .... অনুক্রমটি একটি সমান্তর ধারা, যার

প্রথম পদ $a = 2$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 4 - 2 = 2$

$\therefore$ r তম পদ $= a + (r - 1)d$
$= 2 + (r - 1)2$
$= 2 + 2r - 2$
$= 2r$

$\therefore$ 10 তম পদ $= 2 \times 10 = 20$

এবং 15 তম পদ $= 2 \times 15 = 30$

Ans. 20, 30 এবং 2r

(খ) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$, ...

সমাধান: $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$, ...

অনুক্রমটি একটি সমান্তর ধারা, যার

প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2}$ এবং সাধারণ অন্তর, $d = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ r তম পদ $= a + (r - 1)d$
$= \frac{1}{2} + (r - 1)\frac{1}{2}$
$= \frac{1}{2} + \frac{r}{2} - \frac{1}{2}$
$= \frac{r}{2}$

$\therefore$ 10 তম পদ $= \frac{10}{2} = 5$ এবং 15 তম পদ $= \frac{15}{2}$

Ans. 5, $\frac{15}{2}$ এবং $\frac{r}{2}$

(গ) অনুক্রমটির nতম পদ $= \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$

সমাধান: এখানে, অনুক্রমটির n তম পদ $= \frac{1}{n(n+1)}$,

যেখানে, $n \in \mathbb{N}$

$n = r$ বসিয়ে পাই, r তম পদ $= \frac{1}{r(r+1)}$

$n = 10$ বসিয়ে পাই,

10 তম পদ $= \frac{1}{10(10+1)} = \frac{1}{10 \times 11} = \frac{1}{110}$

$n = 15$ বসিয়ে পাই,

15 তম পদ $= \frac{1}{15(15+1)} = \frac{1}{15 \times 16} = \frac{1}{240}$

Ans. $\frac{1}{110}, \frac{1}{240}$ এবং $\frac{1}{r(r+1)}$

(ঘ) 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...

সমাধান: প্রদত্ত অনুক্রম 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...

এখানে, ধারাটির জোড় তম পদ 1 এবং বিজোড় তম পদ 0

10 জোড় বিধায় 10 তম পদ = 1

15 বিজোড় বিধায় 15 তম পদ = 0

r জোড় হলে r তম পদ = 1

r বিজোড় হলে r তম পদ = 0

Ans. 1, 0 এবং 1 (r জোড় হলে) অথবা 0 (r বিজোড় হলে)

(ঙ) $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}$, ...

সমাধান: এখানে, প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

যার প্রথম পদ $a = 5$

সাধারণ অনুপাত $q = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{5}{3 \times 5} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ r তম পদ $= aq^{r-1}$
$= 5\left(\frac{1}{3}\right)^{r-1}$
$= \frac{5}{3^{r-1}}$

$r = 10$ বসিয়ে পাই,

10 তম পদ $= 5\left(\frac{1}{3}\right)^{10-1} = 5\left(\frac{1}{3}\right)^9$
$= 5.\frac{1}{3^9} = \frac{5}{3^9}$

$r = 15$ বসিয়ে পাই,

15 তম পদ $= 5\left(\frac{1}{3}\right)^{15-1}$
$= 5\left(\frac{1}{3}\right)^{14} = \frac{5}{3^{14}}$

Ans. $\frac{5}{3^9}; \frac{5}{3^{14}}$ এবং $\frac{5}{3^{r-1}}$

(চ) অনুক্রমটির nতম পদ $= \frac{1-(-1)^{3n}}{2}$

সমাধান: প্রদত্ত অনুক্রমটির n তম পদ হলো $\frac{1-(-1)^{3n}}{2}$

$n = r$ বসিয়ে পাই,

r তম পদ $= \frac{1-(-1)^{3r}}{2}$
$= \frac{1-1}{2}$ যখন r জোড় এবং $\frac{1+1}{2}$ যখন r বিজোড়
$= 0$ যখন r জোড় এবং 1 যখন r বিজোড়

$r = 10$ বসিয়ে পাই,

10 তম পদ = 0 [$\because$ 10 জোড় সংখ্যা]

$r = 15$ বসিয়ে পাই,

15 তম পদ = 1 [$\because$ 15 বিজোড় সংখ্যা]

Ans. 0, 1 এবং 0 (r জোড় হলে), 1 (r বিজোড় হলে)

৯. একটি অনুক্রমের nতম পদ $U_n = \frac{1}{n}$

(ক) $u_n < 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?

সমাধান: দেওয়া আছে, অনুক্রমটির n তম পদ $U_n = \frac{1}{n}$

এখন $u_n < 10^{-5}$

$\therefore \frac{1}{n} < 10^{-5}$

বা, $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^5}$

$\therefore n > 10^5$

Ans. $n > 10^5$

(খ) $u_n > 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?

সমাধান: দেওয়া আছে, অনুক্রমটির n তম পদ $u_n = \frac{1}{n}$

এবং $u_n > 10^{-5}$

$\therefore \frac{1}{n} > 10^{-5}$

বা, $\frac{1}{n} > \frac{1}{10^5}$

$\therefore n < 10^5$

Ans. $n < 10^5$

(গ) u_n এর প্রান্তীয় মান (n যথেষ্ট বড় হলে) সম্পর্কে কী বলা যায়?

সমাধান: দেওয়া আছে, একটি অনুক্রমের nতম পদ $u_n = \frac{1}{n}$

যখন n যথেষ্ট বড় হবে অর্থাৎ $n \to \infty$ হবে তখন

$u_{n \to \infty} = \frac{1}{n \to \infty} = 0$

$\therefore$ u_n এর প্রান্তীয়মান 0 (শূন্য)

Ans. 0 (শূন্য)

১০. গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে, $r \neq 1$ হলে, গুণোত্তর ধারা $a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$ এর n তম আংশিক সমষ্টি, $S_n = a.\frac{1 - r^n}{1 - r}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a + ar + ar^2 + ...$

এটি একটি গুণোত্তর ধারা, যার ১ম পদ = a

এবং সাধারণ অনুপাত $= \frac{ar}{a} = r$

$\therefore$ ধারাটির nতম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ প্রদত্ত গুণোত্তর ধারার nতম আংশিক সমষ্টি

$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$; $r \neq 1$,

অর্থাৎ, $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$; $r \neq 1$ প্রমাণ করাই যথেষ্ট।

প্রথম ধাপ:

এখানে, $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ ... ... (i)

n = 1 এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

কারণ তখন বামপক্ষ = a

এবং ডানপক্ষ $= \frac{a(1 - r^1)}{1 - r} = \frac{a(1-r)}{(1-r)} = a$

দ্বিতীয় ধাপ:

ধরি, n = m এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য, অর্থাৎ

$a + ar + ar^2 + ... + ar^{m-1} = \frac{a(1 - r^m)}{1 - r}$ ... ... (ii)

এখন (i) বাক্যটি n = m + 1 এর জন্যও সত্য হবে যদি

$a + ar + ar^2 + ... + ar^{m+1-1} = \frac{a(1 - r^{m+1})}{1 - r}$

বা, $a + ar + ar^2 + ... + ar^m = \frac{a(1 - r^{m+1})}{1 - r}$ .... (iii) সত্য হয়।

এখন (ii) নং এর উভয় পক্ষে ar^m যোগ করে পাই,

$a + ar + ar^2 + ... + ar^{m-1} + ar^m = \frac{a(1 - r^m)}{1 - r} + ar^m$

$= \frac{a - ar^m + ar^m - ar^m.r}{1 - r}$

$= \frac{a - ar^{m+1}}{1 - r}$

$= \frac{a(1 - r^{m+1})}{1 - r}$

$\therefore$ (iii) বাক্যটি প্রমাণিত হলো অর্থাৎ n = m + 1 এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

$\therefore$ গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য। **(দেখানো হলো)**

১১. প্রদত্ত অসীম গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে, তবে তা নির্ণয় কর:

(ক) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$

সমাধান: ধারাটির ১ম পদ, a = 1

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$

এখানে $|r| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$, সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Ans. 2

(খ) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} - \frac{8}{5^4} + ...$

সমাধান: ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{5}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{2}{5^2} \div \frac{1}{5} = -\frac{2}{5^2} \times 5 = -\frac{2}{5}$

এখানে $|r| = |-\frac{2}{5}| = \frac{2}{5} < 1$, সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি,

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{7}$$

Ans. $\frac{1}{7}$

(গ) $8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + ...$

সমাধান: ধারাটির ১ম পদ, a = 8

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = 2 \div 8 = \frac{1}{4}$

এখানে $|r| = |\frac{1}{4}| = \frac{1}{4} < 1$, সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{8}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{\frac{3}{4}} = \frac{32}{3}$

Ans. $\frac{32}{3}$

(ঘ) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ...$

সমাধান: ধারাটির ১ম পদ, a = 1

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{2}{1} = 2$

এখানে $|r| = |2| = 2 > 1$, সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নেই।

Ans. সমষ্টি নেই।

(ঙ) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+\left(-\frac{1}{16}\right)+ \ldots\ldots\ldots$

সমাধান: ধারাটির ১ম পদ, $a=\frac{1}{2}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r=-\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{4}\times 2=-\frac{1}{2}$

এখানে $|r|=\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$, সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বিদ্যমান।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\frac{a}{1-r}$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Ans. $\frac{1}{3}$

১২. নিচের ধারাগুলোর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর। এগুলোর অসীমতক সমষ্টি আছে কি? না থাকলে ব্যাখ্যা দাও।

(ক) $7+77+777+\ldots\ldots\ldots$

সমাধান: $7+77+777+\ldots\ldots\ldots+n$ তম পদ

$=7(1+11+111+\ldots\ldots\ldots+n$ তম পদ$)$

$=\frac{7}{9}(9+99+999+\ldots\ldots\ldots+n$ তম পদ$)$

$=\frac{7}{9}\{(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\ldots.+n$ তম পদ$\}$

$=\frac{7}{9}\{(10+10^2+10^3+\ldots\ldots+n$ তম পদ$)-(1+1+1+\ldots\ldots+n$ তম পদ$)\}$

$=\frac{7}{9}\{10(1+10+10^2+\ldots\ldots\ldots+n$ তম পদ$)-n\}$

$=\frac{7}{9}\left\{\left(10\cdot\frac{10^n-1}{10-1}\right)-n\right\}$

$=\frac{70}{81}(10^n-1)-\frac{7n}{9}$ **(Ans.)**

$\because$ ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n=\frac{70}{81}(10^n-1)-\frac{7n}{9}$

ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি নেই।

ব্যাখ্যা: $7+77+777+\ldots\ldots\ldots$

$=\frac{7}{9}\{(10+10^2+10^3+\ldots\ldots)-(1+1+1+\ldots\ldots)\}$

এখন, $10+10^2+10^3+\ldots\ldots\ldots$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{10^2}{10}=10$

যেহেতু $|r|=|10|=10>1$ কাজেই ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি নেই।

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি নেই। **(Ans.)**

(খ) $5+55+555+\ldots\ldots\ldots$

সমাধান: $5+55+555+\ldots\ldots\ldots+n$ তম পদ

$=5(1+11+111+\ldots\ldots\ldots+n$ তম পদ$)$

$=\frac{5}{9}(9+99+999+\ldots\ldots+n$ তম পদ$)$

$=\frac{5}{9}(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)\ldots.+n$ তম পদ$)$

$=\frac{5}{9}\{(10+10^2+10^3+\ldots\ldots+n$ তম পদ$)-(1+1+1+\ldots\ldots+n$ তম পদ$)\}$

$=\frac{5}{9}\{10(1+10+10^2+\ldots\ldots\ldots+n$ তম পদ$)-n\}$

$=\frac{5}{9}\left(10\cdot\frac{10^n-1}{10-1}-n\right)$

$=\frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5n}{9}$ **(Ans.)**

অতএব, ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S_n=\frac{50}{81}(10^n-1)-\frac{5n}{9}$

ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি নেই।

ব্যাখ্যা: $5+55+555+\ldots\ldots\ldots$

$=\frac{5}{9}\{(10+10^2+10^3+\ldots\ldots\ldots)-(1+1+1+\ldots\ldots\ldots)\}$

এখন, $10+10^2+10^3+\ldots\ldots\ldots$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{10^2}{10}=10$

যেহেতু, $|r|=|10|\ 10>1$ কাজেই ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি নেই।

$\therefore$ প্রদত্ত ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি নেই। **(Ans.)**

১৩. x-এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\ldots\ldots\ldots$ অসীম ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটি, $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\ldots\ldots$

এখানে, প্রথম পদ, $a=\frac{1}{x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত,

$$r=\frac{1}{(x+1)^2}\div\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+1}$$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r|<1$ হয়,

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{x+1}\right|<1$

বা, $\frac{1}{|x+1|}<1$

বা, $|x+1|>1$

এখন $|(x+1)|$ অঋণাত্মক হলে, $x+1>1$ বা, $x>0$

আবার $|(x+1)|$ ঋণাত্মক হলে, $-(x+1)>1$ বা, $x+1<-1$

বা, $x<-2$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত হচ্ছে: $x<-2$ অথবা $x>0$

$\therefore$ অসমীতক সমষ্টি, $S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{x+1}}{1-\frac{1}{x+1}}=\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x+1-1}{x+1}}$

$=\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x+1}}=\frac{1}{x+1}\times\frac{x+1}{x}$

$=\frac{1}{x}$

Ans. শর্ত: $x<-2$ অথবা $x>0$; সমষ্টি $\frac{1}{x}$

১৪. প্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিকগুলোকে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

(ক) $.\dot{2}\dot{7}$

সমাধান: $.\dot{2}\dot{7} = .27\,27\,27\,27\,27\,27 \ldots\ldots$

$= .27 + .0027 + .000027 + \ldots\ldots$

যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির ১ম পদ, $a = .27$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{.0027}{.27} = .01 < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{.27}{1-.01}$

$= \frac{.27}{.99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$

$\therefore .\dot{2}\dot{7} = \frac{3}{11}$

Ans. $\frac{3}{11}$

(খ) $2.\dot{3}0\dot{5}$

সমাধান: $2.\dot{3}0\dot{5} = 2.\,305\,305\,305 \ldots\ldots$

$= 2 + .305 + .000305 + .000000305 + \ldots\ldots$

এখানে, $.305 + .000305 + .000000305 + \ldots\ldots$

যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির ১ম পদ, $a = .305$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{.000305}{.305} = .001 < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{.305}{1-.001}$

$= \frac{.305}{.999}$

$= \frac{305}{999}$

$\therefore 2.\dot{3}0\dot{5} = 2 + \frac{305}{999} = \frac{2303}{999} = 2\frac{305}{999}$

Ans. $2\frac{305}{999}$

(গ) $.0\dot{1}2\dot{3}$

সমাধান: $0.0\dot{1}2\dot{3} = .0123123123 \ldots\ldots$

$= .0123 + .0000123 + .0000000123 + \ldots$

যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা

ধারাটির ১ম পদ, $a = .0123$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{.0000123}{.0123}$

$= \frac{123}{10000000} \times \frac{10000}{123}$

$= \frac{1}{1000} = .001 < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{.0123}{1-.001} = \frac{.0123}{.999}$

$= \frac{123}{9990} = \frac{41}{3330}$

$\therefore .0\dot{1}2\dot{3} = \frac{41}{3330}$

Ans. $\frac{41}{3330}$

(ঘ) $3.0\dot{4}0\dot{3}$

সমাধান: $3.0\dot{4}0\dot{3} = 3.0403403403 \ldots\ldots\ldots$

$= 3 + .0403 + .0000403 + .0000000403 + \ldots\ldots$

এখানে, $.0403 + .0000403 + .0000000403 + \ldots\ldots$

একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা। যার ১ম পদ, $a = .0403$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{.0000403}{.0403} = .001 < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{.0403}{1-.001}$

$= \frac{.0403}{.999} = \frac{403}{9990}$

$\therefore 3.0\dot{4}0\dot{3} = 3 + \frac{403}{9990} = \frac{30373}{9990} = 3\frac{403}{9990}$

Ans. $3\frac{403}{9990}$

অনুশীলনীর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ১৫ একটি অনুক্রমের n তম পদ $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$

ক. ধারাটি নির্ণয় করে সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

খ. ধারাটির 15 তম পদ এবং ১ম 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর এবং n এর মান যথেষ্ট ছোট হলে U_n এর প্রান্তীয় মান সম্পর্কে কী বলা যায়?

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, একটি অনুক্রমের nতম পদ $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$\therefore$ ধারাটি হলো, $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots$

$= \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)} + \frac{1}{3(3+1)} + \frac{1}{4(4+1)} + \ldots\ldots$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots\ldots$

ধারার সাধারণ অনুপাত নেই কারণ এটি গুণোত্তর ধারা নয়।

খ ধারাটির 15 তম পদ $U_{15} = \frac{1}{15(15+1)} = \frac{1}{240}$

এখন, $U_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

সুতরাং, ১ম 10 পদের সমষ্টি

$S_{10} = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_{10}$

$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right)$

$= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$

$\therefore$ 15-তম পদ, $U_{15} = \frac{1}{240}$ **(Ans.)**

এবং ১ম 10-পদের সমষ্টি $= \frac{10}{11}$ **(Ans.)**

গ ধারাটির n-পদের সমষ্টি,

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n$$
$$= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{1}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$
$$\therefore S_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$n \to \infty$ (অসীম) হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি,

$$S_\infty = \frac{1}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1 \quad [\because \frac{1}{\infty} = 0]$$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি 1 **(Ans.)**

$U_n = \frac{1}{n(n+1)}$ এখানে দেখা যায় যে, n এর মান বৃদ্ধি পেলে U_n এর মান হ্রাস পায় এবং n এর মান হ্রাস পেলে U_n এর মান বৃদ্ধি পায়। n এর মান যথেষ্ট ছোট হলে U_n এর প্রান্তীয় মান পাওয়া যায় না অর্থাৎ অসীমের দিকে ধাবিত হয়।

প্রশ্ন ▶ ১৬ **নিম্নের ধারাটি লক্ষ কর:**

$$\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^3}+\ldots\ldots\ldots$$

ক. x = 1 হলে ধারাটি নির্ণয় কর এবং প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?

খ. ক নং এ প্রাপ্ত ধারাটির 10তম পদ এবং ১ম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. প্রদত্ত ধারাটি x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৬নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^3}+\ldots\ldots\ldots$

x = 1 হলে, ধারাটি হলো–

$$\frac{1}{2.1+1}+\frac{1}{(2.1+1)^2}+\frac{1}{(2.1+1)^3}+\ldots\ldots\ldots$$
$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots \textbf{ (Ans.)}$$

এক্ষেত্রে ধারাটির সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ **(Ans.)**

খ 'ক' নং এ, প্রাপ্ত ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{3}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটির 10তম পদ $= a.\, r^{10-1} = \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}}$

আবার, ধারাটির ১ম 10 টি পদের সমষ্টি $S_{10} = a.\frac{1-r^n}{1-r}$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}} \quad [\because |r| < 1]$$
$$= \frac{1}{3}.\frac{1-\frac{1}{3^{10}}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}.\frac{\frac{3^{10}-1}{3^{10}}}{\frac{2}{3}}$$
$$= \frac{1}{3}\times\frac{3^{10}-1}{3^{10}}\times\frac{3}{2} = \frac{3^{10}-1}{2.3^{10}}$$

$\therefore$ ধারাটির 10 তম পদ $\frac{1}{3^{10}}$ ও ১ম 10টি পদের সমষ্টি $\frac{3^{10}-1}{2.3^{10}}$ **(Ans.)**

গ প্রদত্ত ধারাটির ১ম পদ, $a = \frac{1}{2x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(2x+1)^2} \div \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2x+1}$

প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি, $|r| < 1$

অর্থাৎ, $\left|\frac{1}{2x+1}\right| < 1$ বা, $-1 < \frac{1}{2x+1} < 1$ হয়।

এখন, $-1 < \frac{1}{2x+1}$

বা, $\frac{1}{-1} > 2x+1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $-1-1 > 2x+1-1$ [উভয়পক্ষে (–1) যোগ করে]

বা, $-2 > 2x$

বা, $-1 > x$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore x < -1$

আবার, $\frac{1}{2x+1} < 1$

বা, $2x+1 > 1$

বা, $2x > 1-1$ [উভয়পক্ষে (–1) যোগ করে]

বা, $2x > 0$

$\therefore x > 0$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত: $x < -1$ অথবা $x > 0$. **(Ans.)**

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}} = \frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{2x}{2x+1}}$$
$$= \frac{1}{2x+1}\times\frac{2x+1}{2x} = \frac{1}{2x} \textbf{ (Ans.)}$$

মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

★★★ অনুক্রম | Text পৃষ্ঠা-১২৫

- কতকগুলো রাশি যদি একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমানয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যেখানে পূর্বের পদ পরের পদের সাথে সম্পর্কিত, সেই সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম বলে।
- যে কোনো অনুক্রমের পদসংখ্যা অসীম।
- বর্গসংখ্যার সেট {1, 4, 9, 16 ... ...} একটি অনুক্রম যার সাধারণ পদ $\{n^2\}$।
- অনুক্রমের সাধারণ পদ দ্বারা অনুক্রম গঠিত হয়।

১. **নিচের কোনটি অনুক্রম?** (সহজ) [ঝালকাঠি সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠি]

ক $3+1-1-3-\ldots\ldots$

খ $3.1+(-1)(-3)+\ldots\ldots$

গ $1, 2, 3, \ldots\ldots$

ঘ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots$

গ