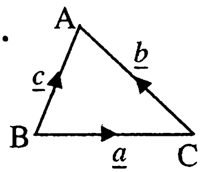
ভেক্টর (VECTOR) — প্রশ্নমালা II

প্রশ্নমালা – II A

1. (a) ABC একটি ত্রিভুজ। $\overrightarrow{BC}=\underline{a}$, $\overrightarrow{CA}=\underline{b}$ এবং $\overrightarrow{BA}=\underline{c}$ হলে, দেখাও যে, $\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}$

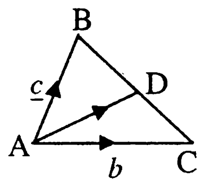
প্রমাণ ঃ দেওয়া আছে, ΔABC এ,
$\overrightarrow{BC}=\underline{a}$, $\overrightarrow{CA}=\underline{b}$ এবং $\overrightarrow{BA}=\underline{c}$.
ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,



$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$

$\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}$ (Showed)

1. (b) ABC একটি ত্রিভুজ; D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু । $\overrightarrow{AB}=\underline{c}$ এবং $\overrightarrow{AC}=\underline{b}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$ [ব.'১১]



প্রমাণ ঃ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

[$\because$ D, BC এর মধ্যবিন্দু ।]

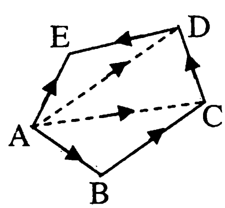
$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\underline{c}+\frac{1}{2}(\underline{b}-\underline{c})=\frac{1}{2}(2\underline{c}+\underline{b}-\underline{c})$

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$ (Showed)

1. (c)ABCDE একটি পঞ্চভুজ; $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$, $\overrightarrow{BC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{CD}=\underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DE}=\underline{d}$ হলে, দেখাও যে, $\overrightarrow{AE}=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}$ [কু.'০১]

প্রমাণ ঃ ABC, ACD ও ADE ত্রিভুজে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$=\underline{a}+\underline{b}\cdots(1)$

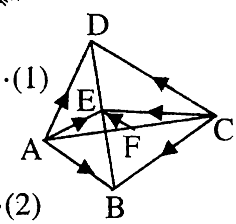
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$

$=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$ [(1) দ্বারা]

এবং $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}$

1. (d) E ও F বিন্দু দুইটি ABCD চতুর্ভুজের BD ও AC কর্ণ দুইটির মধ্যবিন্দু। দেখাও যে, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{FE}$

প্রমাণ ঃ Δ ABD এ BD বাহুর মধ্যবিন্দু E .



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}\cdots(1)$

Δ BCD এ BD বাহুর মধ্যবিন্দু E .

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CE}\cdots(2)$

আবার, Δ AEC এ AC বাহুর মধ্যবিন্দু F

$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{EF}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{FE}\cdots(3)$

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=2(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CE})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=2(2\overrightarrow{FE})$

 [(3) দ্বারা]

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{FE}$ (Showed)

1. (e) A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ হলে, AB এর উপরিস্থিত C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর যেন $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ হয়।

সমাধান ঃ মনে করি C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c}$.

দেওয়া আছে, $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}\Rightarrow \underline{c}-\underline{a}=3(\underline{b}-\underline{a})$

$\Rightarrow \underline{c}=3\underline{b}-3\underline{a}+\underline{a}=3\underline{b}-2\underline{a}$

C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $3\underline{b}-2\underline{a}$ (Ans.)

1. (f) PQR ত্রিভুজের QR, RP ও PQ বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে L, M ও N । প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{RN}=\underline{0}$ [সি.'০৭,'০৯,'১২; য.'০১; দি.'০৯,'১৩; রা.'০৯,'১১,'১৩; ব.'১২,'১৪]

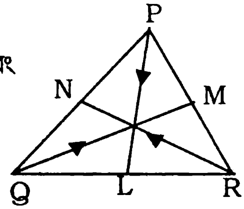
প্রমাণ ঃ QR এর মধ্যবিন্দু L বলে,

$\overrightarrow{PL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR})$

অনুরূপভাবে,

$\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR})$ এবং

$\overrightarrow{RN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ})$



L.H.S.= $\overrightarrow{PL} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{RN}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RQ})$

$= \frac{1}{2}\{(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}) + (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PR})\}$

$= \frac{1}{2}(\underline{0} + \underline{0} + \underline{0}) = \underline{0}$ = R.H.S. (Proved)

2. (a) ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হলে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টর দুইটিকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টর দুইটির যোগাশ্রয়ী সমাবেশে প্রকাশ কর।

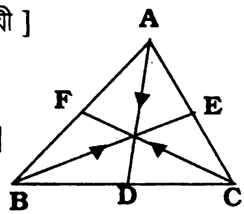
সমাধান ঃ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$

[ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী]

$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

[E, AC এর মধ্যবিন্দু ।]

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুযায়ী]

$\Rightarrow \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

[∵ E, AC এর মধ্যবিন্দু ।]

$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

2. (b)OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্যবিন্দু B ; যদি $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ হয়, তবে $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টরকে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। [ঢা.'০৯,'১৩; দি.'১২]

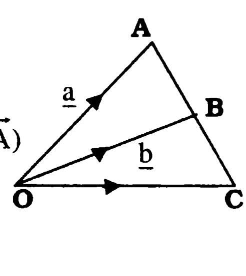
সমাধান ঃ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB}$

[∵ B , AC এর মধ্যবিন্দু]

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= \underline{a} + 2(\underline{b} - \underline{a})$



[∵ $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$]

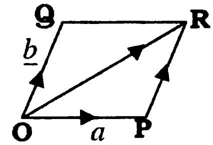
$\overrightarrow{OC} = 2\underline{b} - \underline{a}$ (Ans.)

2. (c) $\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$ হলে OPRQ কি ধরনের চতুর্ভুজ তা নির্ধারন কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$\overrightarrow{OP} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \underline{b}$ এবং

$\overrightarrow{OR} = \underline{a} + \underline{b}$



এখন, $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \underline{a} + \underline{b} = \overrightarrow{OR}$

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$; যা ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্রের শর্ত। অতএব, OPRQ একটি সামান্তরিক ।

3. যদি $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং $(x + 1)\underline{a} + (y - 2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$ হয় তবে x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অসমরৈখিক ভেক্টর এবং

$(x + 1)\underline{a} + (y - 2)\underline{b} = 2\underline{a} + \underline{b}$

$x + 1 = 2 \Rightarrow x = 1, y - 2 = 1 \Rightarrow y = 3$

প্রশ্নমালা – II B

1. (a) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $2\vec{A} + \vec{B}$ ও $6\vec{A} - 3\vec{B}$ এর মান নির্ণয় কর। [কু.'০৭; চ.'০৪]

সমাধান ঃ $2\overline{A} + \overline{B} = 2(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k} + 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 6\hat{i} + 4\hat{j}$ (Ans.)

$6\overline{A} - 3\overline{B} = 6(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) - 3(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 6\hat{i} + 18\hat{j} - 12\hat{k} - 12\hat{i} + 6\hat{j} - 12\hat{k}$

$= -6\hat{i} + 24\hat{j} - 24\hat{k}$ (Ans.)

1. (b) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $|3\overline{A} + 2\overline{B}|$ এর মান নির্ণয় কর।

[কু.'০৭;রুকুয়েট.১১-১২]