

এক নজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলী

1.(a) $(0, 0)$ কেন্দ্র এবং 'r' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = r^2$.

(b) (h, k) কেন্দ্র এবং 'r' ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

(h, k) কেন্দ্র এবং (α, β) কিদুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = (\alpha - h)^2 + (\beta - k)^2$

(c) $(-g, -f)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, যেখানে ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

(d) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) কিদুঘরের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

(e) একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার ছেদকিদুগামী বৃত্তের সমীকরণ, বৃত্ত + k (সরলরেখা) = 0; ধ্রুবক $k \neq 0$

(f) দুইটি বৃত্তের ছেদকিদু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ, প্রথম বৃত্ত + k (দ্বিতীয় বৃত্ত) = 0; ধ্রুবক $k \neq 0$.

(g) $f(x, y) = 0$ বৃত্ত ও $g(x, y) = 0$ সরলরেখার (অথবা, $f(x, y) = 0$ ও $g(x, y) = 0$ বৃত্তদ্বয়ের) ছেদকিদু এবং (α, β) কিদুগামী বৃত্তের সমীকরণ

$$\frac{f(x, y)}{f(\alpha, \beta)} = \frac{g(x, y)}{g(\alpha, \beta)}; f(\alpha, \beta) \neq 0, g(\alpha, \beta) \neq 0$$

(h) খলিফার পদ্ধতিঃ যেকোন দুইটি কিদু (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + k\{(x - x_1)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2)\} = 0$$

; ধ্রুবক $k \neq 0$

2. (a) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের ঋণাত্মক = $2\sqrt{g^2 - c}$ এবং y-অক্ষের ঋণাত্মক = $2\sqrt{f^2 - c}$.

(b) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ বৃত্ত দ্বারা x-অক্ষের ঋণাত্মক = $2\sqrt{r^2 - k^2}$ এবং y-অক্ষের ঋণাত্মক = $2\sqrt{r^2 - h^2}$

3. (a) (r_1, θ_1) কেন্দ্র ও a ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সমীকরণ, $a^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1)$

(b) পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g \cos \theta + f \sin \theta) + c = 0$, যার কেন্দ্র $(\sqrt{g^2 + f^2}, \tan^{-1} \frac{f}{g})$,
ব্যাসার্ধ = $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

MCQ এর জন্য বিশেষ সূত্র :

1. $f(x, y) = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং (x_1, y_1) কিদুগামী বৃত্তের সমীকরণ $f(x, y) = f(x_1, y_1)$

2. x-অক্ষকে মূলকিদুতে স্পর্শ করে এবং (x_1, y_1) কিদুগামী বৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2 + y^2}{y} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}$.

3. কেন্দ্র (h, k) এবং x-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$

4. কেন্দ্র (h, k) এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$

প্রশ্নমালা - IV A

1. $ax^2 + 2bxy - 2y^2 + 8x + 12y + 6 = 0$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করলে, 'a' ও 'b' এর মান নির্ণয় কর। অতঃপর বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান : $ax^2 + 2bxy - 2y^2 + 8x + 12y + 6 = 0$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করলে, xy এর সহগ, $2b = 0 \Rightarrow b = 0$ এবং x^2 ও y^2 এর সহগ দুইটি সমান অর্থাৎ $a = -2$.

বৃত্তটির সমীকরণ হবে,

$$-2x^2 - 2y^2 + 8x + 12y + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2(-2)x + 2(-3)y - 3 = 0$$

বৃত্তটির কেন্দ্র $(-2, -3)$ এবং

$$\text{ব্যাসার্ধ} = \sqrt{2^2 + 3^2 - (-3)} = \sqrt{4 + 9 + 3} = 4$$

2. (a, b) কেন্দ্র এবং $\sqrt{a^2 + b^2}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : (a, b) কেন্দ্র এবং $\sqrt{a^2 + b^2}$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = a^2 + b^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0 \text{ (Ans.)}$$

3. (a) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 9 = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(2, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

[কু.'০৫; য.'১০; দি.'১৩]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 9 = 0$ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (-\frac{-4}{2}, -\frac{5}{2}) = (2, -\frac{5}{2})$, যা নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

এখন নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র $(2, -\frac{5}{2})$

$$\text{হতে } (2, -1) \text{ বিন্দুর দূরত্ব} = |-\frac{5}{2} + 1| = \frac{3}{2}$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 2)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 5y + \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 5y + \frac{25 - 9}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 5y + 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 5y + 8 = 0 \text{ (Ans.)}$$

[MCQ এর জন্য, $x^2 + y^2 - 4x + 5y = 2^2 + 1^2 - 4 \cdot 2 + 5(-1) = 4 + 1 - 8 - 5$]

3.(b) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং $(3, -1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [সি.'০১]

সমাধান : $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $= (3, -4)$, যা নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

এখন নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ = কেন্দ্র $(3, -4)$ হতে $(3, -1)$ বিন্দুর দূরত্ব $= |-4 + 1| = 3$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0 \text{ (Ans.)}$$

3(c) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, -5)$ এবং এটি মূলবিন্দু দিয়ে যায়। তার সমীকরণ এবং অক্ষ দুইটি থেকে তা কি পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

[সি.'০৬; য.'০৮; কু.'১৪]

সমাধান : কেন্দ্র $(4, -5)$ এবং মূলবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2(-4)x + 2(5)y = 0$

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটিকে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = -4$, $f = 5$, $c = 0$

বৃত্তটি দ্বারা x -অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ

$$2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{4^2 - 0} = 8 \text{ এবং}$$

বৃত্তটি দ্বারা y -অক্ষের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ

$$2\sqrt{f^2 - c} = 2\sqrt{5^2 - 0} = 10$$

4.(a) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, -8)$ এবং তা y -অক্ষকে স্পর্শ করে। তার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ব.'০১; ঢা.'০২]

সমাধান : $(4, -8)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি y -অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$\text{বৃত্তটির ব্যাসার্ধ} = |\text{কেন্দ্রের ভূজ}| = |4| = 4$$

$$\text{বৃত্তের সমীকরণ, } (x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 16y + 64 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 16y + 64 = 0$$

[MCQ এর জন্য, $x^2 + y^2 - 8x + 16y + 8^2 = 0$]

4(b) $(-5, 7)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x -অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [মা.'০৭]

সমাধান : $(-5, 7)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$\text{বৃত্তটির ব্যাসার্ধ} = |\text{কেন্দ্রের } y\text{-স্থানাঙ্ক}| = |7| = 7$$

$$\text{বৃত্তের সমীকরণ, } (x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 7^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 14y + 49 = 49$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 14y + 25 = 0$$

4(c) $(2, 3)$ বিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x -অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি y -অক্ষ হতে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

[রা.'০১; কু.'০৯]

সমাধান : (2, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$\text{বৃত্তটির ব্যাসার্ধ} = |\text{কেন্দ্রের কোটি}| = |3| = 3$$

$$\text{বৃত্তের সমীকরণ, } (x-2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$$

$$\text{এখন বৃত্তটিকে } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$\text{এর সাথে তুলনা করে পাই, } g = -2, f = -3, c = 4$$

$$\text{বৃত্তটি দ্বারা y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমাণ}$$

$$2\sqrt{g^2 - c} = 2\sqrt{9 - 4} = 2\sqrt{5}$$

5. একটি বৃত্ত (-6, 5), (-3, -4) এবং (2, 1)

বিন্দু তিনটি দ্বারা অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। [ব.'০২; দি.'০৯]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (-6, 5) ও

(-3, -4) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x+6)(x+3) + (y-5)(y+4) + k\{(x+6)(5+4) - (y-5)(-6+3)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x + 18 + y^2 - y - 20 +$$

$$k(9x + 54 + 3y - 15) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 9x - y - 2 +$$

$$k(9x + 3y + 39) = 0 \quad (1)$$

(1) বৃত্তটি (2, 1) বিন্দুগামী বলে,

$$4 + 1 + 18 - 1 - 2 + k(18 + 3 + 39) = 0$$

$$\Rightarrow 60k = -20 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + 9x - y - 2 - 3x - y - 13 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0 \quad \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক } \left(-\frac{6}{2}, -\frac{-2}{2}\right)$$

$$= (-3, 1) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } = \sqrt{9 + 1 - (-15)} = 5$$

$$[\text{MCQ} : \frac{(x+6)(x+3) + (y-5)(y+4)}{9(x+6) - (-3)(y-5)}$$

$$= \frac{(2+6)(2+3) + (1-5)(1+4)}{9(2+6) - (-3)(1-5)}]$$

6. (a) $2x - y = 3$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (3, -2) ও (-2, 0) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম

করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [ঢ.'০৮; ব.'১০, '১২; সি.'০৬; য.'০৭; কু.'০৭; রা.'১০, '১৩]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (3, -2) ও

(-2, 0) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-3)(x+2) + (y+2)(y-0) +$$

$$k\{(x-3)(-2-0) - (y+2)(3+2)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 + y^2 + 2y +$$

$$k(-2x + 6 - 5y - 10) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-1-2k)x + (2-5k)y - 6 - 4k = 0 \quad (1)$$

$$\text{বৃত্তটির কেন্দ্র } \left(\frac{1+2k}{2}, -\frac{2-5k}{2}\right), 2x-y = 3$$

রেখার উপর অবস্থিত।

$$2\frac{1+2k}{2} - \left(-\frac{2-5k}{2}\right) = 3$$

$$\Rightarrow 2 + 4k + 2 - 5k = 6$$

$$\Rightarrow -k = 2 \Rightarrow k = -2$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + (-1+4)x + (2+10)y - 6 + 8 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 3x + 12y + 2 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

6(b) $x + 2y - 10 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (3, 5) ও (6, 4) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[ঢা.'০২; রা.'০৮; য.'১২]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (3, 5) ও

(6, 4) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-3)(x-6) + (y-5)(y-4) +$$

$$k\{(x-3)(5-4) - (y-5)(3-6)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 18 + y^2 - 9y + 20 +$$

$$k(x-3+3y-15) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-9+k)x + (-9+3k)y + 38 - 18k = 0 \quad \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তটির কেন্দ্র } \left(\frac{9-k}{2}, \frac{9-3k}{2}\right), x + 2y - 10 = 0$$

= 0 রেখার উপর অবস্থিত।

$$\frac{9-k}{2} + 2 \cdot \frac{9-3k}{2} = 10$$

$$\Rightarrow 9 - k + 18 - 6k = 20$$

$$\Rightarrow -7k = -7 \Rightarrow k = 1$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 38 - 18 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0 \text{ (Ans.)}$$

6(c) $x + 2 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(-7, 1)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ.'০৭; মা.'০৫]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(-7, 1)$ ও $(-1, 3)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\begin{aligned} & (x+7)(x+1) + (y-1)(y-3) + \\ & k\{(x+7)(1-3) - (y-1)(-7+1)\} = 0 \\ \Rightarrow & x^2 + 8x + 7 + y^2 - 4y + 3 + \\ & k(-2x - 14 + 6y - 6) = 0 \\ \Rightarrow & x^2 + y^2 + (8-2k)x + (-4+6k)y \\ & + 10 - 20k = 0 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ বৃত্তটির কেন্দ্র } \left(-\frac{8-2k}{2}, -\frac{-4+6k}{2}\right) =$$

$(k-4, 2-3k)$, $x+2=0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$$k-4+2=0 \Rightarrow k=2$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + (8-4)x + (-4+12)y + 10-40=0$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y - 30 = 0 \text{ (Ans.)}$$

6(d) $x + 2y + 3 = 0$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'১৩; সি.'১০]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(-1, -1)$ ও $(3, 2)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\begin{aligned} & (x+1)(x-3) + (y+1)(y-2) + \\ & k\{(x+1)(-1-2) - (y+1)(-1-3)\} = 0 \\ \Rightarrow & x^2 - 2x - 3 + y^2 - y - 2 + \\ & k(-3x - 3 + 4y + 4) = 0 \\ \Rightarrow & x^2 + y^2 + (-2-3k)x + (-1+4k)y \\ & - 5 + k = 0 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ বৃত্তটির কেন্দ্র } \left(\frac{2+3k}{2}, \frac{1-4k}{2}\right),$$

$x + 2y + 3 = 0$ রেখার উপর অবস্থিত।

$$\frac{2+3k}{2} + 2 \cdot \frac{1-4k}{2} + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 3k + 2 - 8k + 6 = 0$$

$$\Rightarrow -5k = -10 \Rightarrow k = 2$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + (-2-6)x + (-1+8)y - 5 + 2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 7y - 3 = 0 \text{ (Ans.)}$$

7.(a) x-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু., রা., ব.'০৩; দি.'১০; সি.'১৪]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\begin{aligned} & (x-3)(x-6) + (y-5)(y-4) + \\ & k\{(x-3)(5-4) - (y-5)(3-6)\} = 0 \\ \Rightarrow & x^2 - 9x + 18 + y^2 - 9y + 20 + \\ & k(x-3+3y-15) = 0 \\ \Rightarrow & x^2 + y^2 + (-9+k)x + (-9+3k)y \\ & + 38 - 18k = 0 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ বৃত্তটির কেন্দ্র } \left(\frac{k-9}{2}, \frac{9-3k}{2}\right), x\text{-অক্ষের উপর}$$

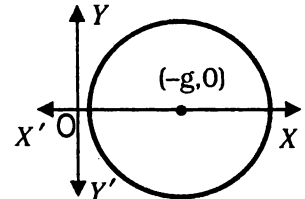
$$\text{অবস্থিত।} \therefore \frac{9-3k}{2} = 0 \Rightarrow k = 3$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + (-9+3)x + 38-54 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \text{ (Ans.)}$$

বিকল্প পদ্ধতি :



ধরি, কেন্দ্র x-অক্ষের উপর অবস্থিত এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0 \dots \dots (1)$

(1) বৃত্তটি $(3, 5)$ ও $(6, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$9 + 25 + 6g + c = 0$$

$$\Rightarrow 34 + 6g + c = 0 \quad \dots (2) \text{ এবং}$$

$$36 + 16 + 12g + c = 0$$

$$\Rightarrow 52 + 12g + c = 0 \dots \dots (3)$$

$$(3) - (2) \Rightarrow 18 + 6g = 0 \Rightarrow g = -3$$

$$(2) \text{ হতে পাই, } 34 - 18 + c = 0 \Rightarrow c = -16$$

(1) এ g ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 \text{ (Ans.)}$$

7(b) y-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (3, 0) ও (-4, 1) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [চ. '০৫]

সমাধান : ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

$$g = 0$$

বৃত্তটি (3, 0) ও (-4, 1) বিন্দুগামী।

$$9 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = -9 \text{ এবং}$$

$$16 + 1 + 2f + c = 0$$

$$\Rightarrow 17 + 2f - 9 = 0 \Rightarrow 2f = -8 \Rightarrow f = -4$$

(1) এ g, f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$$

7. (c) y-অক্ষের উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত মূলবিন্দু এবং (p, q) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[রা. '০২; সি. '০৪; য. '০৫; ঢা. '১২; রা.চ. '১৩]

সমাধান : ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত।

$$g = 0$$

বৃত্তটি মূলবিন্দু (0, 0) ও (p, q) বিন্দুগামী।

$$0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ এবং}$$

$$p^2 + q^2 + 2qf + 0 = 0$$

$$\Rightarrow f = -\frac{p^2 + q^2}{2q}$$

(1) এ g, f ও c এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{p^2 + q^2}{2q}\right)y = 0$$

$$q(x^2 + y^2) = (p^2 + q^2)y \text{ (Ans.)}$$

7(d) (3, 0) ও (7, 0) বিন্দুগামী এবং y-অক্ষকে স্পর্শ করে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [রা. '০২, '০৬; ব. '০২, '১১]

সমাধান : খলিফার নিয়মানুসারে ধরি (3, 0) ও (7, 0) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-3)(x-7) + (y-0)(y-0) +$$

$$k\{(x-3)(0-0) - (y-0)(3-7)\} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 21 + y^2 + k(4y) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 4ky + 21 = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র (5, -2k) এবং ব্যাসার্ধ

$$= \sqrt{5^2 + (-2k)^2 - 21} = \sqrt{4 + 4k^2}$$

(1) বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$\sqrt{4 + 4k^2} = |5|$$

$$\Rightarrow 4 + 4k^2 = 25 \Rightarrow 4k^2 = 21$$

$$\Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 10x + 4\left(\pm \frac{\sqrt{21}}{2}\right)y + 21 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x \pm 2\sqrt{21}y + 21 = 0$$

বিকল্প পদ্ধতি : ধরি, y-অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = h^2$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + k^2 = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটি (3, 0) ও (7, 0) বিন্দুগামী।

$$9 - 6h + k^2 = 0 \dots \dots (2) \text{ এবং}$$

$$49 - 14h + k^2 = 0 \dots \dots (3)$$

$$(2) - (3) \Rightarrow -40 + 8h = 0 \Rightarrow h = 5$$

$$(2) \text{ এ } h = 5 \text{ বসিয়ে পাই, } 9 - 30 + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = 21 \Rightarrow k = \pm\sqrt{21}$$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 10x \pm 2\sqrt{21}y + 21 = 0$$

7(e) (1,1) ও (2,2) বিন্দু দুইটি দিয়ে অতিক্রমকারী বৃত্তের ব্যাসার্ধ 1; বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এরূপ দুইটি বৃত্ত পাওয়া যাবে। [য. '০৩]

সমাধান খলিফার নিয়মানুসারে ধরি, (1, 1) ও (2, 2) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-1)(x-2) + (y-1)(y-2) +$$

$$k\{(x-1)(1-2) - (y-1)(1-2)\} = 0$$

$$k(-x+1+y-1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-3-k)x + (-3+k)y + 4 = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $\left(\frac{k+3}{2}, \frac{3-k}{2}\right)$ এবং

$$\begin{aligned} \text{ব্যাসার্ধ} &= \sqrt{\left(\frac{k+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-k}{2}\right)^2 - 4} \\ &= \sqrt{\frac{k^2 + 6k + 9 + k^2 - 6k + 9 - 16}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{2(k^2 + 1)}{4}} = \sqrt{\frac{k^2 + 1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \sqrt{\frac{k^2 + 1}{2}} = 1 \Rightarrow k^2 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

\therefore নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0, \text{ যখন } k = 1$$

$$\text{এবং } x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0, \text{ যখন } k = -1$$

8.(a) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরে x -অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং যার ব্যাসার্ধ 5 একক। [য.'০৫; ব.'১১]

সমাধান নির্ণেয় বৃত্তটি মূলবিন্দু থেকে 2 একক দূরে x -অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে বলে তা $(2, 0)$ ও $(-2, 0)$ দিয়ে অতিক্রম করে।

খলিফার নিয়মানুসারে ধরি, $(2, 0)$ ও $(-2, 0)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\begin{aligned} &(x-2)(x+2) + (y-0)(y-0) + \\ &k\{(x-2)(0-0) - (y-0)(2+2)\} = 0 \\ \Rightarrow &x^2 - 4 + y^2 + k(-4y) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4ky - 4 = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(0, 2k)$ এবং

$$\text{ব্যাসার্ধ} = \sqrt{0^2 + (2k)^2 + 4} = \sqrt{4k^2 + 4}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } \sqrt{4k^2 + 4} = 5 \Rightarrow 4k^2 + 4 = 25$$

$$\Rightarrow 4k^2 = 21 \Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

k এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 4\left(\pm \frac{\sqrt{21}}{2}\right)y - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 \pm 2\sqrt{21}y - 4 = 0 \text{ (Ans.)}$$

8(b) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা y -অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

[ঢা.'০৬; য.'১০]

সমাধানঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (1)$$

(1) বৃত্তটি y -অক্ষকে $(0, \sqrt{3})$

বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$$f^2 = c \text{ এবং}$$

$$-f = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow f = -\sqrt{3}$$

$$c = (-\sqrt{3})^2 = 3$$

আবার, (1) বৃত্তটি $(-1, 0)$ বিন্দুগামী।

$$1 + 0 - 2g + 0 + c = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2g + 3 = 0 \Rightarrow g = 2$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$$

২য় অংশঃ বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f) = (-2, \sqrt{3})$

$$\text{এবং ব্যাসার্ধ } \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4 + 3 - 3} = 2$$

8(c) এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x -অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(-1, 9)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। [য.'০০; ঢা.'০৩]

সমাধানঃ ধরি, বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটি x -অক্ষকে $(2, 0)$

বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$$g^2 = c \text{ এবং } -g = 2$$

$$\Rightarrow g = -2$$

$$c = (2)^2 = 4$$

আবার, (1) বৃত্তটি

$(-1, 9)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$1 + 81 - 2g + 18f + c = 0$$

$$\Rightarrow 82 + 4 + 18f + 4 = 0$$

[c ও g এর মান বসিয়ে।]

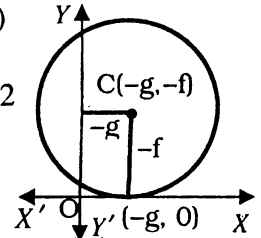
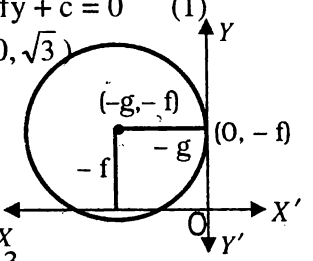
$$\Rightarrow 18f = -90 \Rightarrow f = -5$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0 \text{ (Ans.)}$$

[MCQ এর জন্য,

$$\frac{(x-2)^2 + (y-0)^2}{y} = \frac{(-1-2)^2 + (9-0)^2}{9}]$$



আবার, (1) বৃত্তটি y -অক্ষ থেকে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা কর্তন করে।

$$2\sqrt{f^2 - c} = 6 \Rightarrow \sqrt{f^2 - 16} = 3$$

$$\Rightarrow f^2 - 16 = 9 \Rightarrow f^2 = 25 \Rightarrow f = \pm 5$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 - 8x \pm 10y + 16 = 0 \text{ (Ans.)}$$

9.(c) $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটি দ্বারা y -অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[রা.'০০; ব.'০৪; কু.'০৮; দি.'১০]

সমাধান : $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ,

$$(x+4)(x-12) + (y-3)(y+1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 48 + y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y - 51 = 0 \text{ (Ans.)}$$

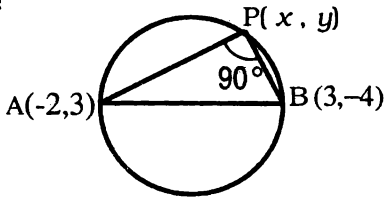
২য় অংশ : $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 51 = 0$ কে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই, $g = -4$, $f = -1$ এবং $c = -51$

$$y\text{-অক্ষের ছেদাংশের দৈর্ঘ্য} = 2\sqrt{f^2 - c}$$

$$= 2\sqrt{1^2 - (-51)} = 2\sqrt{52} = 4\sqrt{13}$$

9(d) প্রমাণ কর যে, $(-2, 3)$ ও $(3, -4)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ $(x+2)(x-3) + (y-3)(y+4) = 0$

প্রমাণ:



ধরি, ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু দুইটি $A(-2, 3)$ ও $B(3, -4)$ এবং $P(x, y)$ পরিধির উপর যেকোন একটি বিন্দু।

PA এবং PB যোগ করি। যেহেতু AB ব্যাস, $\angle APB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। $\therefore \angle APB = 90^\circ$
(AP রেখার ঢাল) \times (BP রেখার ঢাল) = -1

$$\Rightarrow \frac{y-3}{x+2} \times \frac{y+4}{x-3} = -1$$

$$\Rightarrow (y-3)(y+4) = -(x+2)(x-3)$$

$$(x+2)(x-3) + (y-3)(y+4) = 0$$

(Proved)

10. এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (1, 8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

[চ.'০১, '০৭; য.'০৩; মা.বো.'০৬; সি.'০৯; কু.'১২]

সমাধান : ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$k = h \text{ এবং } r = |h|$$

(1) হতে পাই,

$$(x-h)^2 + (y-h)^2 = |h|^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2hy + h^2 = h^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2hy + h^2 = 0 \dots (2)$$

যা (1, 8) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$1 + 64 - 2h - 16h + h^2 = 0$$

$$\Rightarrow h^2 - 18h + 65 = 0$$

$$\Rightarrow (h-5)(h-13) = 0 \therefore h = 5, 13$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0 \text{ এবং}$$

$$x^2 + y^2 - 26x - 26y + 169 = 0$$

11.(a) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র

$(6, 0)$ এবং যা $x^2 + y^2 - 4x = 0$ বৃত্ত ও $x = 3$ রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়। [চা.'০৭; রা.'০৭, '১৪; ব.'০৮, '১২; চ.'০৮; মা.'০৯, '১৪; য.'১৩; দি.'১৪]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত ও রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায়

$$x^2 + y^2 - 4x + k(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + (-4+k)x - 3k = 0 \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তের কেন্দ্র } \left(-\frac{k-4}{2}, 0\right).$$

প্রশ্নমতে, বৃত্তের কেন্দ্র $(6, 0)$.

$$-\frac{k-4}{2} = 6 \Rightarrow k-4 = -12 \therefore k = -8$$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + (-4-8)x - 3(-8) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 24 = 0 \text{ (Ans.)}$$

11(b) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা মূলবিন্দু এবং $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্ত ও $2x + 3y + 1 = 0$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়।

[য.'০২; সি.'০২; ব.'০৭; চ.'১১]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত এবং রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + k(2x + 3y + 1) = 0 \dots (1)$

(1) বৃত্তটি মূলবিন্দু (0, 0) দিয়ে অতিক্রম করে।

$$-4 + k = 0 \Rightarrow k = 4$$

(1) এ k এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 + 8x + 12y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0 \text{ (Ans.)}$$

11.(c) একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (0,3) এবং যা $x^2 + y^2 - 4y = 0$ বৃত্ত ও $y - 2 = 0$ রেখার ছেদ বিন্দু দিয়ে যায়। [চ.'০২]

সমাধান : ধরি, প্রদত্ত বৃত্ত ও রেখার ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 4y + k(y - 2) = 0$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 + (-4 + k)y - 2k = 0 \dots (1)$

(1) বৃত্তের কেন্দ্র $(0, -\frac{k-4}{2})$.

প্রশ্নমতে, বৃত্তের কেন্দ্র (0, 3).

$$-\frac{k-4}{2} = 3 \Rightarrow k - 4 = -6 \therefore k = -2$$

নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 + (-4 - 2)y - 2(-2) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0 \text{ (Ans.)}$$

12. (a) দেখাও যে, A(1, 1) বিন্দুটি $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ বৃত্তের উপর অবস্থিত। A বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[ঢা.'১০; য.'০৭; কু.,রা., '০৯; সি.'১২; ব.'১৩; চ.'১৪]

প্রমাণ : ধরি, $f(x, y) \equiv x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$

$$f(1, 1) = 1^2 + 1^2 + 4.1 + 6.1 - 12$$

$$= 1 + 1 + 4 + 6 - 12 = 0$$

A(1, 1) বিন্দুটি প্রদত্ত বৃত্তের উপর অবস্থিত।

২য় অংশ: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(-\frac{4}{2}, -\frac{6}{2}) = (-2, -3)$

ধরি, A(1, 1) বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর $B(\alpha, \beta)$.

$$\frac{1+\alpha}{2} = -2 \Rightarrow 1+\alpha = -4 \Rightarrow \alpha = -5$$

$$\text{এবং } \frac{1+\beta}{2} = -3 \Rightarrow 1+\beta = -6 \Rightarrow \beta = -7$$

ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-5, -7)$

12 (b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি (2, 5) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [কু.'০১]

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$

$$\text{এর কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক} = (-\frac{-8}{2}, -\frac{6}{2}) = (4, -3)$$

(2, 5) বিন্দু ও কেন্দ্র (4, -3) দিয়ে অতিক্রম করে

$$\text{এরূপ ব্যাসের সমীকরণ, } \frac{x-2}{2-4} = \frac{y-5}{-3-5}$$

$$\Rightarrow 8x - 16 = -2y + 10 \Rightarrow 8x + 2y = 26$$

$$4x + y = 13 \text{ (Ans.)}$$

12 (c) $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। [প্র.ভ.প.' ৮৯, '০৪]

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 5bx + 12by = 0 \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তের কেন্দ্র } (-\frac{-5b}{2}, -\frac{12b}{2}) = (\frac{5b}{2}, 6b)$$

(1) বৃত্তের বর্ধিত যে ব্যাসটি মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তার সমীকরণ $y = \frac{6b}{5b/2}x \Rightarrow y = \frac{12}{5}x$

$$12x + 5y = 0 \text{ (Ans.)}$$

12 (d) (1,1) বিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র $x + y = 3$ রেখার উপর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

[কু.'০৮]

সমাধান : ধরি, বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।

$$c = g^2 \dots (2)$$

(1) বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$, $x + y = 3$ রেখার উপর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$$-g - f = 3 \Rightarrow f = -g - 3 \dots (3)$$

আবার, বৃত্তটি (1, 1) বিন্দুগামী।

$$1 + 1 + 2g + 2f + c = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 2g + 2(-g - 3) + g^2 = 0$$

[(2) ও (3) দ্বারা]

$$\Rightarrow 2 + 2g - 2g - 6 + g^2 = 0$$

$$\Rightarrow g^2 = 4 \Rightarrow g = -2$$

[প্রথম চতুর্ভুজে g ও f ঋণাত্মক।]

এখন (2) হতে পাই, $c = (-2)^2 = 4$ এবং

(3) হতে পাই, $f = 2 - 3 = -1$

\therefore নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ,

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$$

12(e) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত (1,1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং বৃত্তটির কেন্দ্র $y = 3x - 7$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[সি. '০৮; রা. '০৮; স্ক. '০৭; য. '০৬; চ. '০৯; ঢা. '১১]

সমাধান : ধরি, $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2) = 5 \dots (1)$$

$y = 3x - 7$ রেখার উপর (1) বৃত্তের কেন্দ্র

(h, k) অবস্থিত। $\therefore k = 3h - 7 \dots (2)$

(1) বৃত্ত (1, 1) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

$$2(1 - 2h + h^2 + 1 - 2k + k^2) = 5$$

$$\Rightarrow 2h^2 + 2k^2 - 4h - 4k = 1$$

$$\Rightarrow 2h^2 + 2(3h - 7)^2 - 4h - 4(3h - 7) = 1$$

[(2) দ্বারা]

$$\Rightarrow 2h^2 + 2(9h^2 - 42h + 49) - 4h - 12h + 28 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2h^2 + 18h^2 - 84h + 98 - 4h - 12h + 28 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 20h^2 - 100h + 125 = 0$$

$$\Rightarrow 4h^2 - 20h + 25 = 0 \Rightarrow (2h - 5)^2 = 0$$

$$\Rightarrow h = \frac{5}{2} \text{ . (2) হতে পাই, } k = 3 \cdot \frac{5}{2} - 7 = \frac{1}{2}$$

(1) এ h ও k এর মান বসিয়ে পাই,

$$2x^2 - 4 \cdot \frac{5}{2}x + 2 \cdot \frac{25}{4} + 2y^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}y + 2 \cdot \frac{1}{4} = 5$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 40x + 50 + 8y^2 - 8y + 2 = 20$$

$$\Rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x - 8y + 32 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0 \text{ (Ans.)}$$

13.(a) $4\sqrt{2}$ বাহুবিশিষ্ট বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং এর বিপরীত শীর্ষটি x -অক্ষের উপর অবস্থিত। ঐ বর্গের কর্ণকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [য. '০৪]

সমাধান : ধরি, OABC বর্গের একটি শীর্ষ মূলবিন্দু O(0,0) এবং x -অক্ষের উপর এর বিপরীত শীর্ষ B অবস্থিত।

OAB সমকোণী ত্রিভুজে,

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$$= (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2$$

$$= 32 + 32 = 64$$

$$OB = \pm 8 = B \text{ বিন্দুর ভূজ।}$$

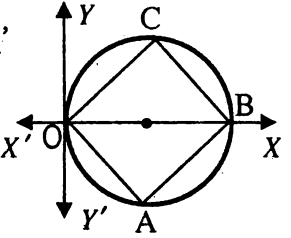
$$B \text{ বিন্দুর স্থানাঙ্ক } (\pm 8, 0)$$

OB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ

$$(x - 0)(x \pm 8) + (y - 0)(y - 0) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \pm 8x + y^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 \pm 8x = 0 \text{ (Ans.)}$$



13(b) b বাহুবিশিষ্ট OABC একটি বর্গ। OA ও OC কে অক্ষ ধরে দেখাও যে, বর্গটির পরিবৃত্তের

সমীকরণ হবে $x^2 + y^2 = b(x + y)$.

[ঢা. '০৫; রা. '১০; ব. '১৩]

প্রমাণ : b বাহুবিশিষ্ট OABC বর্গের x ও y - অক্ষ বরাবর যথাক্রমে OA ও OC অবস্থিত হলে

A ও C এর স্থানাঙ্ক

যথাক্রমে $(b, 0)$ ও $(0, b)$.

বর্গের কর্ণ AC কে ব্যাস ধরে

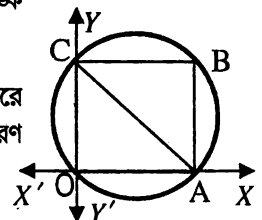
অঙ্কিত পরিবৃত্তের সমীকরণ

$$(x - b)(x - 0) +$$

$$(y - 0)(y - b) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - bx + y^2 - by = 0$$

$$x^2 + y^2 = b(x + y) \text{ (Provsd)}$$



14 (a) এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের প্রত্যেকটির কেন্দ্র (3, 4) এবং যারা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। [য. '১০]

সমাধান : প্রদত্ত বৃত্ত $x^2 + y^2 = 9 \dots (i)$ এর কেন্দ্র $A(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = 3$

ধরি, নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $B(3,4)$ এবং ব্যাসার্ধ r_2 বৃত্তদ্বয় পস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে,

$$r_1 + r_2 = AB \Rightarrow 3 + r_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\Rightarrow r_2 = 2$$

আবার, বৃত্তদ্বয় পস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে,

$$r_2 - r_1 = AB \Rightarrow r_2 - 3 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$r_2 = 8$$

নির্ণেয় বৃত্ত দুইটির সমীকরণ,

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \text{ এবং}$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 8^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 + 16 - 64 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 39 = 0$$

$$14.(b) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c} \text{ হলে দেখাও যে, } x^2 + y^2 +$$

$$2ax + c = 0 \text{ ও } x^2 + y^2 + 2by + c = 0 \text{ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করবে।} \quad [\text{মা. '০৭}]$$

প্রমাণ : $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$$A(-a, 0) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } r_1 = \sqrt{a^2 - c}$$

$$x^2 + y^2 + 2by + c = 0 \text{ বৃত্তের কেন্দ্র}$$

$$B(0, -b) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } r_2 = \sqrt{b^2 - c}$$

বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করলে,

$$AB = |r_1 \pm r_2|$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = |\sqrt{a^2 - c} \pm \sqrt{b^2 - c}|$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = a^2 - c + b^2 - c$$

$$\pm 2\sqrt{(a^2 - c)(b^2 - c)} \quad [\text{বর্গ করে।}]$$

$$2c = \pm 2\sqrt{(a^2 - c)(b^2 - c)}$$

$$\Rightarrow c^2 = (a^2 - c)(b^2 - c) \quad [\text{বর্গ করে।}]$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 b^2 - b^2 c - a^2 c + c^2$$

$$\Rightarrow b^2 c + a^2 c = a^2 b^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c} \text{ হলে, প্রদত্ত রেখা দুইটি স্পর্শ}$$

করবে।

15. $x = a(\cos \theta - 1)$ এবং $y = a(\sin \theta + 1)$ হলে, বৃত্তের কার্তেসীয় সমীকরণ, ব্যাসার্ধ ও কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান: } x = a(\cos \theta - 1) = a \cos \theta - a$$

$$\Rightarrow a \cos \theta = x + a$$

$$\text{আবার, } y = a(\sin \theta + 1) = a \sin \theta + a$$

$$\Rightarrow a \sin \theta = y - a$$

$$\text{এখন, } a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta = (x+a)^2 + (y-a)^2$$

$$\therefore (x+a)^2 + (y-a)^2, \text{ যা বৃত্তটির কার্তেসীয় সমীকরণ। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ } a \text{ এবং কেন্দ্র } (a, -a)$$

16. প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে একরূপ বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর:

সমাধান: (a) $(4, 30^\circ)$ কেন্দ্র ও 5 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$$5^2 = r^2 + 4^2 - 2r \cdot 4 \cos(\theta - 30^\circ)$$

$$\Rightarrow 25 = r^2 + 16 - 8r \cos(\theta - \frac{\pi}{6})$$

$$r^2 - 8r \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) - 9 = 0$$

(b) $(3, \frac{3\pi}{2})$ কেন্দ্র ও 2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$$2^2 = r^2 + 3^2 - 2r \cdot 3 \cos(\theta - \frac{3\pi}{2})$$

$$\Rightarrow 4 = r^2 + 9 - 6r \cos(\frac{3\pi}{2} - \theta)$$

$$\Rightarrow r^2 + 5 + 6r \cos \theta = 0$$

(c) মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ a । তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ, $a^2 = r^2 + 3^2 - 2r \cdot 3 \cos(\theta - 0^\circ)$

$$\Rightarrow a^2 = r^2 + 9 - 6r \cos \theta \dots \dots (1)$$

$$(1) \text{ বৃত্তটি পোল } (0, 0^\circ) \text{ বিন্দুগামী বলে, } a^2 = 0^2 + 9 - 6 \cdot 0 \cdot \cos 0^\circ \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3.$$

$$\text{নির্ণেয় সমীকরণ, } 9 = r^2 + 9 - 6r \cos \theta$$

$$\Rightarrow r^2 = 6r \cos \theta \Rightarrow r = 6 \cos \theta$$

(d) মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ p । তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ, $p^2 = r^2 + r_1^2 - 2r r_1 \cos(\theta - \theta_1) \dots (1)$

(1) বৃত্তটি পোল $(0, 0^0)$, $(a, 0^0)$, $(b, 90^0)$ বিন্দুগামী।

$$p^2 = 0^2 + r_1^2 - 2 \cdot 0 \cdot r_1 \cos(0^0 - \theta_1)$$

$$\Rightarrow p^2 = r_1^2 \Rightarrow p = r_1 \dots \dots (2)$$

$$p^2 = a^2 + r_1^2 - 2 \cdot a \cdot r_1 \cos(0^0 - \theta_1)$$

$$\Rightarrow a^2 = 2a r_1 \cos \theta_1, [\because p = r_1]$$

$$\Rightarrow a = 2 r_1 \cos \theta_1 \dots \dots (3)$$

$$\text{এবং } p^2 = b^2 + r_1^2 - 2 \cdot b \cdot r_1 \cos(90^0 - \theta_1)$$

$$\Rightarrow b^2 = 2b r_1 \sin \theta_1, [\because p = r_1]$$

$$\Rightarrow b = 2 r_1 \sin \theta_1$$

$$(1) \text{ হতে পাই, } r_1^2 = r^2 + r_1^2 - 2r r_1 (\cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1)$$

$$r^2 = r (\cos \theta \cdot 2 r_1 \cos \theta_1 + \sin \theta \cdot 2 r_1 \sin \theta_1)$$

$$r = a \cos \theta + b \sin \theta$$

17. বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর:

(a) সমাধান: প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ $r^2 - 4\sqrt{3} r \cos \theta - 4r \sin \theta + 15 = 0$ কে পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g \cos \theta + f \sin \theta) + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = -2\sqrt{3}$, $f = -2$, $c = 15$ ।

$$\sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{12 + 4} = 4, \tan^{-1} \frac{-f}{-g} =$$

$$\tan^{-1} \frac{2}{2\sqrt{3}} = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{নির্ণেয় কেন্দ্র } (4, \frac{\pi}{6}) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} =$$

$$\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{12 + 4 - 15} = 1$$

(b) $r = 2a \cos \theta \Rightarrow r^2 - 2ra \cos \theta = 0$ কে পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $r^2 + 2r(g \cos \theta + f \sin \theta) + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g = -a$, $f = 0$, $c = 0$ ।

$$\sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{a^2 + 0} = a, \tan^{-1} \frac{-f}{-g} =$$

$$\tan^{-1} \frac{0}{a} = \tan^{-1} 0 = 0^0$$

$$\text{নির্ণেয় কেন্দ্র } (a, 0^0) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} =$$

$$\sqrt{a^2 + 0^2 - 0} = a$$

18. (a) একটি বৃত্তের কেন্দ্র x -অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 7 একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 4 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(7, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ = 4।

বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$$4^2 = r^2 + 7^2 - 2r \cdot 7 \cos(\theta - 0)$$

$$\Rightarrow 16 = r^2 + 49 - 14r \cos \theta$$

$$r^2 - 14r \cos \theta + 33 = 0 \text{ (Ans.)}$$

(b) একটি বৃত্তের কেন্দ্র y -অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 8 একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 5 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(8, \frac{\pi}{2})$ এবং

ব্যাসার্ধ = 5।

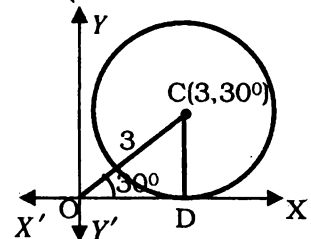
বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$$5^2 = r^2 + 8^2 - 2r \cdot 8 \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow 25 = r^2 + 64 - 16r \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

$$r^2 - 16r \sin \theta + 39 = 0$$

(c) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 30^0)$ এবং বৃত্তটি x -অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(3, 30^\circ)$ এবং

$$\text{ব্যাসার্ধ} = CD = 3 \sin 30^\circ = \frac{3}{2}$$

বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = r^2 + 3^2 - 2r \cdot 3 \cos(\theta - 30^\circ)$$

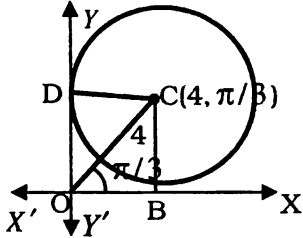
$$\Rightarrow \frac{9}{4} = r^2 + 9 - 6r \cos(\theta - 30^\circ)$$

$$\Rightarrow 9 = 4r^2 + 36 - 24r \cos(\theta - 30^\circ)$$

$$4r^2 - 24r \cos(\theta - 30^\circ) + 27 = 0$$

(d) একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(4, \frac{\pi}{3})$ এবং বৃত্তটি y-

অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর।



সমাধান: প্রশ্নমতে নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র $(4, \frac{\pi}{3})$ এবং

$$\text{ব্যাসার্ধ} = OB = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

বৃত্তটির পোলার সমীকরণ,

$$(2)^2 = r^2 + 4^2 - 2r \cdot 4 \cos(\theta - \frac{\pi}{3})$$

$$\Rightarrow 4 = r^2 + 16 - 8r \cos(\theta - \frac{\pi}{3})$$

$$r^2 - 8r \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) + 12 = 0$$

19. যদি বৃত্তের উপরস্থ $(4, 1)$ বিন্দুটি $(1 + 5 \cos \theta, -3 + 5 \sin \theta)$ দ্বারা প্রকাশিত হয়, তবে এ বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রশ্নমতে

$$4 = 1 + 5 \cos \theta, 1 = -3 + 5 \sin \theta$$

$$\Rightarrow 5 \cos \theta = 3, 5 \sin \theta = 4$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5}, \sin \theta = \frac{4}{5}$$

আমরা জানি, প্রদত্ত বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের জন্য θ এর মান 180° বৃদ্ধি পায়।

অপর প্রান্তের জন্য,

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta = -\frac{3}{5} \text{ এবং}$$

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta = -\frac{4}{5}$$

(4, 1) বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তের স্থানাঙ্ক

$$(1 + 5 \times (-\frac{3}{5}), -3 + 5 \times (-\frac{4}{5}))$$

$$= (1 - 3, -3 - 4) = (-2, -7) \text{ (Ans.)}$$

16(a) $r^2 - 4\sqrt{3}r \cos \theta - 4r \sin \theta + 15 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান: পোলার স্থানাঙ্কে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ

$$r^2 + 2r(g \cos \theta + f \sin \theta) + c = 0 \text{ ও প্রদত্ত}$$

$$\text{সমীকরণ } r^2 - 4\sqrt{3}r \cos \theta - 4r \sin \theta + 15 = 0$$

$$\text{তুলনা করে পাই, } g = -2\sqrt{3}, f = -2, c = 15$$

$$\sqrt{g^2 + f^2} = \sqrt{12 + 4} = 4,$$

$$\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{12 + 4 - 15} = 1$$

$$\tan^{-1} \frac{f}{g} = \tan^{-1} \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \pi + \tan^{-1} \sqrt{3}$$

$$= \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore \text{বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক} = (\sqrt{g^2 + f^2}, \tan^{-1} \frac{f}{g})$$

$$= (4, \frac{7\pi}{6}) \text{ এবং ব্যাসার্ধ} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 1$$

16(b) $(4, 30^\circ)$ কেন্দ্র ও 5 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের পোলার সমীকরণ,

$$5^2 = r^2 + 4^2 - 2r \times 4 \times \cos(\theta - 30^\circ)$$

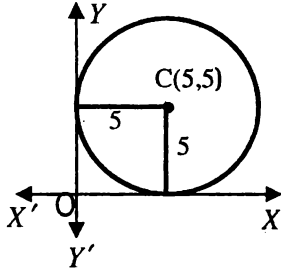
$$\Rightarrow r^2 - 8r \cos(\theta - \frac{\pi}{6}) - 9 = 0$$

কাজ

১। এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা প্রত্যেক অক্ষরেখাকে মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে ৫ একক

দূরত্বে স্পর্শ করে।

সমাধানঃ নির্ণেয় বৃত্তটি প্রত্যেক অক্ষরেখাকে মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে ৫ একক দূরত্বে স্পর্শ করে।



বৃত্তটির কেন্দ্র (5, 5)

এবং ব্যাসার্ধ = |5| = 5.

বৃত্তটির সমীকরণ $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0 \text{ (Ans.)}$$

২। দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে (3, -1) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$$C_1(2, -3) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } r_1 = \sqrt{4+9-8} = \sqrt{5}$$

$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র

$$C_2(5, 3) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } r_2 = \sqrt{25+9-14} = \sqrt{20}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

ধরি, প্রদত্ত বিন্দু P(3, -1).

$$\text{এখন } C_1P = \sqrt{(2-3)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{5} = r_1$$

$$\text{এবং } C_2P = \sqrt{(5-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20}$$

$$= 2\sqrt{5} = r_2$$

$$C_1C_2 = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{9+36}$$

$$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = C_1P + C_2P$$

বৃত্তের কেন্দ্র দুইটি এবং (3, -1) বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অতএব, প্রদত্ত বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে (3, -1) বিন্দুতে স্পর্শ করে। (প্রমাণিত)

৩। দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 2y = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

প্রমাণ : $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 18 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র A(3, -3) এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{9+9+18} = 6$

$x^2 + y^2 - 2y = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র A(0, 1) এবং ব্যাসার্ধ $r_2 = \sqrt{0+1+0} = 1$

$$\text{এখন, } AB = \sqrt{(3-0)^2 + (-3-1)^2} = 5$$

$$\text{এবং } r_1 - r_2 = 6 - 1 = 5 = AB$$

বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে।

৪। বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র

$$(6, \frac{\pi}{4}) \text{ এবং ব্যাসার্ধ } 5$$

৫। দেখাও যে, $r = a \cos \theta$ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $(\frac{a}{2}, 0)$ ও ব্যাসার্ধ $\frac{a}{2}$.

অতিরিক্ত প্রশ্ন (সমাধানসহ)

1. ABCD বর্গের পরিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 39 = 0$. A(-1, 3) হলে B, C ও D এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান ABCD বর্গের পরিবৃত্ত $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 39 = 0$ এর কেন্দ্র

$$(\frac{5}{2}, -4) \text{ হবে ABCD বর্গের AC ও BD কর্ণদ্বয়ের}$$

ছেদবিন্দু O.

ধরি, C এর স্থানাঙ্ক (α, β)

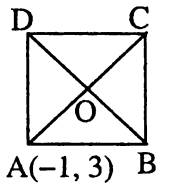
$$\text{AC এর মধ্যবিন্দু } (\frac{5}{2}, -4)$$

$$\therefore \frac{\alpha - 1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \alpha = 5 + 1 = 6$$

$$\text{এবং } \frac{\beta + 3}{2} = -4 \Rightarrow \beta = -8 - 3 = -11$$

C এর স্থানাঙ্ক (6, -11).

ধরি, AB বাহুর ঢাল m এবং AB বাহু AC কর্ণের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে।



$$\frac{m+2}{1-2m} = \tan 45^\circ = 1 \Rightarrow m+2 = 1-2m$$

$$\Rightarrow 3m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$$

AB ও DC বাহুর ঢাল $\frac{1}{3}$.

A(-1, 3) বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ

$$y-3 = -\frac{1}{3}(x+1) \Rightarrow 3y-9 = -x-1$$

$$\Rightarrow x+3y-8=0 \dots \dots (1)$$

C(6, -11) বিন্দুগামী (1) এর উপর লম্ব BC এর সমীকরণ $3x-y=18+11$

$$\Rightarrow 3x-y-29=0 \dots \dots (2)$$

(1) ও (2) এর ছেদবিন্দু B এর স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{-87-8}{-1-9}, \frac{-24+29}{-1-9} \right) = \left(\frac{19}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

A(-1, 3) বিন্দুগামী AB এর লম্ব AD এর সমীকরণ $3x-y=-3-3$

$$\Rightarrow 3x-y+6=0 \dots (3)$$

C(6, -11) বিন্দুগামী (3) এর উপর লম্ব CD এর সমীকরণ $x+3y=6-33=-27$

$$\Rightarrow x+3y+27=0 \dots (4)$$

(3) ও (4) এর ছেদবিন্দু D এর স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{-27-18}{9+1}, \frac{6-81}{9+1} \right) = \left(-\frac{9}{2}, -\frac{15}{2} \right)$$

2.(a) ABC সমবাহু ত্রিভুজের দুইটি শীর্ষবিন্দু A(0, 0) ও B(6, 0)। ABC ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, C শীর্ষের স্থানাঙ্ক (α, β) . ABC

সমবাহু ত্রিভুজ বলে $AC^2 = BC^2 = AB^2$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha-6)^2 + \beta^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 - 12\alpha + 36 + \beta^2$$

$$\Rightarrow 12\alpha = 36 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\text{আবার, } AC^2 = AB^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 6^2$$

$$\Rightarrow 9 + \beta^2 = 36 \Rightarrow \beta^2 = 27 \Rightarrow \beta = \pm 3\sqrt{3}$$

C শীর্ষের স্থানাঙ্ক $(3, \pm 3\sqrt{3})$.

ধরি, A(0,0) দিয়ে যায় এরূপ পরিবৃত্তের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0 \dots (1)$$

(1) বৃত্ত B(6,0) এবং C(3, $\pm 3\sqrt{3}$) বিন্দুগামী।

$$36 + 12g = 0 \Rightarrow g = -3 \text{ এবং}$$

$$9 + 27 + 6g \pm 6\sqrt{3}f = 0$$

$$36 - 18 \pm 6\sqrt{3}f = 0 \Rightarrow \pm 6\sqrt{3}f = 18$$

$$\Rightarrow f = \pm \sqrt{3}$$

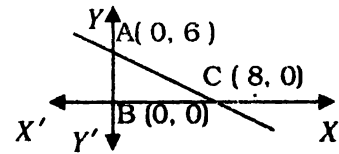
(1) এ g ও f এর মান বসিয়ে পাই,

$$x^2 + y^2 - 6x \pm 2\sqrt{3}y = 0 \text{ (Ans.)}$$

2 (b) $3x + 4y = 24$ সরলরেখা এবং অক্ষ দুইটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্ত ও অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$$\text{সমাধান : ধরি, } 3x + 4y = 24 \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$$

সরলরেখা এবং অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A(0, 6), B(0, 0) ও C(8, 0).



পরিবৃত্ত : ABC ত্রিভুজে, $\angle ABC = 90^\circ$ বলে, A ও C বিন্দুদ্বয় ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু।

নির্ণেয় পরিবৃত্তের সমীকরণ,

$$(x-0)(x-8) + (y-6)(y-0) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0 \text{ (Ans.)}$$

অন্তঃবৃত্ত : এখানে, $a = BC = |0-8| = 8$,

$$b = AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$c = AB = |6-0| = 6$$

$$\delta_{ABC} = 0(0-0) - 6(0-8) = 48$$

$$\text{এবং } a+b+c = 8+10+6 = 24 \text{ এবং } AC \neq BC^2$$

অন্তঃবৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক

$$= \left(\frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c} \right)$$

$$= \left(\frac{8 \times 0 + 10 \times 0 + 6 \times 8}{24}, \frac{8 \times 6 + 10 \times 0 + 6 \times 0}{24} \right)$$

$$= (2, 2)$$

$$\text{অন্তঃব্যাসার্ধ} = \frac{|\delta_{ABC}|}{a+b+c} = \frac{48}{24} = 2$$

নির্ণেয় অন্তঃবৃত্তের সমীকরণ,

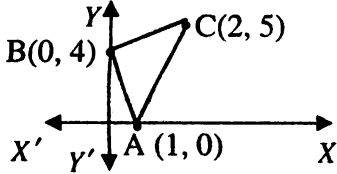
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \quad (\text{Ans.})$$

2(c) ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু তিনটি A(1, 0), B(0, 4) ও C(2, 5)। ABC ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্বকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধান :



পরিকেন্দ্র: A(1, 0) ও B(0, 4) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $(x-1)(x-0) + (y-0)(y-4) = k\{(x-1)(0-4) - (y-0)(1-0)\}$
 $\Rightarrow x^2 + y^2 - x - 4y = k(-4x + 4 - y)$, যা C(2, 5) বিন্দুগামী।

$$2^2 + 5^2 - 2 - 4 \times 5 = k(-4 \times 2 + 4 - 5)$$

$$\Rightarrow 4 + 25 - 2 - 20 = k(-8 + 4 - 5)$$

$$\Rightarrow -9k = 7 \Rightarrow k = -7/9$$

প্রদত্ত বিন্দুগামী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ

$$x^2 + y^2 - x - 4y = -\frac{7}{9}(-4x + 4 - y)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - (1 + \frac{28}{9})x - (4 + \frac{7}{9})y + \frac{28}{9} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{37}{9}x - \frac{43}{9}y + \frac{28}{9} = 0$$

ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\frac{37}{18}, \frac{43}{18})$

ভরকেন্দ্র : AB এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{1}{2}, 2)$ এবং

C(2, 5) শীর্ষগামী মধ্যমার সমীকরণ,

$$(x-2)(5-2) - (y-5)(2-\frac{1}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 6 - \frac{3}{2}y + \frac{15}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 6x - 12 - 3y + 15 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - y + 1 = 0 \dots (i)$$

আবার, BC এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1, \frac{9}{2})$ এবং

A(1, 0) শীর্ষগামী মধ্যমার সমীকরণ,

$$(x-1)(0-\frac{9}{2}) - (y-0)(1-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1; (i) \text{ হতে পাই, } y = 2 + 1 = 3$$

ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র (1, 3).

লম্বকেন্দ্র : AB বাহুর সমীকরণ

$$(x-1)(0-4) - (y-0)(1-0) = 0$$

$$\Rightarrow -4x + 4 - y = 0 \Rightarrow 4x + y - 4 = 0$$

AB বাহুর উপর লম্ব এবং C(2, 5) বিন্দুগামী

রেখার সমীকরণ, $x - 4y = 2 - 20$

$$\Rightarrow x = 4y - 18 \quad (ii)$$

আবার, BC বাহুর সমীকরণ

$$(x-0)(4-5) - (y-4)(0-2) = 0$$

$$\Rightarrow -x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow x - 2y + 8 = 0$$

BC বাহুর উপর লম্ব এবং A(1, 0) বিন্দুগামী

রেখার সমীকরণ, $2x + y = 2$

$$\Rightarrow 2(4y - 18) + y = 2, [(ii) \text{ দ্বারা }]$$

$$\Rightarrow 8y - 36 + y = 2$$

$$\Rightarrow 9y = 38 \Rightarrow y = 38/9$$

$$(ii) \text{ হতে পাই, } x = 4 \times \frac{38}{9} - 18 = -\frac{10}{9}$$

ত্রিভুজটির লম্বকেন্দ্র $(-\frac{10}{9}, \frac{38}{9})$