অধ্যায়-২

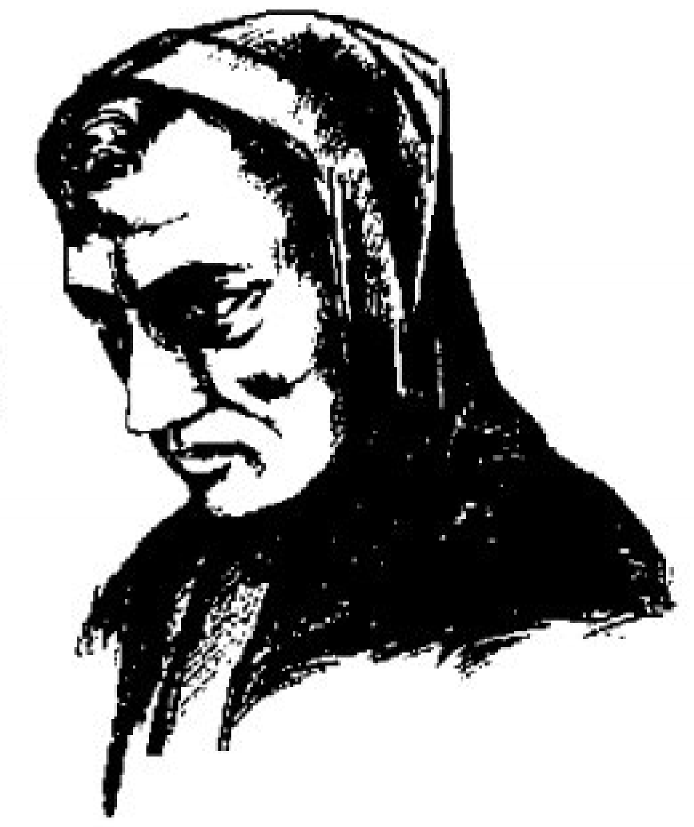
বীজগাণিতিক রাশি

অনুশীলনী-২

অধ্যায়টি পড়ে যা জানতে পারবে—

১. বহুপদীর ধারণা ব্যাখ্যা।
২. উদাহরণের সাহায্যে এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী ব্যাখ্যা।
৩. বহুপদীর গুণ ও ভাগ ব্যাখ্যা।
৪. ভাগশেষ উপপাদ্য ও উৎপাদক উপপাদ্য ব্যাখ্যা এবং তা প্রয়োগ করে বহুপদীর উৎপাদক বিশ্লেষণ।

গ্রীক গণিতবিদ ডায়োফ্যান্টাস (*Diophantus*, আনুমানিক 200–284) কে অনেক সময় বীজগণিতের জনকও বলা হয়। তিনি প্রথম ভগ্নাংশ সংজ্ঞায়িত করেন এবং মূলদ সংখ্যাকে সমীকরণের সমাধান ও সহগ হিসাবে অনুমোদন করেন।



PRACTICE P

১৭টি অনুশীলনীর প্রশ্ন।
১১০টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ■ ৬৩টি সাধারণ বহুনির্বাচনি ■ ১৭টি বহুপদী সমাপ্তিসূচক ■ ৩০টি অভিন্ন তথ্যভিত্তিক
৪২টি সৃজনশীল প্রশ্ন ■ ৪টি অনুশীলনী ■ ৮টি শ্রেণির কাজ ■ ১৬টি মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত ■ ১৪টি প্রশ্নব্যাংক

অনুশীলনীর সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১. নিচের কোনো রাশিটি প্রতিসম?

(ক) $a^2 + b + c$ (খ) $xy + yz + zx$
(গ) $x^2 - y^2 + z^2$ (ঘ) $2a^2 - 5bc - c^2$ **খ**

ব্যাখ্যা: $xy + yz + zx$ রাশিটিতে দুইটি চলকের স্থান বিনিময় করে পূর্বের রাশি পাওয়া যায়।

২. (i) যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

(ii) $P(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ রাশিটি চক্রক্রমিক

(iii) $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^4-1}$ এর সরল মান $\frac{1}{x-1}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii
(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: (i) দেওয়া আছে, $a + b + c = 0$ বা, $a + b = -c$

বামপক্ষ $= a^3 + b^3 + c^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3$
$= (-c)^3 - 3ab.(-c) + c^3 = -c^3 + 3abc + c^3 = 3abc.$

(ii) $P(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}.$

তাহলে x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x লিখে পাই,

$P(y, z, x) = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} = P(x, y, z).$

(iii) $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^2+1}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{4}{1-x^2} + \frac{1}{1-x}$

$= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{4}{1-x^2} + \frac{1}{1-x}$

$= \frac{4}{1-x^4} - \frac{4}{1-x^4} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

বহুপদী $x^3 + px^2 - x - 7$ এর একটি উৎপাদক $x + 7$।

এই তথ্যের আলোকে নিচের ৩ এবং ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৩. p এর মান কত?

(ক) −7 (খ) 7
(গ) $\frac{54}{7}$ (ঘ) 477 **খ**

ব্যাখ্যা : মনে করি, $Q(x) = x^3 + px^2 - x - 7$

$x + 7$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে, $Q(-7) = 0$

বা, $(-7)^3 + p.(-7)^2 - (-7) - 7 = 0.$

বা, $-343 + 49p + 7 - 7 = 0$ বা, $49p = 343$

বা, $p = \frac{343}{49}$ $\therefore p = 7.$

৪. বহুপদীটির অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল কত?

(ক) $(x - 1)(x - 1)$ (খ) $(x + 1)(x - 2)$
(গ) $(x - 1)(x + 3)$ (ঘ) $(x + 1)(x - 1)$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $Q(x) = x^3 + 7x^2 - x - 7 = x^2(x + 7) - 1(x + 7)$
$= (x + 7)(x^2 - 1) = (x + 7)(x + 1)(x - 1)$

$\therefore$ অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল $= (x + 1)(x - 1)$

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

৫. $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 2$ হলে, দেখাও যে, $a = 4$

সমাধান: ধরি, $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$

$x - 2$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে, $P(2) = 0$ হবে।

বা, $(2)^4 - 5(2)^3 + 7(2)^2 - a = 0$

বা, $16 - 40 + 28 - a = 0$

$\therefore$ $a = 4$ **(দেখানো হলো)**

৬. মনে কর, $P(x) = x^n - a^n$, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক

(ক) দেখাও যে, $(x - a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন $P(x) = (x - a) Q(x)$ হয়।

(খ) n জোড় সংখ্যা হলে দেখাও যে, $(x + a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন $P(x) = (x + a) Q(x)$ হয়।

সমাধান:

(ক) দেওয়া আছে, $P(x) = x^n - a^n$

উৎপাদক উপপাদ্য অনুসারে যদি $P(a) = 0$ হয় তবে $(x - a)$ প্রদত্ত বহুপদীটির একটি উৎপাদক হবে।

$P(a) = a^n - a^n = 0$

$\therefore (x - a)$, $P(x) = x^n - a^n$ এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

দেওয়া আছে, $P(x) = (x - a) Q(x)$ ……… (i)

এখানে $P(x)$ এ x চলকের মাত্রা n

এবং $(x - a)$ এ x চলকের মাত্রা 1

$\therefore Q(x)$ এর x চলকের মাত্রা হবে $n - 1$

এখন, $P(x) = x^n - a^n$

$= (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots\dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ …. (ii)

$[\because x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots\dots + xy^{n-2} + y^{n-1})]$

(i) নং ও (ii) নং সমীকৃত করে পাই,

$\therefore Q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + \dots\dots\dots + a^{n-1}$

Ans. $Q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + \dots\dots + a^{n-1}$

(খ) উৎপাদক উপপাদ্য অনুসারে $(x + a)$, $P(x) = x^n - a^n$ (যেখানে n জোড় সংখ্যা)এর উৎপাদক হবে যদি $P(-a) = 0$ হয়।

এখন, $P(-a) = (-a)^n - a^n$
$= (-1)^n a^n - a^n$
$= a^n - a^n$ $[\because$ n জোড় $\therefore (-1)^n = 1]$
$= 0$

$\therefore (x + a)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

দেওয়া আছে, $P(x) = (x + a) Q(x)$ ………………… (i)

এখানে, $P(x)$ এ x চলকের মাত্রা n

$(x + a)$ এ x চলকের মাত্রা 1

$\therefore Q(x)$ এর x চলকের মাত্রা হবে $n - 1$

এখন, $P(x) = x^n - a^n$

$= (x + a)[x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots\dots + (-1)^{n-2} a^{n-2}x + (-1)^{n-1}a^{n-1}]$ ………… (ii)

$[\because x^n - y^n = (x + y)\{x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + (-1)^{n-2}xy^{n-2} + (-1)^{n-1}y^{n-1}\}]$

(i) নং ও (ii) নং সমীকৃত করে পাই,

$\therefore Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \dots\dots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$

Ans. $Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \dots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$

৭. মনে কর, $P(x) = x^n + a^n$, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক। n বিজোড় সংখ্যা হলে দেখাও যে, $(x + a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন, $P(x) = (x + a) Q(x)$ হয়।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P(x) = x^n + a^n$

যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক।

এখানে, $P(-a) = (-a)^n + a^n$
$= (-1)^n a^n + a^n$
$= -a^n + a^n$ $[\because$ n বিজোড় হলে $(-1)^n = -1]$
$= 0$

$\therefore \{x - (-a)\}$

অর্থাৎ $(x + a)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

দেওয়া আছে, $P(x) = (x + a) Q(x)$ ……… (i)

এখানে, $P(x)$ এর x চলকের মাত্রা n

$(x + a)$ -এ x চলকের মাত্রা 1

$\therefore Q(x)$ -এ x চলকের মাত্রা হবে $n - 1$

আবার, $P(x) = x^n + a^n$

$= (x + a)[x^{n-1} - a x^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + (-1)^{n-2} a^{n-2} x + (-1)^{n-1}a^{n-1}]$ ……………….(ii)

$[\because x^n + y^n = (x + y)\{x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + (-1)^{n-2}xy^{n-2} + (-1)^{n-1}y^{n-1}\}]$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ সমীকৃত করে পাই,

$\therefore Q(x) = x^{n-1} - a x^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \dots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$

Ans. $Q(x) = x^{n-1} - a x^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \dots + (-1)^{n-1}a^{n-1}$

৮. মনে কর, $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$, যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$, দেখাও যে, $(x - r)$ যদি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে $(rx - 1)$ ও $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$

$(x - r)$ যদি $P(x)$ এর উৎপাদক হয় তবে, $P(r) = 0$

বা, $ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a = 0$ …………(i)

আবার, $P\left(\frac{1}{r}\right) = a\left(\frac{1}{r}\right)^5 + b\left(\frac{1}{r}\right)^4 + c\left(\frac{1}{r}\right)^3 + c\left(\frac{1}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}\right) + a$

$= \frac{a}{r^5} + \frac{b}{r^4} + \frac{c}{r^3} + \frac{c}{r^2} + \frac{b}{r} + a$

$= \frac{a + br + cr^2 + cr^3 + br^4 + ar^5}{r^5}$

$= \frac{0}{r^5}$ [(i) নং এর সাহায্যে]

$= 0$

$\therefore x - \frac{1}{r} = \frac{1}{r}(rx - 1)$

অর্থাৎ, $(rx - 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

৯. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

(i) $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

সমাধান: ধরি, $f(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

$\therefore f(-1) = (-1)^4 + 7(-1)^3 + 17(-1)^2 + 17(-1) + 6$
$= 1 - 7 + 17 - 17 + 6$
$= 24 - 24 = 0$

$\therefore \{x - (-1)\}$ অর্থাৎ $(x+1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$
$= x^4 + x^3 + 6x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 11x + 6x + 6$
$= x^3(x + 1) + 6x^2(x + 1) + 11x(x + 1) + 6(x + 1)$
$= (x + 1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$

আবার ধরি, $g(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$\therefore g(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6$
$= -1 + 6 - 11 + 6$
$= 12 - 12 = 0$

$\therefore \{x - (-1)\}$ অর্থাৎ $(x + 1)$, $g(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
$= x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$
$= x^2(x+1) + 5x(x+1) + 6(x+1)$
$= (x+1)(x^2 + 5x + 6)$
$= (x+1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$
$= (x+1)\{x(x+3) + 2(x+3)\}$
$= (x+1)(x+2)(x+3)$
$\therefore x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 17x + 6 = (x+1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$
$= (x+1)(x+1)(x+2)(x+3)$
$= (x+1)^2(x+2)(x+3)$
Ans. $(x+1)^2(x+2)(x+3)$

(ii) $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$

সমাধান: ধরি, $P(a) = 4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
$\therefore P(-1) = 4(-1)^4 + 12(-1)^3 + 7(-1)^2 - 3(-1) - 2$
$= 4 - 12 + 7 + 3 - 2$
$= 14 - 14 = 0$
$\therefore \{a - (-1)\}$ অর্থাৎ $(a+1)$, $P(a)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
$= 4a^4 + 4a^3 + 8a^3 + 8a^2 - a^2 - a - 2a - 2$
$= 4a^3(a+1) + 8a^2(a+1) - a(a+1) - 2(a+1)$
$= (a+1)(4a^3 + 8a^2 - a - 2)$
ধরি, $P_1(a) = 4a^3 + 8a^2 - a - 2$
$P_1(-2) = 4(-2)^3 + 8(-2)^2 - (-2) - 2$
$= 4(-8) + 8.4 + 2 - 2$
$= -32 + 32 + 2 - 2$
$= 34 - 34 = 0$
$\therefore \{a - (-2)\}$ অর্থাৎ $(a+2)$, $P_1(a)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $4a^3 + 8a^2 - a - 2 = 4a^2(a+2) - 1(a+2)$
$= (a+2)(4a^2 - 1)$
$= (a+2)\{(2a)^2 - (1)^2\}$
$= (a+2)(2a-1)(2a+1)$
$\therefore 4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
$= (a+1)(4a^3 + 8a^2 - a - 2)$
$= (a+1)(a+2)(2a-1)(2a+1)$
Ans. $(a+1)(a+2)(2a-1)(2a+1)$

(iii) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

সমাধান: ধরি, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
$\therefore f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + 2(-1) + 1$
$= -1 + 2 - 2 + 1 = 0$
$\therefore \{x - (-1)\}$ অর্থাৎ $(x+1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
$= x^3 + x^2 + x^2 + x + x + 1$
$= x^2(x+1) + x(x+1) + 1(x+1)$
$= (x+1)(x^2 + x + 1)$
Ans. $(x+1)(x^2 + x + 1)$

(iv) $x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$

সমাধান: $x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$
$= xy^2 + z^2x + yz^2 + x^2y + zx^2 + y^2z + 3xyz$
$= (xy^2 + x^2y + xyz) + (y^2z + yz^2 + xyz) + (zx^2 + z^2x + xyz)$
$= xy(y + x + z) + yz(y + z + x) + zx(x + z + y)$
$= (x + y + z)(xy + yz + zx)$
Ans. $(x + y + z)(xy + yz + zx)$
[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে 2xyz এর স্থলে 3xyz হবে।

(v) $(x+1)^2(y-z) + (y+1)^2(z-x) + (z+1)^2(x-y)$

সমাধান: $(x+1)^2(y-z) + (y+1)^2(z-x) + (z+1)^2(x-y)$
$= (x^2 + 2x + 1)(y-z) + (y^2 + 2y + 1)(z-x) + (z^2 + 2z + 1)(x-y)$
$= x^2(y-z) + 2x(y-z) + (y-z) + y^2(z-x) + 2y(z-x) + (z-x) + z^2(x-y) + 2z(x-y) + (x-y)$
$= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) + 2xy - 2zx + 2yz - 2xy + 2zx - 2yz + y - z + z - x + x - y$
$= x^2y - zx^2 + y^2z - xy^2 + z^2(x-y)$
$= x^2y - xy^2 - zx^2 + y^2z + z^2(x-y)$
$= xy(x-y) - z(x^2 - y^2) + z^2(x-y)$
$= (x-y)\{xy - z(x+y) + z^2\}$
$= (x-y)(xy - zx - yz + z^2)$
$= (x-y)\{x(y-z) - z(y-z)\}$
$= (x-y)(y-z)(x-z)$
$= -(x-y)(y-z)(z-x)$
Ans. $-(x-y)(y-z)(z-x)$

(vi) $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)$

সমাধান: $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)$
$= b^4c^2 - b^2c^4 + c^4a^2 - c^2a^4 + a^2b^2(a^2 - b^2)$
$= c^4a^2 - b^2c^4 - c^2a^4 + b^4c^2 + a^2b^2(a^2 - b^2)$
$= c^4(a^2 - b^2) - c^2(a^4 - b^4) + a^2b^2(a^2 - b^2)$
$= (a^2 - b^2)\{c^4 - c^2(a^2 + b^2) + a^2b^2\}$
$= (a^2 - b^2)(c^4 - c^2a^2 - b^2c^2 + a^2b^2)$
$= (a^2 - b^2)\{c^2(c^2 - a^2) - b^2(c^2 - a^2)\}$
$= (a^2 - b^2)(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)$
$= -(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$
$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$
Ans. $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$

১০. যদি $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ হয়, তবে দেখাও যে, $bc + ca + ab = 0$ অথবা, $a = b = c$

সমাধান: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

বা, $\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

$[\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}]$

$\therefore$ হয় $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$

$\therefore bc + ca + ab = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$

কিন্তু দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

সুতরাং $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = 0$
বা, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$
বা $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$
$\therefore a = b$

আবার, $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0$
বা, $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$
বা, $\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$
$\therefore b = c$

$\therefore a = b = c$

সুতরাং $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$ হলে, $bc + ca + ab = 0$ অথবা $a = b = c$

(দেখানো হলো)

১১. যদি $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ এবং $z = a + b - c$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

সমাধান:

বামপক্ষ $= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$

$= \frac{1}{2}(b + c - a + c + a - b + a + b - c)$
$\{(b + c - a - c - a + b)^2 + (c + a - b - a - b + c)^2 + (a + b - c - b - c + a)^2\}$ [x, y, z এর মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(2b - 2a)^2 + (2c - 2b)^2 + (2a - 2c)^2\}$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{4(a - b)^2 + 4(b - c)^2 + 4(c - a)^2\}$

$= 4\cdot\frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

$[\because \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc]$

= ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

(দেখানো হলো)

১২. সরল কর: (a) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$= \frac{a^2}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b^2}{-(b-c)(a-b)}+\frac{c^2}{-(c-a)(b-c)}$

$= \frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

কিন্তু $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)} = 1$

Ans. 1

(b) $\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= \frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

$= \frac{a}{-(a-b)(c-a)(x-a)}+\frac{b}{-(a-b)(b-c)(x-b)}+\frac{c}{-(c-a)(b-c)(x-c)}$

$= \frac{a(b-c)(x-b)(x-c)+b(c-a)(x-c)(x-a)+c(a-b)(x-a)(x-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$= \frac{a(b-c)\{x^2-(b+c)x+bc\}+b(c-a)\{x^2-(c+a)x+ca\}+c(a-b)\{x^2-(a+b)x+ab\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$= \frac{x^2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}-x\{a(b-c)(b+c)+b(c-a)(c+a)+c(a+b)(a-b)\}+abc\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

কিন্তু এর লবের $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = ab - ca + bc - ab + ca - bc = 0$

একইভাবে $a(b - c)(b + c) + b(c + a)(c - a) + c(a + b)(a - b)$

$= a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

$= -(a - b)(b - c)(c - a)$

এবং $abc\{(b - c) + (c - a) + (a - b)\} = abc \times 0 = 0$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{-x\{(a-b)(b-c)(c-a)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{-x(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

Ans. $\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

(c) $\frac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(a-c)}+\frac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(b-a)}+\frac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(c-b)}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি

$= \frac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(a-c)}+\frac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(b-a)}+\frac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(c-b)}$

$= \frac{(a+b)^2-ab}{-(b-c)(c-a)}+\frac{(b+c)^2-bc}{-(c-a)(a-b)}+\frac{(c+a)^2-ca}{-(a-b)(b-c)}$

$= \frac{(a-b)\{(a+b)^2-ab\}+(b-c)\{(b+c)^2-bc\}+(c-a)\{(c+a)^2-ca\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)+(b-c)(b^2+bc+c^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= \frac{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= 0$

Ans. 0

(d) $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{x^{16}-1}$

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি $= \frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{x^{16}-1}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \left\{\frac{8(x^8-1)+16}{(x^8+1)(x^8-1)}\right\}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8(x^8+1)}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{x^8-1}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \left\{\frac{4(x^4-1)+8}{(x^4+1)(x^4-1)}\right\}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4(x^4+1)}{(x^4+1)(x^4-1)}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^4-1}$

$= \frac{1}{1+x} + \left\{\frac{2(x^2-1)+4}{(x^2+1)(x^2-1)}\right\}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)}$

$= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$

Ans. $\frac{1}{x-1}$

১৩. আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

(a) $\frac{5x+4}{x(x+2)}$

সমাধান: ধরি, $\frac{5x+4}{x(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$ ....(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $x(x+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$5x + 4 \equiv A(x+2) + Bx$ ....(2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(2) এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$0 + 4 = 2A + 0$

$\therefore A = 2$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$-10 + 4 = 0 - 2B$

বা, $-6 = -2B$

$\therefore B = 3$

A ও B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$\frac{5x+4}{x(x+2)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+2}$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো।

Ans. $\frac{2}{x} + \frac{3}{x+2}$

(b) $\frac{x+2}{x^2-7x+12}$

সমাধান: এখানে, $x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12$

$= (x-3)(x-4)$

সুতরাং, $\frac{x+2}{x^2-7x+12} = \frac{x+2}{(x-3)(x-4)}$

ধরি, $\frac{x+2}{(x-3)(x-4)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}$ ....(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-3)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x + 2 \equiv A(x-4) + B(x-3)$........................(2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (2) এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$3 + 2 = A(3-4) + B(3-3)$

বা, $5 = -A$

$\therefore A = -5$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$4 + 2 = A(4-4) + B(4-3)$

বা, $6 = 0 + B$

$\therefore B = 6$

A ও B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x+2}{(x-3)(x-4)} = \frac{-5}{x-3} + \frac{6}{x-4} = \frac{6}{x-4} - \frac{5}{x-3}$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো।

Ans. $\frac{6}{x-4} - \frac{5}{x-3}$

(c) $\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}$

সমাধান: ধরি, $\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$ ......(1)

(1) নং এর উভয়পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 - 9x - 6 \equiv A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$.........(2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন (2) নং এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$-6 = A(-2)(3) + 0 + 0$

$\therefore A = 1$

আবার (2) নং এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$4 - 18 - 6 = 0 + B \cdot 2(5) + 0$

বা, $-20 = 10B$

$\therefore B = -2$

(2) নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$9 + 27 - 6 = 0 + 0 + C(-3)(-5)$

বা, $30 = 15C$

$\therefore C = 2$

A, B ও C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3}$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো।

Ans. $\frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3}$

(d) $\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)}$

সমাধান: ধরি $\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$ .... (1)

(1) এর উভয় পক্ষকে $(x+1)(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 - 4x - 7 \equiv A(x^2+4) + (Bx+c)(x+1)$ .... (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন (2) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$(-1)^2 - 4.(-1) - 7 = A(1+4)$

বা, $1 + 4 - 7 = 5A$

বা, $5A = -2$

$\therefore \quad A = -\frac{2}{5}$

আবার, (2) নং থেকে x^2, x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 1$

বা, $-\frac{2}{5} + B = 1$

বা, $B = 1 + \frac{2}{5}$

$B = \frac{7}{5}$

এবং $B + C = -4$

বা, $\frac{7}{5} + C = -4$

বা, $C = -4 - \frac{7}{5}$

$C = -\frac{27}{5}$

(1) নং এ A, B, C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 4x - 7}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{-\frac{2}{5}}{x+1} + \frac{\frac{7}{5}x - \frac{27}{5}}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{x+1} + \frac{7x - 27}{x^2+4}\right)$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো।

Ans. $\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{x+1} + \frac{7x - 27}{x^2+4}\right)$

(e) $\dfrac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}$

সমাধান: ধরি,

$$\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} \text{ .... (1)}$$

(1) এর উভয় পক্ষকে $(2x + 1)(x + 3)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x+3)^2 + B(2x+1)(x+3) + C(2x+1)$ ...... (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (2) এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2 = C\{2.(-3) + 1\}$

বা, $9 = C(-6 + 1)$

বা, $-5C = 9$

$\therefore \quad C = -\frac{9}{5}$

আবার, (2) নং এ $x = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = A\left(-\frac{1}{2} + 3\right)^2$

বা, $\frac{1}{4} = A\left(\frac{-1+6}{2}\right)^2$

বা, $\frac{1}{4} = A.\left(\frac{5}{2}\right)^2$

বা, $\frac{1}{4} = A.\frac{25}{4}$

বা, $25A = 1$

$\therefore \quad A = \frac{1}{25}$

আবার, (2) নং থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + 2B = 1$

বা, $\frac{1}{25} + 2B = 1$

বা, $2B = 1 - \frac{1}{25}$

বা, $2B = \frac{25-1}{25}$

বা, $2B = \frac{24}{25}$

বা, $B = \frac{24}{25 \times 2}$

$\therefore \quad B = \frac{12}{25}$

A, B, C এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} = \frac{\frac{1}{25}}{2x+1} + \frac{\frac{12}{25}}{x+3} + \frac{\frac{-9}{5}}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{1}{25(2x+1)} + \frac{12}{25(x+3)} - \frac{9}{5(x+3)^2}$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো।

Ans. $\frac{1}{25(2x+1)} + \frac{12}{25(x+3)} - \frac{9}{5(x+3)^2}$

অনুশীলনীর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

১৪. চলক x এর একটি বহুপদী $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$.

ক. বহুপদীর আদর্শরূপটি লেখ এবং একটি তৃতীয় মাত্রার উল্টা বহুপদীর উদাহরণ দাও।

খ. $P(x)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক $(x + 2)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

গ. যদি $Q(x) = 6x^3 - x^2 - 5x + 2$ এর ক্ষেত্রে $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ হয়, তবে $P(x)$ এবং $Q(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক দুইটি নির্ণয় কর।

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$

বহুপদীটির আদর্শরূপ :

$P(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - a$

এবং তৃতীয় মাত্রার উল্টা বহুপদীর উদাহরণ: $4x - 3x^2 + 4x^3$

খ 'ক' থেকে পাই, $P(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - a$

$x + 2$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে, $P(-2) = 0$

বা, $4.(-2)^4 + 12.(-2)^3 + 7.(-2)^2 - 3.(-2) - a = 0$

বা, $4.16 + 12.(-8) + 7.4 + 6 - a = 0$

বা, $64 - 96 + 28 + 6 - a = 0$

বা, $2 - a = 0$

$\therefore \quad a = 2.$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 2$

গ $a = 2$, (i) নং বসিয়ে পাই,

$P(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

$P(x)$ এর ধ্রুব পদ -2 এর উৎপাদকসমূহের সেট, $F_1 = \{1, -1, 2, -2\}$

$P(x)$ এর মুখ্য সহগ 4 এর উৎপাদকসমূহের সেট,

$F_2 = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$

এখন P(a) বিবেচনা করি, যেখানে $a = \frac{r}{S}$ এবং $r \in F_1, S \in F_2$

$a = \frac{1}{2}$ হলে, $P\left(\frac{1}{2}\right) = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 12.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 7.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3.\left(\frac{1}{2}\right) - 2$

$$= 4.\frac{1}{16} + 12.\frac{1}{8} + 7.\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} - \frac{3}{2} - 2$$
$$= \frac{1+7-8}{4} = \frac{8-8}{4} = 0$$

সুতরাং (2x − 1), P(x) এর একটি উৎপাদক।

$a = -\frac{1}{2}$ হলে, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4.\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 12.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 7.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3.\left(-\frac{1}{2}\right) - 2$

$$= 4.\frac{1}{16} - 12.\frac{1}{8} + 7.\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{3}{2} - 2$$
$$= \frac{1+7-8}{4} = \frac{8-8}{4} = 0$$

অর্থাৎ (2x + 1), P(x) এর একটি উৎপাদক।

a = − 1 হলে, P(−1)
$$= 4(-1)^4 + 12.(-1)^3 + 7.(-1)^2 - 3.(-1) - 2$$
$$= 4 - 12 + 7 + 3 - 2$$
$$= 14 - 14 = 0$$

অর্থাৎ (x + 1), P(x) এর একটি উৎপাদক।

এবং দেওয়া আছে, (x + 2), P(x) এর একটি উৎপাদক। P(x) এর মাত্রা 4 এবং চারটি এক মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং P(x) এর ধ্রুবক উৎপাদক K বিবেচনা করি।

∴ P(x) = K(x + 1) (2x + 1) (2x − 1) (x + 2)

উভয়পক্ষে x-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ বিবেচনা করে দেখা যায় যে, k = 1

সুতরাং, P(x) = (x + 1) (2x + 1) (2x − 1) (x + 2)

আবার, $Q(x) = 6x^3 - x^2 + 5x + 2$ এর ক্ষেত্রে $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

অর্থাৎ (2x − 1), Q(x) এর একটি উৎপাদক।

$$Q(x) = 6x^3 - x^2 + 5x + 2$$
$$= 6x^3 - 3x^2 + 2x^2 - x - 4x + 2$$
$$= 3x^2(2x - 1) + x(2x - 1) - 2(2x - 1)$$
$$= (2x - 1)(3x^2 + x - 2)$$
$$= (2x - 1)(3x^2 + 3x - 2x - 2)$$
$$= (2x - 1)(x + 1)(3x - 2)$$

সুতরাং P(x) এবং Q(x) এর সাধারণ উৎপাদক দুইটি (2x − 1) এবং (x + 1) **(Ans.)**

১৫. x, y, z এর একটি বহুপদী হলো, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

ক. দেখাও যে, F (x, y, z) হলো একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

খ. F (x, y, z) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি F (x, y, z) = 0, x + y + z ≠ 0 হয়, তবে দেখাও যে, $(x^2 + y^2 + z^2) = (xy + yz + zx)$

গ. যদি x = b + c − a, y = c + a − b এবং z = a + b − c হয়, তবে দেখাও যে, F (a, b, c) : F (x, y, z) = 1 : 4

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

প্রদত্ত রাশিটি x, y, z চলকের বহুপদী।

x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসিয়ে পাই,

$F(y, z, x) = y^3 + z^3 + x^3 - 3.y.z.x$
$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

দেখা যায় যে, চলকগুলো স্থান পরিবর্তন করলেও রাশিটি একই থাকে।

অর্থাৎ F (x, y, z) = F (y, z, x)

সুতরাং F (x, y, z) একটি চক্র-ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে,

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$
$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz$$
$$= (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z)$$
$$= (x + y + z)\{(x + y)^2 - (x + y).z + z^2\} - 3xy(x + y + z)$$
$$= (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - zx - yz + z^2) - 3xy(x + y + z)$$
$$= (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - zx - yz + z^2 - 3xy)$$
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$ **(Ans.)**

প্রশ্নমতে, F (x, y, z) = 0

বা, $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

বা, $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ [∵ x + y + z ≠ 0]

∴ $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

x = b + c − a
y = c + a − b
এবং z = a + b − c

'খ' হতে পাই

F (x, y, z)
$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$
$$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$$
$$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(b + c - a + c + a - b + a + b - c)\{(b + c - a - c - a + b)^2 + (c + a - b - a - b + c)^2 + (a + b - c - b - c + a)^2\}$$
[x, y, z এর মান বসিয়ে]
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(2b - 2a)^2 + (2c - 2b)^2 + (2a - 2c)^2\}$$
$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{4(a - b)^2 + 4(b - c)^2 + 4(c - a)^2\}$$
$$= 4.\frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$
$$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$ $[\because \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc]$
$$= 4.F(a, b, c).$$

বা, F (x, y, z) = 4 F(a, b, c)

বা, $\frac{F(x, y, z)}{F(a, b, c)} = 4$

বা, $\frac{F(a, b, c)}{F(x, y, z)} = \frac{1}{4}$ [বিপরীতকরণ করে]

∴ F (a, b, c) : F (x, y, z) = 1 : 4 **(দেখানো হলো)**

১৬. চলক x এর চারটি রাশি হলো, (x + 3), $(x^2 - 9)$, $(x^3 + 27)$ এবং $(x^4 - 81)$

ক. উপরিউক্ত রাশিগুলো হতে একটি প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ এবং একটি অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ তৈরি কর।

খ. $\frac{x^3 + 27}{x^2 - 9}$ কে সম্ভাব্য আংশিক ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে উপস্থাপন কর।

গ. উপরের প্রথম, দ্বিতীয় এবং চতুর্থ রাশিসমূহের প্রত্যেকের গুণাত্মক বিপরীত রাশির সমষ্টিকে সরলরূপে প্রকাশ কর।

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত চারটি রাশি হলো, $(x + 3)$, $(x^2 - 9)$, $(x^3 + 27)$ এবং $(x^4 - 81)$

প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ $= \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$

এবং অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ $= \dfrac{x^4 - 81}{x^3 + 27}$

খ প্রদত্ত ভগ্নাংশ $= \dfrac{x^3 + 27}{x^2 - 9}$

$$= \frac{x^3 + 3^3}{x^2 - 3^2}$$
$$= \frac{(x + 3)(x^2 - x.3 + 3^2)}{(x + 3)(x - 3)}$$
$$= \frac{x^2 - 3x + 9}{x - 3}$$
$$= \frac{x(x - 3) + 9}{x - 3}$$
$$= x + \frac{9}{x - 3}$$

$\therefore \dfrac{x^3 + 27}{x - 9} = x + \dfrac{9}{x - 3}$ **(Ans.)**

গ এখানে, প্রথম রাশি $= x + 3$

দ্বিতীয় রাশি $= x^2 - 9$ এবং চতুর্থ রাশি $= x^4 - 81$

রাশিসমূহের প্রত্যেকের গুণাত্মক বিপরীত রাশি যথাক্রমে

$\dfrac{1}{x + 3}, \dfrac{1}{x^2 - 9}$ এবং $\dfrac{1}{x^4 - 81}$

$\therefore$ রাশিসমূহের সমষ্টি $= \dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{1}{x^2 - 9} + \dfrac{1}{x^4 - 81}$

$$= \frac{1}{x + 3} + \frac{1}{(x + 3)(x - 3)} + \frac{1}{x^4 - 81}$$
$$= \frac{x - 3 + 1}{(x + 3)(x - 3)} + \frac{1}{(x^2)^2 - 9^2}$$
$$= \frac{x - 2}{x^2 - 9} + \frac{1}{(x^2 + 9)(x^2 - 9)}$$
$$= \frac{(x - 2)(x^2 + 9) + 1}{(x^2 + 9)(x^2 - 9)}$$
$$= \frac{x^3 + 9x - 2x^2 - 18 + 1}{x^4 - 81}$$
$$= \frac{x^3 - 2x^2 + 9x - 17}{x^4 - 81}$$

Ans. $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 9x - 17}{x^4 - 81}$

১৭. $(x + 1)^3y + (y + 1)^2$ **রাশিটিকে**

ক. x চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং x চলকের বহুপদী রূপে তার মাত্রা, মূখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর।

খ. y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং y চলকের বহুপদীরূপে তার মাত্রা, মূখ্য সহগ ও ধ্রুবপদ নির্ণয় কর।

গ. x ও y চলকের বহুপদীরূপে বিবেচনা করে তার মাত্রা নির্ণয় কর।

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশি $= (x + 1)^3 y + (y + 1)^2$

$$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)y + y^2 + 2y + 1$$
$$= x^3y + 3x^2y + 3xy + y^2 + 3y + 1$$

এখানে, x কে অনির্দেশক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা x চলকের বহুপদীর আদর্শ আকার।

এখানে, x চলকের মাত্রা = 3

মূখ্য সহগ = y

এবং ধ্রুবপদ $= y^2 + 3y + 1$

খ এক্ষেত্রে y ছাড়া অন্য সব প্রতীককে ধ্রুবক বিবেচনা করতে হবে।

প্রদত্ত রাশি $= (x + 1)^3 y + (y + 1)^2$

$$= (x + 1)^3 y + y^2 + 2y + 1$$
$$= y^2 + \{2 + (x + 1)^3\}y + 1$$
$$= y^2 + (x^3 + 3x^2 + 3x + 3)y + 1$$

[এখানে y কে অনির্দেশক এবং x কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা করা হয়েছে।]

এটি y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকার।

এখানে, y চলকের মাত্রা = 2

মূখ্য সহগ = 1

এবং ধ্রুবপদ = 1

গ প্রদত্ত রাশি $= (x + 1)^3y + (y + 1)^2$

$$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)y + y^2 + 2y + 1$$
$$= x^3y + 3x^2y + 3xy + y^2 + 3y + 1$$

এখানে x ও y এর ঘাতের যোগফলের সর্বোচ্চ মান 4 যা x^3y পদে পাওয়া যায়।

$\therefore$ রাশিটিকে x ও y চলকের বহুপদী বিবেচনা করলে বহুপদীটির মাত্রা 4.

মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

★★★ বহুপদী | Text পৃষ্ঠা-৪১

- বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে।
- বহুপদী রাশির পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল।
- যে বহুপদী একটি চলক বিশিষ্ট, তাই এক চলকের বহুপদী।
- x একটি চলক হলে ax^n, $ax + b$, $ax^2 + bx + c$ ইত্যাদি আকারের রাশি x চলকের বহুপদী।
- x চলকের বহুপদীর পদসমূহ Cx^p আকারে হয় যেকানে C একটি x বর্জিত নির্দিষ্ট সংখ্যা এবং P একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
- Cx^p পদে C কে x^p এর সহগ এবং p কে এই পদের মাত্রা ও ঘাত বলা হয়।
- $ax^3 + bx^2 + cx + d$ বহুপদীর এর মাত্রা 3, মুখ্য পদ ax^3, মুখ্য সহগ a এবং ধ্রুবপদ d.
- যে বহুপদী দুই চলক বিশিষ্ট, তাই দুই চলক বিশিষ্ট বহুপদী।
- Cx^py^q আকারের হয় যেখানে C হচ্ছে সহগ এবং $(p + q)$ হচ্ছে এই পদের মাত্রা।
- উল্লেখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাই ঐ বহুপদীর মাত্রা।
- $P(x, y)$ আকারে প্রকাশ করা হয়।
- $Cx^py^qz^r$ আকারে হয়।
- পদের মাত্রা $(p + q + r)$ এবং উল্লেখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাই হলো বহুপদীটির মাত্রা।

১. $2x^3 + 2x^2 + 5x - 2$ **রাশিতে চলক কোনটি?** (সহজ)

ক x^1 খ x^2 গ x ঘ 2   **গ**

২. $5x^2 + 3y^2 - 2b + \sqrt{2}$ **রাশিটিতে কয়টি পদ বিদ্যমান?** (সহজ)

ক 4   খ 5   গ 7   ঘ 10   **ক**

৩. $5y \times 3y + 2y + 3x - 4$ **রাশিটিতে কয়টি পদ আছে?** (সহজ)