সমাধান ঃ $3\overline{A} + 2\overline{B} = 3(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 2(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 3\hat{i} + 9\hat{j} - 6\hat{k} + 8\hat{i} - 4\hat{j} + 8\hat{k}$

$= 11\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$

$|3\overline{A} + 2\overline{B}| = \sqrt{11^2 + 5^2 + 2^2}$

$= \sqrt{121 + 25 + 4} = \sqrt{150}$

1. (c) $\vec{A} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$, $\vec{B} = -\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{C} = 8\hat{i} - 3\hat{j}$ হলে $\overline{A} - 3\overline{B}$ এবং $3\overline{A} - 7\overline{C}$ নির্ণয় কর। [চ.'০১]

সমাধান ঃ $\overline{A} - 3\overline{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 3(-\hat{i} + 5\hat{j})$

$= 3\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{i} - 15\hat{j} = 6\hat{i} - 13\hat{j}$ (Ans.)

$3\overline{A} - 7\overline{C} = 3(3\hat{i} + 2\hat{j}) - 7(8\hat{i} - 3\hat{j})$

$= 9\hat{i} + 6\hat{j} - 56\hat{i} + 21\hat{j} = -47\hat{i} + 27\hat{j}$ (Ans.)

2. (a) $\vec{A} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে $(2\vec{A} - \vec{B}).(6\vec{A} + 3\vec{B})$ এর মান নির্ণয় কর। [য.'০৩]

সমাধান ঃ $2\overline{A} - \overline{B}$

$= 2(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) - (4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 2\hat{i} + 6\hat{j} - 4\hat{k} - 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

$= -2\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$

$6\overline{A} + 3\overline{B} = 6(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 3(4\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k})$

$= 6\hat{i} + 18\hat{j} - 12\hat{k} + 12\hat{i} - 6\hat{j} + 12\hat{k}$

$= 18\hat{i} + 12\hat{j}$

$(2\overline{A} - \overline{B}).(6\overline{A} + 3\overline{B})$

$= (-2\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}).(18\hat{i} + 12\hat{j})$

$= -36 + 96 = 60$

2. (b) $\underline{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\underline{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ হলে $(\underline{a} \cdot \underline{b}) + (\underline{b} \cdot \underline{c}) + (\underline{c} \cdot \underline{a})$ এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৩; য.'০৯]

সমাধান ঃ $(\underline{a} \cdot \underline{b}) + (\underline{b} \cdot \underline{c}) + (\underline{c} \cdot \underline{a})$

$= (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}).(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}).(\hat{i} + j - \hat{k}) + (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}).(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

$= 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 = 1$

2. (c) (2, 3,1) এবং (3,1, – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় কর। [ঢা.'০২]

সমাধান ঃ (2, 3 1) ও (3 1 , – 2) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ও $3\hat{i} + j - 2\hat{k}$

এ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল

$= (2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}).(3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

$= 6 + 3 - 2 = 7$ (Ans.)

2. (d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে $|\overrightarrow{AB}|$ এর মান নির্ণয় কর। [রা.'১২; ব.'১০; য.'১২,'১৪; চ.'১২; দি.'০৯,'১১,'১৪;ঢা.'১৩; মা.'০৯, '১৩]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k})$

$= 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} - 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$= 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = |2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 6^2}$

$= \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ (Ans.)

3. প্রতি জোড়া ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর ঃ

(a) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ [য.'০৩; রা.'০৬]

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}|$

$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overline{B}| = |2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2}$

$= \sqrt{4 + 100 + 121} = \sqrt{225} = 15$ এবং

$\overline{A} \cdot \overline{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k})$

$= 2.2 + 2.10 + 1.(-11)$

$= 4 + 20 - 11 = 13$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$\cos\theta = \frac{\overline{A} \cdot \overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{13}{3 \times 15} = \frac{13}{45}$

$\theta = \cos^{-1}\frac{13}{45}$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\frac{13}{45}$

(b) $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$
[ঢা. '০৩; রা. '০৪,'১১; য. '০৭,'১৩; সি. '০৮,'১৪; ব.'১১]

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}|$

$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$|\overline{B}| = |\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{1+16+9} = \sqrt{26}$ এবং

$\overline{A}\ \ \overline{B} = (2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})\cdot(\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})$

$= 2 - 12 - 3 = -13$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{-13}{\sqrt{14}\times\sqrt{26}}$$

$$= \frac{-13}{2\sqrt{7}\sqrt{13}} = \frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}})$

3. (c) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$
[য.'০১; চ.'০৪,'০৮; ব.'০৫]

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}|$

$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overline{B}| = |\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 5^2}$

$= \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$ এবং

$\overline{A}\ \ \overline{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})\cdot(\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$

$= 2 - 6 - 5 = -9$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{-9}{3\times\sqrt{35}} = \frac{-3}{\sqrt{35}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{35}}$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{35}}$

3. (d) $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ **এবং** $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ **এর অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।** **[কু.'০৫,'১৩]**

সমাধান ঃ $|\overline{A}| = |\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}|$

$= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$|\overline{B}| = |2\hat{i} + j - \hat{k}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}$

$= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ এবং

$\overline{A}\ \ \overline{B} = (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})\cdot(2\hat{i} + j - \hat{k})$

$= 2 - 2 + 3 = 3$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{3}{\sqrt{14}\times\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{21}}$$

$$\theta = \cos^{-1}(\frac{3}{2\sqrt{21}})$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}(\frac{3}{2\sqrt{21}})$

3. (e) $2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ **এবং** $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ **ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর।** **[কু.'০৬]**

সমাধান ঃ ধরি, $\overline{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\overline{B} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\therefore |\overline{A}| = |2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}$

$= \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$|\overline{B}| = |\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\overline{A}\ \ \overline{B} = (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})\cdot(\hat{i} - j + \hat{k})$

$= 2 + 3 + 1 = 6$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$$\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{6}{\sqrt{14}\times\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{7}\times\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{6}{7}}$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\sqrt{\frac{6}{7}}$

4. $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\underline{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $2\underline{a} + \underline{b}$ ও $\underline{a} + 2\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। [য.'০৪; ব.'০৪; ব.'০৬]

সমাধান ঃ

$$2\underline{a} + \underline{b} = 2(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$
$$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k} + 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$
$$= 5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$$
$$\underline{a} + 2\underline{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 2(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$$
$$= i + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 6\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} = 7\hat{i} + \hat{k}$$
$$|2\underline{a} + \underline{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}$$
$$= \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50}$$

$|\underline{a} + 2\underline{b}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$ এবং

$$(2\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} + 2\underline{b})$$
$$= (5\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) \cdot (7\hat{i} + \hat{k}) = 35 - 4 = 31$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ Θ হলে,

$$\cos\Theta = \frac{(2\underline{a} + \underline{b}).(\underline{a} + 2\underline{b})}{|2\underline{a} + \underline{b}||\underline{a} + 2\underline{b}|} = \frac{31}{\sqrt{50} \times \sqrt{50}}$$
$$\Theta = \cos^{-1}\frac{31}{50}$$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ $\cos^{-1}\frac{31}{50}$

5. **নিচের ভেক্টরগুলি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করে ঃ**

(a) $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

[ঢা., চ.'১১; দি.,রা.,কু.,য'১০; রা.,দি.,সি.,চ.'১৩]

সমাধান ঃ ধরি, x y ও z-অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $2\hat{i} - j + 2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α , β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\cos\alpha = \frac{i \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$
$$\alpha = \cos^{-1}(2/3)$$

$$\cos\beta = \frac{\hat{j} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{-1}{3}$$

$\beta = \cos^{-1}(-1/3)$ এবং

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}$$
$$\gamma = \cos^{-1}(2/3)$$

প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\cos^{-1}(2/3)$, $\cos^{-1}(-1/3)$ ও $\cos^{-1}(2/3)$ কোণ উৎপন্ন করে।

5. (b) $\hat{j} + 2\hat{k}$ **[রা.'০৮]**

সমাধান ঃ ধরি, x , y ও z-অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $\hat{j} + 2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α , β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\cos\alpha = \frac{\hat{i} \cdot (\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{0}{\sqrt{5}} = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$$
$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$
$$\cos\beta = \frac{\hat{j} \cdot (\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\beta = \cos^{-1}(1/\sqrt{5})$ এবং

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k} \cdot (\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\gamma = \cos^{-1}(2/\sqrt{5})$$

প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\frac{\pi}{2}$, $\cos^{-1}(1/\sqrt{5})$ ও $\cos^{-1}(2/\sqrt{5})$ কোণ উৎপন্ন করে।

5. (c) $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ **[য.'০৮]**

সমাধান ঃ ধরি, x y ও z-অক্ষ প্রদত্ত ভেক্টর $3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ এর সাথে যথাক্রমে α , β ও γ কোণ উৎপন্ন করে।

$$\cos\alpha = \frac{\hat{i} \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}$$
$$\alpha = \cos^{-1}(3/7)$$
$$\cos\beta = \frac{\hat{j} \cdot (3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{-6}{\sqrt{49}} = -\frac{6}{}$$

$\beta = \cos^{-1}(-6/7)$ এবং

$$\cos\gamma = \frac{\hat{k}\cdot(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{1^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{49}} = \frac{2}{7}$$

$\gamma = \cos^{-1}(2/7)$

প্রদত্ত ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে $\cos^{-1}(3/7)$ $\cos^{-1}(-6/7)$ ও $\cos^{-1}(2/7)$ কোণ উৎপন্ন করে।

6. (a) $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
[কু.'০৮,'১১; রা.'০৪,'১৩; চ.'০৫; য.'১২; সি.'১২ কুয়েট'০৫-০৬]

সমাধান : $\vec{B}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})}{|6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}|}$$

$$= \frac{6\times2+(-3\times2)+2\times1}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{12-6+2}{\sqrt{36+9+4}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{49}} = \frac{8}{7} \text{ (Ans.)}$$

6. (b) $\underline{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{b} = \sqrt{3}\,\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$; $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
[চ.'১২; কু.'১২; ব.'০৭; দি.'১১]

সমাধান : $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|} = \frac{(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\cdot(\sqrt{3}\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})}{|\sqrt{3}\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}|}$$

$$= \frac{1\times\sqrt{3}+(1\times3)+1\times-2}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2+2^2}} = \frac{\sqrt{3}+3-2}{\sqrt{3+9+4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \text{ (Ans.)}$$

6. (c) $\vec{P} = 5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{Q} = 2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
[কু.'০৪; ঢা.'০৭]

সমাধান : $\vec{P}$ ভেক্টরের উপর $\vec{Q}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|\vec{P}|} = \frac{(5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})\cdot(2\hat{i}+j-2\hat{k})}{|5\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}|}$$

$$= \frac{5\times2+(-3\times1)+2\times-2}{\sqrt{5^2+3^2+2^2}}$$

$$= \frac{10-3-4}{\sqrt{25+9+4}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \text{ (Ans.)}$$

6. (d) $\underline{b} = \hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।
[য.'০৮]

সমাধান : $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|} = \frac{(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})}{|\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}|}$$

$$= \frac{2\times1+3\times2+2\times1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}$$

$$= \frac{2+6+2}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{10}{\sqrt{6}} \text{ (Ans.)}$$

6. (e) A(2 , 3, –1) ও B (– 2, –4, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার উপর $4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।

সমাধান : A(2, 3, –1) ও B (– 2, –4, 3) বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ ও $-2\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-2\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}) - (2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})$$
$$= -4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}$$

$-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ এর অভিক্ষেপ $= \dfrac{(-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k})\cdot(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})}{|-4\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}|}$

$$= \frac{-16+21+4}{\sqrt{16+49+16}} = \frac{9}{9} = 1 \text{ (Ans.)}$$

7. (a) $\vec{B} = 2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর।
[ব.'০১,'০৯; রা.'০৫; সি.'০৭,'১১; কু.,দি.'১০]

সমাধান : $|\vec{B}| = |2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}|$

$= \sqrt{2^2+10^2+11^2} = \sqrt{4+100+121}$
$= \sqrt{225} = 15$

$\vec{B}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর

$= \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{15} = \hat{n}$ (ধরি)

$\vec{B}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A}$ ভেক্টরের উপাংশ

$= (\hat{n}.\vec{A})\hat{n}$

$= \{\frac{1}{15}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})\cdot(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\}\hat{n}$

$= \frac{4+20-11}{15}.\frac{2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}}{15}$

$= \frac{13}{225}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})$ (Ans.)

7. (b) $\vec{A} = \hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। $\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ এবং অভিক্ষেপ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে এদের সাংখ্যিক মান সমান। [য.'০৭;ঢা.'০৯; চ.'১০]

সমাধান ঃ $|\vec{A}| = |\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}|$

$= \sqrt{1^2+2^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\vec{B}| = |6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}| = \sqrt{36+9+4} = 7$

$\vec{A}\ \vec{B} = (\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})\cdot(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$

$= 6-6-4 = -4$

প্রদত্ত ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{-4}{3\times7}$ $\therefore \theta = \cos^{-1}(-\frac{4}{21})$

$\vec{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $= \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$= \frac{1}{3}(\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}) = \hat{a}$ (ধরি)

$\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশ $= \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|}\hat{a}$

$= \frac{-4}{3}\{\frac{1}{3}(\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})\}$

$= \frac{-4}{9}\hat{i}+\frac{8}{9}\hat{j}+\frac{8}{9}\hat{k}$ (Ans.)

$\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের উপাংশের মান

$= |\frac{-4}{9}\hat{i}+\frac{8}{9}\hat{j}+\frac{8}{9}\hat{k}| = \sqrt{\frac{16}{91}+\frac{64}{91}+\frac{64}{91}}$

$= \sqrt{\frac{16+64+64}{91}} = \sqrt{\frac{144}{91}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}|} = \frac{-4}{3}$

$\therefore$ $\vec{A}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{B}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং উপাংশের সাংখ্যিক মান সমান।

8. (a) $2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ ভেক্টরটির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [সি.'০৫,' ০৯]

সমাধান ঃ ধরি, $\vec{A} = 2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$

$|\vec{A}| = \sqrt{2^2+10^2+11^2}$

$= \sqrt{4+100+121} = \sqrt{225} = 15$

$\vec{A}$ ভেক্টরের সমান্তরালে একক ভেক্টর $= \pm\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$= \pm\frac{1}{15}(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k})$ (Ans.)

8. (b) $\vec{A} = 2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ হলে ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [চ.'১০; সি.'১১]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $= \vec{A} + \vec{B}$

$= 2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k} + i+2\hat{j}+3\hat{k}$

$= 3\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$

$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{9+36+64} = \sqrt{109}$

নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm\frac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{109}}(3\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k})$

8. (c) $\vec{A} = 4\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = -\hat{i}-5\hat{j}-\hat{k}$ হলে, (i) ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [ব.'০৪]

(ii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির দিক বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

(iii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির বিসদৃশ সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি ভেক্টর $= \vec{A} + \vec{B}$

$$= 4\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k} + (-i - 5\hat{j} - \hat{k})$$

$$= 3\hat{i} - 4\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

(i) ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর

$$= \pm \frac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|} = \pm \frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$$

(ii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির দিক বরাবর একক ভেক্টর

$$= \frac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|} = \frac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$$

(iii) ভেক্টর দুইটির লব্ধির বিসদৃশ সমান্তরাল একক ভেক্টর $= -\dfrac{\vec{A}+\vec{B}}{|\vec{A}+\vec{B}|} = -\dfrac{1}{5}(3\hat{i} - 4\hat{k})$

(d) (i) $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[ব.'০১; চ.'০৫,'১০; ঢা.,কু.'১১;রুয়েট'১১-১২]

সমাধান ঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1+2)\hat{i} - (2-1)\hat{j} + (-4-1)\hat{k}$$

$$= 3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$$

(i) প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$$= \pm \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{35}}(3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k})$$

(ii) প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব 5 একক মান বিশিষ্ট ভেক্টর $= \pm 5\dfrac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$

$$= \pm \frac{5}{\sqrt{35}}(3\hat{i} - \hat{j} - 5\hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

8. (e) $\underline{a} = \hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\underline{b} = \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ হলে, এমন একটি একক ভেক্টর $\underline{c}$ নির্ণয় কর, যা $\underline{a}$ এবং $\underline{b}$ এর সাথে সমতলীয় হবে এবং $\underline{a}$ এর লম্ব হবে।

সমাধান ঃ ধরি, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর সাথে সমতলীয় যেকোন ভেক্টর $\lambda(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}) + \mu(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ অর্থাৎ $(\lambda+\mu)\hat{i} + (\lambda-\mu)\hat{j} + (-\lambda+\mu)\hat{k}$.

এ ভেক্টর $\underline{a}$ -এর উপর লম্ব হলে,

$$(\lambda+\mu)(1) + (\lambda-\mu)(1) + (-\lambda+\mu)(-1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda + \mu + \lambda - \mu + \lambda - \mu = 0$$

$$\Rightarrow 3\lambda = \mu$$

$\underline{a}$ -এর উপর লম্ব ভেক্টরটি হচ্ছে,

$$4\lambda\, i - 2\lambda\,\hat{j} + 2\lambda\,\hat{k}$$

$$\underline{c} = \pm \frac{4\lambda\hat{i} - 2\lambda\hat{j} + 2\lambda\hat{k}}{\sqrt{16\lambda^2 + 4\lambda^2 + 4\lambda^2}}$$

$$= \pm \frac{2\lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{\sqrt{24\lambda^2}} = \pm \frac{2\lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})}{2\lambda\sqrt{6}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{6}}(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \text{ (Ans.)}$$

8. (f) $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [রা.'০৮; কু. '০৮; য.'১০]

সমাধান ঃ ধরি, $\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = i + 2\hat{j} - \hat{k}$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-2)\hat{i} - (-1-1)\hat{j} + (2+1)\hat{k}$$

$$= -i - 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$$= \pm \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}(-\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

9. (a) P(1 , 1, 1) এবং Q(3, 2, – 1) শূন্যে অবস্থিত দুইটি বিন্দু । $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টর নির্ণয় কর এবং এর সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[য.'০৯; বুয়েট'০৩-০৪]

সমাধান ঃ P(1 , 1, 1) ও Q(3, 2, – 1) বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $i + \hat{j} + \hat{k}$, ও $3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$$\overrightarrow{PQ} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$
$$= 2\hat{i} + j - 2\hat{k} \text{ (Ans.)}$$
$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর

$$= \pm \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \pm \frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$$

$\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর $\frac{1}{3}(2\hat{i} + j - 2\hat{k})$ বা, $-\frac{1}{3}(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$

9. (b) মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P(2 , –1, 7) এবং Q(–4, 5, 0) হলে । $\overrightarrow{PQ}$ । নির্ণয় কর । [সি.'০৯]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{OP} = 2\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$, $\overrightarrow{OQ} = -4\hat{i} + 5\hat{j}$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$
$$= -4\hat{i} + 5\hat{j} - (2\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k})$$
$$= -6\hat{i} + 6\hat{j} - 7\hat{k}$$
$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{36 + 36 + 49} = \sqrt{121} = 11$$

10. (a) দেখাও যে, $\underline{a} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

[ব.'০৮; রুয়েট'০৭-০৮]

প্রমাণ ঃ $\underline{a} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ ও $\underline{b} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে এদের স্কেলার গুণফল শূন্য হবে।

এখন, $\vec{a} \cdot \vec{b} = (9\hat{i} + j - 6\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k})$

$$= 36 - 6 - 30 = 36 - 36 = 0$$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব ।

10 (b) দেখাও যে, $\vec{A} = 8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব।

[রা.'০৭; '০৭; য.'১২; বুয়েট' ০৫-০৬; ১০-১১]

প্রমাণ ঃ $\underline{a} = 8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ ও $\underline{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য হবে।

এখন, $\vec{a} \cdot \vec{b} = (8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k})$

$$= 36 - 6 - 30 = 36 - 36 = 0$$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব ।

10(c) $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - j + 2\hat{k}$ হলে দেখাও যে, $\vec{A} + \vec{B}$ এবং $\vec{A} - \vec{B}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [রা.'০৬; ঢা.'০৮; য.'০৭; চ.'১২,'১৪; মা.বো.'০৮; দি.'১০; ব.'১০,'১২; মা.'১৪; বুয়েট'১১-১২]

প্রমাণ ঃ $\vec{A} + \vec{B} = (1 + 3)\hat{i} + (2 - 1)\hat{j} + (-3 + 2)\hat{k}$

$$= 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (1 - 3)\hat{i} + (2 + 1)\hat{j} + (-3 - 2)\hat{k}$$
$$= -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$$

এখন, $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})$

$$= (4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \cdot (-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$$
$$= -8 + 3 + 5 = 0$$

ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণন শূন্য বলে তারা পরস্পর লম্ব।

10 (d) দেখাও যে, $\underline{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব । এ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

[ঢা.'০২; কু.'০৫]

প্রমাণ ঃ $\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$

$$= 12 - 6 - 6 = 12 - 12 = 0$$

ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণন শূন্য বলে তারা পরস্পর লম্ব।

২য় অংশ ঃ প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব ভেক্টর,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -6 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$=(2-18)\hat{i}-(3+24)\hat{j}+(-9-8)\hat{k}$

$=-16\hat{i}-27\hat{j}-17\hat{k}$

$|\vec{A}\times\vec{B}|=\sqrt{256+729+289}=\sqrt{1274}$

প্রদত্ত ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর

$=\pm\dfrac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1274}}(-16\hat{i}-27\hat{j}-17\hat{k})$

10 (e) A ও B বিন্দু দুইটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})$ ও $(4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ হলে $\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য এবং $\overrightarrow{AB}$ বরাবর একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর। [কুয়েট'০৬-০৭]

সমাধানঃ $\overrightarrow{AB}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}-(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k})$

$=2\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}$

$\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য $=|\overrightarrow{AB}|=|2\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}|$

$=\sqrt{4+36+36}=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$ এবং

$\overrightarrow{AB}$ বরাবর একটি একক ভেক্টর $=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

$=\dfrac{2\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}}{2\sqrt{19}}=\dfrac{1}{\sqrt{19}}i-\dfrac{3}{\sqrt{19}}\hat{j}+\dfrac{3}{\sqrt{19}}\hat{k}$

11. (a) $a\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2a\hat{i}-a\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। [রা.'০৯, '১২; য.'০৫,'০৯,'১৩; ঢা.'০৬,'১০; সি.'০৮,'১২; চ.'০৯; কু.'১৩; দি.'১৪]

সমাধানঃ $a\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2a\hat{i}-a\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$(a\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})\cdot(2a\hat{i}-a\hat{j}-4\hat{k})=0$

$\Rightarrow 2a^2+2a-4=0\Rightarrow a^2+a-2=0$

$\Rightarrow (a+2)(a-1)=0 \quad a=1,-2$

11(b) $2\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k}$ এবং $4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে a এর মান নির্ণয় কর। [ঢা.'০২; ব.'০৪]

সমাধানঃ $2\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k}$ এবং $4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$(2\hat{i}+a\hat{j}+\hat{k})\cdot(4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k})=0$

$\Rightarrow 8-2a-2=0\Rightarrow 2a=6\therefore a=3$

11 (c) $\underline{a}=2\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\underline{b}=4\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হলে y এর মান নির্ণয় কর। [চ.'০২; রা.'০৫; কু.'০৫]

সমাধানঃ $\underline{a}=2\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\underline{b}=4\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব বলে এদের স্কেলার গুণন শূন্য।

$(2\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k})\cdot(4\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})=0$

$\Rightarrow 8-2y-1=0\Rightarrow 2y=7 \quad a=\dfrac{7}{2}$

12. (a) দেখাও যে, $\underline{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{b}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ ও $\underline{c}=2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয়। [ঢা.'০৬]

প্রমাণ ঃ প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে যদি এদের যেকোন দুইটির ক্রস গুণনের সাথে অপরটির ডট গুণন শূন্য হয়।

এখন, $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -3 & 5\\ 2 & 1 & -4\end{vmatrix}$

$=3(12-5)+2(-4-10)+1(1+6)$

$=21-28+7=28-28=0$

প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি সমতলীয়।

12. (b) $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}, \lambda\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে λ এর মান নির্ণয় কর। [য.'০৮]

সমাধান ঃ $i-\hat{j}+\hat{k}, 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}, \lambda\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k}$

ভেক্টর তিনটি সমতলীয় বলে, $\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ \lambda & -1 & \lambda\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 1(2\lambda-1)+1(2\lambda+\lambda)+1(-2-2\lambda)=0$

$\Rightarrow 2\lambda-1+3\lambda-2-2\lambda=0$

$\Rightarrow 3\lambda=3 \quad \lambda=1$ (Ans.)

13. (a) দেখাও যে, $\underline{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\underline{b}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\underline{c}=2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

[ব.'০৩,'১২; ঢা.'০৪,'১৪; রা.'০৭,'১৪; বুয়েট'০৩-০৪]

প্রমাণ : $|\underline{a}| = |3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$|\underline{b}| = |\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$

$|\underline{c}| = |2\hat{i} + j - 4\hat{k}| = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$

$\sqrt{14}$, $\sqrt{35}$ ও $\sqrt{21}$ এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $|\underline{a}|^2 + |\underline{c}|^2 = 14 + 21 = 35 = |\underline{b}|^2$

প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

13. (b)তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$; দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

[ঢা.'০৫,'১৩; সি.,চ.'১০,'১৩; কু.'১৪]

প্রমাণ ঃ ধরি , A, B ও C বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $-\hat{i}$ $\hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$.

$\overrightarrow{AB} = -i - \hat{j} + 8\hat{k} - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= -2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$

$\overrightarrow{BC} = -4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k} - (-\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k})$

$= -3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+25+4} = \sqrt{38}$

$\overrightarrow{CA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} - (-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})$

$= 5\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{25+4+9} = \sqrt{38}$

$|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ ও $|\overrightarrow{CA}|$ এর যেকোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{38}$

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

13. (c) ভেক্টরের সাহায্যে দেখাও যে, A (1,–1, –1) , B (3 , 3 , 1) এবং C(– 1, 4 , 4) বিন্দু তিনটি একটি গোলকের উপর অবস্থিত যার কেন্দ্র P(0,1,2)

প্রমাণ ঃ $\overrightarrow{PA} = (1 \quad)\hat{i} + (-1-1)\hat{j} \quad (-1-2)\hat{k}$

$= i - 2\hat{j} - 3\hat{k}$

$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{PB} = (3-0)\hat{i} + (3-1)\hat{j} + (1-2)\hat{k}$

$= 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{PC} = (-1-0)\hat{i} + (4-1)\hat{j} + (4-2)\hat{k}$

$= -\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$|\overrightarrow{PC}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}| = \sqrt{14}$

প্রদত্ত বিন্দু তিনটি P(0,1,2) কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি গোলকের উপর অবস্থিত ।

13.(d) A(0, 1 , 2) , B (–1,3 , 0) , C(1, –1, 1) বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর এবং । $\overrightarrow{AB}$ । এবং । $\overrightarrow{AC}$ । নির্ণয় কর [ঢা.'০৩]

সমাধানঃA(0,1,2) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \hat{j} + 2\hat{k}$

B (–1,3 , 0) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= -i + 3\hat{j}$,

C(1, –1, 1) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = (-1-0)\hat{i} + (3-1)\hat{j} + (0-2)\hat{k}$

$= -\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

এবং $\overrightarrow{AC} = (1-0)\hat{i} + (-1-1)\hat{j} + (1-2)\hat{k}$

$= i - 2\hat{j} - \hat{k}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

14. (a) $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $\vec{A} \times \vec{B}$ হতে তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় কর।

[কু.'০৪]

সমাধান ঃ $|\vec{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{4+4+1} = 3$

$|\vec{B}| = |\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & & 2 \end{vmatrix}$$

$= (4-3)\hat{i} - (4-1)\hat{j} + (6-2)\hat{k}$

$= \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$

ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে,

$\sin\theta = \dfrac{|\vec{A}+\vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \dfrac{\sqrt{26}}{3\sqrt{14}} \quad \therefore \theta = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{13}}{3\sqrt{7}}$

14(b) $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ হলে, $|\vec{A} \times \vec{B}|$ নির্ণয় কর। **[বুয়েট'০০-০১]**

সমাধানঃ $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-2 \quad 6)\hat{i} - (\quad 9)\hat{j} + (-2-6)\hat{k}$

$= 4\hat{i} + 10\hat{j} - 8\hat{k}$

$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{16+100+64} = \sqrt{180}$

$= 6\sqrt{5}$

14(c) $(a\hat{i} + b\hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} - \hat{j}$ হলে, a ও b এর মান নির্ণয় কর। **[বুয়েট'০১-০২]**

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$(a\hat{i} + b\hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} - \hat{j}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i} - \hat{j}$

$\Rightarrow (3b-2)\hat{i} - (3a-2)\hat{j} + (2a-2b)\hat{k} = \hat{i} - \hat{j}$

$3b - 2 = 1 \Rightarrow 3b = 3 \qquad b = 1$

$3a - 2 = 1 \Rightarrow 3a = 3 \qquad a = 1$

14(d) $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে, $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$= (2-3)\hat{i} - (-4-1)\hat{j} + (6+1)\hat{k}$

$= -\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$

$= (7+10)\hat{i} - (21-2)\hat{j} + (15+1)\hat{k}$

$= 17\hat{i} - 19\hat{j} + 16\hat{k}$ (Ans.)

14(e) $\underline{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\underline{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}$ হলে $5\underline{a} \times \underline{b}$ এবং $\dfrac{\underline{b}}{|\underline{a}|}$ নির্ণয় কর। **[চ.'০২]**

সমাধান ঃ $5\underline{a} \times \underline{b} = 5\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -7 \end{vmatrix}$

$= 5\{(21-10)\hat{i} - (-14+5)\hat{j} + (4-3)\hat{k}\}$

$= 5\{11\hat{i} + 9\hat{j} + \hat{k}\} = 55\hat{i} + 45\hat{j} + 5\hat{k}$

$\dfrac{\underline{b}}{|\underline{a}|} = \dfrac{-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}}{|2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}|} = \dfrac{-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k}}{\sqrt{4+9+25}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{38}}(-\hat{i} + 2\hat{j} - 7\hat{k})$

14(f) যেকোন দুইটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর জন্য প্রমাণ কর যে, $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ এবং $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. **[চ.'০২]**

প্রমাণ ঃ মনে করি, $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$,

$\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \cdot (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k})$

$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$= b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$

$= (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) \cdot (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$

$= \vec{B} \cdot \vec{A}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

আবার, $\times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

$$= - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = - \vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}$$

14(g) প্রমাণ কর যে, $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

যেখানে $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$,

$\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ **[ঢা.'০১; ব.'০২]**

প্রমাণঃ L.H.S. $= \vec{} \times \vec{B}$

$= (a_1 i + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}) \times (b_1 i + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k})$

$= a_1 b_1 (\hat{i} \times \hat{i}) + a_1 b_2 (\hat{i} \times \hat{j}) + a_1 b_3 (\hat{i} \times \hat{k})$

$+ a_2 b_1 (\hat{j} \times \hat{i}) + a_2 b_2 (\hat{j} \times \hat{j}) + a_2 b_3 (\hat{j} \times \hat{k})$

$+ a_3 b_1 (\hat{k} \times \hat{i}) + a_3 b_2 (\hat{k} \times \hat{j}) + \quad b_3 (\hat{k} \times \hat{k})$

$= a_1 b_1 (\underline{0}) + a_1 b_2 (\hat{k}) + a_1 b_3 (-\hat{j})$

$+ a_2 b_1 (-\hat{k}) + a_2 b_2 (\underline{0}) + a_2 b_3 (\hat{i})$

$+ a_3 b_1 (\hat{j}) + a_3 b_2 (-\hat{i}) + a_3 b_3 (\underline{0})$

$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j$

$+ (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k}$

$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ R.H.S. (Proved)

14(h) দুইটি ভেক্টর $\bar{a}$ **ও** $\bar{b}$ **এর স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে,** $j = 0$, $\hat{i} . i = 1$; **যেখানে ও** j **যথাক্রমে** x **ও অক্ষ পরাবর একক ভেক্টর। [চ '১১]**

স্কেলার বা ডট গুণনের সংজ্ঞা ঃ $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর দুইটির মধ্যবর্তী কোণ θ $(0 \le \theta < \pi)$ ভেক্টর দুইটির

স্কেলার গুণনকে $\underline{a} . \underline{b}$ দ্বারা সূচিত করা

$\underline{a} . \underline{b} = |\underline{a}|\,|\,|\cos\theta$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়। দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন একটি স্কেলার রাশি

এখন, $i . \hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 90^0 = 1 \times 1 \times 0 = 0$

$\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\cos 0^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

15. (a) ভেক্টরের সাহায্যে A(1,3,2), B(2,–1, 1) ও C(– 1, 2 , 3) শীর্ষ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৪-০৫]

সমাধান ঃ $\overrightarrow{AB} = (1-2) + (3 \quad 1)\hat{j} + (2 - 1)k$

$= - \hat{i} + 4\hat{j} + k$

$\overrightarrow{AC} \quad (1+1)\hat{} \qquad + (2-3)\hat{k}$

$= 2\hat{i} \qquad k$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-4-1)i - (1-2)\hat{j} + (-1-8)\hat{k}$

$= \quad 5\hat{i}$

ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

$= \frac{1}{2}|-5\hat{i} + j - 9\hat{k}| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + 1^2 + 9^2}$

$\frac{1}{2}\sqrt{25 \quad 1 + 81} = \frac{1}{2}\sqrt{107}$ বর্গ একক।

15 (b) $\vec{P} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$ **এবং** $\vec{Q} = 2\hat{i} - 2\hat{j} - k$ **একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [বুয়েট'০৬-০৭]**

সমাধান ঃ $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} i & j & \\ 4 & & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

$= (4-2)i - (-4-2)j \qquad 8 \quad 8)k$

$6\hat{i}$

সামান্তরিকের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $\vec{P} \times$

$= \sqrt{36 + 36}$ বর্গ একক

15(c) একটি ত্রিভুজের শীর্ষ তিনটির অবস্থান ভেক্টর $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ ও $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষ তিনটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ ও $2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$.

$\overrightarrow{AB} = 3\hat{i}+\ldots-\hat{k}-(i-2\hat{j}+3\hat{k})$

$= 2\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k}$

$\overrightarrow{AC} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}-(\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$

$= \hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 7 & -4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$= (-49+20)\hat{i}-(-14+4)\hat{j}+(10-7)\hat{k}$

$= -29\hat{i}+10\hat{j}+3\hat{k}$

ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$= \frac{1}{2}|-29\hat{i}+10\hat{j}+3\hat{k}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{29^2+10^2+3^2}$ বর্গ একক।

$= \frac{1}{2}\sqrt{841+100+9}$ বর্গ একক।

$= \frac{1}{2}\sqrt{950}$ বর্গ একক $= \frac{5}{2}\sqrt{38}$ বর্গ একক।

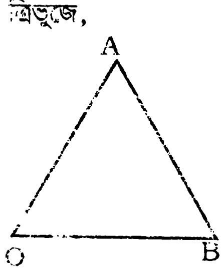
15 (d) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ হলে, OAB ত্রিভুজটির কোণ তিনটি নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, OAB ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}\quad 3\hat{j}\quad \hat{k}$

$\overrightarrow{AO}$

এবং $\overrightarrow{OB}$



$\overrightarrow{AB} =$

$= -2\hat{i}\quad \hat{j}\quad 3\hat{k}$

$= -\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k} \qquad \overrightarrow{BA} = \hat{i}-7\hat{j}-4\hat{k}$

$$\cos AOB = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

$$= \frac{(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+16+9}}$$

$$= \frac{2-12-3}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = \frac{-13}{\sqrt{364}}$$

$$\angle AOB = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{364}}\right)$$

$$\cos OAB = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \frac{(-2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})\cdot(-\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+49+16}}$$

$$= \frac{2+21+4}{\sqrt{14}\sqrt{66}} = \frac{27}{\sqrt{924}}$$

$$\angle OAB = \cos^{-1}\left(\frac{27}{\sqrt{924}}\right)$$

$$\cos OBA = \frac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BO}||\overrightarrow{BA}|}$$

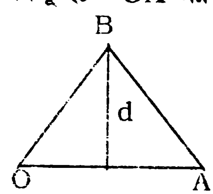
$$= \frac{(-i-4\hat{j}-3\hat{k})\cdot(\hat{i}-7\hat{j}-4\hat{k})}{\sqrt{1+16+9}\sqrt{1+49+16}}$$

$$= \frac{-1+28+12}{\sqrt{26}\sqrt{66}} = \frac{39}{\sqrt{1716}}$$

$$\angle OBA = \cos^{-1}\left(\frac{39}{\sqrt{1716}}\right)$$

15. (e) $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$ হলে, B বিন্দু হতে OA এর লম্ব দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ ধরি, OAB ত্রি



$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$\overrightarrow{OB} = 6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$ এবং

B বিন্দু হতে OA এর লম্ব দূরত্ব d .

এখন, $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

$= (-4-3)\hat{i} - (-4+6)\hat{j} + (-6-12)\hat{k}$

$= -7\hat{i} - 2\hat{j} - 18\hat{k}$

$\Delta \text{OAB} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| \times d$

$\Rightarrow \sqrt{7^2 + 2^2 + 18^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}\ d$

$\Rightarrow \text{d} = \frac{\sqrt{377}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{377}}{3}$ একক। (Ans.)

15(f) একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর ধারগুলো $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{C}} = 3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ **ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত। ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর।**

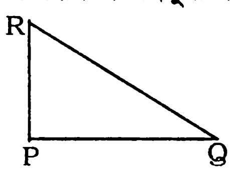
সমাধান ঃ আয়তাকার ঘনবস্তুটির আয়তন

$= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2(4-1) + 3(2+3) + 2(-1-6)$

$= 6 + 15 - 14 = 7$ ঘন একক

15(g) একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু $\vec{\mathbf{A}} = 3\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{B}} = 4\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ ভেক্টর দ্বারা নির্দেশিত। ত্রিভুজটির কোণগুলো নির্ণয় কর।



সমাধান ঃ ধরি, PQR ত্রিভুজে PQ ও PR বাহু দুইটি যথাক্রমে $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ ও $\vec{B} = 4\hat{i} - j + 3\hat{k}$ দ্বারা নির্দেশিত।

$\overrightarrow{PQ} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{PR} = 4\hat{i} - j + 3\hat{k}$

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$

$= -3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k} + 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

$= \hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k}$

$\cos \text{QPR} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}$

$= \frac{(3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{9+36+4}\ \sqrt{16+1+9}}$

$= \frac{12-6-6}{\sqrt{49}\ \sqrt{26}} = \frac{0}{7\sqrt{26}} = 0 = \cos 90^0$

$\angle QPR = 90^0$

$\cos \text{PQR} = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{QR}|}$

$= \frac{(-3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (\hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k})}{\sqrt{9+36+4}\ \sqrt{1+49+25}}$

$= \frac{-3+42+10}{\sqrt{49}\ \sqrt{75}} = \frac{49}{7 \times 5\sqrt{3}} = \frac{7}{5\sqrt{3}}$

$\angle PQR = \cos^{-1}(\frac{7}{5\sqrt{3}})$ এবং

$\cos \text{PRQ} = \frac{\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ}}{|\overrightarrow{RP}||\overrightarrow{RQ}|}$

$= \frac{(-4\hat{i} + j - 3\hat{k}) \cdot (-\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k})}{\sqrt{16+1+9}\ \sqrt{1+49+25}}$

$= \frac{4+7+15}{\sqrt{26}\ \sqrt{75}} = \frac{26}{\sqrt{26}\ 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}}$

$\angle PQR = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}})$

ত্রিভুজটির কোণগুলো 90^0, $\cos^{-1}(\frac{7}{5\sqrt{3}})$ এবং $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{26}}{5\sqrt{3}})$

15(h) একটি সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\vec{\mathbf{A}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ এবং $\vec{\mathbf{B}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত। দেখাও যে, সামান্তরিকটি একটি রম্বস এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

পমাণ ঃ $\vec{A} \cdot \vec{B} = (3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$

$= 6 - 12 + 6 = 0.$

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব । অতএব, সামান্তরিকটি একটি রম্বস ।

এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} |\vec{A}||\vec{B}|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{3^2+4^2+1^2}\ \sqrt{2^2\ \ 3^2\ \ 6^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{9+16+1}\ \sqrt{4+9+36}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{1274} = 17.85$ বর্গ একক (প্রায়)

16.(a) $2\hat{i}+3\hat{j}\ \ 4\hat{k}$ **বিন্দুগামী এবং** $5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$ **ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান: ধরি, $\underline{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ এবং

$\underline{b} = 5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k}$

$\underline{a}$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\ \ = \underline{a} + t\underline{b}$ যেখানে একটি প্যারামিটার।

নির্ণেয় রেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\underline{r} = 2\hat{i}\ \ 3\hat{j}-4\hat{k}\ \ \ t(5\hat{i}+6\hat{j}+8\hat{k})$

(b) $\hat{i}$ **ও** $\hat{j}$ **বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।**

সমাধান: ধরি, $\underline{a} = \hat{i}$ ও $\underline{b} = \hat{j}$.

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b}-\underline{a})$, যেখানে t একটি প্যারামিটার।

নির্ণেয় রেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \hat{i} + t(\hat{j}-\hat{i}) \Rightarrow \underline{r} = \qquad + t$

(c) দেখাও যে, (2, –3, 4) এবং (5 , –8) বিন্দুগামী **সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ** $\underline{r} = (2+3t)$ + $(-3+10t)$ + $(4-12t)\hat{k}$ **যেখানে t একটি** প্যারামিটার। এর সাহায্যে এর কার্তেসীয় সমীকরণ নির্ণয় **কর।**

প্রমাণ : মনে করি, (– 4) বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$\underline{a} = 2\hat{i}-3\hat{j}+$ বিন্দুর অবস্থান

ভেক্টর $\underline{b}$ $5\hat{i}+$

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ বিন্দুগা রণ

$\underline{r} = \underline{a}$

$r =$

$+4\hat{k}$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}+t(3\hat{i}+10\hat{j}-12\hat{k})$

$\underline{r} = (2+3t)\ \hat{i} + (-3+10t)\ \hat{j} + (4-12t)\hat{k}$

দ্বিতীয় অংশ: কার্তেসীয় সমীকরণের ক্ষেত্রে,

$\underline{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+\ \ \hat{k}$

আমরা পাই,

$x\hat{i}+y\hat{j}+\ \ \hat{k} = (2+3t)\ \hat{i} + (-3+10t)\hat{j} + (4-12t)\hat{k}$

উভয় পক্ষ হতে $\hat{i}$ $\hat{j}$, $\hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

x = 2 + 3t, y = –3 +10t, z = 4 – 12t

$\Rightarrow \frac{x-2}{3} = t,\ \frac{y+3}{10} = t,\ \frac{z-4}{-12} = t$

নির্ণেয় কার্তেসীয় সমীকরণ,

$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{10} = \frac{z-4}{-12}$

প্রশ্নমালা II C

1. **(a)** সবগুলি তথ্য সত্য। $\therefore$ Ans. D

(b) ভেক্টরের বিয়োগ অনুযায়ী $\overline{OA}-\overline{OB} = \overline{BA}$ Ans. B.

(c) *Sol*^{n}. সবগুলি তথ্য সত্য। Ans. D

(d) $2\overline{A}-\overline{B} = 4\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}-(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$

$= -2\hat{i}+7\hat{j}$

$|2\overline{A}-\overline{B}| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$

(e) নির্ণেয় কোণ $= \cos^{-1}\frac{(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}).\hat{j}}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{1}} = \cos^{-1}\frac{2}{3}$

নির্ণেয় ভেক্টর $= \frac{6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{36+9+4}}\ \ \frac{\ \ \hat{j}+2\hat{k}}{7}$

(g) *Sol*^{n} z অক্ষের উপর $\overline{A}$ ভেক্টরটির অংশক $\hat{k}$

x অক্ষ বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরটির অভিক্ষেপ 6,

C. ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরালে একক ভেক্টর

$\pm\frac{1}{7}(8\hat{i}\ \ \hat{j}+3\hat{k})$

(h) $|\overline{A}| = \sqrt{9+4+36}$

(i) $(2\hat{i} + a\hat{j} + \hat{k}).(\quad 2\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow \quad + 2a + 2 = 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$

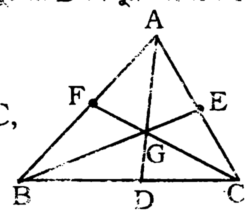
(j) $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} \quad \vec{B})$

$\Rightarrow \quad + B^2 + 2\vec{A}\ \vec{B} = A^2 \quad B^2 \quad 2\vec{A}\ \vec{B}$

$\Rightarrow 4 \quad = 0 \Rightarrow \vec{A}\ \vec{B} = \quad$ কোণ $= 90°$

ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। [ঢা. '১১,'১৪; রা. '১২; ব. '১০,'১৪; চ.'০৭; য কু. '১০,'১২,'১৪; মা.বো.'০৯,'১২; দি.'১৪]

প্রমাণ : মনে করি, ABC ত্রিভুজের B বিন্দুর সাপেক্ষে A ও C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এবং D, E, F বিন্দু তিনটি যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু।



D, E, F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\frac{\underline{c}}{2}, \frac{\underline{c}+\underline{a}}{2}, \frac{\underline{a}}{2}$

ধরি, BE ও CF মধ্যমা দুইটি যথাক্রমে m 1 ও n 1 অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

G এর অবস্থান ভেক্টর $\dfrac{m\frac{\underline{c}+\underline{a}}{2}}{m+1} = \dfrac{m\underline{c} + m\underline{a}}{2(m+1)}$

এবং $\dfrac{n\frac{\underline{a}}{2} + \underline{c}}{n+1} = \dfrac{n\underline{a} + 2\underline{c}}{2(n+1)}$ অভিন্ন হবে।

$\dfrac{m}{2(m+1)} = \dfrac{n}{2(n+1)} \Rightarrow mn + m = mn +$

$\Rightarrow m = n$ এবং $\dfrac{m}{2(m+1)} = \dfrac{2}{2(n+1)}$

$\Rightarrow \dfrac{m}{m+1} = \dfrac{2}{m+1} \quad m = 2 = n$

BE ও CF মধ্যমা দুইটি অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, BE ও AD মধ্যমা দুইটি 2 1 অনুপাতে পরস্পরকে ছেদ করে। BE মধ্যমা একটি ও কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে 2 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হতে পারে। অতএব AD, BE ও CF মধ্যমা তিনটি 1 অনুপাতে পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

অতএব, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

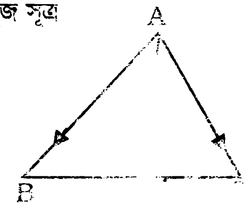
3. ABC ত্রিভুজে, D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু হলে দেখাও যে,

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$ [ব.'১১; সি.'১৩]

(b) $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

[য.'০৯,'১৩; কু. '১০; ঢা. '১২; সি.'১০; চ.,দি.'১০; রা.'১১,'১৪; ব.'১৩]

প্রমাণ : (a) ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \quad$ (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

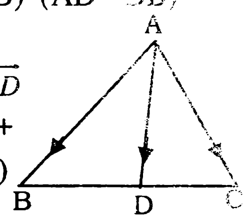
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{B}$

[∵ D বিন্দু এর মধ্যবিন্দু]

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} +$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD}$

(b) ABD ত্রিভুজে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \cdot (\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{DB})$

$\Rightarrow AB^2 = AD^2 + DB^2$

$+ \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow AB^2 = AD^2 + BD^2 +$

$2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} \cdots (1)$

তদ্রূপ ACD ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} \quad (2)$

(1) ও (2) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

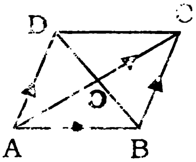
$+ 2\overrightarrow{AD}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

$[\quad \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \underline{0}]$

4. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হবে। [সি.'০৭; ব.'০৭; ঢা. দি '১১; য.'১১; রা.,কু.,সি '১৩]

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABCD রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$ এবং $\overrightarrow{AD}=\underline{b}$ হলে,



$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\underline{a}+\underline{b}$

এবং $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$
$=-\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}-\underline{a}$

ধরি, $\overrightarrow{AO}=m\overrightarrow{AC}=m(\underline{a}+\underline{b})$ এবং

$\overrightarrow{BO}=n\overrightarrow{BD}=n(\underline{b}-\underline{a})$

এখন, $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$

$\Rightarrow m(\underline{a}+\underline{b})=\underline{a}+n(\underline{b}-\underline{a})$

$\Rightarrow m\underline{a}+m\underline{b}=\underline{a}+n\underline{b}-n\underline{a}$

$\Rightarrow (m-n)\underline{b}+(m+n-1)\underline{a}=\underline{0}$

$\underline{a}, \underline{b}$ অসমান্তরাল ভেক্টর বলে,

$m-n=0\Rightarrow m=n$ এবং

$m+n-1=0\Rightarrow m+m=1 \therefore m=\frac{1}{2}=n$

$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$ এবং $|\overrightarrow{BO}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}|$

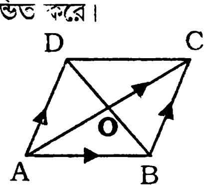
আবার, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{b}-\underline{a})$

$=|\underline{b}|^2-|\underline{a}|^2=0$, কারণ রম্বসের চারটি বাহু পরস্পর সমান।

অতএব, AC ও BD কর্ণ দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

5. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

এখন, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\cdots(1)$

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$
$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}$ [$\because \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ ও $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$]

$\Rightarrow \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\cdots(2)$

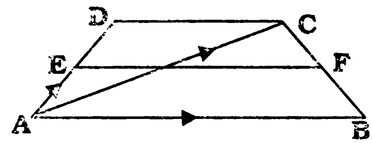
(1) ও (2) হতে পাই, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

AB = DC এবং AB ∥ DC [∵ AB ও DC একই রেখা হতে পারে না।]

ABCD একটি সামান্তরিক।

6. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

প্রমাণ ঃ



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AD ও BC অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F এবং A বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে মনে করি, B ও D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ অর্থাৎ $\overrightarrow{AB}=\underline{a}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{b}$.

AB ∥ DC হলে যেকোন স্কেলার রাশি m এর জন্য $\overrightarrow{DC}=m\overrightarrow{AB}=m\underline{a}$.

ΔABC এ, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\underline{b}+m\underline{a}$

C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $=\underline{b}+m\underline{a}$

AD এর মধ্যবিন্দু E এর অবস্থান ভেক্টর $=\frac{\underline{b}}{2}$

BC এর মধ্যবিন্দু F এর অবস্থান ভেক্টর $\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b}+m\underline{a})$

$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b}+m\underline{a})-\frac{\underline{b}}{2}$

$=\frac{1}{2}(1+m)\underline{a}=\frac{1}{2}(1+m)\overrightarrow{AB}$

EF বাহু AB এর সমান্তরাল। অতএব, EF DC এরও সমান্তরাল।

আবার, $|\overrightarrow{EF}|=\frac{1}{2}(1+m)|\overrightarrow{AB}|$

$=\frac{1}{2}\{|\overrightarrow{AB}|+|m\overrightarrow{AB}|\}$

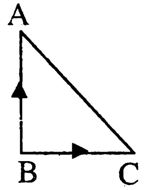
$=\frac{1}{2}\{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|\}$

$$EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

7. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ অন্য দুই বাহুর বর্গের যোগফলের সমান।

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে, AC অতিভুজ এবং B বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A ও C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{c}$.



$\angle ABC = 90^0$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ বা, $\underline{a} \cdot \underline{c} = 0$

এখন, $\overrightarrow{CA} = \underline{a} - \underline{c}$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA} = (\underline{a} - \underline{c}) \cdot (\underline{a} - \underline{c})$

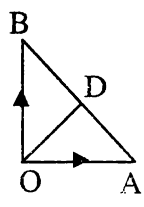
$\Rightarrow CA^2 = a^2 + c^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{c} = a^2 + c^2$

$CA^2 = AB^2 + BC^2$

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের বর্গ অন্য দুই বাহুর বর্গের যোগফলের সমান।

8. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো হতে সমদূরবর্তী।

প্রমাণ ঃ মনে করি, OAB সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AB এর মধ্যবিন্দু D এবং O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$.



$\angle ABC = 90^0$

$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ বা, $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$

AB এর মধ্যবিন্দু D এর অবস্থান

ভেক্টর$= \dfrac{a+b}{2} \therefore \overrightarrow{OD} = \dfrac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} + \underline{b})$$

$$\Rightarrow OD^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + 2\underline{a} \cdot \underline{b}) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

$$OD = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\overrightarrow{DA} = \underline{a} - \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(\underline{a} - \underline{b})$$

$$\overrightarrow{DB} = \underline{b} - \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a})$$

$$DA^2 = DB^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2\underline{a} \cdot \underline{b})$$

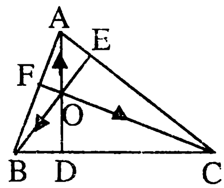
$$\Rightarrow DA^2 = DB^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$$

$$DA = DB = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$\therefore$ একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলো হতে সমদূরবর্তী।

9. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

প্রমাণ ঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ A ও B হতে BC ও CA বাহুর উপর যথাক্রমে AD ও BE লম্ব দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে এবং O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A , B C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. C,O এর সংযোগ রেখাংশের বর্ধিতাংশ AB কে F বিন্দুতে ছেদ করে।



$AD \perp BC \quad AO \perp BC$

$\underline{a} \cdot (\underline{c} - \underline{b}) = 0 \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdots (1)$

$BE \perp AC \quad BO \perp AC$

$\underline{b} \cdot (\underline{c} - \underline{a}) = 0 \Rightarrow \underline{b} \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdots (2)$

(1) ও (2) হতে পাই, $\underline{a} \cdot \underline{c} = \underline{b} \cdot \underline{c}$

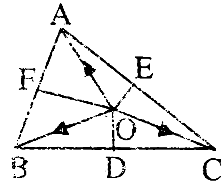
$\Rightarrow \underline{c} \cdot (\underline{a} - \underline{b}) = 0$

$OC \perp AB$ অর্থাৎ $CF \perp AB$

শীর্ষবিন্দুগুলি থেকে বিপরীত বাহুর লম্বত্রয় সমবিন্দু।

10. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

প্রমাণ মনে করি, ABC ত্রিভুজের শীর্ষ D E F যথাক্রমে BC, CA, AB এর মধ্যবিন্দু এবং O বিন্দু BC ও CA এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের



ছেদবিন্দু। O বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরে A B C এর অবস্থান ভেক্টর ... a

D E ও F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$, $\frac{1}{2}(\underline{c}+\underline{a})$ ও $\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$.

$OD \perp BC$ এবং $OE \perp AC$ বলে,

$$\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})\cdot(\underline{c}-\underline{b})=0 \Rightarrow |\underline{c}|^2-|\underline{b}|^2=0\cdots(1)$$

$$\frac{1}{2}(\underline{c}+\underline{a})\cdot(\underline{a}-\underline{c})=0 \Rightarrow |\underline{a}|^2-|\underline{c}|^2=0\cdots(2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow |\underline{a}|^2-|\underline{b}|^2=0$$

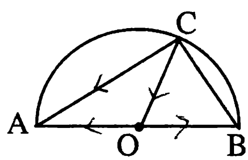
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{a}-\underline{b})=0$$

$OF \perp AB$ অতএব, OF AB বাহুর লম্ব সমদ্বিখন্ডক।

ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব সমদ্বিখন্ডকত্রয় সমবিন্দু।

11. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে,অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। [ঢা.,চ.'১৩; সি.'০৯,'১২; রা.'১০;ব.,কু'১১]

প্রমাণ : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB ব্যাস এবং পরিধির উপর C একটি বিন্দু।



OA = OB = OC = ব্যাসার্ধ

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB})$$
$$= (\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{BO})$$
$$= (\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OA})$$

[কেন্দ্র O , AB ব্যাসের মধ্যবিন্দু ।]

$$= \overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$= |\overrightarrow{CO}|^2+\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{OA}-|\overrightarrow{OA}|^2$$
$$= CO^2-OA^2=0$$

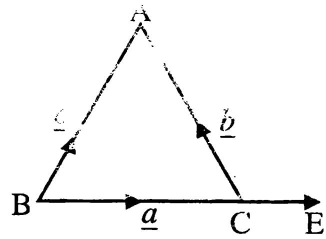
$AC \perp BC$ অর্থাৎ $\angle ACB$ = এক সমকোণ

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

12. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজ ABC তে (a) $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ [ঢা '১০,'১৪; রা. '১০; য.'১০; সি '১০; কু '১, চ. ১৩]

প্রমাণ : ধরি ABC ত্রিভুজে, $\overrightarrow{BC} = \underline{a}$, $\overrightarrow{CA} = \underline{b}$

BC ... বর্ধিত করা হলো



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$$
$$\Rightarrow \underline{c} = \underline{a}+\underline{b}$$
$$\underline{c}\cdot\underline{c} = (\underline{a}+\underline{b})\ (\underline{a}+\underline{b})$$
$$= \underline{a}\cdot\underline{a}+\underline{a}\cdot\underline{b}+\underline{b}\cdot\underline{a}+\underline{b}\cdot\underline{b}$$
$$\Rightarrow c^2 = a^2+b^2+2\,\underline{a}\cdot\underline{b}$$

[$\underline{a}\cdot\underline{a}=a^2$ এবং $\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{b}\cdot\underline{a}$]

$$\Rightarrow c^2 = a^2+b^2+2|\underline{a}||\underline{b}|\cos ACE$$
$$\Rightarrow c^2 = a^2+b^2+2ab\cos(\pi - C)$$

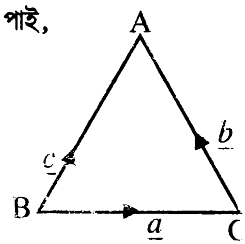
[$\angle ACE = \pi - \angle C$]

$$= a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

(b) $c = a\cos B + b\cos A$ [কু.'০৮,'১১; চ.'১১]

প্রমাণ : ধরি ABC ত্রিভুজে, $\overrightarrow{BC} = \underline{a}$, $\overrightarrow{CA} = \underline{b}$, $\overrightarrow{BA} = \underline{c}$.

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

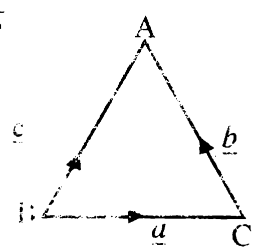


$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$$
$$\Rightarrow \underline{c} = \underline{a}+\underline{b}$$
$$\underline{c}\cdot\underline{c} = \underline{c}\cdot(\underline{a}+\underline{b})$$
$$\Rightarrow c^2 = \underline{c}\cdot\underline{a}+\underline{c}\cdot\underline{b}$$
$$\Rightarrow c^2 = ca\cos B + cb\cos A$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

(c) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

প্রমাণ : ধরি ABC ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{BC} = \underline{a}$, $\overrightarrow{CA} = \underline{b}$, $\overrightarrow{BA} = \underline{c}$



$\Rightarrow \underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$

$\underline{c}\times\underline{c} = \underline{c}\times(\underline{a} + \underline{b})$

$\Rightarrow \underline{c}\times\underline{c} = \underline{c}\times\underline{a} + \underline{c}\times\underline{b}$

$\Rightarrow \underline{0} = -\underline{a}\times\underline{c} + \underline{c}\times\underline{b}$

$\underline{a}\times\underline{c} = \underline{c}\times\underline{b} \cdots\cdots(1)$

আবার, $\underline{a}\times\underline{c} = \underline{a}\times(\underline{a} + \underline{b})$

$\Rightarrow \underline{a}\times\underline{c} = \underline{a}\times\underline{a} + \underline{a}\times\underline{b}$

$\Rightarrow \underline{a}\times\underline{c} = \underline{a}\times\underline{b}\cdots(2)$ [$\underline{a}\times\underline{a} = \underline{0}$]

(1) ও (2) হতে পাই, $\underline{a}\times\underline{c} = \underline{c}\times\underline{b} = \underline{a}\times\underline{b}$

$\Rightarrow ac\sin B\ \hat{n} = cb\sin A\ \hat{n}$

$= ab\sin(\pi - C)\ \hat{n}$ যখন $\hat{n}$ হল ΔABC সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর।

$$\Rightarrow \frac{ac\sin B}{abc} = \frac{bc\sin A}{abc} = \frac{ab\sin C}{abc}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

13. $\overline{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ **এবং** $\overline{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$.

(a) $\overline{A}$ **ভেক্টর বরাবর** $\overline{B}$ **ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর।**

(b) দেখাও যে, $\overline{A} + \overline{B}$ **এবং** $\overline{A} - \overline{B}$ **ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। [রা.'০৬; ঢা.'০৩,'০৪,'০৮; য.'০৭; চ.'০৭,'১২,'১৪; মা.বো.'০৮; দি.'১০; ব.'১০,'১২; মা.'১৪; বুয়েট'১১-১২]**

(c) দেখাও যে, $\overline{A}$ **,** $\overline{A} - \overline{B}$ **এবং** $4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ **ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।**

সমাধান: (a) $|\overline{A}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\overline{A}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর = $\dfrac{\overline{A}}{|\overline{A}|}$

$$= \frac{i + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{14}} = \hat{A}$$

$\overline{A}$ ভেক্টর বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরের অংশক নির্ণয় কর

$$= (\hat{A}.\overline{B})\hat{A} = \{\frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{14}}.(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})\}\hat{A}$$

$$= \frac{3-2-6}{\sqrt{14}}\hat{A} = -\frac{5}{\sqrt{14}}\frac{\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{14}}$$

$$= -\frac{5}{14}(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

(b) প্রশ্নমালা IIB এর 10(c).

(c) প্রমাণ ঃ $\overline{A} - \overline{B}$ =

দেখাও যে, $\overline{A}$ **,** $\overline{A} - \overline{B}$ **এবং** $4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ **ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।**

প্রমাণ ঃ $|\overline{A}| = |\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$|\overline{A} - \overline{B}| = |-2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$

$|4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$

$\sqrt{14}$, $\sqrt{38}$ ও $\sqrt{24}$ এর যেকোনো দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $(\sqrt{14})^2 + (\sqrt{24})^2 = 14 + 24 = 38 = (\sqrt{38})^2$

প্রদত্ত ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

14. ABC ত্রিভুজের BC, CA , AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E , F ।

(a) প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$

[ঢা. '০৭; য. '০৬,'১১; চ.'০৬; রা.'১১'১৩; সি.'০৯, '১২ ; ব. '০৭,'১২; দি.'১৩]

(b) ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখাও যে, AD, BE ও CF সমবিন্দু।

[ঢা. '১১,'১৪; রা. '১২; ব. '১০,'১৪; চ.'০৭; য.'১০; কু. '১০,'১২,'১৪; মা.বো.'০৯,'১২; দি.'১৪]

(c) B, C ও D বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, –3, 0) , (4, – 4, 1) ও (1, 2 , – 6) হলে DE এর ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(a) প্রশ্নমালা IIA এর উদাহরণ 1(c)

(b) প্রশ্নমালা IIC এর 2 নং প্রশ্ন।

(c) প্রশ্নমালা IIB এর উদাহরণ 9

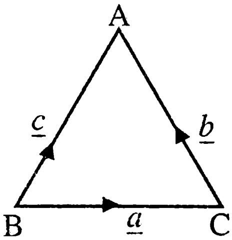
15. মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ **ও** $\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ **।**

(a) $\overrightarrow{OA}$ **ভেক্টরের উপর** $\overrightarrow{OB}$ **ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর।**

(b) A বিন্দুগামী এবং $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় কর।

(c) OAB ত্রিভুজটির কোণ তিনটি নির্ণয় কর।

সমাধান:



(a) $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরের উপর $\overrightarrow{OB}$ ভক্টরের অভিক্ষেপ

$$= \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}).(\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})}{|2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}|}$$

$$= \frac{2-12-3}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{-13}{\sqrt{14}}$$

(b) $\overrightarrow{AB} = (\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}) - (2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})$

$= -\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k}$

$A(\underline{a})$ বিন্দুগামী এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

$\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$

$\Rightarrow \underline{r} = 2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}+t(-\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k})$; যেখানে t একটি প্যারামিটার।

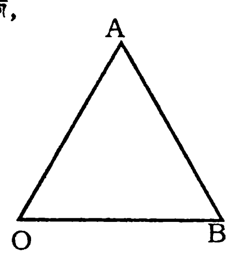
(c) দেওয়া আছে, OAB ত্রিভুজে,

$\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$

$\overrightarrow{AO} = -2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

এবং $\overrightarrow{OB} = \hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$

$\overrightarrow{BO} = -i-4\hat{j}-3\hat{k}$



এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$= -2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k} + \hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$

$= -i+7\hat{j}+4\hat{k}$ $\quad \overrightarrow{BA} = i-7\hat{j}-4\hat{k}$

$$\cos AOB = \frac{\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$$

$$= \frac{(2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k})\cdot(\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+16+9}}$$

$$= \frac{2-12-3}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = \frac{-13}{\sqrt{364}}$$

$$\angle AOB = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{364}}\right)$$

$$\cos OAB = \frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \frac{(-2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})\cdot(-\hat{i}+7\hat{j}+4\hat{k})}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+49+16}}$$

$$= \frac{2+21+4}{\sqrt{14}\sqrt{66}} = \frac{27}{\sqrt{924}}$$

$$\angle OAB = \cos^{-1}\left(\frac{27}{\sqrt{924}}\right)$$

$$\cos OBA = \frac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BO}||\overrightarrow{BA}|}$$

$$= \frac{(-i-4\hat{j}-3\hat{k})\cdot(\hat{i}-7\hat{j}-4\hat{k})}{\sqrt{1+16+9}\sqrt{1+49+16}}$$

$$= \frac{-1+28+12}{\sqrt{26}\sqrt{66}} = \frac{39}{\sqrt{1716}}$$

*** একটি বস্তুর উপর $\overline{F}$ বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুটির সরণ $\overline{r}$ হলে, কাজ = $\overline{F}.\overline{r}$**

*** O এর সাপেক্ষে $\overline{F}$ বলের ক্রিয়ারেখার উপরস্থ কোন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overline{r}$ হলে, O এর চতুর্দিকে $\overline{F}$ বলের মোমেন্ট = $|\overline{r} \times \overline{F}|$**

*** $\overline{r} = 3\hat{i}+8\hat{j}-2\hat{k} + t(2\hat{i}-j+3\hat{k})$ ও $\overline{r} = 7\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k} + s(2\hat{i}+j+4\hat{k})$ সরলরেখাদ্বয় ছেদ করে কিনা পরীক্ষা কর এবং যদি ছেদ করে তবে ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।**

সমাধান: $\overline{r} = (3+2t)\hat{i}+(8-t)\hat{j}+(-2+3t)\hat{k}$

এবং $\bar{r} = (7+2s)\hat{i}+(4+s)\hat{j}+(3+4s)\hat{k}$ রেখাদ্বয় ছেদ করলে, $3 + 2t = 7 + 2s \quad \cdots$ (i),

$8 - t = 4 + s \cdots$ (ii) এবং

$-2 + 3t = 3 + 4s \cdots \cdots$ (iii) সত্য হবে।

(i) + (ii) $\times 2 \Rightarrow 3 + 16 = 7 + 8 + 4s$

$\Rightarrow 4s = 4 \Rightarrow s = 1$

(ii) হতে পাই, $8 - t = 4 + 1 \Rightarrow t = 3$

$s = 1, t = 3$ এর জন্য (iii) এর

বামপক্ষ $= -2 + 3\times3 = 7$ এবং

ডানপক্ষ $= 3 + 4\times1 = 7$ সমান।

সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে।

ছেদবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= 9\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k}$

ভর্তি পরীক্ষার MCQ :

1. $4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ও $\lambda\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে λ এর মান – [DU 02-03, 06-07; NU 08-09, 05-06; RU 12-13,09-10]

$Sol^n.\ 4\lambda - 6 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

2. $\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ ও $m\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে m এর মান – [BUET 07-08]

$Sol^n.\ m + 6 - 24 = 0 \Rightarrow m = 18$

3. $\overrightarrow{F_1} = 2\hat{i}-3\hat{j}$ ও $\overrightarrow{F_2}$ বল দুইটির লব্ধি $\overrightarrow{F_3} = 5\hat{i}+4\hat{j}$ হলে $\overrightarrow{F_2} = ?$ [DU 06-07]

$Sol^n.\ \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} \Rightarrow \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_3} - \overrightarrow{F_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{F_2} = (5\hat{i}+4\hat{j}) - (2\hat{i}-3\hat{j}) = 3\hat{i}+7\hat{j}$

4. $\vec{A} = \hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ হলে $\vec{A}\cdot\vec{B} = ?$ [DU 01-02]

$Sol^n.\ \vec{A}\cdot\vec{B} = 2 - 2 - 3 = -3$

5. $\vec{B} = 2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A} = 2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশের মান– [CU 07-08]

$Sol^n.$ মান $= \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|} = \dfrac{4+20-11}{\sqrt{4+100+121}} = \dfrac{13}{15}$

6. $\vec{Y} = 2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{X} = -\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ এর অভিক্ষেপ– [CU 07-08]

$Sol^n.$ অভিক্ষেপ $= \dfrac{\vec{X}\ \vec{Y}}{|\vec{Y}|} = \dfrac{-2-3-20}{\sqrt{4+9+25}} = \dfrac{-25}{\sqrt{38}}$

7. $\vec{X} = 4\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\vec{Y} = 3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ– [CU 07-08]

$Sol^n.\ \cos\theta = \dfrac{\vec{X}\cdot\vec{Y}}{|\vec{X}||\vec{Y}|}$

$= \dfrac{12-2-10}{\sqrt{16+4+25}\sqrt{9+1+4}} = 0 \therefore \theta = 90°$

8. $2\hat{i}-3\hat{k}$ এবং $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ– [BUET 07-08]

$Sol^n.\ \cos\theta = \dfrac{2+0-3}{\sqrt{4+9}\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{13}\sqrt{3}}$

$\theta = \cos^{-1}(\dfrac{-1}{\sqrt{39}})$

9. a এর মান কত হলে, $\vec{A} = 5\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 15\hat{i}+a\hat{j}+9\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে। [IU 07-08]

$Sol^n.\ \vec{A}$ ও $\vec{B}$ সমান্তরাল বলে, $\dfrac{5}{15} = \dfrac{2}{a} = \dfrac{3}{9}$

$a = 6$

10. দুইটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i}-6\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি একক লম্ব ভেক্টর – [SU 06-07]

$$Sol^n.\ \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$= (6+9)\hat{i} - (-2+12)\hat{j} + (6+24)\hat{k}$

$$\hat{\eta} = \pm \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm \frac{15\hat{i}-10\hat{j}+30\hat{k}}{\sqrt{225+100+900}}$$
$$= \pm \frac{1}{7}(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})$$

11. $|\vec{A}\times\vec{B}|^2 + |\vec{A}\cdot\vec{B}|^2$ **এর মান–**

***Sol*^{n}.** $|\vec{A}\times\vec{B}|^2 + |\vec{A}\cdot\vec{B}|^2$
$= (AB\sin\theta)^2 + (AB\cos\theta)^2$
$= A^2B^2$

12. $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ **একক ভেক্টর হলে** $\hat{i}\cdot(\hat{j}\times\hat{k}) = ?$

***Sol*^{n}.** $i\cdot(\hat{j}\times\hat{k}) = \hat{i}\cdot\hat{i} = 1$

13. m ভরের একটি বস্তর উপর প্রযুক্ত $\vec{F} = 5\vec{x} + 4\vec{y}$ বলের কারণে বস্তটি একটি নির্দিষ্ট দিকে গতিশীল বস্তটি উপর যে বল প্রয়োগ করলে বস্তটির গতিপথের সাথে 45° কোণ তৈরী করবে সে বলের মান কত? **[RU 07-08]**

***Sol*^{n}.** $(5\vec{x}+4\vec{y})\cos 45°$

14. যদি বল $\vec{F} = 2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ এর সরণ $\vec{S} = \hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$ হয় হবে কাজ W = ? **[RU 06-07]**

***Sol*^{n}.** $W = \vec{F}\ \vec{S} = 2+6+5 = 13$

15. যদি প্রযুক্ত বল $\vec{F} = 5\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এর ঘূর্ণায়মান কণার অক্ষের সাপেক্ষে অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = 2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ হয় তবে বলের মোমেন্ট T এর মান কত? [RU 06-07]

***Sol*^{n}.:** $\vec{T} = \vec{F}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$= (6-1)\hat{i} - (9+2)\hat{j} + (-3-4)\hat{k}$
$= 5\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$
$T = |\vec{T}| = \sqrt{25+121+49} = \sqrt{195}$

16. XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব একক ভেক্টর হবে–

***Sol*^{n}.:** XOZ তলের সমান্তরাল বলে $\hat{i}$ ও $\hat{k}$ উপাংশ থাকবে। XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব ভেক্টর $4\hat{i}-3\hat{k}$. **[BUET 10-11]**

নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \dfrac{4\hat{i}-3\hat{k}}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{4\hat{i}-3\hat{k}}{5}$