

১। $ax + by + c$ বর্গ নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$\begin{aligned}(ax + by + c)^2 &= (ax)^2 + (by)^2 + c^2 + 2 \times (ax) \times (by) + 2 \times (by) \times c + 2 \times c \times (ax) \\ &= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2 + 2abxy + 2bcy + 2acx\end{aligned}$$

২. $4x + 5y - 7z$ বর্গ নির্ণয় কর।

સમાધાન :

$$\begin{aligned}(4x + 5y - 7z)^2 &= (4x)^2 + (5y)^2 + (-7z)^2 + 2(4x)(5y) + 2(5y)(-7z) + 2(4x)(-7z) \\ &= 16x^2 + 25y^2 + 49z^2 + 40xy - 70yz - 56xz\end{aligned}$$

অনুশীলনী ৪.১

১। সূত্রের সাহায্যে নিচের রাশিগুলোর বর্গনির্ণয় কর :

(ক) $5a + 7b$

(२) $6x + 3$

(গ) $7p - 2q$

(ঘ) $ax - by$

(९) $x^3 + xy$

(5) $11a - 12b$

$$(\text{घ}) \quad 6x^2y - 5xy^2$$

(ଙ) $-x - y$

$$(v) \quad -xyz - abc$$

(੬੩) $a^2x^3 - b^2y^4$

(ট) 108

(४) 606

(७) 597

(७) $a - b + c$

(९) $ax + b + 2$

(७) $xy + yz - zx$

(খ) $3p + 2q - 5r$

$$(\overline{n}) \quad x^2 - y^2 - z^2$$

(ক) $5a + 7b$

સમાધાન :

$5a + 7b$ এর বর্গ

$$= (5a + 7b)^2$$

$$= (5a)^2 + 2 \times (5a) \times (7b) + (7b)^2$$

$$= 25a^2 + 70ab + 49b^2$$

(২) $6x + 3$

সমাধান :

$6x + 3$ এর বর্গ

$$= (6x + 3)^2$$

$$= (6x)^2 + 2 \times (6x) \times (3) + (3)^2$$

$$= 36x^2 + 36x + 9$$

(গ) $7p - 2q$

সমাধান :

$$\begin{aligned} & 7p - 2q \text{ এর বর্গ} \\ &= (7p - 2q)^2 \\ &= (7p)^2 - 2 \times (7p) \times (2q) + (2q)^2 \\ &= 49p^2 - 28pq + 4q^2 \end{aligned}$$

(ঙ) $x^3 + xy$

সমাধান :

$$\begin{aligned} & x^3 + xy \text{ এর বর্গ} \\ &= (x^3 + xy)^2 \\ &= (x^3)^2 + 2 \times (x^3) \times (xy) + (xy)^2 \\ &= x^6 + 2x^4y + x^2y^2 \end{aligned}$$

(ছ) $6x^2y - 5xy^2$

সমাধান :

$$\begin{aligned} & 6x^2y - 5xy^2 \text{ এর বর্গ} \\ &= (6x^2y - 5xy^2)^2 \\ &= (6x^2y)^2 - 2 \times (6x^2y) \times (5xy^2) + (5xy^2)^2 \\ &= 36x^4y^2 - 60x^3y^3 + 25x^2y^4 \end{aligned}$$

(ঝ) $-xyz - acb$

সমাধান :

$$\begin{aligned} & -xyz - acb \text{ এর বর্গ} \\ &= (-xyz - acb)^2 \\ &= \{-(xyz + abc)\}^2 \\ &= (xyz + abc)^2 \\ &= (xyz)^2 + 2 \times (xyz) \times (abc) + (abc)^2 \\ &= x^2y^2z^2 + 2xyzabc + a^2b^2c^2 \end{aligned}$$

(ঘ) $ax - by$

সমাধান :

$$\begin{aligned} & ax - by \text{ এর বর্গ} \\ &= (ax - by)^2 \\ &= (ax)^2 - 2 \times (ax) \times (by) + (by)^2 \\ &= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 \end{aligned}$$

(চ) $11a - 12b$

সমাধান :

$$\begin{aligned} & 11a - 12b \text{ এর বর্গ} \\ &= (11a - 12b)^2 \\ &= (11a)^2 - 2 \times (11a) \times (12b) + (12b)^2 \\ &= 121a^2 - 264ab + 144b^2 \end{aligned}$$

(জ) $-x - y$

সমাধান :

$$\begin{aligned} & -x - y \text{ এর বর্গ} \\ &= (-x - y)^2 \\ &= \{-(x + y)\}^2 \\ &= (x + y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \end{aligned}$$

(ঞ) $a^2x^3 - b^2y^4$

সমাধান :

$$\begin{aligned} & a^2x^3 - b^2y^4 \text{ এর বর্গ} \\ &= (a^2x^3 - b^2y^4)^2 \\ &= (a^2x^3)^2 - 2 \times (a^2x^3) \times (b^2y^4) + (b^2y^4)^2 \\ &= a^4x^6 - 2a^2b^2x^3y^4 + b^4y^8 \end{aligned}$$

(ট) 108

সমাধান :

108 এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (108)^2 \\ &= (100 + 8)^2 \\ &= (100)^2 + 2 \times (100) \times (8) + (8)^2 \\ &= 10000 + 1600 + 64 \\ &= 11664 \end{aligned}$$

(ড) 597

সমাধান :

597 এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (597)^2 \\ &= (600 - 3)^2 \\ &= (600)^2 - 2 \times (600) \times (3) + (3)^2 \\ &= 360000 - 3600 + 9 \\ &= 360009 - 3600 \\ &= 356409 \end{aligned}$$

(ণ) $ax + b + 2$

সমাধান :

$ax + b + 2$ এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (ax + b + 2)^2 \\ &= \{(ax + b) + 2\}^2 \\ &= (ax + b)^2 + 2 \times (ax + b) \times (2) + (2)^2 \\ &= a^2x^2 + 2abx + b^2 + 4ax + 4b + 4 \\ &= a^2x^2 + b^2 + 2abx + 4b + 4ax + 4 \end{aligned}$$

(ঠ) 606

সমাধান :

606 এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (606)^2 \\ &= (600 + 6)^2 \\ &= (600)^2 + 2 \times (600) \times (6) + (6)^2 \\ &= 360000 + 7200 + 36 \\ &= 367236 \end{aligned}$$

(ঢ) $a - b + c$

সমাধান :

$a - b + c$ এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (a - b + c)^2 \\ &= \{(a - b) + c\}^2 \\ &= (a - b)^2 + 2 \times (a - b) \times (c) + (c)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac \end{aligned}$$

(ভ) $xy + yz - zx$

সমাধান :

$xy + yz - zx$ এর বর্গ

$$\begin{aligned} &= (xy + yz - zx)^2 \\ &= \{xy + (yz - zx)\}^2 \\ &= (xy)^2 + 2 \times (xy) \times (yz - zx) + (yz - zx)^2 \\ &= x^2y^2 + 2xy^2z - 2x^2yz + (yz)^2 - 2(yz)(zx) + (zx)^2 \\ &= x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 - 2x^2yz + 2xy^2z - 2xyz^2 \end{aligned}$$

(শ) $3p + 2q - 5r$

সমাধান :

$$\begin{aligned} & 3p + 2q - 5r \text{ এর বর্গ} \\ &= (3p + 2q - 5r)^2 \\ &= \{3p + (2q - 5r)\}^2 \\ &= (3p)^2 + 2 \times (3p) \times (2q - 5r) + (2q - 5r)^2 \\ &= 9p^2 + 12pq - 30qr + (2q)^2 - 2(2q)(5r) + (5r)^2 \\ &= 9p^2 + 12pq - 30qr + 4q^2 - 20qr + 5r^2 \\ &= 9p^2 + 4q^2 + 5r^2 + 12pq - 30qr - 20qr \end{aligned}$$

(ধ) $7a^2 + 8b^2 - 5c^2$

সমাধান :

$$\begin{aligned} & 7a^2 + 8b^2 - 5c^2 \text{ এর বর্গ} \\ &= (7a^2 + 8b^2 - 5c^2)^2 \\ &= \{7a^2 + (8b^2 - 5c^2)\}^2 \\ &= (7a^2)^2 + 2(7a^2)(8b^2 - 5c^2) + (8b^2 - 5c^2)^2 \\ &= 49a^4 + 112a^2b^2 - 70a^2c^2 + (8b^2)^2 - 2(8b^2)(5c^2) + (5c^2)^2 \\ &= 49a^4 + 112a^2b^2 - 70a^2c^2 + 64b^4 - 80b^2c^2 + 25c^4 \\ &= 49a^4 + 64b^4 + 25c^4 + 112a^2b^2 - 80b^2c^2 - 70a^2c^2 \end{aligned}$$

(দ) $x^2 - y^2 - z^2$

সমাধান :

$$\begin{aligned} & x^2 - y^2 - z^2 \text{ এর বর্গ} \\ &= (x^2 - y^2 - z^2)^2 \\ &= \{(x^2 - y^2) - z^2\}^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 - 2 \times (x^2 - y^2) \times (z^2) + (z^2)^2 \\ &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2z^2 + 2x^2z^2 + z^4 \\ &= x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 + 2y^2z^2 - 2x^2z^2 \end{aligned}$$

২। সরল কর :

(ক) $(x + y)^2 + 2(x + y)(x - y) + (x - y)^2$

(খ) $(2a + 3b)^2 - 2(2a + 3b)(3b - a) + (3b - a)^2$

(গ) $(3x^2 + 7y^2)^2 + 2(3x^2 + 7y^2)(3x^2 - 7y^2) + (3x^2 - 7y^2)^2$

(ঘ) $(8x + y)^2 - (16x + 2y)(5x + y) + (5x + y)^2$

(ঙ) $(5x^2 - 3x - 2)^2 + (2 + 5x^2 - 3x)^2 - 2(5x^2 - 3x + 2)(2 + 5x^2 - 3x)$

(ক) $(x+y)^2 + 2(x+y)(x-y) + (x-y)^2$

সমাধান :

ধরি, $x + y = a$

এবং $x - y = b$

$$\begin{aligned}\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= (a + b)^2 \\ &= (x + y + x - y)^2 \quad [a \text{ ও } b \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ &= (2x)^2 \\ &= 4x^2\end{aligned}$$

(খ) $(2a+3b)^2 - 2(2a+3b)(3b-a) + (3b-a)^2$

সমাধান :

ধরি, $2a + 3b = x$

এবং $3b - a = y$

$$\begin{aligned}\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= x^2 - 2xy + y^2 \\ &= (x - y)^2 \\ &= \{(2a + 3b) - (3b - a)\}^2 \quad [x \text{ ও } y \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ &= (2a + 3b - 3b + a)^2 \\ &= (3a)^2 \\ &= 9a^2\end{aligned}$$

(গ) $(3x^2 + 7y^2)^2 + 2(3x^2 + 7y^2)(3x^2 - 7y^2) + (3x^2 - 7y^2)^2$

সমাধান :

$$\begin{aligned}&(3x^2 + 7y^2)^2 + 2(3x^2 + 7y^2)(3x^2 - 7y^2) + (3x^2 - 7y^2)^2 \\ &= \{(3x^2 + 7y^2) + (3x^2 - 7y^2)\}^2 \\ &= (3x^2 + 7y^2 + 3x^2 - 7y^2)^2 \\ &= (6x^2)^2 \\ &= 36x^4\end{aligned}$$

$$(ঘ) (8x + y)^2 - (16x + 2y)(5x + y) + (5x + y)^2$$

সমাধান :

$$(8x + y)^2 - (16x + 2y)(5x + y) + (5x + y)^2 \\ = (8x + y)^2 - 2(8x + y)(5x + y) + (5x + y)^2$$

$$\text{ধরি, } 8x + y = a$$

$$\text{এবং } 5x + y = b$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = a^2 - 2ab + b^2 \\ = (a - b)^2 \\ = \{(8x + y) - (5x + y)\}^2 \quad [a \text{ ও } b \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ = (8x + y - 5x - y)^2 \\ = (3x)^2 \\ = 9x^2$$

$$(ঙ) (5x^2 - 3x - 2)^2 + (2 + 5x^2 - 3x)^2 - 2(5x^2 - 3x + 2)(2 + 5x^2 - 3x)$$

সমাধান :

$$(5x^2 - 3x - 2)^2 + (2 + 5x^2 - 3x)^2 - 2(5x^2 - 3x + 2)(2 + 5x^2 - 3x)$$

$$\text{ধরি, } 5x^2 - 3x - 2 = a$$

$$\text{এবং } 2 + 5x^2 - 3x = b$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} = a^2 + b^2 - 2ab \\ = a^2 - 2ab + b^2 \\ = (a - b)^2 \\ = \{(5x^2 - 3x - 2) - (2 + 5x^2 - 3x)\}^2 \quad [a \text{ ও } b \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ = (5x^2 - 3x - 2 - 2 - 5x^2 + 3x)^2 \\ = (-4)^2 \\ = 16$$

$$(ক) (x + 7)(x - 7)$$

$$(গ) (xy + yz)(xy - yz)$$

$$(ঙ) (a + 3)(a + 4)$$

$$(ছ) (6x + 17)(6x - 13)$$

$$(ঝ) (ax - by + cz)(ax + by - cz)$$

$$(ট) (5a + 2b - 3c)(5a + 2b + 3c)$$

$$(খ) (5x + 13)(5x - 13)$$

$$(ঘ) (ax + b)(ax - b)$$

$$(চ) (ax + 3)(ax + 4)$$

$$(জ) (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)(a^4 + b^4)$$

$$(ঞ) (3a - 10)(3a - 5)$$

$$(ঠ) (ax + by + 5)(ax + by + 3)$$

$$(ক) (x + 7)(x - 7)$$

সমাধান :

$$(x + 7)(x - 7)$$

$$= (x)^2 - (7)^2$$

$$= x^2 - 49$$

$$(গ) (xy + yz)(xy - yz)$$

সমাধান :

$$(xy + yz)(xy - yz)$$

$$= (xy)^2 - (yz)^2$$

$$= x^2 y^2 - y^2 z^2$$

$$(ঙ) (a + 3)(a + 4)$$

সমাধান :

$$(a + 3)(a + 4)$$

আমরা জানি,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\therefore (a + 3)(a + 4)$$

$$= a^2 + (3 + 4)a + (3)(4)$$

$$= a^2 + 7a + 12$$

$$(খ) (5x + 13)(5x - 13)$$

সমাধান :

$$(5x + 13)(5x - 13)$$

$$= (5x)^2 - (13)^2$$

$$= 25x^2 - 169$$

$$(ঘ) (ax + b)(ax - b)$$

সমাধান :

$$(ax + b)(ax - b)$$

$$= (ax)^2 - (b)^2$$

$$= a^2 x^2 - b^2$$

$$(চ) (ax + 3)(ax + 4)$$

সমাধান :

$$(ax + 3)(ax + 4)$$

আমরা জানি,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\therefore (ax + 3)(ax + 4)$$

$$= (ax)^2 + (3 + 4)ax + (3)(4)$$

$$= a^2 x^2 + 7ax + 12$$

(ছ) $(6x + 17)(6x - 13)$

সমাধান :

$$(6x + 17)(6x - 13)$$

আমরা জানি,

$$(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$$

$$\therefore (6x + 17)(6x - 13)$$

$$= (6x)^2 + (17 - 13)6x - (17)(13)$$

$$= 36x^2 + 4x - 221$$

(ঝ) $(ax - by + cz)(ax + by - cz)$

সমাধান :

$$(ax - by + cz)(ax + by - cz)$$

$$= \{(ax) - (by - cz)\} \{(ax) + (by - cz)\}$$

$$= (ax)^2 - (by - cz)^2$$

$$= a^2x^2 - \{(by)^2 - 2(by)(cz) + (cz)^2\}$$

$$= a^2x^2 - b^2y^2 + 2bcyz - c^2z^2$$

(ট) $(5a + 2b - 3c)(5a + 2b + 3c)$

সমাধান :

$$(5a + 2b - 3c)(5a + 2b + 3c)$$

$$= \{(5a + 2b) - (3c)\} \{(5a + 2b) + (3c)\}$$

$$= (5a + 2b)^2 - (3c)^2$$

$$= (5a)^2 + 2(5a)(2b) + (2b)^2 - (3c)^2$$

$$= 25a^2 + 20ab + 4b^2 - 9c^2$$

(জ) $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)(a^4 + b^4)$

সমাধান :

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)(a^4 + b^4)$$

$$= \{(a^2)^2 - (b^2)^2\}(a^4 + b^4)$$

$$= (a^4 - b^4)(a^4 + b^4)$$

$$= (a^4)^2 - (b^4)^2$$

$$= a^8 - b^8$$

(ঞ) $(3a - 10)(3a - 5)$

সমাধান :

$$(3a - 10)(3a - 5)$$

আমরা জানি,

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

$$\therefore (3a - 10)(3a - 5)$$

$$= (3a)^2 - (10 + 5)3a + (10)(5)$$

$$= 9a^2 - (15)3a + 50$$

$$= 9a^2 - 45a + 50$$

(ঠ) $(ax + by + 5)(ax + by + 3)$

$$= \{(ax + by) + (5)\} \{(ax + by) + (3)\}$$

সমাধান :

$$(ax + by + 5)(ax + by + 3)$$

আমরা জানি,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\therefore (ax + by)^2 + (5 + 3)(ax + by) + (5)(3)$$

$$= (ax)^2 + 2(ax)(by) + (by)^2 + 8(ax + by) + 15$$

$$= a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 + 8ax + 8by + 15$$

৪। $a = 4$, $b = 6$ এবং $c = 3$ হলে $4a^2b^2 - 16ab^2c + 16b^2c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $a = 4$, $b = 6$

এবং $c = 3$

$$\begin{aligned}\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= 4a^2b^2 - 16ab^2c + 16b^2c^2 \\ &= (2ab)^2 - 2 \times 2ab \times 4bc + (4bc)^2 \\ &= (2ab - 4bc)^2 \\ &= (2 \times 4 \times 6 - 4 \times 6 \times 3)^2 \quad [a, b \text{ ও } c \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ &= (48 - 72)^2 \\ &= (-24)^2 \\ &= 576\end{aligned}$$

৫। $x - \frac{1}{x} = 3$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = 3$

$$\begin{aligned}\therefore \text{প্রদত্ত রাশি} &= x^2 + \frac{1}{x^2} \\ &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} \\ &= (3)^2 + 2 \quad \left[\because x - \frac{1}{x} = 3 \right] \\ &= 9 + 2 \\ &= 11\end{aligned}$$

নির্ণেয় মান 11.

৬। $a + \frac{1}{a} = 4$ হলে, $a^4 + \frac{1}{a^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $a + \frac{1}{a} = 4$

\therefore প্রদত্ত রাশি $= a^4 + \frac{1}{a^4}$

$$= (a^2)^2 + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2$$

$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 \times a^2 \times \frac{1}{a^2}$$

$$= \left\{ \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \times a \times \frac{1}{a} \right\}^2 - 2$$

$$= \{(4)^2 - 2\}^2 - 2 \quad \text{[মান বসিয়ে]}$$

$$= (16 - 2)^2 - 2$$

$$= (14)^2 - 2$$

$$= 196 - 2$$

$$= 194$$

৭। $m = 6$, $n = 7$ হলে, $16(m^2 + n^2)^2 + 56(m^2 + n^2)(3m^2 - 2n^2) + 49(3m^2 - 2n^2)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

ধরি, $m^2 + n^2 = a$

এবং $3m^2 - 2n^2 = b$

\therefore প্রদত্ত রাশি $= 16(m^2 + n^2)^2 + 56(m^2 + n^2)(3m^2 - 2n^2) + 49(3m^2 - 2n^2)^2$

$$= 16(a)^2 + 56(a)(b) + 49(b)^2$$

$$= (4a)^2 + 2(4a)(7b) + (7b)^2$$

$$= (4a - 7b)^2$$

$$= \{4(m^2 + n^2) + 7(3m^2 - 2n^2)\}^2 \quad \text{[মান বসিয়ে]}$$

$$\begin{aligned} &= \{4m^2 + 4n^2 + 21m^2 - 14n^2\}^2 \\ &= \{25m^2 - 10n^2\}^2 \\ &= \{25 \times (6)^2 - 10 \times (7)^2\}^2 \quad [m \text{ ও } n \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ &= \{25 \times 36 - 10 \times 49\}^2 \\ &= \{900 - 490\}^2 \\ &= \{410\}^2 \\ &= 168100 \end{aligned}$$

৮। $a - \frac{1}{a} = m$ হলে, দেখাও যে, $a^4 + \frac{1}{a^4} = m^4 + 4m^2 + 2$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $a - \frac{1}{a} = 4$

দেখাতে হবে যে, $a^4 + \frac{1}{a^4} = m^4 + 4m^2 + 2$

বামপক্ষ $= a^4 + \frac{1}{a^4}$

$$= (a^2)^2 + \left(\frac{1}{a^2}\right)^2$$

$$= \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - 2 \times a^2 \times \frac{1}{a^2}$$

$$= \left\{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 \times a \times \frac{1}{a}\right\}^2 - 2$$

$$= \{(m)^2 + 2\}^2 - 2 \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= (m^2 + 2)^2 - 2$$

$$= (m^2)^2 + 2 \times m^2 \times 2 + (2)^2 - 2$$

$$= m^4 + 4m^2 + 4 - 2$$

$$= m^4 + 4m^2 + 2$$

$$= \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore a^4 + \frac{1}{a^4} = m^4 + 4m^2 + 2 \quad (\text{দেখানো হলো})$$

৯। $x - \frac{1}{x} = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 18$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $x - \frac{1}{x} = 4$

প্রমাণ করতে হবে যে, $x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 18$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= x^2 + \frac{1}{x^2} \\ &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} \\ &= (4)^2 + 2 \quad [\text{মান বসিয়ে}] \\ &= 16 + 2 \\ &= 18 \\ &= \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$$\therefore x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 18 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

১০। $m + \frac{1}{m} = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $m^4 + \frac{1}{m^4} = 2$

সমাধান :

দেওয়া আছে, $m + \frac{1}{m} = 2$

প্রমাণ করতে হবে যে, $m^4 + \frac{1}{m^4} = 2$

$$\text{বামপক্ষ} = m^4 + \frac{1}{m^4}$$

$$\begin{aligned}
 &= (m^2)^2 + \left(\frac{1}{m^2}\right)^2 \\
 &= \left(m^2 + \frac{1}{m^2}\right)^2 - 2 \times m^2 \times \frac{1}{m^2} \\
 &= \left\{ \left(m + \frac{1}{m}\right)^2 - 2 \times m \times \frac{1}{m} \right\}^2 - 2 \\
 &= \{(2)^2 - 2\}^2 - 2 \quad \text{[মান বসিয়ে]} \\
 &= (4 - 2)^2 - 2 \\
 &= (2)^2 - 2 \\
 &= 4 - 2 \\
 &= 2 \\
 &= \text{ডানপক্ষ} \\
 \therefore m^4 + \frac{1}{m^4} &= 2 \quad (\text{প্রমাণিত})
 \end{aligned}$$

১১। $x + y = 12$ এবং $xy = 27$ হলে, $(x - y)^2$ ও $x^2 + y^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $x + y = 12$

এবং $xy = 27$

$$\begin{aligned}
 \text{প্রথম রাশি} &= (x - y)^2 \\
 &= (x + y)^2 - 4xy \\
 &= (12)^2 - 4 \times 27 \\
 &= 144 - 108 \\
 &= 36
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{এবং } x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\
 &= (12)^2 - 2 \times 27 \\
 &= 144 - 54 \\
 &= 90
 \end{aligned}$$

১২। $a + b = 13$ এবং $a - b = 3$ হলে, $2a^2 + 2b^2$ ও ab এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $a + b = 13$

এবং $a - b = 3$

$$\begin{aligned}\text{প্রথম রাশি} &= 2a^2 + 2b^2 \\ &= 2(a^2 + b^2) \\ &= (a + b)^2 + (a - b)^2 \\ &= (13)^2 - (3) \\ &= 169 + 9 \\ &= 178\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{এবং } ab &= \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{169}{4} - \frac{9}{4} \\ &= \frac{169 - 9}{4} \\ &= \frac{160}{4} \\ &= 40\end{aligned}$$

১৩। দুইটি রাশির বর্গের অন্তর রূপে প্রকাশ কর :

(ক) $(5p - 3q)(p + 7q)$

(খ) $(6a + 9b)(7b - 8a)$

(গ) $(3x + 5y)(7x - 5y)$

(ঘ) $(5x + 13)(5x - 13)$

(ক) $(5p - 3q)(p + 7q)$

সমাধান :

আমরা জানি, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned}\therefore (5p - 3q)(p + 7q) &= \left\{ \frac{(5p - 3q) + (p + 7q)}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{(5p - 3q) - (p + 7q)}{2} \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{5p - 3q + p + 7q}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{5p - 3q - p - 7q}{2} \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{6p + 4q}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{4p - 10q}{2} \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{2(3p + 2q)}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{2(2p - 5q)}{2} \right\}^2 \\ &= (3p + 2q)^2 - (2p - 5q)^2\end{aligned}$$

(খ) $(6a + 9b)(7b - 8a)$

সমাধান :

আমরা জানি, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned}\therefore (6a + 9b)(7b - 8a) &= \left\{ \frac{(6a + 9b) + (7b - 8a)}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{(6a + 9b) - (7b - 8a)}{2} \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{6a + 9b + 7b - 8a}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{6a + 9b - 7b + 8a}{2} \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{16b - 2a}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{14a + 2b}{2} \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{2(8b - a)}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{2(7a + b)}{2} \right\}^2 \\ &= (8b - a)^2 - (7a + b)^2\end{aligned}$$

(গ) $(3x + 5y)(7x - 5y)$

সমাধান :

আমরা জানি, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned}\therefore (3x + 5y)(7x - 5y) &= \left\{ \frac{(3x + 5y) + (7x - 5y)}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{(3x + 5y) - (7x - 5y)}{2} \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{3x + 5y + 7x - 5y}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{3x + 5y - 7x + 5y}{2} \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{10x}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{-2x + 10y}{2} \right\}^2 \\ &= (5x)^2 - \left\{ \frac{-2(x - 5y)}{2} \right\}^2 \\ &= (5x)^2 - (x - 5y)^2\end{aligned}$$

(ঘ) $(5x + 13)(5x - 13)$

সমাধান :

আমরা জানি, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

$$\begin{aligned}\therefore (5x + 13)(5x - 13) &= \left\{ \frac{(5x + 13) + (5x - 13)}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{(5x + 13) - (5x - 13)}{2} \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{5x + 13 + 5x - 13}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{5x + 13 - 5x + 13}{2} \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{10x}{2} \right\}^2 - \left\{ \frac{26}{2} \right\}^2 \\ &= (5x)^2 - (13)^2\end{aligned}$$

চতুর্থ 4.2 ঘনফলের সূত্রাবলি ও অনুসিদ্ধান্ত

ঘনফলের সূত্রাবলি ও অনুসিদ্ধান্ত

$$\text{সূত্র : } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{অনুসিদ্ধান্ত : } a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$\text{সূত্র : } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\text{অনুসিদ্ধান্ত : } a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

উদাহরণ ১৬। $3x + 2y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$\begin{aligned}(3x + 2y)^3 &= (3x)^3 + 3 \times (3x)^2 \times 2y + 3 \times (3x) \times (2y)^2 + (2y)^3 \\&= 27x^3 + 3 \times 9x^2 \times 2y + 3 \times 3x \times 4y^2 + 8y^3 \\&= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3\end{aligned}$$

উদাহরণ ১৭। $2a + 5b$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$\begin{aligned}(2a + 5b)^3 &= (2a)^3 + 3 \times (2a)^2 \times 5b + 3 \times (2a) \times (5b)^2 + (5b)^3 \\&= 8a^3 + 3 \times 4a^2 \times 5b + 3 \times 2a \times 25b^2 + 125b^3 \\&= 8a^3 + 60a^2b + 150ab^2 + 125b^3\end{aligned}$$

উদাহরণ ১৮। $m - 2n$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$\begin{aligned}(m - 2n)^3 &= (m)^3 - 3 \times (m)^2 \times 2n + 3 \times m \times (2n)^2 - (2n)^3 \\&= m^3 - 3m^2 \times 2n + 3m \times 4n^2 - 8n^3 \\&= m^3 - 6m^2n + 12mn^2 - 8n^3\end{aligned}$$

উদাহরণ ১৯। $4x - 5y$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$\begin{aligned}(4x - 5y)^3 &= (4x)^3 - 3 \times (4x)^2 \times 5y + 3 \times m \times (5y)^2 - (5y)^3 \\&= 64x^3 - 3 \times 16x^2 \times 5y + 3 \times 4x \times 25y^2 - 125y^3 \\&= 64x^3 - 240x^2y + 300xy^2 - 125y^3\end{aligned}$$

উদাহরণ ২০। $x + y - z$ এর ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান :

$$\begin{aligned}(x + y - z) &= \{(x + y) - z\}^3 \\&= (x + y)^3 - 3 \times (x + y)^2 \times z + 3 \times (x + y) \times (z)^2 - (z)^3 \\&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3z(x^2 + 2xy + y^2) + 3xz^2 + 3yz^2 - z^3 \\&= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2z - 6xyz - 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 - z^3 \\&= x^3 + y^3 - z^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3x^2z - 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 - 6xyz\end{aligned}$$

কাজ : সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় কর :

১। $ab + bc$

২। $2x - 5y$

৩। $2x - 3y - z$

১। $ab + bc$

সমাধান :

$$\begin{aligned}(ab + bc)^3 &= (ab)^3 + 3(ab)^2 \times bc + 3ab(bc)^2 + (bc)^3 \\&= a^3b^3 + 3a^2b^2bc + 3abb^2c^2 + b^3c^3 \\&= a^3b^3 + b^3c^3 + 3a^2b^3c + 3ab^3c^2\end{aligned}$$

২। $2x - 5y$

সমাধান :

$$\begin{aligned}(2x - 5y)^3 &= (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times 5y + 3 \times 2x \times (5y)^2 - (5y)^3 \\&= 8x^3 - 15y \times 4x^2 + 6x \times 25y^2 - 125y^3 \\&= 8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3\end{aligned}$$