

প্রমাণ: $\triangle ABD$ -তে

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} \quad [\text{ত্রিভুজ বিধি}]$$

$$\therefore \vec{AB} = \vec{AD} - \vec{BD} \quad \dots \dots \dots (i)$$

আবার, $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$$= \vec{AD} + \vec{AB} \quad [ABCD \text{ সামান্তরিক বলে } \vec{DC} = \vec{AB}]$$

$$= \vec{AD} + \vec{AD} - \vec{BD} \quad [\because \vec{AB} = \vec{AD} - \vec{BD}]$$

$$\therefore \vec{AC} = 2\vec{AD} - \vec{BD} \quad \dots \dots \dots (ii)$$

$$\text{বা, } \vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{AD} - \vec{BD} + \vec{BD}$$

[উভয় পক্ষে \vec{BD} যোগ করে পাই]

$$= 2\vec{AD}$$

$$\therefore \vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{BC} \quad \dots \dots \dots (iii)$$

[ABCD সামান্তরিক বলে $\vec{AD} = \vec{BC}$]

$$\text{আবার, } \vec{AC} - \vec{BD} = (2\vec{AD} - \vec{BD}) - \vec{BD} \quad [(ii) \text{ ব্যবহার করে}]$$

$$= 2\vec{AD} - 2\vec{BD}$$

$$= 2(\vec{AD} - \vec{BD})$$

$$= 2\vec{AB} \quad [(i) \text{ নং ব্যবহার করে}]$$

$$\therefore \vec{AC} - \vec{BD} = 2\vec{AB} \quad \dots \dots \dots (iv)$$

এখন, সমীকরণ (i), (ii), (iii) ও (iv) হতে পাই,

$$\vec{AB} = \vec{AD} - \vec{BD}$$

$$\vec{AC} = 2\vec{AD} - \vec{BD}$$

$$\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{BC} \text{ এবং } \vec{AC} - \vec{BD} = 2\vec{AB} \quad (\text{প্রমাণিত})$$

৭. দেখাও যে, (ক) $-(a+b) = -a-b$

(খ) $a+b=c$ হলে $a=c-b$

সমাধান:

(ক) দেখাতে হবে যে, $-(a+b) = -a-b$

$$\text{এখন, } -(a+b) = (-1)(a+b)$$

$$= (-1)a + (-1)b \quad [\text{বন্টন সূত্র}]$$

$$= -a-b$$

$$\therefore -(a+b) = -a-b \quad (\text{দেখানো হলো})$$

(খ) দেওয়া আছে, $a+b=c$

প্রমাণ করতে হবে যে, $a=c-b$

দেওয়া আছে, $a+b=c$

$$\text{বা, } a+b-b=c-b \quad [\text{উভয়পক্ষে } (-b) \text{ যোগ করে}]$$

$$\text{বা, } a+0=c-b$$

$$\therefore a=c-b$$

আবার, বিপরীতক্রমে মনে করি,

$$a=c-b$$

$$\text{বা, } a+b=c-b+b$$

[উভয় পক্ষে b যোগ করে]

$$=c+0$$

$$\therefore a+b=c$$

$$\therefore a+b=c \text{ হলে } a=c-b \quad (\text{দেখানো হলো})$$

৮. দেখাও যে, (ক) $a+a=2a$

(খ) $(m-n)a=ma-na$

(গ) $m(a-b)=ma-mb$

সমাধান:

(ক) দেখাতে হবে যে, $a+a=2a$

$$\text{এখন, } a+a=1a+1a \quad [\text{স্কেলার গুণের নিয়মানুসারে}]$$

$$= (1+1)a \quad [\because (m+n)a=ma+na]$$

$$=2a$$

$$\therefore a+a=2a \quad (\text{দেখানো হলো})$$

(খ) দেখাতে হবে যে, $(m-n)a=ma-na$

$$\text{এখন, } (m-n)a = \{m+(-n)\}a$$

$$= ma+(-n)a \quad [\because (m+n)a=ma+na]$$

$$= ma-na \quad [\text{স্কেলার গুণের নিয়মানুসারে}]$$

$$\therefore (m-n)a=ma-na \quad (\text{দেখানো হলো})$$

(গ) দেখাতে হবে যে, $m(a-b)=ma-mb$

$$\text{এখন, } m(a-b) = m\{(a+(-b))\}$$

$$= ma+m(-b) \quad [\because m(a+b)=ma+mb]$$

$$= ma-mb \quad [\because n(-a)=-na]$$

$$\therefore m(a-b)=ma-mb \quad (\text{দেখানো হলো})$$

৯. (ক) a, b প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর হলে দেখাও যে, $a=mb$ হতে পারে কেবল যদি a, b এর সমান্তরাল হয়।

সমাধান: দেওয়া আছে, a, b প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর। দেখাতে হবে যে, $a=mb$ হতে পারে কেবল যদি a, b এর সমান্তরাল হয়।

মনে করি, $a=mb$ । তাহলে a, b এর সমান্তরাল দেখানোই যথেষ্ট হবে।

$a=mb$ হওয়ায় a ভেক্টরটি b এর স্কেলার গুণিতক। সুতরাং a এর দিক ও b এর দিক সমমুখী হবে যদি $m > 0$ হয় এবং বিপরীতমুখী হবে যদি $m < 0$ হয়। এখানে $m \neq 0$ কারণ $m=0$ হলে $a=0$ হবে যা অসম্ভব কেননা a একটি অশূন্য ভেক্টর।

a ও b এর দিক যদি একই হয় তাহলে তারা সদৃশ সমান্তরাল আর যদি বিপরীত হয় তাহলে তারা বিসদৃশ সমান্তরাল হবে। সুতরাং উভয়ক্ষেত্রেই a, b এর সমান্তরাল। (দেখানো হলো)

(খ) a, b অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $ma+nb=0$ হলে দেখাও যে, $m=n=0$

সমাধান: দেওয়া আছে, a, b দুইটি অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $ma+nb=0$ । দেখাতে হবে যে, $m=n=0$

দেওয়া আছে, $ma+nb=0$

$$\text{বা, } ma+nb-nb=0-nb$$

[উভয় পক্ষে $(-nb)$ যোগ করে]

$$\text{বা, } ma+0=-nb$$

$$\therefore ma=-nb$$

যদি m ও n অশূন্য হয় তাহলে a ও b

(i) বিপরীতমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন একই হয়।

(ii) সমমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন বিপরীত হয়।

উভয় ক্ষেত্রেই a ও b সমান্তরাল হবে যা অসম্ভব কেননা দেওয়া আছে যে a ও b দুইটি অসমান্তরাল ভেক্টর।

$\therefore m$ ও n অশূন্য হতে পারে না।

অর্থাৎ $m=n=0$ । (দেখানো হলো)

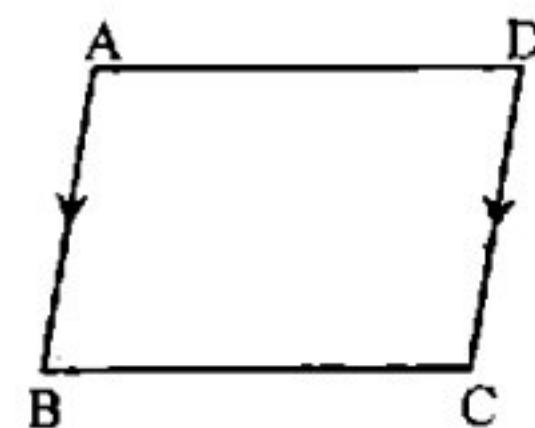
১০. A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a, b, c, d হলে দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $b-a=c-d$ হয়।

সমাধান: দেওয়া আছে, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a, b, c, d ।

দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $b-a=c-d$ হয়।

A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a, b, c ও d

$$\therefore \vec{AB} = b-a \text{ এবং } \vec{DC} = c-d$$



মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক। তাহলে AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$$

বিপরীতক্রমে, মনে করি, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

সুতরাং AB ও DC রেখা দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল অর্থাৎ ABCD একটি সামান্তরিক।

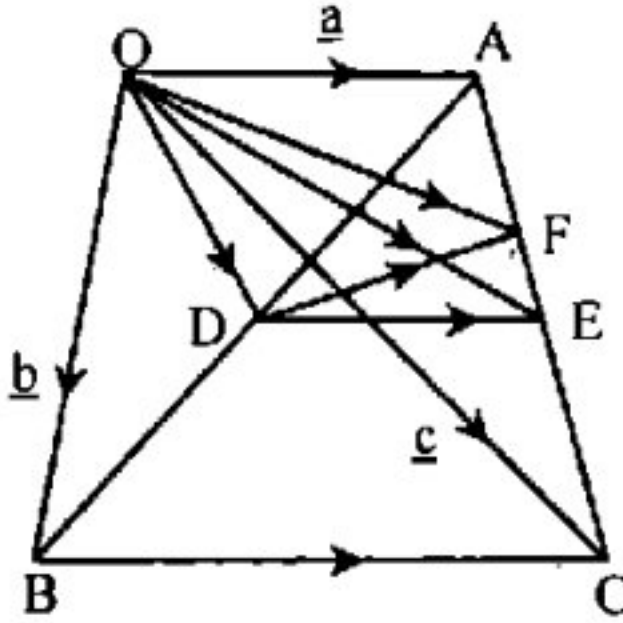
\therefore ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। (দেখানো হলো)

১১. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।

সমাধান: ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।

প্রমাণ: (অবস্থান ভেক্টর দিয়ে)

মনে করি, O বিন্দুর সাপেক্ষে, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} । D, AB এর মধ্যবিন্দু। DE || BC এবং DE, AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, E, AC এর মধ্যবিন্দু।



যেহেতু D, AB এর মধ্যবিন্দু, সেহেতু D এর অবস্থান ভেক্টর হবে,

$\overrightarrow{OD} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} = \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{b})$. E, AC এর মধ্যবিন্দু না হলে মনে করি, F, AC এর মধ্যবিন্দু। তাহলে F এর অবস্থান ভেক্টর হবে

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\underline{a} + \underline{c}}{2} = \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{c})$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} \\ &= \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{c}) - \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{b}) \\ &= \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{c} - \underline{a} - \underline{b}) \\ &= \frac{1}{2} (\underline{c} - \underline{b}) \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \quad [\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \underline{c} - \underline{b}]$$

অর্থাৎ DF || BC। কিন্তু দেওয়া আছে, DE || BC। এখন DE ও DF রেখা দুই উভয়েই D বিন্দুগামী এবং উভয়েই BC এর সমান্তরাল। সুতরাং তারা অবশ্যই সমাপতিত হবে অর্থাৎ F বিন্দু, E বিন্দুর সাথে মিলে যাবে।

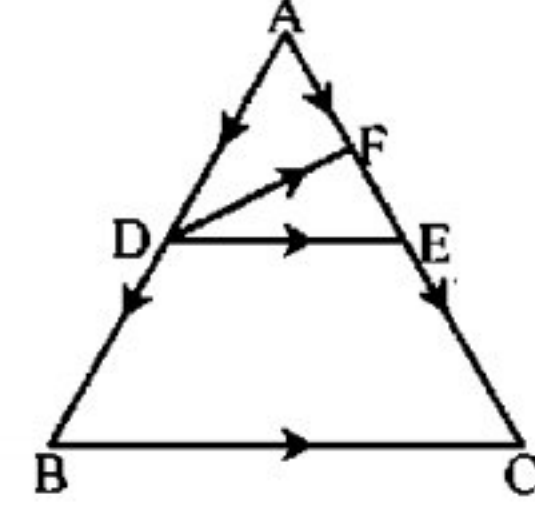
\therefore E, AC এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)

বিকল্প পদ্ধতি:

মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল করে অঙ্কিত রেখা AC কে E বিন্দুতে ছেদ হয়। প্রমাণ করতে হবে যে E, AC এর মধ্যবিন্দু।

মনে করি, E নয় বরং F, AC এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ [\because D, AB এর মধ্যবিন্দু]



$$\text{এবং } \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \quad [\because F, AC \text{ এর মধ্যবিন্দু}]$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} \quad [\text{ত্রিভুজ বিধি}] \\ &= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} \quad [\because \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}] \\ &= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}; [\overrightarrow{AD} \text{ ও } \overrightarrow{AF} \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

$$[\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}]$$

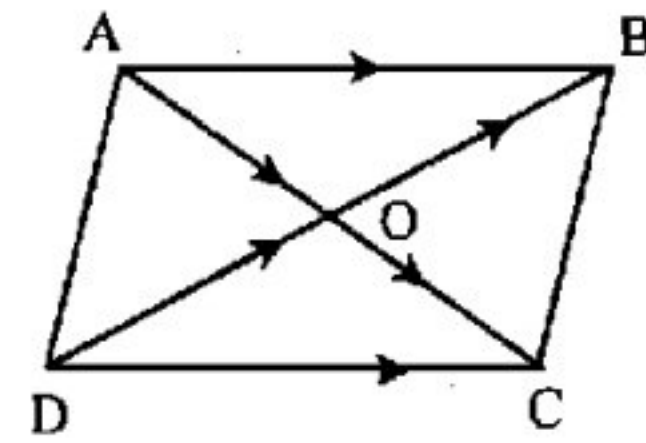
অর্থাৎ DF || BC. কিন্তু DE || BC [দেওয়া আছে]

তাহলে DE ও DF রেখা দুই উভয়েই D বিন্দু দিয়ে যায় এবং BC এর সমান্তরাল। অতএব তারা (অর্থাৎ DE ও DF) অবশ্যই সমাপতিত হবে।

\therefore E ও F একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ E, AC এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)

১২. প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হয়।

সমাধান: মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



$$\text{প্রমাণ: } \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB} \quad [\because O, BD \text{ এর মধ্যবিন্দু}]$$

$$\text{এবং } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO} \quad [\because O, AC \text{ এর মধ্যবিন্দু}]$$

$$\text{এখন, } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \quad [\text{ত্রিভুজ বিধি}]$$

$$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} \quad [\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}]$$

$$= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} \quad [\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}]$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad [\text{ত্রিভুজ বিধি}]$$

\therefore AB = DC এবং \overrightarrow{AB} ও \overrightarrow{DC} এর ধারক রেখা দুই একই বা সমান্তরাল হবে। এখানে স্পষ্টতঃ \overrightarrow{AB} ও \overrightarrow{BC} এর ধারক রেখা দুই সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ AB || DC

\therefore ABCD একটি সামান্তরিক।

[\because সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল।]
(প্রমাণিত)

১৩. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

সমাধান: মনে করি, ABCD

ট্রাপিজিয়ামের AB ও CD

বাহুদ্বয় অসমান্তরাল এবং BC

ও AD বাহুদ্বয় সমান্তরাল।

E ও F যথাক্রমে AB ও CD

এর মধ্যবিন্দু। E, F যোগ

করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, EF, AD ও BC-এর সমান্তরাল এবং

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D

বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} , \underline{d} ।

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}, \overrightarrow{AD} = \underline{d} - \underline{a}$$

$$\therefore E \text{ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর} = \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{b}) \quad [\because E, AB \text{ এর মধ্যবিন্দু}]$$

$$\text{এবং } F \text{ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর} = \frac{1}{2} (\underline{c} + \underline{d})$$

$[\because F, CD \text{ এর মধ্যবিন্দু}]$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} (\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{b})$$

$$= \frac{1}{2} (\underline{c} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{b})$$

$$= \frac{1}{2} \{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{d} - \underline{a})\}$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$$

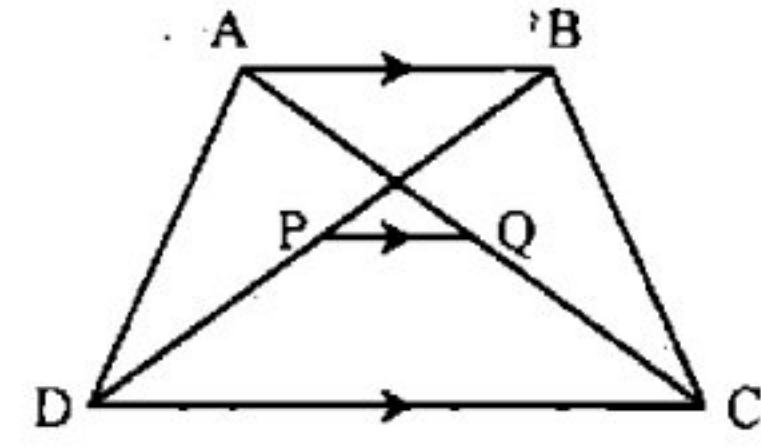
কিন্তু BC ও AD পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ BC ও AD এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং \overrightarrow{EF} ভেক্টরও BC ও AD এর সমান্তরাল হবে।

$$\text{কারণ, } \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) \quad (\text{প্রমাণিত})$$

১৪. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের যোগফলের অর্ধেক।

সমাধান:



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের $AB \parallel CD$ এবং AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Q ও P। P, Q যোগ করি।

$$\text{প্রমাণ করতে হবে যে, } PQ = \frac{1}{2} (DC - AB)$$

$$\text{এবং } PQ \parallel AB \parallel CD.$$

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} , \underline{d} ।

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$

$$\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$$

$$\therefore P \text{ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর} = \frac{1}{2} (\underline{b} + \underline{d})$$

$[\because P, BD \text{ এর মধ্যবিন্দু}]$

$$\text{এবং } Q \text{ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর} = \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{c}) \quad [\because Q, AC \text{ এর মধ্যবিন্দু}]$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{c}) - \frac{1}{2} (\underline{b} + \underline{d})$$

$$= \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{c} - \underline{b} - \underline{d})$$

$$\text{বা, } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \{(\underline{c} - \underline{d}) - (\underline{b} - \underline{a})\}$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$$

$AB \parallel CD$ হওয়ায় $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$ ভেক্টরটিও \overrightarrow{AB} ও \overrightarrow{CD} ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে \overrightarrow{PQ} ভেক্টরটিও \overrightarrow{AB} ও \overrightarrow{CD} ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

$$\text{কারণ } \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} (|\overrightarrow{DC}| - |\overrightarrow{AB}|)$$

$$\therefore PQ = \frac{1}{2} (DC - AB)$$

$$\text{অর্থাৎ } PQ \parallel AB \parallel DC$$

$$\therefore PQ = \frac{1}{2} (DC - AB) \quad (\text{প্রমাণিত})$$



অনুশীলনীর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

গ. ABCD ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং

$$MN = \frac{1}{2} (BC - DE)$$

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

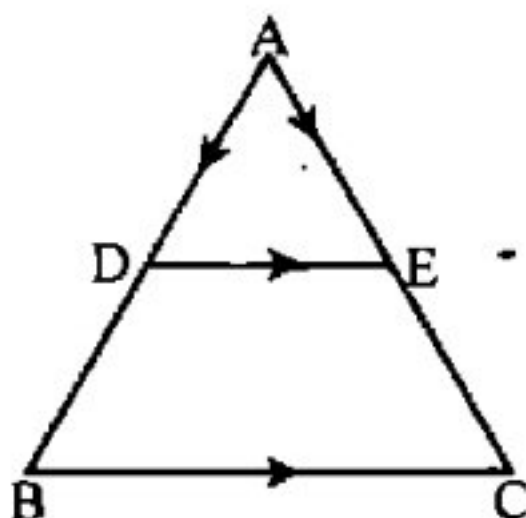
ক. $\triangle ADE$ -এ

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} \quad (\text{ত্রিভুজ বিধি})$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \quad [\text{যেহেতু } E, AC \text{ এর মধ্যবিন্দু}]$$

$$\text{সুতরাং, } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

প্রশ্ন ১৫



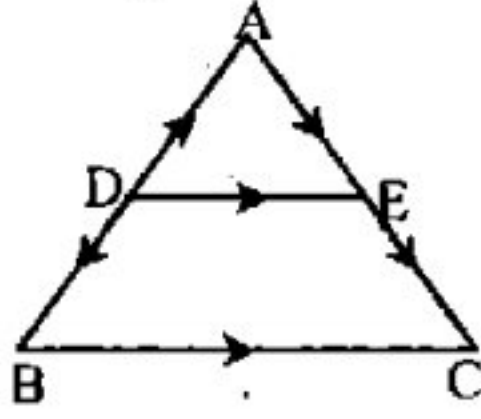
$\triangle ABC$ এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

ক. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে \overrightarrow{AC} ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $BC \parallel DE$ এবং $DE = \frac{1}{2} BC$.

খ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

D, E যোগ করা হলো। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে $DE = \frac{1}{2} BC$ এবং $DE \parallel BC$



প্রমাণ: D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু।

$$\therefore \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \text{ এবং } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\text{বা, } \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{এবং } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$$

$$= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

$$= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \quad [\because \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}]$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \quad [\text{সমীকরণ (i) হতে}]$$

$$\text{সুতরাং } |\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC}|$$

$\therefore DE = \frac{1}{2} BC$ এবং \overrightarrow{DE} ও \overrightarrow{BC} এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।

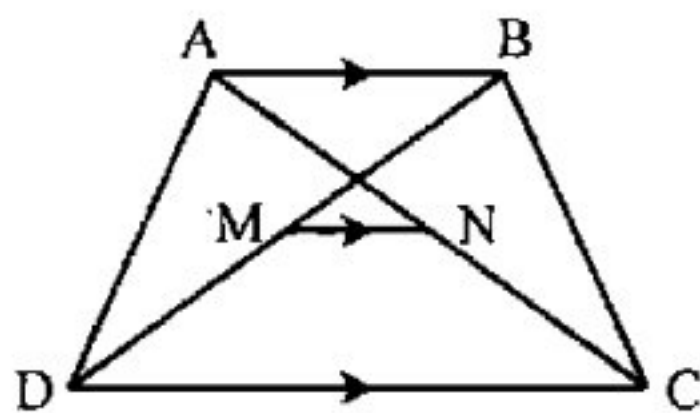
কিন্তু D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু বলে \overrightarrow{DE} ও \overrightarrow{BC} এর ধারক রেখা একই হতে পারে না।

$$\therefore DE \parallel BC$$

অর্থাৎ $DE = \frac{1}{2} BC$ এবং $DE \parallel BC$ (প্রমাণিত)

[বিঃদ্র: পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে AB \parallel DC এর স্থলে $DE \parallel BC$ হবে।]

গ



মনে করি, BCDE ট্রাপিজিয়ামের $DE \parallel BC$ এবং CD ও BE কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M। M, N যোগ করি।

$$\text{প্রমাণ করতে হবে যে, } MN = \frac{1}{2} (DC - AB)$$

এবং $MN \parallel AB \parallel CD$.

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে \underline{a} , \underline{b} , \underline{c} , \underline{d} .

$$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$$

$$\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$$

$$\therefore M \text{ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর} = \frac{1}{2} (\underline{b} + \underline{d})$$

[\because M, BD এর মধ্যবিন্দু]

$$\text{এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর} = \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{c}) \quad [\because N, AC \text{ এর মধ্যবিন্দু}]$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{c}) - \frac{1}{2} (\underline{b} + \underline{d}) = \frac{1}{2} (\underline{a} + \underline{c} - \underline{b} - \underline{d})$$

$$\text{বা, } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \{(\underline{c} - \underline{d}) - (\underline{b} - \underline{a})\}$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$$

$AB \parallel CD$ হওয়ায় $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$ ভেক্টরটিও \overrightarrow{AB} ও \overrightarrow{CD} ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে \overrightarrow{MN} ভেক্টরটিও \overrightarrow{AB} ও \overrightarrow{CD} ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

$$\text{কারণ } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} (|\overrightarrow{DC}| - |\overrightarrow{AB}|)$$

$$\therefore PQ = \frac{1}{2} (DC - AB)$$

অর্থাৎ $MN \parallel AB \parallel DC$

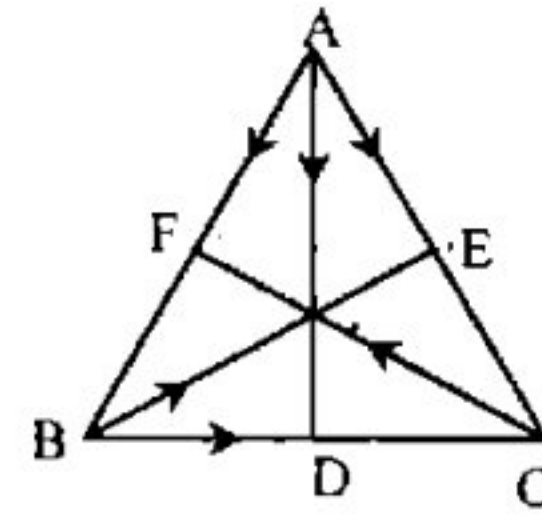
$$\therefore MN = \frac{1}{2} (DC - AB)$$

[বিঃ দ্র: পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং MN

$$= \frac{1}{2} (BC - DC) \text{ এর স্থলে } MN \parallel AB \parallel DC$$

$$\text{এবং } MN = \frac{1}{2} (DC - AB) \text{ হবে।}]$$

প্রঃ ১৬ $\triangle ABC$ এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.



ক. \overrightarrow{AB} ভেক্টরকে \overrightarrow{BE} ও \overrightarrow{CF} ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে।

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

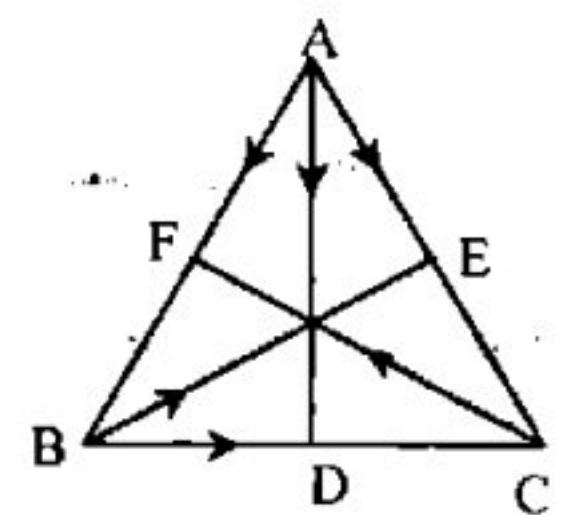
$$\text{ক } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$$

$$\text{বা, } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE} \quad [\text{ত্রিভুজ বিধি}]$$

$$= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE}$$

$$[E, AC \text{ এর মধ্যবিন্দু বলে } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \text{ এবং } \overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{BE}]$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF}) - \overrightarrow{BE} \quad [\text{ত্রিভুজ বিধি}]$$



$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF} \right) - \overrightarrow{BE}$$

$$[F, AB \text{ এর মধ্যবিন্দু বলে } \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}]$$

$$\text{বা, } \vec{AB} = \frac{1}{4} \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{CF} - \vec{BE}$$

$$\text{বা, } 4\vec{AB} = \vec{AB} - 2\vec{CF} - 4\vec{BE} \quad [\text{উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে}]$$

$$\text{বা, } 4\vec{AB} - \vec{AB} = \vec{AB} - 2\vec{CF} - 4\vec{BE} - \vec{AB}$$

[উভয়পক্ষে $(-\vec{AB})$ যোগ করে]

$$\text{বা, } 3\vec{AB} = -2\vec{CF} - 4\vec{BE}$$

$$\therefore \vec{AB} = -\frac{2}{3}\vec{CF} - \frac{4}{3}\vec{BE} \quad [\text{উভয় পক্ষকে } \frac{1}{3} \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

গ ΔABD -এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$$

$$\therefore \vec{AD} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} \quad \dots\dots\dots (i)$$

$$[D, BC \text{ এর মধ্যবিন্দু বলে } \vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{BC}]$$

$$\Delta ACF\text{-এ } \vec{AF} = \vec{AC} + \vec{CF}$$

$$\therefore \vec{CF} = \vec{AF} - \vec{AC} \quad [\vec{AC} = -\vec{CA}]$$

$$\therefore \vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC} \quad \dots\dots\dots (ii)$$

$$[F, AB \text{ এর মধ্য বিন্দু বলে } \vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AB}]$$

$$\text{এবং } \Delta ABE\text{-এ } \vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE}$$

$$\text{বা, } \vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB}$$

$$\therefore \vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB} \quad \dots\dots\dots (iii)$$

$$[E, AC \text{ এর মধ্যবিন্দু বলে } \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AC}]$$

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$\vec{AD} + \vec{CF} + \vec{BE} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB}$$

$$\text{বা, } \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} - \frac{1}{2}\vec{AC}$$

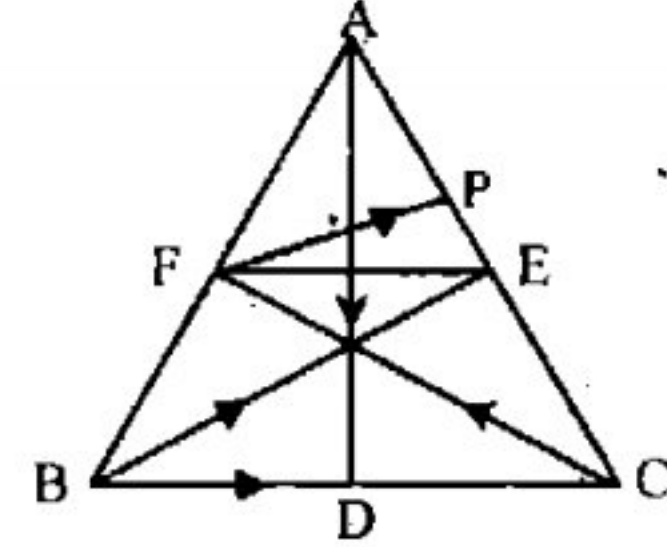
$$= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) - \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$= 0$$

$$\therefore \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = 0 \quad (\text{প্রমাণিত})$$

গ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু F , BC বাহুর সমান্তরাল করে অঙ্কিত রেখা AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, E , AC এর মধ্যবিন্দু।
ধরি, E নয় বরং P , AC এর মধ্যবিন্দু।



$$\text{তাহলে } \vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AB} \quad [\because F, AB \text{ এর মধ্যবিন্দু এবং } \vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AC}]$$

$$\therefore P, AC \text{ এর মধ্যবিন্দু} \parallel$$

$$\therefore \vec{FP} = \vec{FA} + \vec{AP} = -\vec{AF} + \vec{AP} \quad [\because \vec{FA} = -\vec{AF}]$$

$$= \vec{AP} - \vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}\vec{BC}$$

$$\therefore \vec{FP} = \frac{1}{2}\vec{BC}$$

অর্থাৎ, $FP \parallel BC$ কিন্তু $FE \parallel BC$ (দেওয়া আছে)

তাহলে \vec{FE} ও \vec{FP} রেখাধর্য উভয়েই F বিন্দু দিয়ে যায় এবং \vec{BC} এর সমান্তরাল। অতএব তারা (অর্থাৎ \vec{FE} ও \vec{FP}) অবশ্যই সমাপতিত হবে।

$\therefore E$ ও P একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ E , AC এর মধ্যবিন্দু।

(প্রমাণিত)



মাস্টার ট্রেনার প্রণীত সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১. নিচের কোনটি স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি। [Text পৃষ্ঠা-২০২]

- যে রাশি কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়, তাকে স্কেলার বা অদিক বা নির্দিক রাশি বলা হয়।
- যে রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য তার পরিমাণ ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয়, তাকে ভেক্টর বা সদিক রাশি বলা হয়।

১. "বাঁশটি ৫ মিটার লম্বা"- কথাটিতে কোন রাশির প্রকাশ হয়েছে? (সহজ)

- ক স্কেলার খ সদিক গ ভেক্টর ঘ দিক

২. স্কেলার রাশি প্রকাশের জন্য কিসের প্রয়োজন? (সহজ) [শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর]

- ক শুধু মান খ শুধু দিক
গ মান ও দিক উভয়েই ঘ মান অথবা দিক

৩. যে সকল রাশিকে কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বোঝানো যায় ঐ রাশির নাম কী? (মধ্য)

- ক নির্দিক খ দিক গ ভেক্টর ঘ সদিক

৪. নিচের কোনটি স্কেলার রাশি? (মধ্য) [নাটোর সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নাটোর; আই.ই.টি.পর্ন্তঃ হাই স্কুল, নারায়ণগঞ্জ]

- ক ওজন খ বল গ দ্রুতি ঘ সরণ

৫. ভেক্টর রাশি প্রকাশের জন্য কিসের প্রয়োজন? (সহজ)

- ক শুধু মান খ শুধু দিক
গ মান অথবা দিক ঘ মান ও দিক উভয়েই

৬. ভেক্টর রাশির অপর নাম কী? (সহজ) [শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর]

- ক অদিক রাশি খ নির্দিক রাশি
গ সদিক রাশি ঘ স্কেলার রাশি

৭. নিচের কোন রাশি প্রকাশের জন্য মান ও দিক উভয়েই প্রয়োজন? (সহজ)

- ক আয়তন খ ভর গ তাপমাত্রা ঘ বেগ

৮. "নিচের কোনটি ভেক্টর রাশি? (সহজ)

- ক 7°C খ 5cm^3 গ 7N ঘ 5kg