

$$\begin{aligned}\therefore \text{ল.সা.গু} &= (a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1) \\ &= (a^3-1)(a^3+1) \\ &= (a^3)^2 - (1)^2 \\ &= a^6 - 1\end{aligned}$$

$$\text{সুতারাং, নির্ণেয় ল.সা.গু.} = a^6 - 1$$

অনুশীলনী ৪.৪

- ১। $a + \frac{1}{a} = 2$ হলে $a^2 + \frac{1}{a^2}$ এর মান নিচের কোনটি?
(ক) ২ (খ) ৪ (গ) ৬ (ঘ) ৮
- ২। ৫২ - এর বর্গ নিচের কোনটি?
(ক) ২৭০৪ (খ) ২৫০৪ (গ) ২৪৯৬ (ঘ) ২২৮৪
- ৩। $a^2 + 2a - 15$ - এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ নিচের কোনটি?
(ক) $(a+5)(a-3)$ (খ) $(a+3)(a+5)$ (গ) $(a-3)(a-5)$ (ঘ) $(a+3)(a+5)$
- ৪। $x^2 - 64$ - এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ নিচের কোনটি?
(ক) $(x-8)(x-8)$ (খ) $(x+8)(x+8)$ (গ) $(x+8)(x-8)$ (ঘ) $(x+4)(x-4)$
- ৫। $3a^2b^4c^3$, $12a^3b^2c$, $6a^4bc^2$ - এর গ.সা.গু নিচের কোনটি?
(ক) $3a^2bc$ (খ) $3a^2b^2c$ (গ) $12abc$ (ঘ) $3abc$
- ৬। $a-b$, a^2-ab , a^2-b^2 - এর ল.সা.গু নিচের কোনটি?
(ক) $a(a-b)$ (খ) $(a-b)$ (গ) $a(a^2-b^2)$ (ঘ) (a^2-b^2)
- ৭। $(x+8)(x-7)$ - এর গুণফল নিচের কোনটি?
(ক) $x^2 + x - 56$ (খ) $x^2 - 15x + 56$ (গ) $x^2 + 15x - 36$ (ঘ) $x^2 - x + 56$

$$(i) x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$(ii) ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$(iii) x^3 + y^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

(২) $x^3 + \frac{1}{x^3}$ এর মান কত?

(ক) 1

(খ) 2

(গ) 3

(ঘ) 4

(৩) $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান কত?

(ক) 8

(খ) 6

(গ) 4

(ঘ) 2

গ.সা.গু. নির্ণয় কর (১২- ১৯) :

১২। $36a^2b^2c^4d^5$, $54a^5c^2d^4$ এবং $90a^4b^3c^2$

সমাধান :

$36, 54, 90$ - এর গ.সা.গু. = 18

এবং $a^2b^2c^4d^5$, $a^5c^2d^4$ ও $a^4b^3c^2$ - এর উৎপাদকগুলোর

সর্বোচ্চ সাধারণ ঘাত যথাক্রমে a^2 ও c^2

নির্ণেয় গ.সা.গু. = $18a^2c^2$

১৩। $20x^3y^2a^3b^4$, $15x^4y^3a^4b^3$ এবং $35x^2y^4a^3b^2$

সমাধান :

$20, 15, 35$ - এর গ.সা.গু. = 5

এবং $x^3y^2a^3b^4$, $x^4y^3a^4b^3$ ও $x^2y^4a^3b^2$ - এর উৎপাদকগুলোর

সর্বোচ্চ সাধারণ ঘাত যথাক্রমে $x^2y^2a^3b^2$

নির্ণেয় গ.সা.গু. = $5x^2y^2a^3b^2$

১৪। $15x^2y^3z^4a^3$, $12x^3y^2z^3a^4$ এবং $27x^3y^4z^5a^7$

সমাধান :

$15, 12, 27$ - এর গ.সা.গু. = 3

এবং $x^2y^3z^4a^3$, $x^3y^2z^3a^4$ ও $x^3y^4z^5a^7$ - এর উৎপাদকগুলোর

সর্বোচ্চ সাধারণ ঘাত যথাক্রমে $x^2y^2z^3a^3$

নির্ণেয় গ.সা.গু. = $3x^2y^2z^3a^3$

১৫।

$$18a^3b^4c^5, 42a^4c^3d^4, 60b^3c^4d^5 \text{ এবং } 78a^2b^4c^4d^3$$

সমাধান :

$$18, 42, 60, \text{ ও } 78 - \text{এর গ.সা.গু.} = 6$$

এবং $a^3b^4c^5, a^4c^3d^4, b^3c^4d^5$ ও $a^2b^4c^4d^3$ - এর উৎপাদকগুলোর সর্বোচ্চ সাধারণ ঘাত নেই।

$$\text{নির্ণেয় গ.সা.গু.} = 6$$

১৬।

$$x^2 - 3x, x^2 - 9 \text{ এবং } x^2 - 4x + 3$$

সমাধান : এখানে,

$$\begin{aligned} \text{প্রথম রাশি} &= x^2 - 3x \\ &= x(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{দ্বিতীয় রাশি} &= x^2 - 9 \\ &= (x)^2 - (3)^2 \\ &= (x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{তৃতীয় রাশি} &= x^2 - 4x + 3 \\ &= x^2 - 3x - x + 3 \\ &= x(x - 3) - 2(x - 3) \\ &= (x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

এখানে, রাশিগুলোর সাধারণ উৎপাদক $(x - 3)$ এবং সর্বোচ্চ সাধারণ ঘাত $(x - 3)$ ।

$$\text{সুতরাং, নির্ণেয় গ.সা.গু.} = x - 3$$

১৭।

$$18(x + y)^3, 24(x + y)^2 \text{ এবং } 32(x^2 - y^2)$$

সমাধান : এখানে,

$$\begin{aligned} \text{প্রথম রাশি} &= 18(x + y)^3 \\ &= 2.3.3.(x + y)(x + y)(x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{দ্বিতীয় রাশি} &= 24(x + y)^2 \\ &= 2.2.2.3.(x + y)(x + y) \\ &= (x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{তৃতীয় রাশি} &= 32(x^2 - y^2) \\ &= 2.2.2.2.2.(x + y)(x - y) \end{aligned}$$

এখানে, রাশিগুলোর সাধারণ উৎপাদক $2(x + y)$ এবং সর্বোচ্চ সাধারণ ঘাত $2(x + y)$ ।

$$\text{সুতরাং, নির্ণেয় গ.সা.গু.} = 2(x + y)$$

১৮। $a^2b(a^3 - b^3)$, $a^2b^2(a^4 + a^2b^2 + b^4)$ এবং $a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4$

সমাধান : এখানে,

$$\begin{aligned}\text{প্রথম রাশি} &= a^2b(a^3 - b^3) \\ &= a^2b(a - b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{দ্বিতীয় রাশি} &= a^2b^2(a^4 + a^2b^2 + b^4) \\ &= a^2b^2\{(a^2)^2 + 2a^2b^2 + (b^2)^2 - (ab)^2\} \\ &= a^2b^2\{(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2\} \\ &= a^2b^2(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{তৃতীয় রাশি} &= a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 \\ &= ab^2(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

এখানে, রাশিগুলোর সাধারণ উৎপাদক $ab(a^2 + ab + b^2)$

এবং সর্বোচ্চ সাধারণ ঘাত $ab(a^2 + ab + b^2)$ ।

সুতরাং, নির্ণেয় গ.সা.গু. $= ab(a^2 + ab + b^2)$

১৯। $a^3 - 3a^2 - 10a$, $a^3 + 6a^2 + 8a$ এবং $a^4 - 5a^3 - 14a^2$

সমাধান : এখানে,

$$\begin{aligned}\text{প্রথম রাশি} &= a^3 - 3a^2 - 10a \\ &= a(a^2 - 3a - 10) \\ &= a(a^2 - 5a + 2a - 10) \\ &= a\{a(a - 5) + 2(a - 5)\} \\ &= a(a - 5)(a + 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{দ্বিতীয় রাশি} &= a^3 + 6a^2 + 8a \\ &= a(a^2 + 6a + 8) \\ &= a(a^2 + 4a + 2a + 8) \\ &= a\{a(a + 4) + 2(a + 4)\} \\ &= a(a + 4)(a + 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{তৃতীয় রাশি} &= a^4 - 5a^3 - 14a^2 \\
 &= a^2(a^2 - 5a - 14) \\
 &= a^2\{(a^2 - 7a + 2a - 14)\} \\
 &= a^2\{a(a - 7) + 2(a - 7)\} \\
 &= a^2(a - 7)(a + 2)
 \end{aligned}$$

এখানে, রাশিগুলোর সাধারণ উৎপাদক $a(a + 2)$ এবং সর্বোচ্চ সাধারণ ঘাত $a(a + 2)$ ।
সুতরাং, নির্ণেয় গ.সা.গু. $= a(a + 2)$

ল.সা.গু. নির্ণয় কর(২০- ২৭) :

২০। a^5bc , ab^3c^2 এবং $a^7b^4c^3$

সমাধান :

প্রদত্ত রাশিগুলোর সাধারণ ঘাতের উৎপাদক যথাক্রমে $a^7b^4c^3$
নির্ণেয় ল.সা.গু. $= a^7b^4c^3$

২১। $5a^2b^3c^2$, $10ab^2c^3$ এবং $15ab^3c$

সমাধান :

5, 10 ও 15 - এর ল.সা.গু. $= 30$
এবং $a^2b^3c^2$, ab^2c^3 ও ab^3c - এর উৎপাদকগুলোর সর্বোচ্চ
সাধারণ ঘাত যথাক্রমে a^2 , b^3 ও c^3 ।
সুতরাং, উৎপাদকগুলোর ল.সা.গু. $= 30a^2b^3c^3$

২২। $3x^3y^2$, $4xy^2z$, $5x^4y^2z^2$ এবং $12xy^4z^2$

সমাধান :

3, 4 ও 5 - এর ল.সা.গু. $= 60$
এবং x^3y^2 , xy^2z ও $x^4y^2z^2$ - এর উৎপাদকগুলোর সর্বোচ্চ
সাধারণ ঘাত যথাক্রমে x^4 , y^2 ও z^2 ।
সুতরাং, উৎপাদকগুলোর ল.সা.গু. $= 60x^4y^2z^2$

২৩। $3a^2d^3$, $9d^2b^2$, $12c^3d^2$, $24a^3b^2$ এবং $36c^3d^2$

সমাধান :

3, 9, 12, 24 ও 36 - এর ল.সা.গু. $= 72$
এবং a^2d^3 , d^2b^2 , c^3d^2 , a^3b^2 ও c^3d^2 - এর উৎপাদকগুলোর সর্বোচ্চ
সাধারণ ঘাত যথাক্রমে a^3 , b^2 , c^3 ও d^3 ।
সুতরাং, উৎপাদকগুলোর ল.সা.গু. $= 72a^3b^2c^3d^3$

২৪। $x^2 + 3x + 2$, $x^2 - 1$, এবং $x^2 + x - 2$

সমাধান : এখানে,

$$\begin{aligned}\text{প্রথম রাশি} &= x^2 + 3x + 2 \\ &= x^2 + 2x + x + 2 \\ &= x(x + 2) + 1(x + 2) \\ &= (x + 2)(x + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{দ্বিতীয় রাশি} &= x^2 - 1 \\ &= x^2 - 1^2 \\ &= (x + 1)(x - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{তৃতীয় রাশি} &= x^2 + x - 2 \\ &= x^2 + 2x - 1x - 2 \\ &= x(x + 2) - 1(x + 2) \\ &= (x + 2)(x - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{সুতারাং, নির্ণেয় ল.সা.গু.} &= (x + 2)(x + 1)(x - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x + 2)\end{aligned}$$

২৫। $x^2 - 4$, $x^2 + 4x + 4$ এবং $x^3 - 8$

সমাধান : এখানে,

$$\begin{aligned}\text{প্রথম রাশি} &= x^2 - 4 \\ &= x^2 - 2^2 \\ &= (x - 2)(x + 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{দ্বিতীয় রাশি} &= x^2 + 4x + 4 \\ &= x^2 + 2x + 2x + 4 \\ &= x(x + 2) + 2(x + 2) \\ &= (x + 2)(x + 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{তৃতীয় রাশি} &= x^3 - 8 \\ &= x^3 - 2^3 \\ &= (x - 2)(x^2 + x \cdot 2 + 2^2) \\ &= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{সুতারাং, নির্ণেয় ল.সা.গু.} &= (x + 2)(x + 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \\ &= (x + 2)^2(x^3 - 2^3) = (x + 2)^2(x^3 - 8)\end{aligned}$$

সমাধান : এখানে,

$$\begin{aligned}\text{প্রথম রাশি} &= 6x^2 - x - 1 \\ &= 6x^2 - 3x + 2x - 1 \\ &= 3x(2x - 1) + 1(2x - 1) \\ &= (2x + 1)(3x - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{দ্বিতীয় রাশি} &= 3x^2 + 7x + 2 \\ &= 3x^2 + 6x + x + 2 \\ &= 3x(x + 2) + 1(x + 2) \\ &= (x + 2)(3x + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{তৃতীয় রাশি} &= 2x^2 + 3x - 2 \\ &= 2x^2 + 4x - x - 2 \\ &= 2x(x + 2) - 1(x + 2) \\ &= (x + 2)(2x - 1)\end{aligned}$$

$$\text{সুতারাং, নির্ণেয় ল.সা.গু.} = (2x - 1)(3x + 1)(x + 2) = (x^2 - 1)(x + 2)$$

সমাধান : এখানে,

$$\begin{aligned}\text{প্রথম রাশি} &= a^3 + b^3 \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{দ্বিতীয় রাশি} &= (a + b)^3 \\ &= (a + b)(a + b)(a + b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{তৃতীয় রাশি} &= (a^2 - b^2)^2 \\ &= (a^2 - b^2)(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 - b^2)(a^2 - b^2) \\ &= (a + b)(a - b)(a + b)(a - b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{চতুর্থ রাশি} &= (a^2 - ab + b^2)^2 \\ &= (a^2 - ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{সুতারাং, নির্ণেয় ল.সা.গু.} &= (a + b)(a + b)(a + b)(a - b)(a - b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a + b)^3(a - b)^2(a^2 - ab + b^2)^2\end{aligned}$$

২৮। $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$ হলে,

(ক) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান :

দেওয়া আছে, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 &= x^2 + 2.x.\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \\ &= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 3 + 2 \quad \left[\because x^2 + \frac{1}{x^2} = 3 \right] \\ &= 5\end{aligned}$$

(খ) $\frac{x^6 + 1}{x^3}$ এর মান কত?

সমাধান :

‘ক’ থেকে পাই, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 5$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right) = 5 \quad [\text{বর্গমূল করে}]$$

এখন, $\frac{x^6 + 1}{x^3}$

$$\begin{aligned}&= \frac{x^6}{x^3} + \frac{1}{x^3} \\ &= x^3 + \frac{1}{x^3} \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3.x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\sqrt{5})^3 - 3.\sqrt{5} \quad [\text{মান বসিয়ে}] \\ &= 5\sqrt{5} - 3.\sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

সুতরাং, নির্ণেয় মান $2\sqrt{5}$

(গ) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর ঘন নির্ণয় করে মান বের কর।

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 &= (x^2)^3 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + 3.x^2.\frac{1}{x^2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left\{(x^2)^3 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^3\right\} + 3.3 \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 - 3.x^2.\frac{1}{x^2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 9 \\ &= (3)^3 - 3.3 + 9 \quad [\text{মান বসিয়ে}] \\ &= 27 - 9 + 9 \\ &= 27 \end{aligned}$$

২৯।

$a - b + c$

একটি বীজগণিতীয় রাশি হলে,

(ক) প্রদত্ত রাশির ঘন নির্ণয় কর।

সমাধান :

\therefore প্রদত্ত রাশির ঘন

$= (a - b + c)^3$

$= \{(a - b) + (c)\}^3$

$= (a - b)^3 + 3.(a - b)^2.c + 3.(a - b).c^2 + c^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3c(a^2 - 2ab + b^2) + 3c^2(a - b) + c^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2c - 6abc + 3b^2c + 3ac^2 - 3bc + c^3$

(খ) প্রমাণ কর যে, $(a - b + c)^3 \neq (a - b)^3 + c^3$

সমাধান :

$$\text{বামপক্ষ} = (a - b + c)^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2c - 6abc + 3b^2c + 3ac^2 - 3bc + c^3$$

$$\text{ডানপক্ষ} = (a - b)^3 + c^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3$$

$$\therefore (a - b + c)^3 \neq (a - b)^3 + c^3 \text{ (প্রমাণিত)}$$

(গ) প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত রাশির বর্গ ও $(a + c)^2 - b^2$ সমান নয়।

সমাধান :

$$\text{এখন, প্রদত্ত রাশির বর্গ} = (a - b + c)^2$$

$$= \{(a - b) + (c)\}^2$$

$$= (a - b)^2 + 2.(a - b)(c) + c^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$$

$$\text{এবং } (a + c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2$$

$$= a^2 - b^2 + c^2 + 2ac$$

দেখা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত রাশি অর্থাৎ $(a - b + c)$ এর বর্গ এবং $(a + c)^2 - b^2$ এর প্রাপ্ত মান একই নয়।

$$\therefore \text{প্রদত্ত রাশির বর্গ ও } (a + c)^2 - b^2 \text{ সমান নয় (প্রমাণিত)}$$