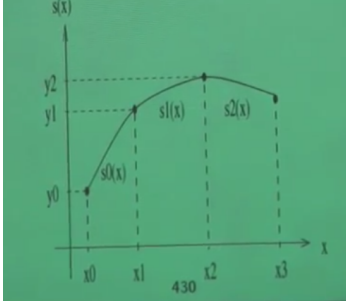


Spline Egrileri

Diyelim ki elimizde 4 x_i, y_i noktası var, ve bu noktalardan geçen, hepsinden *kesinlikle* geçen, yaklaşıksal bir eğri oluşturmak istiyoruz. Spline yöntemi her iki nokta arasını farklı bir küpsel (üçüncü derece) polinom ile temsil etmektir. Tekrar dikkat: tüm noktaları temsile edebilecek farklı polinomları toplamıyoruz, her aralıkta başka bir polinom fonksiyonu parçasını devreye sokuyoruz. Parçalar niye küpsel olarak seçildi? Çünkü küpsel bir eğri yeterince kavis sağlayabilir ve aynı zamanda çok fazla inisli çıkışlı, sivri değildir, yeterince pürüzsüz bir eğrinin ortaya çıkmasını sağlar.



Her $i = 0, \dots, n + 1$ için

$$p(x) = p_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad (1)$$

kullanalım. Noktalar x_i olarak gösteriliyor, ve her noktada aktif olan bir p_i spline olacak, o noktadan bir sonrakine kadar eğriyi bu p_i tanımlayacak. Noktaların sayısını n yerine $n + 1$ olarak aldık böylece n eğri parçası ile çalışmamız mümkün olacak. Her spline bir kübik polinom ise niye bu kübik polinomu en basit şekliyle

$$p(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$$

olarak tanımlamadık? Çünkü iki üstteki form ile çalışmak daha rahat. Mesela, eğer x için x_i değeri verirsek, ki bu x_1 ya da x_2 olabilir, o zaman parantez içinde $x_i - x_i$ sayesinde tüm terimler sıfır oluyor, geriye sadece a_i kalıyor.

Parçaların uçlarının birbirini tutması, ve tüm şeklin sürekli, akışkan bir şekilde gözükmesi için ise birkaç kural bizim tanımlamamız, ve zorlamamız gerekli. Önce en basit olanı: bir önceki parça ile bir sonraki parça orta nokta üzerinde aynı değere sahip olmalı. $i = 1, \dots, n + 1$ için

$$p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1})$$

Bir diğer basit gereklilik, her x_i 'ye kabul eden spline fonksiyonun elimizdeki y_i değerini vermesi,

$$p_i(x_i) = y_i$$

“Tüm noktalardan kesinlikle geçmeli” demistik. Son parça bir istisna oluşturuyor, bu son parçanın fonksiyonu hem son noktayı, hem de ondan bir önceki nokta için kullanılmalı, bir önceden en sona kadar aynı fonksiyon üzerindeyiz.

$$p_n(x_n) = y_{n+1}$$

Sistemi daha detayli olarak gormek gerekirse, tum denklemleri yazalim,

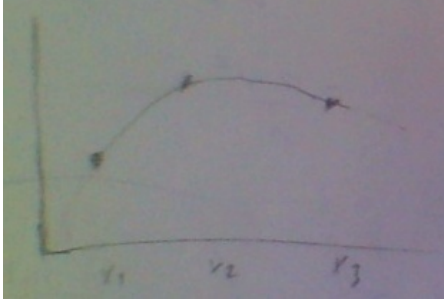
$$p_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$$

$$p_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3$$

\vdots

$$p_n(x) = a_n + b_n(x - x_n) + c_n(x - x_n)^2 + d_n(x - x_n)^3$$

Uc noktali soyle bir grafik dusunelim,



Ustte bahsettigimiz gibi, $p_1(x_1) = a_1 = y_1$ olacak, ve tum indisler icin bu gecerli. Ayrica x_2 noktasinda bir oncesi parca ve sonraki parca ayni degere sahip olmalidir, yani mesela p_1 'in sonunda (ustteki ilk parca) x_2 noktasinda vardir, ve ayni noktada p_2 baslayacaktır, o noktada

$$p_1(x_2) = a_1 + b_1h_1 + c_1h_1^2 + d_1h_1^3$$

ve bu denklem $p_2(x_2) = a_2 = y_2$ 'ye esit. Bir de, daha once gorduk, $a_1 = y_1$ ise, o zaman

$$y_2 = p_1(x_2) = y_1 + b_1h_1 + c_1h_1^2 + d_1h_1^3$$

haline gelir. Hepsini birarada yaziyoruz (y 'yi sag tarafa aldik)

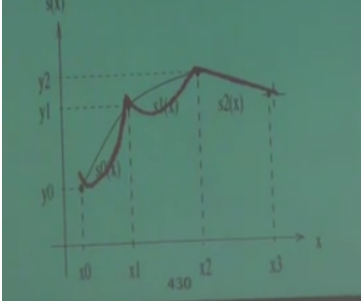
$$y_1 + b_1h_1 + c_1h_1^2 + d_1h_1^3 = y_2 \quad (2)$$

$$y_2 + b_2h_2 + c_2h_2^2 + d_2h_2^3 = y_3$$

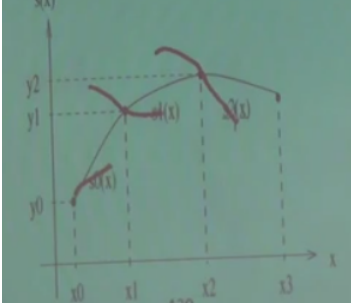
\vdots

$$y_n + b_nh_n + c_nh_n^2 + d_nh_n^3 = y_n$$

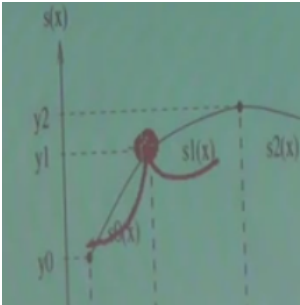
ki $h_1 \equiv x_2 - x_1$, $h_2 \equiv x_3 - x_2$ olarak tanimladik, \equiv isareti "tanimlamak (defined as)" anlamina geliyor, h harfi bir tur kisaltma olarak kullanildi. Fakat kesintisizlik icin parcalarin uclarinin bitismesi yeterli degil. Mesela alttaki figurun de uclari birlesiktir,



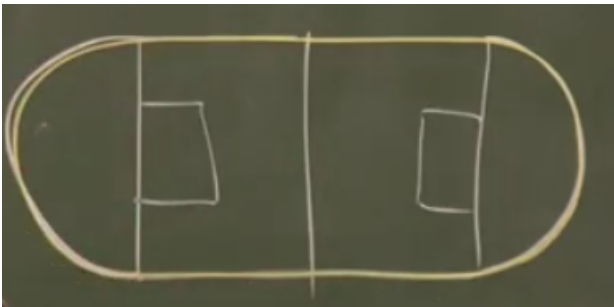
Demek ki ek bazi sartlar lazim. Bu ek sart “sureklilik” olabilir. Mesela alttaki ornek surekli degildir.



Ya da daha iyisi, fonksiyonun her noktada “turevi alinabilir” olma sarti. Mesela altta koyu yuvarlakli gosterilen noktada fonksiyonun turevi alinamaz.

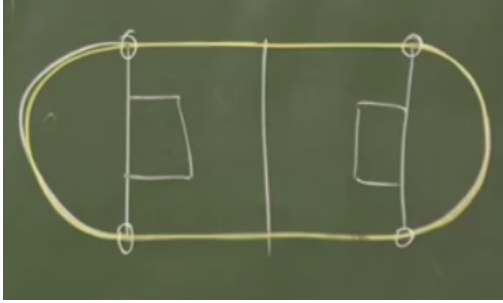


O zaman sarti koyalım – Fonksiyonun her noktasinda, ikinci turev surekli alinabilmeli. Bu cok agir / net bir sart aslinda, ve hakikaten cok puruzsuz (smooth) fonksiyonlara sebebiyet veriyor. Simdi bunun ne anlamina biraz daha yakindan bakalim. Bilirsiniz futbol sahalarinin etrafinda kosu alani vardir. Bu alan soyledir.



Bu sekil iki ayri figurun birlesimidir aslinda, duz cizgiler ve iki tane yari cember.

Ustteki duz cizgili kisim sonsuz kere turevi alinabilir bir fonksiyondur. Degil mi? Duz cizgi sabit bir sayidir, 1. turev sifir, ikinci turev yine sifir, boyle gider. Peki yari cember olan kisimler? Ayni sekilde. Peki her noktada durum boyle midir? Kritik noktalar ufak yuvarlaklarla gosterilen yerler (altta)



Bu noktalarda kac kere “surekli turevler” alinabilir? Cevap, sadece bir kere. Cunku iki kere turev alinca ne olacagina bakalim, duz kisimda ikinci, ucuncu, vs. turev sifir. Peki yari cember? Onun ikinci turevi sifir olmayan sabit bir sayi. O zaman fonksiyonun tamaminin (duz cizgi ve yari cemberin beraber) 2. turevini grafiklese, soyle bir sekil ortaya cikardi,



ve bu grafikte goruyoruz ki bir ziplama var. Bu ziplama yuzunden sureklilik (2. turevde) bozulmus oldu.

O zaman spline duzgün, puruzsuz olsun istiyorsak, her noktada, yani baglanti noktalarinda, sagdaki ve soldaki parcanin birinci ve ikinci turevinin ayni olmasi sartini koyabiliriz, o zaman bu noktalarda fonksiyonun tamamı iki kere surekli turevi alinabilir hale gelir. Parcalarin kendisi uzerinde bu sarti tanimlamaya gerek yok, cunku orada polinom kullanacagimizi belirttik zaten, polinomlar sonsuz kere surekli turevi alinabilen objelerdir.

Denklemlerimize iki tane daha sart gerekiyor. Bu sartlar fonksiyonun ilk noktada ve son noktada ikinci turevinin sifir olmasi sarti olabilir. Her hangi yondeki bir cizgi $y = ax + b$ 'nin iki kere turevi alinca sifir gelir, yani bu sart fonksiyonumuzun son noktalarda, fonksiyonun “asagi yukari ayni yonde” olacak sekilde duz olarak devam etmesi anlamina geliyor. Yaklasiksal baglamda fena bir sart degil.

O zaman ana formullerimize donelim, ve mesela $p_1(x), p_2(x)$ 'in turevini alalim,

$$p_1'(x) = b_1 + 2c_1h_1 + 3d_1h_1^2$$

$$p_2'(x) = b_2 + 2c_2h_2 + 3d_2h_2^2$$

⋮

Turevleri esitleyelim $p'_1(x_2) = p'_2(x_2)$.

$$p'_1(x_2) = b_1 + 2c_1h_1 + 3d_1h_1^2$$

$$p'_2(x_2) = b_2$$

Ustteki niye sadece b_2 oldu? Cunku $x_i - x_i$ numarası onun için de geçerli, geriye sadece b_2 kaldı. Hepsi bir arada

$$b_1 + 2c_1h_1 + 3d_1h_1^2 = b_2 \quad (3)$$

$$b_2 + 2c_2h_2 + 3d_2h_2^2 = b_3$$

\vdots

$$b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 = b_n$$

İkinci turevler için benzer bir durum var, bu sefer sol taraftan b 'ler yokoluyor,

$$2c_1 + 6d_1h_1 = 2c_2 \quad (4)$$

$$2c_2 + 6d_2h_2 = 2c_3$$

\vdots

$$2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} = 2c_n$$

İlk ve son ikinci turevi sifra esitlemeyi unutmayalım. Son turev

$$2c_n + 6d_nh_n = 2c_{n+1} = 0$$

İlk turev

$$p''_1(x_1) = c_1 + 6d_1(x_1 - x_1) \overset{0}{=} c_1 = 0$$

Denklem (4)'den başlayan blogu tekrar düzenlersek,

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1} \quad (5)$$

$$d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3h_2}$$

\vdots

$$d_n = \frac{c_{n+1} - c_n}{3h_n}$$

Ustteki denklemleri (2) ve (3)'e geri koyarsak,

$$b_1 + \frac{c_2 + 2c_1}{3}h_1 = s_1 \quad (7)$$

$$b_2 + \frac{c_3 + 2c_2}{3}h_1 = s_2$$

\vdots

$$b_n + \frac{c_{n+1} + 2c_n}{3}h_n = s_n$$

$$\text{ki } s_1 \equiv \frac{y_2 - y_1}{h_1}, s_2 \equiv \frac{y_3 - y_2}{h_2}.$$

(3) ifadesini alip tekrar duzenlersek,

$$2c_1h_1 + 3d_1h_1^2 = b_2 - b_1$$

$3d_1h_1$ icin baska bir ifade kullanabiliriz, eger (5)'i tekrar duzenlersek,

$$3h_1d_1 = c_2 - c_1$$

ve iki ustteki formule koyarsak

$$2c_1h_1 + (c_2 - c_1)h_1 = b_2 - b_1$$

$$2c_1h_1 + c_2h_1 - c_1h_1 = b_2 - b_1$$

$$c_1h_1 + c_2h_1 = b_2 - b_1$$

$$(c_1 + c_2)h_1 = b_2 - b_1$$

Bu ifade tum i noktaları icin gecerli, hepsi bir arada

$$(c_1 + c_2)h_1 = b_2 - b_1 \quad (6)$$

$$(c_2 + c_3)h_2 = b_3 - b_2$$

\vdots

$$(c_{n-1} + c_n)h_{n-1} = b_n - b_{n-1}$$

(7)'deki ardi ardina gelen denklemleri birbirinden cikartip sonucu 3 ile carparsak,

$$c_1h_1 + 2c_2(h_1 + h_2) + c_3h_2 = 3(s_2 - s_1)$$

$$c_2h_2 + 2c_3(h_2 + h_3) + c_4h_3 = 3(s_3 - s_2)$$

\vdots

$$c_{n-1}h_{n-1} + 2c_n(h_{n-1} + h_n) + c_{n+1}h_n = 3(s_n - s_{n-1})$$

Bu formuller birarada dusunulurse, bilinmeyenleri c_2, c_3, \dots, c_n olan normal (ordinary) $n - 1$ tane lineer denklemdirler, ve bir matris carpimi olarak dusunulebilirler.

c_1h_1 matris formunda yok cunku $c_1 = 0$.

$$\begin{bmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_3 + h_4) & h_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_4 & 2(h_4 + h_5) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Bu denklem sag tarafta suna esit

$$\begin{bmatrix} 3(s_2 - s_1) \\ 3(s_3 - s_2) \\ 3(s_4 - s_3) \\ \vdots \\ 3(s_n - s_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Bir ucgen kosegen (tridiagonal) matris iki tane ikili kosegen (bidiagonal) matrisin carpimina esittir. LU carpanlarına ayirma islemi de (bkz Lineer Cebir Ders 4) bize bu matrisleri saglayacaktır.

$$Ax = b$$

su hale gelir

$$LUX = b$$

Simdi eger $Ux = y$ kabul edersek, yani yeni bir degiskeni dahil edersek, L 'i bulduktan sonra

$$Ly = b$$

kabul edebiliriz, ve bu formulu de y icin cozmek cok kolaydir. Sonra cozulen y 'yi alip geriye sokma (backsubstitution) ile x 'i buluruz, yani

$$Ux = y$$

denklemini cozeriz.

```
import numpy as np
import scipy.linalg as lin

a = np.array( [[3., -3., 0, 0],
               [-3., 8., -2., 0],
               [0, 1., 2., 4.],
               [0, 0, -2., 6.]] )

p, l, u = lin.lu(a)

Ly = np.array( [[7., 8., 2., -3.]] )

y = lin.solve(l, Ly.T)

x = lin.solve(u, y)
```

Spline yontemine donersek, elimizdeki veri ve kod soyle olsun

```
import numpy as np
import scipy.linalg as lin

xx = np.array( [4., 9., 12., 16., 22.] )

yy = np.array( [157., 41., 145., 92., 7.] )
```

```

h = np.diff(xx)
dy = np.diff(yy)
s = dy / h
ds = np.diff(s)
s3 = 3 * ds

a = np.array([[ 2*(h[0]+h[1]), h[1], 0],
               [ h[1], 2*(h[1]+h[2]), h[2]],
               [ 0, h[2], 2*(h[2]+h[3])]])

p,l,u = lin.lu(a)
y = lin.solve(l,s3.T)
c = lin.solve(u,y)

```

c 'ler bulunduktan sonra h 'lerle beraber kullanılarak d 'ler bulunur, vs, ve tüm spline parçalarının katsayıları ortaya çıkartılır.

Kaynaklar

<http://spartan.ac.brocku.ca/~jvr/bik/MATH2P20/notes.pdf>

<http://www.youtube.com/watch?v=3rHBCglD1LQ>

<http://www.youtube.com/watch?v=nA0YpqlraP9A>