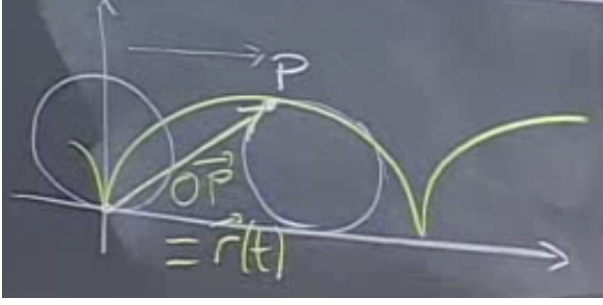


MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 6

Bir önceki derste cycloid konusunu isledik.



Hareket eden bir noktanin pozisyonu

$$(x(t), y(t), z(t))$$

Bu noktayi takip etmenin diger yollarindan biri onu pozisyonu vektörü olarak gormek, ki bu vektörün bileşenleri noktanin kordinatları.

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

Vektör orijin (başlangic) noktasindan gelinen noktayi isaret eden bir vektör (resimde \vec{OP}).

Cycloid probleminde tekerlek yaricapini 1 alalim ve birim hızda ilerliyor olalim, ki böylece aci θ ve zaman ayni sey haline gelsin

$$\vec{r}(t) = \langle t - \sin(t), 1 - \cos(t) \rangle$$

Tamam. Simdi, noktanin pozisyonunu zaman acisindan bildigimize gore, onun degisimini inceleyebiliriz, mesela hizina, ivmesine bakabiliriz. İlk önce hiza bakabiliriz. Fakat, aslinda, hizdan daha iyisini hesaplayabiliriz. Hiz tek bir sayidir sadece, ama eger su icinde GPS olan satafatli spor arabalarindan birine sahip degilseniz, size hizinizin “hangi yonde” oldugunu soylemez. Sadece “gittiginiz yonde” (her ne yone gidiyorsaniz) ne kadar hizli oldugunuzu soyley.

O zaman biz hizimizi hesaplarken, hem yonu, hem hizi ayni anda goze alabiliriz. Bu demektir ki vektör kavrami tekrar isimize yarayacak. Hizi vektör olarak hesaplayabiliriz.

Bunu nasıl yaparız? Pozisyon vektörünün zamana göre türevini alabiliriz.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Bu tür bir türevi bu derste ilk kez görüyoruz, ilk kez bir vektörün türevini alıyoruz. Bu şekilde türev almak demek, o vektörün bileşenlerinin teker teker türevini almak demektir. Yani

$$= \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\rangle$$

Cycloid orneğine dönersek

$$\vec{r}(t) = \langle t - \sin(t), 1 - \cos(t) \rangle$$

formülünün türevini alırsak ne olur?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \langle 1 - \cos(t), \sin(t) \rangle$$

İşte bu türev bize hangi yönde ve ne kadar hızlı gittiğimizi gösteriyor.

Bu arada bir vektörünün büyüklüğünün (magnitude) her zaman mesafesal, uzaklıksal anlamı olmayabileceğini de görmüş oluyoruz. Hız kavramı bir orandır, katedilmiş bir mesafe, bir yer değildir, t anında bir yönde olan bir büyüklüktür. Fakat yine de bir büyüklüktür, bir yönü vardır, ve bu sebeple vektörler ile temsil edilebilir.

Problemimize dönelim. Önceki derste tekerlekten izlenen noktanın en alta gelip yükseldiği sıralarda hareketinin nasıl olduğunu irdelemiştik. Şimdi bu konuyu hız kavramını kullanarak incelemeye uğralım. Üstteki vektöre $t = 0$ koyarsam, ne olur? Sonuç $\langle 0, 0 \rangle$, yani $\vec{v} = 0$. Tabii ki nokta $t = 0$ öncesi hareket ediyor, sonra da ediyor, yani bir hızı var, sadece “o anda” hızı yok.

Peki hız vektör olarak daha fazla bilgi veriyor olmasına rağmen, ben yine de klasik anlamda hızı, yani o tek sayıyı elde etmek istiyorsam ne yaparım? Hız vektörünün büyüklüğünü hesaplarım, $|\vec{v}|$.

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(t)} \end{aligned}$$

Bu formüle bakarak hizin nerede en fazla, en az oldugunu hesaplayabiliriz. Eger $t = 0$ ise, sonuc sifir olur. $t = \pi$ ise elimizde $\sqrt{4} = 2$ vardır, bu an noktanin tekerlegin en ustunde oldugu andir, bu an ayni zamanda en hizli hareket ettigimiz de andir. Hatta bu hiz tekerlegin saga dogru yatay gidis hizinin iki katidir, tekerlegin saga dogru birim hizda ilerledigini soylemistik, fakat nokta bunun ustune bir de merkeze gore bir donme hareketi icinde, ve bu iki etki birbirine eklenerek 2 hizina sebebiyet veriyor.

O nokta tepe noktasindan asagi inmeye baslayinca tabii ki noktamiz donusun “geriye dogru” olan etkisiyle toplami hizinda dusme yasiyor.

Ivme

Bu konuyu islemeden once klasik olarak bilinen ivme kavrami ile burada kullanacagimiz ivme kavrami ile ciddi uyusmazliklar oldugunu belirtmeliyim. Klasik anlayista ivme mesela bir arabada giderken “hissettigimiz sey” bizi koltuga iten kuvvet, hizdaki degisim (hizin turevi) olarak bilinir, ve eger bir arabada saatte 40 km ile gidiyorsam, ivme yok denir. Fakat simdi bu arabanin bir virajdan dondugunu farzedelim, bu durumda bir kuvvet hissederiz, hala saatte 40 ile gidiyor olabilirim, ama bir ivme vardır. Burada aslinda yana dogru bir hizlanma / ivme sozkonusudur. O zaman yine vektor kavramini kullanmamiz lazim.

Ivme vektorunu soyle belirtelim:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Fizikteki ivme tanimi da budur, $F = ma$ derken kastedilen a iste bu \vec{a} 'dir. Bir vektordur.

Cycloid'e donelim.

$$\vec{v} = \langle 1 - \cos(t), \sin(t) \rangle$$

Turevi alalim

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \langle \sin(t), \cos(t) \rangle$$

$t = 0$ noktasinda ivme nedir? $\langle 0, 1 \rangle$.



Yani $t = 0$ anındaki ivme bir birim vektor, ve yonu tam yukariya dogru. Bu ilginç bir şey, o anda hız sıfır, fakat bir ivme mevcut.

Bu arada, hemen belirtelim

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \neq \frac{d|\vec{r}|}{dt}$$

Yani bir vektorun turevinin buyuklugu, o vektorun buyuklugunun turevi ile ayni şey degildir. Esitsizligin sagindaki kavram zaten cogunlukla pek işe yarar bir şey degildir, hesaplanabilir, biraz sac bas yoldurabilir ama mumkundur, fakat cogunlukla kullanilmaz.

Egri Uzunlugu (Arc Length)

Egri uzunlugu bir egri uzerinde ne kadar yol katettigimizi gosteren bir buyukluktur. Mesela bir arabadaki ne kadar yol katettiginizi gosteren kilometre sayaci bunu arabanin hizini belli bir zaman uzerinden entegre ederek hesapliyor.

s = bir yol uzerinde katedilmis mesafe

Bunun anlami olmasi icin tabii ki bir sabit, referans noktasi dusunmeliyiz. Orijin noktasi bu nokta olabilir. Bu arada s referans noktasinin neresinde oldugumuza gore negatif olarak ta hesaplanabilir. Referansa kadar eksi, son-rasi arti olabilir mesela.

Peki s ile t , yani egri uzunlugu ve zamani nasil birbirine baglariz?

$$\frac{ds}{dt} = \text{hız} = |\vec{v}|$$

Yani birim zamanda katedilen egri uzunlugu hizdir [1].

Ama acik olmak gerekirse, aslinda turevin kesin degerini (absolute value) almak daha dogru olur (dikkat, vektor buyuklugu isareti degil, kesin deger

isareti bu sefer)

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = \text{hız} = |\vec{v}|$$

Niye? Belki bir egri uzerindeyiz ama o egri uzerindeki hareketimiz bir ileri bir geri seklinde. Bu durumda egri uzunlugunu surekli saymak istemeyiz, onu “cogalan (ileri), azalan (geri)” turunden bir buyukluk olarak gormek isteriz.

Egri uzunlugu hesabi icin hizi zaman uzerinden entegre ederiz. Mesela bir cycloid’in (resimde sari ile gosterilen) bir turunun uzunlugu ne kadar diye hesaplamak istiyorsak,

$$\vec{v} = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$$

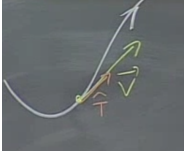
ifadesinin 0 ile 2π arasinda entegralini almamiz lazim.

$$\int_0^{2\pi} \vec{v} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt$$

Acikca soylemek gerekirse bunun entegrali analitik olarak nedir bilmiyoruz, ama ileriki derslerde bu hesabi yapmak icin fiyakali bir numara gorecegiz.

Gidisatin Birim Teget Vektoru

Notasyonda bu kavram cogunlukla \hat{T} olarak gosterilir. Sapka var cunku vektor birim vektor. T cunku “teget”.



Vektor \vec{v} gidisata (trajectory) zaten tegettir (dikkat, bu illa pozisyon vektoru \vec{r} a dik olacak anlamina gelmez, detaylar icin bu dersin sonundaki ornek sorulara bakin). \hat{T} bir anlamda bu vektorun sadece yonudur, o zaman \vec{v} ’nin yonu bize gerekli, demek ki onu birim vektor haline getirirsek, \hat{T} ’yi elde etmis oluruz.

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Bir suru kavram birikti. Bunlarin birbiriyle bir alakasi olmalı, onlardan

bahsedelim.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

Ustte zincirleme kanununu (chain rule) kullandik.

Biraz once goruk ki $ds/dt = |\vec{v}|$.

Eger

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} |\vec{v}|$$

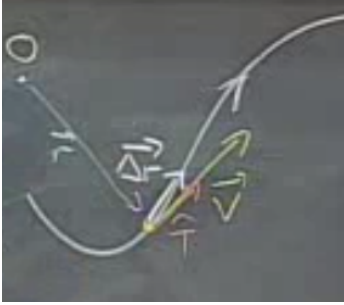
ise, vektor \vec{v} 'nin buyuklugunu oyle bir sey ile carpiyorum ki sonuc olarak vektorun kendisi ortaya cikiyor. O sey ne olabilir? Tabii ki vektorun birim vektor olarak gosterilecek yonu olabilir. Bu birim vektoru zaten hesaplamadik mi? Bu vektor \hat{T} 'den baskasi degil.

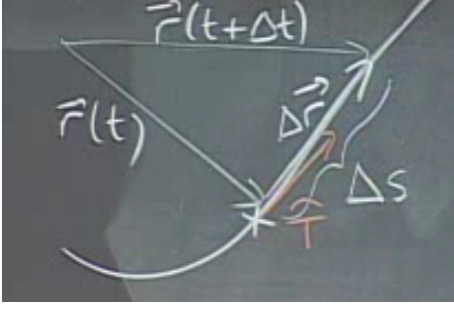
$$\vec{v} = \hat{T} |\vec{v}|$$

ya da

$$\vec{v} = \hat{T} \frac{ds}{dt}$$

Peki sezgisel olarak dusunursek, $d\vec{r}/dt$ niye \hat{T} 'ye esit olmalı? Alttaki grafiklere bakalim.





Yerimizi t anında $\vec{r}(t)$, Δt kadar bir adım atıyoruz, ve $\vec{r}(t + \Delta t)$ noktasına geliyoruz. Bu noktada eğri üzerinde katedilen mesafe Δs , o zaman

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \text{hız}$$

Yer vektörümüzün değişimi ise

$$\Delta \vec{r} \approx \hat{T} \Delta s$$

İki tarafı Δt ile bölersek

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \approx \hat{T} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ve $\Delta t \rightarrow 0$ olarak limitini alırsak, o zaman üsttekiler türev haline gelir, yaklaşık eşitlik olur. Yani

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{T} \frac{ds}{dt}$$

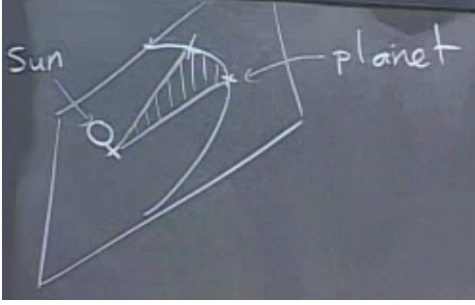
Peki bu tür konularda vektörler kullanalım. Aslında şimdiye kadar gördüklerimizi diğer yollarla da temsil edebilirdik. Fakat vektör “dili” özellikle hareketleri modellerken oldukça faydalı oluyorlar.

Örnek - Kepler’in İkinci Kanunu

Kanun 1609’da keşfedildi, yani pek yeni bir gelişme olduğu iddia edilemez. Kepler gezegenlerin hareketini modellemeye uğraşıyordu. Bazı insanlar gezegenler mükemmel bir çember içinde dönerler, vs. diyordu. Kepler gezegenlerin yörüngesinin çember değil elips (elliptik) olduğunu öne sürdü. Kepler’in Kanunu şöyle der:

Gezegenlerin hareketi bir düzlem üzerindedir, güneşten gezegene çekilebilecek bir hayali çizginin kapsadığı alanın büyümesi / asılması sabit bir oran-

dadir. Bu ilginç bir kanun çünkü bir kez yorungenin şeklini bilirsek, o yorunge üzerinde ne kadar hızlı gidebileceğimizi bize söylüyor.

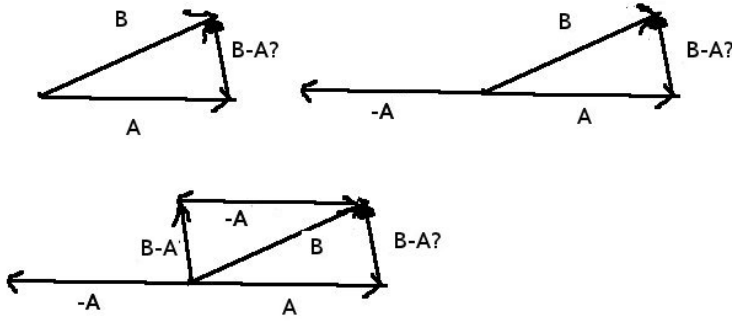


Üstteki şekle bakarsak, güneş (sun) etrafında bir gezegen (planet) var, ve katedilen yol taralı şekilde çizili. Kepler Kanunu şu anlama gelir, katedilen alan zamana orantılıdır, eğer gezegen güneşe daha yakın olsa, daha hızlı gitmek zorundadır, uzak olsa, daha yavaş gitmek zorundadır, ki katedilen alanın zamana oranı aynı kalsın. Niye? Eğer yakın olursak, güneşe direkt mesafe azalacaktır, boydan kaybettığımızı diğer yonden kazanmamız gerekir, yani aynı zamanda aynı alanı katetmek için bu sefer yorunde üzerine daha hızlı gidilmelidir, ki aynı alana erisebileyim. Tabii gezegenlerin akli yoktur, böyle olsun diye uğrasmazlar, Kepler gözlemlerini yaparken, modellerken değişmeyen bu büyüklüğü keşfetmiştir, ve sayede bazı hesapları temiz şekilde yapabilmesi mümkün olmuştur.

Biz de şimdi bu kanunu, mekanik / fizikten bugün bildiklerimizi kullanarak doğrulamaya çalışacağız. Newton, ki 1600'lu yılların sonlarında ortaya çıktı, bu durumu yerçekimi formülleri ile açıklamayı başardı.

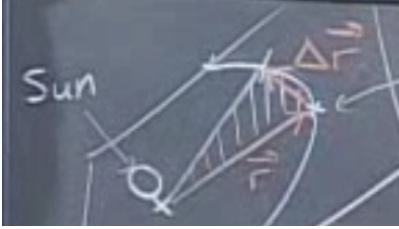
Şimdi vektörler kullanarak bu modeli yaratacağız ve Kepler'in onları kullanarak alan hesabının aslında ne kadar doğal / bariz olduğunu göreceğiz. Fakat Kepler bu kanunu ortaya atarken işler hiçbir bu kadar bariz değildi!

Tekrar bir pozisyon vektörü \vec{r} yaratalım, başlangıcı güneş, bitiş noktası gezegen olsun, katedilen yol $\Delta\vec{r}$ olsun. İlerlemeden önce iki vektörün \vec{r}_1 ve \vec{r}_2 gibi iki vektörün farkının $\Delta\vec{r}$ olup olamayacağını kontrol edelim. Birinci vektörü \vec{A} , ikinciye \vec{B} olarak görürsek, $\vec{B} - \vec{A}$ nasıl hesaplanır? Vektör toplamayı biliyoruz, $\vec{B} - \vec{A}$ aslında $\vec{B} + (-\vec{A})$.



Ustteki resimde 3. sekle bakarsak, katedilen mesafenin hakikaten iki vektor farki olarak gorulebilecegini anlariz.

Devam edelim: Katedilen alani nasil hesaplariz.



Sekilde cizdiklerimiz yeterince ipucu veriyor, yaklasiksal olarak bir ucgen olustu. Alan bir kenari \vec{r} , diger kenari $\Delta\vec{r}$ olan paralelogramin yarisi. Paralelogram hesabini yapmayi biliyoruz nasilsa,

$$\Delta t \text{ de Kapsanan Alan} \approx \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta\vec{r}|$$

ki Δt oldukca kucuk olmalı.

Ayrica

$$\Delta\vec{r} \approx \vec{v}\Delta t$$

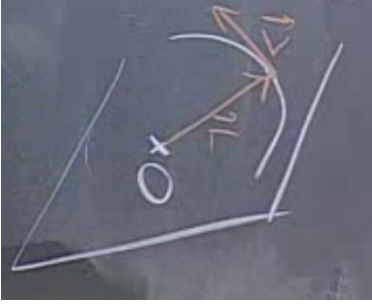
O zaman alan

$$\approx \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| \Delta t$$

Peki bu alanin zamana sabit oranda olmasi ne demektir? Alanin Δt 'ye oranli olmasi demektir, bu da ustteki formilde $|\vec{r} \times \vec{v}|$ teriminin sabit olmasi de-

mektir.

2. kanunu dusunelim, gezegenin yorungesinin hep ayni duzlem uzerinde oldugunu soyluyordu. Bu demektir ki $\vec{r} \times \vec{v}$ ile ortaya cikan ve bu ikisine normal (dik) olan ucuncu vektorun “yonu” hep ayni kalmalidir. Cunku iki vektor bir duzlem tanimlar, bu iki vektore dik olan duzleme de diktir, ve duzlem hic degismiyorsa bu vektorun yonu de degisemez.



O zaman hem buyukluk ayni, hem yon ayni, o zaman Kepler’in 2. Kanunu $\vec{r} \times \vec{v}$ bir sabit vektor demektir. Ne yonu ne buyuklugu degismeyecektir.

Turevler baglaminda bunu soyle soyleyebiliriz

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = 0$$

Turevler normal carpimlar icine nufuz ederken Carpim Kanunu (Product Rule) kullaniliyordu. Capraz carpimlar icin de ayni kural gecerli, yani ustteki

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Daha once turettigimiz esitlikleri usttekilerin yerine koyarsak

$$= \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = 0$$

Bir vektorun kendisi ile capraz carpimi her zaman sifirdir. O zaman $\vec{v} \times \vec{v} = 0$. Denklemden atilabilir. Geriye kalanlar

$$= \vec{r} \times \vec{a} = 0$$

Ustteki ifade ne zaman dogru olabilir? Ya da genel olarak iki vektorun capraz carpimi ne zaman sifirdir? Eger birbirlerine paraleller ise. Bu demektir ki ivme \vec{a} ile pozisyon \vec{r} birbirine paraleldir. Yani Kepler’in 2. Kanunu aslinda bunu soylemektedir.

Ve biz bugün yerçekim gücünün \vec{r} 'e paralel olduğunu biliyoruz, yani mesela güneşin bir gezegeni kendine doğru bir yönde çektiğini biliyoruz. Demek ki üstteki ifadenin sıfır olduğu da doğrudur.

Not: Bu arada paralellik hem çekim, hem itme için geçerli olurdu (her iki durumda da yön paralel). Hakikaten elektriksel alanda parçacıkların çekilmesi ve itilmesi bağlamında da Kepler'in Kanunu aynen işlemektedir.

Soru

Diyelim ki P noktası bir küre (sphere) üzerinde hareket ediyor ve

$$OP = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Hız vektörü \vec{v} 'nin her zaman pozisyon vektörü \vec{r} 'ye dik olduğunu x, y, z koordinatlarını kullanmadan ve alttaki eşitlikten faydalanarak

$$\frac{d}{dt}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \quad (1)$$

ispatlayın.

Cevap

Eğer \vec{r} ve \vec{v} birbirine dik ise, o zaman $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ demektir.

Bu arada hatırlayalım ki hız pozisyon vektörünün zamana göre türevidir.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Suradan bir giriş yapalım. Eğer üzerinde olunan kürenin yarıçapı a ise,

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = a^2$$

Üsttekinin formül 1'e göre türevini alalım

$$\frac{d}{dt}\vec{r} \cdot \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Sağ taraf sıfır çünkü sabit a^2 'nin türevi sıfır. Buradaki önemli gözlem şudur, eşitliğin sağ tarafı " t 'ye bağlı olmayan, sabit bir değerdir", bunu söyleyebiliriz, çünkü problem bir küre üzerinde gezinildiği bize söylemiş. Bu önemli bir puf noktası, bu bilgi sayesinde türevi alıp sağ tarafı sıfır yapabiliyoruz.

Devam edelim

$$2 \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$$

Demek ki iki vektor birbirine dik. 2 degeri formulden atildi, sag taraf sifir oldugu icin onemli degil.

Soru IJ-4

Bir onceki soruda ispatlananin tam ters yonunu ispatlayin. Eger \vec{r} ve \vec{v} dik ise, P 'nin hareketi kesinlikle bir kure uzerinde olmak zorundadir.

Cevap

Biliyoruz ki

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{r}|^2$$

Turevi alinca

$$\frac{d}{dt} \vec{r} \cdot \vec{r} = 0$$

Sag taraf sifir oldu cunku orada bir sabit vardi. Diger taraftan, eger diklik oldugunu biliyorsak su dogru olmalı

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$$

\vec{v} ayni zamanda pozisyonun turevidir, ustte yerine koyelim

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} = 0$$

Onceden gormustuk ki

$$2 \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r})$$

Bu denklemin sol tarafi iki ustteki formulun sol tarafina benziyor, o zaman

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = 0$$

Simdi sunu sorelim: Turevi sifir olan sey nedir? Bir sabittir.

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = c \text{ adinda bir sabit}$$

O zaman $|\vec{r}| = \sqrt{c}$.

Eger \vec{r} 'nin uzunlugu hic degismiyor ise, o zaman pozisyon bir kure uzerinde hareket ediyor olmalidir.

Soru 1I-1

P noktası sabit hız v (dikkat bu vektor degil) ile sabit vektor $a\hat{i} + b\hat{j}$ yonunde ilerliyor. Eger $t = 0$ anında x_0, y_0 'da isek, pozisyon vektoru $\vec{r}(t)$ nedir?

Cevap

Anahtar kelime “yon”. Sabit vektor “yonunde” gitmemiz isteniyor o zaman bu vektorun yonunu bulalım. Onu birim vektor haline getirirsek

$$\vec{u} = \frac{a\hat{i} + b\hat{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Yon bu. Bu yonde ilerlemek icin

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \langle x_0, y_0 \rangle + \vec{u}vt \\ &= \langle x_0, y_0 \rangle + \frac{(x_0 + avt)\hat{i} + (y_0 + bvt)\hat{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\end{aligned}$$

Problem 1I-3

Alttaki pozisyon vektorunun hareketini $t = -\infty$ ile ∞ arasinda giderken tarif edin. [Vektorun ucundan olan] P noktasinin xy denklemini verin, ve pozisyon vektorunun tanımladigi bu egrinin hangi bolumunun uzerinden gecildigini gosterin.

a)

$$\vec{r} = 2\cos^2(t)\hat{i} + \sin^2(t)\hat{j}$$

Cevap

$$x(t) = 2\cos^2(t)$$

$$y(t) = \sin^2(t)$$

Simdi t bazli denklemlerden x, y bazli denklemlere gecmek istiyorsak, t 'yi yoketmeliyiz, o zaman usttekini bir lineer denklem sistemi olarak gorebiliriz.

Eger ikinci denklemi 2 ile carpip toplarsak

$$x + 2y = 2$$

elde ederiz, cunku trigonometriden $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ oldugunu biliyoruz. Elde ettigimiz bir cizgiyi temsil eder, bu cizginin taranan kısmi \cos ve \sin 'in nerelerde en büyük olduguna baglidir. Bu iki fonksiyon uc noktalarda birbirinin tersi degerlere sahiptirler, biri 0 iken oteki 1 degerindedir, ve tam tersi, vs. O zaman x, y (0,1) ve (2,0) arasinda gidip gelinecektir, t ne olursa olsun.

Su kod olanlari animasyonlu olarak gosterecektir.

```
from pylab import *
import time

plt.ion()

xmax = 10.
xmin = -10.
D = 20
x = linspace(xmin, xmax, D)
xlim(-10,10)
ylim(-10,10)

for t in linspace(-3., 3., 30):
    plot(x, ((2. - x)/2.))
    plt.hold(True)
    xx=2*cos(t)**2
    yy=sin(t)**2
    quiver(0,0,xx,yy)
    plt.hold(True)
    plot(xx,yy, 'rd')
    plt.hold(True)
    plt.draw()
    time.sleep(1)
    plt.hold(False)
```

b)

$$\vec{r} = \cos(2t)\hat{i} + \cos(t)\hat{j}$$

Cevap

$$x = \cos(2t)$$

$$y = \cos(t)$$

Bir trigonometrik esitlik soyledir

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$$

$$= 2\cos^2(t) - 1$$

O zaman

$$x = 2\cos^2(t) - 1$$

$$y = \cos(t)$$

Eger y 'nin karesini alip -2 ile carparsak

$$x = 2\cos^2(t) - 1$$

$$-2y^2 = -2\cos^2(t)$$

ve ustteki x ile toplarsak \cos terimleri iptal olur

$$x - 2y^2 = -1$$

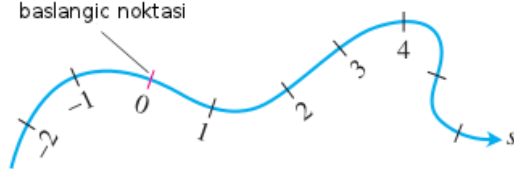
$$x = 2y^2 - 1$$

Bu bir parabol. Uc noktaları bulmak için y için -1,0,1 degerlerini koyup sonuca bakariz, ve en uc noktaların (1,1) ve (1,-1) olacagini goruruz.

Kaynaklar

[1] Thomas Calculus, 11. Baski, sf. 932

Eger $ds/dt = |\vec{v}|$ iliskisi anlasilmadiysa, baska bir yonden, biraz daha detayli bir aciklama soyle. Katedilen mesafeyi parametrize edilmiş bir $\vec{r}(t)$ 'nin taradigi sonsuz kucuklukteki parçaların birlesimi olarak gorelim.



Bu parçalar parametrize halde dx/dt , dy/dt ve dz/dt olmayacak midir? O zaman sonsuz küçüklükteki ds , bir parçanın uzunluğu şöyledir

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

a ve b arasındaki t için, bunu entegralini alabiliriz

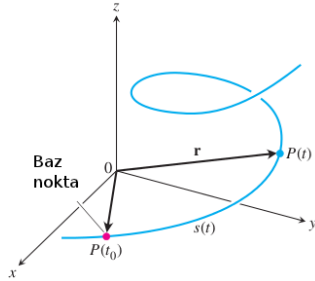
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Dikkatle bakarsak, mesela dx/dt sonucu $\vec{r}(t)$ 'nin turevini aldığımızda ele geçen \vec{v} içindeki \hat{i} 'in ögesidir, aynı şekilde \hat{j}, \hat{k} . O zaman üstteki sonucu \vec{v} formuna da çevirebiliriz:

$$L = \int_a^b |\vec{v}| dt$$

Eğer bir uzunluk formulu s 'i t 'ye bağlı olarak yazmak istersek, entegralin üst sınırını t yaparız,

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{v}(\tau)| d\tau$$



O zaman ds/dt nedir? $s(t)$ formülünün turevidir. Calculus'un Temel Teorisi'ne

gore entegral yokolur ve elimize gecen

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{v}(t)|$$

ki bu sonuc mantikli.

Hiz taniminda t_0 'in hicbir onemi kalmadigina dikkat, bu baslangic noktasi $s(t)$ icin onemliydi, cunku toplam uzunluk icin ona ihtiyac vardir, fakat bir parcacigin bir yolu katetme orani (hiz) baslangictan ne kadar uzakta oldugundan bagimsiz.

Soru 1J-7

Turevi alinabilen pozisyon vektoru $\vec{r}(t)$ veriliyor. t 'nin ayni zamanda s sonucunu vermesinin sartlari nelerdir?

Cevap

Sart hiz buyuklugunun yani $|v| = 1$ olmasidir, kontrol edelim.

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = |v| = 1$$

$$ds = dt$$

$$\int ds = \int dt$$

$$t = s + c$$

$t = 0$ iken $s = 0$ olduguna gore $c = 0$. O zaman

$$t = s$$

Egzersizler 13.3, Soru 11, Thomas' Calculus

$\vec{r}(t) = 4\cos t \hat{i} + 4\sin t \hat{j} + 3t \hat{k}$ egrisinin uzunlugunu, yani s 'yi $0 \leq t \leq \pi/2$ araligi icin bul.

Su formulu kullanacagiz

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\vec{v}(\tau)| d\tau$$

Once \vec{v} lazim. Biliyoruz ki

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

O zaman $\vec{r}(t)$ 'nin turevi

$$\vec{v} = -4\sin(t)\hat{i} + 4\cos(t)\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$|v| = \sqrt{16\sin^2t + 16\cos^2t + 9} = \sqrt{16(\sin^2t + \cos^2t) + 9} =$$

$$= \sqrt{16(1) + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$s(t) = \int_0^t 5 \, d\tau = 5t$$

$$s(\pi/2) = 5(\pi/2)$$