

## PDE - Ders 1

Konumuz Kismi Turevsel Denklemler (partial differential equations -PDE-). Bu dersin on gerekliliklerinden en onemlisi normal diferansiyel denklemlerdir (ordinary differential equations -ODE-), cunku pek cok PDE'yi cozenin teknigi onlari bir ODE sistemine indirgemekten geciyor. Yani PDE cozmek icin ODE cozme tekniklerini de bilmek gerekiyor. Bir diger gerekli bilgi Lineer Cebir dersi.

Bu dersin ana amaci, bir muhendislik dersi olarak, denklem cozmek, ve pek cok denklemin cikis noktasini fiziksel problemler. Mesela sicaklik yayilmasi (heat diffusion), dalga hareketi (wave motion), titreten hucre zarini (vibrating membrane) gibi. Fakat PDE kavrami finansta bile ortaya cikabilen bir kavram, mesela Black-Sholes denklemlerinde oldugu gibi.

Yani dersimiz cok teori odakli olmayacak, bazi ispatlardan bahsedecegiz, ama onun haricinde teori uzerinde fazla durmayacagiz.

PDE nedir? Ilk once ODE tanimindan baslayalim.

$$y = y(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Baslangic sartlari

$$y(0) = y_0$$

Cozum

$$y = y_0 e^x$$

Bu bir ODE cunku sadece bir tane bagimsiz degisken var ( $x$ ), ve bir tane bagimli degisken var ( $y$ ).

PDE ise icinde kismi turevleri, ve bir veya *birden fazla* bagimsiz degiskeni barindiran bir denklemdir.

Eger gunes etrafındaki yorungeleri temsil etmek istiyorsanız gezegenleri boyutsuz parçacıklar gibi kabul ederek ODE'ler ile temsil etmek yeterli olabilir, ama diğer problemlerde daha fazla bağımsız değişken gerekeceği için ODE yetmez, mesela zaman, cismin 3D uzaydaki boyutları gibi.

Mesela bir PDE

$$u = u(x, y)$$

Cogunlukla problem taniminin ilk basinda fonksiyonel iliskiye hemen goster-mek iyi olur, mesela ustte bagimsiz degiskenler  $x, y$ , ve  $u$  bu iki degiskene bagimli. Devam edelim PDE soyle olsun

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cos(y) \frac{\partial u}{\partial y} + 3 = 0$$

Bir PDE problemine cogunlukla ek olarak sinir kosullari (boundary condition -BC-) ve baslangic kosullari (initial conditions -IC-) eklemek de gerekir.

Kismi Turev nedir?

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{u(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Yani bir fonksiyonun kismi turevini almak istedigimiz degisken haricinde tum diger degiskenlerinin sabit tutuldugu bir durum.

Ornek

$$u = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2x_1 + \sin(x_2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 \cos(x_2)$$

Notasyon

Cogunlukla kismi turevler 3 farkli sekilde gosteriliyor.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x \equiv \partial_x u$$

Ustte soldaki tanimi gorduk, bazen ortadaki de tercih edilebiliyor, ya da bazen en sagdaki.

PDE Derecesi

Bir PDE'nin derecesi, o denklemdaki kismi turevlerin en yuksek dereceli

olanin derecesi neyse o'dur.

Mesela

$$u_{xxx} + u_y = 5$$

derecesi 3. Ayni zamanda bu lineer ve homojen olmayan (inhomogeneous) bir PDE. Bu son iki kavrami birazdan tanımlayacağım.

Ornek

$$(u_{xx})^2 + u_x u_y = u$$

Bu 2. derece. Bu bazı insanların kafasını karıştırıyor, çünkü  $u_{xx}$ 'in karesi var. Bu aynı zamanda homojen, ve gayri lineer. Bu dersteki çoğu PDE lineer olacak.

Lineer ve gayri lineerlikten bahsetmişken, sunu ekleyelim.



Şimdi diyelim ki bir girdi (input) fonksiyonu  $I(t)$  bir işleme giriyor ( $L$  operatörü) ve çıktı (output) olarak  $R(t)$  çıkıyor. Yani sistem

$$R = \mathcal{L} I$$

Bir lineer sistemde eğer girdiyi iki ile çarparsanız, çıktı da iki katına çıkar. O zaman kurallar

1.  $\mathcal{L}(\alpha I) = \alpha \mathcal{L}(I)$ , ki  $\alpha$  bir sabit.
2.  $\mathcal{L}(I_1 + I_2) = \mathcal{L}(I_1) + \mathcal{L}(I_2)$ , ki buna üst üste eklenebilme (superposition) prensibi deniyor. Bu prensibi bu dersteki çoğu PDE'yi çözmek için kullanacağız. Bir lineer sistem varsa çoğu zaman arka planda bir yerlerde üst üste eklenebilme prensibi geziniyordur.

Diyelim ki PDE'nizi şöyle yazdınız

$$\mathcal{L}u = f(\vec{x})$$

Burada  $u$  bagimli degisken,  $\vec{x}$  bir vektor,  $\vec{x} \in \Re^n$ , ve bu vektorun icinde birden fazla degisken var, bu degiskenlerin hepsi bagimsiz.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1, \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Bu denkleme benzer bir diger denklem lineer cebirdeki  $A\vec{x} = \vec{b}$  denklemdir. PDE sisteminde de cevabini aradigimiz, lineer cebir sisteminde “ $A$  ile carpilip  $b$  sonucunu verecek  $\vec{x}$  hangisidir?” sorusuna benzer bir sekilde “ $\mathcal{L}$  operatoru uygulanip  $f(\vec{x})$  sonucunu verecek  $u$  hangisidir?” sorusudur.

Bu analogiden devam etmek gerekirse, belli bir noktada  $u$ ’nun icinde oldugu “fonksiyon uzayi” hakkında dusunmemiz gerekebilir,  $\vec{x}$ ’in icinde oldugu  $\Re^n$  uzayi gibi. Lineer cebir durumunda operatorun ozelliklerine bakilir, mesela “ $b$ ’nin icinde oldugu ve  $A$  operatoru uygulanip hic sonuc alinamayacak uzayin belli kismilari var midir?” gibi sorularla ugrasilabilir, bunlar  $A$ ’nin “ulasamadigi yerlerdir” vs. PDE’deki  $\mathcal{L}$  operatoru icin de benzer sorular sorulabilir.

Yani lineer cebirle pek cok kavram PDE dunyasina benziyor, orada vektor uzayi var, burada fonksiyon uzayi var. Yani bir analogi olarak bu benzerligi aklimizda tutmamiz faydali.

Bir operator su sekilde de olabilir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, u, \dots\right)$$

Yani operator kismi turevlere ve hatta  $u$ ’nun kendisine de bagimli olabilir.

Eger elimizde gayri lineer bir PDE var ise, basimiz dertte demektir. Boyle bir sistemi cozmek icin cogunlukla sayisal cozumlere basvurmak gerekir. Eger lineer ise cozumde bayagi ilerlemek mumkundur.

Lineerlik

Bir operator ve onun tanimladigi bir ust uste eklenebilme durumu dusunelim

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \mathcal{L}u_1 + \alpha_2 \mathcal{L}u_2$$

ki  $\alpha_1, \alpha_2$  birer tekil sayidir (scalar), ya reel, ya da kompleks.

Ornek

Birazdan bakacagimiz denklem dalga denklemi. Orada

$$u_{tt} - c^2 u_x = 0$$

Bu denklemi

$$\mathcal{L}u = 0$$

sekinde yazabiliriz ki  $\mathcal{L}$  soyle tanimli olacaktir

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0$$

$c$  bir sabittir.

Simdi diyelim ki su denklemi cozmemiz lazim

$$\mathcal{L}u = f$$

ki

$$\mathcal{L} : V \rightarrow V$$

Yani,  $\mathcal{L}$  bir vektor uzayini bir digerine eslemekte (map), ve yine diyelim ki bu uzaylar birer Hilbert Uzayi (bunun anlamina simdi bilmemiz gerekmiyor, ileride bu konuya donecegiz, bu kelimeyi soyle bir ortaya atmak istedim).

Yani sordugumuz Hilbert Uzayi  $V$ 'de bir  $f$ 'e esleyecek bir  $u$  fonksiyonu olup olmadigi. Bu arada tipik bir Hilbert Uzayi mesela kare alip bir sinir bolgesinde (boundary domain) entegre edince elde edilen sonlu (finite) bir sonuclarin olusturdugu uzay. Yani "derli toplu" fonksiyonlar bir anlamda, absurt sonuclar vermeyen turden, sonsuzluga dogru patlayip giden turden olanlari degil.

Faraziyeve devam edelim, diyelim ki  $V$  icinde bir baz (basis) var. Baz nedir? Lineer cebirden hatirlayalim, mesela uc boyutlu Oklidsel (Euclidian) uzayi  $\mathbb{R}^3$ .



$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Bu uzaydaki herhangi bir vektor  $\vec{r}$  ustteki uc baz vektoru kullanilarak parcalarina ayirilabilir, ya da, onlarin bir lineer kombinasyonu olarak gosterilebilir. Mesela

$$\vec{r} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

Bu uc vektorun bu uzay icin bir “baz olusturdugu” soylenebilir, cunku bu uzaydaki her vektor bu uc vektorun bir kombinasyonu olarak temsil edilebilir. Dikkat edelim, iki baz vektor yeterli olmazdi, dort taneye gerek yok. Tami tamina uc tane vektor bu uzayin bazini olusturuyor.

Bu sonlu (finite) miktarda bir uzay, herhangi bir vektörü tanımlamak için sonlu miktarda baz vektörü yeterli. Sonsuz boyutlu bir uzay da olabilirdi, o zaman herhangi bir fonksiyonu tanımlamak için sonsuz tane baz vektörü gerekirdi. Mesela Fourier Serilerini düşünelim

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \phi_i(x)$$

ki baz fonksiyonlar  $\left\{ \phi_i(x) \right\}_{i=1}^{\infty}$ .

Bu fonksiyonların her biri trigonometrik fonksiyonlar olabilir (cos, sin) gibi, o zaman seri Fourier Serisi olur. Her halukarda, yukarıdaki tanımla diyoruz ki belli (unique)  $\alpha$  değerleri var ki, o değerleri zaten önceden bilinen baz fonksiyonları ile carpip toplayarak  $u$ 'yu oluşturabiliyoruz.

Eğer lineer operatörümüzü hatırlarsak

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \mathcal{L}u_1 + \alpha_2 \mathcal{L}u_2$$

Bu operatör herhangi iki katsayıyı kullanıyordu, fakat iki üstteki sonsuz tane toplamı da içerecek şekilde genişletilebilir, ve baz kavramı ile üst üste eklenbilme kavramının arasındaki alakayı gösterir.

Diyelim ki  $\mathcal{L}$ 'nin her baz vektörünü nasıl esledigini biliyoruz,

$$\mathcal{L}\phi_i = -\lambda_i \phi_i$$

Üstteki ifade  $\phi$ 'in  $L$ 'in özfonksiyonu olduğunu söylüyor aynı zamanda. Eğer alttaki acilimi yaparsak, ki bunu yapabiliriz çünkü  $\phi$ 'ler bazdırlar,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= \mathcal{L}\left(\sum_i \alpha_i \phi_i(x)\right) = \sum_i \alpha_i \left(\mathcal{L}\phi_i\right) \\ &= -\sum_i \alpha_i \lambda_i \phi_i \end{aligned}$$

Bir operatörün herhangi bir baz üzerinde nasıl işlem yaptığını anladığımız anda, o zaman  $\mathcal{L}$ 'in herhangi bir  $u$  fonksiyonu üzerinde ne etki yaptığını bilebiliriz. Diğer bir deyişle bir uzayda sonsuz tane fonksiyon olabilir, ama biz operatörümüzün bazlara nasıl etki ettigini biliyorsak, o bazlarla oluşturulan tüm fonksiyonlara nasıl etki ettiğini de biliyoruz demektir.

Tekrar belirtelim, bu sadece  $\mathcal{L}$  lineer bir operatör olduğu zaman mümkün.

Ornek

Klasik Burger denklemi

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

Denklemini

$$\mathcal{L}u = 0$$

olarak yazabiliriz, ki

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Bu gayri lineer

Ornek

$$u_{xx} + u_{yy} + \sin(u)$$

$$\mathcal{L}u = 0$$

$$\mathcal{L} = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \sin(\cdot)$$

Ustteki ilginç bir durum sinus fonksiyonun da içi boş halde, operatör olarak kullanılmış olması. Operatör tanımında bazen böyle nokta konulduğu oluyor, ki neyin üzerinde operasyon yapıldığı anlaşılsın diye, mesela üstteki şöyle de gösteriliyor bazen

$$\mathcal{L} = \partial \cdot_{xx} + \partial \cdot_{yy} + \sin(\cdot)$$

Bu da gayri lineer çünkü sin fonksiyonu lineer değil, yani

$$\sin(u_1 + u_2) \neq \sin(u_1) + \sin(u_2)$$

Lineerlik üzerinde çok duruyoruz çünkü diferansiyel denklemimiz hakkında bilmemiz gereken en önemli bilgilerden / ipuçlarından biri bu, çünkü denkleminizin lineer ya da gayri lineer olması, bizi çok farklı çözüm teknikleri kullanmaya itecek.

Bir diğer önemli terim homojen (homogeneous), homojen olmayan (inhomogeneous) kavramı.

Homojenlik

Eğer  $u = 0$  bir çözüm ise PDE homojendir.



Yani  $\mathcal{L}u = f(\vec{x})$  denklem taniminda eger  $f(\vec{x}) = 0$  ise PDE homojendir.

Ornek

$$u_{xx} + u_y^2 = xu$$

Denklem 2. derece, gayri lineer cunku bir kare var, ve homojen cunku  $u = 0$ 'in bir cozum oldugunu gorebiliyoruz.

Ornek

$$u_x^2 + u_y = 6y \sin\left(\frac{x^3}{5}\right)$$

PDE 1. derece, gayri lineer, ve homojen degil.

Soru

Bagimsiz degiskenlere bagli bir lineer operator olabilir mi?

Cevap

Evet. Mesela  $u = u(x, y)$ , ve denklem  $xu_x + u_y = u$ .

Bu homojen bir denklem, ve  $\mathcal{L}u = 0$  olarak gosterilebilen bir denklem, ve

$$\mathcal{L} = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - 1$$

ve goruldugu uzere operator taniminda bagimsiz degisken  $x$  var.

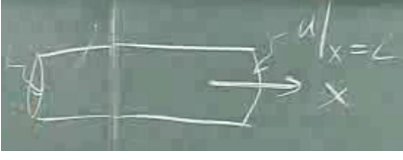
Bu lineer bir operator. Lineerligin bagli oldugu sey bagimli degiskenler, bagimsizlar degil, mesela ustteki  $x$ ,  $x^3$  gibi bir sey olabilirdi ama problem hala lineer olurdu.

Sinir kosullari da bu baglamda cok onemli, mesela diyelim ki tanimi lineer olan bir PDE var, ama problem tanimindaki sinir kosullari eger fonksiyonun gayri lineer bir kombinasyonunu iceriyorsa o zaman problemin tamami gayri lineer hale gelir.

Biraz formel olarak dusunursek, mesela tek boyutlu isi denklemi

$$u_t = ku_{xx}$$

ki  $x$  mesafe belirten degisken,  $t$  zaman,



Bu denklem üstteki gibi bir borudaki isinin dağılımını, akisini gösteriyor olsun.  $u|_{x=L}$  ile gösterilen bir sınır şartı, yani  $L$  uzunluktaki borunun en ucunda (sağındaki) olması şart olan ısı seviyesi. Mesela bu şart  $u|_{x=L} = T_2$  olsun, ki  $T_2$  bir tekil sayı,  $100^\circ$ ,  $200^\circ$  gibi. Şimdi homojenliğe ne oldu? Ana denklem homojen, ama homojenlik testini sınır şartına uyguladığımız zaman  $0 = T_2$  gibi bir sonuç alıyoruz, ki bu absürt bir sonuç demek ki sınır şartı homojen değil. O zaman bu problemin tamamı homojen olamaz.

Aslında formel olarak sınır şartlarını alıp

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - k\partial_{xx}$$

operator tanımına bir şekilde dahil etmenin yolları var, ama biz bunlar çok ileri seviye teknikler, bu derste bu teknikleri görmeyeceğiz.