Logaritmayı Taylor Serisi İle Hesaplamak

Taylor açılımı tekniğini ilk gördüğümüzde öğrenci genelde kendine şu soruyu sorar: "İyi ama, bu ne işe yarar?" Taylor serilerini ilginç kılan özellik, bir formülü bir başkasına dönüştürmemizi sağlamaları, ve, genelde sonsuz olmayan bir formülü, sonsuza kadar devam eden terimlerin toplamı olan başka bir formül ile değiştirmemizi sağlamalarıdır.

Sonsuza kadar devam eden terimler toplamı, karışık bir durumdur. Teklikten, çokluğa niye gidilmektedir? Bu sonsuz terimler dizisi ne işe yaramaktadır? Öğrenciye göre, düzenden, düzensizliğe gidilmiştir. Niçin? Bu tür sorular, Taylor serilerinin tanıştırıldığı her derste cevaplanmalıdır. Bu yazıda, Taylor serisinin ne işe yaradığını, hangi problemler için kullanıldığını, ve ait olduğu matematiksel dünyanın hangisi olduğunu göreceğiz.

Yaklaşıklamak (Approximation)

Yaklaşıklamak, bir değeri, fonksiyonu, matematiksel bir kavramın yerine ona yakın, aşağı yukarı eşit olan başka bir değeri/fonksiyonu/kavramı koymak demektir. Gündelik hayatta bazı sayıları sürekli başkaları ile yaklaşıklamaya uğraşmaktayız. Mesela bir alan, uzunluk, hacim, vs. gibi şeyler ölçerken, mecburen yaklaşıksal kavramlar ile yüzyüze gelmekteyiz. Normalde gündelik hayatımızda sadece tamsayılar ve tamsayıların bölümü olarak gösterilebilecek rasyonel sayılar kullanırız, fakat matematikte rasyonel sayıların yanında, irrasyonel sayılar da mevcuttur. Ölçümlerimiz sırasında irrasyonel sayılar ortaya çıkmasalar da, teorik argümanlarımız ve işlemlerimiz çoğunlukla bizi o yöne doğru itiverir. Yarıçapı 1/2 olan bir çemberin uzunluğu pi denilen 'irrasyonel' sayıdır, ya da iki kenarı eşit, bir birim uzunluğunda olan dik üçgenin hipotenüsü 2'nin kareköküdür, bu sayı da irrasyonel bir sayıdır. "İrrasyonel" kelimesinin İngilizce'de 'deli', 'üşütük', veya 'mantıksız' olarak karşılık bulması da ilginçtir. İrrasyonel sayılar virgülden sonra bile sonsuza kadar devam etmektedirler [3].

Bu sebeple, irrasyonel sayılar ile işlem yaparken, onları 'rasyonel' bir sayı ile yaklaşıklamak gerekir. Bunu yapmak için çoğu zaman virgülden sonra belli bir basamak sonrasını atarız [3].

Başka bir alanı ele alalım: Doğa bilimleri sürekli fonksiyonlar ile bir yaklaşıklama eylemi içindedirler. Doğanın ölçümsel gizemleri matematikte bir fonksiyon olarak gösterilir, ve bu fonksiyonlar hiçbir zaman kesinkes, tıpatıp her seviyede ve her molekülü anlatan betimler değildir. Elde olan, yaklaşıksal olarak ve şartlara göre kesinlik derecesi bazen çok, bazen daha fazla olan bir ibaredir [3].

Bâzen de, doğal şartlara hiç alâkası olmayan "pür matematiksel" bir fonksiyonu başka bir fonksiyon ile değiştirmeye mecbur kalabiliriz. Bunu da, genelde başlangıç fonksiyonunu hesaplayabilmek için yaparız [3].

Taylor Serisi

İşte bu fonksiyonel yaklaşıklamanın en gözde araçlarından biri olan Taylor Serisini göreceğiz. Not olarak belirtmek gerekir ki, yaklaşıklamak için Taylor Serileri haricinde

başka teknikler de vardır. Kimi teknikler bize fonksiyonları tümlevler ile yaklaşıklamamızı sağlar, kimisi türevsel denklemler ile yeni bir fonksiyon yaratmamızı sağlar. Dalga fonksiyonlarını yaklaşıklamak için Forier Serileri vardır [3]. Bu yazımızın konusu sadece Taylor Serileri olacak.

Taylor Serileri bir fonksiyonu, eğer şartlar uygun ise, cebirsel polinom denen başka bir fonksiyon ile değiştirmeye yarar. Bir cebirsel polinom şöyle gözükür.

$P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$

Not: $a_0, a_1, ..a_n$ sayıları sabit sayılardır, ve x'ten bağımsızdırlar.

Gördüğümüz gibi cebirsel polinomların çok basit bir yapısı var, ve eğer bir cebirsel polinomu hesaplamak istersek, bize lazım olan yegâne aritmetik işlemi toplama, çıkarma ve çarpma olacaktır. Mühendislik ve uygulamalı bilimde bu hesapsal basitlik çok önemlidir. Cebirsel polinomların, yaklaşıklama için çok popüler hedefler olmaları bu yüzden raslantı değildir.

Bilgisayarların hesaplama işinde çok iyi olduğu bilinir, fakat bilgisayarlar yorulmaksızın hesap yapsalar da, aslında hesapları temelde çok basit işlemlere dayanır. Bilgisayarlar, sonsuza giden limitler ile işlem yapamazlar, o yüzden meselâ, bilgisayarlar log(x) fonksiyonunun kesin hesabını yapamaz. Fakat biz log(x)'i matematiksel olarak yaklaşık bir şekilde P(x) ile temsil edersek, bu polinomu bilgisayara çok hızlı bir şekilde hesaplattırabiliriz, ve bu hesabı, istediğimiz kesinlik derecesi üzerinden yaptırabiliriz [3].

Kesinlik derecesini nasıl ayarlarız? Taylor Serisi sonsuza giden terimler toplamı değil midir? Evet. O zaman yaklaşıklamanın detayını arttırmak istersek, terim sayısını fazla tutarız. Eğer çok kaba bir hesap istersek, az sayıda terimle, mesela 4-5 terim ile yetiniriz, ve gerisini atarız (bunun benzeri bir işlemi teorik fizikçiler bile bazen yapmaktadır)

Taylor Serisinin Temeli

Diyelim ki, bir aralık içinde her dereceden türevi mevcut olan fonksiyon f, ve gene aynı aralıktaki bir a noktası olsun. Şimdi, şu ikinci fonksiyona dikkat edelim [2].

$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

Bu fonksiyon, $x = a$ noktasında $f(a)$ ile aynı değeri verir. Aynı şekilde, p1 fonksiyonunun a noktası üzerindeki birinci türevi, f fonksiyonunkinin birinci türevi ile de aynıdır. Değil mi? Bunu kontrol edelim [2].

$F()$ için, $x = a$ koyarsanız, $(x - a)$ sıfır olup yokolacak (sabit olan $f'(a)$'yi y_1 yanında götürerek), geriye sadece $f(a)$ kalacaktır. Güzel. Şimdi birinci türevin eşitliğini kontrol edelim: Birinci türev sabit $f(a)$'yı yokeder, tek değişken olan x türevi alınınca 1'e gelir (ama 0 olmaz) ve bu sayede geriye sadece $f'(a)$ kalır. Yani $f(a)$'nın birinci türevi ile aynı şey olur!

Harika.

Şimdi, $f()$'e "biraz daha" yaklaşmaya uğraşalım. Öyle yeni bir fonksiyon p_2 bulalım

ki, p_2'nin hem a noktasındaki fonksiyon değeri, hem birinci türevi, hem de ikinci türevi, f fonksiyonu ile aynı olsun.

$$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Bu fonksiyonun da x=a değerinin, ve birinci, ikinci türevinin aynı olduğunu kontrol edebilirsiniz.

Herhalde tekrar eden fikri görmeye başladınız. Eğer üçüncü türeve gidersek, durum şöyle olurdu:

$$p_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

Niye üçüncü terimde bölen 6? (3 olabilirdi). Bunun sebebi şöyle: p_3'ün türevini üç kere kere alırsak, en sondaki $(x-a)$'nın üstel değeri olan 3 aşağı inecek (çarpan olarak) 2 kalacak, sonra ikinci türev sırasında 2 aşağı inecek 1 kalacak, ve en son olarak x^1 kalacağı için x'te üçüncü türev sırasında yokolacaktır. Yani çarpanlar $3 * 2 * 1 = 6$ değerini verirler. Bizim yeni fonksiyonumuzun da üçüncü türevden sonra elimizde $f'''(a)$ bırakması için, açılımın bu gelecek olan 6'yı bekliyor olması gerekir, yani bölen olarak karşılaması (6/6 olarak).

Aynı mantığı takip edersek, 5. türevden bahsediyor olsaydık,5*4*3*2*1 gerekecekti, vs..vs. Bu kavramı sembolik cebirsel olarak en rahat '!' operasyonu ile gösterebiliriz. Açılımın en son hali şöyle olur.

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + .. + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

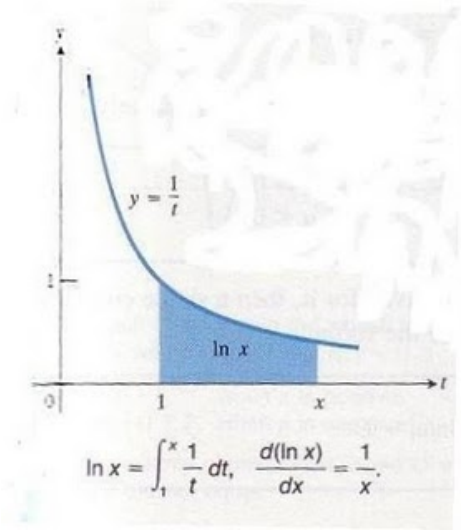
Şimdi Taylor serileri hakkında şu genel soruyu sorabiliriz. Eğer iki fonksiyon p ve f, iki noktada aynı değeri taşıyorsa, ve aynı noktadaki bütün türevlerinin değeri aynı ise, eşit midirler?

Evet! En azından, $x = a$ (ve bu noktaya yakın noktalar) için bu durum böyledir. Analizden öğrendiğimiz gibi, bir fonksiyonun türevi onun artış oranını gösterir, bu artışın aşağı mı yukarı mı olduğunu ikinci türev gösterir, vs..vs. Türevler bize bir fonksiyon hakkında birçok şey söylemektedir. Türevler bir nevi fonksiyonun "aynasıdırlar". İki fonksiyonun aynası ne kadar çok birbirine benzer görüntüler gösteriyorsa, bu iki fonksiyon birbirine o kadar yakın demektir. Tabii, yaklaşıksal tekniği kullanan biz (matematikçi/bilimci/mühendis), ne kadar yaklaşmak istediğimizi Taylor Serisinde tuttuğumuz terim sayısı ile rahatça ayarlayabiliyoruz.

Şimdi yaklaşıklamak istediğimiz log() fonksiyonuna gelelim.

Log Nedir?

$Log(x)$ fonksiyonu en basit şekilde $f(t) = 1/t$ fonksiyonunun, 1 değeri ile x değeri arasında kalan alanıdır [4]. Yani, bu fonksiyonunun tümlevinin 1 ile x değeri arasındaki değeridir (tümlevin alan hesapladığını lise matematiğinden biliyoruz).



Sembolik olarak logaritma fonksiyonu, çarpma işlemlerini toplamaya çevirmemizi sağladığı için matematiksel olarak çok yararlı bir araçtır. Zaten, keşfedilme sebebi de budur. Bu yaygın kullanım, uygulamalar için logaritmanın bir aşamada hesaplanmasını gerektirmektedir. Fakat, görüldüğü gibi 1/t fonksiyonu tümlev işleminden sonra güzel bir matematiksel fonksiyona dönüşmediği için, yaklaşıksal yöntemlere gereksinim duymaktayız. Taylor açılımı işte burada imdadımıza yetişmektedir.

Örnek olarak, log(20) işleminin sonucunu Taylor serisinin yardımı ile hesaplayacağız. Niye Taylor açılımı? Çünkü log fonksiyonunun her dereceden türevi mevcut, Taylor açılımı için de bu türevler lazım.

Log'un Açılımı

Log fonksiyonunu nasıl açarken, amatör bir başlangıç şöyle olabilirdi. Dikkat edelim, şu anda sadece sembolik olarak işlem yapıyoruz.

$f(x) = log(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = \frac{-1}{x^2}, f'''(x) = ..$

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$

$f(x) \approx log(a) + \frac{1}{a}(x-a) + \frac{\frac{-1}{a^2}}{2!}(x-a)^2$

Bu pek derli toplu bir açılım olarak gözükmüyor. $a = 0$ seçersek,

$f(x) \approx log(a) + \frac{1}{a}(x-a) + \frac{\frac{-1}{a^2}}{2!}(x-a)^2 + ..$

$f(x) \approx log(0) + \frac{1}{a}x + \frac{\frac{-1}{0^2}}{2!}(x)^2 + ..$

çıkar. $log(0)$ tanımsızdır. Yani, bu açılım işimize yaramayacak. Daha temiz bir açılım için, matematikçiler şu yöntemi bulmuştur.

$log(x)$ yerine, $log(1+x)$ kullanalım.

$f(x) = log(1+x)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}, f''(x) = \frac{-1}{1+x}^{2}, f'''(x) = ...$

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$

$a = 0$ alirsak

$f(x) \approx log(1+a) + \frac{1}{1+a}(x-a) + \frac{\frac{-1}{(1+a)^2}}{2!}(x-a)^2$

$f(x) \approx log(1) + \frac{1}{1}(x) + \frac{\frac{-1}{1^2}}{2!}(x)^2$

$f(x) \approx 0 + \frac{1}{1}(x)\frac{\frac{-1}{1^2}}{2!}(x)^2$

$f(x) \approx x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}...$

Bu çok daha temiz oldu. Dikkat ederseniz, entegrali düzgün olmayan $log()$ fonksiyonunun Taylor açımı ne kadar temiz oldu. Bu fonksiyonu bilgisayar ile hesaplamak çok basittir. Artık log(20)'yi hesaplamaya hazırız.

$f(x) \approx x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}...$

$log(20) \approx 20 - \frac{20^2}{2!} + \frac{20^3}{3!}...$

Ama dikkat! Açılan fonksiyonunu hesaplarken x'e verdiğimiz değerin a noktasına yakın olması önemlidir.

Çok uzak noktalar (yukarıdaki log(20)'nin açılımının olduğu gibi) elimizdeki yeni seriyi uzaklastiran (diverging) bir seri haline getirebilir. Bunun tersi olan yakınlasan (converging) seriler, elinizdeki terim sayısını biz arttırdıkça, sabit bir sayıya doğru yönelen serilere denir. Bizim amacımız hesap yapmak olduğuna göre, bir somut sayıya doğru yönelen bir seriyi tabii ki tercih ederiz. Bu sebeple elimizdeki serinin, istediğimiz x değeri için yakinlasan bir seri mi, yoksa uzaklasan bir seri mi olduğunu çok iyi bilmek zorundayız.

$log(1+x)$'in Taylor açılımı sadece -1

Burada, log aritmetiği yardımımıza erişiyor. Log işlemlerinde, bölmenin çıkarmaya, çarpmanın toplamaya dönüştüğünü hatırlayalım. Yâni Log(x*y) = log(x) + log(y), ve log(x/y) = log(x) - log(y) olur.

O zaman, $log(20)$'yi 1'den küçük sayılar kullanacak şekilde yeniden yazalım:

$log(20) = log(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{40}}) = log(\frac{1}{2}) - log(\frac{1}{40})$

$$log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Not: $(1+x)$'in $\frac{1}{2}$ vermesi icin x'in $-\frac{1}{2}$ olmasi gerekir.

$$log(\frac{1}{2}) \approx -\frac{1}{2} - \frac{-\frac{1^2}{2}}{2!} + \frac{-\frac{1^3}{2}}{3!} - ...$$

Ayni sekilde 1/40 icin durum aynidir.

$$log(\frac{1}{40}) \approx -\frac{39}{40} - \frac{-\frac{39^2}{40}}{2!} - \frac{-\frac{39^3}{40}}{3!} + ...$$

Bu kadar! Sağ tarafta gözüken serilerin hesabını, bir Python programı ile yaptık.

```
import numpy as np

def taylor_ile_log(bolum, bolen, taylor_ile_acilim_buyuklugu):
    sum = 0
    for i in range(1,taylor_ile_acilim_buyuklugu):
        sum += np.power(-1, i+1) * (np.power(bolum/bolen, i) / i)

    return sum

print taylor_ile_log(-39.0, 40.0, 160)
```

LISP

```
;;
;; Not: (/ 1 2) yazilirsa, Common Lisp 0 cevabi veriyor.
;; Bunun sebebi, 1 2 deyince, parametrelerin integer
;; (tamsayi) olarak anlasilmasiymis, parametreler tamsayi
;; olunca, sonucta tamsayi olarak donuyor. O yuzden kesirli
;; cevaplar almak icin, (/ 1.0 2.0) demek lazim.

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

(defun power (Base Exponent)
  "Reproduced EXPT in case where Exponent is non-negative integer"
  (cond
    ((= Exponent 0)  1)
    ((evenp Exponent)(Power (* Base Base) (/ Exponent 2)))
    (t               (* Base (Power Base (- Exponent 1))))) )

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

(defun basit-taylor-ile-log-of-1-bolu-2 ()
   (+
    (* +1 ;;; taylor serisinin birinci terimi
       (/
        (power (/ -1.0 2.0)
               1)
        1)
       )
    (* -1 ;;; taylor serisinin ikinci terimi
       (/
```

```lisp
        (power (/ -1.0 2.0)
               2)
        2)
       )
    (* +1 ;;; taylor serisinin ucuncu terimi
       (/
        (power (/ -1.0 2.0)
               3)
        3)
       )
    ;
    ; vs...vs..
    ;
    )
  )

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
(defun taylor-ile-log-hesapla (bolum bolen taylor-acilim-buyuklugu)
  (let ((sum 0)(i 1))
    (loop for i from 1 to taylor-acilim-buyuklugu do
          (setq sum (+ sum (* (power -1 (+ i 1))
                              (/
                               (power (/ bolum bolen)
                                      i)
                               i)
                              )))
          )
    sum)
)


(print "--------------- 1/2 (yani log( 1 + (-1/2)) Hesabi ------")
(print "Basit kod")
(print (basit-taylor-ile-log-of-1-bolu-2))
(print "Daha cok taylor terimi kullanan kod")
(print (taylor-ile-log-hesapla -1.0 2.0 100))
(print "Bilgisayarin kendi log()'undan gelen sonuc")
(print (log (/ 1.0 2.0)))

(print "--------------- 1/40 (yani log( 1 + (-39/40)) -------- ")
(print "160 taylor terimi")
(print (taylor-ile-log-hesapla -39.0 40.0 160))
(print "180 taylor terimi")
(print (taylor-ile-log-hesapla -39.0 40.0 180))
(print "200 taylor terimi")
(print (taylor-ile-log-hesapla -39.0 40.0 200))
(print "220 taylor terimi")
(print (taylor-ile-log-hesapla -39.0 40.0 220))
(print "240 taylor terimi")
(print (taylor-ile-log-hesapla -39.0 40.0 240))
(print "260 taylor terimi")
(print (taylor-ile-log-hesapla -39.0 40.0 260))
(print "Bilgisayarin kendi algoritmasina gore log(1/40)")
(print (log (/ 1.0 40.0)))
(print "------------------ Sonuc ------------------------- ")
```

```
(print "log(1/2) - log(1/40)")
(print (- (taylor-ile-log-hesapla -1.0 2.0 100)
          (taylor-ile-log-hesapla -39.0 40.0 200)))

(print "Bilgisayarin mevcut algoritmasinin verdigi ")
(print (log 20))
```