

MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 14

Bagimsiz Olmayan Degiskenler (Non-independent Variables)

Ornek

Fizikteki $f(P, V, T)$ formulu, ki bu degiskenler

$$PV = nRT$$

sekinde ilintili. Daha genel olarak bir $f(x, y, z)$ formulu var, ve degiskenler x, y, z birbiriyle $g(x, y, z) = c$ uzerinden baglantili. Aslinda bir onceki dersteki ayni durum, sadece bu sefer min, maks degil, kısmi turevlere neler oldugunu inceleyecegiz.

Yine onceki dersteki gibi, belki g 'yi cebirsel olarak degistirip, f 'e sokup degisken yoketmek mumkun degil. Eger oyle yapabilsek, bir $z = z(x, y)$ olabilirdi, ve onun kısmi turevlerine bakabilirdik,

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$$

gibi. Peki ya z 'yi bulamiyorsak? Belki ustteki kısmi turevleri z 'yi bulmadan elde edebiliriz.

Ornek

$$x^2 + yz + z^3 = 8$$

$(2, 3, 1)$ noktasina bakalim (yerine koyunca hakikaten 8 ciktigini goruyoruz). Fakat bu degerlerde azicik degisiklik yapinca, z nasil degisir? Bu soruyu nasil cevaplarim?

Formulden z 'yi cekip cikarmak gerekir, kupsel (cubic) formullerde bunu yapmanin bir yolu var, fakat cok karmasik bir formül ortaya cikartiyor. Aradigimiz sonuca ulasmanin daha kolay bir yolu var.

g 'nin tam diferansiyeline, yani dg 'ye bakalim (ustteki formulu g kabul ediyoruz). Tam diferansiyel

$$2xdx + zdy + (y + 3z^2)dz = 0$$

Sag taraf sifir cunku ustteki g bir sabite esit, $g = 8$, sabitin degisimi sifir, yani $dg = 0$.

Tam diferansiyele $(2, 3, 1)$ degerini verelim

$$4dx + dy + 6dz = 0$$

Bu formül bize her degiskenin degisiminin digeri ile nasıl baglantili oldugunu gosteriyor. Mesela dx ve dy 'yi biliyorsak, dz 'yi, yani z 'nin degisimini hesaplayabiliriz. Yani $z = z(x, y)$ uzerinden

$$dz = -\frac{1}{6}(4dx + dy)$$

Bu formül bize kısmi turevleri de gostermiss oluyor aslında, cunku tam diferansiyel formülünde kısmi turevler vardır, üstteki formülde dx, dy 'nin yanında yer alan degerler onlardır. O zaman

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{6}$$

Bunu düşünmenin bir dige r yolu su. $\partial z / \partial x$ z 'nin x 'e göre degisimi ise, y sabit demektir, üstteki dz formülünde $dy = 0$ deriz, geri kalanlar

$$dz = -\frac{2}{3}dx$$

ki bu formül z 'nin x 'teki degisime göre nasıl degistigini gosteriyor.

Genel olarak

$$g(x, y, z) = c$$

ise, o zaman

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz$$

formulu sifira esitlenir, ve bir diferansiyel dige rinin formunda elde edilebilir.

$$dz = -\frac{g_x}{g_z}dx - \frac{g_y}{g_z}dy$$

O zaman $\frac{\partial z}{\partial x}$ 'i gormek istiyorsak, dx 'in katsayısına bakabiliriz, ya da $y = \text{sabit}$ yani $dy = 0$ deriz, ve geri kalanlar

$$dz = -\frac{g_x}{g_z}dx, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{g_x}{g_z}$$

Daha fazla ilerlemeden, simdiye kadar gordugumuz notasyonun bazi problemlerini inceleyelim.

$$f(x, y) = x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

Degisken degisim (change of variables) yapalim

$$x = u$$

$$y = u + v$$

Pek cetrefilli bir degisim degil bu. O zaman

$$f = x + y = 2u + v$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2$$

Bu nasil oldu? $x = u$ dedigimize gore, x, u birbiriyle esitler, o zaman kısmi turevleri de ayni olmalidi.

Bu uyusmazligin niye ortaya ciktigini anlamak icin notasyonun ne demek istedigine yakindan bakmamiz lazim. $\partial f/\partial x$ ile x 'i degistiriyor, ama y 'yi sabit tutuyoruz. $\partial f/\partial u$ ile u 'yu degistiriyor, ama v 'yi sabit tutuyoruz.

Yani evet, x ile u 'yu degistirmek ayni sey olabilir, ama v 'yi sabit tutmak ile y 'yi sabit tutmak ayni sey degildir. Cunku mesela y 'yi sabit tutarsam ve u 'yu degistirirsem, v de degismelidir (ki biz bunu istemiyoruz) $y = u + v$ ifadesindeki toplamının sabit kalmasi icin. Ya da v sabit ise ve u 'yu degistiriyorsam, y degisecektir.

Yani hos, guzel kısmi turev notasyonumuz neyin degistigini acikca gostermesine ragmen, neyin sabit tutulduğunu gostermedigi icin yanilgilara yol acabiliyor. Bunu aklimizda tutmamiz lazim. Ornekteki kısmi turevler birbiriyle ayni degil cunku

$$\partial f/\partial x, u = x \text{'i degistir, ve } y \text{'yi sabit tut}$$

$$\partial f/\partial u, u = x \text{'i degistir, ve } v = y - x \text{'i sabit tut}$$

anlamina geliyor.

Daha acik bir notasyon soyle olabilir

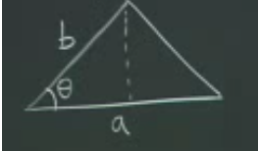
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = y \text{ sabit}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = v \text{ sabit}$$

Ornege donersek

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}_1 \neq \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_v = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v}_2$$

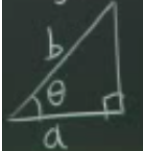
Ornek



$$A = \frac{1}{2}absin(\theta)$$

Alan, a, b, θ 'nin fonksiyonu.

Farz edin ki size a, b, θ arasinda bir iliski oldugunu soyledim.



Diyelim ki ucgen aslinda bir dik ucgen, bunu cebirsel olarak soylemenin yolu da alttaki kisitlama ifadesi

$$a = b\cos(\theta)$$

Incelemek istedigimiz alanin θ 'ya olan baglantisi, yani, mesela A 'nin degisiminin θ 'nin degisimine orani nedir? Bunu hesaplamanin 3 yontemi olabilir

1) a, b, θ 'yi bagimsiz kabul et, o zaman

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_{a,b}$$

Tabii a, b sabitken θ degissin demek, ucgenin dikliginin ihlali demektir, cunku hem kenarlar sabit, hem aci degissin diyoruz, ama o zaman dik aci degismek zorundadir. Her neyse, kısmi turevleri hesaplayalım.

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{1}{2}ab\cos(\theta)$$

Simdiye kadar kisitlama ifadelerimi kullanmadim.

2) a 'yi sabit tutalım, b degisebilsin, ki boylece dik aci yerinde kalabilsin.

$$b = b(a, \theta) = \frac{a}{\cos(\theta)}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a$$

3) b 'yi sabit tutalım, $a = a(b, \theta)$ degissin, ki boylece dik aci yerinde kalabilsin.

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_b$$