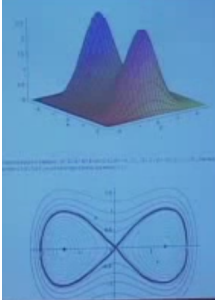


MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 10

Bugunku konumuz kritik noktaların minima mı, maksima mı, yoksa eğer noktasi mı olduğunu anlama teknikleri. Kritik noktalar kısmi türevlerin hepsinin sıfır olduğu noktadır, mesela 2 değişkenli fonksiyon için $f_x = 0$, $f_y = 0$ olmasıdır.

3 değişik kritik nokta cesidi gördük, lokal minima, lokal maksima, ve eğer (saddle) noktaları.

Bir fonksiyonun birden fazla kritik noktasi olabilir. Mesela şöyle bir fonksiyon



Soru: Bir kritik noktaya bakarken, hangi kategoriye ait olduğunu nasıl anlayacağız? Bir diğer soru, global (lokal olmayan) minimum ve maksimum noktalarını nasıl buluruz? Üstteki resimdeki fonksiyonda iki lokal maksimum var. Her ikisini de deneyebiliriz, hangisi daha yüksek ise onu alırız. Diğer yandan, bu fonksiyonun minimumu herhangi bir “noktada” değil, maksimumdan uzakta, fonksiyonun en dış yerlerinde, sonsuzlukta.

Yani global minimum ve maksimum illa bir noktada olmayabilir, sonsuzlukta olabilir, o zaman bu koşulu test etmeliyiz, fonksiyonumuzun sonsuzluga giderken nasıl davrandığını anlamalıyız.

Birinci soruyu cevaplayalım

İkinci Türev Testi

$$w = ax^2 + bxy + cy^2$$

Bu fonksiyonun kritik noktasi orijinde. Eğer türevleri alırsak, ve sıfıra eşitlersek, sonuç $x, y = 0$ çıkar. Aynı şekilde eğer w 'nin lineer yaklaşıksallaşmasını yapsaydık eşitlik sağındaki bütün terimlerin x, y küçük iken x, y 'den küçük olduğunu görürüz, o zaman grafiğin tegeti $w = 0$ noktasındadır. Eğer

orijinden ufak bir adım atarsak, o adımların fonksiyon üzerindeki etkisi kare alma operasyonu yüzünden daha küçülür ($0.001^2 = 0.00001$ mesela). Herhangi bir noktadaki eğim fonksiyon / değişkenlerdeki artış olduğuna göre, orijine yakın olan eğim yukarı doğru neredeyse yok gibidir.

Örnek

$$w = x^2 + 2xy + 3y^2$$

Üstteki formülü şu şekilde dönüştürürsek

$$w = (x + y)^2 + 2y^2$$

Üstte iki karenin toplamı var, karelerin ikisi de negatif olamaz, o zaman minimum'un orijin olması gerekir (negatiflesmeden olabilecek en küçük değer oradadır).

Birazdan göreceğiz ki üstteki kare tamamlama (completing the square) yöntemini a, b, c katsayılarını içeren genel durum için de kullanabiliriz.

Önce $a \neq 0$ farz etmem lazım, yoksa tekniğin geri kalanı mümkün olmaz.

$$w = a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy\right) + cy^2$$

Eğer bir kare denklemin orta teriminde $b/a \ xy$ (üstteki gibi) elde etmek istiyorsam, kare içinde x ve $b/2a \ y$ terimlerini kullanırım, çünkü bu iki terimin birbirleri ile çarpılıp iki kere toplanmaları $b/a \ xy$ sonucunu verir. O zaman

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \dots$$

Hala isimiz bitmedi, kare içine koyulan y yüzünden ortaya çıkan y^2 bazlı terimi dengelemek gerekiyor,

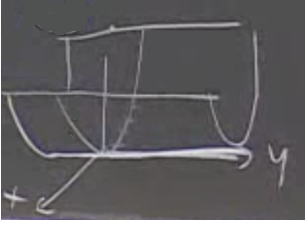
$$\begin{aligned} &= a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)y^2 \\ &= \frac{1}{4a}\left[4a^2\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + (4ac - b^2)y^2\right] \end{aligned}$$

Bu noktada kontrol etmemiz gereken 3 durum var:

1) $4ac - b^2 < 0 \Rightarrow$ Üstteki ikinci terim negatif, pozitif y^2 'yi çarpıyor yani negatiflik daha da buyuyor, birinci terim kesinlikle pozitif (çünkü karesi al-

inmis ifadeler var). Bu durumda bir eger noktamız var.

2) $4ac - b^2 = 0 \Rightarrow$ İkinci terim yok olur. Geri kalanlar sonucunda fonksiyonumuz sadece bir yonde tanımlı hale gelir, fonksiyonun “dejenere” olduğu söylenir. Mesela $w = x^2$ fonksiyonu böyledir, y 'ye hiç bağlantı yoktur, alttaki gibi.



Grafikte görüldüğü gibi y yönünde hiçbir değişim olmamaktadır, o yonde pek çok kritik nokta vardır, bu noktalar “dejenere”dir.

Ana formulumuzdaki birinci terimde x ve y olması şasirtici gelebilir, orada x ve y olduğu için elimizde dejenere bir durum var, eğer o ifadeleri kullanarak yeni bir eksen sistemi yaratsaydım, o yonde hiçbir değişiklik olmadığını görürdüm.

3) $4ac - b^2 > 0 \Rightarrow$ Bu durumda üstteki formülde, kareli ifadeler

$$w = \frac{1}{4a} \left[+ \dots \left(\dots \right)^2 + \left(\dots \right) \right]$$

hep > 0 demektir, bu durumda elimizde ya bir maksimum ya da bir minimum var. İşler a 'ya göre değişecek, o zaman onun işaretine bakalım.

Eğer $a > 0$ bir minimum vardır

Eğer $a < 0$ bir maksimum vardır

[bazı bölümler atlandı]

Genel olarak maks, min işlemleri için 2. türevlere bakmak gerekir.

Kaç türlü kısmi türev vardır? Mesela bir kez x 'e göre kısmi türev alabilirim, sonra elde ettiğim fonksiyonun bir daha x 'e göre türevini alırım.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

Ya da

$$\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

Ya da

$$\frac{\partial f^2}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

Burada bir iyi haber su: Ustteki iki kısmi turev birbirine esit, yani $f_{xy} = f_{yx}$.

Ve en son olarak

$$\frac{\partial f^2}{\partial y^2} = f_{yy}$$

2. Turev Testi

f 'in kritik noktası x_0, y_0 'da $A = f_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}(x_0, y_0)$ ise, o zaman

$$AC - B^2 > 0$$

hesabına bakılır. Bu hesabin da 2 tane alt secenegi vardır.

$A > 0$ ise lokal minimum.

$A < 0$ ise lokal maksimum.

$$AC - B^2 < 0$$

hesabi var ise, elimizde bir eger noktası vardır.

$$AC - B^2 = 0$$

ise hiçbir sonuca varamayız. Bir sekilde dejenere oldugunu biliriz, ama nasıl bir kritik nokta oldugunu bilemeyiz.

Simdi formulumuz $w = ax^2 + bxy + cy^2$ uzerinde buldugumuz ozel sarti kısmi turevler ile dogrulayip dogrulayamayacagimiza bakalim.

$$w_x = 2ax + by$$

$$w_{xx} = 2a$$

$$w_{xy} = b$$

$$w_y = bx + 2cy$$

$$w_{yx} = b$$

O zaman

$$A = 2a$$

$$B = b$$

$$C = 2c$$

$$AC - B^2 = 4ac - b^2$$

Gordugumuz gibi $4ac - b^2$ tekrar elde ettik, yani ilk basta kare tamamlayarak elde ettigimiz irdelemeleri aynen kullanabiliriz.

Tabii dejenere konumda hala ne yapilacagini bilmiyoruz. O durum icin de Taylor Yaklasiksallamasini kullanacagiz.

Karesel yaklasiksallama

$$\Delta f \approx f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

Fakat kritik noktalarda $f_x = f_y = 0$ oldugunu hatirlarsak, o zaman ustteki ifadede tum terimler iptal (sifir) olur. Bu isimize yaramaz. Daha fazla terim eklememiz lazim.

$$\Delta f \approx f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x - x_0)^2 + f_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}f_{yy}(y - y_0)^2$$

Bu durumda genel durum (case) karesel duruma indirgenmis olur. Ustteki formilde

$$\Delta f \approx f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) + \underbrace{\frac{1}{2}f_{xx}(x - x_0)^2}_{1/2A=a} + \underbrace{f_{xy}(x - x_0)(y - y_0)}_{B=b} + \underbrace{\frac{1}{2}f_{yy}(y - y_0)^2}_{1/2C=c}$$

kullanilabilir.

Dejenere durumda ne olacagi daha yuksek turevlere baglidir. Biz bu dersti o konuya girmeyecegiz.

Fakat sunu soylemek gerekir ki

$$AC - B^2 = 0$$

sartinin ortaya cikmasi, yani “sonuca varamiyoruz” noktasina gelmek gercek hayatta pek olmuyor.

Ornek

$$f(x, y) = x + y + \frac{1}{xy}, \quad x, y > 0$$

Min, maks nedir?

Kritik noktaları bulalım.

$$f_x = 1 - \frac{1}{x^2 y} = 0$$

$$f_y = 1 - \frac{1}{xy^2} = 0$$

$$x^2 y = 1$$

$$xy^2 = 1$$

İkinci formül birinciye bölürse,

$$x/y = 1$$

yer değiştirince

$$x = y \Rightarrow x = 1$$

$$y^3 = 1 \Rightarrow y = 1$$

Tek kritik nokta $(1, 1)$

Soru

Bu nokta

1. Lokal minimum
2. Lokal maksimum
3. Eğilme noktası

4. ???

Cevaplayin.

Cevap için 2. kısmi turevleri hesaplayalım.

$$f_{xx} = \frac{2}{x^3y}$$

$$A = 2$$

$$f_{xy} = \frac{1}{x^2y^2}$$

$$B = 1$$

$$f_{yy} = \frac{2}{xy^3}$$

$$C = 2$$

$$AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$$

Demek ki bu ya bir lokal min, ya da lokal maks.

$$A > 0$$

o zaman bu lokal min. Hatta bunun bir global min olduğunu da kontrol etmek mümkün.

Ya peki lokal maksimum?

Maksimum herhangi bir kritik noktada değil, maksimum sonsuzlukta.

$x \rightarrow \infty$, ya da $y \rightarrow \infty$, ya da $x, y \rightarrow 0$ iken, $f \rightarrow \infty$.

Genelde üstteki kontrolleri yapmak gerekir, neler olduğunu anlamak için önce kritik noktalara bakılır, sonra sınırlarda (boundaries) neler olduğuna bakılır.