Ozvektorler, Ozdegerleri Elle Hesaplamak (Eigenvectors, Eigenvalues)

Ozdegerler ve ozvektorler her matrise gore ozel vektorlerdir, ki matris bu ozel vektorleri transform ettiginde / islediginde sonuc yine ozvektorun kendisidir, daha dogrusu onun bir sabit (ozdeger) ile carpilmis halidir. Yani

$Ax = \lambda x$

Tek tarafa gecirelim

$Ax - \lambda x = 0$

Bu noktada x'leri disari cekmek isterdik, fakat bunu yapamayiz, cunku o zaman iceride $A - \lambda$ kalir ve bu olmaz, cunku A bir matris, λ bir tek sayi. Ama $Ix = x$'ten hareketle

$Ax - \lambda Ix = 0$

diyebiliriz. Simdi disari cekersek

$(A - \lambda I)x = 0$

Bu ifadenin dogru olmasi icin parantez icindeki ifade / matris tekil (singular) olmalidir. Bunun icin ise parantez icinin determinanti sifir olmalidir. Yani

$|A - \lambda I| = 0$

Ornek

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$

$det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(5-\lambda) - 4 \cdot 3$

Ustteki denkleme karakteristik denklem (characteristic equation) denir.

$= -7 - 6\lambda + \lambda^2$

Kokleri $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -1$.

Her ozdegere tekabul eden ozvektoru bulmak istiyorsak, cikartma islemini yapalim

$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-7 & 4 \\ 3 & 5-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

Su formule donersek

$(A - \lambda I)x = 0$

Cikartma sonrasi elimize gecen matrisi carpacak oyle bir x vektoru ariyoruz ki bu vektorle carpinca elimize sifir (vektoru) gecsin. Yani bu aradigimiz x vektoru $(A - \lambda I)$'nin sifir uzayinda (nullspace).

2 x 2 boyutundaki boyle ufak bir ornek icin x'i aslinda tahmin edebiliriz. Oyle iki sayi bulalim ki, 1. ve 2. kolonu onlarla ayri ayri carpip topladigimizda sonuc sifir olsun. Her iki kolonun tepesinde -6 ve 4 goruyorum, sadece bu iki sayinin sifira toplanmasi icin acaba -6'yi 2 ile 4'u 3 ile carpip toplasam olur mu? Kolondaki diger sayilara bakiyoruz, 3 ve -2 icin de bu ise yariyor. Demek ki ozvektorlerden biri

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Diger ise ayni teknigi kullanarak

$$x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$