Guven Araliklari, Hipotez Testleri

Guven Araliklari

Diyelim ki $X_1, .., X_i$ orneklemi birbirinden bagimsiz, ayni dagilimli ve ortalamasi μ, standart sapmasi σ ve yine ayni olan bir nufus dagilimindan geliyor. O zaman biliyoruz ki, Merkezi Limit Teorisi (Central Limit Theorem) teorisine gore, orneklem ortalamasi $\bar{X} = \frac{1}{n} X_1 + .. + X_n$, ortalamasi μ, standart sapmasi σ / n^2 olan bir normal dagilima yaklasiyor.

Peki veriyi (yani orneklemi) ve CLT'yi kullanarak μ hakkinda bir tahmin yapabilir miyiz? Yani Buyuk Sayilar Kanunua gore μ hakkinda noktasal tahmin yapabiliriz fakat, belki ondan bir adim otesi, bir "guven araligi" hesaplamaktan bahsediyoruz. Bu tahmin "gercek μ, %95 ihtimalde su iki deger arasindadir" turunde bir tahmin olacak.

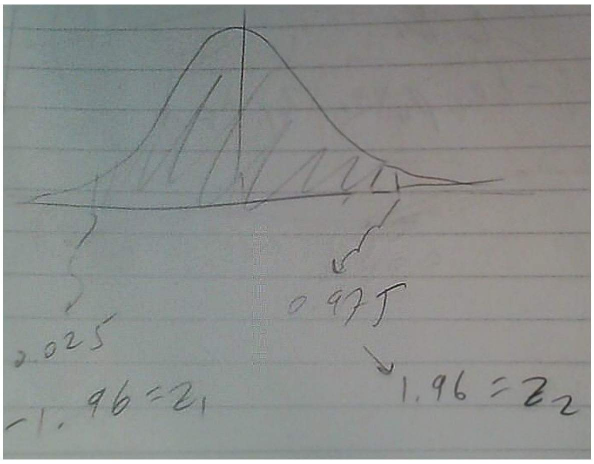
Bu araligin hesabi icin once $\bar{X}$'i standardize edelim, yani $N(0, 1)$ haline cevirelim,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Z-skorlarini isledigimiz yazida

$$P(z_1 < Z < z_2) = \Phi(z_1) - \Phi(z_2)$$

gibi bir ifade gorduk. Esitligin sag tarafi aslinda bir alan hesabidir, surekli fonksiyonlarda olasilik bir entegral, ya da iki kumulatif yogunluk fonksiyonunun farki. Guven araligi icin bize lazim olan da bir olasilik, hatta "kesin" bir olasilik, %95 olasiligi. Demek ki esitligin sag tarafi .95 olacak. .95 hesabi icin, normal egrisini dusunursek, sagindan ve solundan 0.25 buyuklugunde iki parcayi "kirpmamiz" lazim. O zaman 0.975 olasiliginin z degeri ile, 0.025 olasiliginin z degeri arasindaki olasilikta olmamiz lazim. Bu hesaplarda baz alinan $z_{\alpha/2}$ degeri ve bu $100 \cdot \alpha/2$ ust yuzdelik kismina, ornegimizde 0.975 kismina tekabul ediyor. Normal dagilimin simetrisi sebebiyle onun eksisi alinmis hali oteki (soldaki) parcayi verir, yani $-z_{\alpha/2}$.



z-skoru hesaplarken tabloya danismistik, simdi tabloya tersinden bakacagiz, kesisme noktasinda 0.975 diyen yeri bulup kordinatlari alacagiz, ki bu deger 1.96. Istatistik kaynaklarinda "sihirli deger" seklinde tarif edilen bir deger bu, gozlerimiz kamasmasin, geldigi yer burasi iste. Simdi formulu buna gore degistirelim,

$$P\bigg(-z_{\alpha/2} \leqslant \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant z_{\alpha/2} \bigg) = 1-\alpha$$

$P(\cdot)$ icinde biraz duzenleme, tum terimleri $\sigma/\sqrt{n}$ ile carpalim, $\bar{X}$ cikartalim, ve -1 ile carpalim,

$$P\bigg(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \bigg) = 1-\alpha$$

Guven araligi ifadesine aslina erismis olduk. Eger %95 kesinlikten bahsediyor olsaydik, ve nufusun gercek varyansi σ^2 biliniyor olsaydi, $P(\dot{})$ icine bu degerleri gececektik, $\bar{X}$ zaten verinin aritmetik ortalamasindan ibarettir, bu bize μ'nun solunda ve saginda bazi degerler dondurecekti. Bu degerler bizim guven araligimiz olacakti. Mesela veri 64.1, 64.7, 64.5, 64.6, 64.5, 64.3, 64.6, 64.8, 64.2, 64.3 seklinde, $n = 10$ cunku 10 nokta var, $\sigma = 1$ olarak verilmis. Ortalamayi hesapliyoruz, 64.46. $\alpha = 0.05$ icin

$$P\bigg(64.46 - 1.96\frac{1}{\sqrt{10}} \leqslant \mu \leqslant 64.46 + 1.96\frac{1}{\sqrt{10}} \bigg) = 0.95$$

$$P\bigg(63.84 \leqslant \mu \leqslant 65.08 \bigg) = 0.95$$

Yani %95 guven araligi $63.84 \leqslant \mu \leqslant 65.08$.

Neler yaptik? CLT bilgisinden hareketle $\bar{X}$ hakkinda bir seyler biliyorduk. Fakat $\bar{X}$'in *kesin* hangi normal dagilima yaklastigini bilmek icin nufus paremetreleri μ, σ da bilinmelidir. Diger yandan eger tek bilinmeyen μ ise, teoriyi bu bilinmez etrafinda tamamen tekrar sekillendirip / degistirip CLT'yi bilinmeyen μ etrafinda bir guven araligi yaratmak icin kullandik.

Kac Tane n?

Hatirlarsak guven araligini ustteki sekilde hesaplayabilmemizin sebebi CLT sayesinde $\bar{X}$'in normal dagilima yaklasiyor olmasiydi. Ve, teoriyi tekrar dusunursek yaklasma $n \to \infty$ oldugu zaman oluyordu. Buradan $\bar{X}$'in normalliginin "buyukce" n degerleri icin daha gecerli olacagi sonucuna varabiliriz. Peki n ne kadar buyuk olmali? Literature gore CLT'nin genellikle $n \geqslant 30$ durumunda gecerli oldugu soylenir. Tabii nufus dagiliminin ne oldugu da onemlidir, eger nufus normal ise, ya da genel olarak simetrik tek tepeli dagilim ise orneklem daha ufak kalsa da bazi sonuclara varabiliriz. Eger nufus dagilimi cok yamuk (skewed), etekleri genis dagilim ise o zaman daha buyuk orneklem daha iyi olur.

Bilinmeyen σ

Eger σ bilinmiyorsa, bu durumda σ yerine orneklem varyansi S kullanilabilir,

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$$

ki ustteki degerin karekoku S olacaktir. σ yerine S kullanmanin buyuk n degerlerinde CLT'yi etkilemedigi ispat edilmistir [5].

Binom Dagilimlar ve Normal Yaklasiksallik

Binom ile Bernoulli dagilimi arasindaki baglantiyi biliyoruz. Diyelim ki $X_1, .., X_n$ birbirinden bagimsiz ve ayni Bernoulli olarak dagilmis, Bernoulli dagilimini temsil eden Y tanimlayalim, o zaman

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Simdi orneklem ortalamasini hatirlayalim,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

O zaman

$$Y = n\bar{X}$$

Merkezi Limit Teorisinden $\bar{X}$'in nufus beklentisi ve sapmasini iceren $N(\mu, \sigma)$ olarak dagilacagini biliyoruz. Nufus parametreleri nedir? Her X_i'in ayni olan μ, σ'si ile alakli, durumda Bernoulli parametrelerini alip $N(\cdot)$ icinde direk kullanabiliriz,

$$E(X_i) = p, Var(X_i) = p(1-p)$$

o zaman

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma), \mu = p, \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Y ile $\bar{X}$ baglantisi: Bir genel teoriye gore eger $\bar{X}$ normal ise $n\bar{X}$'in de normal oldugu bilinir, ve bu dagilim $N(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$ olarak gosterilir. Bu teorinin ispatini simdilik vermeyecegiz. O zaman $Y = n\bar{X}$ is ve normal olarak dagilmis ise, o zaman

$$Y \sim N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$$

demek dogru olacaktir. Standardize etmek gayet basit,

$$Z = \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

ya da, bolum ve boleni n ile bolersek,

$$Z = \frac{Y/n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

Soru

Amerikalilarin yuzde 12'sinin zenci oldugunu biliyoruz. Eger 1500 kisiyi iceren bir orneklem alsaydik, bu orneklemde 170'den daha az zenci olmasinin olasiligi nedir?

Cevap

%12 nufus parametresidir, yani $p = 0.12$. Orneklem $n = 1500$. Normal yaklasiksallamasi ile

```
from scipy.stats import norm
n = 1500
p = 0.12
mu = n*p
std = np.sqrt(n*p*(1-p))
print mu,std
print 'olasilik',norm.cdf(170,loc=mu,scale=std)
```

```
180.0 12.585706178
olasilik 0.213437028747
```

Yani $N(180, 12.58)$ dagilimini elde ettik ve hesaplari onun uzerinden yaptik. Sonuc diyor ki verilen orneklem ve nufus p degeri ile 170 altinda zenci sayisi elde etmek oldukca dusuk bir ihtimalde.

Binom Guven Araligi

Hipotez Testleri (Hypothesis Testing)

Hipotez testi (bir veriye dayanarak) farzedilen bir parametreyi bir sabit degerle karsilastirmak, ya da iki parametreyi birbiriyle karsilastirmak icin kullanilir.

Bir hipotez testi, sonucta sadece iki cevap verebilecek bir sorudur; bu sonuclar "reddetmek" ya da "reddetmemek" olabilir. Dikkat: bu sonuclardan biri "kabul etmek" degil, bir istatistiki hipotezi kabul etmek mumkun degildir. Tek soyleyebildigimiz "bir hipotezi reddetmek icin elimizde yeterli veri olmadigini" soylemektir. Ama reddedebiliyorsak, bu sonucta daha bir kesinlik vardir.

Binom Testi

Diyelim ki elimizde bir Web sitesinin gunluk ziyaret, tiklama sayilarini gosteren bir veri seti var (CVR ziyaretcilerin, sitedeki tiklayan musteriye "cevirme' orani, -conversion-)

```
import pandas as pd
from scipy import stats
a = pd.DataFrame({'tiklama': [20.,2.,40.,5.,10.,100.],
                  'ziyaret': [100.,10.,300.,400.,30.,800.]})
a['cvr'] = a['tiklama'] / a['ziyaret']
print a
```

```
   tiklama  ziyaret       cvr
0       20      100  0.200000
1        2       10  0.200000
2       40      300  0.133333
3        5      400  0.012500
4       10       30  0.333333
5      100      800  0.125000
```

Bu veri seti icin cvr'in 0.16, yani yuzde 16 oldugunu onceden biliyoruz. Ustteki basari orani binom dagili ile modellenebilir, ziyaretler "deneylerdir", yani orneklem buyuklugunu gosterirler. Tiklama ise basaridir,

```
p_hat = 0.16
btest = lambda x: (x['cvr']-p_hat) / np.sqrt( p_hat*(1-p_hat)/x['ziyaret'])
a['guven'] = a.apply(btest, axis=1)
a['guven'] = np.round(stats.zprob(a['guven'])*100,2)
print a
```

```
   tiklama  ziyaret       cvr  guven
0       20      100  0.200000  86.24
1        2       10  0.200000  63.50
2       40      300  0.133333  10.39
3        5      400  0.012500   0.00
4       10       30  0.333333  99.52
5      100      800  0.125000   0.35
```

Tek Orneklem t Testi (One-sample t test)

Bu test verinin Normal dagilimdan geldigini farzeder, tek orneklem durumunda elde $x_1, ..., x_n$ verisi vardir, ve bu veri $N(\mu, \Sigma)$ dagilimindan gelmistir ve test etmek istedigimiz hipotez / karsilastirma $\mu = \mu_0$.

```
from scipy.stats import ttest_1samp, wilcoxon, ttest_ind
import pandas as pd
daily_intake = np.array([5260,5470,5640,6180,6390,6515, 6805,7515,7515,8230,8770])
df = pd.DataFrame(daily_intake)
print df.describe()
```

```
                  0
count     11.000000
mean    6753.636364
std     1142.123222
min     5260.000000
25%     5910.000000
50%     6515.000000
75%     7515.000000
max     8770.000000
```

```
t_statistic, p_value = ttest_1samp(daily_intake, 7725)
print "one-sample t-test", p_value
```

```
one-sample t-test 0.0181372351761
```

Sonuc `p_value` `0.05`'ten kucuk cikti yani yuzde 5 onemliligini (significance) baz aldik bu durumda veri hipotezden onemli derecede (significantly) uzakta. Demek ki ortalamanin 7725 oldugu hipotezini reddetmemiz gerekiyor.

Testi iki orneklemli kullanalim, gruplar 0/1 degerleri ile isaretlendi, ve test etmek istedigimiz iki grubun ortalamasinin (mean) ayni oldugu hipotezini test etmek. t-test bu arada varyansin ayni oldugunu farzeder.

```
energ = np.array([
[9.21, 0],
[7.53, 1],
[7.48, 1],
[8.08, 1],
[8.09, 1],
[10.15, 1],
[8.40, 1],
[10.88, 1],
[6.13, 1],
[7.90, 1],
[11.51, 0],
[12.79, 0],
[7.05, 1],
[11.85, 0],
[9.97, 0],
[7.48, 1],
[8.79, 0],
[9.69, 0],
```

```
[9.68, 0],
[7.58, 1],
[9.19, 0],
[8.11, 1]])
group1 = energ[energ[:, 1] == 0][:, 0]
group2 = energ[energ[:, 1] == 1][:, 0]
t_statistic, p_value = ttest_ind(group1, group2)
print "two-sample t-test", p_value
```

```
two-sample t-test 0.00079899821117
```

$p - value < 0.05$ yani iki grubun ortalamasi ayni degildir. Ayni oldugu hipotezi reddedildi.

Eslemeli t-Test (Paired t-test)

Eslemeli testler ayni deneysel birimin olcumu alindigi zaman kullanilabilir, yani olcum alinan ayni grupta, deney sonrasi deneyin etki edip etmedigi test edilebilir. Bunun icin ayni olcum deney sonrasi bir daha alinir ve "farklarin ortalamasinin sifir oldugu" hipotezi test edilebilir. Altta bir grup hastanin deney oncesi ve sonrasi ne kadar yiyecek tukettigi listelenmis.

```
intake = np.array([
[5260, 3910],
[5470, 4220],
[5640, 3885],
[6180, 5160],
[6390, 5645],
[6515, 4680],
[6805, 5265],
[7515, 5975],
[7515, 6790],
[8230, 6900],
[8770, 7335],
])
pre = intake[:, 0]
post = intake[:, 1]
t_statistic, p_value = ttest_1samp(post - pre, 0)
print "paired t-test", p_value
```

```
paired t-test 3.05902094293e-07
```

Wilcoxon isaretli-sirali testi (Wilcoxon signed-rank test)

t Testleri Normal dagilima gore sapmalari yakalamak acisindan, ozellikle buyuk orneklemler var ise, oldukca saglamdir. Fakat bazen verinin Normal dagilimdan geldigi faraziyesini yapmak istemeyebiliriz. Bu durumda *dagilimdan bagimsiz metotlar* daha uygundur, bu tur metotlar icin verinin yerine cogunlukla onun sira istatistiklerini (order statistics) kullanir.

Tek orneklemli Wilcoxon testi icin prosedur μ_0'i tum veriden cikartmak ve geri kalan (farklari) isaretine bakmadan numerik degerine gore siralamak, ve bu sira degerini bir kenara yazmak. Daha sonra geri donup bu sefer cikartma islemi sonucunun isaretine bakmak, ve eksi isareti tasiyan sira degerlerini toplamak, ayni islemi arti isareti icin yapmak, ve eksi toplami arti toplamindan cikartmak. Sonucta elimize bir istatistik W gelecek. Bu test istatistigi aslinda $1..n$ tane sayi icinden herhangi birini 1/2 olasiligiyla secmek, ve sonuclari toplamaya tekabul etmektedir. Ve bu sonuc yine `0.05` ile karsilastirilir.

```
z_statistic, p_value = wilcoxon(daily_intake - 7725)
print "one-sample wilcoxon-test", p_value
```

```
one-sample wilcoxon-test 0.0279991628713
```

Hipotezi yine reddettik.

Ustte yaptigimiz eslemeli t-testi simdi Wilcoxon testi ile yapalim,

```
z_statistic, p_value = wilcoxon(post - pre)
print "paired wilcoxon-test", p_value
```

```
paired wilcoxon-test 0.00463608893545
```

Gaussian Kontrolu

Diyelim ki Gaussian dagilimina sahip oldugunu dusundugumuz $\{x_i\}$ verilerimiz var. Bu verilerin Gaussian dagilimina uyup uymadigini nasil kontrol edecegiz? Normal bir dagilimin her veri noktasi icin soyle temsil edebiliriz,

$$y_i = \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)$$

Burada Φ standart Gaussian'i temsil ediyor (detaylar icin *Istatistik Ders 1*) ve CDF fonksiyonuna tekabul ediyor. CDF fonksiyonunun ayni zamanda ceyregi (quantile) hesapladigi soylenir, aslinda CDF son derece detayli bir olasilik degeri verir fakat evet, dolayli yoldan noktanin hangi ceyrek icine dustugu de gorulecektir.

Simdi bir numara yapalim, iki tarafa ters Gaussian formulunu uygulayalim, yani Φ^{-1}.

$$\Phi^{-1}(y_i) = \Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$\Phi^{-1}(y_i) = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

$$x_i = \Phi^{-1}(y_i)\sigma + \mu$$

Bu demektir ki elimizdeki verileri $\Phi^{-1}(y_i)$ bazinda grafiklersek, bu noktalar egimi σ, baslangici (intercept) μ olan bir duz cizgi olmalidir. Eger kabaca noktalar duz cizgi olusturmuyorsa, verimizin Gaussian dagilima sahip olmadigina karar verebiliriz.

Ustte tarif edilen grafik, olasilik grafigi (probability plot) olarak bilinir.

Ters Gaussian teorik fonksiyonunu burada vermeyecegiz, Scipy `scipy.stats.invgauss` hesaplar icin kullanilabilir. Fakat y_i'nin kendisi nereden geliyor? Eger y_i, CDF'in bir sonucu ise, pur veriye bakarak bir CDF degeri de hesaplayabilmemiz gerekir. Bunu yapmak icin bir baska numara lazim.

1. Eldeki sayilari artan sekilde siralayin

2. Her veri noktasina bir derece (rank) atayin (siralama sonrasi hangi seviyede oldugu yeterli, 1'den baslayarak).

3. Ceyrek degeri y_i bu sira / $n+1$, n eldeki verinin buyuklugu.

Bu teknik niye isliyor? x'in CDF'i $x_i < x$ sartina uyan x_i'lerin orani degil midir? Yani bir siralama soz konusu ve ustteki teknik te bu siralamayi biz elle yapmis olduk, ve bu siralamadan gereken bilgiyi aldik.

[1] Introductory Statistics with R

[2] Introduction to Probability and Statistics Using R

[3] `https://gist.github.com/mblondel/1761714`

[4] Applied Statistics and Probability for Engineers

[5] `http://math.stackexchange.com/questions/243348/sample-variance-conver`