

## Ders 1

### Diziler (Sequences)

Bir dizi aslında sadece bir listedir. Listede 1. eleman vardır, 2. eleman vardır, vs. ve bu sonsuza kadar devam eder. Bu nokta önemli, matematikte sonlu / sınırlı (finite) bir liste dizi değildir. Dizilerin önemli bir özelliği sonsuza kadar devam etmeleridir.

Daha formel olarak bakarsak doğal sayıların, yani  $\mathbb{N}$  kümesinin de tanımda bir rol oynadığını görebiliriz. Listedeki her eleman dizideki sıra numarası ile etiketlenebilir, 1. elemanı “1”, 2. elemanı “2”, vs. olarak etiketleyebiliriz, o zaman bu açıdan bakarsak bir dizinin, doğal sayılar ile başka bir küme arasındaki bir *eslesme* olduğunu da söyleyebiliriz. Bu eslesme bir diğer tanımla bir fonksiyondur. Yani bir dizi aslında bir fonksiyondur, yani

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dizimizi

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

olarak gösterebiliriz.

### Yaklaşmak (Convergence)

Acık bir şekilde görüleceği üzere alttaki dizi

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

gittikçe 0 değerine doğru gidiyor. Bu dizi “sıfıra yaklaşıyor (convergence)” deriz, ya da “dizinin limiti sıfır” deriz. Peki bu fikri nasıl daha açık, net olarak tanımlayabiliriz?

Yaklaşan seriler 18. yüzyılda incelendi ve geliştirildi, fakat o zamanlarda bu tür dizilerin tanımı hiçbir net olarak ortaya koyulmadı. Literatur taranırsa tanıma en yakın olacak şey şöyledir:

“Bir dizi  $\{s_n\}$   $L$  sayısına yaklaşıyor, eğer bu dizideki terimler gittikçe  $L$ ’e yaklaşıyorsa”.

Bu tanimin oldukça genel, kabaca olarak yapılmış olması bir yana, bazen bizi

yanlis yollara bile surukleyebilir. Mesela su diziyi ele alalim

.1, .01, .02, .001, .002, .0001, .0002, .00001, .00002, ...

Bu dizi muhakkak sifra “yakiniyasiyor”, fakat terimler duzenli bir sekilde sifra yaklasmiyorlar. Her ikinci adimda birazcik sapiyorlar. Ya da su dizi

.1, .11, .111, .1111, .11111, .111111, ...

Bu dizi gittikce .2’ye “yakiniyasiyor”, fakat bu dizinin .2’ye yaklastigi iddia edilemez. Gercek limit 1.9 olmalı, 2 degil. Ne oldugu belli olmayan bir “gittikce yaklasma” tanimina degil, bizim aslinda “gelisiguzel yakinielik (arbitrarily close)” tanimina ihtiyacimiz var.

Bu fikri en iyi yakalayabilen 1820’li yillarda Augustin Cauchy oldu. Esitsizlikleri kullanarak “herhangi / gelisiguzel yakinielik” kavramini formule eden bir tanim bulmayi basardi. Bu sekilde limit kavrami gayet acik matematiksel esitlisizlikler ile gosterilebildi.

Tanim: Bir Dizinin Limiti

$\{s_n\}$ ’nin reel sayilardan mutesekkil bir dizi oldugunu dusunelim.  $\{s_n\}$ ’nin bir reel sayi  $L$ ’e yaklastigini soyleriz, ve bunu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$$

olarak belirtiriz. Ya da

$s_n \rightarrow L$  olur,  $n \rightarrow \infty$  iken

eger her  $\epsilon > 0$  icin oyle bir tam sayi  $N$  var ise, ki bu  $N$  su sartlara uymali

$$|s_n - L| < \epsilon$$

$n \geq N$  oldugu her zaman icin.

Bir dizi yaklasmiyorsa, ona uzaklasan (divergent) dizi adi verilir. Bu her iki tur ile ayni derecede ilgileniyoruz.

Not: Tanimda  $N$ ’nin  $\epsilon$ ’a bagli oldugu goruluyor, eger  $\epsilon$  cok ufak ise mesela, o zaman  $N$ ’in oldukca buyuk olmasi gerekebilir. Bu acidan bakilince aslinda  $N$ ’nin  $\epsilon$ ’nun bir fonksiyonu oldugu soylenebilir. Bu durumu tam vurgulamak icin bazen  $N(\epsilon)$  yazmak daha iyi olabilir.

Not: Tanima dikkat edersek, sartlara uyan bir  $N$  bulununca, o  $N$  degerinden

daha büyük herhangi bir  $N$  de kullanabiliriz. Yani üstteki tanım bize herhangi bir  $N$  bulmamızı söyler, illa ki “en küçük”  $N$ ’i bulmamız gerekmez.

Tanım bunu söylemiyor olsa bile ibarenin asıl gücü  $N$ ’nin  $\epsilon$  ne kadar küçük olursa olsun bulunabiliyor olmasıdır. Eğer  $\epsilon$  büyük bir sayı ise  $N$ ’i bulmak kolay olur. Eğer  $\epsilon = 0.1$  için (ki bu sayı  $\epsilon$  türü sayılar için büyük sayılır) isleyen bir  $N$  bulursak, aynı  $N$  daha büyük  $\epsilon$  değerleri için de işleyecektir.

Örnek

Üstteki tanımı kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

olduğunu ispat edelim. Yalnız bunu belirtelim, üstteki tanım limitin  $1/2$  olacağını hesaplamak tekniği olarak verilmiyor. İfade limit kavramına kesin bir tanım getiriyor ama o limiti hesaplamak için kesin bir metot sunmuyor. Neyse ki cogumuz bu hesabi yapmak için yeterince calculus hatırlıyoruz, böylece limitin doğruluğunu ispatlamadan önce ne olduğunu bulabiliriz.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + 1/n^2} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + 1/n^2)} \\ &= \frac{1}{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bu hesap, eğer tüm adımların doğruluğu ispatlanırsa, limitin ne olduğunun da ispatı olabilirdi. Adımların doğruluğunu daha sonra göstereceğiz, böylece her seferinde  $\epsilon, N$  temelli argümanları kullanmamıza gerek kalmayacak. Şimdi  $\epsilon, N$  bazlı ispata geelim,

Pozitif bir  $\epsilon$ ’un verildiğini varsayalım. Öyle bir  $N$  (ya da  $N(\epsilon)$ , hangisini tercih ederseniz) bulmamız gerekiyor ki, dizide  $N$ . terimden sonraki her eleman  $1/2$ ’ye  $\epsilon$ ’dan daha yakın olsun, ve bu ifade doğru olsun

$$\left| \frac{n^2}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

ki  $n = N, n = N + 1, n = N + 1, N + 2, \dots$ . Sonuçtan geriye doğru gidersek isimiz kolaylaşır, yani verilen  $N$  için  $\epsilon$ ’nın ne kadar büyük olması gerektiğini

hesaplarsak. Ustteki tam deger (absolute deger) isaretinin icine bakalim,

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2} &= \frac{2n^2}{2(2n^2+1)} - \frac{2n^2+1}{2(2n^2+1)} \\ &= \frac{2n^2 - 2n^2 - 1}{2(2n^2+1)} = \frac{-1}{2(2n^2+1)}\end{aligned}$$

Tam deger alinince

$$\frac{1}{2(2n^2+1)} < \epsilon$$

olmali, ya da

$$4n^2 + 2 > \frac{1}{\epsilon}$$

Dikkat, tersine cevирince kucukluk isareti buyukluk oldu.

Bu ifadeye uyan en kucuk  $n$ , aradigimiz  $N$ . O zaman

$$N^2 > \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\epsilon} - 2 \right)$$

ifadesine uyan her tam sayi  $N$  bizim icin uygun. Illa ki en kucuk  $N$  olmasi gerekmez, en rahat olan  $N$  biraz buyukce olabilir, mesela eger sag taraftaki  $1/4\epsilon$  terimine (sag tarafta daha fazlasi var, ama eksi isareti bu terimi daha kucultecek nasil olsa) esit bir seyleri sol tarafta istiyorsak, onun karesini  $N$  olarak kabul ederiz,

$$N > \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$$

deriz.

Bu ornegin bize verdigi asil ders, aslinda, tanimin bize limit teorisini gelistirmek icin teorik / kesin (rigourous) bir yontem sunmasi ama bu limitlerin hesabini yapmak icin pratik bir yontem olmamasi. Bir limitin dogrulugunu hesaplamak icin nadiren boyle bir yonteme basvurulur.

Alt Dizinler (Subsequences)

Cauchy Kriteri

Bir dizinin hangi ozelligi onun yakinlastigini karakterize eder? “Karakterize

eder” kelimeleriyle gerekli ve yeterli (necessary and sufficient) bir durum arıyoruz ki bu durum gerçekteşiginde dizinin yakınlaştığını bilelim.

Her türlü diziye uygulanabilen böyle bir karakterizasyon Cauchy tarafından keşfedildi. Cauchy’nin bulduğu tanımın ilginç bir tarafı var, hiçbir nihai limit değerine referans yapmıyor. Sadece, son derece gevsek bir şekilde, bir dizinin terimleri birbiriyle rasgele (arbitrary) bağlamda, eninde sonunda (eventually) yaklaşırsa, o dizinin yakınlaşacağını söylüyor. Kriter şöyle:

Bir dizi  $\{s_n\}$  yaklaşıksaldır, eğer, ve sadece eğer her  $\epsilon > 0$  için bir tamsayı  $N$  var ise, ki

$$|s_n - s_m| < \epsilon$$

$n \geq N, m \geq M$  olmak koşuluyla.

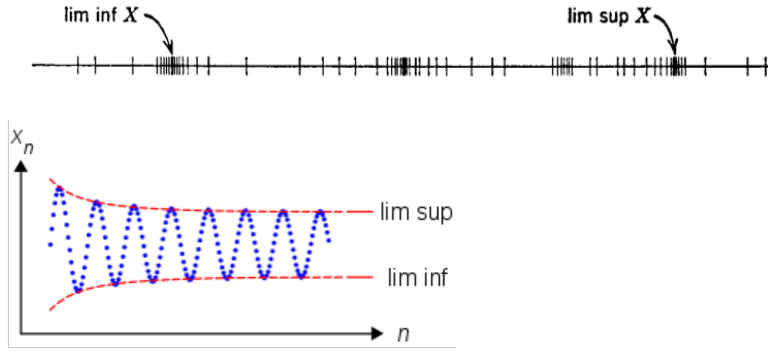
**Ispat**

Teorinin bu ögesi o kadar önemli ki kendine has yeni bir terminolojiyi hak ediyor. Üstteki ögeye uyan her diziye Cauchy dizisi adı veriliyor. Yani teori “bir dizi sadece ve sadece Cauchy dizisi ise yaklaşıksaldır” diyor. Bu terminoloji daha ileri matematikte (mesela temel alınan küme reel sayılar değil, daha cıtrefil uzaylar olduğu zaman) geçerli olmayabilecektir, ama bu durumda da gerektirdiği ek şartlar, ve ortaya koyduğu ifadenin kesinliği çok önemlidir.

Ispat biraz uzun, ve Bolzano-Weierstrass teorisini gerektirecek.

Eger  $S$  kumesi “yukaridan sinirlanmis (bounded from above)” ise o zaman  $x \in S$  icin oyle bir  $y$  var demektir ki her  $x$  icin  $x \leq y$  olsun. Yani  $S$  icindeki her deger bu  $y$  degerinden kucuk olsun. Bu  $x$  degerine  $S$ ’in supremum’u da deniyor, ve  $\sup(x)$  ya da  $\sup\{x : x \in S\}$  olarak gosterilebiliyor. Benzer sekilde kumenin en alt siniri, yani infimum degeri  $\inf(x)$  ya da  $\inf\{x : x \in S\}$  olarak gosteriliyor.

Eger elimizde bir seri (sequence) var ise o zaman sartlari biraz daha gevsetmek iyidir, burada limit superior kavrami devreye girer. Inf ve sup degerleri alti / ustü deger olamaz, ama limit superior oyle bir sayidir ki onun sonrasinda sonlu (finite) / belli sayida kume ogesi olmasina izin verilir. Limit superior aslında bir serinin yaklastigi (converge) degerden baskasi degildir.



Formel olarak diyelim ki  $\{x_n\}$  bir seri, ve diyelim ki bir reel sayi  $S$  var, ki bu reel sayi su sartlari tatmin ediyor 1) Her  $\epsilon > 0$  icin bir  $N$  var, oyle ki her  $n > N$  icin  $x_n < S + \epsilon$  ve 2) her  $\epsilon > 0$  ve  $M > 0$  icin bir  $n > M$  var ki  $x_n > S - \epsilon$ . O zaman  $S$  sayisina  $\{x_n\}$  serisinin limit superior’u denir.

Bu tanimin soylemeye calistigi serinin yaklastigi degerden sonra ve once sonlu buyuklukte (bir pencere tanımlarsak bu pencere icinde sonlu sayida eleman olacaktır (sonsuz degil). Bu pencerenin tanımlanabiliyor olmasi, onun makul bir noktada olmasini gerektirir, ki bu nokta da yaklasilan degerden baskasi degildir.

Limit inferior bunun tersidir,

$$\liminf x_n = -\limsup(-x_n)$$