MIT OCW ODE - Ders 13

Bugunku dersimizin hedefi ozel cozumler bulmak. Formu yazalim

$y'' + Ay' + By = f(x)$

Ve genel cozum $y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$ formunda olacak.

Gercek su ki esitligin sag tarafina yazilabilecek her fonksiyon o kadar ilginc degil. Ilginc olanlardan bir tanesi ustel (exponential) fonksiyonlar, yani e^{ax} formundaki fonksiyonlar, ki cogunlukla $a < 0$ kullanilir. Diger bazi ilginc olanlar

$sin\omega x$

$cos\omega x$

gibi salinim ornekleri, ki bunlar da elektriksel devrem baglaminda alternatif AC/DC akimi temsil ediyorlar.

Ya da "gittikce yokolan salinim" ilginc, Burada

$e^{ax}sin\omega x$

$e^{ax}cos\omega x$

gibi ornekler var. Ama aslinda ustteki tum ilginc fonksiyonlar genel tek bir forma baglanabilir, bu form icin ustel sayinin kompleks olmasina izin vermek gerekiyor. Form soyle

$e^{(a+i\omega)x}$

$\omega = 0$ ise o zaman e^{ax} elde ederim. $a = 0$ ise $sin\omega x$, $cos\omega x$ elde ederim. Ikisi de sifir degilse o zaman gittikce yokolan salimi elde ederim.

Bundan sonra habire $a + i\omega$ yazmamak icin onun yerine α kullanacagiz, α'yi gorunce onun bir kompleks sayi oldugunu anlayin. Yani esitligin sag tarafi $e^{\alpha x}$ olacak.

Birazdan gorecegimiz uzere, bu tur bir girdi kullanmak aslinda kolaylikla cozum sagliyor. Yerine gecirme (substitution) kuralini kullanarak cozume erismek cok kolay.

$y'' + Ay' + By = f(x)$

Polinom operator kullanirsak

$(D^2 + AD + B)y = f(x)$

Parantez icindekine $p(D)$ diyelim. Ve su formulu ortaya atalim.

$p(D)e^{\alpha x} = p(\alpha)e^{\alpha x}$

Bu yerine gecirme kurali (substitution rule).

Ispat

$(D^2 + AD + B)e^{\alpha x}$

$= D^2 e^{\alpha x} + ADe^{\alpha x} + Be^{\alpha x}$

$= \alpha^2 e^{\alpha x} + A\alpha e^{\alpha x} + Be^{\alpha x}$

$= e^{\alpha x}(\alpha^2 + A\alpha + B)$

Parentez icinin $p(\alpha)$ oldugunu goruyoruz.

$= e^{\alpha x} p(\alpha)$

Simdi bunlari yeni bir teori icin kullanalim

Ustel Girdi Teorisi

Bu teori Ustel Cevap Formulu (Exponential Response Formulu -ERF- olarak ta biliniyor).

ODE

$y'' + Ay' + By = e^{\alpha x}$

yani

$p(D)y = e^{\alpha x}$

icin ozel cozum sudur

$y_p = \dfrac{e^{\alpha x}}{p(\alpha)}$

Bu teori bu dersin en onemli teorilerinden biri. Bu dersteki pek cok kavrami yanyana getiriyor.

Ispat

Ispatlamak icin cozum y_p'yi ana denkleme koyalim ve alttaki ifadenin dogru olup olmayacagina bakalim. ODE'yi tekrar ifade edelim,

$$p(D)y = e^{\alpha x}$$

ama y yerine y_p koyalim, ve bakalim ifadenin sol tarafini donusturunce, sag taraftaki ayni sonuc cikacak mi?

$$= p(D)y_p$$

$$= p(D)\frac{e^{\alpha x}}{p(\alpha)}$$

Ust taraf icin yerine gecirme kuralini kullanalim

$$= \frac{p(\alpha)e^{\alpha x}}{p(\alpha)}$$

$$= e^{\alpha x}$$

Sag tarafta ayni ifadeye eristik, demek ki teori dogru. Peki ya $p(\alpha) = 0$ olsaydi? Bu onemli bir istisnai durum, ama problemde boyle olmadigini farzediyoruz.

Ornek

$$y'' - y' + 2y = 10e^{-x}sin(x)$$

Sag taraf gittikce yokolan (decaying) bir salinim. Genel cozumu bul.

Ozel cozumu bulalim ve sag tarafi kompleklestirelim.

$$(D^2 - D + 2)y = 10e^{(-1+i)x}$$

Komlekslestirmeyi nasil yaptim? Dikkat edersek, $10e^{-x}sin(x)$ ifadesi $10e^{(-1+i)x}$ ifadesinin kompleks kismini temsil ediyor.

$$e^{(-1+i)x} = e^{-x}e^{ix}$$

Euler acilimina gore $e^{ix} = cos(x) + isin(x)$, sadece hayali kismi alirsak

$$e^{-x}sin(x)$$

Basindaki 10'u da eklemeyi unutmuyoruz tabii. Bu teknigi daha once de kullanmistik, ve kullandigimiz zaman orijinal ODE'deki degiskenin uzerine bir dalga isareti koymustuk, cunku elimizde farkli bir ODE var, farkli ODE'den aldigimiz cozumun kompleks kismini almak gerekecek. Yeni formul

$(D^2 - D + 2)\tilde{y} = 10e^{(-1+i)x}$

Ozel cozum ne? ERF'ten hareketle

$$\tilde{y}_p = \frac{10e^{(-1+i)x}}{(-1+i)^2 - (-1+i) + 2}$$

$$= \frac{10e^{(-1+i)x}}{3 - 3i}$$

$$= \frac{10}{3}\frac{(1+i)}{2}e^{-x}\Big(cos(x) + isin(x)\Big)$$

y_p, $\tilde{y}_p$'nin hayali kismi olacak

$$\frac{5}{3}e^{-x}(cos(x) + sin(x))$$

Bu son formdan hoslanmiyorsak, onu hemen cevirebiliriz, dik ucgeni hatirlayalim, kenarlar 1 ve 1 ise hipotenusu $\sqrt{2}$

$$= \frac{5}{3}e^{-x}\sqrt{2}cos(x - \frac{\pi}{4})$$