

MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 13

Lagrange Carpanlari (Multipliers)

Amac $f(x, y, z)$ gibi birden fazla degisken iceren bir fonksiyonu maksimize etmek, degisik olan, x, y, z degiskenlerinin birbirinden bagimsiz olmamasi. Bu degiskenlerin arasindaki iliski $g(x, y, z) = c$ gibi bir fonksiyon tarafından gosteriliyor olabilir, c bir sabittir. Yani $f(x, y, z)$ 'i minimize ya da maksimize ediyoruz ve bunu sadece $g(x, y, z) = c$ sartina / sinirlama ifadesine (constraint) uyan x, y, z degerleri icin yapiyoruz.

Bunun icin hangi teknigi kullaniriz? Yollardan biri, eger sinirlama ifadesi basit ise, belki bir degiskeni cebirsel olarak cozebiliriz (digerleri baglaminda ifade ederek), sonra geri f 'e sokariz, Boylece klasik bir min / maks problemi elde ederiz, ki o tur bir problemi cozmeyi artik biliyoruz.

Fakat bazen x, y, z degiskenleri icin analitik cozum mumkun olmaz, o zaman farkli teknikler kullanmamiz gerekir. Bu derste ogrenecegimiz teknikler bunlar olacak.

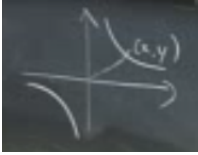
Uygulama baglaminda, Lagrange Carpanlari bize niye ilgilendiriyor? Belki fizik, termodinamik dersinde gormussunuzdur, sicaklik, hacim ve basinc degerleri vardir, ve bu degerler birbirinden bagimsiz degildir. Termodinamikte $pv = nrt$ denklemi vardir, gerci burada analitik olarak basitlestirme yapabiliriz, ama bazi sartlarda tum degiskenleri oldugu gibi tutmayi isteyebiliriz.

Simdiye kadar min / maks problemleri icin gordugumuz kritik nokta bulma tekniklerinin burada ise yarayamacagini hemen belirtelim. O kritik noktalar $g(x, y, z) = c$ sinirlama ifadesini tatmin etmiyor olabilirler. Baska bir seye ihtiyacimiz var.

Ornek

Hiperbol $xy = 3$ uzerinde olan ve orijine en yakin noktayi bul.

Aslinda bu soruyu temel geometri kullanarak cozebiliriz, fakat burada Lagrange Carpanlari kullanarak cozecegiz, cunku iyi bir ornek.



Neyi minimize edelim? Mesela $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ olur mu? Olabilir, ama karekok ifadesinden kurtulursak daha iyi olur.

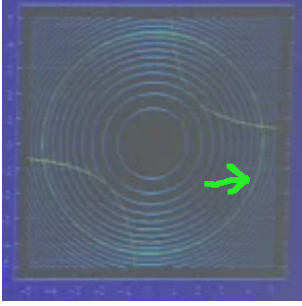
O zaman

$$\min f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\text{ki, } xy = 3$$

Yani sinirlama ifadesi $g(x, y) = xy$ olarak sectik.

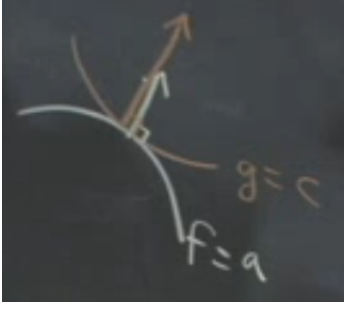
Grafiğe bakalım. Yuvarlaklar $f(x, y)$ konturları, yeşil okla gösterilen mesela $f(x, y) = 20$ konturu. Bu kontur üst sağ köşe ve sol alt köşede gösterilen hiperbolu kesiyor mu? Evet. Fakat $f(x, y) = 10$, vs. diyerek daha küçük yuvarlaklar elde edebilir miyim? Evet. Fakat bir noktadan sonra bu halkalar hiperbolu kesmeyecektir.



Aradığımız x, y değerleri hiperbole teğet olan, olabilecek en küçük yuvarlak.

Çözüm için teğetlik kavramından faydalanabiliriz. Eğer olabilecek en minimal f , her iki fonksiyonun kesit eğrilerinin teğet olduğu noktada ise, bu noktayı bulmaya uğrasabilirim.

İki kesit eğrisi birbirine teğet ise, onların teğet düzlemi paraleldir, eğer öyleyse, bu düzlemlerin normaleri birbirine paralel olmalıdır.



Bu normallerin ayni boyda olmasi gerekmez, yukaridaki gibi, ama paralel olmalari gerekir.