

QP

İçinde eşitsizlikleri de barındıran ve karesel olan bir matematiksel sistemi çözmek için karesel programlama (quadratic programming) tekniklerini kullanabiliriz. Problemler şu şekilde verilir:

$$\frac{1}{2}x^T Qx + p^T x \text{ fonksiyonunu minimize et}$$

şu koşullara uymak şartıyla (subject to)

$$Gx \leq h \text{ (eşitsizlik koşulu)}$$

$$Ax = b \text{ (eşitlik koşulu)}$$

Küçük harfli gösterilen değişkenler vektördür, büyük harfler ise bir matrisi temsil ederler.  $x$  içinde diğer bilinmeyenler  $x_1, x_2, \dots$  olarak vardır, bulmak istediğimiz değerler buradadır.

Somut örnek olarak suna bakalım:

$$2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2 \text{ fonksiyonunu minimize et}$$

koşullar:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ (eşitsizlik koşulları)}$$

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ (eşitlik koşulu)}$$

Fakat bu formül şu anda matris formunda değil. Matris formuna geçmek için iki aşama var. Önce  $x$  değişkenlerinin birbiri ve kendileri ile çarpım durumlarını halledelim. Öyle bir  $Q$  matrisi bulmalıyız ki, aşağı boş olan  $Q$  matrisinin değerleri doldurularak, çarpım yapıldığında  $x$  değişkenlerinin tüm çarpım ilişkilerini bulsun. Çarpım ilişkileri nelerdir? Formülün  $2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  kısmıdır.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$Q$  matrisinin 1, 2, .. gibi kordinatlari  $x_1, x_2, ..$ 'ye tekabul ediyor olacaklar. (1,1) kordinatlari  $x_1$ 'in kendisi ile carpimini,  $x_1^2$ 'i temsil eder, (1,2) ise  $x_1x_2$ 'yi temsil eder, vs. O zaman (1,1) icin 2 sayisini veriririz, cunku  $x_1^2$ 'nin basinda 2 degeri var. (2,2) icin 1 degeri lazim cunku  $x_2^2$ 'nin basinda sayi yok (yani '1' degeri var).

(1,2) ve (2,1) ilginc cunku ikisi de aslinda  $x_1x_2$ 'i temsil ediyorlar cunku  $x_1x_2 = x_2x_1$ . O zaman (1,2) ve (2,1) icin 0.5 degeri verirse,  $0.5x_1x_2 + 0.5x_2x_1$ 'i kisaltip  $x_1x_2$  haline getirebiliriz. Sonuc

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol edelim:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 + 0.5x_2 & 0.5x_1 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 0.5x_2x_1 + 0.5x_1x_2 + x_2^2 \\ &= 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \end{aligned}$$

$p$  vektörü ise, her terimin, tek basına ana formüle nasıl ekleneceğini kontrol ediyor. Elimizde  $x_1 + x_2$  olduğuna göre  $p = [1, 1]$  yeterli olacaktır, bakalım:  $[1, 1]^T [x_1, x_2] = x_1 + x_2$

Şimdi eşitsizlik koşulları. Bizden istenen  $x_1 \geq 0$  ve  $x_2 \geq 0$  şartlarını  $Gx \leq 0$  formunda temsil etmemiz. Burada önemli nokta matris formuna geçerken bir yandan da  $\geq$  işaretini tersine döndürmemiz, yani  $\leq$  yapmamız. Bu çok dert değil, değiskeni  $-1$  ile çarparsak işareti tersine döndürebiliriz cunku  $x_1 \leq 0$  ile  $-x_1 \geq 0$  aynıdır. O zaman  $Gx$  şöyle olacak:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esitlik kosullari

Esitlik kosullari icin problemimizin istediklerini  $Ax = b$  formuna uydurmamiz lazim.  $x_1 + x_2$ 'yi nasil forma sokariz?  $A = [1, 1]$ ,  $b = 1$  ile

$$[1, 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

## CVXOPT

Bu paket ile karesel denklemleri minimizasyon / maksimizasyon baglaminda cozmek mumkundur. Ustte buldugumuz degerleri altta gorebiliyoruz. Q esitliginde 2 ile carpim var, bunun sebebi karesel denklem formunun basinda  $\frac{1}{2}$  carpimi olmasi, boylece bu iki carpim birbirini dengeliyor.

```
from cvxopt import matrix
from cvxopt import solvers
Q = 2*matrix([ [2, .5], [.5, 1] ])
p = matrix([1.0, 1.0])
G = matrix([[-1.0, 0.0], [0.0, -1.0]])
h = matrix([0.0, 0.0])
A = matrix([1.0, 1.0], (1,2))
b = matrix(1.0)
sol=solvers.qp(Q, p, G, h, A, b)
print sol['x']
```

Sonuc  $x_1$  icin  $[ 2.50e-01]$  ve  $x_2$  icin  $[ 7.50e-01]$  olmalı.

Bazi notlar: A matrisi yaratilirken (1,2) kullanimi goruluyor, bu matrisin boyutlarini tanımlamak icin. Cvxopt paketi bu arada Numpy formati degil kendi matris, vektor objelerini kullaniyor, ama ikisi arasinda gidip gelmek mumkun.

## References

<http://abel.ee.ucla.edu/cvxopt/examples/tutorial/qp.html>

<http://www.mblondel.org/journal/2010/09/19/support-vector-machines-in-python/>