

Kesit Seviyeleri, Kenar Bazlı İmaj Gruplamak

Bir dijital imajı renklere, objelere göre belli parçalara bölmek (segmentation) için, matematiksel bir formül kullanmak iyi çözümlerden biridir. Bunu yapmanın bazı yolları var. Basitleştirerek bir örnek verelim: diyelim ki gruplama için elimizdeki formül bir yuvarlak formülü $x^2 + y^2 - c = 0$, ki c bir sabit. Bu formülü x ve y koordinatları üzerinde bastığımız zaman radius'u \sqrt{c} olan bir çember elde ederiz. Gruplama için bu çemberi büyütüp küçülttüğümüzü farzedelim, çember imaj üzerindeki istediğimiz bölüme en iyi uydugu anda gruplamayı başarılı olarak kabul ediyoruz.

Fakat problem burada: eğer imajda birden fazla grup var ise, o zaman birden fazla çember gerekecektir, bu sefer algoritmik olarak üstteki formülü ikinci, üçüncü kere yaratmamız, ve o formların o gruplara uyumunu ayrı ayrı takip etmemiz gerektirdi. Ya da diyelim ki özyineli (iterative) bir uydurma işlemi takip ediyoruz, bu işlem sırasında belki iki çemberin birleşmesi gerekse, o zaman iki formülü silip, yerine yenisini oluşturmakla uğrasmak gerekli olacaktı. Bunlar hem matematiksel, hem kodlama açısından kulfet oluşturmaktadır.

Kesit Seviyeleri kavramını kullanarak bu işi daha basitleştirebiliriz. Diyelim ki bölme görevini yapan ϕ adlı fonksiyonumuzu 2 boyutlu olmak yerine 3 boyutlu eksenle tanımladık, ve, 2 boyutta bölme yapma görevini onun bir kesitine verdik. Kesit derken, alttaki üç boyutlu fonksiyonu yatay olarak bir noktadan “kestiğimizi” farz ediyoruz, ve o kesit üzerinde geçen ϕ değerlerine bakıyoruz.

Bakıcı acılarımızı, tanımlamamızı değiştirerek, bazı avantajlar elde etmeyi umuyoruz aslında. Altta iki tane ϕ fonksiyonu ve onların altında kesitlerini görebiliriz.

Kesit Seviyeleri tekniğini kullanarak elde ettiğimiz avantaj nedir? Artık sadece **tek** bir ϕ fonksiyonu kullanarak 2 boyutlu imajımız üzerinde birbirinden ayrı gruplamalar yaratabiliyoruz. Bu gruplar birbiri ile birleşebilir, ayrılabilir, bu artık bizi ilgilendirmiyor. Biz sadece 3. boyuttaki ϕ fonksiyonunu değiştirmekle uğrascagız, imaj üzerindeki gruplamalar ise o fonksiyonun 2. boyuta yansımaları (projection) üzerinden kendiliğinden gerçekleşecekler.

Matematiksel olarak ϕ fonksiyonunu nasıl temsil ederiz? ϕ fonksiyonu x , y , boyutlarını alıp bize bir üçüncü z boyutu dondurmeli, ayrıca bu fonksiyonu imaj parçalarına ayırma işlemini gerçekleştirmek için kademeli olarak değiştirmeyi planladığımıza göre, o zaman bir t değişkeni de gerekiyor. Yani $\phi(x, y, t)$ fonksiyonu. Gruplama için kullanılacak kesiti ise sıfır kesiti olarak alalım, yani $\phi(x, y, t) = 0$. Doğal olarak

$$\frac{d}{dt}(\phi(x, y, t) = 0) = 0$$

Şimdi x , ve y değişkenlerinin zaman göre değişimini formüle bir şekilde dahil etmek lazım. Bunun için sıfır kesit seviyesi üzerinde bir parçacık hayal edilir, ve bu parçacığın gittiği yol $x(t)$, ve $y(t)$ olarak tanımlanır. O zaman

$$\frac{d}{dt}(\phi(x(t), y(t), t) = 0) = 0$$

Tam diferansiyel formülünden hareketle:

$$\begin{aligned}
d(\phi(x(t), y(t), t)) &= \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = 0 \\
\frac{d(\phi(x(t), y(t), t))}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \\
\frac{d(\phi(x(t), y(t), t))}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \phi_t = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Temsilen daha kısa bir isaret kullanmak gerekirse, ∇ ile ϕ 'nin gradyanini (gradient) alarak, elde edilecek vektörün nokta carpimini kullanabiliriz. O zaman formül 1 daha kısa olarak:

$$\phi_t + \nabla \phi \cdot \vec{V} = 0$$

olarak temsil edilebilir, ki

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

$$\vec{V} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

İki vektörün nokta carpımı bilindiği gibi sırayla her iki vektörün sırasıyla uyan elemanlarının birbirleri ile carpılması ve o carpımların toplanmasıdır.

\vec{V} vektörü neyi temsil eder? Formüle göre bu vektör ϕ 'nin üzerindeki değişimi etkiliyor, ve bu değişimler t 'nin değişimine göre tanımlandığına göre bu değerler “hız” olarak tanımlanabilir. İmaj bağlamında düşünürsek mesela ϕ renklerin aynı olduğu yerlerde yüksek hızda, renklerin değiştiği yerler düşük hızda değişebilir şeklinde bir kurgu yapılabilir, iste bu bölgelerde değişiminin hızını \vec{V} ile gösterebiliriz.

\vec{V} yerine kesit seviyelerine dik olan (normal) vektörler ile çalışmak isteseydik, \vec{V} 'yi dik ve teğet bileşenlerine ayırarak tekrar temsil edebiliriz: $\vec{V} = V_N \vec{N} + V_T \vec{T}$. Bu formülde \vec{T} teğet, \vec{N} dik vektörler, N ve T skalar. Yerine koyalım:

$$\phi_t + \nabla \phi \cdot (V_N \vec{N} + V_T \vec{T}) = 0$$

ϕ 'ye göre dik vektörün diğer bir formülü $\vec{N} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ olduğuna göre

$$\phi_t + (\nabla \phi \cdot V_N \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + \nabla \phi \cdot V_T \vec{T}) = 0$$

Devam edelim: $\nabla \phi$ yüzeye dik olduğuna göre, bu dik vektörün teğet olan \vec{T} ile noktasal carpımı sıfır değerini verecektir, o carpım formülden atılabilir. Kalanlar:

$$\phi_t + (\nabla \phi \cdot V_N \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}) = 0$$

Daha da kısaltabiliriz: $\nabla \phi \cdot \nabla \phi = |\nabla \phi|^2$ olduğunu biliyoruz, gradyanın kendisi ile noktasal carpımı, o gradyan vektörünün uzunluğunun karesidir. Daha genel olarak, bir vektörün uzunluğu, o vektörün kendisi ile noktasal carpımının kareköküdür. Aynı

sey. O zaman en son formülde bu carpımı gerçekleştirip, uzunluk olarak yazalım:

$$\phi_t + V_N \frac{|\nabla \phi|^2}{|\nabla \phi|} = 0$$

$$\phi_t + V_N |\nabla \phi| = 0$$

Şimdi bu formül hakkında biraz anlayış geliştirelim. Eğer elimizdeki bir ϕ seviye kesitinin seklen olduğu gibi kalmasını ama sadece küçülmesini isteseydik, ϕ 'nin normalinin tersi yönünde bir büyüme tanımlamamız gerekirdi. Normal vektör dışı doğru işaret ettiğine göre üstteki formülde mesela $V_N = -1$ tanımlayabilirdik. O zaman

$$\phi_t + -1 |\nabla \phi| = 0$$

$$\phi_t = |\nabla \phi|$$

Hesapsal olarak bunu nasıl gerçekleştiririz? 80 x 80 boyutunda bir matris içinde ϕ fonksiyonu ayrışal olarak tutalım. Yani 80 tane x, 80 tane ayrı y değeri var, her x ve y değerlerin kombinasyonlarına tekabül eden ϕ değerleri bu matris içinde. Gradyanın ne olduğunu hatırlayalım. Gradyan

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

olarak tanımlıdır, ve her (x_i, y_i) noktasındaki $\phi(x_i, y_i)$ değerine göre değişik bir vektör sonucunu getirecektir. Bilgisayar dünyasında parçalı türevler hesapsal “farklılıklara” dönüşürler, `phi` matrisindeki farklılıkları Python ile

```
gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
```

olarak hesaplayabiliriz. Üstte elimize geçen gradyan dizinlerindeki değerler ile $|\nabla \phi|$ büyüklüğünü hesaplayabiliriz, ve bu sonucu ϕ üzerindeki değişim oranı ϕ_t olarak kabul ederiz. O zaman ϕ_t ile zaman t değişimi dt carptığımız zaman ele geçecek olan ϕ 'nin değişimidir. Dongunun her basamağında eski `phi` değerlerine bu farkları eklediğimiz zaman ϕ fonksiyonu istediğimiz gibi evrilecektir.

Altındaki kodda bizim başlangıç ϕ 'miz kenarlardan w uzaklığında içi boş bir kutu olacak. Sıfır seviyesindeki kesit seviyesinin nasıl iki boyutlu görüntüdeki kırmızı çizgilere tekabül ettiğini görebiliriz.

Listing 1: `active1.py`

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import plot_phi
import time

# initial function phi - level set is a square 4 pixels
# away from borders on each side, in 3D it looks like an empty
# box
c0=4; w=4
nrow, ncol= (80,80)
phi=c0*np.ones((nrow,ncol))
```

```

phi[w+1:-w-1, w+1:-w-1]=-c0
plot_phi.plot_phi(phi)

dt=1.

iter=0

plt.ion()

while iter < 20:
    # gradient of phi
    gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
    # magnitude of gradient of phi
    absGradPhi=np.sqrt(gradPhiX**2+gradPhiY**2)
    dPhiBydT = 1 * absGradPhi
    # level set evolution equation
    phi = phi + ( dt * dPhiBydT )
    iter=iter+1
    time.sleep(0.6)
    plt.hold(False)
    CS = plt.contour(phi,0, colors='r')
    plt.draw()
    plt.hold(False)
    iter += 1

```

Ustteki kod isleyince sifir kesit seviyesinin (kirmizi cizgiler) olduklari gibi kuculduklarini gorecegiz.

Ortalama Egim (Mean Curvature) Kullanmak

Eger sabit hiz yerine sifir kesit seviyesinin herhangi bir noktada ne kadar “egri” olduguna gore ilerlemesini isletseydik ne olurdu? Diyelim ki cok egri bolgelerde cok hizli, az egik (duz, duze yakin) bolgelerde ilerleme az hiz istiyoruz. O zaman hangi sekille baslarsa baslasindalar ϕ kesiti sonucta bir cember sekline dogru evrilecektir. Ortalama egim (mean curvature) hesabi icin su denklem kullanilir:

$$\kappa = -div\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)$$

Bu formulun turetilmesini burada yapmayacagiz. Python kodu soyle:

Listing 2: active2.py

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import time

# initial function phi - level set is a square 4 pixels
# away from borders on each side, in 3D it looks like an empty
# box
c0=2; w=2
nrow, ncol= (30,30)
phi=c0*np.ones((nrow,ncol))
phi[w+1:-w-1, w+1:-w-1]=-c0

```

```

dt=1.

phiOld=np.zeros((nrow,ncol))

iter=0

plt.ion()

while iter < 50:
    # gradient of phi
    gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
    # magnitude of gradient of phi
    absGradPhi=np.sqrt(gradPhiX**2+gradPhiY**2)

    # normalized gradient of phi - eliminating singularities
    normGradPhiX=gradPhiX/(absGradPhi+(absGradPhi==0))
    normGradPhiY=gradPhiY/(absGradPhi+(absGradPhi==0))

    divYnormGradPhiX, divXnormGradPhiX=np.gradient(normGradPhiX)
    divYnormGradPhiY, divXnormGradPhiY=np.gradient(normGradPhiY)

    # curvature is the divergence of normalized gradient of phi
    K = divXnormGradPhiX + divYnormGradPhiY
    dPhiBydT = K * absGradPhi # makes everything circle

    # level set evolution equation
    phi = phi + ( dt * dPhiBydT )
    iter=iter+1
    time.sleep(0.6)
    plt.hold(False)
    CS = plt.contour(phi,0, colors='r')
    plt.draw()
    plt.hold(False)
    iter += 1

```

Imaj Gruplamak

Imaji bolumlere ayirmak icin (segmentation) birkac faktorun bilesimi kullaniliyor. Koseleri kullanan aktif kontr (edge based active contour) yonteminde ortalama egim ve imajin piksel degerlerinin farkliliklari (image gradient) ayni anda kullanilir. Yani kesit seviyesini ilerletirken hizi hem egime oranliyoruz, hem de imaj piksel renk degerleri arasindaki farka ters oranda hizlandiriyor, ya da yavaslatiyoruz. Boylece kesit seviyemiz renk farklilikligi cok olmayan yani buyuk bir ihtimalle tek bir objeye ait bir bolgede hizla ilerliyor, buyuk renk farkinin oldugu buyuk bir ihtimalle bir kenar noktasina gelince ise yavasliyor. O sirada kesit seviyesinin geri kalan taraflari tabii ki baska hizlarda hareket ediyor olabilirler, zaten isin puf noktası burada, sonunda resim bolgelere ayrilmis oluyor. Bu kodu da `active3.py` icinde bulabilir, `active4.py` icinde ise surekli degisim sonrasi sayisal bazi yan etkilerden dolayi ϕ 'nin dejenere olmasi sonucu onu "tekrar bastan olusturan (reinitialization)" iceren bir kisim var. Fakat teknigin ozu her iki kod icinde de gorulebilir.

Bitirirken onemli gozlemi vurgulayalım. Problemi matematiksel olarak temsil ed-

erken, hedefe dogru turetirken surekli (continuous) alemde, surekli, kesintisiz fonksiyonlarla is yapiyoruz. Hesaplama ani gelince surekli fonksiyonlari ayriksal (discrete) hale ceviriyoruz, iste uygulamali matematigin hesapsal kismi burada devreye giriyor. Fakat diferansiyel denklemler, fonksiyonlar, turevler gibi surekli matematigin kavramlari cok onemli, bunlar olmasa problemi soyut bir sekilde temsil edemez, ve basitlestiremezdik. Temel matematigin kavramlarini kullanirken yuzyillarin matematiksel bilgisi devreye girebiliyor, matematigin en yogun sekilde kullanildigi fizikten bol bol teknik alinabilir. Yani soylemek istedigimiz problemi cozmek icin hemen kodlamaya baslamiyoruz, dusunsel eylemin onemli bir kismi matematiksel formullerle (belki kalem kagitla) yapiliyor.

Listing 3: active3.py

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.signal as signal
import scipy.ndimage as image
import time

def gauss_kern():
    """ Returns a normalized 2D gauss kernel array for convolutions """
    h1 = 15
    h2 = 15
    x, y = np.mgrid[0:h2, 0:h1]
    x = x-h2/2
    y = y-h1/2
    sigma = 1.5
    g = np.exp( -( x**2 + y**2 ) / (2*sigma**2) );
    return g / g.sum()

Img = plt.imread("twoObj.bmp")
Img = Img[:, :-1]
g = gauss_kern()
Img_smooth = signal.convolve(Img, g, mode='same')
Iy, Ix = np.gradient(Img_smooth)
absGradI = np.sqrt(Ix**2 + Iy**2);
rows, cols = Img.shape

# initial function phi - level set is a square 4 pixels
# away from borders on each side, in 3D it looks like an empty
# box
c0=4
w=4
nrow, ncol=Img.shape
phi=c0*np.ones((nrow, ncol))
phi[w+1:-w-1, w+1:-w-1]=-c0

# edge-stopping function
g = 1 / (1+absGradI**2)

# gradient of edge-stopping function
gy, gx = np.gradient(g)

# gradient descent step size
```

```

#dt=.4
dt=1.

# number of iterations after which we reinitialize the surface
num_reinit=10

phiOld=np.zeros((rows,cols))

# number of iterations after which we reinitialize the surface
iter=0

plt.ion()

while True:
    # gradient of phi
    gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
    # magnitude of gradient of phi
    absGradPhi=np.sqrt(gradPhiX**2+gradPhiY**2)
    # normalized gradient of phi - eliminating singularities
    normGradPhiX=gradPhiX/(absGradPhi+(absGradPhi==0))
    normGradPhiY=gradPhiY/(absGradPhi+(absGradPhi==0))

    divYnormGradPhiX, divXnormGradPhiX=np.gradient(normGradPhiX)
    divYnormGradPhiY, divXnormGradPhiY=np.gradient(normGradPhiY)

    # curvature is the divergence of normalized gradient of phi
    K = divXnormGradPhiX + divYnormGradPhiY
    tmp1 = g * K * absGradPhi
    tmp2 = g * absGradPhi
    tmp3 = gx * gradPhiX + gy*gradPhiY
    dPhiBydT =tmp1 + tmp2 + tmp3

    phiOld=phi
    # level set evolution equation
    phi = phi + ( dt * dPhiBydT )
    iter=iter+1
    if np.mod(iter,10)==0:
        time.sleep(0.6)
        plt.imshow(Img, cmap='gray')
        plt.hold(True)
        CS = plt.contour(phi,0, colors='r')
        plt.draw()
        plt.hold(False)

```

Listing 4: active4.py

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.signal as signal
import scipy.ndimage as image
import time
from scipy import ndimage

def bwdist(a):
    """
    this is an intermediary function, 'a' has only True, False vals,

```

```

    so we convert them into 0, 1 values — in reverse. True is 0,
    False is 1, distance_transform_edt wants it that way.
    """
    b = np.ones(a.shape)
    b[a==True] = 0.
    return ndimage.distance_transform_edt(b)

def gauss_kern():
    """ Returns a normalized 2D gauss kernel array for convolutions """
    h1 = 15
    h2 = 15
    x, y = np.mgrid[0:h2, 0:h1]
    x = x-h2/2
    y = y-h1/2
    sigma = 1.5
    g = np.exp( -( x**2 + y**2 ) / (2*sigma**2) );
    return g / g.sum()

Img = plt.imread("twoObj.bmp")
Img = Img[:, :-1]
g = gauss_kern()
Img_smooth = signal.convolve(Img, g, mode='same')
Iy, Ix = np.gradient(Img_smooth)
absGradI = np.sqrt(Ix**2 + Iy**2);
rows, cols = Img.shape

# initial function phi — level set is a square 4 pixels
# away from borders on each side, in 3D it looks like an empty
# box
c0=4
w=4
nrow, ncol=Img.shape
phi=c0*np.ones((nrow, ncol))
phi[w+1:-w-1, w+1:-w-1]=-c0

# edge-stopping function
g = 1 / (1+absGradI**2)

# gradient of edge-stopping function
gy, gx = np.gradient(g)

# gradient descent step size
#dt=.4
dt=1.

# number of iterations after which we reinitialize the surface
num_reinit=10

phiOld=np.zeros((rows, cols))

# number of iterations after which we reinitialize the surface
iter=0

plt.ion()

```



```

#while np.sum(np.sum(np.abs(phi-phiOld))) != 0:
while True:
    # gradient of phi
    gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
    # magnitude of gradient of phi
    absGradPhi=np.sqrt(gradPhiX**2+gradPhiY**2)
    # normalized gradient of phi - eliminating singularities
    normGradPhiX=gradPhiX/(absGradPhi+(absGradPhi==0))
    normGradPhiY=gradPhiY/(absGradPhi+(absGradPhi==0))

    divYnormGradPhiX, divXnormGradPhiX=np.gradient(normGradPhiX)
    divYnormGradPhiY, divXnormGradPhiY=np.gradient(normGradPhiY)

    # curvature is the divergence of normalized gradient of phi
    K = divXnormGradPhiX + divYnormGradPhiY
    tmp1 = g * K * absGradPhi
    tmp2 = g * absGradPhi
    tmp3 = gx * gradPhiX + gy*gradPhiY
    dPhiBydT =tmp1 + tmp2 + tmp3
    #dPhiBydT = K * absGradPhi

    phiOld=phi
    # level set evolution equation
    phi = phi + ( dt * dPhiBydT )
    iter=iter+1
    if np.mod(iter , num_reinit)==0:
        # reinitialize the embedding function
        # after num_reinit iterations
        phi=np.sign(phi)
        phi = (phi > 0) * (bwdist(phi < 0)) - \
            (phi < 0) * (bwdist(phi > 0))

    if np.mod(iter ,10)==0:
        time.sleep(0.6)
        plt.imshow(Img, cmap='gray')
        plt.hold(True)
        CS = plt.contour(phi,0, colors='r')
        plt.draw()
        plt.hold(False)

```

Listing 5: plot_phi.py

```

import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np

def plot_phi(phi):
    fig = plt.figure()
    ax = Axes3D(fig)
    x = []
    y = []
    for (i,j),val in np.ndenumerate(phi):
        x.append(i)
        y.append(j)
    ax.plot(xs=x, ys=y, zs=phi.flatten(),
            zdir='z', label='ys=0, zdir=z')

```

```
plt.show()
```

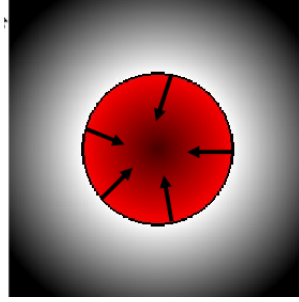


Figure 1:

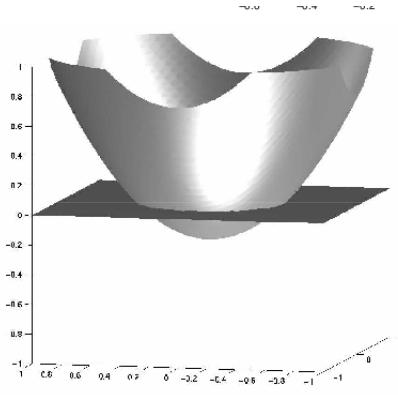


Figure 2: ϕ Fonksiyonu

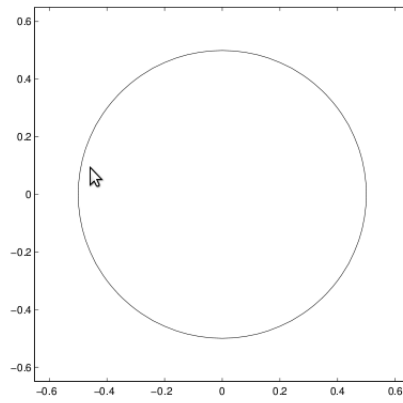


Figure 3: Kesit Seviyesi

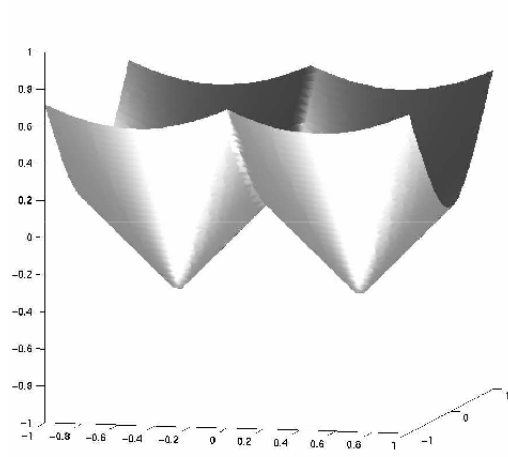


Figure 4: ϕ Fonksiyonu

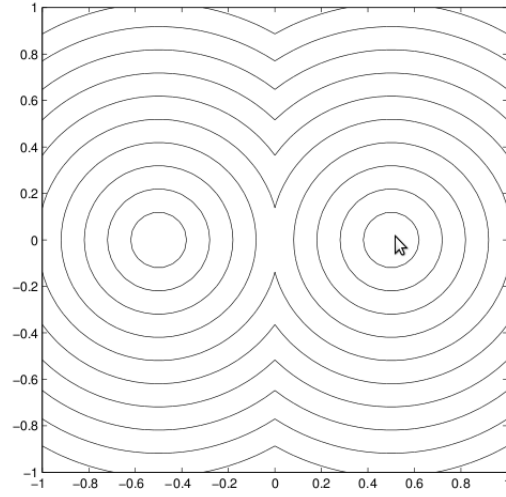


Figure 5: Birkac z Seviyesinden Kesitler

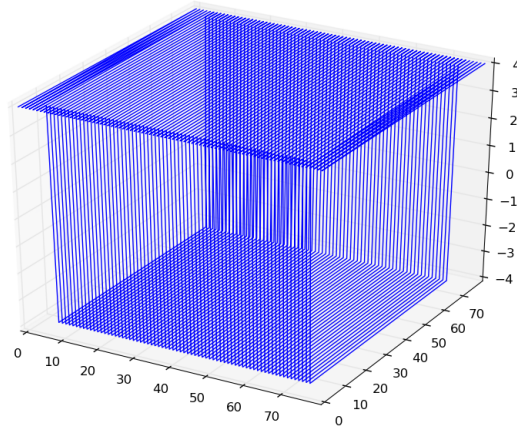


Figure 6: ϕ Baslangici

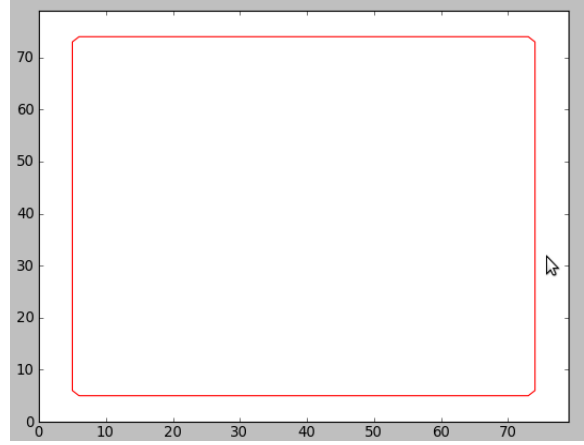


Figure 7: ϕ Baslangici 2 Boyutta

