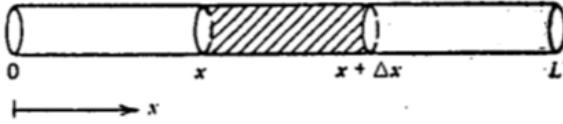


## Isi Denklemini Turetmek

Bu denklemi turetmek için “enerjinin muhafazası (conservation of energy)” kuralını kullanacağız. Bu muhafaza kuralını bir esitliğe çevireceğiz, ve bu esitliği manipule ederek ortaya bir kısmi türevsel denklem (PDE) çıkaratacağız. Baz aldığımız fiziksel ortam bir metal cubuk, ki bu cubukta materyel yoğunluğu her noktada aynı. Formül şöyle;

$[x, x + \Delta x]$  içindeki net isi değişimi = Tanımlanan bölge sınırlarındaki net isi akisi +  $[x, x + \Delta x]$  içinde üretilen isi miktarı



$[x, x + \Delta x]$  içindeki toplam isiyi nasıl hesaplarız? Eğer  $u(x, t)$  metal cubuğun  $x$  noktasında  $t$  anındaki isiyi veriyorsa, verilen kesit üzerinden bir entegral alırız,

$$[x, x + \Delta x] \text{ İçindeki Toplam Isi} = c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u(s, t) ds$$

Tanımlanan bölge içindeki net isi değişimini ise alttaki ile hesaplarız, üstteki formülün zamana göre türevini alırız.

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} c\rho A u(s, t) ds = c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u_t(s, t) ds$$

Türevin entegral içine nüfuz ettiğini görüyoruz, sabit olan  $c\rho A$  ise dışarı çıkartılıyor. Bu son ifade, enerji formülünün sol tarafı. Sağ tarafı şöyle ifade edilebilir

$$= kA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]A \int_x^{x+\Delta x} f(s, t) ds$$

Newton’un kuralı isi akisinin isi fonksiyonunun uzaklıksal gradyanına (spatial gradient) orantılı olduğunu söyler. Uzaklıksal gradyan  $u_x$ ’tir. Uzaklıksal gradyan, yani  $u_x$ , sonsuz küçük boyutta yanyana iki parçacığın isi farkını verecektir. Bu farkı,  $[x, x + \Delta x]$ ’in iki ucunda alırsak, yani farkların farkını bize gereken orantıyı verecektir. Sezgisel olarak bunun niye olduğunu anlamak için fizik kaynaklarına başvurmak faydalı olabilir. Formülün tamamı şöyle

$$c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u_t(s, t) ds = kA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]A \int_x^{x+\Delta x} f(s, t) ds$$

Bu noktada ustteki formilde entegrallerden kurtulmak istiyoruz. Ne yapariz? Ortalama Deger Teoremi'en ihtiyacimiz var, bu teoriyi Calculus'un Temel Teoremi yazisinda bulabilirsiniz. Teori ozetle eger  $f(x)$  bir  $[a, b]$  araliginda surekli ise o zaman en az bir  $\xi$  olmalidir,  $a < \xi < b$  olacak sekilde ve

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

dogru olmalidir. Bu teoriyi (1)'e uygularsak,

$$c\rho Au_t(\xi_1, t)\Delta x = kA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + Af(\xi_2, t)\Delta x$$

$$x < \xi < x + \Delta x$$

elde ederiz.  $\xi_1, \xi_2$  yerine sadece  $\xi$  kullanilabilir, sebebini altta gorecegiz, sonra iki tarafi  $c\rho A\Delta x$ 'e bolursek

$$u_t(\xi, t) = \frac{k}{c\rho} \left[ \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} \right] + \frac{1}{c\rho} f(\xi, t)$$

Simdi

$$\Delta x \rightarrow 0$$

olsun, bu durumda ustteki buyuk parantez icindeki bolum bir kısmi turev haline gelecektir,  $\xi \rightarrow x$  olacaktir, cunku aralik oyle kuculuyor ki arada kalan  $\xi$  degeri sadece  $x$  olabilir.

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) + F(x, t)$$

Ayrica

$$\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$$

$$F(x, t) = \frac{1}{c\rho} f(x, t)$$

esitliklerini kullandik.

Kaynaklar

Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Murlow, sf. 27