Ders 1

Once Reel Analiz (Real Analysis) ile baslayalim. Fonksiyonel Analizdeki pek cok kavram Reel Analiz ile benzer (ama daha geneldir).

Reel Cizgi

Reel sayilarin oldugu kume $\mathbb{R}$'ye geometrik bir acidan "reel cizgi" ismi de verilir. Reel cizgi uzerinde uzaklik kavrami, mesela iki nokta $x, y$ arasinda

$d(x,y) = |x - y|$

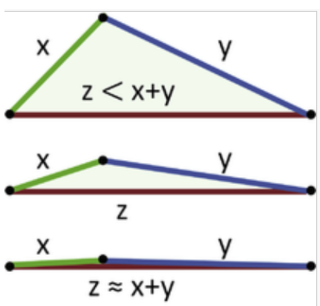
olarak gosterilebilir. Uzaklik fonksiyonu $d$'nin ozellikleri sunlardir:

1. $d(x,y) > 0$. Her uzaklik ya sifir, ya da pozitiftir.

2. $d(x,y) = 0$ eger $x = y$ ise.

3. $d(x,y) = d(y,x)$

4. $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$. Bu esitsizlige "ucgen esitsizligi (triangle inequality) ismi verilir.




Ozet olarak soylenmeye calisilan, $x, y$ arasinda ucuncu bir noktaya ziplanarak gidiliyorsa, bu mesafeyi arttirir, ve bu artis en az $x, y$ arasindaki mesafe kadardir. Daha fazla da olabilir.

Diziler (Sequences)

Bir dizi aslinda sadece bir listedir. Listede 1. eleman vardir, 2. eleman vardir, vs. ve bu sonsuza kadar devam eder. Bu nokta onemli, matematikte sonlu / sinirli (finite) bir liste dizi degildir. Dizilerin onemli bir ozelligi sonsuza kadar devam etmeleridir.

Daha formel olarak bakarsak dogal sayilarin, yani $\mathbb{N}$ kumesinin de tanimda bir rol oynadigini gorebiliriz. Listedeki her eleman dizideki sira numarasi ile etiketlenebilir, 1. elemani "1", 2. elemani "2", vs. olarak etiketleyebiliriz, o zaman bu acidan bakarsak bir dizinin, dogal sayilar ile baska bir kume arasindaki bir *eslesme* oldugunu da soyleyebiliriz. Bu eslesme bir diger tanimla bir fonksiyondur. Yani bir dizi aslinda bir fonksiyondur, yani

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Dizimizi

$f(1), f(2), f(3), ..., f(n), ..$

olarak gosterebiliriz.

Yaklasmak (Convergence)

Acik bir sekilde gorulecegi uzere alttaki dizi

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$

gittikce 0 degerine dogru gidiyor. Bu dizi "sifira yaklasiyor (convergence)" deriz, ya da "dizinin limiti sifir" deriz. Peki bu fikri nasil daha acik, net olarak tanimlayabiliriz?

Yaklasan seriler 18. yuzyilda incelendi ve gelistirildi, fakat o zamanlarda bu tur dizilerin tanimi hicbir net olarak ortaya koyulmadi. Literatur taranirsa tanima en yakin olacak sey soyledir:

"Bir dizi $\{s_n\}$ $L$ sayisina yaklasir, eger bu dizideki terimler gittikce $L$'e yakinlasliyorsa".

Bu tanimin oldukca genel, kabaca olarak yapilmis olmasi bir yana, bazen bizi yanlis yollara bile surukleyebilir. Mesela su diziyi ele alalim

$.1, .01, .02, .001, .002, .0001, .0002, .00001, .00002, ...$

Bu dizi muhakkak sifira "yakinlasiyor", fakat terimler duzenli bir sekilde sifira yaklasmiyorlar. Her ikinci adimda birazcik sapiyorlar. Ya da su dizi

$.1, .11, .111, .1111, .11111, .111111, ...$

Bu dizi gittikce .2'ye "yakinlasiyor", fakat bu dizinin .2'ye yaklastigi iddia edilemez. Gercek limit 1.9 olmali, 2 degil. Ne oldugu belli olmayan bir "gittikce yaklasma" tanimina degil, bizim aslinda "gelisiguzel yakinlik (arbitrarily close)" tanimina ihtiyacimiz var.

Bu fikri en iyi yakalayabilen 1820'li yillarda Augustin Cauchy oldu. Esitsizlikleri kullanarak "herhangi / gelisiguzel yakinlik" kavramini formule eden bir tanim bulmayi basardi. Bu sekilde limit kavrami gayet acik matematiksel esitliszlikler ile gosterilebildi.

Tanim: Bir Dizinin Limiti

$\{s_n\}$'nin reel sayilardan mutesekkil bir dizi oldugunu dusunelim. $\{s_n\}$'nin bir reel sayi $L$'e yaklastigini soyleriz, ve bunu

$$\lim_{n \to \infty} s_n = L$$

olarak belirtiriz. Ya da

$$s_n \to L \ olur, \ n \to \infty \ iken$$

eger her $\epsilon > 0$ icin oyle bir tam sayi $N$ var ise, ki bu $N$ su sartlara uymali

$$|s_n - L| < \epsilon$$

$n \geq N$ oldugu her zaman icin.

Bir dizi yaklasmiyorsa, ona uzaklasan (divergent) dizi adi verilir. Bu her iki tur ile ayni derecede ilgileniyoruz.

Not: Tanimda $N$'nin $\epsilon$'a bagli oldugu goruluyor, eger $\epsilon$ cok ufak ise mesela, o zaman $N$'in oldukca buyuk olmasi gerekebilir. Bu acidan bakilinca aslinda $N$'nin $\epsilon$'nun bir fonksiyonu oldugu soylenebilir. Bu durumu tam vurgulamak icin bazen $N(\epsilon)$ yazmak daha iyi olabilir.

Not: Tanima dikkat edersek, sartlara uyan bir $N$ bulununca, o $N$ degerinden daha buyuk herhangi bir $N$ de kullanabiliriz. Yani ustteki tanim bize herhangi bir $N$ bulmamizi soyler, illa ki "en kucuk" $N$'i bulmamiz gerekmez.

Tanim bunu soylemiyor olsa bile ibarenin asil gucu $N$'nin $\epsilon$ *ne kadar kucuk olursa olsun bulunabiliyor olmasidir.* Eger $\epsilon$ buyuk bir sayi ise $N$'i bulmak kolay olur. Eger $\epsilon = 0.1$ icin (ki bu sayi $\epsilon$ turu sayilar icin buyuk sayilir) isleyen bir $N$ bulursak, ayni $N$ daha buyuk $\epsilon$ degerleri icin de isleyecektir.

Ornek

Ustteki tanimi kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$$

oldugunu ispat edelim. Yanliz sunu belirtelim, ustteki tanim limitin 1/2 olacagini hesaplamak teknigi olarak verilmiyor. Ifade limit kavramina kesin bir tanim getiriyor ama o limiti hesaplamak icin kesin bir metot sunmuyor. Neyse ki cogumuz bu hesabi yapmak icin yeterince calculus hatirliyoruz, boylece limitin dogrulugunu ispatlamadan once ne oldugunu bulabiliriz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+1/n^2} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(2+1/n^2)}$$

$$= \frac{1}{2+\lim_{n\to\infty}(1/n^2)} = \frac{1}{2}$$

Bu hesap, eger tum adimlarin dogrulugu ispatlanirsa, limitin ne oldugunun da ispati olabilirdi. Adimlarin dogrulugunu daha sonra gosterecegiz, boylece her seferinde $\epsilon, N$ temelli argumanlari kullanmamiza gerek kalmayacak. Simdi $\epsilon, N$ bazli ispata gelelim,

Pozitif bir $\epsilon$'un verildigini varsayalim. Oyle bir $N$ (ya da $N(\epsilon)$, hangisini tercih ederseniz) bulmamiz gerekiyor ki, dizide $N$. terimden sonraki her eleman 1/2'ye $\epsilon$'dan daha yakin olsun, ve su ifade dogru olsun

$$\left| \frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

ki $n = N, n = N+1, n = N+1, N+2, ....$ Sonuctan geriye dogru gidersek isimiz kolaylasir, yani verilen $N$ icin $\epsilon$'nun ne kadar buyuk olmasi gerektigini hesaplarsak. Ustteki tam deger (absolute deger) isaretinin icine bakalim,

$$\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2n^2}{2(2n^2+1)} - \frac{2n^2+1}{2(2n^2+1)}$$

$$= \frac{2n^2 - 2n^2 - 1}{2(2n^2+1)} == \frac{-1}{2(2n^2+1)}$$

Tam deger alininca

$$\frac{1}{2(2n^2+1)} < \epsilon$$

olmali, ya da

$$4n^2 + 2 > \frac{1}{\epsilon}$$

Dikkat, tersine cevirince kucukluk isareti buyukluk oldu.

Bu ifadeye uyan en kucuk $n$, aradigimiz $N$. O zaman

$$N^2 > \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{\epsilon} - 2\Big)$$

ifadesine uyan her tam sayi $N$ bizim icin uygun. Illa ki en kucuk $N$ olmasi gerekmez, en rahat olan $N$ biraz buyukce olabilir, mesela eger sag taraftaki $1/4\epsilon$ terimine (sag tarafta daha fazlasi var, ama eksi isareti bu terimi daha kucultecek nasil olsa) esit bir seyleri sol tarafta istiyorsak, onun karesini $N$ olarak kabul ederiz,

$$N > \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$$

deriz.

Bu ornegin bize verdigi asil ders, aslinda, tanimin bize limit teorisini gelistirmek icin teorik / kesin (rigourous) bir yontem sunmasi ama bu limitlerin hesabini yapmak icin pratik bir yontem olmamasi. Bir limitin dogrulugunu hesaplamak icin nadiren boyle bir yonteme basvurulur.

Alt Dizinler (Subsequences)

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, ...$$

seklindeki bir dizinin icinde iki tane daha dizin oldugu gorulebilir. Bunlardan biri

$$1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Digeri

$$-1, -2, -3, -4, -5, ...$$

Bu dizin icinde dizin kavramini temsil etmek icin "altdizin" kelimesini kullanacagiz. Cogunlukla bir dizini incelemenin en iyi yolu onun altdizinlerine bakmaktir. Ama altdizinlerin daha derli toplu bir tanimi ne olabilir acaba? Ustte kabaca yaptigimiz kavramin formel matematiksel bir tanimina ihtiyacimiz var.

Tanim

$s_1, s_2, s_3, s_4, ...$

gibi herhangi bir dizini ele alalim. Altdizin ile

$s_{n_1}, s_{n_2}, s_{n_3}, s_{n_4}, ...$

demek istiyoruz ki

$n_1 < n_2 < n_3 < ...$

olmali, altdizinde kullanilan indekslerin her biri, bir oncekinden buyuk olmali.

$1, 2, 3, 4, 5, ...$

dizini,

$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, ...$

dizinin altdizini cunku orijinal dizinden cekip cikartilan elemanlarin indekleri $n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5$ seklinde.

Bolzano-Weierstrass Teorisi

Her sinirli (bounded) dizi icinde yaklasan (convergent) bir altdizi vardir. Teorinin ispatini burada vermeyecegiz.

Limitlerin Sinirli Olmalari Ozelligi

Eger bir dizi belli degerler arasindaki degerleri iceren bir kume ise, yani sinirli bir kume ise (bounded set), bu diziye sinirli bir dizi denir (bounded sequence). Yani dizi $\{s_n\}$ sinirlidir, eger $M$ diye bir sayi var ise, ki dizideki her dizi icin

$|s_n| \le M$

Teori

Her yaklasan (convergent) dizi sinirlidir. Bu teorinin ispatini vermeyecegiz, fakat sinirli olmayan bir dizinin limiti olamayacagi aciktir.

Cauchy Kriteri

Bir dizinin hangi ozelligi onun yakinlastigini karakterize eder? "Karakterize eder" kelimeleriyle gerekli ve yeterli (necessary and sufficient) bir durum ariyoruz ki bu durum gerceklestiginde dizinin yakinlastigini bilelim.

Her turlu diziye uygulanabilen boyle bir karakterizasyon Cauchy tarafindan kesfedildi. Cauchy'nin buldugu tanimin ilginc bir tarafi var, hicbir nihai limit degerine referans yapmiyor. Sadece, son derece gevsek bir sekilde, bir dizinin terimleri birbiriyle rasgele (arbitrary) baglamda, eninde sonunda (eventually) yaklasirsa, o dizinin yakinlasacagini soyluyor. Kriter soyle:

Bir dizi $\{s_n\}$ yaklasiksaldir, eger, ve sadece eger her $\epsilon > 0$ icin bir tamsayi $N$ var ise, ki

$$|s_n - s_m| < \epsilon$$

$n \geq N, m \geq M$ olmak kosuluyla.

Ispat

Teorinin bu ogesi o kadar onemli ki kendine has yeni bir terminolojiyi hak ediyor. Ustteki ogeye uyan her diziye Cauchy dizisi adi veriliyor. Yani teori "bir dizi sadece ve sadece Cauchy dizisi ise yaklasiksaldir" diyor. Bu terminoloji daha ileri matematikte (mesela temel alinan kume reel sayilar degil, daha cetrefil uzaylar oldugu zaman) gecerli olmayabilecektir, ama bu durumda da gerektirdigi ek sartlar, ve ortaya koydugu ifadenin kesinligi cok onemlidir.

Ispat biraz uzun, ve Bolzano-Weierstrass teorisini gerektirecek. Bir yondeki ispat oldukca kolay. Farz edelim ki $\{s_n\}$ bir $L$ sayisina yaklasiyor. Diyelim ki $\epsilon > 0$. O zaman bir tam sayi $N$ olmali ki

$$|s_k - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

ki $k \geq N$. Eger hem $m$ hem $n$ $N$'den buyuklerse,

$$|s_n - s_m| \leq |s_n - L| + |L - s_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Ustteki ilk esitsizlik / acilim ucgen esitsizliginden ortaya cikiyor. Bu esitsizlikten ortaya cikan iki yeni terimin hangi degerlere sahip oldugunu biliyoruz, yerlerine koyunca $\epsilon$ elde ediyoruz.

Simdi daha zor olan ikinci bolume gelelim. Bu bolumun ispati icin, uc tane alt bolum lazim.

Once her Cauchy dizisinin sinirli oldugunu iddia ediyoruz. Ispat icin ustteki sinirli diziler hakkindaki teoriye basvururuz, her yaklasan dizi sinirlidir, her Cauchy dizisi bir degere yaklastigina gore, o zaman her Cauchy dizisi sinirlidir.

Ikinci alt bolum icin yaklasik (sinirli) $\{s_n\}$ dizisine Bolzano-Weierstrass teorisi uygulayarak yaklasik bir alt dizin $\{s_{n_k}\}$ elde ediyoruz.

Ucuncu alt bolum Cauchy dizilerinin dogal bir sonucu aslinda. Eger $s_{n_k} \to L$ oldugunu biliyorsak, ve $\{s_n\}$'nin Cauchy oldugunu biliyorsak, o zaman $s_n \to L$ oldugunu gosterebiliriz. $\epsilon > 0$ olsun, ve $N$'i oyle secelim ki, tum $n, m \geq N$ icin

$|s_n - s_m| < \epsilon/2$

Sonra $K$'yi oyle secelim ki, her $k \geq K$ icin

$|s_{n_k} - L| < \epsilon/2$

olsun. Diyelim ki $n \geq N$. Simdi $m$'i $n_k$'nin $N$'den buyuk olan herhangi bir degerine esitleyelim ki $k \geq K$ olsun. Bu deger icin $s_m = s_{n_k}$'dir.

$|s_n - L| \geq |s_n - s_{n_k}| + |s_{n_k} - s_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$

Birinci esitsizlik, ucgen esitsizliginden geliyor. Daha sonra elde edilen terimlerin bildigimiz degerlerini yerine koyuyoruz, $s_n \to L$ oldugunu goruyoruz (ustteki formulun basi ve sonunu birlestirirsek, elde ettigimiz sonuc). Ispat tamamlandi.