

Egim (Curvature)

Kesit seviyeleri tekniginde bir egri normal formda degil, dolayli (implicit) bir fonksiyon ile  $F(x, y) = 0$  olarak gosterilir. Bu fonksiyonun tam diferansiyelini alirsak,

$$dF = F_x dx + F_y dy = 0$$

$$dy = \frac{-F_x}{F_y} dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y} = f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Burada bir faraziye daha var, o da aslinda ilk verilen formulde olmasa bile  $y = f(x)$  olarak kabul etmemiz, yani  $F(x, y)$  nasil bir formül olursa olsun,  $y$ 'nin  $x$ 'leri icerecek sekilde tekrar duzenlenebilecegini farz etmemiz, boylece  $F(x, f(x))$  olabilecegini soylemis oluyoruz.

Simdi  $y''$ 'in turevini bir daha alalim. Yukaridaki  $y'$  formulunde en sag taraf bir bolme islemi icerdigi icin burada Calculus'un Bolumler Kuralini (Quotient Rule) uygulamamiz lazim (detaylar icin Bolun Kurali yazisina bakiniz). Bu kural soyle gosterilir:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Bolumler Kurali icin  $u$  ve  $v$  tanimlari nedir?

$$u = -F_x(x, f(x))$$

$$v = F_y(x, f(x))$$

O zaman

$$v \frac{du}{dx} = F_y \frac{dF_x}{dx} \quad (1)$$

$$u \frac{dv}{dx} = -F_x \frac{dF_y}{dx} \quad (2)$$

Bunlardan mesela  $dF_x/dx$  uzerinde Zincirleme Kanunu (Chain Rule) uygulamak lazim (bu kural tam integral kuralinin bir sonucu).

$$\begin{aligned} \frac{dF_x(x, f(x))}{dx} &= \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F_x}{\partial y} \frac{df}{dx} \\ &= F_{xx}(x, f(x)) + F_{xy}(x, f(x)) f'(x) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{dF_y(x, f(x))}{dx} = F_{xy}(x, f(x)) + F_{yy}(x, f(x)) f'(x) \quad (4)$$

Zincirleme Kanunu niye ustteki sekilde acildi? Tam Diferansiyeli bir daha hatir-

layalım:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

O zaman formuller (1) (2) (3) ve (4) bir araya konulursa,

$$y'' = - \frac{F_y F_{xx} - F_y F_{xy} \frac{F_x}{F_y} - F_x F_{xy} + F_x F_{yy} \frac{F_x}{F_y}}{F_y^2}$$

$$y'' = - \frac{F_y F_{xx} - F_{xy} F_x - F_x F_{xy} + \frac{F_x^2 F_{yy}}{F_y}}{F_y^2}$$

Ustteki bolumun hem bolen, hem bolunen terimlerini  $F_y$  ile carparsak, ve sadelestirsek

$$y'' = - \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy} F_x F_y + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}$$

Simdi Wolfram sitesinde turetimi gosterilen egim (curvature) formulune bakalim [2]. Not: Eger

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

formulunun alttaki formule nasil donustugu tam anlasilir degilse, hatirlayalım ki,  $y = f(x)$ , ve  $x' = 1$ , ve  $x'' = 0$ .

Bu formulun Courant [1] sf. 231'de benzer bir formunu goruyoruz [3].

$$\kappa = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

Bu formuldeki  $f''$  yani  $y''$  icin ustte buldugumuz sonucu,  $f'$  yani  $y'$  icin bu yazinin basindaki formulu koyarsak,

$$\kappa = \frac{- \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy} F_x F_y + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

Bolen kısmi nedir?

$$(1 + f'^2)^{3/2} = \left(1 + \left(\frac{-F_x}{F_y}\right)^2\right)^{3/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{F_x^2}{F_y^2}\right)^{3/2} \\
&= \left(\frac{F_y^2 + F_x^2}{F_y^2}\right)^{3/2} \\
&= (F_y^2 + F_x^2)^{3/2} (F_y^{-2})^{3/2} \\
&= (F_y^2 + F_x^2)^{3/2} F_y^{-6/2} \\
&= (F_y^2 + F_x^2)^{3/2} F_y^{-3}
\end{aligned}$$

Yerine koyarsak,

$$\kappa = \frac{\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy} F_x F_y + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}}{(F_y^2 + F_x^2)^{3/2} F_y^{-3}}$$

$F_y^{-3}$  ve  $F_y^3$  birbirlerini iptal ederler ve sonuc:

$$\kappa = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy} F_x F_y + F_x^2 F_{yy}}{(F_y^2 + F_x^2)^{3/2}} \quad (5)$$

Ustteki unlu egim (curvature) formuludur.

Bu egim formülünün diger bir sekli soyledir (F yerine  $\phi$  kullanirsak)

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

Bunun okunus sekli “birim normal gradyanin uzaklasim olcusu (divergence of the unit normal gradient)” seklindedir. Acaba bu formül, (5). formül ile uyumlu mu?

$$\begin{aligned}
\kappa &= \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \\
&= \nabla \cdot \frac{(\phi_x, \phi_y)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \\
&= \left( \partial_x \frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right) + \left( \partial_y \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right) \\
&= \frac{\phi_{xx}}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} - \frac{\phi_x(\phi_x \phi_{xx} + \phi_y \phi_{xy})}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} + \frac{\phi_{yy}}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} - \frac{\phi_y(\phi_x \phi_{xy} + \phi_y \phi_{yy})}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\phi_{xx}(\phi_x^2 + \phi_y^2) - \phi_x(\phi_x \phi_{xx} + \phi_y \phi_{xy}) + \phi_{yy}(\phi_x^2 + \phi_y^2) - \phi_y(\phi_x \phi_{xy} + \phi_y \phi_{yy})}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}}$$

Bu formül bizim (5). formül ile tipatip aynı.

Ustteki işlemlerde uzaklaşım ölçüsü (divergence) operatörü  $\nabla \cdot$  ile gradyan operatörü  $\nabla$  arasındaki farkı belirtelim:  $\nabla \cdot$  operatörü  $F(x, y)$  üzerinde kısmi türevlerin toplamını verir, yani bir skalar tek sayı döndürür. Gradyan ise her bir elemanı bir kısmi türeve tekabül eden bir *vektor* geri getirir.

Python Numpy kodlaması bağlamında, daha önce *Kesit Seviyeleri* yazısında ayrık-sal olarak bir  $\phi$  değışkeni içindeki bir fonksiyon üzerinde eğimselliği (curvature) şöyle hesaplamıştık:

```
1 gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
2 absGradPhi=np.sqrt(gradPhiX**2+gradPhiY**2)
3
4 normGradPhiX=gradPhiX/(absGradPhi+(absGradPhi==0))
5 normGradPhiY=gradPhiY/(absGradPhi+(absGradPhi==0))
6
7 divYnormGradPhiX, divXnormGradPhiX=np.gradient(normGradPhiX)
8 divYnormGradPhiY, divXnormGradPhiY=np.gradient(normGradPhiY)
9
10 K = divXnormGradPhiX + divYnormGradPhiY
```

Bu satırların  $\nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$  ifadesiyle birebir uyum gösterdiğini herhalde görebiliyoruz. Satır 1,  $\nabla \phi$  ifadesidir. Satırlar 4-5  $\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$  işlemini gerçekleştiriyor, gradyanı onun uzunluğuna (magnitude) bölerek onu birim vektörü haline getiriyor. Satırlar 7-10 tekrar sonucun gradyanını bir daha alıyor, ama bu sefer hesapsal kısmi türevleri birbiriyle topluyor, böylece uzaklaşım ölçüsü (divergence) hesaplanmış oluyor. Tüm bu işlemlerin sonucu eğimsellik  $\kappa$  oluyor.

Dikkat edilirse Python kodundaki  $K$  yani  $\kappa$ ,  $N \times N$  boyutlu bir matristir, bu mantıklı çünkü  $\kappa$  hesabi için kullandığımız  $F_x$ ,  $F_y$  gibi türevler aslında  $F_x(x, y)$ ,  $F_y(x, y)$  formüllerine sahipler, yani her  $x, y$  kombinasyonu için farklı bir sonuç döndürebilirler. Bu sebeple  $K$  yani  $\kappa \phi$  fonksiyonunun her  $x, y$  noktası için tanımlıdır.

Bazen literatürde  $\nabla \cdot$  yerine  $\text{div}(\cdot)$  kullanıldığını görebilirsiniz, bu operatörlerin ikisi de aynıdır.

–

## Kaynaklar

[1] Courant, Introduction to Calculus and Analysis Volume 2, sf. 223-232

[2] Wolfram - <http://mathworld.wolfram.com/Curvature.html>

[3] Bu arada o karmaşık formül yerine yaklaşık olarak hesaplama sırasında sadece  $f''$  kullanmak da mümkün [4]

[4] Strang, G. Computational Science and Engineering, sf. Introduction bolumu