Sınırlı Elementler Metodu (Finite Elements Method)

Bu metot differansiyel, kismi differansiyel denklemleri (partial differential equations) yaklasiksal olarak modelleme ve cozmenin yontemleridir.

Formul: Baslangic denklemi

$$\frac{-d}{dx}\Big(c(x)\ \frac{du}{dx}\Big) = f(x)$$

Iki tarafi da $v(x)$ ile carpiyoruz ve 0 to 1 sinirlariyla entegralini aliyoruz.

$$\int_0^1 \frac{-d}{dx}\Big(c(x)\ \frac{du}{dx}\Big)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Parcali entegral (integration by parts) formulu soyledir:

$$\int y\ dz = yz \int z\ dy$$

Ana formulun bolumlerini, parcali entegrale gore bolustursek:

$$dz = \frac{-d}{dx}\Big(c(x)\ \frac{du}{dx}\Big)dx$$

$$z = -c(x)\ \frac{du}{dx}$$

$$y = v(x)$$

$$dy = \frac{dv}{dx}dx$$

Yukarida $dz$ icinde $dx$ ve $\frac{1}{dx}$ birbirini iptal eder. Parcali entegral formulunun sag tarafina gore yerlerine koyarsak:

$$\int_0^1 v(x)dx\frac{-d}{dx}\Big(c(x)\ \frac{du}{dx}\Big) = -\Big[v(x)c(x)\frac{du}{dx}\Big]_{x=0}^{x=1} \int_0^1 c(x)\ \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx$$

Ustteki parcali entegral aciliminda sol taraf entegrale sinir degerleri aldiginda, sag taraftaki $yz$ sonucunun ayni sinir degerlerine tabi olduguna dikkat edelim.

Differansiyel denklemde sinir kosullari $x = 1$ durumunda $c(1)u'(1) = 0$, ve $x = 0$ durumunda $v(0) = 0$ olarak biliniyor. O zaman ustteki denklemin sol tarafinda $x = 0$ ve $x = 1$ kosullari icin tanimli bolum $0 - 0 = 0$ olacaktir ve denklemden atilabilir. Geriye kalanlar

$$\int_0^1 c(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Bu fonksiyonu Galerkin adli bir matematikci bulmus, "zayif form (weak form)" olarak adlandiriliyor.

Simdi diyelim ki n tane test fonksiyonu sectik $\phi_1(x), .., \phi(n)$ ve bu fonksiyonlarin $U_j$ sayilari ile carpiminin toplamini, yani bir tur kombinasyonunu $u(x)$ yerine kullanmaya karar verdik.

$$U(x) = U_1\phi_1 + ... + U_n\phi_n$$

O zaman

$$U'(x) = U_1\phi_1' + ... + U_n\phi_n'$$

$$= \sum_1^n U_j \frac{d\phi_j}{dx}$$

Simdi $du/dx$ yerine $U'(x)$ koyarsak

$$\int_0^1 c(x)\Big(\sum_1^n U_j \frac{d\phi_j}{dx}\Big)\frac{dV_i}{dx}dx = \int_0^1 f(x)V_i(x)dx$$

Dikkat edelim, $v(x)$ yerine $V_i(x)$ kullandik. Ustteki formul her i icin yeni bir formul "uretecek". Niye $V_i$? Zayif formdaki $v(x)$ formulunu de zaten biz uydurmustuk, yani $v(x)$ biz ne istersek o olur. O zaman bu fonksiyonu n tane formul uretmek icin bir numara olarak kullaniliyoruz, n tane formul olunca matrisin n x n elemanini doldurabilecegiz ve cozume erisebilecegiz. Ek not, cogunlukla $V_i(x)$ icin $\phi_i$ formulleri kullaniliyor.

Ayrica formuldeki $U_j$ kismini cekip cikartirsak ve bir vektor icine koyarsak, geri kalanlar bir $K_{ij}$ matrisi icinde tutulabilir.

$$K_{ij} = \int_0^1 c(x)\frac{d\phi_j}{dx}\frac{dV_i}{dx}dx$$

Sag taraf ayni sekilde i tane formul uretir

$$F_i = \int_0^1 f(x)V_i(x)dx$$

Final formul matrix formunda basit bir sekilde temsil edilebilecektir.

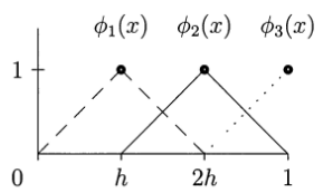
$KU = F$

Ornek

Ornek olarak $-u'' = 1$ denklemini cozelim. Not: Differansiyel denklemlerde sonuc bulmak demek bir "fonksiyon" bulmak demektir. Normal cebirsel denklemlerde sonuc bulmak degiskenlerin "sayisal" degerini bulmak demektir. Birazdan bulacagimiz sonuc $u(x)$ "fonksiyonu" olacak.

Eger denklem $-u'' = 1$ ise o zaman bu formulu ana forma uygun hale getirmek icin $c(x) = 1$ olarak almamiz gerekir. $-u'' = 1$ denkleminde esitligin sag tarafi 1 olduguna gore $f(x) = 1$ demektir.

Artik $\phi$ fonksiyonlarini secme zamani geldi. Bu fonksiyonlarin "toplami" hedefledigimiz fonksiyonu yaklasiksal (approximate) olarak temsil edecek. Ornek olarak secebilecegimiz bir fonksiyon "sapka fonksiyonu (hat function)" olarak bilinen ucgen fonksiyonlar olabilir. Alttaki figurde bu fonksiyonlari goruyoruz.




Bu figurde x ekseninin h buyuklugundeki parcalara bolundugunu goruyoruz.

Entegralleri hesaplayalim

$$F_1 = \int_0^1 V_1(x) dx$$

Daha once $V_1$ ve $\phi_1$'i ayni kabul ettigimizi belirtmistik.

Yukaridaki entegralin aslinda bir alan hesabi yaptigini goruyoruz. Sinirlar 0 ve 1 arasinda, ama $2h$ otesinde zaten $\phi_1$ fonksiyonu yok. $\phi_1$'in alani nedir? Alan ucgenin alani: Taban carpi yukseklik bolu 2: $2h$, yuksekligi 1, o zaman alan $(2h \times 1)/2 = 1/3$

Benzer mantikla bakarsak, $F_2$ ile $F_1$ ayni, yani 1/3. $F_3$ ise onlarin yarisi, yani

1/6.

$K_{ij}$ nasil hesaplanacak? $c(x) = 1$ oldugu icin formulden cikarilabilir ve $V_1$ ve $\phi_1$'in ayni olduguna soyledik:

$$K_{ij} = \int_0^1 c(x) \frac{d\phi_j}{dx} \frac{dV_i}{dx} dx$$

$$K_{11} = \int_0^1 \bigg( \frac{dV_1}{dx} \bigg)^2 dx$$

$dV_1/dx$ nedir? Birinci sapka fonksiyonunun turevidir. Bu tureve bakarsak, 0 ve $h$ arasinda arti egim (slope) $1/h$, $h$ ve $2h$ arasinda eksi egim $-1/h$ oluyor. Ama kare aldigimiz icin sonuc ayni, $1/h^2$. O zaman h = 1/3 olduguna gore $1/(1/3)^2$, yani $dV_1/dx = 9$.

$$K_{11} = \int_0^{2/3} 9dx = 9x \ \bigg|_0^{2/3} = (9)(2/3) - 0 = 6$$

$K_{22}$ seklen ayni fonksiyon parcasini temel aldigi icin ayni degere sahip: 6. $K_{33}$ onlarin yarisi, esittir 3.

$K_{12}$ farkli egimlerin carpimi anlamina gelir, yani $V_1'$ ile $V_2'$ carpimi olur. Bu iki fonksiyona bakalim, 0 ile h arasinda $V_2$ yok, egim 0. Ikisinin de sifir olmadigi, carpimda kullanilabilecek bir egiminin oldugu tek aralik h ve 2h arasi. Burada $V_1' = -3, V_2 = 3$.

$$K_{12} = \int_{1/3}^{2/3} (3)(-3)dx = -9x \bigg|_{1/3}^{2/3} = -6 - (-3) = -3$$

Ayni sekilde $K_{23} = -3$. Ama $K_{13} = 0$ cunku hic cakisma yok.

Matrisi doldurursak,

$$KU = F \left[\begin{array}{ccc} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{array}\right]$$

Python kodu

```
import numpy as np

K = [[6., -3., 0],
     [-3., 6., -3.],
```

```
    [0., -3., 3.]
    ]

f = [1./3., 1./3., 1./6.]

print np.linalg.solve(K, f)
```

Rapor edilen degerler $0.277, 0.44, 0.5$'in bu denklemin bilinen cozumu $u(x) = x - \frac{1}{2}x^2$ ile 0, h, 2h noktalarinda (mesh points) birebir uyum gosterdigini goruyoruz. Yani yaklasiksal olarak differansiyel denklemi cozmeyi basardik.

*Kaynaklar*

Strang, G., Computational Science and Engineering, 2007