Gaussian Olcumlerin Fuzyonu (Gaussian Sensor Fusion)

Tek boyutlu ortamda bir buyuklugu mesela bir lokasyon bilgisi x'i, iki kere olcuyoruz, ve bu olcumu iki degisik algilayiciya yaptiriyoruz, ve yine diyelim ki iki degisik alet bir cismin oldugu uzakligini / yerini bize geri donduruyor. Devam edelim, bu bilgilerde belli olcude gurultu var; bu aletlerin hatali olcumu yuzunden olabilir, cevre sartlari sebebiyle olabilir, ornek olarak iki z_1, z_2 olcumu icin iki degisik belirsizlik (uncertainty) oldugunu farzedelim, bunlar σ_1, σ_2. Soru su: bu iki olcumu kullanarak daha iyi bir x tahmini yapabilir miyiz?

Bunun icin iki olcumu bir sekilde birlestirmemiz gerekiyor. Her olcumu Gaussian / Normal dagilim olarak modelleyebiliriz, o zaman iki Gaussian dagilimi bir sekilde birlestirmemiz (fusion) lazim.

Olcumleri temsil etmek icin Gaussian bicilmis kaftan. Olcumdeki belirsizligi standart sapma (standart deviation) uzerinden rahatlikla temsil edebiliriz. Peki birlestirimi nasil yapalim?

Bu tur problemlerde maksimum olurluk (maximum likelihood) kullanilmasi gerektigini asagi yukari tahmin edebiliriz, cunku maksimum olurluk verinin olurlugunu (olasiligini yani) maksimize ederek bilinmeyen parametreleri tahmin etmeye ugrasir. Cogunlukla bu teknigi hep *tek* bir dagilim baglaminda goruruz, bazi bilinmeyen parametreleri olan tek bir dagilima degisik veri noktalari verilerek olasilik sonuclari carpilir, ve elde edilen formul maksimize edilmeye ugrasilirken ayni anda bilinmeyen parametrelerin optimal degerleri saptanmaya ugrasilir. Bizim bu problemimizde iki degisik dagilim olacak, maksimum olurluk illa tek bir dagilimla kullanilabilir diye bir kural yok.

Problemimizde iki olcumu, iki Gaussian ile temsil edebiliriz, ve bu iki Gaussian'a verilen iki olcum noktasini olurlugunu bu Gaussian'larin sonuclarini carparak hesaplayabiliriz. Peki bilinmeyen parametre nedir? Onu da *her iki Gaussian icin de ayni oldugunu farzettigimiz orta nokta* (mean) olarak alabiliriz, ve x olarak belirtiriz. Yani

$$L(x) = p(z_1|x, \sigma_1) p(z_2|x, \sigma_2)$$

$$L(x) \sim \exp \frac{-(z_1 - x)^2}{2\sigma_1^2} \times \exp \frac{-(z_2 - x)^2}{2\sigma_2^2}$$

1D Gaussian formulunu hatirlarsak,

$$p(z; x, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(z - x)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

Ders notlari [1]'de iki ustteki formulun nasil maksimize edilerek bir x_{MLE} formulune erisildigini gorebiliriz.

Formul basindaki sabit kisminin $L(x)$'de kullanilmadigini goruyoruz, cunku maksimizasyon acisindan dusunursek o kisim tekrar tekrar carpilacak ve hesaplamaya calistigimiz degiskenler acisindan bu surekli tekrar bir fark yaratmaz.

Bu metot isler. Fakat biz alternatif olarak daha temiz olacak degisik bir yoldan gidecegiz. Elimizdeki her iki olcumu iki farkli tek boyutlu Gaussian yerine 2 *boyutlu* tek bir Gaussian icine koyacagiz, iki olcumu tek bir 2 boyutlu vektor icinde belirtecegiz yani, ve tek bir olasilik hesabini $p(z; x, \Sigma)$'i baz alacagiz. Belirsizlikler ne olacak? Olcum belirsizliklerini bu 2D Gaussian'in kovaryansinda capraza (diagonal) koyabiliriz, capraz disindaki matris ogeleri sifir yapilirsa iki olcumun birbirinden bagimsizligini temsil etmis oluruz. Maksimizasyon? Tek bir olcumun olurlugunu maksimize edecegiz, bu tek bir olcumun olasiligini hesaplamaktan ibarettir, ve bu hesap sirasinda bilinmeyen degiskenleri iceren yeni bir formul ortaya cikacaktir. Maksimize etmeye ugrasacagimiz bu formul olur.

Cok boyutlu Gaussian'i hatirlayalim (artik z, x birer vektor),

$$p(z; x, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp \bigg\{ -\frac{1}{2}(z-x)^T \Sigma^{-1} (z-x) \bigg\}$$

Kisaca,

$$= \frac{1}{C} \exp \bigg\{ -\frac{1}{2}(z-x)^T \Sigma^{-1} (z-x) \bigg\}$$

Bir numara, exp ve parantez ici negatif ibareden kurtulmak icin $-\ln p$ alalim,

$$L = -\ln p(z) = \frac{1}{2}(z-x)^T \Sigma^{-1} (z-x)$$

Simdi iki olcumu, belirsizligi vektor / matris ogeleri olarak gosterelim,

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} z_1 - x \\ z_2 - x \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} z_1 - x \\ z_2 - x \end{array} \right]$$

Capraz matrisin tersini almak icin caprazdaki ogelerin tersini almak yeterlidir,

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} z_1 - x \\ z_2 - x \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc} \sigma_1^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} z_1 - x \\ z_2 - x \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc} \sigma_1^{-2}(z_1 - x) & \sigma_2^{-2}(z_2 - x) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} z_1 - x \\ z_2 - x \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_1^{-2}(z_1 - x)^2 + \frac{1}{2}\sigma_2^{-2}(z_2 - x)^2$$

Maksimize etmek icin, formul karesel olduguna gore, bilinmeyen x degiskenine gore turev alip sifira esitleyebiliriz,

$$\frac{dL}{dx} = \sigma_1^{-2} z_1 - \sigma_1^{-2} x + \sigma_2^{-2} z_2 - \sigma_2^{-2} x = 0$$

x uzerinden gruplarsak,

$$-x(\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2}) + \sigma_1^{-2} z_1 + \sigma_2^{-2} z_2 = 0$$

Gruplanan kismi esitligin sagina alalim,

$$\sigma_1^{-2} z_1 + \sigma_2^{-2} z_2 = x(\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2})$$

$$\frac{\sigma_1^{-2} z_1 + \sigma_2^{-2} z_2}{\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2}} = x_{MLE}$$

Gayet temiz bir sekilde sonuca eristik.

Ornek

Elimizde belirsizlikleri $\sigma_1 = 10, \sigma_2 = 20$ olan iki algilayici var. Bu algilayicilar ayni obje hakkinda $z_1 = 130, z_2 = 170$ olarak iki olcum gonderiyorlar. Bu olcumleri birlestirelim. Hatirlarsak 10^{-2} ile carpmak 10^2 ile bolmek ayni sey.

$$x_{MLE} = \frac{130/10^2 + 170/20^2}{1/10^2 + 1/20^2} = 138.0$$

Sonuc belirsizligi daha az olan olcume daha yakin cikti, bu akla yatkin bir sonuc.

Cok Boyutlu Gaussian Fuzyon

Peki ya elimizdeki olcumlerin kendisi cok boyutlu ise? Yani z_1, z_2 birer vektor ise?

Yine maksimum olurluk uzerinden bir formul turetebiliriz. Bu durumda tek olasilik hesabi yetmez, iki ayri dagilim olmali,

$$p(z_1; x, \Sigma_1) = \frac{1}{C_1} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(z_1 - x)^T \Sigma_1^{-1} (z_1 - x) \right\}$$

$$p(z_2; x, \Sigma_2) = \frac{1}{C_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(z_2 - x)^T \Sigma_2^{-1} (z_2 - x) \right\}$$

Orta nokta x her iki formulde ayni cunku degismeyen olan o; ayni orta nokta icin tahmin uretmeye ugrasiyoruz. Bu durum bildik maksimum olurluk hesaplarina benziyor, fakat ilk basta belirttigimiz gibi farkli turden olasilik fonksiyonlarinin (bu sefer cok boyutlu) farkli veri noktalari uzerinden carpilmasi.

Devam edelim. Daha once ln alarak exp'yi yoketmistik. Bunun bir diger faydasi ln alininca carpimlarin toplama donusmesidir,

$$L = p(z_1; x, \Sigma_1) p(z_2; x, \Sigma_2)$$

$$-\ln L = -\ln p(z_1; x, \Sigma_1) - \ln p(z_2; x, \Sigma_2)$$

$$\mathcal{L} = -\ln L = \frac{1}{2}(z_1 - x)^T \Sigma_1^{-1}(z_1 - x) + \frac{1}{2}(z_2 - x)^T \Sigma_2^{-1}(z_2 - x)$$

Simdi esitligin sag tarafinin x'e gore turevini alalim, vektor ve matris baglaminda turev nasil alinir? Herhangi bir M'in simetrik oldugu durumlarda (ki kovaryans matrisleri her zaman simetriktir, cunku mesela iki degiskenli durumda x_1, x_2 kovaryansi -iliskisi- x_2, x_1 kovaryansindan farkli olamaz),

$$\frac{\partial}{\partial x}[x^T M x] = 2Mx$$

oldugunu biliyoruz [2]. O zaman turev sonucu soyle olur,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx} = (z_1 - x)^T \Sigma_1^{-1} + (z_2 - x)^T \Sigma_2^{-1}$$

Sifira esitleyip cozelim,

$$(z_1 - x)\Sigma_1^{-1} + (z_2 - x)\Sigma_2^{-1} = 0$$

$$z_1 \Sigma_1^{-1} - x\Sigma_1^{-1} + z_2 \Sigma_2^{-1} - x\Sigma_2^{-1} = 0$$

Yine x altinda gruplayalim,

$$-x(\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1}) + z_1 \Sigma_1^{-1} + z_2 \Sigma_2^{-1} = 0$$

$$z_1 \Sigma_1^{-1} + z_2 \Sigma_2^{-1} = x(\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1})$$

Eger iki belirsizligin toplamini Σ_x^{-1} olarak ozetlersek, yani

$$\Sigma_x^{-1} = \Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1}$$

Not: Aslinda Σ_x te diyebilirdik, fakat tersi alinmis matrislerin toplami oldugunu temsil etmesi icin "tersi alinmis bir sembol" kullandik. Tabii diger yandan tersin tersini alinca ele gececek Σ_x'in de bir anlami oldugu iddia edilebilir, bu Σ_x en olasi x tahmininin yeni belirsizligidir de bir bakima.

Simdi ana formule donelim,

$$z_1 \Sigma_1^{-1} + z_2 \Sigma_2^{-1} = x \Sigma_x^{-1}$$

$$\Sigma_x (z_1 \Sigma_1^{-1} + z_2 \Sigma_2^{-1}) = x_{MLE}$$

Ornek

Elimizde iki tane iki boyutlu olcum var,

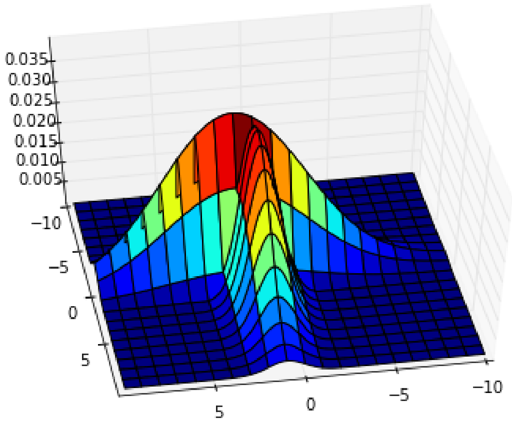
$$z_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right], z_2 = \left[\begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right]$$

Olcumler iki degisik algilayicidan geliyor, belirsizlikleri

$$\Sigma_1 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{array} \right], \Sigma_2 = \left[\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]$$

Nihai olcum nedir?

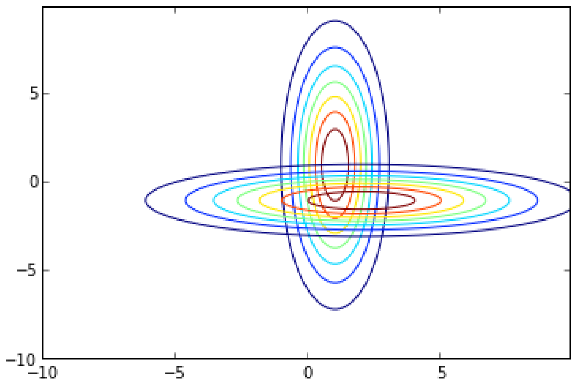
```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm
import matplotlib.mlab as mlab

x = np.arange(-10.0, 10.0, 0.1)
y = np.arange(-10.0, 10.0, 0.1)

X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z1 = mlab.bivariate_normal(X, Y, sigmax=1.0, sigmay=4.0,mux=1., \
     muy=1.,sigmaxy=0.0)
Z2 = mlab.bivariate_normal(X, Y, sigmax=4.0, sigmay=1.0,mux=2., \
     muy=-1.,sigmaxy=0.0)

# iki yuzeyi ayni grafikte birlestirmek icin herhangi iki nokta arasinda
# daha fazla (maksimum) olani al, cunku nihai yuzey olarak onu gormek
# istiyoruz zaten
Z = np.maximum(Z1,Z2)

fig = plt.figure()

ax = Axes3D(fig)
ax.view_init(elev=50., azim=80)

ax.plot_surface(X,Y,Z,cmap=cm.jet)
plt.savefig('fusion_1.png')
```



Iki olcumu Gaussian olarak ekrana bastik, bu Gaussian'larin orta noktasi z_1, z_2, bu durumu maksimum olurluk icin ayni oldugunu farz ettigimiz x ile karistirmayalim; o x modelleme sirasinda oldugunu farzettigimiz ideal bir Gaussian idi. Ustte sadece veri noktalarini ekrana basiyoruz.

Ustten bakisla kontur (contour) olarak gosterirsek

```
CS = plt.contour(X, Y, Z1,rotation=70)
CS = plt.contour(X, Y, Z2,rotation=70)
plt.savefig('fusion_3.png')
```



Resimde once ilk olcum, sonra onunla yanyana olacak ikinci olcum koyulmus.

$$\Sigma_x^{-1} = \Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0.25 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1.25 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{array} \right]$$

Tersini alalim

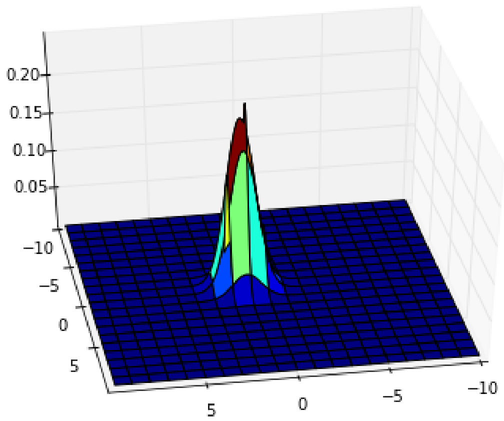
$$\Sigma_x = \left[\begin{array}{cc} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{array} \right]$$

$$x_{MLE} = \Sigma_x (z_1 \Sigma_1^{-1} + z_2 \Sigma_2^{-1})$$

$$x_{MLE} = \left[\begin{array}{cc} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{array} \right] \left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 0.25 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 2 \\ -1 \end{array} \right] \right) = \left[\begin{array}{c} 1.2 \\ -0.6 \end{array} \right]$$

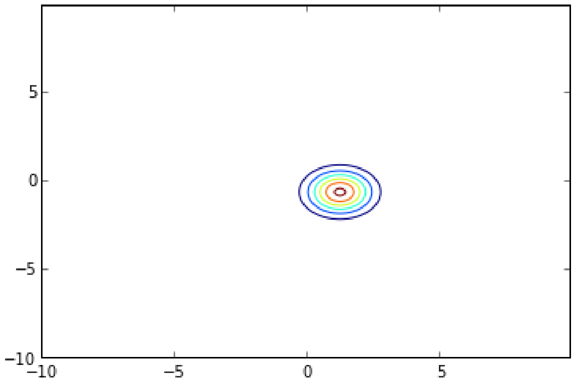
Sonuc grafiklenirse suna benzer (ki yeni belirsizlik Σ_x'i de grafikte kullanalim),

```
Z3 = mlab.bivariate_normal(X, Y, sigmax=0.8, sigmay=0.8,mux=1.2, \
     muy=-0.6,sigmaxy=0.0)

fig = plt.figure()

ax = Axes3D(fig)
ax.view_init(elev=40.,azim=80)

ax.plot_surface(X,Y,Z3,cmap=cm.jet)
plt.savefig('fusion_2.png')
```



Yeni tahminimiz boyle cikti. Cok daha emin oldugumuz bir noktada en olasi olcumu ortaya cikardik. Kontur olarak grafiklersek,

```
CS = plt.contour(X, Y, Z3)
plt.savefig('fusion_4.png')
```



[1] www.robots.ox.ac.uk/~az/lectures/est/lect34.pdf

[2] Hart, Duda, *Pattern Classification*