

## Sınırlı Elementler Metodu (Finite Elements Method)

Bu metod differansiyel, kısmi differansiyel denklemleri (partial differential equations) yaklasiksal olarak modelleme ve cozmenin yontemleridir.

Formul: Baslangic denklemi

$$\frac{-d}{dx} \left( c(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x)$$

İki tarafı da  $v(x)$  ile carpiyoruz ve 0 to 1 sinirlariyla entegralini aliyoruz.

$$\int_0^1 \frac{-d}{dx} \left( c(x) \frac{du}{dx} \right) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

Parcali entegral (integration by parts) formulu soyledir:

$$\int y dz = yz - \int z dy$$

Ana formulun bolumlerini, parcali entegrale gore bolusturursek:

$$dz = \frac{-d}{dx} \left( c(x) \frac{du}{dx} \right) dx$$

$$z = -c(x) \frac{du}{dx}$$

$$y = v(x)$$

$$dy = \frac{dv}{dx} dx$$

Yukarida  $dz$  icinde  $dx$  ve  $\frac{1}{dx}$  birbirini iptal eder. Parcali entegral formulunun sag tarafina gore yerlerine koyarsak:

$$\int_0^1 v(x) dx \frac{-d}{dx} \left( c(x) \frac{du}{dx} \right) = - \left[ v(x) c(x) \frac{du}{dx} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 c(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

Ustteki parcali entegral aciliminda sol taraf entegrale sinir degerleri aldiginda, sag taraftaki  $yz$  sonucunun ayni sinir degerlerine tabi olduguna dikkat edelim.

Differansiyel denklemde sinir kosullari  $x = 1$  durumunda  $c(1)u'(1) = 0$ , ve  $x = 0$  durumunda  $v(0) = 0$  olarak biliniyor. O zaman ustteki denklemin sol tarafinda  $x = 0$  ve  $x = 1$  kosullari icin tanimli bolum  $0 - 0 = 0$  olacaktir ve denklemden atilabilir. Geriye kalanlar

$$\int_0^1 c(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

Bu fonksiyonu Galerkin adli bir matematikci bulmus, “zayif form (weak form)” olarak adlandiriliyor.

Simdi diyelim ki  $n$  tane test fonksiyonu sectik  $\phi_1(x), \dots, \phi(n)$  ve bu fonksiyonlari  $U_j$  sayilari ile carpiminin toplamini, yani bir tur kombinasyonunu  $u(x)$  yerine kullanmaya karar verdik.

$$U(x) = U_1\phi_1 + \dots + U_n\phi_n$$

O zaman

$$U'(x) = U_1\phi'_1 + \dots + U_n\phi'_n$$

$$= \sum_1^n U_j \frac{d\phi_j}{dx}$$

Simdi  $du/dx$  yerine  $U'(x)$  koyarsak

$$\int_0^1 c(x) \left( \sum_1^n U_j \frac{d\phi_j}{dx} \right) \frac{dV_i}{dx} dx = \int_0^1 f(x) V_i(x) dx$$

Dikkat edelim,  $v(x)$  yerine  $V_i(x)$  kullandik. Ustteki formül her  $i$  için yeni bir formül “uretecek”. Niye  $V_i$ ? Zayıf formdaki  $v(x)$  formülünü de zaten biz uydurmştuk, yani  $v(x)$  biz ne istersek o olur. O zaman bu fonksiyonu  $n$  tane formül üretmek için bir numara olarak kullaniliyoruz,  $n$  tane formül olunca matrisin  $n \times n$  elemanini doldurabileceğiz ve çözüme erisebileceğiz. Ek not, cöğunlukla  $V_i(x)$  için  $\phi_i$  formleri kullaniliyor.

Ayrıca formüldeki  $U_j$  kısmını çekip çıkartırsak ve bir vektör içine koyarsak, geri kalanlar bir  $K_{ij}$  matrisi içinde tutulabilir.

$$K_{ij} = \int_0^1 c(x) \frac{d\phi_j}{dx} \frac{dV_i}{dx} dx$$

Sağ taraf aynı şekilde  $i$  tane formül üretir

$$F_i = \int_0^1 f(x) V_i(x) dx$$

Final formül matrix formunda basit bir şekilde temsil edilebilecektir.

$$KU = F$$

Örnek

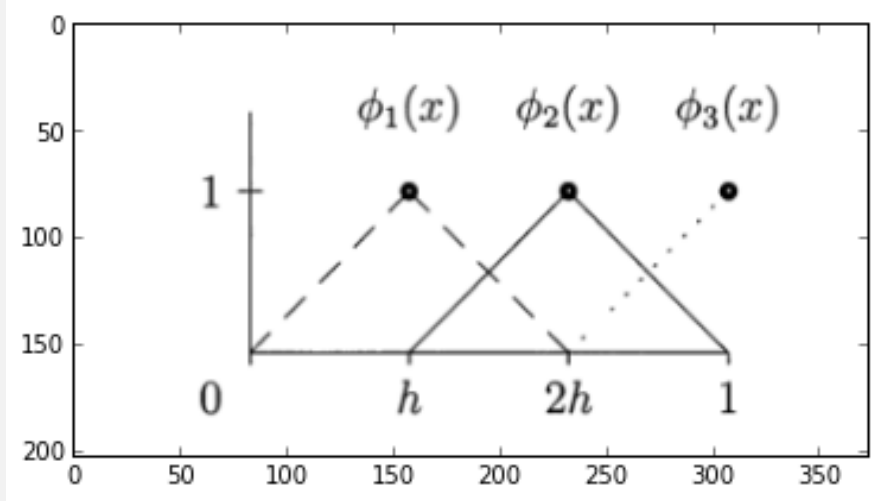
Örnek olarak  $-u'' = 1$  denklemini çözelim. Not: Differansiyel denklemlerde sonuç bulmak demek bir “fonksiyon” bulmak demektir. Normal cebirsel denklemlerde sonuç bulmak değişkenlerin “sayısal” değerini bulmak demektir. Birazdan bulacağımız sonuç  $u(x)$  “fonksiyonu” olacak.

Eğer denklem  $-u'' = 1$  ise o zaman bu formülü ana forma uygun hale getirmek için  $c(x) = 1$  olarak almamız gerekir.  $-u'' = 1$  denkleminde eşitliğin sağ tarafı 1 olduğuna göre  $f(x) = 1$  demektir.

Artık  $\phi$  fonksiyonlarını seçme zamanı geldi. Bu fonksiyonların “toplamı” hedeflediğimiz fonksiyonu yaklaşık (approximate) olarak temsil edecek. Örnek olarak seçebileceğimiz bir fonksiyon “sapka fonksiyonu (hat function)” olarak bilinen ucgen fonksiyonlar olabilir. Altındaki figürde bu fonksiyonları görüyoruz.

```
im=imread("fem_hat.png"); imshow(im)
```

<matplotlib.image.AxesImage at 0xb04834c>



Bu figürde x ekseninin  $h$  büyüklüğündeki parçalara bölündüğünü görüyoruz.

Entegralleri hesaplayalım

$$F_1 = \int_0^1 V_1(x) dx$$

Daha önce  $V_1$  ve  $\phi_1$ 'i aynı kabul ettiğimizi belirtmiştik.

Yukarıdaki integralin aslında bir alan hesabı yaptığını görüyoruz. Sınırlar 0 ve 1 arasında, ama  $2h$  ötesinde zaten  $\phi_1$  fonksiyonu yok.  $\phi_1$ 'in alanı nedir? Alan üçgenin alanı: Taban carpi yükseklik bolu 2:  $2h$ , yüksekliği 1, o zaman alan  $(2h \times 1)/2 = 1/3$

Benzer mantıkla bakarsak,  $F_2$  ile  $F_1$  aynı, yani  $1/3$ .  $F_3$  ise onların yarısı, yani  $1/6$ .

$K_{ij}$  nasıl hesaplanacak?  $c(x) = 1$  olduğu için formülден çıkarılabilir ve  $V_1$  ve  $\phi_1$ 'in aynı olduğuna söyledik:

$$K_{ij} = \int_0^1 c(x) \frac{d\phi_j}{dx} \frac{dV_i}{dx} dx$$

$$K_{11} = \int_0^1 \left( \frac{dV_1}{dx} \right)^2 dx$$

$dV_1/dx$  nedir? Birinci sapka fonksiyonunun türevidir. Bu türeye bakarsak, 0 ve  $h$  arasında artı eğim (slope)  $1/h$ ,  $h$  ve  $2h$  arasında eksi eğim  $-1/h$  oluyor. Ama kare aldığımız için sonuç aynı,  $1/h^2$ . O zaman  $h = 1/3$  olduğuna göre  $1/(1/3)^2$ , yani  $dV_1/dx = 9$ .

$$K_{11} = \int_0^{2/3} 9 dx = 9x \Big|_0^{2/3} = (9)(2/3) - 0 = 6$$

$K_{22}$  seklen aynı fonksiyon parçasını temel aldığı için aynı değere sahip: 6.  $K_{33}$  onların yarısı, esittir 3.

$K_{12}$  farklı eğimlerin çarpımı anlamına gelir, yani  $V_1'$  ile  $V_2'$  çarpımı olur. Bu iki fonksiyona bakalım, 0 ile  $h$  arasında  $V_2$  yok, eğim 0. İkisinin de sıfır olmadığı, çarpımda kullanılacak bir eğimin olduğu tek aralık  $h$  ve  $2h$  arası. Burada  $V_1' = -3, V_2 = 3$ .

$$K_{12} = \int_{1/3}^{2/3} (3)(-3)dx = -9x \Big|_{1/3}^{2/3} = -6 - (-3) = -3$$

Aynı şekilde  $K_{23} = -3$ . Ama  $K_{13} = 0$  çünkü hiç çakışma yok.

Matrisi doldurursak,

$$KU = F$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Python kodu

```
import numpy as np
K = [[6., -3., 0],
      [-3., 6., -3.],
      [0., -3., 3.]]

f = [1./3., 1./3., 1./6.]

print np.linalg.solve(K,f)
```

```
[ 0.27777778  0.44444444  0.5        ]
```

Rapor edilen değerler bu denklemin bilinen çözümü  $u(x) = x - \frac{1}{2}x^2$  ile 0,  $h$ ,  $2h$  noktalarında (mesh points) birebir uyum gösterdiğini görüyoruz. Yani yaklaşık olarak diferansiyel denklemi çözmedi basardık.

Kaynaklar

Strang, G., Computational Science and Engineering, 2007