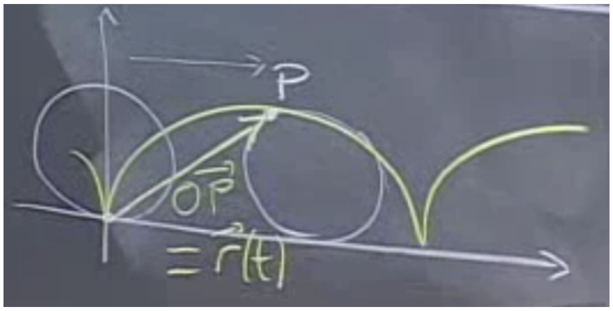
MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 6

Bir onceki derste cycloid konusunu isledik.



Hareket eden bir noktanin pozisyonu

$(x(t), y(t), z(t))$

Bu noktayi takip etmenin diger yollarindan biri onu pozisyonu vektoru olarak gormek, ki bu vektorun bilesenleri noktanin kordinatlari.

$\vec{r}(t) =< x(t), y(t), z(t) >$

Vektor orijin (baslangic) noktasindan gelinen noktayi isaret eden bir vektor (resimde $\vec{OP}$).

Cycloid probleminde tekerlek yaricapini 1 alalim ve birim hizda ilerliyor olalim, ki boylece aci θ ve zaman ayni sey haline gelsin

$\vec{r}(t) =< t - sin(t), 1 - cos(t)$

Tamam. Simdi, noktanin pozisyonunu zaman acisindan bildigimize gore, onun degisimini inceleyebiliriz, mesela hizina, ivmesine bakabiliriz. Ilk once hiza bakabiliriz. Fakat, aslinda, hizdan daha iyisini hesaplayabiliriz. Hiz tek bir sayidir sadece, ama eger su icinde GPS olan satafatli spor arabalarindan birine sahip degilseniz, size hizinizin "hangi yonde" oldugunu soylemez. Sadece "gittiginiz yonde" (her ne yone gidiyorsaniz) ne kadar hizli oldugunuzu soyler.

O zaman biz hizimizi hesaplarken, hem yonu, hem hizi ayni anda goze alabiliriz. Bu demektir ki vektor kavrami tekrar isimize yarayacak. Hizi vektor olarak hesaplayabiliriz.

Bunu nasil yapariz? Pozisyon vektorunun zamana gore turevini alabiliriz.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Bu tur bir turevi bu derste ilk kez goruyoruz, ilk kez bir vektorun turevini aliyoruz. Bu sekilde turev almak demek, o vektorun bilesenlerinin teker teker turevini almak demektir. Yani

$$= < \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} >$$

Cycloid ornegine donersek

$$\vec{r}(t) = < t - sin(t), 1 - cos(t)$$

formulunun turevini alirsak ne olur?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = < 1 - cos(t), sin(t) >$$

Iste bu turev bize hangi yonde ve ne kadar hizli gittigimizi gosteriyor.

Bu arada bir vektorunun buyuklugunun (magnitude) her zaman mesafesel, uzakliksal anlami olmayabilecegini de gormus oluyoruz. Hiz kavrami bir orandir, katedilmis bir mesafe, bir yer degildir, t aninda bir yonde olan bir buyukluktur. Fakat yine de bir buyukluktur, bir yonu vardir, ve bu sebeple vektorler ile temsil edilebilir.

Problemimize donelim. Onceki derste tekerlekte izlenen noktanin en alta gelip yukseldigi siralarda hareketinin nasil oldugunu irdelemistik. Simdi bu konuyu hiz kavramini kullanarak incelemeye ugrasalim. Ustteki vektore $t = 0$ koyarsam, ne olur? Sonuc $< 0, 0 >$, yani $\vec{v} = 0$. Tabii ki nokta $t = 0$ oncesi hareket ediyor, sonra da ediyor, yani bir hizi var, sadece "o anda" hizi yok.

Peki hiz vektor olarak daha fazla bilgi veriyor olmasina ragmen, ben yine de klasik anlamda hizi, yani o tek sayiyi elde etmek istiyorsam ne yaparim? Hiz vektorunun buyuklugunu hesaplarim, $|\vec{v}|$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1 - cos(t))^2 + sin^2(t)}$$

$$= \sqrt{1 - 2cos(t) + cos^2(t) + sin^2(t)}$$

$$= \sqrt{2 - 2cos(t)}$$

Bu formule bakarak hizin nerede en fazla, en az oldugunu hesaplayabiliriz. Eger $t = 0$ ise, sonuc sifir olur. $t = \pi$ ise elimizde $\sqrt{4} = 2$ vardir, bu an noktanin tekerlegin en ustunde oldugu andir, bu an ayni zamanda en hizli hareket ettigimiz de andir. Hatta bu hiz tekerlegin saga dogru yatay gidis hizinin iki katidir, tekerlegin saga dogru birim hizda ilerledigini soylemistik, fakat nokta bunun ustune bir de merkeze gore bir donme hareketi icinde, ve bu iki etki birbirine eklenerek 2 hizina sebebiyet veriyor.

O nokta tepe noktasindan asagi inmeye baslayinca tabii ki noktamiz donusun "geriye dogru" olan etkisiyle toplami hizinda dusme yasiyor.

Ivme

Bu konuyu islemeden once klasik olarak bilinen ivme kavrami ile burada kullanacagimiz ivme kavrami ile ciddi uyusmazliklar oldugunu belirtmeliyim. Klasik anlayista ivme mesela bir arabada giderken "hissettigimiz sey" bizi koltuga iten kuvvet, hizdaki degisim (hizin turevi) olarak bilinir, ve eger bir arabada saatte 40 km ile gidiyorsam, ivme yok denir. Fakat simdi bu arabanin bir virajdan dondugunu farzedelim, bu durumda bir kuvvet hissederiz, hala saatte 40 ile gidiyor olabilirim, ama bir ivme vardir. Burada aslinda yana dogru bir hizlanma / ivme sozkonusudur. O zaman yine vektor kavramini kullanmamiz lazim.

Ivme vektorunu soyle belirtelim:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Fizikteki ivme tanimi da budur, $F = ma$ derken kastedilen a iste bu a'dir. Bir vektordur.

Cycloid'e donelim.

$$\vec{v} =< 1 - cos(t), sin(t) >$$

Turevi alalim

$$\frac{d\vec{v}}{dt} =< sin(t), cos(t) >$$

$t = 0$ noktasinda ivme nedir? $< 0, 1 >$.

Yani $t = 0$ anindaki ivme bir birim vektor, ve yonu tam yukariya dogru. Bu ilginc bir sey, o anda hiz sifir, fakat bir ivme mevcut.

Bu arada, hemen belirtelim

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \neq \frac{d|\vec{r}|}{dt}$$

Yani bir vektorun turevinin buyuklugu, o vektorun buyuklugunun turevi ile ayni sey degildir. Esitsizligin sagindaki kavram zaten cogunlukla pek ise yarar bir sey degildir, hesaplanabilir, biraz sac bas yoldurabilir ama mumkundur, fakat cogunlukla kullanilmaz.

Egri Uzunlugu (Arc Length)

Egri uzunlugu bir egri uzerinde ne kadar yol katettigimizi gosteren bir buyukluktur. Mesela bir arabadaki ne kadar yol katettiginizi gosteren kilometre sayaci bunu arabanin hizini belli bir zaman uzerinden entegre ederek hesapliyor.

$s =$ bir yol uzerinde katedilmis mesafe

Bunun anlami olmasi icin tabii ki bir sabit, referans noktasi dusunmeliyiz. Orijin noktasi bu nokta olabilir. Bu arada s referans noktasinin neresinde oldugumuza gore negatif olarak ta hesaplanabilir. Referansa kadar eksi, sonrasi arti olabilir mesela.

Peki s ile t, yani egri uzunlugu ve zamani nasil birbirine baglariz?

$$\frac{ds}{dt} = \text{ hız } = |\vec{v}|$$

Yani birim zamanda katedilen egri uzunlugu hizdir.

Ama acik olmak gerekirse, aslinda turevin kesin degerini (absolute value) almak daha dogru olur (dikkat, vektor buyuklugu isareti degil, kesin deger isareti bu sefer)

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \text{ hız } = |\vec{v}|$$

Niye? Belki bir egri uzerindeyiz ama o egri uzerindeki hareketimiz bir ileri bir geri seklinde. Bu durumda egri uzunlugunu surekli saymak istemeyiz, onu "cogalan (ileri), azalan (geri)" turunden bir buyukluk olarak gormek isteriz.

Egri uzunlugu hesabi icin hizi zaman uzerinden entegre ederiz. Mesela bir cycloid'in (resimde sari ile gosterilen) bir turunun uzunlugu ne kadar diye hesaplamak istiyorsak,

$$\vec{v} = \sqrt{2 - 2cos(t)}$$

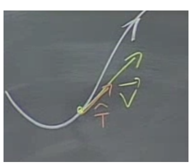
ifadesinin 0 ile 2π arasinda entegralini almamiz lazim.

$$\int_o^{2\pi} \vec{v} = \int_o^{2\pi} \sqrt{2 - 2cos(t)} dt$$

Acikca soylemek gerekirse bunun entegrali analitik olarak nedir bilmiyoruz, ama ileriki derslerde bu hesabi yapmak icin fiyakali bir numara gorecegiz.

Gidisatin Birim Teget Vektoru

Notasyonda bu kavram cogunlukla $\hat{T}$ olarak gosterilir. Sapka var cunku vektor birim vektor. T cunku "teget".



Vektor $\vec{v}$ gidisata zaten tegettir. $\hat{T}$ bir anlamda bu vektorun sadece yonudur, o zaman $\vec{v}$'nin yonu bize gerekli, demek ki onu birim vektor haline getirirsek, $\hat{T}$'yi elde etmis oluruz.

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Bir suru kavram birikti. Bunlarin birbiriyle bir alakasi olmali, onlardan bahsedelim.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Ustte zincirleme kanununu (chain rule) kullandik.

Biraz once goruk ki $ds/dt = |\vec{v}|$.

Eger

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}|\vec{v}|$$

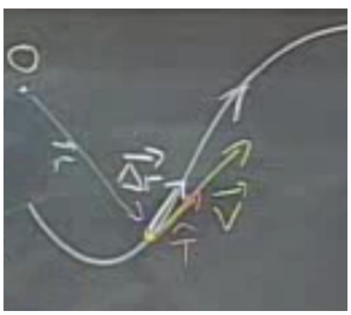
ise, vektor $\vec{v}$'nin buyuklugunu oyle bir sey ile carpiyorum ki sonuc olarak vektorun kendisi ortaya cikiyor. O sey ne olabilir? Tabii ki vektorun birim vektor olarak gosterilecek yonu olabilir. Bu birim vektoru zaten hesaplamadik mi? Bu vektor $\hat{T}$'den baskasi degil.

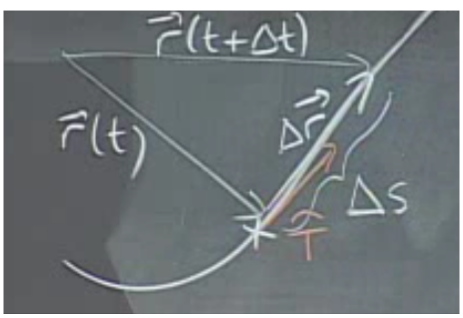
$$\vec{v} = \hat{T}|\vec{v}|$$

ya da

$$\vec{v} = \hat{T}\frac{ds}{dt}$$

Peki sezgisel olarak dusunursek, $d\vec{r}/dt$ niye $\hat{T}$'ye esit olmali? Alttaki grafiklere bakalim.





Yerimizi t aninda $\vec{r}(t)$, Δt kadar bir adim atiyoruz, ve $\vec{r}(t+\Delta t)$ noktasina geliyoruz. Bu noktada egri uzerinde katedilen mesafe Δs, o zaman

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx hız$$

Yer vektorumuzun degisimi ise

$$\Delta \vec{r} \approx \hat{T} \Delta s$$

Iki tarafi Δt ile bolersek

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \approx \hat{T} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ve $\Delta t \to 0$ olarak limitini alirsak, o zaman usttekiler turev haline gelir, yaklasiksal isaret esitlik olur. Yani

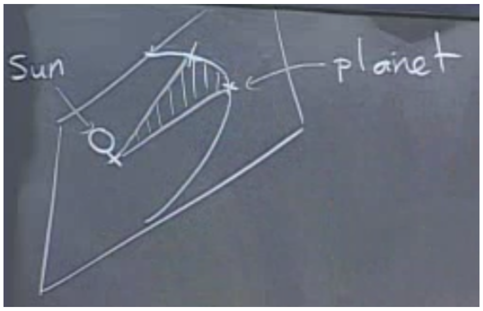
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{T} \frac{ds}{dt}$$

Peki bu tur konularda vektorler kullanalim. Aslinda simdiye kadar gorduklerimizi diger yollarla da temsil edebilirdik. Fakat vektor "dili" ozellikle hareketleri modellerken oldukca faydali oluyorlar.

Ornek - Kepler'in Ikinci Kanunu

Kanun 1609'da kesfedildi, yani pek yeni bir gelisme oldugu iddia edilemez. Kepler gezegenlerin hareketini modellemeye ugrasiyordu. Bazi insanlar gezegenler mukemmel bir cember icinde donerler, vs. diyordu. Kepler gezegenlerin yorungesinin cember degil elips (ellipse) oldugunu one surdu. Kepler'in Kanunu soyle der:

Gezegenlerin hareketi bir duzlem uzerindedir, gunesten gezegene cekilebilecek bir hayali cizginin kapsadigi alanin buyumesi / asilmasi sabit bir orandadir. Bu ilginc bir kanun cunku bir kez yorungenin seklini bilirsek, o yorunge uzerinde ne kadar hizli gidebilecegimizi bize soyluyor.



Ustteki sekle bakarsak, gunes (sun) etrafinda bir gezegen (planet) var, ve katedilen yol tarali sekilde cizili. Kepler Kanunu su anlama gelir, katedilen alan zamana orantilidir, eger gezegen gunese daha yakin olsa, daha hizli gitmek zorundadir, uzak olsa, daha yavas gitmek zorundadir, ki katedilen alanin zamana orani ayni kalsin. Niye? Eger yakin olursak, gunese direk mesafe azalacaktir, boydan kaybettigimizi diger yonden kazanmamiz gerekir, yani ayni zamanda ayni alani katetmek icin bu sefer yorunde uzerine daha hizli gidilmelidir, ki ayni alana erisebilelim. Tabii gezegenlerin akli yoktur, boyle olsun diye ugrasmazlar, Kepler gozlemlerini yaparken, modellerken degismeyen bu buyuklugu kesfetmistir, ve sayede bazi hesaplari temiz sekilde yapabilmesi mumkun olmustur.

Biz de simdi bu kanunu, mekanik / fizikten bugun bildiklerimizi kullanarak dogrulamaya calisacagiz. Newton, ki 1600'lu yillarin sonlarinda ortaya cikti, bu durumu yercekimi formulleri ile aciklamayi basardi.

Simdi vektorler kullanarak bu modeli yaratacagiz ve Kepler'in onlari kullanarak alan hesabinin aslinda ne kadar dogal / bariz oldugunu gorecegiz. Fakat Kepler bu kanunu ortaya atarken isler hicbir bu kadar bariz degildi!

Tekrar bir pozisyon vektoru $\vec{r}$ yaratalim, baslangici gunes, bitis noktasi gezegen olsun, katedilen yol $\Delta\vec{r}$ olsun.

Katedilen alani nasil hesaplariz. Sekilde cizdiklerimiz yeterince ipucu veriyor, yaklasiksal olarak bir ucgen olustu. Alan bir kenari $\vec{r}$, diger kenari $\Delta\vec{r}$ olan paralelogramin yarisi. Paralelogram hesabini yapmayi biliyoruz nasilsa,

$$\Delta t\text{'de Kapsanan Alan } \approx \frac{1}{2}|\vec{r} \times \Delta\vec{r}|$$

ki Δt oldukca kucuk olmali.

Ayrica

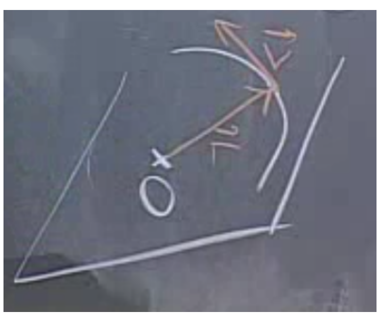
$$\Delta\vec{r} \approx \vec{v}\Delta t$$

O zaman alan

$$\approx \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|\Delta t$$

Peki bu alanin zamana sabit oranda olmasi ne demektir? Alanin Δt'ye oranli olmasi demektir, bu da ustteki formulde $|\vec{r} \times \vec{v}|$ teriminin sabit olmasi demektir.

2. kanunu dusunelim, gezegenin yorungesinin hep ayni duzlem uzerinde oldugunu soyluyordu. Bu demektir ki $\vec{r} \times \vec{v}$ ile ortaya cikan ve bu ikisine normal (dik) olan ucuncu vektorun "yonu" hep ayni kalmalidir. Cunku iki vektor bir duzlem tanimlar, bu iki vektore dik olan duzleme de diktir, ve duzlem hic degismiyorsa bu vektorun yonu de degisemez.



O zaman hem buyukluk ayni, hem yon ayni, o zaman Kepler'in 2. Kanunu $\vec{r} \times \vec{v}$ bir sabit vektor demektir. Ne yonu ne buyuklugu degismeyecektir.

Turevler baglaminda bunu soyle soyleyebiliriz

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = 0$$

Turevler normal carpimlar icine nufuz ederken Carpim Kanunu (Product

Rule) kullaniliyordu. Capraz carpimlar icin de ayni kural gecerli, yani ustteki

$$= \frac{\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Daha once turettigimiz esitlikleri usttekilerin yerine koyarsak

$$= \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = 0$$

Bir vektorun kendisi ile capraz carpimi her zaman sifirdir. O zaman $\vec{v} \times \vec{v} = 0$. Denklemden atilabilir. Geriye kalanlar

$$= \vec{r} \times \vec{a} = 0$$

Ustteki ifade ne zaman dogru olabilir? Ya da genel olarak iki vektorun capraz carpimi ne zaman sifirdir? Eger birbirlerine paraleller ise. Bu demektir ki ivme $\vec{a}$ ile pozisyon $\vec{r}$ birbirine paraleldir. Yani Kepler'in 2. Kanunu aslinda bunu soylemektedir.

Ve biz bugun yercekim gucunun $\vec{r}$'e paralel oldugunu biliyoruz, yani mesela gunesin bir gezegeni kendine direk bir yonde cektigini biliyoruz. Demek ki ustteki ifadenin sifir oldugu da dogrudur.

Not: Bu arada parallellik hem cekim, hem itme icin gecerli olurdu (her iki durumda da yon paralel). Hakikaten elektriksel alanda parcaciklarin cekilmesi ve itilmesi baglaminda da Kepler'in Kanunu aynen islemektedir.

Soru

Diyelim ki P noktasi bir kure (sphere) uzerinde hareket ediyor ve

$$OP = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Hiz vektoru $\vec{v}$'nin her zaman pozisyon vektoru $\vec{r}$'ye dik oldugunu x, y, z kordinatlarini kullanmadan ve alttaki esitlikten faydalanarak

$$\frac{d}{dt}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \tag{1}$$

ispatlayin.

Cevap

Eger $\vec{r}$ ve $\vec{v}$ birbirine dik ise, o zaman $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ demektir.

Bu arada hatirlayalim ki hiz pozisyon vektorunun zamana gore turevidir.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Suradan bir giris yapalim. Eger uzerinde olunan kurenin yaricapi a ise,

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = a^2$$

Usttekinin formul 1'e gore turevini alalim

$$\frac{d}{dt}\vec{r} \cdot \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Sag taraf sifir cunku sabit a^2'nin turevi sifir. Devam edelim

$$2\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$$

Demek ki iki vektor birbirine dik.

Soru

Bir onceki soruda ispatlananin tam ters yonunu ispatlayin. Eger $\vec{r}$ ve $\vec{v}$ dik ise, P'nin hareketi kesinlikle bir kure uzerinde olmak zorundadir.

Cevap

Biliyoruz ki

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = |r|^2$$

Turevi alinca

$$\frac{d}{dt}\vec{r} \cdot \vec{r} = 0$$

Sag taraf sifir oldu cunku orada bir sabit vardi. Diger taraftan, eger diklik oldugunu biliyorsak su dogru olmali

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$$

$\vec{v}$ ayni zamanda pozisyonun turevidir, ustte yerine koyalim

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} = 0$$

Onceden gormustuk ki

$$2\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r})$$

Bu denklemin sol tarafi iki ustteki formulun sol tarafina benziyor, o zaman

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 0$$

Simdi sunu soralim: Turevi sifir olan sey nedir? Bir sabittir.

$\vec{r} \cdot \vec{r} = c$ adinda bir sabit

O zaman $|\vec{r}| = \sqrt{c}$.

Eger $\vec{r}$'nin uzunlugu hic degismiyor ise, o zaman pozisyon bir kure uzerinde hareket ediyor olmalidir.