

## MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 15

Onceki derslerde gradyan kavramini gorduk. Bu vektorun bilesenleri, 3 degiskenli bir fonksiyon icin

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$$

idi, ki bu bilesenler  $f$ 'in tum kısmi turevlerini olusturuyordu. Gradyanlar kısmi turevleri paketlemenin, sunmanin yontemlerinden biriydi sadece.

Gradyanlari yaklasiksallama formulleri icin de kullanabiliyorduk, mesela eger  $x, y, z$ 'yi “birazcik” degistirince bunun  $f$  uzerindeki degisim etkisi  $\Delta f$ 'i [kabaca, niye kabaca oldugu altta] hesaplamak istiyorsak bunun gradyan formundaki hali

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z$$

Daha kısa olarak

$$= \nabla f \cdot \Delta \vec{r}$$

oluyordu, yani gradyan vektorunun, pozisyon vektorunun degisimi ile olan noktasal carpimi. Kısmi turevlerin tami tamina oltugu sey  $f$ 'in bir degiskenindeki degisime ne kadar hassas oldugudur, ve bu hassasligin ufak degisimler ile carpilip toplanmasi bize tum fonksiyondaki degisimi verir.

Ustteki yaklasiksallama “teget duzlem yaklasiksallaması” olarak bilinir, bu arada, fonksiyonun yerine bir noktada teget duzlemi koyuyoruz, o noktada fonksiyon budur diyoruz, boylece fonksiyonun  $x, y, z$  degiskenlerine asagi yukari lineer olarak bagli oldugunu farz ediyoruz, o sebeple zaten degisimleri duz carpim sonrasi basit toplama maruz tutuyoruz.

Hatirlarsak,  $f(x, y, z) = c$  yuzeyine teget olan duzlemi bulmak icin normal vektore bakariz, biliyoruz ki normal vektorlerden biri fonksiyonun gradyan vektorudur, cunku gradyanin kesit seviyelerine diktir, ve fonksiyonun daha yuksek degerlerine, en yuksek artis yonune isaret etmektedir.

Bu noktada kulturel bir not eklemek istiyorum. Bunu belki haftalar once belirtmeliydim, daha iyi olurdu. Kısmi turevleri niye seviyoruz / kullaniyoruz? Onemli bir sebep onlari fizik icin cok faydali olmalari, etrafimizdaki dunyayi anlamamiza yardimci olmalari. Bu dunyadaki pek cok olus kısmi turevsel denklemler (partial differential equations -PDE-) ile tarif edilir, modellenir.

PDE'ler bilinmeyen bir fonksiyonun kısmi turevlerini kullanarak onlar arasında bir ilişki, fonksiyon kurar.

Mesela Isi Denklemi (Heat Equation) bunlardan biridir.

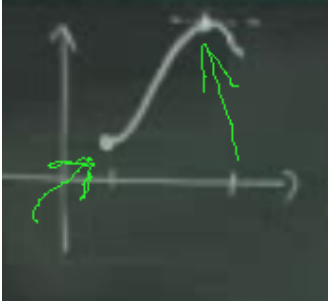
$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

Bu denklemde cozmek, bulmak istedigimiz  $f$  fonksiyonudur, ve bu fonksiyon 4 degiskene baglidir:  $f(x, y, z, t)$ , ve temsil ettigi  $x, y, z$  pozisyonundaki bir noktanin  $t$  anindaki sicakligidir. PDE  $\partial f / \partial t$  ise bu fonksiyonun zamana gore nasil degistigini tarif eder.

Bu konuya ileride tekrar donecegiz.

Simdi diger konulara gecelim. Kritik noktalardan bahsetmistik, bu noktalarda kısmi turevler sıfır degerlerindeydi. Ayrica eger noktaları (saddle points) vardı, ve ikinci turevleri kullanarak kritik noktanin min mi, maks mi, eger mi olduguna karar verebiliyorduk.

Fakat tum bunların min, maks bulmak için yeterli olmadigini da gorduk, cunku min, maks sinir noktalarında, fonksiyonun ta en uçlarında da olabiliyordu.



Ustteki grafikte gorulen sagdaki nokta kritik bir nokta, ve ikinci turevin bize lokal maks oldugunu soyleyecegi noktadir. Minimum ise soldaki noktadir, fonksiyonun sol sinirindadir, ve kritik nokta degildir. Birden fazla degisken için de durum aynidir; bu durumlarda min, maks bulmak için degiskenlerin olabilecekleri en az degere (mesela sıfır) ya da en fazla (mesela sonsuzluk) cekmek gerekebilir. Yani zihnimizi acik tutup pek cok olasiligi gözden gecirmemiz, dusunmemiz gerekir.

Diferansiyeller

$f$ 'teki degisimi soyle gosterdik

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

Ilk bakista bu temsil, kısmi turevleri paketlemenin bir baska yolundan ibaret gozukuyor. Bunu da yapıyor muhakkak, ama daha fazlasi da var. Yaklasiksal formullerin formunu hatirlamanin iyi bir yolu, her degiskendeki varyasyonu digerlerinkiyle ilintilendiriyoruz. Bir onemli fayda daha su, bu formulu ayni  $d_+$  ile bolerek, degisik sekillerdeki Zincirleme Kanunlarini ortaya cikarabiliriz.

Mesela diyelim ki  $x, y, z$  diger iki degisken  $u, v$ 'ye bagli.

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$z = z(u, v)$$

Bu durumda  $f$ , aslinda  $u, v$ 'nin bir fonksiyonu haline gelir. Ve bu noktada kendimize  $f$  fonksiyonu mesela “ $u$ 'nun degisimine ne kadar hassas” gibi bir soru sorabiliriz. Bunun cevabini Zincirleme Kanununu  $u$  uzerinden kullanarak cevaplayabiliriz.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

Ustteki turde bir islem bize degisken degisimi yaptigimiz zaman faydali olur. Mesela kutupsal kordinat sisteminden  $x, y$  kordinat sistemine gecis yapabiliriz, ve Zincirleme Kanunu uzerinden kutupsal formdaki degisimin  $x, y$  dunyasindaki yansimalarını hesaplayabiliriz.

Sonraki konumuz bagimsiz olmayan degiskenler, mesela  $x, y, z$ , degiskenleri  $g(x, y, z) = c$  gibi bir fonksiyon uzerinden birbiriyle baglantili. Her seferinde bu tur problemlerde istedigimiz degiskeni yanliz birakip, baska bir yere koyamiyoruz, o zaman min, maks baglaminda Lagrange Carpanlari teknigini kullaniyoruz.

Bir diger gordugumuz teknik kisitlanmis kısmi turevler teknigiydi. Diyelim ki yine elimizde  $f(x, y, z)$  var ve  $g(x, y, z) = c$  gibi bir baglanti var. Bu durumda  $f$ 'in tek bir degisken degisip, digerleri sabit iken (yani tipik kısmi turev islemi) nasıl degisecegini bulabilir miyim?

Bulamayabilirim, cunku, belki kisitlama ibaresi  $g$  yuzunden geri kalan tum

degiskenleri sabit tutamayacagim.

Ornek

Sunu bul

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_y$$

$y$  sabit

$z$  degisiyor

$$x = x(y, z)$$

Ustteki  $x$  ibaresini bu ornek icin biz tanimladik, herhangi baska bir kisitlama ibaresi  $g$  olabilirdi.

1) Diferansiyelleri Kullanarak

Genel ifade neydi?

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

Bunu ozel durumumuza nasil uygulariz?  $y$  sabit, o zaman  $dy = 0$ . Yani

$$df = f_x dx + f_z dz \quad (1)$$

Devam edelim, aslinda  $dx$ 'den de kurtulmak istiyoruz, cunku o bagimli bir degisken, her seyi  $z$  formunda gormek istiyoruz. Bunun icin once  $dg$ 'yi bulalim.

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0$$

Niye sifra esit? Cunku  $g$  kisitlama ibaresi sabitti.

$y$  degismiyorsa, o zaman ustteki  $dy$  de gidebilir. Kalanlar

$$dg = g_x dx + g_z dz = 0$$

$$dx = -\frac{g_z}{g_x} dz$$

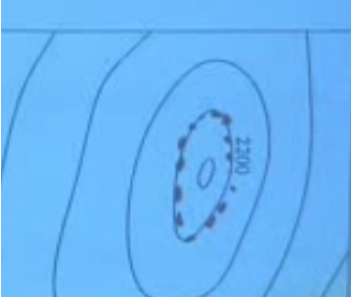
Yani

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -\frac{g_z}{g_x}$$

O zaman iki üstteki formulu alıp, 1. formülde  $dx$  yerine koyarsak

$$df = \left(-f_x \frac{g_z}{g_x} + f_z\right) dz$$

Ornek Test 2A Problem 2



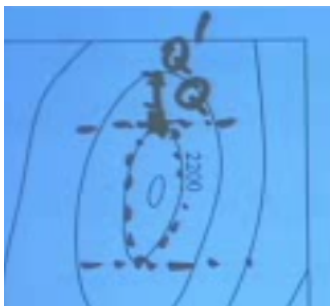
Kesit seviyeleri veriliyor, bunlar üzerinde b) için  $h = 2000$ ,  $\partial h / \partial x = 0$  ve  $\partial h / \partial y < 0$  olduğu noktayı işaretleyelim. Hoca noktalar ile  $h = 2200$  seviyesini işaretliyor.



Sonra yatay çizgilerle  $\partial h / \partial x$ 'i işaretlemiş, bu çizgiler boyunca  $y$  sabit, ve  $x$  değişiyor. Değişirken, kesit seviyeleri arasından geçiyoruz, önce azalıyoruz, sonra çoğalıyoruz, aradaki noktada (iki noktada, bir üstte, bir altta)  $h = 2200$ 'e teğet geçiyoruz.

Soru bir de  $\partial h / \partial y < 0$  olan noktayı istemiş, bu son şart, elimizde iki noktadan yukarıda olanı, orası  $Q$  olacak.

İstenen bir diğer şey  $\partial h / \partial y$  değerinin  $Q$  noktasında yaklaşık olarak değeri. Bunun için  $Q$ 'den bir sonraki kesit seviyesindeki bir noktaya  $Q'$  ziylarız. Ve bu iki nokta arasındaki ölçümlere göre bir yaklaşık hesap yaparız.



$$\Delta y \approx 300$$

$$\Delta h = -100$$

$$\frac{\Delta h}{\Delta y} = -\frac{100}{300}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

Yani

$$\frac{\partial h}{\partial y} \approx -\frac{1}{3}$$