

MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 14

Bagimsiz Olmayan Degiskenler (Non-independent Variables)

Ornek

Fizikteki $f(P, V, T)$ formulu, ki bu degiskenler

$$PV = nRT$$

sekinde ilintili. Daha genel olarak bir $f(x, y, z)$ formulu var, ve degiskenler x, y, z birbiriyle $g(x, y, z) = c$ uzerinden baglantili. Aslinda bir onceki dersteki ayni durum, sadece bu sefer min, maks degil, kısmi turevlere neler oldugunu inceleyecegiz.

Yine onceki dersteki gibi, belki g 'yi cebirsel olarak degistirip, f 'e sokup degisken yoketmek mumkun degil. Eger oyle yapabilsek, bir $z = z(x, y)$ olabilirdi, ve onun kısmi turevlerine bakabilirdik,

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$$

gibi. Peki ya z 'yi bulamiyorsak? Belki ustteki kısmi turevleri z 'yi bulmadan elde edebiliriz.

Ornek

$$x^2 + yz + z^3 = 8$$

$(2, 3, 1)$ noktasina bakalim (yerine koyunca hakikaten 8 ciktigini goruyoruz). Fakat bu degerlerde azicik degisiklik yapinca, z nasil degisir? Bu soruyu nasil cevaplarim?

Formulden z 'yi cekip cikarmak gerekir, kupsel (cubic) formullerde bunu yapmanin bir yolu var, fakat cok karmasik bir formül ortaya cikartiyor. Aradigimiz sonuca ulasmanin daha kolay bir yolu var.

g 'nin tam diferansiyeline, yani dg 'ye bakalim (ustteki formulu g kabul ediyoruz). Tam diferansiyel

$$2xdx + zdy + (y + 3z^2)dz = 0$$

Sag taraf sifir cunku ustteki g bir sabite esit, $g = 8$, sabitin degisimi sifir, yani $dg = 0$.

Tam diferansiyele $(2, 3, 1)$ degerini verelim

$$4dx + dy + 6dz = 0$$

Bu formül bize her degiskenin degisiminin digeri ile nasıl baglantili oldugunu gosteriyor. Mesela dx ve dy 'yi biliyorsak, dz 'yi, yani z 'nin degisimini hesaplayabiliriz. Yani $z = z(x, y)$ üzerinden

$$dz = -\frac{1}{6}(4dx + dy)$$

Bu formül bize kısmi turevleri de gostermiss oluyor aslında, cunku tam diferansiyel formülünde kısmi turevler vardır, üstteki formülde dx, dy 'nin yanında yer alan degerler onlardır. O zaman

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{6}$$

Bunu düşünmenin bir dige yolü su. $\partial z / \partial x$ z 'nin x 'e göre degisimi ise, y sabit demektir, üstteki dz formülünde $dy = 0$ deriz, geri kalanlar

$$dz = -\frac{2}{3}dx$$

ki bu formül z 'nin x 'teki degisime göre nasıl degistigini gosteriyor.