L'Hospital (l'Hôpital) Kurali

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

bazen hesaplanamaz, cunku hem $f(a)$ hem $g(a)$ sifira esittir. Bu durum 0/0 gibi acaip bir durum ortaya cikarir, ki boyle bir seyi hesaplamak mumkun degildir. 0/0'in diger bir adi "hesaplanamayan form (indeterminate form)". Fakat L'Hospital 1. Senaryo kuralina gore,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

esitligi kullanilabilir.

Ispat

$f'(a)$ ve $g'(a)$'dan geriye dogru gidelim, ki bu tanimlarin kendisi de birer limit zaten.

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \tag{1}$$

$x \to a$ iken $g(a)$ ve $f(a)$'nin sifira gittigini biliyoruz, tum bu islere girmemizin sebebi oydu zaten, o zaman

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Bir diger hesaplanamayan form ∞/∞ icin de L'Hospital Kurali aynen gecerli. O formun ispati biraz daha cetrefil, ama kullanma baglaminda aynen isliyor.

Uyari: Eger 0/0 ya da ∞/∞ durumu ortada yoksa L'Hospital Kuralini kullanmayin. Ispat da zaten boyle bir durumun oldugu bilgisinden hareketle sonuca ulasiyor.

∞/∞ Durumu

Bu ispat icin

$L = \lim_{x \to \infty} f'(x)/g'(x)$ kabul edelim ve oyle bir a secelim ki

$\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{\epsilon}{\approx} L$, $x > a$.

olsun.

Not: Hocanin notasyonuna gore eger a, b birbirlerine ϵ kadar yakinlarsa $a \underset{\epsilon}{\approx} b$ kullanilir.

Simdi ispatin geri kalaninda su alttaki iki yaklasiksalligi ispat etmek bir yontemdir, ($x \gg 1$ olmak uzere)

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\epsilon}{\approx} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \underset{\epsilon}{\approx} L$$

Ortadaki ifade (1)'e benziyor. Simdi ilk yaklasiksallik icin

$$f(x) - f(a) = f(x)[1 - f(a)/f(x)]$$

yazariz. Bu basit bir cebirsel manipulasyon. Ayni seyi $g(x)$'li bolen icin de yapariz. Birada yazarsak

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\epsilon}{\approx} \frac{f(x)[1 - f(a)/f(x)]}{g(x)[1 - g(a)/g(x)]}$$

Her iki taraftan $f(x)/g(x)$ iptal olabilir.

Sonra limit teorisini kullaniriz. Bu yaklasiksalligin varligi bariz, cunku, herhangi bir ϵ icin x_0'i yeterince buyuk secebiliriz ki alttaki

$$1 - \epsilon < \frac{1 - f(a)/f(x)}{1 - g(a)/g(x)} < 1 + \epsilon$$

$x > x_0$ icin hep dogru olur. Unutmayalim, $f(x), g(x)$, $x \to \infty$ iken sonsuzluga gidiyorlar. Sabit bir $f(a), g(a)$ degerini sonsuza giden bir degerle bolunce ortaya sifir cikiyor, elde kalanlar yaklasiksal olarak 1/1.

Ikinci yaklasiksallik icin, Cauchy Ortalama Deger Teorisi (Cauchy Mean-value Theorem) kullaniriz. $a < c < x$ seklinde oyle bir c vardir ki $(f(x) - f(a))g'(c) = (g(x) - g(a))f'(c)$ dogrudur. Yani

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ki bu ifade L'e ϵ kadar yakindir.

Kaynaklar

[1] Thomas Calculus 11th Edition, sf. 292

[2] Arthur Mattuck, Introduction to Analysis, sf. 220