

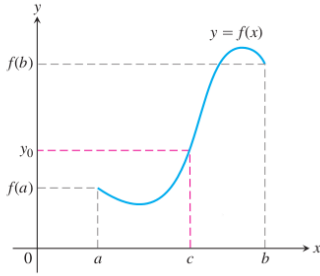
Calculus'un Temel Teoremi (The Fundamental Theorem of Calculus)

Ana teoriyi ispatlamadan önce iki diğer teoriden bahsetmemiz, ispatlamamız lazım. Bu teorilerden biri Gecis Değeri Teorisi (Intermediate Value Theorem) diğeri Tanımlı Entegraller İçin Ortalama Değer Teoremi (Mean Value Theorem for Definite Integrals). Gecis Değeri Teorisi basitçe şunu söyler

Teori

$[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon $y = f(x)$, $f(a)$ ve $f(b)$ arasındaki her değeri muhakkak alır. Bir diğer deyişle, eğer y_0 , $f(a)$ ve $f(b)$ arasındaki bir değer ise $[a, b]$ aralığındaki bir c için muhakkak $y_0 = f(c)$ olmalıdır.

Geometrik olarak bu teori y eksenini $f(a)$ ve $f(b)$ arasında kesen $y = y_0$ yatay çizgisinin $y = f(x)$ fonksiyonunu muhakkak, en az bir kez keseceğidir. Grafik aşağıda.



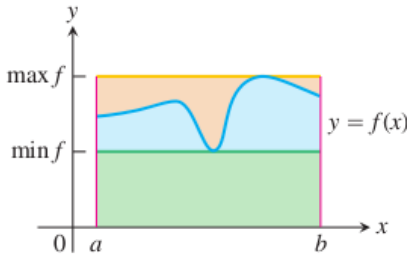
Sezgisel olarak bu anlamlı değil mi? Eğer sürekli bir fonksiyon var ise, $f(a)$ 'dan $f(b)$ 'ye giderken o aralıktaki her sayıya bir kez “ugramaya” mecburuz. Etraflarından dolasmamız mümkün değil, çünkü kesintili bir fonksiyon değil, kesintisiz / sürekli bir fonksiyonumuz var. Bu teoremin daha detaylı ispatı için [4]'e bakabilirsiniz.

Maks-Min Esitsizliği

Eğer $[a, b]$ aralığında f , maksimum değer $\max f$ 'e ve minimum değer $\min f$ 'e sahipse,

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max f \cdot (b - a)$$

demektir.



Bu kural diyor ki f 'in $[a, b]$ üzerindeki integrali hiçbir zaman f 'in minimum'u carpi $[a, b]$ aralığının uzunluğu'ndan küçük olamaz, ve f 'in maksimumu carpi $[a, b]$ aralığının uzunluğu'ndan büyük olamaz.

Ispat

Eger $(b - a)$ 'yi $\sum_{k=1}^n \Delta x_k$ olarak gorursek

$$\min f \cdot (b - a) = \min f \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \min f \cdot \Delta x_k$$

$[a, b]$ araligindaki herhangi bir deger c_k icin

$$\leq \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

Oyle degil mi? $\min f$ degeri en kucuk deger ise, $[a, b]$ araligindaki herhangi bir nokta c_k 'nin f degeri bu degere ya esit, ya da ondan buyuktur. Yani $\min f \leq f(c_k)$. Devam edersek

$$\leq \sum_{k=1}^n \max f \cdot \Delta x_k$$

Ustteki benzer mantigi takip ediyor, bu sefer $f(c_k) \leq \max f$. Son ifadedeki \max 'i disari alabiliriz.

$$= \max f \sum_{k=1}^n \Delta x_k$$

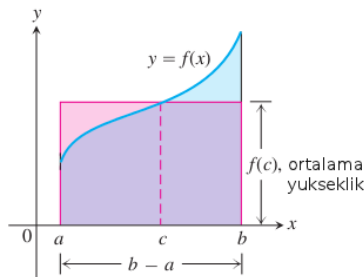
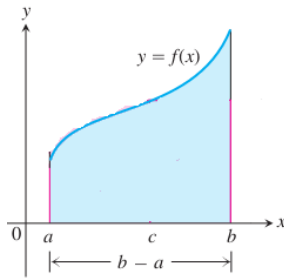
$$= \max f (b - a)$$

Ortalama Deger Teoremi

Eger f fonksiyonu $[a, b]$ arasinda surekli ise o zaman $[a, b]$ araliginda olan bir c noktasinda

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

esitligi dogru olmalidir. Yani alttaki resimde sol grafikteki mavi alanin $b - a$ ile bolunerek elde edilen ortalama degeri, $[a, b]$ araligindaki bir c uzerinden $f(c)$ 'ye muhakkak esittir. Ya da bir kenari $f(c)$, diğeri $b - a$ olan bir dikdörtgenin alanı (alt sagdaki resim), mavi alanin tamamına esit olacaktır.



Maks-Min Esitsizliginin iki tarafını $b - a$ 'ya bölersek

$$\min f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \max f$$

elde ederiz. Eger Gecis Degeri Teorisi dogruysa, $\min f$ ve $\max f$ arasindaki tüm noktalar ziyaret edilmelidir. O zaman böyle bir $f(c)$ kesinlikle var demektir.

Calculus'un Temel Teoremi

Teori

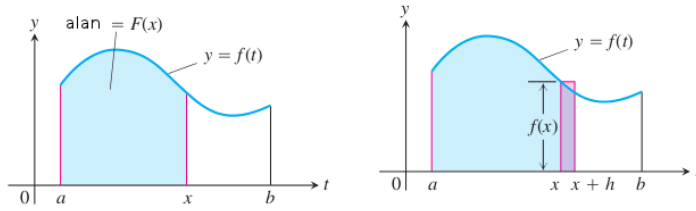
Eger f fonksiyonu $[a, b]$ arasında sürekli ise o zaman

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

fonksiyonu da $[a, b]$ arasında sürekli, ve bu fonksiyonun türevi $f(x)$ 'in kendisidir.

Yani

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$



İspat

Türevin tanımını direkt $F(x)$ üzerinde uygulayalım, $[a, b]$ içinde olan x ve $x + h$ aralığını alalım, ve

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

bolumunun limitinin, $h \rightarrow 0$ iken, $f(x)$ 'e gittigini gostermeye calisalim. $F(x+h)$ ve $F(x)$ fonksiyonlarini entegralleri üzerinden tanımlayalım. O zaman üstteki formülün bolum kısmi

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

Entegrallerin toplam kuralina gore üstteki formülün sag tarafi

$$\int_x^{x+h} f(t)dt$$

ifadesidir. O zaman bolumun tamamı

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Ortalama Deger Teoremine gore, ustteki esitligin sagindaki ifadenin, x ve $x + h$ araliginda f 'in aldigi degerlerden birine aynen esit oldugunu biliyoruz. Yani o araliktaki bir c icin

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)$$

kesinlikle dogru olmalı. Simdi, $h \rightarrow 0$ oldukca, $x + h$ mecburen x 'e yaklasmak zorunda kalacaktır, cunku c , x ile $x + h$ arasinda sıkışıp kalmistir. f fonksiyonu x noktasinda surekli olduguna gore, o zaman $f(c)$, $f(x)$ 'e yaklasmalıdır.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

Simdi elimizdeki bu bilgiyle basa donersek,

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

$$= f(x)$$

Kaynaklar

- [1] Thomas Calculus 11. Baski, sf. 130
- [2] Thomas Calculus 11. Baski, sf. 347
- [3] Thomas Calculus 11. Baski, sf. 358
- [4] Thomas Calculus 11. Baski, sf. 257