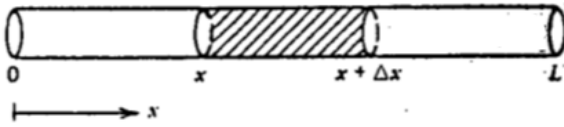


Isi Denklemini Turetmek

Bu denklemi turetmek için “enerjinin muhafazası (conservation of energy)” kuralını kullanacağız. Bu muhafaza kuralını bir esitliğe çevireceğiz, ve bu esitliği manipule ederek ortaya bir kısmi türevsel denklem (PDE) çıkaratacağız. Baz aldığımız fiziksel ortam bir metal çubuk, ki bu çubukta materyel yoğunluğu her noktada aynı. Formül şöyle;

$[x, x + \Delta x]$ içindeki net ısı değişimi = Tanımlanan bölge sınırlarındaki net ısı akışı + $[x, x + \Delta x]$ içinde üretilen ısı miktarı



$[x, x + \Delta x]$ içindeki toplam ısıyı nasıl hesaplarız? Eğer $u(x, t)$ metal çubuğun x noktasında t anındaki ısıyı veriyorsa, verilen kesit üzerinden bir integral alırız,

$$[x, x + \Delta x] \text{ içindeki Toplam Isı} = c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u(s, t) ds$$

Tanımlanan bölge içindeki net ısı değişimini ise alttaki ile hesaplarız, üstteki formülün zamana göre türevini alırız.

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} c\rho A u(s, t) ds = c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u_t(s, t) ds$$

Türevin integral içine nüfuz ettiğini görüyoruz, sabit olan $c\rho A$ ise dışarı çıkartılıyor. Bu son ifade, enerji formülünün sol tarafı. Sağ tarafı şöyle ifade edilebilir

$$= kA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]A \int_x^{x+\Delta x} f(s, t) ds$$

Newton’un kuralı ısı akışının ısı fonksiyonunun uzaklıksal gradyanına (spatial gradient) orantılı olduğunu söyler. Uzaklıksal gradyan u_x ’tir. Uzaklıksal gradyan, yani u_x , sonsuz küçük boyutta yanyana iki parçacığın ısı farkını verecektir. Bu farkı, $[x, x + \Delta x]$ ’in iki ucunda alırsak, yani farkların farkını bize gereken orantıyı verecektir. Sezgisel olarak bunun niye olduğunu anlamak için fizik kaynaklarına başvurmak faydalı olabilir. Formülün tamamı şöyle

$$c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u_t(s, t) ds = kA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]A \int_x^{x+\Delta x} f(s, t) ds \quad (1)$$

Bu noktada üstteki formülde integrallerden kurtulmak istiyoruz. Ne yaparız? Ortalama Değer Teoremi’ne ihtiyacımız var, bu teoriyi Calculus’un Temel Teoremi yazısında bulabilirsiniz. Teori özetle eğer $f(x)$ bir $[a, b]$ aralığında sürekli ise o zaman en az bir ξ olmalı, $a < \xi < b$ olacak şekilde ve

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

dogru olmalidir. Bu teoriyi (1)'e uygularsak,

$$c\rho Au_t(\xi_1, t)\Delta x = kA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + Af(\xi_2, t)\Delta x$$

$$x < \xi < x + \Delta x$$

elde ederiz. ξ_1, ξ_2 yerine sadece ξ kullanılabilir, sebebini altta gorecegiz, sonra iki tarafi $c\rho A\Delta x$ 'e bolerek

$$u_t(\xi, t) = \frac{k}{c\rho} \left[\frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} \right] + \frac{1}{c\rho} f(\xi, t)$$

Simdi

$$\Delta x \rightarrow 0$$

olsun, bu durumda ustteki buyuk parantez icindeki bolum bir kısmi turev haline gelecektir, $\xi \rightarrow x$ olacaktir, cunku aralik oyle kuculuyor ki arada kalan ξ degeri sadece x olabilir.

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) + F(x, t)$$

Ayrica

$$\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$$

$$F(x, t) = \frac{1}{c\rho} f(x, t)$$

esitliklerini kullandik.

Kaynaklar

Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Murlow, sf. 27