

MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 19

Konumuz vektor alanlari (vector fields) ve cizgi entegralleri (line integrals). Bundan onceki derslerde cift integral (double integral) konusunu isledik, fakat o tur entegraller cizgi entegrallerinden tamamen farklıdır, yani bu dersi takip ederken cift entegraller ile baglantilari dusunmemek daha iyi olur, kafalar karismasin.

Vektor Alanlari

Vektor alanlari bir vektordurler aslinda, diyelim ki \vec{F}

$$\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j}$$

Farkli olan M, N kendilerinin x, y 'nin bir fonksiyonu olmalaridir. Bu demektir ki kordinat sistemindeki her x, y kombinasyonu icin degisik bir vektor olacaktır. Bir misir tarlasinda her noktada misir vardır, vektor alanında her noktada bir vektor vardır [hoca bu analogiyi misirlar uzun, yonleri olan seyler oldugu icin kullaniyor herhalde]. Daha once $\vec{r}(t)$ baglaminda t degiskenine bagliligi gorduk, fakat o tek degisken idi, zaten bir egriyi vektor ile temsil etmek icin oyle olmasi gerekiyordu, burada birden fazla degisken x, y 'ye bagimlilik var.

Bu kavram bir sivi, bir ruzgar icindeki akis vektorlerini temsil etmek icin kullanilabilir mesela. Ya da kuvvet alanı (force field) kavrami – bu kavram Star Wars filminden bir kavram degil. Yeryuzunde elimizde bir cisim herhangi bir yerde tuttugumuzda onun uzerinde etki eden bir kuvvet vektörü var, bu vektor her noktada degisik, ve tum bu vektorlerin toplami bir kuvvet alanı olusturuyorlar, ki bu alan bir vektor alanidir.

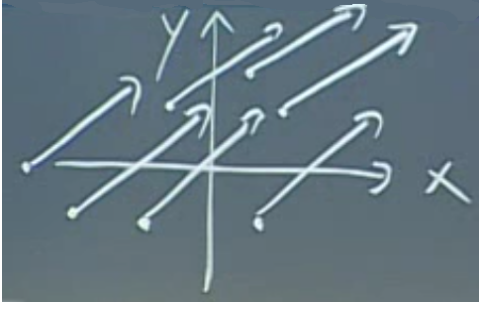
Biz bu derste konuya pur matematiksel olarak bakiyoruz, sadece arka plan-daki bu fiziksel baglantiyi motivasyon acisindan aklimizda tutabiliriz.

Once cizimden baslayalim

Ornek

$$\vec{F} = 2\hat{i} + \hat{j}$$

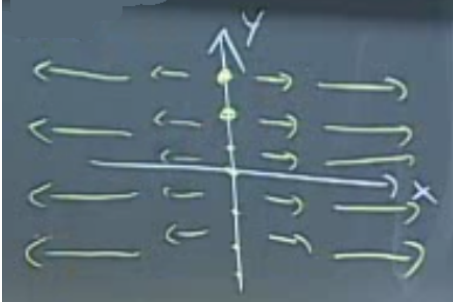
Tam x, y 'ye baglantidan bahsetmistik, baglantisiz bir tane verdik! Ama ornegi soyle gorebiliriz, bu alan her x, y icin ayni vektore sahip. Yani yine x, y 'yi merkez alarak dusunuyoruz, sadece vektorun her noktada ayni oldugunu soylemis oluyoruz.



Ornek

$$\vec{F} = x\hat{i}$$

Y-ekseni uzerinde, yani x 'in sifir oldugu noktada (zaten hic y yok) vektor sifir buyuklugunde. Diger noktalarda vektor yatay, x buyudukce, ya a eksi yonde kuculdukce, saga ya da sola dogru vektorun buyuklugu de degisecek.

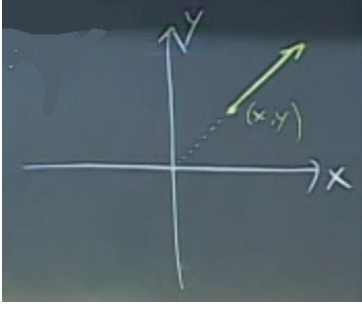


Aslinda bu tur cizimleri cogunlukla bilgisayara yaptiriyoruz, ama kabaca vektor alanlarinin neye benzedigini hayal edebilmek ise yariyor.

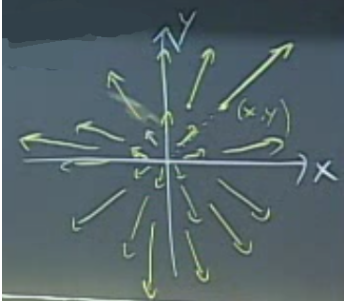
Ornek

$$\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

Bu alanin ilginc bir geometrik sonucu var. Orijinden herhangi bir noktaya cizilebilecek bir vektoru (... ile belirtiliyor) alip, kopyalarsak, bu kopyayi o noktadan baslayacak sekilde yerlestirirsek, dogru sonucu elde etmis oluruz.



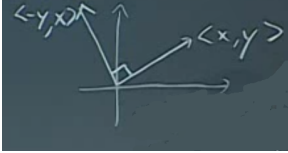
Hepsini cizince su sekil ortaya cikiyor.



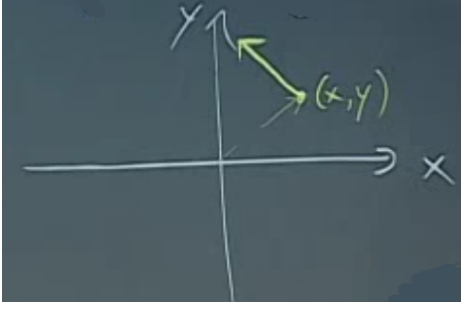
Ornek

$$\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$$

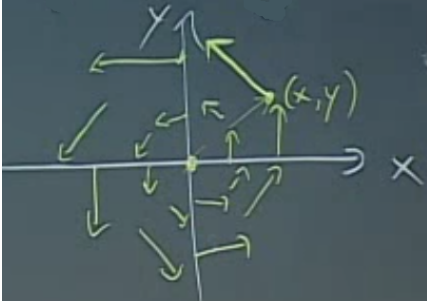
Yine orijinden baslama numarasini dusunursekm simdi elimizde $\langle -y, x \rangle$ vektörü var, acaba bu vektor $\langle x, y \rangle$ göre nasıl bir vektor?



Bu iki vektorun arasinda 90 derece vardir. O zaman bu $\langle x, y \rangle$ 'ye dik olan kopyayi almamiz lazim, ve onu x, y 'den baslatmamiz lazim.



Hepsini cizersek



Bu alan mesela orijin etrafında her yuvarlakta sabit hızda bir akışı olan bir siviye temsil ediyor olabilir. Yani vektör alanı bir hız alanı (velocity field) olabilir. İlginç sorulardan biri, sivi içindeki bir parçacığın halkaların birinde tam bir atmasının ne kadar zaman alacağı. Cevap 2π çünkü halkanın uzunluğu $2\pi \cdot r$, yani 2π çarpi yarıçap (radius). Bu cevap birim açısal hız (unit angular velocity), 1 radyan / zaman. Hızın büyüklüğü bir halka içinde sabit, çünkü hızın büyüklüğü demek vektörün büyüklüğü demek, eğer halkayı biz seçtiysek, o halkanın orijinden uzaklığı aynı olacaktır, bu uzaklığın kopyası da aynı büyüklükte olacaktır.

Kuvvet alanlarına gelelim, yani şimdi vektör alandaki vektörler kuvvetleri temsil edecekler. Şimdi şu senaryoyu düşünelim. Bir parçacığın üzerine bir kuvvet uygulanıyor ve bu parçacık bir seyahat çizgisi üzerinde ilerliyor. Fizikten bilindiği gibi kuvvetin yaptığı “iş (work)” kuvvetin o kuvvetin sayesinde ne kadar yer değişikliği olduğunun vektörü (displacement vektörün) noktasal çarpımına esittir. Eğer gidisat düz olursa, ve kuvvet sabitse bu hesap basitçe yapılabilir, ama daha cıtretil bir gidisat takip ediliyorsa ve kuvvet o sırada sürekli değişiyorsa, o zaman üzerinden entegrasyon yapmamız gerekir.

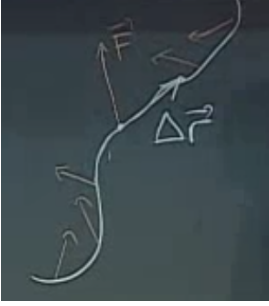
İş ve Çizgi Entegrali



$$W = (\text{kuvvet}) \cdot (\text{mesafe}) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

W yapılan is (work)'i temsil ediyor.

Fakat senaryomuzda demistik ki gidisat karmasik ve guc surekli degisiyor.



O zaman is hesabini yapmak icin gidisati ufak parcalara ayirmaliyim, o parcalar icin carpimi yapip sonuclari toplamaliyim. Parcalar olabilecegi kadar ufak olmalı tabii ki, bu ne demektir? Bir entegral demektir. Yani

Bir gidisat C uzerinde yapılan is

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Notasyonun hesapsal anlamina bakalim simdi. Soyle gorebiliriz

$$\begin{aligned} &= \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_i \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \vec{F} \cdot \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Delta t \right) \end{aligned}$$

Aslinda hem bolumde, hem bolene Δt ekleyerek hic bir sey degistirmedik, ama yeni ortaya cikan terim $\Delta \vec{r} / \Delta t$ hiz vektoru $d\vec{r} / dt$ 'ye esit. Limitin Δt 'ye donustugune dikkat.

Yani ilk bastaki entegralimizi su sekilde hesaplayabiliriz

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

Ornek

Su kuvvetin

$$\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$$

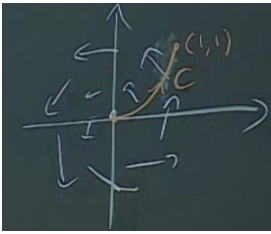
Su parametrik egri C uzerinde

$$x = t$$

$$y = t^2$$

$$0 \leq t \leq 1$$

yaptigi isi hesapla.



Bu arada, “ C ’yi nereden buldun?” diye bir soru gelebilir, bu yanlis bir soru. C ’yi bulmadik, o bize sorunun icinde verildi, yani elimizdeki veri bu. Kuvvet alanı ve egri tamamen ayri yerlerden, ayri sekilde tanimlanmis olabilir.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

\vec{F} nedir?

$$\vec{F} = \langle -y, x \rangle = \langle -t^2, t \rangle$$

Hiz nedir?

$$dx/dt = 1$$

$$dy/dt = 2t$$

O zaman

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 \langle -t^2, t \rangle \cdot \langle 1, 2t \rangle dt \\ &= \int_0^1 (-t^2 + 2t^2) dt \\ &= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Baska Bir Yol

Vektor alanimizin bileşenleri

$$\vec{F} = \langle M, N \rangle$$

olduğuna göre, şu da doğru olmalı

$$d\vec{r} = \langle dx, dy \rangle$$

Bunun bize söylediği şudur

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = Mdx + Ndy$$

Bu eşitlik üzerinden problemlerin çoğunlukla şu şekilde yazıldığını görürsünüz

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Mdx + Ndy$$

Eşitliğin sağındaki vektor alanı değil artık, ama aslında aşağı yukarı aynı şeyler. Yani aradaki fark bir fonksiyonun gradyanı ile kısmi diferansiyelleri arasındaki ilişkiye benziyor. Notasyon farklı, ama aslında aynı içeriğe sahipler.

Peki bu yeni formdaki çizgi integralini nasıl hesaplayalım? Hem M hem N içinde x, y var, eğer integrali sadece dx , sadece dy için alırsak yine y 'ler, x 'ler ortaya çıkacak, fakat biz bunu istemiyoruz, biz tek bir sayı istiyoruz. Buradaki puf nokta şu, eğri boyunca x, y birbiriyle bağlantılı. Yani M, N içeren bir formülü entegre ediyor olabiliriz, ama C boyunca aslında sadece tek bir parametre var. Bu tek değişken x olabilir, y olabilir, t olabilir. O zaman

Metot: x, y değişkenlerini tek bir değişken bağlamında belirt. O tek değişkeni diğerlerinin yerine geçir.

Biraz onceki ornek

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C -ydx + xdx$$

Her seyi yeni, tek bir degisken t baglaminda belirtelim. Problem zaten sunu vermisti

$$x = t$$

$$y = t^2$$

dx, dy 'yi bulmak icin

$$dx = dt$$

$$dy = 2tdt$$

O zaman entegral suna donusur

$$= \int_C -t^2 dt + t \cdot 2tdt$$

$$= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ entegrali C 'ye baglidir, parametrizasyonun nasil yapildigina bagli degildir. Yani hangi degiskeni istersek onu seceriz, mesela yukaridaki ornekte

$$\begin{cases} x = \sin\theta \\ y = \sin^2\theta \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

farz etmek te mumkundur. Sonra dx, dy bulunurdu, bir suru trigonometrik islemden sonra ayni sonucu bulabilirdik. Daha zor olurdu ama bulunurdu. O zaman bir tavsiye, isimizi en kolaylastiracak parametrizasyonu kullanmak en iyisi. Ustte en sondaki parametrizasyon pek iyi degil.

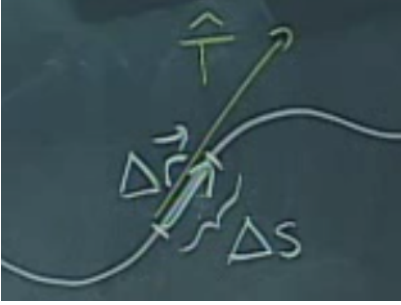
Geometrik Yaklasim

Parametrizasyon, vs. ile her zaman bir cozume varilabilir. Fakat bazen geometrik olarak yaklasmak cozumu daha hizlandirabiliyor.

Vektor $\Delta\vec{r}$ 'yi dusunelim.



Eger bu vektörü çok ufak alırsam, vektörün gidişata teget olduğunu düşünebiliriz. Yani birim teget vektör ile aynı yönü gösterecek, uzunluğu ise gidişat üzerinde alınan mesafenin ufak bir parçası Δs olacak.



$$d\vec{r} = \langle dx, dy \rangle$$

olduğu söylemistik, o zaman aynı şekilde

$$d\vec{r} = \vec{T} ds$$

Her şeyi dt 'ye bölünce elimize anlamlı bir ifade çıktığını görebiliyoruz

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \rangle = \vec{T} \frac{ds}{dt}$$

Yani geometrik düşünerek bunu da söylemem mümkün,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M dx + N dy = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

$\vec{F} \cdot \vec{T}$ 'yi tek sayısal (scalar) bir nicelik olarak görebiliriz, ki bu tek sayı kuvvetin teget yönünde olan etkisi, kuvveti o yöne “yansıtınca (projection)” ele geçen değer. Sonra bu yansıması alıp tüm eğri boyunca entegre ediyorum.

Örnek

C = ortası orijinde olan a yarıçapındaki çember, ve gidişat saat yönünün tersi yönde.

$$\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$$



Fizigi iyi olanlar sonucun ne olacagini tahmin edebilir, sifir olacak cunku gidisat her zaman kuvvet vektorlerine dik.

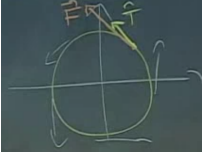
Yani $\vec{F} \perp \vec{T}$, o zaman $\vec{F} \cdot \vec{T} = 0$, yani

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = 0$$

Sonuc basit sekilde hesaplandi. Burada iki saat parametrizasyon yapabilirdik, vs. ve sonuc yine ayni cikardi.

Ornek

Ustteki ayni C , ama $\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$.



Bu durumda her iki vektor ayni yone isaret ediyor.

Yani $\vec{F} // \vec{T}$, o zaman $\vec{F} \cdot \vec{T} = |\vec{F}| = a$.

Artik entegrali cok hizli sekilde hesaplayabiliriz.

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_C a ds = a \int_C ds = a \cdot C \text{'nin uzunlugu}$$

C 'nin uzunlugu nedir? $2\pi a$. Yani ustteki entegral

$$= 2\pi a^2$$

Eger bu hesabi parametrizasyon ile yapsaydik?

$$x = a \cos \theta$$

$$y = a \sin \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\int_C -ydx + xdy$$

$$= \int_C -(a\sin\theta)(-a\sin\theta d\theta) + (a\cos\theta)(a\cos\theta d\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 d\theta$$

Aynı sonuca eristik.