Ekler (Appendix)

Bayes Usulu Guven Araligi (Confidence Intervals)

Bayes ile bu hesabi yapmak icin bir dagilimi baz almak lazim. Eger sonuc olarak bir tekil sayi degil, bir dagilim elde edersek bu dagilim uzerinde guvenlik hesaplarini yapariz. Mesela sonuc, sonsal dagilim (posterior) bir Gaussian dagilim ise, bu dagilimin yuzde 95 agirliginin nerede oldugu, ve nasil hesaplandigi bellidir.

Bayes Teorisi

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Veri analizi baglaminda diyelim ki deneyler yaparak tahmini olarak hesaplamak (estimate) istedigimiz bir parametre var, bu bir protonun kutlesi ya da bir ameliyat sonrasi hayatta kalma orani olabilir. Bu durumlarda iki ayri "olaydan" bahsetmemiz gerekir, B olayi spesifik bazi olcumlerin elde edilmesi "olayidir", mesela olcum uc sayidan olusuyorsa, biz bir olcumde spesifik olarak $\{0.2, 4, 5.4\}$ degerlerini elde etmisiz. Ikinci olay bilmedigimiz parametrenin belli bir degere sahip olmasi olacak. O zaman Bayes Teorisinin su sekilde tekrar yazabiliriz,

$$P(parametre|veri) \propto P(data|parametre)P(parametre)$$

$\propto$ isareti orantili olmak (proportional to) anlamina geliyor. Boleni attik cunku o bir sabit (tamamen veriye bagli, tahmini hesaplamak istedigimiz parametreye bagli degil). Tabii bu durumda sol ve sag taraf birbirine esit olmaz, o yuzden esitlik yerine orantili olmak isaretini kullandik. Bu cercevede "belli bir numerik sabit cercevesinde birbirine esit (equal within a numeric constant)" gibi cumleler de gorulebilir.

Ornek

Diyelim ki bir bozuk para ile 10 kere yazi-tura attik, ve sonuc altta

T H H H H T T H H H

Bu veriye bakarak paranin hileli olup olmadigini anlamaya calisacagiz. Bayes ifadesini bu veriye gore yazalim,

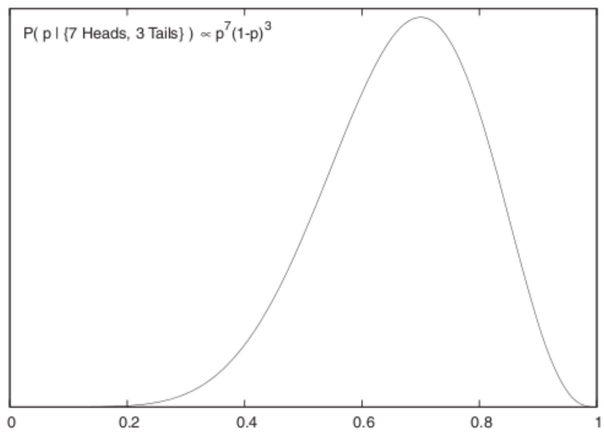
$$P(p|\{\text{T H H H H T T H H H}\} \propto P(\{\text{T H H H H T T H H H}|p)P(p)\}$$

$P(p)$ ifadesi ne anlama gelir? Aslinda bu ifadeyi $P([Dagilim] = p)$ olarak gormek daha iyi, artik $p$ parametresini bir dagilimdan gelen bir tekil deger olarak gordugumuze gore, o dagilimin belli bir p'ye esit oldugu zamani modelliyoruz burada. Her halukarda $P(p)$ dagilimini, yani onsel (prior) olasiligi bilmiyoruz, hesaptan once her degerin mumkun oldugunu biliyoruz, o zaman bu onsel dagilimi duz (flat) olarak aliriz, yani $P(p) = 1$.

$P(\{T\ H\ H\ H\ H\ T\ T\ H\ H\ H|p)$ ifadesi goz korkutucu olabilir, ama buradaki her ogenin bagimsiz ozdesce dagilmis (independent identically distributed) oldugunu gorursek, ama bu ifadeyi ayri ayri $P(\{T|p)$ ve $P(\{H|p)$ carpimlari olarak gorebiliriz. $P(\{T|p) = p$ ve $P(\{H|p) = 1 - p$ oldugunu biliyoruz. O zaman

$$P(p|\{7 \text{ Tura}, 3 \text{ Yazi}\} \propto p^7(1-p)^3$$

Grafiklersek,




Boylece $p$ icin bir sonsal dagilim elde ettik. Artik bu dagilimin yuzde 95 agirliginin nerede oldugunu rahatca gorebiliriz / hesaplayabiliriz. Dagilimin tepe noktasinin $p = 0.7$ civarinda oldugu goruluyor. Bir dagilimla daha fazlasini yapmak ta mumkun, mesela bu fonksiyonu $p$'ye bagli baska bir fonksiyona karsi entegre etmek mumkun, mesela beklentiyi bu sekilde hesaplayabiliriz.

Onsel dagilimin her noktaya esit agirlik veren birornek (uniform) secilmis olmasi, yani problemi cozmeye sifir bilgiden baslamis olmamiz, yontemin bir zayifligi olarak gorulmemeli. Yontemin kuvveti elimizdeki bilgiyle baslayip onu net bir sekilde veri ve olurluk uzerinden sonsal tek dagilima goturebilmesi. Baslangic ve sonuc arasindaki baglanti gayet net. Fazlasi da var; ilgilendigimiz alani (domain) ogrendikce, basta hic bilmedigimiz onsel dagilimi daha net, bilgili bir sekilde secebiliriz ve bu sonsal dagilimi da daha olmasi gereken modele daha yaklastirabilir.

Cok Boyutlu Gaussian'i Parcalamak (Partitioning)

Diyelim ki Normal bir vektor $X$'i $X = (X_1, X_2)$ olarak parcaladik. Bunu Gaussian'a etkileri ne olur? Ayni sekilde $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ olarak parcalayabiliriz. $\Sigma$ ise

$$\Sigma = \left[ \begin{array}{cc} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array} \right]$$

olarak parcalanabilir. $a, b$'nin parcalarinin boyutlari $p, q$ olsun, $n = p + q$.

Simdi birlesik Gaussian'i

$$f(x;\mu,\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{(p+q)/2}\det(\Sigma)^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{array} \right]^T \left[ \begin{array}{cc} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array} \right]^{-1} \left[ \begin{array}{c} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{array} \right] \right\}$$

Birlesik yogunlugu parcalar uzerinden belirtirsek, bu yogunlugu $X_2$ icin bilesen yogunluga ve $X_1$ icin bir kosullu yogunluga ayirabiliriz. Yani

$$f(x_1,x_2) = f(x_1|x_2)f(x_2)$$

tanimindaki parcalari elde etmeye calisacagiz. Ama bundan once boluntulenmis matrislere yakindan bakalim.

Bir boluntulenmis (partitioned) matrisin tersini almak icin, o matrisin parcalarinin tersini almak dogru degildir, yani

$$\left[ \begin{array}{cc} E & F \\ G & H \end{array} \right]^{-1} \neq \left[ \begin{array}{cc} E^{-1} & F^{-1} \\ G^{-1} & H^{-1} \end{array} \right]$$

Tersini alma islemi icin bazi numaralar lazim. Ana numara boluntulenmis matrisi kosegen bir matris haline getirmek, cunku kosegen matrislerin tersi, kosegendeki elemanlarin tersidir, yani ters alma operasyonu bu tur matrislerin "icine isler", o yuzden bir sekilde bir kosegen matris elde etmeye ugrasacagiz. Bunun icin boluntulenmis matrisimizi sagdan ve soldan bazi matrislerle carpacagiz. Ayrica sunu da bilelim,

$$XYZ = W$$

durumunda Y'nin tersini almak istersek, sag ve soldaki X, Z matrislerinin tersini almak gerekmez, niye?

$$X^{-1}XYZ = X^{-1}W$$

$$YZZ^{-1} = X^{-1}WZ^{-1}$$

$$Y = X^{-1}WZ^{-1}$$

Simdi iki tarafin da tersini alalim,

$$Y^{-1} = ZW^{-1}X$$

Tamam, baslayalim.

$$M = \left[ \begin{array}{cc} E & F \\ G & H \end{array} \right]$$

matrisini kosegen yapacagiz. Eger sadece alt sol koseyi sifirlayasaydik, bunu yapacak ozel bir matrisle soldan carpardik,

$$\left[ \begin{array}{cc} I & -FH^{-1} \\ 0 & I \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cc} E & F \\ G & H \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} E & F \\ 0 & H \end{array} \right]$$

Sadece ust sag koseyi sifirlamak isteseydik, sagdan carpardik

$$\left[\begin{array}{cc} E & F \\ G & H \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ -H^{-1}G & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} E & 0 \\ G & H \end{array}\right]$$

Hepsini biraraya koyalim,

$$\left[\begin{array}{cc} I & -FH^{-1} \\ 0 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} E & F \\ G & H \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ -H^{-1}G & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} E-FH^{-1}G & 0 \\ 0 & H \end{array}\right] \tag{2}$$

Bu carpimin dogrulugu carpim elle yapilarak kontrol edilebilir.

Ustte gordugumuz gibi

$XYZ = W$

ifadesindeki Y'nin tersi

$Y^{-1} = ZW^{-1}X$

ile olur.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc} I & -FH^{-1} \\ 0 & I \end{array}\right]}_{X}\underbrace{\left[\begin{array}{cc} E & F \\ G & H \end{array}\right]}_{Y}\underbrace{\left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ -H^{-1}G & I \end{array}\right]}_{Z} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} E-FH^{-1}G & 0 \\ 0 & H \end{array}\right]}_{W}$$

O zaman

$$\left[\begin{array}{cc} E & F \\ G & H \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ -H^{-1}G & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} E-FH^{-1}G & 0 \\ 0 & H \end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{cc} I & -FH^{-1} \\ 0 & I \end{array}\right]$$

Daha kisa olmasi esitligin sag tarafinda, ortadaki matris icin $E - FH^{-1}G$ yerine $M/H$ kullanalim (bu arada $M/H$ lineer cebirde "M'in H'e gore Schur tamamlayicisi (complement)" olarak bilinir),

$$\left[\begin{array}{cc} E & F \\ G & H \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ -H^{-1}G & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} (M/H)^{-1} & 0 \\ 0 & H^{-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} I & -FH^{-1} \\ 0 & I \end{array}\right] \tag{3}$$

Esitligin sag tarafindaki carpimi gerceklestirirsek,

$$= \left[\begin{array}{cc} (M/H)^{-1} & -(M/H)^{-1}FH^{-1} \\ -H^{-1}G(M/H)^{-1} & H^{-1} + H^{-1}G(M/H)^{-1}FH^{-1} \end{array}\right]$$

Bu final ifade boluntulenmis bir matrisin tersini o matrisin icindeki parcalar uzerinden temsil eden bir ifadedir.

Icinde bir kosesi sifir olan boluntulenmis matrislerde determinantlar soyle isler,

$$\det\left(\left[\begin{array}{cc} E & 0 \\ G & H \end{array}\right]\right) = \det\left(\left[\begin{array}{cc} E & F \\ 0 & H \end{array}\right]\right) = \det(E)\det(H)$$

Ayrica

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

O zaman (2)'nin determinantini alirsak, det yerine $||$ kullandik,

$$|M| = |M/H||H| \tag{4}$$

Bu ifade gayet dogal duruyor (bir raslanti herhalde, ya da Schur tamamlayicisi isareti ozellikle boyle secilmis),

Boluntulenmis bir matrisin devrigini almak icin her blogunun ayri ayri devrigi alinir, ve tum bloklarin yani boluntulenmis tamaminin bir daha devrigi alinir, yani

$$\left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]^T = \left[\begin{array}{cc} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{array}\right]$$

Simdi cok degiskenli Normal icin bilesen ve kosullu yogunluk hesaplarina gelelim. Gaussian formulunun exp kismini alirsak,

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{cc} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{array}\right] \right\}$$

(3)'teki acilimi kullanirsak, ve $E = \Sigma_{11}, F = \Sigma_{12}, ..$ olacak sekilde,

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{array}\right]^T \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ -\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} (\Sigma/\Sigma_{22}) & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} I & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{array}\right] \right\}$$

Acilimi tamamen yaparsak,

$$\begin{aligned} = \quad & \exp\left\{ -\tfrac{1}{2}(x_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2))^T(\Sigma/\Sigma_{22})^{-1}(x_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2)) \right\} \cdot \\ & \exp\left\{ 1\tfrac{1}{2}(x_2 - \mu_2)^T\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2) \right\} \end{aligned}$$

Not: $\Sigma_{12}^T = \Sigma_{21}$. Ustte birinci exp icinde sol bolumde devrigin icindeki ifadelerden, mesela $x_1^T, \mu_1^T$'den ve $\Sigma_{21}$'li ifadeden devrik islemini cekip, buyuk paranteze alininca bu degisim oldu.

Simdi mesela 1. exp'ye dikkat edersek, ortada $(\Sigma/\Sigma_{22})^{-1}$ var, ve bu ifadenin solunda ve saginda birbirinin devrigi olan ayni terimler duruyor. Ifadenin tamami bir Normal dagilim. Ayni sey 2. exp icin gecerli.

Isin exp tarafini halletik. Simdi exp oncesindeki kesiri (4) kullanarak parcalayalim,

$$\frac{1}{(2\pi)^{(p+q)/2}\det(\Sigma)^{1/2}} = \frac{1}{(2\pi)^{(p+q)/2}\bigg(\det(\Sigma/\Sigma_{22})\det(\Sigma_{22})\bigg)^{1/2}}$$

$$= \left(\frac{1}{(2\pi)^{p/2}\det(\Sigma/\Sigma_{22})^{1/2}}\right)\left(\frac{1}{(2\pi)^{q/2}\det(\Sigma_{22})^{1/2}}\right)$$

Bu parcalarin her birini ayri bir exp onunde kullanabiliriz, ve ikinci exp ifadesinin

$$\frac{1}{(2\pi)^{q/2}\det(\Sigma_{22})^{1/2}}\exp\left\{\frac{1}{2}(x_2-\mu_2)^T\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)\right\}$$

oldugunu goruyoruz. Bu ifade $f(x_2)$ bilesen yogunlugudur! O zaman geri kalanlar, yani diger kesir ve birinci exp hep beraber $f(x_1|x_2)$ yogunlugu olmalidir. Yani,

$$\frac{1}{(2\pi)^{p/2}\det(\Sigma/\Sigma_{22})^{1/2}}\cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1-\mu_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2))^T(\Sigma/\Sigma_{22})^{-1}(x_1-\mu_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2))\right\}$$

Buradan genel bir kural cikartabiliriz,

1) $X_2$'nin bilesen yogunlugu $X_2 \sim N(\mu_2, \Sigma_{22})$

2) $X_2 = x_2$ olmak uzere $X_1$'in kosullu dagilimi

$$X_1|X_2 = x_2 \sim N\bigg(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)\ ,\ \Sigma/\Sigma_{22}\bigg)$$

$\Sigma/\Sigma_{22}$ nedir? Hatirlarsak, $M/H = E - FH^{-1}G$, ve $E = \Sigma_{11}, F = \Sigma_{12}, ..$ o zaman

$$\Sigma/\Sigma_{22} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

Yani

$$X_1|X_2 = x_2 \sim N\bigg(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)\ ,\ \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\bigg)$$

Moment

Olasılık matematiğinde "moment üreten işlevler" olarak adlandırılan, başlangıçta pek yararlı gibi gözükmesede bir takım matematiksel özellikleri olduğu için, ispatlarda oldukça işe yarayan bir kavram vardır.

Her rasgele değişkenin bir dağılımı olduğunu biliyoruz. Her rasgele değişkenin de ayrıca bir moment üreten fonksiyonu da vardır. Ayrıca, moment üreten fonksiyon ile rasgele değişken arasında bire-bir olarak bir ilişki mevcuttur. "Bu neye yarar?" diye sorulabilir; Cevap olarak, mesela cebirsel olarak türete türete bir moment'e geldiğimiz düşünelim, ve tekrar başka bir taraftan, başka bir formülden gene türete türete tekrar aynı moment işlevine geliyorsak, bu demektir ki, iki taraftan gelen rasgele değişkenler (ve tekabül eden dağılımları) birbirine eşittir. Bazı şartlarda moment üreten işlevler ile cebir yapmak, dağılım fonksiyonlarından daha rahat olmaktadır.

Her rasgele değişken için, moment üreten işlev şöyle bulunur.

X rasgele degiskenin moment ureten operasyonu

$M(t) = E(e^{tX})$ olarak gosterilir

Ayriksal operasyonlar icin

$$M(t) = \sum_x e^{tx} p(x)$$

Surekli islevler icin

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Kuram

Gelelim yazımızın esas konusu olan kuramımıza.

Eğer $X_1, X_2 ... X_n$ bağımsız rasgele değişken ise, ve her değişkenin $M_i(t)$ $i = 1, 2, 3, ... n$ olarak, öz olarak aynı olan birer moment üreten işlevi var ise, o zaman,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} aX_i$$

acilimi

$$M_y(t) = \prod_{i=1}^{n} M(a_i t)$$

olacaktir.

Ispat

$$M_y(t) = E(e^{tY} = E(e^{t(a_1X_1 + a_2X_2 + .. + a_nX_n)}$$

$$= E[\exp(ta_1X_1ta_2X_2 ... + ta_nX_n)]$$

$$= E[\exp(ta_1X_1) + \exp(ta_2X_2) + ... + \exp(ta_nX_n)]$$

$$= E[\exp(ta_1X_1)] + E[\exp(ta_2X_2)] + ... + E[\exp(ta_nX_n)]$$

Daha once belirttigimiz gibi

$$M_i(t) = E[\exp(tX_i)]$$

olduguna gore ve t yerine $ta_i$ koyuldugunu dusunelim

$$M_y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_y(a_i t)$$

olacaktir.

Bunu $M_y(t) = (M_i(a_i t))^n$ seklinde de gosterebiliriz.

Orneklem Dagilimlari (Sampling Distributions)

Diyelim ki elimizde (hakkinda) ogrenmek istedigimiz bir sayisal obek (population) var. Bu obekteki her elemani ayri ayri incelemek istemiyoruz, problem degil, nufustan bir orneklem (sample) aliriz. Eger bu orneklem nufusu yeterince iyi temsil ediyorsa, problem cikmaz. Bu temsiliyeti garantilemenin iyi bir yolu orneklemi rasgele yapmaktir.

Simdi, diyelim ki, bu orneklemi bir sekilde ozetlemek istiyoruz yani orneklem verisi kullanilarak hesaplanmis temsili bir istatistik (descriptive statistic) elde edecegiz.

Fakat orneklemimiz rasgele idi. Bu istatistigimiz (ki o da sonucta bir rasgele degiskendir ve onun da bir dagilimi vardir), nasil bir dagilima sahiptir? Yani nufus dagilimi (population distribution), ve orneklem dagiliminin (sampling distribution) birbiriyle baglantisiyla ilgileniyoruz.

Teori

Eger $X_1, .., X_n$ bir $N(\mu, \sigma)$ dagiliminda alinmis orneklem olsun. O zaman orneklem ortalamasinin dagilimi $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.

[TBD - Ispat]

Teori

Eger $X_1, .., X_n$ bir $N(\mu, \sigma)$ dagiliminda alinmis orneklem olsun. O zaman su buyukluk

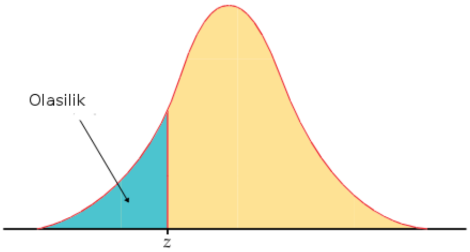
$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

$t_{n-1}$ dagilimina, yani $n - 1$ serbestlik derecesindeki (degree of freedom) bir Student's t Dagilimidir.

[TBD - Ispat]

z-Tablosu

Nasil okunur? Z-degeri -0.8994 icin z kolonundan asagi inilir, ve -0.8 bulunur, x.x9xx yani 9 icin .09 kolonuna gidilir ve bu kesismedeki deger okunur, .1867, yuvarlanarak .19 da kabul edilebilir.




| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3.4 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0002 |
| -3.3 | .0005 | .0005 | .0005 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0003 |
| -3.2 | .0007 | .0007 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0005 | .0005 | .0005 |
| -3.1 | .0010 | .0009 | .0009 | .0009 | .0008 | .0008 | .0008 | .0008 | .0007 | .0007 |
| -3.0 | .0013 | .0013 | .0013 | .0012 | .0012 | .0011 | .0011 | .0011 | .0010 | .0010 |
| -2.9 | .0019 | .0018 | .0018 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 |
| -2.8 | .0026 | .0025 | .0024 | .0023 | .0023 | .0022 | .0021 | .0021 | .0020 | .0019 |
| -2.7 | .0035 | .0034 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 |
| -2.6 | .0047 | .0045 | .0044 | .0043 | .0041 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 |
| -2.5 | .0062 | .0060 | .0059 | .0057 | .0055 | .0054 | .0052 | .0051 | .0049 | .0048 |
| -2.4 | .0082 | .0080 | .0078 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0068 | .0066 | .0064 |
| -2.3 | .0107 | .0104 | .0102 | .0099 | .0096 | .0094 | .0091 | .0089 | .0087 | .0084 |
| -2.2 | .0139 | .0136 | .0132 | .0129 | .0125 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 |
| -2.1 | .0179 | .0174 | .0170 | .0166 | .0162 | .0158 | .0154 | .0150 | .0146 | .0143 |
| -2.0 | .0228 | .0222 | .0217 | .0212 | .0207 | .0202 | .0197 | .0192 | .0188 | .0183 |
| -1.9 | .0287 | .0281 | .0274 | .0268 | .0262 | .0256 | .0250 | .0244 | .0239 | .0233 |
| -1.8 | .0359 | .0351 | .0344 | .0336 | .0329 | .0322 | .0314 | .0307 | .0301 | .0294 |
| -1.7 | .0446 | .0436 | .0427 | .0418 | .0409 | .0401 | .0392 | .0384 | .0375 | .0367 |
| -1.6 | .0548 | .0537 | .0526 | .0516 | .0505 | .0495 | .0485 | .0475 | .0465 | .0455 |
| -1.5 | .0668 | .0655 | .0643 | .0630 | .0618 | .0606 | .0594 | .0582 | .0571 | .0559 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1.4 | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0721 | .0708 | .0694 | .0681 |
| -1.3 | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| -1.2 | .1151 | .1131 | .1112 | .1093 | .1075 | .1056 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| -1.1 | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| -1.0 | .1587 | .1562 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| -0.9 | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| -0.8 | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1922 | .1894 | .1867 |
| -0.7 | .2420 | .2389 | .2358 | .2327 | .2296 | .2266 | .2236 | .2206 | .2177 | .2148 |
| -0.6 | .2743 | .2709 | .2676 | .2643 | .2611 | .2578 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| -0.5 | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| -0.4 | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| -0.3 | .3821 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| -0.2 | .4207 | .4168 | .4129 | .4090 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| -0.1 | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| 0.0 | .5000 | .4960 | .4920 | .4880 | .4840 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |

| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |