Cok Degiskenli Calculus - Ders 11

Onceki derste cok degiskenli fonksiyonlari min, maks uzerinden inceledik. Bu derste bu tur fonksiyonlarin herhangi bir yondeki varyasyonunu nasil hesaplayacagimizi gorecegiz. Bunu yapabilmek icin daha fazla kavramsal araclara ihtiyacimiz var.

Bugunku konumuz diferansiyeller.

Diferansiyeller

Tek degiskenli Calculus'tan dolayli (implicit) diferansiyel almayi biliyoruz herhalde. Mesela elimizde

$y = f(x)$

var. Dolayli turevler ile x uzerindeki sonsuz kucuk bir degisimi y uzerindeki sonsuz kucuk bir degisime baglayabiliyoruz.

$dy = f'(x)dx$

Ornek

$y = sin^{-1}(x)$

Bu formulun turevini bulmak icin, soyle bir zincir takip edebiliriz. Usttekine tersten bakalim

$x = sin(y)$

O zaman

$dx = cos(y)dy$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Esitligin sag tarafini nasil elde ettik? Hatirlayalim

$cos^2(y) + sin^2(y) = 1$

$cos(y) = \sqrt{1 - sin^2 y}$

$sin^2(y)$ nedir?

$y = sin^{-1}(x)$

$sin(y) = sin(sin^{-1}(x))$

Ters sinus fonksiyonunun sinusu alinirsa, geriye sadece x kalir.

$sin(y) = x$

O zaman

$cos(y) = \sqrt{1-x^2}$

Iste bu tur dy, dx iceren formulleri kullanacagiz, bu derste cok degiskenli ortamda bunu yapacagiz.

Tam Diferansiyeller

Eger $f(x, y, z)$ varsa,

$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$

Diger notasyonla

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

Bu formulun hesapladigi nedir? Elde edilen bir sayi, matris, vektor degildir. Bu degisik turden bir nesne ve bu nesneleri manipule etmenin, kullanmanin kendine has kurallari var. Onlari nasil kullanacagimizi ogrenmemiz gerekiyor.

Onlari nasil irdelemek gerekir? Bunu cevaplayabilmek icin onlari nasil "gor**me**memiz" gerektigini anlamamiz lazim.

Onemli

df ile Δf farkli seylerdir.

Bir kere Δf bir sayidir, onu hesaplamak icin $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, vs.. gibi sayilar kullaniriz. Kiyasla df bir sayi degildir, onu gostermenin tek yolu diger diferansiyeller uzerindendir.

Diferansiyelleri, yani dx, dz gibi nesneleri bir "yerine baska seyler koyabileceginiz bir tur isaret (placeholder)" gibi dusunebilirsiniz. Onlarin sonsuz kucuklukteki degisimi temsil ettigi de dogrudur, ama hoca bu tanimi pek sevmiyor. Bu "isaretleyici" nesnelere degisim degerlerini (evet, sayisal olarak, ama yaklasiksal baglamda) verirsek, esitligin sol tarafinda df icin bir teget duzlem yaklasiksallamasi elde edebiliriz.

O zaman diferansiyeller

1) x, y, z'deki degisimin f'i nasil etkilediginin kodlarini / sifrelerini (encode) icerirler. Tam diferansiyel formulu hakkinda soyleyebilecegimiz en genel soz budur.

2) Onlar $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ gibi varyasyonlar icin bir isaret / yer tutucu gorevi gorurler ve onlarin sayesinde $\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z$ yaklasiksal formulunu elde etmek mumkun olur. Δf formulu ile df formulunde birincinin $\approx$ ikincisinin $=$ kullandigina dikkatinizi cekerim.

3) Tam diferansiyel uzerinde yapabilecegimiz bir diger islem, tum formulu herkesin bagli oldugu bir baska degiskene bolmektir. Diyelim ki x, y, z degiskenlerinin hepsi de t adindaki bir baska degiskene bagli. O zaman tum formulu dt'ye bolerek t bazindaki degisimin f'i nasil etkiledigini gorebilirim, yani df/dt'yi hesaplayabilirim. Yani sunu elde ederim,

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + f_z \frac{dz}{dt}$$

ki bu $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ ise olabilir. Boylece f'in degisim oranini (rate of change) elde ederim.

Bu arada ustteki formul Zincirleme Kanunu (Chain Rule) olarak ta bilinir, cunku x, y, z degiskenleri t'ye bagli, ve ustteki formulle "zincirleme olarak" f'den x, y, z, oradan t'ye gidiyoruz, ve degisim orani hesabini elde ediyoruz.

Ustteki 2. ifade niye gecerlidir? Matematiksel olarak onu nasil hesaplayabilirim?

1. Deneme

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

ile baslariz. Eger $x = x(t)$ ise, o zaman

$$dx = x'(t) dt$$

ifadesi de dogrudur. Ayni sekilde

$$dy = y'(t) dt$$

$$dz = z'(t) dt$$

Bunlari ana formulde yerine koyarsak

$df = f_x x'(t)dx + f_y y'(t)dy + f_z z'(t)dz$

olur. Tum formulu dt'ye bolersem, Zincirleme Kanununu elde ederim.

Bu isliyor, fakat diyelim ki cok suphecisiniz, ve diferansiyel kavramina hala inanmiyorsunuz. Bu ispatta mesela $dx = x'(t)dt$ gibi yine diferansiyel alma islemini kullandim. Aslinda Zincirleme Kanunu boyle ispatlanmiyor.

2. Deneme

Simdiye kadar guvendigimiz kavramlardan biri yaklasiksallama formulumuz. Ona guveniyoruz. O da diyor ki

$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z$

Her seyi Δt ile bolelim.

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} \approx \frac{f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z}{\Delta t}$$

Burada sayilar kullaniyorum, Δ.. ile ifade edilenler sayidir. Bir "diferean-siyele" bolmek ne demektir bilmiyoruz, ama bir sayiyla bolmenin ne demek oldugunu iyi biliyoruz.

Sunu da biliyoruz - eger $\Delta t \to 0$ ise

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} \to \frac{df}{dt}$$

Turevlerin tanimi matematiksel olarak budur. Bu durum tum degiskenler icin de gecerlidir. Mesela

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt}$$

O zaman bolumun tamami, $\Delta t \to 0$ iken alttaki gibi olur, yaklasiksallik Δt sifira dogru yaklasikca esitlige donusur.

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + f_z \frac{dz}{dt}$$

Ornek

$w = x^2 y + z$

$x = t$

$y = e^t$

$z = sin(t)$

$$\frac{dw}{dt} = 2xy\frac{dx}{dt} + x^2\frac{dy}{dt} + 1\frac{dz}{dt}$$

$= 2te^t 1 + t^2e^t + cos(t)$

$= 2te^t + t^2e^t + cos(t)$

Bu sonuca baska turlu nasil erisebilirdik?

Ana formul w icine tum degiskenlerin t bazinda karsilikarini gecirelim

$w(t) = t^2e^t + sin(t)$

O zaman

$$\frac{dw}{dt} = 2te^t + t^2e^t + cos(t)$$

Uygulama

Calculus'taki Turevlerde Carpim (Product Rule) ve Bolum Kanunlarini (Quotient Rule) dogrula.

$f = uv$

$u = u(t)$

$v = v(t)$

Tam Diferansiyeli uygulayalim

$$\frac{d(uv)}{dt} = f_u\frac{du}{dt} + f_v\frac{dv}{dt}$$

$$= v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}$$

Boylece Carpim Kanununu aynen elde etmis olduk.

Bolum Kanunu icin

$$g = \frac{u}{v}$$

$u = u(t)$

$v = v(t)$

$$\frac{d(u/v)}{dt} = \frac{1}{v}\frac{du}{dt} + \frac{-u}{v^2}\frac{dv}{dt}$$

Tekrar duzenlersek

$$= \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Bolum Kanununu elde ettik.

Simdi biraz daha cilginca bir sey yapalim. Iddia ediyorum ki daha fazla degisken icin Zincirleme Kanununu kullanabilirim.

$w = f(x, y),\ x = x(u, v),\ y = y(u, v)$

Bu degisken isimleri belki acaip, anlamsiz geliyor, ama daha somut bir ornek olarak sunu dusunelim. Mesela kutupsal kordinat sistemine gidip gelmem gerekiyor ve x, y'nin bagimli oldugu degiskenler r ve θ. Belki de turevlerin kutupsal forma nasil yansidigina gormek istiyorum, gibi..

Devam edelim. Turev almak icin bir yontem, x, y'yi yerlerine koymak ve

$w = f(x(u, v), y(u, v))$

hesabi yapmak. Boylece w formulu u, v bazinda bir formul haline gelir. Sonra kismi turevleri alirim, vs. Ama bu cok cetrefil bir islem olabilir. Alternatif?

$\partial w/\partial u$, $\partial w/\partial v$ kismi turevlerini $\partial w/\partial x$ ve $\partial w/\partial y$ bazinda goster.

Ayrica x_u, x_w, y_u, y_v'yi goster.

$dw = f_x dx + f_y dy$

Biz dx ve dy'den kurtulmak istiyoruz cunku cevap istedigimiz sorulardan biri "u, v biraz degisince w ne kadar degisir" seklindeki sorular. Devam edelim

$$= f_x\Big(x_u du + x_y dv\Big) + f_y\Big(y_u du + y_v dv\Big)$$

Yani dx ve dy'yi, tekrar tam diferansiyel kuralini kullanarak actim.

$$= \Big(f_x x_u + f_y y_u\Big)du + \Big(f_x x_u + f_y y_v\Big)dv$$

Bu formulde kismi turevler soyle gosterilebilir

$$= \underbrace{(f_x x_u + f_y y_u)}_{\partial f/\partial u} du + \underbrace{(f_x x_u + f_y y_v)}_{\partial f/\partial v} dv$$

Yani

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Ustteki sonuca vardik cunku, mesela $\partial f/\partial u$'nun olmasi gereken yer belli, hemen du'dan once gelmeli.

Not: Ustteki iki formulde, mesela birincisinde, insanin icinden hem bolum, hem bolende olan ∂x ve ∂y'leri iptal etmek gelebilir. Ama bunu yaparsak

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u}$$

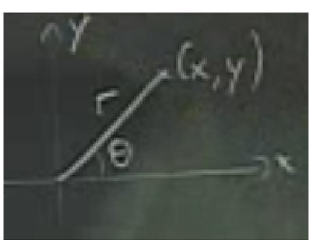
gibi bir formul cikardi, ki bu formul dogru olmazdi. Cunku bu tur bir iptal operasyonu yanlistir, bunlar kismi turevler, tam turevler (total derivatives) degil. Zaten d yerine kivrik d, yani ∂ sembolu kullanmamizin sebebi de bu – bize hatirlatici olmalari icin. d'ler ile yapabilecegimiz bazi basitlestirme islemlerini ∂'lar ile yapamadigimizi hatirlamak amaciyla degisik semboller kullaniyoruz.

Ornek

Kutupsal kordinatlarimiz varsa, degisim formulu soyledir

$x = rcos(\theta)$

$y = rsin(\theta)$



Ve elimizde bir $f = f(x, y)$ var ise, ustteki x, y formullerini yerine koyup f

formulunu r, θ bazinda elde edebiliriz.

Sonra su hesabi yapariz

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= f_x cos(\theta) + f_y sin(\theta)$$

Bu tur numaralar sonraki derste faydali olacak. Mesela gradyan vektoru kismi turevlerden olusan bir vektordur.

$$\nabla f =< f_x, f_y, f_x >$$

Yani aslinda bir diferansiyeli kismi turevleri bir paket halinde bir araya getirip size sunan bir sey olarak gorebilirsiniz. Gradyan vektor de bu paketlemeyi degisik bir sekilde yapan bir diger nesnedir.