MIT OCW Lineer Cebir - Ders 23

Bu derste birinci dereceden, sabit katsayili (coefficients) lineer diferansiyel denklem sistemini cozmeye gorecegiz. Form

$$\frac{du}{dt} = Au$$

seklinde olacak. Katsayilar A matrisi icinde. Temel fikir: sabit katsayili lineer diferansiyel denklemlerin cozumu usteldir (exponential). Sonucun ustel oldugunu bilince bulmamiz gereken ustel degerin ne oldugu, yani e uzerine ne geldigi, onu neyin carptigi, ki bunlari bulmak lineer cebirin isi olacak.

Bir ornekle baslayalim

$$\frac{du_1}{dt} = -u_1 + 2u_2$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_1 - 2u_2$$

Ustteki sistemin katsayilarini disari cekersek A matrisi su olur

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Baslangic degerleri soyle olsun

$$u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eger u_1 ve u_2'yi bu sistemin temsil ettigi iki kap gibi gorsek (mesela), her sey u_1'in "icinde" olarak baslayacakti, sonra zaman gectikce oradan cikacak, u_2'ye dogru akacak. Tum bunlari A matrisinin ozdeger/vektorlerine bakarak anlayabilmemiz lazim. O zaman ilk isimiz ozdeger/vektorleri bulmak olmali.

A'ya bakinca ne goruyoruz? Bir kolon digerinin kati, o zaman matris tekilsel (singular), bu demektir ki bir ozdeger $\lambda = 0$. Diger ozdeger icin bir numara kullanalim; ozdegerlerin toplami matris izine (trace) yani caprazdaki sayilarin toplamina esit olduguna gore, ve toplam $= -3$, o zaman ikinci ozdeger -3 olmali. Ozvektorler ise

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

O zaman cozum iki cozumun toplami olacak

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2$$

Bu genel cozum. Genel cozum c_1, c_2 haricindeki birinci ve ikinci terimdeki "pur ustel" cozumlerden olusuyor. Hakikaten mesela $e^{\lambda_1 t} x_1$ dif denklemi cozuyor degil mi? Kontrol edelim. Denklem

$$\frac{du}{dt} = Au$$

u icin $e^{\lambda_1 t} x_1$ koyalim, turev t'ye gore alindigina gore

$$\lambda_1 e^{\lambda_1 t} x_1 = A e^{\lambda_1 t} x_1$$

Iki taraftaki ustel degerler iptal olur, geri kalanlar

$$\lambda_1 x_1 = A x_1$$

Bu da ozdeger/vektor formuludur. Artik $u(t)$'nin son formulunu yazabiliriz.

$$u(t) = c_1 \cdot 1 \cdot \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right] + c_2 e^{-3t} \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right]$$

$t = 0$ aninda

$$u(t) = c_1 \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right] + c_2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right]$$

Iki tane formul, iki tane bilinmeyen var. Sonuc

$$c_1 = \frac{1}{3},\ c_2 = \frac{1}{3}$$

yani

$$u(t) = \frac{1}{3} \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right] + \frac{1}{3} e^{-3t} \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right]$$

Denklem kararli konuma (steady-state) gelince, yani $t \to \infty$ icin, ustel bolum yokolacaktir, ve bastaki terim kalacaktir.

$$u(\infty) = \frac{1}{3} \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right]$$

Fakat ustteki durum, yani sabit bir istikrarli konuma yaklasmak her zaman mumkun olmayabilir. Bazen sifira, bazen de sonsuzluga da yaklasabiliriz.

1. Stabilite

Ne zaman $u(t) \to 0$? Ozdegerler negatif ise, cunku o zaman eksi ustel deger olarak kucultucu etki yapacaklar. Eger λ kompleks bir sayi olsaydi, mesela

$e^{(-3+6i)}$

Bu sayi ne kadar buyuktur? Kesin degeri (absolute value) nedir?

$|e^{(-3+6i)t}| = e^{-3t}$

cunku

$|e^{6it}| = 1$

Niye 1? Cunku kesin deger isareti icindeki $e^{6it} = cos(6t) + isin(6t)$, ve sagdaki $a + ib$ formudur, hatirlarsak kompleks eksenlerde a ve b ucgenin iki kenaridir, hipotenus ise, ustte kesin deger olarak betimlenen seydir, uzunlugu $a^2 + b^2$, yani $cos^2(6t) + sin^2(6t) = 1$. Aslinda cos ve sin icine ne gelse sonuc degismezdi.

Yani kompleks kisim konumuz icin onemli degil, cunku nasil olsa 1 olacak, esas cozumu patlatabilecek (sonsuza goturecek), ya da kucultecek olan sey reel kisim. Altta Re ile reel bolum demek istiyoruz.

2. Istikrarli konum: $\lambda_1 = 0$ ve oteki $Re\ \lambda < 0$.

3. Patlama: herhangi bir $Re\ \lambda > 0$ ise.

* * *

Su formulun matris formu nedir?

$$u(0) = c_1 \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right] + c_2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right]$$

Soyle

$$\left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right]$$

Soldaki matris, ozvektor matrisi S. O zaman $Sc = u_0$

* * *

Probleme bakmanin degisik sekillerinden biri, onu “baglantisiz (decoupled)” hale getirmek. Baslangic formulune donersek

$$\frac{du}{dt} = Au$$

Bu A baglantili (coupled) bir halde. $u = Sv$ kullanirsak

$$S\frac{dv}{dt} = ASv$$

S ozvektor matrisi.

$$\frac{dv}{dt} = S^{-1}ASv = \Lambda v$$

Bu geciste iyi bilinen esitlik $AS = S\Lambda$'nin $S^{-1}AS = \Lambda$ halini kullandik. Bu esitligin detaylari icin Hesapsal Bilim Ders 6'ya bakabilirsiniz.

Boylece denklemler arasindaki baglantidan kurtulmus olduk. Tum sistem su hale geldi:

$$\frac{dv_1}{dt} = \lambda_1 v_1$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \lambda_2 v_2$$

..

Bu sistemi cozmek daha kolay, her biri icin ayri ayri cozumu yazalim, mesela v_1

$$v_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1(0)$$

Tamami icin

$$v(t) = e^{\Lambda t} v(0)$$

Eger $u = Sv$ ise o zaman $v = S^{-1}u$, ve $v(0) = S^{-1}u(0)$

$$S^{-1}u(t) = e^{\Lambda t} S^{-1} u$$

$$u(t) = Se^{\Lambda t} S^{-1} u(0)$$

Aradigimiz formul ustteki su bolum

$$e^{At} = Ae^{\Lambda t} S^{-1}$$

Ama bir matrisin ustel deger haline gelmesi ne demektir? Problemimizde elde ettigimiz cozum bu oncelikle, yani $du/dt = Au$'nun cozumu e^{At}. Fakat, yine soralim, bu demek?

Guc serilerini (power series) hatirlayalim. e^x icin guc serisi nedir?

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + ...$$

1 yerine I (birim matris), ve x yerine At alirsak

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{6} + ... + \frac{(At)^n}{n!} + ..$$

Bu "guzel" bir Taylor serisi. Aslinda matematikte iki tane cok guzel, temiz Taylor serisi vardir, bir tanesi

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

Oteki de Geometrik seri

$$\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n$$

Bu da en guzel guc serisidir. Onu da matris formunda kullanabilirdik aslinda

$$(I - At)^{-1} = I + At + (At)^2 + (At)^3 + ...$$

Bu formul, bu arada, eger t kucuk bir degerse bir matrisin tersini hesaplamanin iyi yaklasiksal yontemlerinden biri olabilir. Cunku ustu alinan kucuk t degerleri daha da kuculuyor demektir; ustteki terimlerin cogunu bir noktadan kesip atariz (yaklasiksallik bu demek), ve sadece $I = At + (At)^2$ hesabi yaparak matris tersini yaklasiksal olarak hesaplayabiliriz.

Zihin egzersizine devam edelim: e^{At} acilimi $(I - At)^{-1}$ acilimindan hangisi daha iyi? Ikincisi daha temiz, ama birincisi bir degere yaklasiyor (converges), cunku gitgide buyuyen n degerleriyle bolum yapiyorum. Demek ki t ne kadar buyurse buyusun, toplam bir sonlu (finite) sayiya dogru gidiyor. Fakat ikinci acilim oyle degil. Eger A'nin 1'den buyuk ozdegeri var ise, toplam patlar (At tum ozdegerleri 1'den kucukse durum degisir tabii, yani $|\lambda(At)| < 1$ ise).

Neyse, konumuza donelim.

e^{At}'nin $Se^{\Lambda t}S^{-1}$ ile baglantili oldugunu nasil gorebilirim? e^{At}'yi anlamak icin S ve Λ'yi anlamaya calismak lazim, S zaten ozvektor matrisi, Λ ise caprazsal (diagonal) bir matris, tum degerleri caprazinda, bunlar nispeten temiz formlar, onlari anlarsak isimiz kolaylasacak.

Peki gecisi nasil yapalim? e^{At} acilimi olan guc serisini kullanarak bu seriden S ve Λ cikmasini saglayabilir miyim acaba? Sunu zaten biliyoruz: $A = S\Lambda S^{-1}$. Peki A^2 nedir?

$$A^2 = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})$$

$$= S\Lambda S^{-1} S\Lambda S^{-1}$$

ortadaki S ve S^{-1} birbirini iptal eder.

$$= S\Lambda^2 S^{-1}$$

O zaman

$$e^{At} = I + S\Lambda S^{-1} t + \frac{S\Lambda^2 S^{-1}}{2} t^2 + ...$$

Disari tum S'leri cikartmak istiyorum. O zaman I'yi su sekilde yazarsam daha iyi olacak (ki icinden S'leri cekip cikartabilelim), $I = SS^{-1}$

$$= SS^{-1} + S\Lambda S^{-1} t + \frac{S\Lambda^2 S^{-1}}{2} t^2 + ...$$

ve

$$= S(I + \Lambda t + \frac{\Lambda^2}{2} t^2 + ...)S^{-1}$$

Ortada kalanlar $e^{\Lambda t}$ degil mi? O zaman

$$= S e^{\Lambda t} S^{-1}$$

Boylece gecisi yapmis olduk. Soru: bu formul hep isler mi? Hayir. Ne zaman isler? Eger A caprazlastiralabilen bir matris ise isler, yani icinden Λ matrisi cekip cikartilabilecek matrisler icin. Onu yapmanin on sarti ise A'nin tersine cevirelebilir olmasi, yani tum ozvektorlerinin bagimsiz olmasidir.

Peki $e^{\Lambda t}$ nedir? Yani caprazsal bir matris ustel deger olarak karsimiza cikinca sonuc ne olur? Λ nedir?

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & .. & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Bunu e uzeri olarak hesaplayinca ne elde ederiz? Sunu elde ederiz:

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & & .. \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Not: Ustteki acilim sezgisel olarak tahmin edilebilecek bir sey olsa da, ustel olarak bir matris olunca, beklenen her islem yapilamayabiliyor. Mesela eger matris

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olsaydi o zaman her elemani ustel olarak e^a, e^b seklinde kullanmak ve matris icindeki yerine yazmak ise yaramazdi. Ustel matris dunyasinin kendine has bazi kurallari var.

Ornek

$$y'' + by' + Ky = 0$$

2. dereceden bu denklemi 1. dereceden formullerden olusan 2x2 bir "sisteme" donusturebiliriz. Ekstra bir denklem ortaya cikaracagiz, eger y yerine bir vektor formundaki u'yu su sekilde kullanirsak

$$u = \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix}$$

u'nun turevi soyle olur

$$u' = \begin{bmatrix} y'' \\ y' \end{bmatrix}$$

u' formuna gore 2. derece denklemi su sekilde temsil edebiliriz

$$\begin{bmatrix} -b & -K \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix}$$

Genel olarak, mesela 5. dereceden bir denklemi alip 5x5 boyutlarinda 1. derece denklem sistemine gecmek te mumkundur. Bu gecis alttaki matrisin ust satirina katsayi degerleri atayacak, ve onun altindan baslayarak

1 degerleri dolduracaktir.

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - & - \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{bmatrix}$$