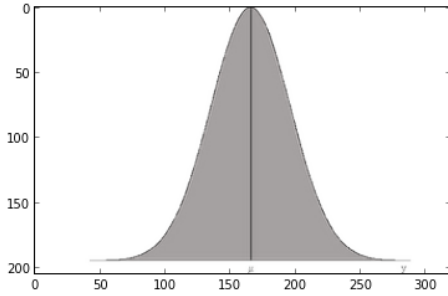


Bu notlar makine öğrenimi, veri madenciliği gibi konularda gerekli olasılık ve istatistik bilgisini paylaşmak için hazırlanıyor. Notlarda olasılık ve istatistik aynı anda anlatılacak, ve uygulamalara ağırlık verilecek.

### Dağılımlar Hakkında

Doğadan yapılan çoğu ölçümlerin, sıklık grafiğini alınca sonucun aşağıda gibi çıkması ilginçtir.



Mesela, Türkiye'deki 2000 yetişkinin kilosunu ölçün. Grafiğini alın, kesinlikle yukarıdaki tepe şekli çıkacak. Ya da, 1000 kişinin boyunu ölçün, aynı tepe şekli. Keskin nişancının hedefe attığı kurşunların hedefe gelişini en iyi 12 en kötü 1 olmak üzere ölçün, sıklık grafiğini alın. Gene aynı tepe şekli!

Nasıl oluyor bu iş?

Açıklama için, normal dağılım eğrisinden bahsetmemiz gerekecek.

Not olarak düşelim: Sıklık grafiği, X sayısının ne kadar çıktığını sayıp, Y ekseninde bu sayıyı X'e tekabül ederek kolon olarak göstermeye denir. Mesela, 60 kilo değeri 13 kere çıktı ise,  $X=60$ ,  $Y=13$  gibi bir kolon çizilecektir.

### Normal Dağılım Eğrisi

Normal dağılımın olasılık kavramı ile yakın bağları var. Bu konuda ünlü bir deney zar atma deneyidir. Mesela, elimizde tek bir zar olsun, ve bu zarı arka arkaya atalım. Sabrımız yeterse 1000 kere atalım. Sonuçta, sıklık grafiği eşit bir dağılım gösterecektir. (Zar tutmuyorsanız :) )

Bunun sebeplerini anlamak zor değil. Her zar atış olayı birbirinden bağımsız, ve her sayının üstte gelme ihtimali birbirine eşit olduğu için ( $1/6$ ), her sayıdan eşit miktarda gelecektir. Tabii bunun için deneyin birçok kere tekrarlanması gerekiyor.

Fakat, bir yerine 2 zar atalım. Hatta hatta, 4 zar atalım, ve bu sefer sıklık grafik hanesine yazmadan çıkan sayıları önce toplayalım. Bu çıkan toplamın sıklık grafiğini alalım.

İşte bu sıklık grafiği göreceğiz ki, üstte görülen tepe grafiğine yaklaşıyor. Ne kadar çok zar atarsanız, bu benzerlik o kadar daha fazla olacaktır.

Bunun sebebi sezgisel olarak tahmin edilebilir, 1..6 arası sayıların tek bir zardan gelme olasılığı aynı, evet. Fakat toplamlara gelince, mesela iki zarlı örnekte, 10

sayısının olasılığı 2 sayısından daha yüksek. Çünkü, 10 sayısını 5-5, 4-6 ya da 6-4 ile alabiliyoruz. 2 sayısı sadece 1-1 ile geliyor.

Buradan şu sonuç çıkabilir: Eğer doğada ölçtüğümüz bir kavramın oluşmasında birden fazla etken var ise, o ölçümlerin sıklığı her zaman çan şekli ile olacaktır. Bir kisinin boyunu, kilosunu etkileyen pek çok diğer faktör olduğu için bu tek olcutleri dağılımlarının normal çıktığı iddia edilebilir.

Toplamların dağılımının çan eğrisine yaklaşması durumu İstatistikte Merkezi Limit Teorisi ile ispatlanmıştır.

## Simulasyon

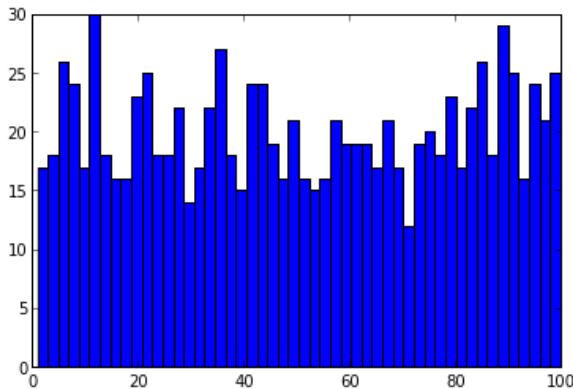
Eğer bu kavramları simulasyon ortamında göstermek istersek, Python ile bunu yapabiliriz.

İlk önce, Random.org sitesinden rasgele sayı üretip bilgisayarımıza kopyalacağız. Bahsettiğimiz site, kimsenin kullanmadığı radyo kanallarından atmosfer gürültüsü dinleyip, bu gürültüleri sayısal değere çevirerek rasgele sayı üretiyor.

Gerçek rasgele sayı üretmek pek kolay bir iş değil. Her ne kadar bilgisayarımızda rasgele sayı üreten birçok algoritma olsa bile, bu algoritmalar belli bir sayı üretiminden sonra kendini tekrar etmeye başlıyorlar. Gerçek rasgele sayılar için dış bir kaynağa bağlanmak bir seçenek olabilir. Ama bunu da söylemek lazım, simulasyon tekniklerinin tamamı için yarı-rasgele (pseudorandom) sayılar yeterlidir.

Siteden rasgele sayıları üretip, bir veri dosyasına koyuyoruz. Python ile bu sayıları okuyup, ilk önce teker teker sayıların sıklık grafiğini, ondan sonra sayıları üçer üçer toplayıp, onların grafiğini alıp göstereceğiz.

```
A = loadtxt('rasgele.dat')
plt.hist(A, 50)
plt.savefig('dagilim_1.png')
```



```
A = loadtxt('rasgele.dat');
B = []
```

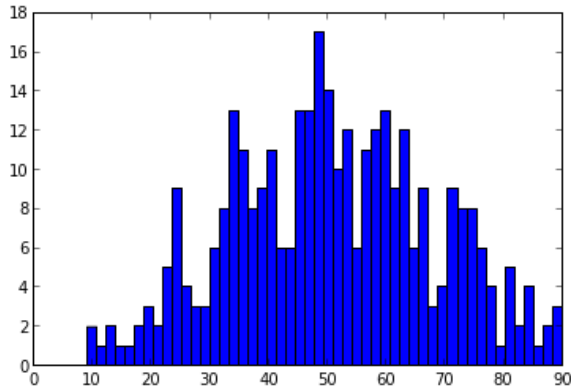
```

i = 1;

while (i < 998):
    toplam = 0
    s = A[i]
    toplam = toplam + s
    s = A[i+1]
    toplam = toplam + s
    s = A[i+2]
    toplam = toplam + s
    B.append(toplam/3)
    i = i + 3

plt.hist(B, 50);
plt.savefig('dagilim_2.png')

```



## Olasilik

### Orneklem Uzayi (Sample Space)

Orneklem uzayi  $\Omega$  bir deneyin mumkun tum olasiliksal sonuclarin (outcome) kumesidir. Eger deneyimiz ardi ardina iki kere yazi (T) tura (H) atip sonucu kaydetmek ise, bu deneyin mumkun tum sonuclari soyledir

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

### Sonuclar ve Olaylar (Outcomes and Events)

$\Omega$  icindeki her nokta bir sonuctur (outcome). Olaylar  $\Omega$ 'nin herhangi bir alt kumesidir ve sonuclardan olusurlar. Mesela ustteki yazi-tura deneyinde “iki atisin icinden ilk atisin her zaman H gelmesi olayi” boyle bir alt kumedir, bu olaya A diyelim,  $A = \{HH, HT\}$ .

Ya da bir deneyin sonucu  $\omega$  fiziksel bir olcum , diyelin ki sicaklik olcumu. Sicaklik  $\pm$ , reel bir sayi olduguna gore,  $\Omega = (-\infty, +\infty)$ , ve sicaklik olcumunun 10'dan buyuk ama 23'ten kucuk ya da esit olma “olayi”  $A = (10, 23]$ . Koseli parantez kullanildi cunku sinir degerini dahil ediyoruz.

### Ornek

10 kere yazi-tura at.  $A = \text{“en az bir tura gelme”}$  olayi olsun.  $T_j$  ise  $j$ 'inci yazi-tura atisinda yazi gelme olayi olsun.  $P(A)$  nedir?

Bunun hesabi icin en kolayi, hic tura gelmeme, yani tamamen yazi gelme olasiligini,  $A^c$ 'yi hesaplamak, ve onu 1'den cikartmaktir.  $^c$  sembolu “tamamlayici (complement)” kelimesinden geliyor.

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - P(\text{hepsi yazi}) \\ &= 1 - P(T_1)P(T_2)\dots P(T_{10}) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx .999 \end{aligned}$$

### Rasgele Degiskenler (Random Variables)

Bir rasgele degisken  $X$  bir eslemedir, ki bu esleme  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  her sonuc ile bir reel sayi arasindaki eslemedir.

Olasilik derslerinde bir noktadan sonra artik ornekleme uzayindan bahsedilmez, ama bu kavramin arkalarda bir yerde her zaman devrede oldugunu hic aklimizdan cikartmayalim.

### Ornek

10 kere yazi-tura attik diyelim. VE yine diyelim ki  $X(\omega)$  rasgele degiskeni her  $\omega$  siralamasinda (sequence) olan tura sayisi. Iste bir esleme. Mesela eger  $\omega = \text{HHTHHTHHTT}$  ise  $X(\omega) = 6$ . Tura sayisi eslemesi  $\omega$  sonucunu 6 sayisina esledi.

### Ornek

$\Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ , yani kume birim cember ve icindeki reel sayilar (unit disc). Diyelim ki bu kumeden rasgele secim yapiyoruz. Tipik bir sonuc  $\omega = (x, y)$ 'dir. Tipik rasgele degiskenler ise  $X(\omega) = x$ ,  $Y(\omega) = y$ ,  $Z(\omega) = x + y$  olabilir. Goruldugu gibi bir sonuc ile reel sayi arasinda esleme var.  $X$  rasgele degiskeni bir sonucu  $x$ 'e eslemis, yani  $(x, y)$  icinden sadece  $x$ 'i cekip cikartmis. Benzer sekilde  $Y, Z$  degiskenleri var.

### Toplamsal Dagilim Fonksiyonu (Cumulative Distribution Function -CDF-)

#### Tanim

$X$  rasgele degiskeninin CDF'i  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  tanimi

$$F_X(x) = P(X \geq x)$$

Eger  $X$  ayrık ise, yani sayılabilir bir küme  $\{x_1, x_2, \dots\}$  icinden değerler alıyorsa olasılık fonksiyonu (probability function), ya da olasılık kütle fonksiyonu (probability mass function -PMF-)

$$f_X(x) = P(X = x)$$

Bazen  $f_X$ , ve  $F_X$  yerine sadece  $f$  ve  $F$  yazarız.

Tanım

Eger  $X$  sürekli (continuous) ise, yani tüm  $x$ 'ler için  $f_X(x) > 0$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$  olacak şekilde bir  $f_X$  mevcut ise, o zaman her  $a \leq b$  için

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Bu durumda  $f_X$  olasılık yoğunluk fonksiyonudur (probability density function -PDF-).

$$F_X = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

Ayrıca  $F_X(x)$ 'in türevi alınabildiği her  $x$  noktasında  $f_X(x) = F'_X(x)$  demektir.

Dikkat! Eger  $X$  sürekli ise o zaman  $P(X = x) = 0$  değerindedir.  $f(x)$  fonksiyonunu  $P(X = x)$  olarak görmek hatalıdır. Bu sadece ayrık rasgele değişkenler için işler. Sürekli durumda olasılık hesabı için belli iki nokta arasında integral hesabı yapmamız gereklidir. Ek olarak PDF 1'den büyük olabilir, ama PMF olamaz. PDF'in 1'den büyük olabilmesi integrali bozmaz mı? Unutmayalım, integral hesabı yapıyoruz, noktasal değerlerin 1 olması tüm 1'lerin toplandığı anlamına gelmez. Bakınız *Entegralleri Nasıl Düşünelim* yazımız.

Tanım

$X$  rasgele değişkeninin CDF'i  $F$  olsun. Ters CDF (inverse cdf), ya da ceyrek fonksiyonu (quantile function)

$$F^{-1}(q) = \inf \left\{ x : F(x) \leq q \right\}$$

ki  $q \in [0, 1]$ . Eger  $F$  kesinlikle artan ve sürekli bir fonksiyon ise  $F^{-1}(q)$  tekil bir  $x$  sayısı ortaya çıkarır, ki  $F(x) = q$ .

Eger inf kavramını bilmiyorsak simdilik onu minimum olarak düşünebiliriz.

$F^{-1}(1/4)$  birinci ceyrek

$F^{-1}(1/2)$  medyan (median, ya da ikinci ceyrek),

$F^{-1}(3/4)$  ucuncu ceyrek

olarak bilinir.

İki rasgele değişken  $X$  ve  $Y$  dağılımsal olarak birbirine eşitliği, yani  $X \stackrel{d}{=} Y$  eğer  $F_X(x) = F_Y(x)$ ,  $\forall x$ . Bu  $X, Y$  birbirine eşit, birbirinin aynısı demek değildir. Bu değişkenler hakkındaki tüm olasılıksal işlemler, sonuçlar aynı olacak demektir.

Uyari! “ $X$ ’in dağılımı  $F$ ’tir” beyanını  $X \sim F$  şeklinde yazmak bir gelenek. Bu biraz kötü bir gelenek aslında çünkü  $\sim$  sembolü aynı zamanda yaklaşıksallık kavramını belirtmek için de kullanılıyor.

### Bernoulli Dağılımı

$X$ ’in bir yazı-tura atısını temsil ettiğini düşünelim. O zaman  $P(X = 1) = p$ , ve  $P(X = 0) = 1 - p$  olacaktır, ki  $p \in [0, 1]$  olmak üzere. O zaman  $X$ ’in dağılımı Bernoulli deriz, ve  $X \sim \text{Bernoulli}(p)$  diye gösteririz. Olasılık fonksiyonu  $f(x) = p^x(1 - p)^{(1-x)}$ ,  $x \in \{0, 1\}$ .

Yani  $x$  ya 0, ya da 1. Parametre  $p$ , 0 ile 1 arasındaki herhangi bir reel sayı.

Uyari!

$X$  bir rasgele değişken;  $x$  bu değişkenin alabileceği spesifik bir değer;  $p$  değeri ise bir **parametre**, yani sabit, önceden belirlenmiş reel sayı. Tabii istatistik problemlerde (olasılık problemlerinin tersi olarak düşünürsek) cogenlukla o sabit parametre bilinmez, onun veriden hesaplanması, kestirilmesi gerekir. Her halukarda, çoğu istatistik modelde rasgele değişkenler vardır, ve onlardan ayrı olarak parametreler vardır. Bu iki kavramı birbiriyle karıştırmayalım.

### Düz (Uniform) Dağılım

$X$  düz,  $\text{Uniform}(a, b)$  olarak dağılmış deriz, ve bu  $X \sim \text{Uniform}(a, b)$  olarak yazılır eğer

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \text{ için} \\ 0 & \text{diğerleri} \end{cases}$$

ise ve  $a < b$  olacak şekilde. CDF hesabı olasılık eğrisinin integralini temel alır, düz dağılım bir  $a, b$  arasında  $1/b - a$  yüksekliğinde bir dikdörtgen şeklinde olacağı için, bu dikdörtgendeki herhangi bir  $x$  noktasında CDF dağılımı, yani o  $x$ ’in başlayıp sol tarafın alanının hesabı basit bir dikdörtgensel alan hesabıdır, yani  $x - a$  ile  $1/b - a$ ’nin çarpımıdır, o zaman

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

## Normal (Gaussian) Dagilim

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ve PDF

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2 \right\}, x \in \mathbb{R}$$

ki  $\mu \in \mathbb{R}$  ve  $\sigma > 0$  olacak sekilde. Bazilari bu dagilimi

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x - \mu)\sigma^{-2}(x - \mu) \right\}$$

olarak gosterebiliyor, cunku bu sekilde (birazdan gorecegimiz) cok boyutlu Gaussian formulu ile alaka daha rahat gozukuyor.

Ileride gorecegiz ki  $\mu$  bu dagilimin “ortasi”, ve  $\sigma$  onun etrafa ne kadar “yayildigi” (spread). Normal dagilim olasilik ve istatistikte cok onemli bir rol oynar. Dogadaki pek cok olay yaklasiksal olarak Normal dagilima sahiptir. Sonra gorecegimiz uzere, mesela bir rasgele degiskenin degerlerinin toplami her zaman Normal dagilima yaklasir (Merkezi Limit Teorisi -Central Limit Theorem-).

Eger  $\mu = 0$  ve  $\sigma = 1$  ise  $X$ 'in standart Normal dagilim oldugunu soyleriz. Gele nege gore standart Normal dagilim rasgele degiskeni  $Z$  ile gosterilmelidir, PDF ve CDF  $\phi(z)$  ve  $\Phi(z)$  olarak gosterilir.

$\Phi(z)$ 'nin kapali form (closed-form) tanimi yoktur. Bu, matematikte “analitik bir forma sahip degil” demektir, formulu bulunamamaktadır, bunun sebebi ise Normal PDF'in integralinin analitik olarak alinamiyor olusudur.

Bazi faydali puf noktaları

1. Eger  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ise, o zaman  $Z = (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$ .
2. Eger  $Z \sim N(0, 1)$  ise, o zaman  $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$
3. Eger  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  ve her  $X_i$  digerlerinden bagimsiz ise, o zaman

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

Tekrar  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  alirsak ve 1. kuraldan devam edersek / temel alirsak su da dogru olacaktir.

$$P(a < X < b) = ?$$

$$= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

İlk gecisi nasıl elde ettik? Bir olasılık ifadesi  $P(\cdot)$  içinde eşitliğin iki tarafına aynı anda aynı toplama, çıkarma operasyonlarını yapabiliriz.

Son ifadenin anlamı sudur. Eğer standart Normal'in CDF'ini hesaplayabiliyorsak, istediğimiz Normal olasılık hesabını yapabiliriz demektir, çünkü artık  $X$  içeren bir hesabın  $Z$ 'ye nasıl tercüme edildiğini görüyoruz.

Tüm istatistik yazılımları  $\Phi(z)$  ve  $\Phi(z)^{-1}$  hesabı için gerekli rutinlere sahiptir. Tüm istatistik kitaplarında  $\Phi(z)$ 'nin belli değerlerini taşıyan bir tablo vardır. Ders notlarımızın sonunda da benzer bir tabloyu bulabilirsiniz.

Örnek

$X \sim N(3, 5)$  ise  $P(X > 1)$  nedir? Cevap:

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - P\left(Z < \frac{1 - 3}{\sqrt{5}}\right) \\ &= 1 - \Phi(-0.8944) = 1 - 0.19 = .81 \end{aligned}$$

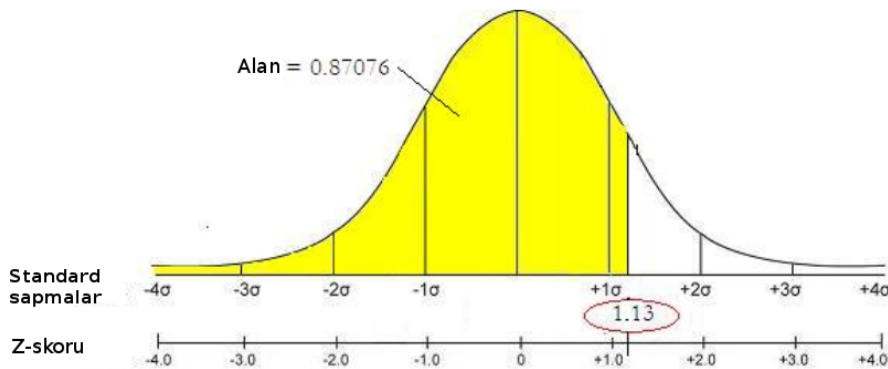
Soru  $P(a < X < b)$  formunda  $a$  kullanmadı, sadece  $b$  olduğu için yukarıdaki form ortaya çıktı. Python ile

```
from scipy.stats.distributions import norm
print norm.cdf(-0.8944)
print 1-norm.cdf(-0.8944)
```

```
0.18555395624
0.81444604376
```

Soru

$\Phi(1.13)$  nedir?



$z$ -skoruna bakmanın bir diğer yolu o değer “kaç standart sapma uzakta” olduğunu gösterilmesidir. Yani ölçümüz standart sapma, ve bu değer sola ya da sağa çek-



ildikce ona tekabul eden alan (ustte sari renkle gosterilen kisim), yani olasilik azalip cogaliyor. Grafikte mesela “1.13 standart sapma” yani z-skor nereyi gosteriyor deyince, gorulen sekil / olasilik ortaya cikiyor. Tabii dagilim standart dagilim ve standart sapma 1 oldugu icin “kac standart sapma” ile z-skor arasinda direk bir baglanti var.

Ornek

Simdi oyle bir  $q$  bul ki  $P(X < q) = .2$  olsun. Yani  $\Phi^{-1}(.2)$ 'yi bul. Yine  $X \sim N(3, 5)$ .

Cevap

Demek ki tablodan .2 degerine tekabul eden esik degerini bulup, ustteki formül uzerinden geriye tercume etmemiz gerekiyor. Normal tablosunda  $\Phi(-0.8416) = .2$ ,

$$.2 = P(X < q) = P(Z < \frac{q - \mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{q - \mu}{\sigma})$$

O zaman

$$-0.8416 = \frac{q - \mu}{\sigma} = \frac{q - 3}{\sqrt{5}}$$

$$q = 3 - 0.8416\sqrt{5} = 1.1181$$

t (Student's t) ve Cauchy Dagilimi

$X$ ,  $\nu$  derece bagimsizlikta t dagilimina sahiptir, ki bu  $X \sim t_\nu$  diye yazilir eger

$$f(x) = \frac{\Gamma(\nu + 1)/2}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

t dagilimi Normal dagilima benzer ama daha kuyrugu daha kalindir. Aslinda Normal dagilimi t dagiliminin  $\nu = \infty$  oldugu hale tekabul eder. Cauchy dagilimi da t'nin ozel bir halidir,  $\nu = 1$  halidir. Bu durumda yogunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

Bu formül hakikaten bir yogunluk mudur? Kontrol icin entegralini alalim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$$

Cogunlukla entegre edilen yerde “1 arti ya da eksi bir sey in karesi” turunde bir ifade gorulurse, yerine gecirme (substitution) islemi trigonometrik olarak yapilir.

$$x = \tan \theta, \theta = \arctan x$$

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$dx/d\theta = \sec^2 \theta$$

O zaman

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sec^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \theta|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} [\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 1 \end{aligned}$$

$\chi^2$  Dagilimi

$X$ 'in  $p$  derece serbestlige sahip bir  $\chi^2$  dagilima sahip ise  $X \sim \chi_p^2$  olarak gosterilir, yogunluk

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(p/2)2^{p/2}} x^{(p/2)-1} e^{-x/2}, x > 0$$

Eger  $Z_1, \dots, Z_p$  bagimsiz standart Normal rasgele degiskenler ise,  $\sum_{i=1}^p Z_p^2 \sim \chi_p^2$  esitligi dogrudur.

İki Degiskenli Dagilimler

Tanim

Surekli ortamda  $(X, Y)$  rasgele degiskenleri icin yogunluk fonksiyonu  $f(x, y)$  tanimlanabilir eger i)  $f(x, y) > 0, \forall (x, y)$  ise, ve ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$  ise ve her kume  $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  icin  $P((X, Y) \in A) = \int \int_A f(x, y) dx dy$ . Hem ayriksals hem surekli durumda birlesik (joint) CDF  $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$  diye gosterilir.

Bu tanimda  $A$  kumesi olarak tanimlanan kavram uygulamalarda bir olaya (event) tekabul eder. Mesela

Ornek

$(X, Y)$ 'in birim kare uzerinde duz (uniform) olsun. O zaman

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{eger } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

$P(X < 1/2, Y < 1/2)$ 'yi bul.

Cevap

Burada verilen  $A = \{X < 1/2, Y < 1/2\}$  bir altkumedir ve bir olaydır. Olayları böyle tanımlamamış mıydık? Örneklem uzayının bir altkumesi olay değil midir? O zaman  $f$ 'i verilen altkume üzerinden entegre edersek, sonuca ulaşmış oluruz.

Örnek

Eğer dağılım kare olmayan bir bölge üzerinden tanımlıysa hesaplar biraz daha zorlaşabilir.  $(X, Y)$  yoğunluğu

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2y & \text{eğer } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{diğerleri} \end{cases}$$

Niye  $c$  bilinmiyor? Belki problemin modellenmesi sırasında bu bilinmez olarak ortaya çıkmıştır. Olabilir. Bu değeri hesaplayabiliriz, çünkü  $f(x, y)$  yoğunluk olmalı, ve yoğunluk olmanın şartı  $f(x, y)$  entegre edilince sonucun 1 olması.

Önce bir ek bilgi üretelim, eğer  $x^2 \leq 1$  ise, o zaman  $-1 \leq x \leq 1$  demektir. Bu lazım çünkü entegrale sınır değeri olarak verilecek.

$$\begin{aligned} 1 &= \int \int f(x, y) dy dx = c \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 y dy dx \\ &= c \int_{-1}^1 x^2 \int_{x^2}^1 y dy dx = \int_{-1}^1 x^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = 1 \\ &= c \int_{-1}^1 x^2 \left( \frac{1 - x^4}{2} \right) dx = 1 \\ &= \frac{c}{2} \int_{-1}^1 x^2 - x^6 dx = 1 \end{aligned}$$

Devam edersek  $c = 21/4$  buluruz.

Şimdi, diyelim ki bizden  $P(X \geq Y)$ 'yi hesaplamamız isteniyor. Bu hangi  $A$  bölgesine tekabül eder? Elimizdekiler

$$-1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y, y \leq 1$$

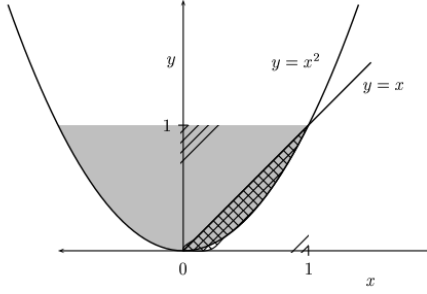
Şimdi bunlara bir de  $y \leq x$  eklememiz lazım. Yani ortadaki eşitsizliğe bir öğe daha eklenir.

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$x^2 \leq y \leq x$$

$$y \leq 1$$

$x^2 \leq y$ 'yi hayal etmek için  $x^2 = y$ 'yi düşünelim, bu bir parabol olarak çizilebilir, ve parabolün üstünde kalanlar otomatik olarak  $x^2 \leq y$  olur, bu temel irdelemelerden biri.



Aynı şekilde  $y \leq x$  için  $y = x$ 'i düşünelim, ki bu 45 derece açıyla çizilmiş düz bir çizgi. Çizginin altı  $y \leq x$  olur. Bu iki bölgenin kesişimi yukarıdaki resimdeki gölgeli kısım.

Ek bir bölge şartı  $0 \leq x \leq 1$ . Bu şart resimde bariz görülüyor, ama cebirsel olarak bakarsak  $y \geq x^2$  olduğunu biliyoruz, o zaman  $y \geq 0$  çünkü  $x^2$  muhakkak bir pozitif sayı olmalı. Diğer yandan  $x \geq y$  verilmiş, tüm bunları yanyana koyarsak  $x \geq 0$  şartı ortaya çıkar.

Artık  $P(X \geq Y)$  hesabı için hazırız,

$$\begin{aligned} P(X \geq Y) &= \frac{21}{4} \int_0^1 \int_{x^2}^x x^2 y \, dy \, dx = \frac{21}{4} \int_0^1 x^2 \left[ \int_{x^2}^x y \, dy \right] dx \\ &= \frac{21}{4} \int_0^1 x^2 \frac{x^2 - x^4}{2} dx = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

“Hafizasız” Dağılım, Ustel (Exponential) Dağılım

Ustel dağılımın hafizasız olduğu söylenir. Bunun ne anlama geldiğini anlatmaya uğrasalım. Diyelim ki rasgele değişken  $X$  bir aletin omrunu temsil ediyor, yani bir  $p(x)$  fonksiyonuna bir zaman “sordugumuz” zaman bize dondurulan olasılık, o aletin  $x$  zamani kadar daha işlemesinin olasılığı. Eğer  $p(2) = 0.2$  ise, aletin 2 yıl daha yaşamasının olasılığı 0.2.

Bu hafizasızlığı, olasılık matematiği ile nasıl temsil ederiz?

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s), \quad \forall s, t \geq 0$$

Yani oyle bir dagilim var ki elimizde,  $X > t$  bilgisi veriliyor, ama (kalan) zamani hala  $P(X > s)$  olasiligi veriyor. Yani  $t$  kadar zaman gectigi bilgisi hicbir seyi degistirmiyor. Ne kadar zaman gecmis olursa olsun, direk  $s$  ile gidip ayni olasilik hesabini yapiyoruz.

Sartsal (conditional) formulunu uygularsak ustteki soyle olur

$$\frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} = P(X > s)$$

ya da

$$P(X > s + t, X > t) = P(X > s)P(X > t)$$

Bu son denklemin tatmin olmasi icin  $X$  ne sekilde dagilmis olmalidir? Ustteki denklem sadece  $X$  dagilim fonksiyonu ustel (exponential) olursa mumkundur, cunku sadece o zaman

$$e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t}$$

gibi bir iliski kurulabilir.

Ornek

Diyelim ki bir bankadaki bekleme zamani ortalama 10 dakika ve ustel olarak dagilmis. Bir musterinin i) bu bankada 15 dakika beklemesinin ihtimali nedir? ii) Bu musterinin 10 dakika bekledikten sonra toplam olarak 15 dakika (ya da daha fazla) beklemesinin olasiligi nedir?

Cevap

i) Eger  $X$  musterinin bankada beklediği zamani temsil ediyorsa

$$P(X > 15) = e^{-15 \cdot 1/10} = e^{-3/2} \approx 0.223$$

ii) Sorunun bu kısmi müşteri 10 dakika gecirdikten sonra 5 dakika daha gecirmesinin olasiligini soruyor. Fakat ustel dagilim “hafizasiz” olduğu icin kalan zamani alip yine direk ayni fonksiyona geciyoruz,

$$P(X > 5) = e^{-5 \cdot 1/10} = e^{-1/2} \approx 0.60$$

Bilesen (Marginal) Dagilimler

Surekli rasgele degiskenler icin bilesen yogunluk

$$f_X(x) = \int f(x, y) dy$$

ve

$$f_Y(y) = \int f(x, y) dy$$

Ustteki integraller gercek bir dagilim fonksiyonu  $f(x, y)$  verilince alt ve ust limit te tanımlamak zorundadır. Cunku bilesen yogunluk icin bir veya daha fazla degiskeni “integralle disari atmak (integrate out)” ettigimiz soylenir, eger ayrik-sal (discrete) ortamda olsaydik bu atilan degiskenin tum degerlerini goze alarak toplama yapan bir formül yazardik. Surekli ortamda integral kullaniyoruz, ama tum degerlerin uzerinden yine bir sekilde gecmemiz gerekiyor. Iste alt ve ust limitler bunu gerceklestiriyor. Bu alt ve ust limitler, atilan degiskenin “tum degerlerine” bakmasi gerektigi icin  $-\infty, +\infty$  olmalidir. Eger problem icinde degiskenin belli degerler arasinda oldugu belirtilmis ise (mesela alttaki ornekte  $x > 0$ ) o zaman entegral limitleri alt ve ust sinirini buna gore degistirebilir.

Ornek

$f_{X,Y}(x, y) = e^{-(x+y)}$ , olsun ki  $x, y \geq 0$ . O zaman  $f_X(x)$

$$f_X(x) = e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y} dy = e^{-x} \cdot 1 = e^{-x}$$

Ornek

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{eger } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x + y) dx = \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dx = \frac{1}{2} + y \quad (1)$$

Tanim

İki rasgele degisken  $A, B$  bagimsizdir eger tum  $A, B$  degerleri icin

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

esitligi dogru ise. Bu durumda  $X \perp Y$  yazilir.

Teori

$X, Y$ 'nin birlesik PDF'i  $f_{X,Y}$  olsun. O zaman ve sadece  $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  ise  $X \perp Y$  dogrudur.

Ornek

Diyelim ki  $X, Y$  bagimsiz, ve ikisinin de ayni yogunlugu var.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{eger } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{diğerleri} \end{cases}$$

$P(X + Y < 1)$ 'i hesaplayın.

Cevap

Bagimsizligi kullanarak birlesik dagilimi hesaplayabiliriz

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 4xy & \text{eger } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{diğerleri} \end{cases}$$

Simdi bu birlesik yogunluk uzerinden istedigimiz bolgeyi hesaplariz, bolgeyi tanımlayan  $X + Y \leq 1$  ifadesi.

$$P(X + Y \leq 1) = \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dy dx$$

Entegralin limiti ustteki hali sembolik, hesap icin bu yeterli degil, eger  $x + y \leq 1$  ise,  $y \leq 1 - x$  demektir, ve bolge  $y = 1 - x$  cizgisinin alti olarak kabul edilebilir.  $x, y$  zaten sifirdan buyuk olmalı, yani sola dogru yatık cizginin alti ve  $y, x$  eksenlerinin ustu kismini olusturan bir ucgen,

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} 4yx \, dy dx = 4 \int_0^1 x \left[ \int_0^{1-x} y \, dy \right] dx$$

Numaraya dikkat, hangi degisken uzerinden entegral aldigimiza bakarak, onun haricindekileri sabit kabul ederek bu “sabitleri” entegral disina atiyoruz, boylece isimizi kolaylastiriyoruz. Hesabi tamamlarsak,

$$4 \int_0^1 x \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{6}$$

Kosullu Dagilimler (Conditional Distributions)

Surekli rasgele degiskenler icin kosullu olasilik yogunluk fonksiyonlari

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

Devam edelim, eger kosullu yogunluk uzerinden olay hesabi yapmak istersek, ve  $f_Y(y) > 0$  oldugunu farzederek,

$$P(X \in A | Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y) dx$$

Ornek

(1) sonucunu aldigimiz ornege donelim,

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{eger } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

$P(X < 1/4 | Y = 1/3)$  nedir?

Cevap

Ustteki olasilik hesabi icin  $f_{X|Y}$  fonksiyonuna ihtiyacimiz var. (1)'de gordugumu uzere,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} + y$$

Ana formulumuz neydi?

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{x + y}{\frac{1}{2} + y}$$

$$P(X < 1/4 | Y = 1/3) = \int_0^{1/4} \frac{x + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} dx = \frac{\frac{1}{32} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{14}{32}$$

Cok Degiskenli (Multivariate) Dagilimler ve IID Orneklemler (Samples)

$X = (X_1, \dots, X_n)$  olsun, ki  $(X_1, \dots, X_n)$ 'lerin herbiri bir rasgele degisken, o zaman  $X$ 'e rasgele vektor (random vector) ismi verilir.  $f(x_1, \dots, x_n)$ 'in PDF'i temsil ettigini dusunelim. Bu PDF'i baz alarak aynen iki degiskenli (bivariate) orneklerde oldugu gibi, benzer tekniklerle bilesenleri, kosullu dagilimleri, vs. hesaplamak mumkundur.

Cok Degiskenli Normal

Tek degiskenli Normal dagilimin iki parametresi vardi,  $\mu, \sigma$ . Cok degiskenli formda  $\mu$  bir vektor,  $\sigma$  yerine ise  $\Sigma$  matrisi var. Once rasgele degiskeni tanimlayalim,

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_k \end{bmatrix}$$

ki  $Z_1, \dots, Z_k \sim N(0, 1)$ .  $Z$ 'nin yogunlugu



$$f(z) = \prod_{i=1}^k f(z_i) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k z_j^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^T z \right\}$$

Bu durumda  $Z$ 'nin *standart* çok degiskenli Normal dagilima sahip oldugu soylenir, ve  $Z \sim N(0, I)$  olarak gosterilir. Buradaki 0 degeri icinde  $k$  tane sifir olan bir vektor olarak,  $I$  ise  $k \times k$  birim (identity) matrisi olarak anlasilmalidir.

Daha genel olarak bir vektor  $X$ 'in çok degiskenli Normal dagilimina sahip oldugunu soyleriz, ve bunu  $X \sim N(\mu, \Sigma)$  olarak gosteririz, eger dagilimin yogunlugu

$$f(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\}$$

$\Sigma$  pozitif kesin (positive definite) bir matristir. Hatirlayalim, bir matris pozitif kesindir eger tum sifir olmayan  $x$  vektorleri icin  $x^T \Sigma x > 0$  ise.

Not: Karekok kavrami tekil sayılardan matrislere de aktarilabilir. Bir matris  $B$ 'nin  $A$ 'nin karekoku oldugu soylenir, eger  $B \cdot B = A$  ise.

Devam edersek, eger  $\Sigma$  pozitif kesin ise bir  $\Sigma^{1/2}$  matrisini oldugu gosterilebilir, ki bu matrise  $\Sigma$ 'nin karekoku ismi verilir, ve bu karekokun su ozellikleri vardir, (i)  $\Sigma^{1/2}$  simetriktir, (ii)  $\Sigma = \Sigma^{1/2} \Sigma^{1/2} = I$  ve  $\Sigma^{-1/2} = (\Sigma^{1/2})^{-1}$ .

Hatirlama Numarasi

Normal Dagilimin formulu bazen hatirlayamayabiliriz. Peki daha basit bir formolden baslayarak onu turetebilir miyiz? Bu mumkun. Daha once  $e^{-x^2}$  *Nasil Entegre Edilir?* yazisinda

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

oldugunu gormustuk. Dikkat edersek bu integral bir formulun olasiliksal dagilim olup olmadigini kontrol etmek icin kullandigimiz integrale benziyor. Eger integral 1 cikarsa onun olasiliksal dagilim oldugunu biliyoruz. Ustteki sonuc  $\sqrt{\pi}$ , fakat iki tarafi  $\sqrt{\pi}$ 'ye bolerseniz, sag taraf 1 olur ve Boylece solda bir dagilim elde ederiz. Yani

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1$$

formulunde integralin sagindaki kisim bir dagilimdir. Bu formulu donusturerek Gaussian'a erisebiliriz. Ustteki formulun orta noktası (mean) sifir, varyansi (vari-

ance), yani  $\sigma^2 = 1/2$  (bunu da ezberlemek lazım ama o kadar dert değil). O zaman  $\sigma = 1/\sqrt{2}$ .

İlk amacımız  $\sigma = 1$ 'e erismek olsun (çünkü oradan herhangi bir  $\sigma$ 'ya atlayabiliriz), bunun için  $x$ 'i  $\sqrt{2}$ 'e bölmek lazım, tabii aynı anda onun etkisini sıfırlamak için normalize eden sabiti dengelemek amacıyla  $\sqrt{2}$ 'ye bölmek lazım,

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$$

$\sigma = 1$ 'e erisince oradan herhangi bir  $\sigma$  için,  $\sigma$  değişkenine bölelim, yine hem e üstüne hem sabite bu eki yapalım,

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$$

Şimdi herhangi bir ortalama  $\mu$  için bu değişkeni formüle sokalım, bunun için  $\mu$ 'yu  $x$ 'den çıkarmak yeterli

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$$

e üstündeki kare alma işlemini acarsak,

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Boylece integral içindeki kısım tek boyutlu Gaussian formuna erismiş oluyor.

Rasgele Değişkenler, Yoğunluklar

Şimdi konuların üzerinden bir daha geçelim; rasgele değişken,  $X, Y$  gibi büyük harflerle gösterilen büyüklükler “bir zar atışı sonucu içleri doldurulan” değişkenlerdir. Bu zar atışı her zaman  $X$ 'in,  $Y$ 'nin bağlı olduğu dağılıma göre olacaktır. Eğer  $X \sim N(10, 2)$  ise, bir formülün / hesabın içinde  $X$  gördüğümüz zaman yoğunlukla o noktaya 10'a yakın değerler olacağını biliriz. Tabii ki “kesin” her zaman ne olacağını bilmeyiz, zaten bir modelde noktasal değer (tipik cebirsel değişkenler) yerine rasgele değişken kullanmanın sebeplerinden biri budur.

Rasgele değişkenlerin matematiksel formüllerde kullanılması  $Z = X + Y =$  şeklinde olabilir mesela. O zaman elde edilen yeni değişken de bir rasgele değişken olur. Bu tür formüller envai şekilde olabilir, hatta rasgele değişken içeren formüllerin türü bile alınabiliyor, tabii bunun için özel bir Calculus gerekli, İto'nun Calculus'u bu tür işlerle uğraşır.

Elimizde sunlar var; olasılık fonksiyonu bir matematiksel denklem, onları değerler geçiriyoruz, ve bu değerlerin olasılıklarını gayet direkt, mekanik bir formülden ce-

vap olarak aliyoruz. Rasgele degiskenler ise bu yogunluk fonksiyonlarini bir anlamda “tersten isletiyor”, o dagilima “zar attiriyor”, ve olasilik fonksiyonuna gecilen degerler bu sefer disari cikiyor. Tabii yogunlugun ne olduguna gore bazi degerler daha cok, bazilari daha az cikiyor.

İki kavramdan bahsetmek bu noktada faydali olabilir. 1) Nufus (Population) 2) Orneklem (Sample). Nufus, uzerinde istatistiksel analiz yaptigimiz kitlenin tamamı. Eger insanların boylari hakkında istatistiki analiz yapiyor olsaydik tum insanlar nufus olurdu. Nufusun cogunlukla hangi dagilimda oldugu bilinmez, biliniyor olsa da dagilimin parametreleri bilinmiyor olabilir. Orneklem, nufus icinden alinan rasgele olcumlere verilen isimdir,  $X_1, \dots, X_n$  olarak gosterilebiliyor, bu durumda nufusun dagiliminin “zar attigi” ve her zar atisinin rasgele degiskenlerden birinin icini doldurdugu dusunebilir. Orneklem nufustan geldigi icin dagiliminin aynen nufus gibi oldugu kabul edilir. Bu baglantidan yola cikilarak bir-cok istatistiki analiz yapmak mumkundur.

#### Kaynaklar

[1] [http://en.wikipedia.org/wiki/Confidence\\_interval](http://en.wikipedia.org/wiki/Confidence_interval)

[2] Janert, P., Data Analysis with Open Source Tools

[3] Introduction to Probability Models, Sheldon Ross, 8th Edition, sf. 273