Fourier Transformu ve DFT

Unlu matematikci Fourier sunu kesfetmisti; periyodik olan bir fonksiyon F(x) sinus ve cosinus terimlerinin toplami olarak temsil edilebilir.

$$F(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Bu fonksiyonda a ve b sayi degerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Onlari nasil buluruz?

a_k degerlerini bulmak icin iki tarafi $\cos kx$ ile carpip $\int_{-\pi}^{\pi}$ ile entegralini alirsak,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos kx \ dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos kx \ dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \sin nx \cos kx \ dx$$

Esitligin sag tarafinda birinci terim $\cos(kx)$, $\sin(kx)$'e donusur. Fakat sinus fonksiyonu π ve $-\pi$ noktalarinda (ya da onlarin k ile carpilmis 2π, -2π, vs. gibi katlarinda) sifir degerine sahip oldugu icin, bu terim tamamen sifir olacaktir, formulden atilabilir.

Ikinci terimde $\cos(nx)\cos(kx)$'in ustteki gibi entegrali eger k ve n esit degilse, sifirdir. Sadece n ve k esit ise $a_k(\cos kx)^2$ degeri elde edilir. $(\cos kx)^2$'in iseustteki sekilde entegrali π sonucunu verir. Yani ikinci terimde olan, o sonsuza kadar giden koca toplam icinde sadece tek bir terim sag kalabilir.

Ucuncu terimde $\sin nx \cos kx$ carpiminin entegrali her zaman sifir degerini dondurur. Bu terim de formulden atilir. Geri kalanlari tekrar duzenlersek,

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx \ dx$$

sonucunu elde ederiz. b_k icin benzer islemler, ama bu sefer $\sin kx$ ile carpilarak yapilirsa ve sonuc asagi yukari ayni.

$$b_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx \ dx$$

a_0 icin ise, $\cos kx$ ya da $\sin kx$ ile carpmaya gerek yok. Sadece iki tarafin entegralini almak yeterli, a_o'i istedigimiz icin $n = 0$ demektir, o zaman sin ve cos iceren hicbir terime ihtiyac yoktur.

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_o dx$$

$$= a_o x \ \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= a_0(\pi - (-\pi))$$

$$= 2\pi a_0$$

Yani

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$$

Kompleks Sayilari Kullanmak

a_o, a_n ve b_n yerine tek bir c_n turu sayi kullanmak istersek, kompleks sayi sistemine gecmek lazim. O zaman ilk $F(x)$ formulunu de donusturmemiz lazim.

Trigonometrik fonksiyonlarda bilinen iki esitlik soyledir:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Bu formulde i degeri hayali sayi olarak bilinen $\sqrt{-1}$ degeridir.

$F(x)$ formulunu ustteki trigonometrik esitliklere gore donusturelim.

$$F(x) = .. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$= .. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$= .. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{inx}}{2} + \frac{a_n e^{-inx}}{2} + \frac{b_n e^{inx}}{2i} - \frac{b_n e^{-inx}}{2i}$$

$$= .. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{inx}}{2} + \frac{a_n e^{-inx}}{2} - \frac{i\ b_n e^{inx}}{2} + \frac{b_n e^{-inx}}{2}$$

Benzer terimleri, yani e^{inx} ve e^{-inx} terimlerini beraber yazalim:

$$= .. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n i}{2} e^{inx} + \frac{a_n + b_n i}{2} e^{-inx}$$

Bolumde olan $2i$ icindeki i nasil yukari cikabildi? Bu durum, hayali sayilarin bir ozelligiyle alakali: $1/i = -i$. Boylece ikinci ve dorduncu terimdeki arti ve eksi isaretleri degismis oldu. Daha kisa yazmak icin

$$c_{-n} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - b_n}{2}$$

olarak temsil edersek

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Ustteki c_{-n} ve c_n kullanimi bize ek bir avantaj sagliyor: $-inx$ ibaresindeki eksi degeri de cekip cikartabiliyoruz, eksi deger i'den alinip n'ye veriliyor yani, ve eksilik toplamdaki alt sinir olarak tanimlaniyor. Nasil olsa final formulde i ve n carpildigi icin sonuc degismiyecek, ve tek bir terim kullanabilecegiz. Ek olarak a_0 ise c_o haline geldi.

Ustteki entegralli teknigin benzerini c_n icin de kullanabiliriz. Esitligin sag tarafindaki kisim ustteki formulde Σ toplaminin acilmis halini kullanalim, ve iki tarafi da e^{-ikx} ile carpalim, sonra $-\pi$ ve π arasinda entegralini alalim:

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} c_0 e^{-ikx} dx +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_1 e^{ix} e^{-ikx} dx + ... +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{ikx} e^{-ikx} dx + ...$$

Toplamdaki tum terimleri gostermedik, onemli olan kisim zaten k'inci terim, yani e^{-ikx} ile carpilan e^{ikx} ifadesi. Bu carpim basit bir cebirsel islemle $e^{-ikx} e^{ikx} = e^{-ikx+ikx} = e^0 = 1$, yani bir degerine esit. Diger tum terimler eger entegrali hesaplarsak gorebilecegimiz gibi sifira esit. Bir degerinin$-\pi$ ve π arasinda entegrali 2π. Geri kalanlar

O zaman

$$2\pi c_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx$$

Sifira esitligin nasil oldugunu cebirsel olarak gosterelim. Entegrali alalim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-ikx}dx$$

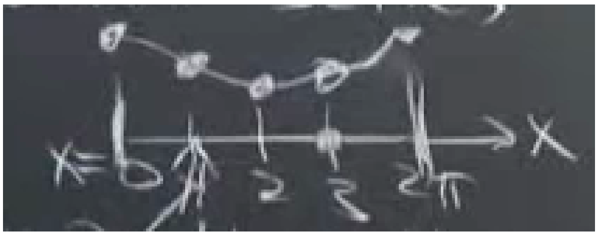
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}dx$$

$$= \frac{e^{i(n-k)x}}{i(n-k)}\bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= e^{in\pi}e^{-ik\pi} - e^{-in\pi}e^{ik\pi} = 0$$

DFT

Ayriksal (discrete) olarak Fourier modellemesi yapmak istiyorsak, elimizde devamli (continuous) f(x) fonksiyonu olmayacak, bir f(x) fonksiyonun belli noktalarindaki degerleri (oldugunu farzettigimiz) verileri iceren bir *vektor* olacak. Bu vektorun N elemani var diyelim. Fonksiyon periyodik olduguna gore, x icin 2π'i N esit parcaya boleriz (tahtadan alinan resim altta). Ornegimizde N=4 olsun.



Ayrica $F(x)$ formulu biraz degisecek. Elimizde sonsuz tane nokta olmadigina gore

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n e^{inx}$$

olmasi lazim. Simdi, eger butun c_k degerlerini biliyor olsaydik, bu fonksiyon, x=0 noktasinda hangi degere sahip olurdu?

$$f(0) = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = Y_0$$

Sonraki x degerleri $2\pi/N$, $4\pi/N$ icin asagidaki gibi devam edecegiz, ama ondan once bir w degiskeni tanimlayalim, bu degiskeni $w = e^{2\pi i/N}$ olarak alalim. Boylece w^2 dedigimizde ustel islemlerde carpim islemi toplama islemine donusecegi icin $e^{4i\pi/N}$ degeri elde edilebilir, w^3 ile $e^{6i\pi/N}$ elde edilir, vs. Bu degerler bize lazim olacak degerler, w sayesinde formuller daha temiz olacak. $F(2\pi/N)$ icindeki 3. terim $(n = 2)$ nedir? $c_n e^{inx} = c_2 e^{2i2\pi/N} = c_2 e^{4i\pi/N} = c_2 w^2$. O zaman

$$f(2\pi/N) = c_o + wc_1 + w^2 c_2 + w^3 c_3 = Y_1$$

Devam edelim:

$$f(4\pi/N) = c_o + w^2 c_1 + w^4 c_2 + w^6 c_3 = Y_2$$

$$f(6\pi/N) = c_o + w^3 c_1 + w^6 c_2 + w^9 c_3 = Y_3$$

Elimizdeki dort toplam islemine bakinca, bu toplamlar ve carpimlarin aslinda lineer cebir uzerinden matrisler ile gosterilebildigini farkedebiliriz.

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Her matris icin bir degisken kullanirsak

$$Y = WC$$

F(x)'ten (yani Y'den) C'ye gitmek istersek, elimizde Y_n degerleri var, w degerleri zaten sabittir, W bu sabit degere gore olusturulur, o zaman, c_n sayilarini nasil buluruz?

$$Y = WC$$

$$W^{-1}Y = W^{-1}WC$$

$$W^{-1}Y = C$$

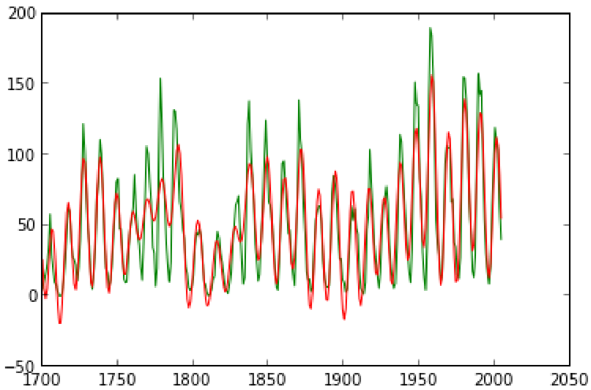
Yani W matrisinin tersini (inverse) alip, onu Y ile carpinca elimize C degerleri gececek.

Gunes Benekleri

Guneste periyodik olarak olan benekler, asagi yukari 11 senede bir ortaya cikarlar. Bu benekler uzun suredir gozlenmekte ve olculmektedir, siddetlerine gore, sunspots.dat adli dosyada bulabiliriz. Benek verisindeki periyodik olus, Fourier transformu ile analiz etmek icin uygun. Alttaki Python kodu w, W gibi kavramlari kullanarak, ustteki carpimlarla C vektorunu bulacak. Bu vektor icindeki sayilar Fourier analizindeki belli frekanslara, harmoniklere tekabul ediyor olacaklar.

Bu C degerlerinden bazilari digerlerinden daha guclu bir etkidir, mesela 11 senelik periyot, C icinde daha guclu olarak cikacaktir, cikmalidir. Biz kabaca ilk ve son 30 sayi haricindekileri silerek onlara sifir degeri verdik, sonra bu yeni C'yi kullanarak benek verisini tekrar "urettirdik". Sonuc onemli olan (ilk ve son 30 degerin temsil ettigi harmoniklerin onemli oldugunu varsayiyoruz) periyotlarin yeni bir toplami oldu. Her iki grafigi de ust uste cizdik ve cakisma oldugunu net bir sekilde gorebiliyoruz. Eger tum C'leri kullansaydik, o zaman iki grafik daha benzer, hatta tipatip ayni cikacakti.

```
import scipy

tempdata = np.loadtxt("sunspots.dat")

year=tempdata[:,0]

Y=tempdata[:,1]

N = len(Y)

w = np.exp((2*np.pi*1j)/N)

W = np.zeros((N,N), complex)
for i in range(N):
    for k in range(N):
        W[i,k] = w**(i*k)

C = np.dot(np.linalg.inv(W), Y)

C[30:-30] = 0.

Y_new = scipy.real(np.dot(W, C))

plt.plot(year, Y, 'g')
plt.hold(True)
plt.plot(year, Y_new, 'r')
plt.savefig('fourier_1.png')
```



FFT

Bitirmeden once FFT konusundan bahsedelim. **D**FT algoritmasi kodda goruldugu gibi bir W matrisi ortaya cikarir ve once tersini alma, sonra bu ters ile bir carpim islemi yaparak C sonucunu uretir. O notasyonunu kullanirsak DFT'nin karmasikligi $O(N^2)$'dir. Bu iyi bir hizdir.

FFT algoritmasi ustteki caprimin bazi ozelliklerini kullanarak DFT'yi daha da hizlandirarak $O(\frac{1}{2}Nlog_2N)$ hizina getirir. FFT'den bu makalede bahsetmeyecegiz, aklimizda olsun, Scipy uzerinde fft cagrisi bu algoritmayi kullanir.

Kaynaklar

Strang, G., OCW MIT Lecture #30, Computational Science and Engineering

Strang, G., Computational Science and Engineering, sf. 340-370

Chu, E., Discrete and Continuous Fourier Transforms

Kammler, D., A First Course in Fourier Analysis

Mattuck, A., OCW MIT Lecture #17-19, Differential Equations