MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 4

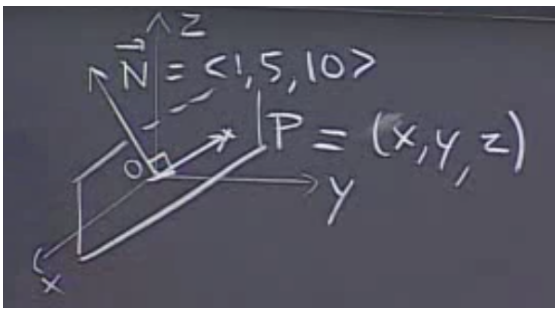
Duzlemin formulune donelim.

$ax + by + cz = d$

Bu formul x, y, z noktalarinin bir duzlem uzerinde olma sartini tarif ediyor.

Su problemlere bakalim. Diyelim ki

1) Orijinden, yani $(0, 0, 0)$ noktasindan gecen ve normal vektoru $\vec{N} =< 1, 5, 10 >$ olan bir duzlem yaratmak istiyoruz. Yani alttaki gibi bir sekil:

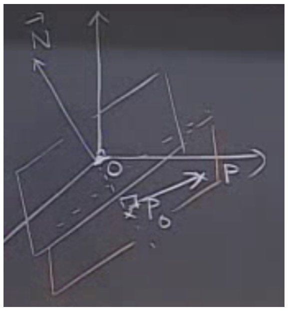


Herhangi bir nokta $P = (x, y, z)$ ne zaman bu duzlem uzerindedir? Eger orijinden P'ye giden vektor, duzlem normali ile doksan derece aci olusturuyorsa. Yani $\vec{OP} \cdot \vec{N} = 0$ oldugu zaman P noktasi duzlem uzerindedir.

Dikkat edelim, x, y, z kordinatlarini, tek baslarina kullanir kullanmaz, aslinda $\vec{OP}$'nin orijinden baslamasini sart kosmus oluyorum, cunku x, y, z kordinatlari sadece $(0, 0, 0)$ noktasina referansla anlamlilar.

Her neyse, bu carpimi normal icin verdigimiz ornek sayilar icin yaparsak, sonuc $x + 5y + 10 = 0$ olacaktir.

2) Simdi duzlem $P_0 = (2, 1, -1)$ noktasindan gecsin (orijinden degil), ve normal yine ayni olsun, $\vec{N} =< 1, 5, 10 >$. Bu durumu zihnimizde canlandirmak icin yeni bir duzlemi hayal etmemiz lazim, ve P noktasi bu yeni duzlem uzerinde olacak.



P ne zaman duzlem uzerinde? Eger

$\vec{P_0 P} \cdot \vec{N} = 0$

ise. O zaman

$< x-2, y-1, z+1 > \cdot < 1, 5, 10 >= 0$

$x + 5y + 10z = -3$

x, y, z uzerinde cikartma islemini niye yaptim? Cunku vektorun bir ucu hala x, y, z iceren P noktasinda, diger ucu baslangic noktasi olan P_0'da.

1. problemdeki sonuctakiyle aradaki tek fark esitligin sagindaki -3 degeri. Bir benzerlik ise her iki durumda da x, y, z katsayilarinin normal vektorun degerlerine tekabul ediyor olmasi. Bu duzlemler hakkinda onemli bir puf noktasi, eger orjinden geciyorlarsa esitligin sag tarafi sifir, baska bir yerden geciyorlarsa, baska bir deger. Peki bu -3 degerini daha hizli bir sekilde bulamaz miydik? Bulabilirdik. Cunku esitligin sol tarafinin katsayilarini hizli bir sekilde bulabiliyoruz, orasi tamam. Ayrica duzlemdeki bir noktanin kordinatlarini da biliyoruz, bu nokta duzlemin icinden gecmesini sart kostugumuz P_0 noktasi. O zaman bu kordinati x, y, z terimlerini iceren formule koyarsak, esitligin sag tarafini hemen hesaplariz.

$x + 5y + 10z = 1(2) + 5(1) + 10(-1) = 2 + 5 - 10 = -3$

Bu arada bir duzlemin tek bir formulu yoktur, sonsuz tane denklemi vardir. Mesela her seyi 2 ile carpsaydim

$2x + 10y + 20z = -6$

olurdu, ve bu formulde ayni denklemin formulu olurdu. Bunun coklugun sebebi normal vektorlerin herhangi bir "boyda" olabilmesi, diklik icin yok yeterli oldugu icin, farkli boylar ama degismeyen yon hala ayni duzlemi tanimliyor.

Duzlemi tanimlamak icin normal vektor en onemlisi. Bir onceki derste duzlem uzerindeki noktalar, onlarin ortaya cikardigi iki vektor o vektorlerin capraz carpimi uzerinden nasil normal vektor hesaplanabilecegini gormustuk.

Soru

Vektor $< 1, 2, -1 >$ ve duzlem $x + y + 3z = 5$ birbirine

1. Paralel
2. Dik
3. Hicbiri

Cevaplayin.

Vektoru ve duzlemin normal vektorunu carptik. $< 1, 2, -1 > \cdot < 1, 1, 3 >= 0$. Dogru cevap 1.

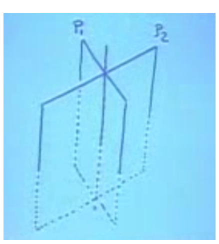
Simdi bir lineer denklem sistemini inceleyelim.

$x + z = 1$

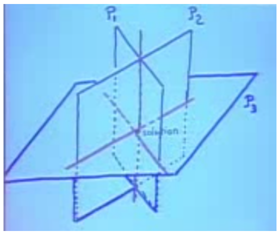
$x + y = 2$

$x + 2y + 3z = 3$

Ilk iki denkleme bakalim. Bu denklem belli, ozel iki x, z noktasindan bahsediyor. Ikinci denklemi de gozonune alinca, ayni x, z noktalarinin ikinci denklem icin de gecerli olmasi gerekir.



Ilk iki denklemleri ayri duzlemler olarak dusunursek, cozum olacak x, y, z iki duzlemin kesistigi yerdedir. Peki ucuncu denklem, yani ucuncu duzlem ne yapar?



O da iki duzlemin kesimindeki cizgiyi keser. Kesisimin kesimi bir noktadir. O nokta da, ustteki lineer sistemin cozumu olan noktadir.

Soru

Eger 3 x 3 boyutlarindaki bir lineer sistemin cozumu bir nokta degilse, nedir?

1. Cozum yoktur
2. Iki nokta (2 cozum)
3. Bir cizgi (∞ tane cozum)
4. Bir tetrahedron
5. Bir duzlem
6. Bilmiyorum

Diyelim ki ilk iki duzlemin kesismesi bir cizgi ortaya cikardi, ama bu cizgi ucuncu duzlem ile paralel. O zaman cozum yok demektir. Fakat su da dogru olabilir, belki bu cizgi ucuncu denklemin "uzerindedir". Bu durum cebirsel olarak iki denklemin ortaya cikardigi bir denklemin ucuncu denklemin kati olmasidir. Bu durumda ucuncu denklem bize hicbir yeni bilgi saglamamistir. Bu durumda sonsuz tane cozum vardir, kesismeden ortaya cikan cizgi uzerindeki "her" nokta bir cozumdur, ve sonsuza kadar uzayan bir cizgi uzerinde sonsuz tane nokta vardir.

O zaman dogru cevap 1, 3 ve 5.

5 niye dogru? Aynen iki denklemden ortaya cikan denklemin ucuncu denklemin bir kati olmasi gibi, her uc denklem ayri ayri birbirinin kati olabilir.

O zaman bu denklemler aslinda ayni duzlemdirler. Cozum bu tek duzlemdir, ve sonsuz tanedir. Yani size ayni denklemi uc kere vermisim demektir, bu pek ilginc bir sistem sayilmaz, ama yine de bu bir lineer sistemdir.

Soru

$x+y+z = ..$ gibi bir denklemin sagindaki sifir olmayan degerlerin geometrik anlami nedir? Cevap: Daha once gordugumuz $x+y+z=0$ orijinden gecer. Sag taraf sifir degilse, sifirdan gecen ayni duzleme paralel ama ondan belli miktarda uzakta bir duzlemden bahsediyoruz demektir. Ne kadar uzakta? Her zaman esitligin sagindaki buyukluk kadar degil. O uzaklik icin hesabin ayrica yapilmasi lazim. Simdilik sadece orijinden uzakta oldugunu bilelim.

Simdi matrislere donelim. Onceki derste gordugumuz lineer cebir formulunu hatirlayalim

$AX = B$

$X = A^{-1}B$

Buradaki problem, bir matrisin her zaman tersini alamayacagimiz gercegi.

Hatirlarsak

$A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} adj(A)$

Bu hesapta eger determinant sifir cikarsa ustteki bolme islemini yapamayiz. Yani bir onceki derste aslinda sunu soylememistik; bir matris sadece determinanti sifir degilse tersine cevirilebilir.

Geometrik olarak cozumun tek nokta oldugu durum, A'nin tersine cevirilebilir oldugu durum. Kesisim cizgisinin ucuncu duzleme paralel oldugu durum ise determinantin sifir, yani tersini cevirim yapilamadigi durum.

Homojen Durum

$AX = 0$ homojen durumdur, esitligin sagi sifirdir, yani uc denklem orneginde tum denklemlerin sag tarafi sifirdir.

Ornek

$x + z = 0$

$x + y = 0$

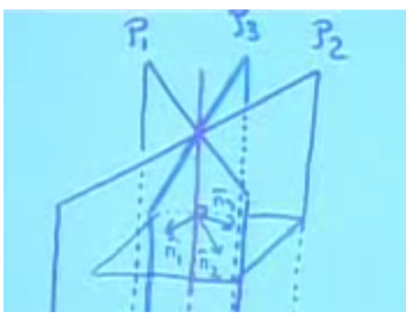
$x + 2y + 3z = 0$

Aslinda bu denklemin bariz ve hep mevcut bir cozumunu zaten biliyoruz. x, y, z'nin hepsi sifir. Matematiksel terminolojide bu cozume “basit cozum (trivial solution)” denir. Geometrik anlami nedir? Her denklemin sifira esit olmasi, onlarin temsil ettigi her duzlemin orijinden gectigi anlamina gelir. Eh hepsi orijinden geciyorsa, hepsi orada kesiyorlar da demektir. Basit cozum budur.

Burada iki alt kalem / durum daha var.

1) Eger $det(A) \neq 0$ o zaman A tersine cevirilebilir, o zaman $X = A^{-1}\ 0 = 0$. Baska hicbir cozum yoktur.

2) Eger $det(A) = 0$ o zaman $det(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3) = 0$, her iki hesap ta sifir cunku normal vektorun ogeleri her denklemin x, y, z katsayisi ayni zamanda, o katsayilari alip A icine koyuyoruz, bu matrisin determinantini hesaplamak bir baglamda normal vektorlerin determinantini hesaplamakla esdeger oluyor. Devam edelim, uc formulu temsil eden uc duzlemin normal vektorleri determinanti sifir, o zaman $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ ayni duzlemde (coplanar).



$det(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$ hesabinin paralelipipe hacmini hesapladigini hatirlayalim, ve bu hacim sifir ise vektorlerin olusturdugu hacim sifirdir, yani paralelipipe tamamen yassi demektir. O zaman vektorler ayni duzlemdedir.

$\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$'nin ayni duzlemde ise, bu vektorlere ayni anda dik olan bir cizgiyi dusunelim simdi. Iddia ediyorum ki o cizgi, kesisme cizgisidir.

Niye? Cunku kesisme cizgim tum normal vektorlere ayni anda dik, yani o normal vektorlerin temsil ettigi duzlemlerin hepsine ayni anda paralel. Peki niye parallellik otesinde, o duzlemlerin “uzerinde”? Cunku cizgi orijinden geciyor, ve tum duzlemler de orijinden geciyor. Bunun olabilmesi icin cizgim duzlemlerin uzerinde olmali.

O zaman elimde ∞ tane cozum vardir.

Peki bu cozumleri nasil bulurum? $\vec{N_1} \times \vec{N_2}$ hesabi $\vec{N_1}, \vec{N_2}$'ye dik bir ucuncu vektor hesaplar, bunu biliyoruz, bu vektor de $\vec{N_3}$'e ayni sekilde dik olmalidir cunku bu uc vektorun ayni duzlemde oldugunu biliyoruz. Bu basit olmayan cozumdur.

Usttekiler homojen durum icindi. Simdi homojen olmayan, genel duruma duruma bakalim.

Genel Durum (General Case)

Eger $det(A) \neq 0$ ise bir ozgun (unique) cozum vardir, $X = A^{-1}B$.

Eger $det(A) = 0$ ise, ya hic cozum yoktur ya da sonsuz tane cozum vardir. Tek bir cozum olmasi mumkun degildir.