MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 7

Bugunun konusu “hersey”. Simdiye kadar gordugumuz her sey yani. Vektorleri gorduk, noktasal carpimlari (dot product) gorduk. Iki vektorun noktasal carpimi

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum a_i b_i$$

yani o vektorlerin tum elemanlarinin sirasiyla birbiriyle carpilip toplanmasi. O da suna esit

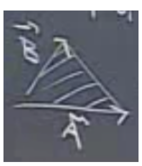
$$= |\vec{A}||\vec{B}| cos\ \theta$$

Noktasal carpimi acilari olcmek icin kullanabiliriz, eger $cos\ \theta$ terimini tek basina birakirsak, geri kalanlari cozeriz. Bu sekilde iki vektorun dik olup olmadigini da anlariz. Cunku o zaman sonuc sifir olur, ve $cos\ \theta = 0$ ise aci dik demektir.

Gordugumuz bir diger kavram capraz carpim (cross product) kavramiydi.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Esitligin sagindaki determinant isareti, matris isareti degil, buna dikkat. Capraz carpimin uygulamalari uzayda bir ucgenin alanin bulmak mesela.



Bu alan

$$\frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$$

ile hesaplanir. Cunku $|\vec{A} \times \vec{B}|$ bir paralelogram verir, onun yarisi aradigimiz ucgenin alanidir.

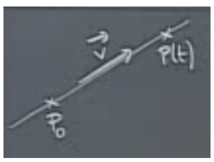
Capraz carpimin bir diger uygulama alani iki vektore ayni anda dik olan ucuncu bir vektoru bulmaktir. Ona baglantili olarak bir duzleme (plane) dik olan bir vektoru bulmak, yani “normal vektoru” bulmak. Duzlemin formulu nedir?

$ax + by + cz = d$

Normal vektor ise $\vec{N} =< a, b, c >$ olarak gosterilir. Normal vektorun degerleri duzlem formulune katsayi olarak giderler.

Cizgiler

Cizgilerin formulu icin bir baslangic noktasina ve o cizgiye paralel olan bir vektore ihtiyacimiz var.



$P(t) = P_0 + t\vec{v}$

Problem 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bize matrisin tersi verilmis ve iki oge bos birakilmis

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & .. & .. \\ -1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Yani bizden beklenen tersine cevirme islemini yapmak, ama bos birakilan degerlere bakalim, bu noktada kafayi calistirip, sadece o noktalara tekabul eden minorleri hesaplamamiz bekleniyor. O minorler hangileri? Sunlar (x ile isaretli).

$$A = \begin{bmatrix} .. & .. & .. \\ x & .. & .. \\ x & .. & .. \end{bmatrix}$$

cunku devrigine alma islemini yapinca, o elemanlar A tersindeki nokta nokta olan yere gecmis olacaklar.

Minorleri hesaplarsak

$$A = \left[\begin{array}{rrr} .. & .. & .. \\ -2 & .. & .. \\ -3 & .. & .. \end{array} \right]$$

Simdi kofaktorleri hatirlayalim (Ders 3)

$$\begin{array}{c} + - + \\ - + - \\ + - + \end{array}$$

O zaman

$$A = \left[\begin{array}{rrr} .. & .. & .. \\ +2 & .. & .. \\ -3 & .. & .. \end{array} \right]$$

Devrigini alalim

$$A = \left[\begin{array}{rrr} .. & +2 & -3 \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{array} \right]$$

Determinant'a bolelim. Determinantin ne oldugu verilmis, 2, ama bu deger zaten 1/2 olarak A'nin tersi onunde duruyor. O zaman 2 ve -3 degerlerini oldugu gibi bos olan yerlere tasiriz.

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -6 \end{array} \right]$$

Ornek

$MX = 0$

Sistem

$x + 3y + z = 0$

$2x - z = 0$

$x + y = 0$

Eger noktasal carpim olarak yazarsak

$< x, y, z > \cdot < 1, 3, 1 >= 0$

$< x, y, z > \cdot < 2, 0, -1 >= 0$

$< x, y, z > \cdot < 1, 1, 0 >= 0$

Bu ifade bize aslinda ustte sagdaki uc vektore dik olan bir vektoru bulmamizi soyluyor, cunku o vektorle $< x, y, z >$ noktasal carpimi sifir sonucu veriyor. Iki vektore dik ucuncu bir vektor bulmayi zaten biliyoruz, ilk iki vektor $< 1, 3, 1 >$ ve $< 2, 0, -1 >$'i kullanarak bunu yapabiliriz, onlarin capraz carpimini aliriz (ucuncu denklemi atliyoruz -aslinda hangi iki vektoru sectigimiz onemli degil-),

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} =< -3, 3, -6 >$$