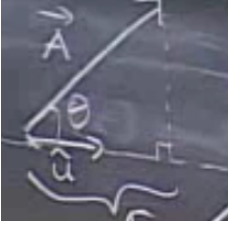


## MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 2

Önceki derste iki uygulama gördük. Üçüncü bir uygulama bir  $\vec{A}$  vektörünün bir birim vektör  $\vec{u}$  yönündeki bileşenlerini / parçalarının (components) hesaplanmasıdır.



Üstteki şekilde  $\vec{A}$ 'nin  $\vec{u}$  yönündeki “yansımasını” görüyoruz ve bu yansımaya  $\vec{A}$ 'nin  $\vec{u}$  yönündeki bileşenidir, büyüklüğüdür.

Aradaki açı  $\theta$  ise ve üçgen dik ise, o zaman bu yansımaya

$$|\vec{A}|\cos(\theta)$$

olarak hesaplanacaktır. Bu formülün ilk hali aslında

$$|\vec{A}||\vec{u}|\cos(\theta)$$

fakat  $\vec{u}$  birim vektör olduğuna göre, uzunluğu 1, o zaman bu büyüklük carpımdan atılabilir. Üstteki formül aynı zamanda bir noktasal carpım,  $\vec{A} \cdot \vec{u}$ .

Eğer bir vektörün mesela  $\hat{i}$  yönündeki yansımasını almak isteseydik,

$$\vec{A} \cdot \hat{i}$$

kullanırdık, bu da

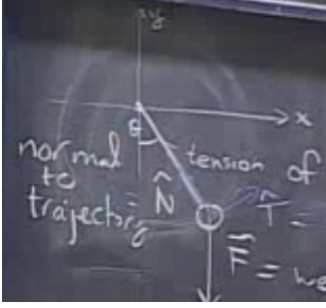
$$\vec{A} \cdot \langle 1, 0, 0 \rangle$$

olurdu. Bu carpım  $x$  yönünde 1 ile carpar diğer tüm eksenleri sıfırlar, yani diğer bir deyişle  $\vec{A}$ 'nin  $x$  yönündeki bileşenini hesaplamış oluruz. Bu arada  $\hat{i}$  tabii ki bir birim vektör. Uzunluğu 1.

### Uygulama

Fizikte, yuvarlak bir şekilde dönebilen bir sarkaç problemini düşünelim. Bu sistemi analiz etmek için Newton Kanunu, mekanik, vs. kullanmanız gerekir tabii ki, fakat vektörler geometrik olarak bu sistemi anlamak için çok fayda-

lidir.



Bu sarkacın ileri geri sallanmasının sebebi üstte takip edilen yuvarlak yoldur. Analiz için  $x, y$  yonundeki bileşenlere bakmak yerine belki de resimdeki iki birim vektor yonune bakmamiz lazim, ki bu vektorlerden biri takip edilen yola teget yonu gosteren  $\vec{T}$ , diğeri yuvarlak tanjantına dik olan  $\vec{N}$ . O zaman ağırlığı temsil eden  $\vec{F}$ 'in bu iki vektor yonundeki bileşenlerine bakabiliriz.

Resimde ipin gerginliği (tension of string)  $\vec{N}$  yonunde, bu yon ip gerginliği yonu,  $\vec{F}$ 'in  $\vec{N}$  yonundeki bileşeni gerginliği yaratan faktordur.  $\vec{F}$ 'in tegetlik yani  $\vec{T}$  yonundeki bileşeni ise ileri geri hareketi saglayan faktordur.

Muhakkak sarkacın  $y$  eksenini ile oluşturdugu bir açı  $\theta$  üzerinden bir suru  $\cos$ ,  $\sin$  terimleri iceren denklemler ortaya cikartabilirdiniz, bu ilginç olurdu, fakat eğer daha kısa bir yolu takip etmek istiyorsak, noktasal carpim kullaniriz.

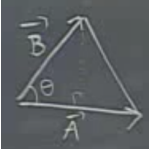
Vektorler baglaminda anlamamiz gereken bir diğeri kavram, alan kavrami. Diyelim ki elimizde bir pentagon sekli var. Bu seklin alanini vektorler kullanarak hesaplayabilir miydik?



Evet hesaplayabiliriz. Problemi basitlestirelim. Pentagonu ucgenlere ayiririm.



sonra bu alanlari toplayalim. Ucgen alanini nasil hesaplariz? Soyle bir ucgen dusumelim



Bu ucgenin alanı

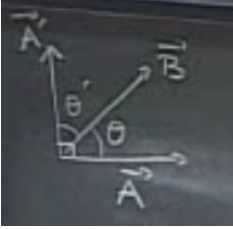
$$\frac{1}{2}|\vec{A}||\vec{B}|\sin(\theta)$$

Bu formül  $\cos$  içeren diğer formülümüze benziyor. Bundan istifade edebiliriz belki. Önce  $\cos(\theta)$ 'yi buluruz, sonra  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  eşitliğini kullanarak  $\sin(\theta)$ 'yi buluruz.

Fakat bu gereğinden fazla iş yaratır. Daha kolay bir yöntem var. Bu yöntem için determinantlar kullanmak lazım.

Devam edelim: Madem açıların  $\cos$  değerlerini bulmayı biliyoruz, belki öyle bir diğer açı bulmalıyız ki o açının  $\cos$  değeri bizim aradığımız açının  $\sin$  değeri olsun, çünkü alan için  $\sin$  gerekiyor, ama hesaplayabildiğimiz  $\cos$ .

Birbirini tamamlayıcı açılar (complementary angles) kavramını biliyoruz herhalde.



Diyelim ki elimizde  $\vec{A}$  var, onu  $90^\circ$  çevirip üstteki hale getiriyoruz, yeni vektöre  $\vec{A}'$  diyelim. O vektör ile  $\vec{B}$  arasındaki açıya da  $\theta'$  diyelim.

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\cos(\theta') = \sin(\theta)$$

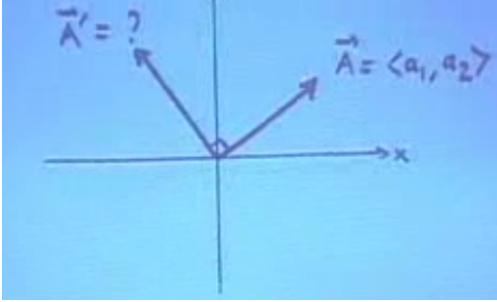
Bu demektir ki

$$|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta = |\vec{A}'||\vec{B}|\cos\theta'$$

$|\vec{A}|$  yerine  $|\vec{A}'|$  koymakla hiçbir sey degistirmiyorum cunku bu vektorlerin yonleri degisik olsa da buyuklukleri ayni. Devam edelim, ustteki formulde sag tarafi basitlestirirsek

$$= \vec{A}' \cdot \vec{B}$$

Bu temiz bir formul. Tek eksik,  $\vec{A}'$ 'nin ne oldugunu hala hesaplamadik. Fakat bunu yapmak o kadar zor degil. Bunun icin  $\vec{A}'$ 'yi cevirebilmemiz lazim. Alttaki resme bakalim,

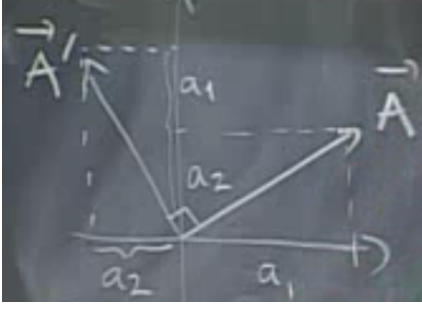


acaba  $\vec{A}'$  ne olur? Secenekler [bu hoca boyle ufak sinavlari seviyor, faydali aslinda, bu sinavlara gelince siz de cevabini vermeye ugrasin].

1.  $\langle a_2, a_1 \rangle$
2.  $\langle a_2, -a_1 \rangle$
3.  $\langle -a_2, a_1 \rangle$
4.  $\langle -a_1, a_2 \rangle$
5. Hicbiri

Dogru cevap: 3.

Bu nasil oldu? Alttaki resme bakalim



$\vec{A}$ 'nin etrafında bir dikdörtgen hayal edelim, ve dikdörtgeni içindeki vektör ile beraber alıp sola doğru çeviriyoruz. O zaman uzun kenar artık yukarı doğru bakıyor, yani  $a_1$  yukarı bakıyor,  $a_2$  nin de yeri değişiyor, yani bu büyüklükler yer değiştiriyorlar. Ayrıca  $a_2$  artık ters yöne gittiği için işareti değişiyor.

O zaman şu formüle dönersek

$$= \vec{A}' \cdot \vec{B}$$

şöyle olur

$$a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Bu formül determinantlardan tanıdık gelebilecek bir formül,

$$= \det(\vec{A}, \vec{B})$$

Aslında  $\vec{A}, \vec{B}$  ile bu vektörleri yanyana kolonlara koyduğumuz şu formü düşünuyoruz ve onun determinantını alıyoruz

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Ve bu determinant hesabının sonucu kenarları  $\vec{A}$  ve  $\vec{B}$  olan bir paralelogramın alanıdır. Tabii paralelogram içindeki üçgeni istiyorsak bu sonucu ikiye böleriz.

Not: Alan pozitif bir şeydir, fakat  $a_1 b_2 - a_2 b_1$ 'in kesinlikle pozitif çıkmasının garantisi yoktur. Eksi değerli terimler büyüyüp artı değerlileri asabilirler. O zaman ifadelerimizin tam doğru olması için üstteki determinant hesabı -alan ya da +alan değerine esittir demek lazım.