

Filtrelemek

Filtreler dis dunyadaki bir aksiyon hakkında elde edilen gurultulu sinyalleri, tersine cevirecek arka plandaki aksiyon hakkında hesaplama yapabilmemizi saglar. Mesela Kalman Filtreleri (KF) icin gizlenmis konum bir robotun nerede oldugu, bir senetin fiyati gibi bir sey olabilir, gizli konum bilgisi x_t degiskeninde o konum hakkindaki gurultulu olcum y_t icindedir. Hem gizli konumlar arasindaki gecis, hem de olcumun gurultusu lineer bir fonksiyon uzerindendir.

$$x_{t+1} = Ax_t + v$$

$$y_t = Hx_t + w$$

v ve w 'in dagilimi Gaussian'dir ve kovaryans sirasiyla Q ve R icindedir.

Zaman faktorunu de dahil etmek gerekirse;

$$\hat{x}_t^t = E[x_t|y_0, \dots, y_t]$$

$$P_t^t = E[(x_t - \hat{x}_{t|t})(x_t - \hat{x}_{t|t})'|y_0, \dots, y_t]$$

Filtremenin amaci x_{t+1} ve P_{t+1} hesabini yeni bir olcum y_{t+1} uzerinden yapmak olacak. “Gizli” x_t derken bunu kastediyorduk, bu deger bize verilmiyor, sadece x_t ve x_{t+1} arasindaki gecisin nasil oldugunu biliyoruz, gurultunun nasil eklendigini biliyoruz, ama bunlari bilsek bile elde bir suru bilinmeyen var. Filtrelemenin matematiksel numaralari sayesinde bunu hesaplayabiliyor olacagiz. Yani yapmamiz gereken “oku tersine cevirmek”, yani x_t 'nin y_t uzerindeki sartasal bagliligini (conditional dependence) ortaya cikartmak, bunu y_t 'nin x_t 'ye olan sartasal bagimliligini tersine cevirecek yapmak. Ana denklemin iki tarafinin da beklentisini (expectation) alalim:

$$E x_{t+1} = \hat{x}_{t+1} = A\mu_t = A\hat{x}_t$$

Simdi iki tarafin kovaryansini alalim ve P_t 'yi $cov x(t)$ olarak belirtelim:

$$P_{t+1} = AP_tA' + Q$$

Bu gecis “zaman guncellemesi” olarak adlandirilir. Normal dagilimleri t anindan $t + 1$ anina gecirmemizi saglar. y iceren formullerde benzer bir durum var.

$$\hat{x}_{t+1}^t = Ax_t^t$$

$$P_{t+1}^t = AP_t^t A' + Q$$

$$y_{t+1} = Cx_{t+1} + w_t$$

$$E[y_{t+1}|y_0, \dots, y_t] = E[Cx_{t+1} + w_t|y_0, \dots, y_t]$$

$$\hat{y}_{t+1}^t = C\hat{x}_{t+1}^t$$

Kovaryans icin benzer durum

$$E[(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1}^t)(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1}^t)'|y_0, \dots, y_t] = C_{t+1}^t C' + R$$

Simdi daha zor is olan oku tersini cevirmeye geelim. Eger amacimiz $p(x_t | y_t)$ denklemini elde etmek ise o zaman bu iki degiskeni iceren birlesik dagilimi (joint distribution) elde etmek zorundayiz. Iki Gaussian’in birlesiminin yeni bir Gaussian oldugunu biliyoruz, o zaman hem x_t hem de y_t ’in kendisi cok boyutlu birer Gaussian olduklari icin onlari birlesimi $p(x_t | y_t)$ ’in hakikaten devasa bir Gaussian olacagini tahmin edebiliriz.

x_t ve y_t ’in birlesimi olan Gaussian’i bulmak demek, bu Gaussian’in ortalamasini (mean) ve kovaryansini bulmak demektir cunku bir Gaussian ortalama ve kovaryansi ile net bir sekilde tanimlanabilir bir seydir. Bir numara yapalim, ve $y_t = Cx_t + w_t$ ’yi $z = Hu$ seklinde yazalim. Sonra

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} x_t \\ w_t \end{bmatrix}$$

Boylece daha basit bir denklemin kovaryansini alabiliriz

$$cov(z) = H \cos(u) H'$$

$$cov(u) = \begin{bmatrix} P_t & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

Tam carpim suna esit

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_t & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & C' \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

bunun sonucu ise

$$\begin{bmatrix} P_t & P_t C' \\ CP_t & CP_t C' + R \end{bmatrix}$$

Bunu baglantisal denklem icin ve ortalamayi icerecek sekilde yazabiliriz

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_t^t \\ C\hat{x}_t^t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_t^t & P_t^t C' \\ CP_t^t & CP_t^t C' + R \end{bmatrix}$$

Ayni sekilde x_{t+1}, y_{t+1} birlesik dagilim icin

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1}^t \\ C\hat{x}_{t+1}^t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{t+1}^t & P_{t+1}^t C' \\ CP_{t+1}^t & CP_{t+1}^t C' + R \end{bmatrix} \quad (1) \quad (\text{eq1})$$

Simdi x_{t+1}^{t+1} 'in ortalama ve varyansi icin parcali Gaussian kavramini anlatmaliyiz. Bir n boyutlu Gaussian daha kucuk boyutlardaki p ve q alt Gaussian'lara parcalanabilir (tabii ki $n = p + q$). Yani su ifade kullanilabilir

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (2) \quad (\text{eq2})$$

$$p(x|\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{(p+q)/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \right\}$$

Uzun cebirsel islemlerden sonra $p(x_1|x_2)$ ifadesini elde ederiz. Bu cebirsel turetimini gormek istiyorsanız, *Istatistik* ders notlarımızda Ders 3'e bakabilirsiniz.

Bundan sonra sartlanmis (conditioned) μ ve Σ alinir.

$$\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2) \quad (3) \quad (\text{eq3})$$

$$\Sigma_{1|2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

Simdi denklem ^{eq3}3'u alip ^{eq1} Γ in icine koydugumuzda ve ^{eq2}2'deki yerlesim yapisini dikkate aldigimizda \hat{x}_{t+1}^{t+1} ve P_{t+1}^{t+1} formullerini ortaya cikartabiliriz.

$$\hat{x}_{t+1}^{t+1} = x_{t+1}^t + P_{t+1}^t C' (C P_{t+1}^t C' + \Sigma_w)^{-1} (y_{t+1} - C \hat{x}_{t+1}^t)$$

$$P_{t+1}^{t+1} = P_{t+1}^t - P_{t+1}^t C' (C P_{t+1}^t C' + R)^{-1} C P_{t+1}^t$$

Eger $K = P_{t+1}^t C' (C P_{t+1}^t C' + \Sigma_w)^{-1}$ dersek

$$\hat{x}_{t+1}^{t+1} = \hat{x}_{t+1}^t + K_t (y_{t+1} - C \hat{x}_{t+1}^t)$$

$$P_{t+1}^{t+1} = P_{t+1}^t - K_t C P_{t+1}^t$$

Ornek: Veriye Duz Cizgi Uydurmak (Line Fitting)

Eger elimizde bir cizgiye uydurmak icin kullanacagimiz tum veri olsaydi, uydurma islemi icin en az kareler (least squares) yontemini kullanabilirdik. Kalman Filtreleri bize yeni veri geldigi anda, her seferinde, azar azar bir cizgiyi uydurmamizi sagliyor. Hatta matematiksel olarak ispalanmistir ki eger baslangic noktası ayniysa, azar azar veriye KF ile almanın sonunda, tum veriye bir kerede en az karesel yontem ile uydurmak aynı sonucu verir.

Peki bu uydurma islemini nasıl yaparız? Burada veriye nasıl temsil ettigimiz konusunda ufak bir numara kullanmamız lazım.

Kendimize bir soru soralım: bu sistemin konum bilgisi nedir? Bir robotu izliyorsak mesela soru cevabi basittir, onun x, y gibi kordinat bilgisi. Duz cizgi fit ederken takip edilen bunlar degil, bize gerekli olan bir cizginin “egimi (slope)”. Yani hem

bir cizginin y eksenini kestigi nokta, hem de cizginin egimi x_t konum bilgisi icinde dahil edilecek. Burada KF literaturunden gelen x, y harfleri birbirine karismasin diye cizginin degerlerini xx_t ve yy_t olarak tanimlayacagiz. O zaman x_t vektoru suna benzer:

$$x_t = \begin{bmatrix} yy_t \\ a \end{bmatrix}$$

ki burada a harfi egimi temsil etmektedir. a bir sabit olduguna gore KF her zaman diliminde ayni kalacak bir degiskeni hesaplayacaktır. Cogunlukla KF ile her zaman diliminde degisik olan degerlerin hesaplandigini goruruz, bu uygulamaya gore degisen bir seydir, matematiksel bir mecburiyet degildir. A matrisimiz ile de biraz numara yapmamiz gerekli. Bu matris x_t 'yi donusturup x_{t+1} 'i elde etmemizi saglayan sey olduguna gore A 'nin soyle olmasi gerekir:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & \Delta xx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrisi x_t ile carptigimizda $yy_t \cdot 1 + a \cdot \Delta xx$ degerini elde ediyoruz, ki bu deger bir cizgi uzerinde bir sonraki noktayi temsil ediyor. Dis olcumu veren gurultu matrisi H ise

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sekinde. Bunu x_t ile carptigimizda y_t 'yi (iki kere) elde ettigimizi gorecegiz. Not: Niye iki kere? Kodlama sirasinda boyutlarin uyumlu olmasi icin boyle gerekti, cok buyuk bir rahatsizlik degil. Kod altta gorulebilir.

```
from pylab import *
from numpy import *

slope = 2

#
#  $x_{t+1} = A x_t + Q$ 
#  $y_t = Hx_t + R$ 
#
def Kalman(obs,x,mu_init,nsteps):

    ndim = shape(mu_init)[0]
```

```

Q = zeros((ndim, ndim))
A = eye(ndim)
H = array([[1, 0], [1, 0]])

mu_hat = mu_init
cov = ones((ndim, ndim))
R = eye(ndim) * 10

m = zeros((ndim,nsteps),dtype=float)
ce = zeros((ndim,ndim,nsteps),dtype=float)

for t in range(1,nsteps):
    # Make prediction
    # A is transformation matrix, equals to
    # TR: Tahmini yap
    # A transofmrasyon matrisi ve suna esit
    # / 1 delta_x /
    # / 0      1    /
    A = array([[1, x[t]-x[t-1]], [0, 1]])
    mu_hat_est = dot(A,mu_hat)
    cov_est = dot(A,dot(cov,transpose(A))) + Q

    # Update estimate
    # TR: tahmini guncelle
    error_mu = obs[:,t] - dot(H,mu_hat_est)
    error_cov = dot(H,dot(cov,transpose(H))) + R
    K = dot(dot(cov_est,transpose(H)),linalg.inv(error_cov))
    mu_hat = mu_hat_est + dot(K,error_mu)
    m[:,t] = mu_hat
    cov = dot((eye(ndim) - dot(K,H)),cov_est)
    ce[:, :,t] = cov
    print "mu_hat="+str(mu_hat)
return mu_hat

N = 20

#
# create sample data
# TR: ornek veri yarat
#

obs = zeros((2, N))
x = xrange(N)
for i in xrange(N):
    obs[0, i] = obs[1, i] = (slope*i)+random.normal(10)

```

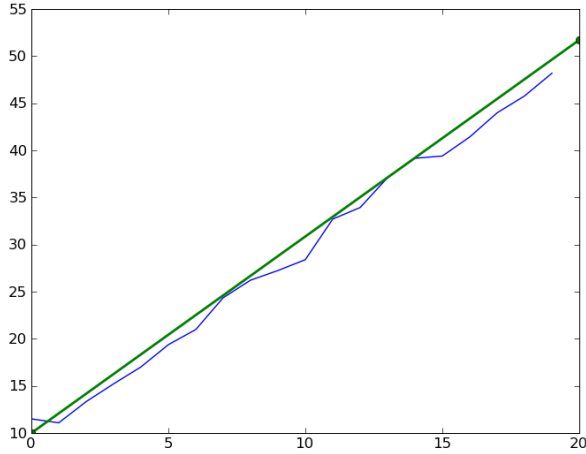
```

print "obs="+str(obs.shape)

mu_hat = Kalman(obs, x, mu_init=array([0, 0]),nsteps=N)

plot(obs[0, :])
plot([0,N], [10,N*mu_hat[1]], 'go-', label='line 1', linewidth=2)
show()

```



Ornek: Obje Takibi

Daha degisik bir ornekten bahsedelim. Bu ornekte OpenCV kutuphanesinden elde ettigimiz 2 boyutlu degerleri y_t icin kullanacagiz. Degerler OpenCV'nin bir satranc tahtasi seklinin kose noktalarini otomatik olarak bulabilen cvFindChessboardCorners cagrisinden gelecek (ayrica cvDrawChessboardCorners ile bu noktaları ekranda aninda gosterebilecegiz).

Elimizdeki “gurultulu” olcumler iki boyutlu noktasal degerler. Gurultulu cunku kamera bize bu imajlari aktarirken hata eklemis olabilir, OpenCV fonksiyonu hesabi yaparken hata eklemis olabilir, bir suru olasilik var.

Bu ornekte, ayrica, ilk kez KF ortaminda boyut degisikligi olasiligini net bir sekilde gorebiliyoruz. Gizli konum bilgisi x_t 3 boyutlu bir nokta, ama elimizdeki olcum 2 boyutlu bir “yansima”. Yansima sirasinda kacinilmaz olarak deger kaybediliyor, bir boyutun bilgisi ortadan yokoluyor. Ama tum bu bilinmezlerle ragmen Kalman filtresinin bizim icin gizli bilgiyi hesaplamasini istiyoruz.

Bu problemde A matrisi ne olacaktir? Obje takibi konularinda A'nin ne oldugunu hayal etmek daha kolay, A matrisi iki zaman dilimi arasindaki “hareketi” temsil edecek. Bu problemdeki ek bir kolaylik bu hareketi onceden bildigimiz, ve hareketin tek yonde oldugu. Yani resimde benim tuttugum kartonu ne kadar hizla hareket ettirdigimi ben onceden probleme bildiriyorum. Yer degisikligini d olarak betimledim, ve A soyle oldu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dikkat edersek A 4x4 boyutunda, 3x3 değil. 3 boyutlu koordinatları temsil etmek için homojen koordinat sistemini kullandığımız için böyle oldu, o sebeple zaten x_t de 4x1 oldu, ona uymak için A 'nin değişmesi gerekiyordu. Ax_t carpiminin hakikaten kartonu hareket ettirdiğini göstermek için bu carpimi bir örnek üzerinde yapalım: Diyelim ki $x_t = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]$ o zaman Ax_t ya da x_{t+1} şu hale gelir: $[a_1 \ a_2 \ a_3 + d \ a_4]$.

Bakıyoruz, hakikaten de d kadarlık bir yer değişimi z koordinatı, yani derinlik üzerinde eklenmiş. Test amaçlarımız için $d = -0.5$ aldık, yani satranc tahta kartonunun her zaman diliminde kameraya doğru 0.5 cm ilerlediğini belirttik. Tabii bu da kabaca bir tahmindir (her ne kadar hareketi yaptıran ben olsam bile!), ama filtrelemenin gücünü burada görüyoruz. Benim tahminimde “gurultu” yani “hata payı” var, olcümde gurultu var, tüm bunlar üst üste konsa bile filtre yine de gizli konumu bulacak.

Olcümsel donusumu temsil eden H 'e ben onun temeli olan yansima (projection) kelimesinden gelen P matrisinden bahsedelim. Yansima matrisi görüntü (vision) literatüründe tek delikli kamera (pinhole camera) modelinden ileri gelen bir matristir ve bu matrisi hesaplamak ayarlama / kalibrasyon (calibration) denen ayrı bir işlemin parçasıdır. OpenCV içinde kalibrasyon için fonksiyonlar var, biz de bunları denedik, kalibrasyon için kullandığımız resimlerle alakalı olmalı, elde edilen sonuçlardan memnun kalmadık. Alternatif olarak sunu yaptık; resimde görülen yeşil yüzey bizim programın oluşturduğu hayali bir yüzey. Filtrenin o anki tahminini P üzerinden görüntüye yansıtarak bu yüzeyi oluşturduk, böylece deneme / yanılma yöntemiyle pek çok P değerini deneyerek, yüzeyin resimde görülen masanın sonunda çıkacak şekilde olmasını sağladık. O noktaya gelince istediğimiz P değerini bulmuş oluyorduk. Yansıtma matrisleri 3x3 olur, KF buna bir dördüncü $[0 \ 0 \ 0]$ satırı ekleyerek onu 4x3 H haline getiriyor.

KF'nin başlangıç noktası olarak P 'yi bulmak için kullandığımız masa sonunu kullandık. Kararsızlık ölçütü Q için, ki bu değişken bir Gaussian kovaryansidir, $Q = I \cdot 150cm$ değerini kullandık, yani oldukça büyük bir kararsızlık değeri kullandık. Sebep başlangıç değeri olan masa ortasını seçtik, ve takip edeceğimiz satranc tahtasının nerede olduğunu bilmiyoruz, “emin değiliz”. Bu kararsızlığı sayısal olarak programa bildirmiş olduk.

Altındaki resimlerde filtrenin tahminini temsil eden yeşil yüzeyin satranc tahtasını basarıyla takip ettiğini göreceksiniz.

```
from numpy import *

#  $x_{t+1} = A x_t + \text{Sigma}_x$ 
#  $y_t = Hx_t + R$ 
class Kalman:
```



```

# T is the translation matrix
# K is the camera matrix calculated by calibration
def __init__(self, K, mu_init):
    self.ndim = 3
    self.Sigma_x = eye(self.ndim+1)*150
    self.A = eye(4)
    self.A[2,3] = -0.5
    self.H = append(K, [[0], [0], [0]], axis=1)
    self.mu_hat = mu_init
    self.cov = eye(self.ndim+1)
    self.R = eye(self.ndim)*1.5

def normalize_2d(self, x):
    return array([x[0]/x[2], x[1]/x[2], 1.0])

def update(self, obs):

    # Make prediction
    print "self.mu_hat=" + str(self.mu_hat)
    self.mu_hat_est = dot(self.A, self.mu_hat)
    prod = dot(self.A, dot(self.cov, transpose(self.A)))
    self.cov_est = prod + self.Sigma_x
    print "self.mu_hat_est=" + str(self.mu_hat_est)
    print "self.cov_est=" + str(self.cov_est)

    # Update estimate
    prod = self.normalize_2d(dot(self.H, self.mu_hat_est))
    self.error_mu = obs - prod

    prod = dot(self.cov, transpose(self.H))
    prod = dot(self.H, prod)
    self.error_cov = prod + self.R
    prod = dot(self.cov_est, transpose(self.H))
    self.K = dot(prod, linalg.inv(self.error_cov))
    self.mu_hat = self.mu_hat_est + dot(self.K, self.error_mu)

    prod = dot(self.K, self.H)
    left = eye(self.ndim+1)
    diff = left - prod
    self.cov = dot(diff, self.cov_est)

if __name__ == "__main__":

    # camera matrix
    K = array([[653.52398682, 0., 326.47888184],
               [0., 653.76440430, 259.63595581],

```

```

        [0., 0., 1.]])

kalman = Kalman(K, mu_init=array([1., 1., 165., 1]))
kalman.update(array([100.0, 100.0, 1.]))
kalman.update(array([120.0, 120.0, 1.]))

import cv
import sys
from kalman_3d import *
from K import *

def proj_board(im, xl, yl, z):
    color = cv.CV_RGB(0, 255, 0)
    image_size = cv.GetSize(im)
    print "image_size=" + str(image_size)
    for x in arange(xl-9, xl+9, 0.5):
        for y in arange(yl-9, yl+9, 0.5):
            X = array([x, y, z])
            q = dot(K, X)
            q = [int(q[0]/q[2]), int(q[1]/q[2])]
            cv.Set2D(im, im.height-q[1], q[0], color)

def show_data(image, mu_x):
    line_type = cv.CV_AA
    pt1 = (30, 400)
    font = cv.InitFont (cv.CV_FONT_HERSHEY_SIMPLEX,
                        0.8, 0.1, 0, 1, cv.CV_AA)
    cv.PutText (image, "Kalman Filter " + str(mu_x),
                pt1, font, cv.CV_RGB(255,255,0))

def detect(image):
    image_size = cv.GetSize(image)

    # create grayscale version
    grayscale = cv.CreateImage(image_size, 8, 1)
    cv.CvtColor(image, grayscale, cv.CV_BGR2GRAY)
    storage = cv.CreateMemStorage(0)
    #cv.ClearMemStorage(storage)

    im = cv.CreateImage (image_size, 8, 3)

    status, corners = cv.FindChessboardCorners( grayscale, (dim,dim))
    if status:
        cv.DrawChessboardCorners( image, (dim,dim), corners, status)
        is_x = [p[0] for p in corners]
        is_y = [p[1] for p in corners]

```

```

        return is_x, is_y
    return [], []

if __name__ == "__main__":

    print "Press ESC to quit, 't' to take a picture (image will be "
    print "saved in a snap.jpg file"

    snap_no = 1
    frame_no = 0

    # create windows
    cv.NamedWindow('Camera', cv.CV_WINDOW_AUTOSIZE)

    # create capture device
    device = 0 # assume we want first device

    capture = cv.CreateFileCapture (sys.argv[1])
    #capture = cvCreateCameraCapture (0)

    dim = 3

    pts = dim * dim
    mid = int(pts / 2)

    cv.SetCaptureProperty(capture, cv.CV_CAP_PROP_FRAME_WIDTH, 640)
    cv.SetCaptureProperty(capture, cv.CV_CAP_PROP_FRAME_HEIGHT, 480)

    # check if capture device is OK
    if not capture:
        print "Error opening capture device"
        sys.exit(1)

    kalman = Kalman(K, mu_init=array([1., 1., 165., 1.]))

    frame = cv.QueryFrame(capture)
    #proj_board(frame, 1, 1, 160)
    print frame.height
    cv.ShowImage('Camera', frame)
    #cv.SaveImage('snap-00.jpg', frame)
    #k = cv.WaitKey()

    while 1:
        frame_no += 1
        print frame_no

```

```

# capture the current frame
frame = cv.QueryFrame(capture)
image_size = cv.GetSize(frame)
if frame is None:
    break

is_x, is_y = detect(frame)

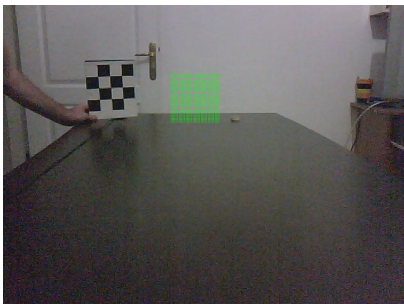
if len(is_x) > 0 :
    print "is_x[5]=" + str(is_x[5])
    print "is_y[5]=" + str(is_y[5])
    kalman.update(array([is_x[5], frame.height-is_y[5], 1.]))
    proj_board(frame,
                kalman.mu_hat[0],
                kalman.mu_hat[1],
                kalman.mu_hat[2])

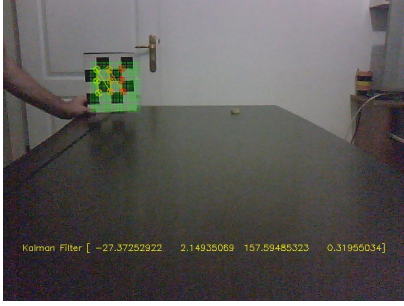
    show_data(frame, kalman.mu_hat)

# display webcam image
cv.ShowImage('Camera', frame)

# handle events
k = cv.WaitKey(40)
if k == "t":
    cvSaveImage('cb-kf-' + str(snap_no) + '.jpg', frame)
    snap_no += 1
if k == 27: # ESC
    print 'ESC pressed. Exiting ...'
    break

```





Parcacak Filtreleri

Filtrelemede tek yontem Kalman filtreleri degil. KF kararsizlik Gaussian olarak gosterilebiliyorsa cok faydali, ve hizli bir yontem. Bir KF bellekte cok az yer tutar, 3 boyutlu bir Gaussian icin 3x1 boyutunda bir ortalama vektoru, ve 3x3 boyutunda bir kovaryans matrisi yeterlidir, yani $3 + 9 = 12$ sayi.

Parcacak filtreleri (PF) bir dagilimi “ayriksal” olarak temsil ederler. Yani diyelim ki tek boyutlu bir dagilimi 100 eleman iceren bir dizin ile temsil edebiliriz, o zaman dagilimin degerlerini 100 tane noktada tasimamiz gerekir. Bunun faydalari her turlu dagilim seklini temsil edebilmemiz. Gaussian sadece belli bir sekilde olabilir, tek bir tepe noktasi olmalidir, vs. Ayriksal temsil ile 2, 3, istedigimiz kadar tepe noktasi

olan (ya da hic olmayan) bir dagilim kullanabiliriz.

Bu neye yarar? Birden fazla hipotezi ayni anda isletebilmemize yarar. KF ile tepe noktası en iyi tahminimizdir (mesela.. satranc kartonu masa ortasında), PF ile birkaç tahmini ayni anda hesaplatmak mumkun olabilir.

Daha detaylandırmak gerekirse, PF kodlaması x_t için iki tane veri yapısı gerektirir. Bir veri yapısı dagilimdaki degerleri temsil eden parçacıklardır, diğeri ise bu parçacıkların dagilimdaki önemini temsil eden ağırlıklardır. Filtreleme sistemi KF'e benzer, önce bir gecis uygulanır, ki bu gecis kararsızlığı arttıracaktır, fakat ardından gözlem verisi bir hata fonksiyonu üzerinden dagilim guncellenir. Bu işlem sırasında hatası yüksek olan parçacıklar cezalandırılır, onların ağırlığı azalır, otekilerinki yükselir. Her parçacık için hata fonksiyonu şudur:

$$w^{[i]} = \frac{1}{1 + (y^{[i]} - p^{[i]})^2}$$

$y^{[i]}$ gözlem değeri, $p^{[i]}$ gecis uygulandıktan sonra elimizdeki tahminimizdir, ki bu KF dünyasındaki $Ax_t + Q$ 'nın karşılığıdır. PF için hareket gecisi şöyle hesaplanır: Bir uniform dagilimdan örnekleme yapılır, ve bu örneklenen degerler x 'e eklenir. Örnekleme için z-kordinati için $Unif(-0.1, -1)$ 'i, x kordinati için $Unif(-40, 40)$ 'i kullandık. Yani ileri doğru 0.1 ve 1 santimetre arasında bir hareket ekliyoruz, ve sağa ve sola donuk olarak 80 santimetrelilik bir kararsızlığı hesaplara ekliyoruz.

Üstteki formülde $(y^{[i]} - p^{[i]})^2$ e niye 1 değeri ekledigimiz aciktir herhalde, bu sayede hata fonksiyonunun olasılık degerlerini andıran bir sonuç don- durmesini istiyoruz. Çok ufak hatalar için $1 + hata$ bölünendeki 1'i böylecek, ve 1'e yakın bir deger geri getirecek. İstedigimiz de bu zaten, küçük hataların daha büyük ağırlığa sebebiyet vermeleri, büyük hataların ise tam tersi sonuca sebep olmaları.

Tekrar örnekleme (resampling) sürecinde parçacıklar tekrar düzenlenerek ağırlığı çok olan parçacıkların ağırlığı az olanlara göre daha fazla tekrarlanması istiyoruz. Dikkat: tekrar örnekleme süreci yeni parçacık degerleri yaratmıyor, sadece mevcut olanları tekrarlıyor ya da onları atlıyor.

```
from numpy import *
from numpy.random import *

class PF:

    def __init__(self, K, n):
        self.H = append(K, [[0], [0], [0]], axis=1)
        self.n = n
        self.x = zeros((self.n, 4))
        self.x[:, :] = array([1., 1., 165., -1])
```

```

def normalize_2d(self, x):
    return array([x[0]/x[2], x[1]/x[2], 1.0])

def resample(self, weights):
    n = len(weights)
    indices = []
    C = [0.] + [sum(weights[:i+1]) for i in range(n)]
    u0, j = random(), 0
    for u in [(u0+i)/n for i in range(n)]:
        while u > C[j]:
            j+=1
        indices.append(j-1)
    return indices

def update(self, y):
    u = uniform(-0.1, -1, self.n) # forward with uncertainty
    self.x[:,2] += u
    u = uniform(-40,40, self.n) # left right uncertainty
    self.x[:,0] += u
    p = dot(self.x,self.H.T)
    for i, item in enumerate(p): # modify in place
        p[i,:] = self.normalize_2d(item)
    self.w = 1./(1. + (y-p)**2)
    self.w = self.w[:,0]+self.w[:,1]
    #self.w = self.w[:,0]
    self.w /= sum(self.w)
    self.x = self.x[self.resample(self.w),:]

def average(self):
    return sum(self.x.T*self.w, axis=1)

if __name__ == "__main__":

    K = array([[700., 0., 300.],[0., 700., 330.],[0., 0., 1.]])
    p = PF(K, 100)
    p.update(array([100.,100.,1.]))
    print p.average()

import sys
import cv
from numpy import *
from K import *
from PF import *

def proj_board(im, xl, yl, z):
    color = cv.CV_RGB(0, 255, 0)

```

```

image_size = (im.width, im.height)
print "image_size=" + str(image_size)
for x in arange(xl-9, xl+9, 0.5):
    for y in arange(yl-9, yl+9, 0.5):
        X = array([x, y, z])
        q = dot(K, X)
        q = [int(q[0]/q[2]), int(q[1]/q[2])]
        cv.Set2D(im, im.height-q[1], q[0], color)

def detect(image):
    image_size = cv.GetSize(image)

    # create grayscale version
    grayscale = cv.CreateImage(image_size, 8, 1)
    cv.CvtColor(image, grayscale, cv.CV_BGR2GRAY)
    storage = cv.CreateMemStorage(0)
    #cvClearMemStorage(storage)

    im = cv.CreateImage (image_size, 8, 3)

    status, corners = cv.FindChessboardCorners( grayscale, (dim,dim))
    if status:
        cv.DrawChessboardCorners( image, (dim,dim), corners, status)
        is_x = [p[0] for p in corners]
        is_y = [p[1] for p in corners]
        return is_x, is_y
    return [], []

def show_data(image, mu_x):
    line_type = cv.CV_AA
    pt1 = (30, 400)
    font = cv.InitFont (cv.CV_FONT_HERSHEY_SIMPLEX,
                        0.8, 0.1, 0, 1, cv.CV_AA)
    cv.PutText (image, "Particle Filter " + str(mu_x), pt1
                , font, cv.CV_RGB(255,255,0))

if __name__ == "__main__":

    print "Press ESC to quit, 't' to take a picture (image will be "
    print "saved in a snap.jpg file"

    snap_no = 0
    frame_no = 0

    # create windows

```



```

cv.NamedWindow('Camera')

# create capture device
device = 0 # assume we want first device

capture = cv.CreateFileCapture (sys.argv[1])
dim = 3
forward_step = -1.

pts = dim * dim
mid = int(pts / 2)

cv.SetCaptureProperty(capture, cv.CV_CAP_PROP_FRAME_WIDTH, 640)
cv.SetCaptureProperty(capture, cv.CV_CAP_PROP_FRAME_HEIGHT, 480)

# check if capture device is OK
if not capture:
    print "Error opening capture device"
    sys.exit(1)

pf = PF(K, 200)

frame = cv.QueryFrame(capture)
proj_board(frame, 1, 1, 160)
cv.ShowImage('Camera', frame)

while 1:
    frame_no += 1
    frame = cv.QueryFrame(capture)

    image_size = cv.GetSize(frame)
    if frame is None:
        break

    is_x, is_y = detect(frame)

    if len(is_x) > 0:
        print "is_x[5]=" + str(is_x[5])
        print "is_y[5]=" + str(is_y[5])
        pf.update(array([is_x[5], frame.height-is_y[5], 1.]))
        mu_x = pf.average()
        print mu_x
        proj_board(frame, mu_x[0], mu_x[1], mu_x[2])
        show_data(frame, mu_x)

# display webcam image

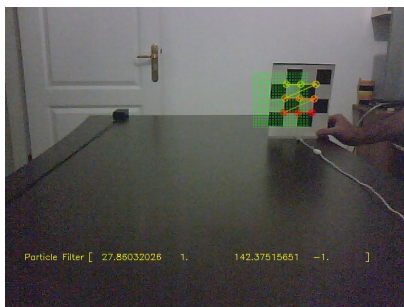
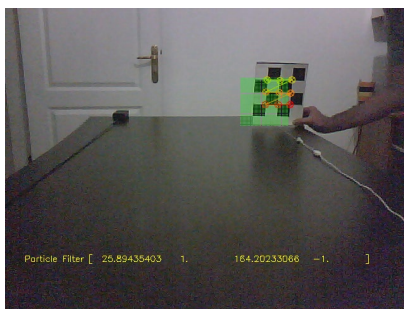
```

```

cv.ShowImage('Camera', frame)

# handle events
k = cv.WaitKey(40)
if k == "t":
    cv.SaveImage('snap-' + str(snap_no) + '.jpg', frame)
    snap_no += 1
if k == 27: # ESC
    print 'ESC pressed. Exiting ...'
    break

```



Kaynaklar

<http://dl.dropbox.com/u/1570604/skfiles/campy/chessb-left.avi>

<http://dl.dropbox.com/u/1570604/skfiles/campy/chessb-right.avi>

S. Marsland, Machine Learning: An Algorithmic Perspective, CRC Press, 2009.

S. Thrun, W. Burgard, and D. Fox, Probabilistic Robotics, MIT Press, Cambridge, MA, 2005

C. Bishop Pattern Recognition and Machine Learning , 2006.

Rabiner L. R. , A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition, Proceedings of IEEE vol. 77, no. 2, pp. 257-286, 1989.

Roweis S. and Z. Ghahramani, A Unifying Review of Linear Gaussian Models, Neural Computation 11(2):305-345, 1999.

Ghahramani Z., H. E. Hinton, Parameter Estimation for Linear Dynamical Systems, Technical Report CRG-TR-96-2

<ftp://ftp.cs.toronto.edu/pub/zoubin/tr96-2.ps.gz>], Department of Computer Science, University of Toronto, 1996.

Ghahramani Z., H. E. Hinton, Switching State Space Models, Technical Report CRG-TR-96-3, Dept. Comp. Sci., Univ. Toronto, 1996.

Shumway R., H. S. Stoffer Time series analysis and its applications 2nd Edition, New York, Springer, (Springer texts in statistics), 2000.

Jordan M. I. , C. Bishop An Introduction to Graphical Models, Not yet published, 2000.

Kalman R. E., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering, 82 (Series D): 35-45, 1960.

Kalman, R.E. and R.S. Bucy, New results in filtering and prediction theory, Trans. ASME J. Basic Eng., 83, 95-108, 1961.

Welling, M., The Kalman Filter - Lecture Tutorial, California Institute of Technology, 2008.

Lall, S., Modern Control 2 Lecture Notes, Stanford University, 2006.

Quantitative Economics Lecture Notebooks - <http://quant-econ.net/kalman.html>