

## MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 15

Onceki derslerde gradyan kavramini gorduk. Bu vektorun bilesenleri, 3 degiskenli bir fonksiyon icin

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z \rangle$$

idi, ki bu bilesenler  $f$ 'in tum kısmi turevlerini olusturuyordu. Gradyanlar kısmi turevleri paketlemenin, sunmanin yontemlerinden biriydi sadece.

Gradyanlari yaklasiksallama formulleri icin de kullanabiliyorduk, mesela eger  $x, y, z$ 'yi “birazcik” degistirince bunun  $f$  uzerindeki degisim etkisi  $\Delta f$ 'i [kabaca, niye kabaca oldugu altta] hesaplamak istiyorsak bunun gradyan formundaki hali

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z$$

Daha kısa olarak

$$= \nabla f \cdot \Delta \vec{r}$$

oluyordu, yani gradyan vektorunun, pozisyon vektorunun degisimi ile olan noktasal carpimi. Kısmi turevlerin tami tamina oltugu sey  $f$ 'in bir degiskenindeki degisime ne kadar hassas oldugudur, ve bu hassasligin ufak degisimler ile carpilip toplanmasi bize tum fonksiyondaki degisimi verir.

Ustteki yaklasiksallama “teget duzlem yaklasiksallamasi” olarak bilinir, bu arada, fonksiyonun yerine bir noktada teget duzlemi koyuyoruz, o noktada fonksiyon budur diyoruz, boylece fonksiyonun  $x, y, z$  degiskenlerine asagi yukari lineer olarak bagli oldugunu farz ediyoruz, o sebeple zaten degisimleri duz carpim sonrasi basit toplama maruz tutuyoruz.

Hatirlarsak,  $f(x, y, z) = c$  yuzeyine teget olan duzlemi bulmak icin normal vektore bakariz, biliyoruz ki normal vektorlerden biri fonksiyonun gradyan vektorudur, cunku gradyanin kesit seviyelerine diktir, ve fonksiyonun daha yuksek degerlerine, en yuksek artis yonune isaret etmektedir.

Bu noktada kulturel bir not eklemek istiyorum. Bunu belki haftalar once belirtmeliydim, daha iyi olurdu. Kısmi turevleri niye seviyoruz / kullaniyoruz? Onemli bir sebep onlari fizik icin cok faydali olmalari, etrafimizdaki dunyayi anlamamiza yardimci olmalari. Bu dunyadaki pek cok olus kısmi turevsel denklemler (partial differential equations -PDE-) ile tarif edilir, modellenir.

PDE'ler bilinmeyen bir fonksiyonun kısmi turevlerini kullanarak onlar arasında bir ilişki, fonksiyon kurar.

Mesela Isi Denklemi (Heat Equation) bunlardan biridir.

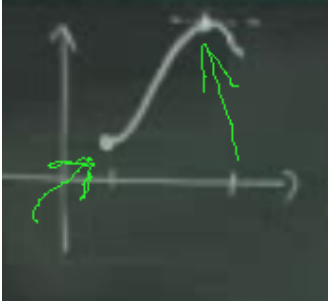
$$\frac{\partial f}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)$$

Bu denklemde cozmek, bulmak istedigimiz  $f$  fonksiyonudur, ve bu fonksiyon 4 degiskene baglidir:  $f(x, y, z, t)$ , ve temsil ettigi  $x, y, z$  pozisyonundaki bir noktanin  $t$  anindaki sicakligidir. PDE  $\partial f / \partial t$  ise bu fonksiyonun zamana gore nasil degistigini tarif eder.

Bu konuya ileride tekrar donecegiz.

Simdi diger konulara gecelim. Kritik noktalardan bahsetmistik, bu noktalarda kısmi turevler sifir degerlerindeydi. Ayrica eger noktalar (saddle points) vardi, ve ikinci turevleri kullanarak kritik noktanin min mi, maks mi, eger mi olduguna karar verebiliyorduk.

Fakat tum bunlarin min, maks bulmak icin yeterli olmadigini da gorduk, cunku min, maks sinir noktalarinda, fonksiyonun ta en uclarinda da olabiliyordu.



Ustteki grafikte gorulen sagdaki nokta kritik bir nokta, ve ikinci turevin bize lokal maks oldugunu soyleyecegi noktadir. Minimum ise soldaki noktadir, fonksiyonun sol sinirindadir, ve kritik nokta degildir. Birden fazla degisken icin de durum aynidir; bu durumlarda min, maks bulmak icin degiskenlerin olabilecekleri en az degere (mesela sifir) ya da en fazla (mesela sonsuzluk) cekmek gerekebilir. Yani zihnimizi acik tutup pek cok olasiligi gozden gecirmemiz, dusunmemiz gerekir.

Diferansiyeller

$f$ 'teki deęisimi soyle gosterdik

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

İlk bakista bu temsil, kısmi turevleri paketlemenin bir baska yolundan ibaret gozukuyor. Bunu da yapıyor muhakkak, ama daha fazlasi da var. Yaklasıksal formullerin formunu hatırlamanın iyi bir yolu, her değiskendeki varyasyonu diğerlerinkiyle ilintilendiriyoruz. Bir önemli fayda daha su, bu formulu aynı  $d_+$  ile bolerek, değisik sekillerdeki Zincirleme Kanunlarını ortaya cıkarabiliriz.

Mesela diyelim ki  $x, y, z$  dięer iki deęisken  $u, v$ 'ye baęli.

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$z = z(u, v)$$

Bu durumda  $f$ , aslında  $u, v$ 'nin bir fonksiyonu haline gelir. Ve bu noktada kendimize  $f$  fonksiyonu mesela “ $u$ 'nun değisimine ne kadar hassas” gibi bir soru sorabiliriz. Bunun cevabını Zincirleme Kanununu  $u$  üzerinden kullanarak cevaplayabiliriz.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$$

Ustteki turde bir işlem bize değisken değisimi yaptığımız zaman faydalı olur. Mesela kutupsal kordinat sisteminden  $x, y$  kordinat sistemine geçis yapabiliriz, ve Zincirleme Kanunu üzerinden kutupsal formdaki değisimin  $x, y$  dunyasındaki yansımalarını hesaplayabiliriz.

Sonraki konumuz bağımsız olmayan değiskenler, mesela  $x, y, z$ , değiskenleri  $g(x, y, z) = c$  gibi bir fonksiyon üzerinden birbiriyle bağlantılı. Her seferinde bu tur problemlerde istediğimiz değiskeni yalnız bırakıp, baska bir yere koyamıyoruz, o zaman min, maks bağlamında Lagrange Carpanları teknigini kullanıyoruz.

Bir diğer gordüğümüz teknik kısıtlanmış kısmi turevler teknigiydi. Diyelim ki yine elimizde  $f(x, y, z)$  var ve  $g(x, y, z) = c$  gibi bir bağlantı var. Bu durumda  $f$ 'in tek bir değisken değisip, diğerleri sabit iken (yani tipik kısmi turev işlemi) nasıl değiseceğini bulabilir miyim?

Bulamayabilirim, cunku, belki kısıtlama ibaresi  $g$  yuzunden geri kalan tüm

degiskenleri sabit tutamayacagim.

Ornek

Sunu bul

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_y$$

$y$  sabit

$z$  degisiyor

$$x = x(y, z)$$

Ustteki  $x$  ibaresini bu ornek icin biz tanimladik, herhangi baska bir kisitlama ibaresi  $g$  olabilirdi.

1) Diferansiyelleri Kullanarak

Genel ifade neydi?

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

Bunu ozel durumumuza nasil uygulariz?  $y$  sabit, o zaman  $dy = 0$ . Yani

$$df = f_x dx + f_z dz \quad (1)$$

Devam edelim, aslinda  $dx$ 'den de kurtulmak istiyoruz, cunku o bagimli bir degisken, her seyi  $z$  formunda gormek istiyoruz. Bunun icin once  $dg$ 'yi bulalim.

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0$$

Niye sifra esit? Cunku  $g$  kisitlama ibaresi sabitti.

$y$  degismiyorsa, o zaman ustteki  $dy$  de gidebilir. Kalanlar

$$dg = g_x dx + g_z dz = 0$$

$$dx = -\frac{g_z}{g_x} dz$$

Yani

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -\frac{g_z}{g_x}$$

O zaman iki üstteki formulu alıp, 1. formulde  $dx$  yerine koyarsak

$$df = \left(-f_x \frac{g_z}{g_x} + f_z\right) dz$$