

Cok Degiskenli Calculus - Ders 12

Zincirleme Kanunu hatirlayalim

$$\frac{dw}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_y \frac{dy}{dt} + w_z \frac{dz}{dt}$$

Bu formül, kısmi türevler üzerinden, w 'daki değişimin x, y, z 'deki değişime ne kadar “hassas” ne kadar “bağlı” olduğunu gösteriyor.

Şimdi üsttekini daha azaltılmış, özetli (compact, concise) bir formda söyle yazacağım.

$$= \nabla w \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Gradyan vektörü tüm kısmi türevlerin bir araya konmuş halidir.

$$\nabla w = \langle w_x, w_y, w_z \rangle$$

Tabii ki bunu söyleyince üstteki gradyan'ın x, y, z 'ye bağlı olduğunu da söylüyoruz, mesela w 'nın belli bir nokta x, y, z 'da gradyanını alabilirsiniz, o zaman her değişik x, y, z noktasında farklı bir vektör elde edersiniz, ki bu vektörlerin tamamına ileride “vektör alanı (vector field)” ismini vereceğiz. Devam edelim,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \rangle$$

Yani hız vektörü (velocity vector) $d\vec{r}/dt$ yukarıdaki gibi tanımlidir.

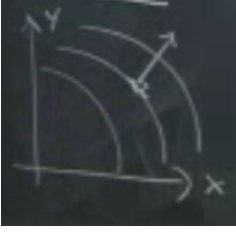
Bugünkü amacımız gradyan vektörünü anlamak, ve nerelerde kullanabileceğimizi incelemek. Gradyanları yaklaşıksal formüllerde kullanmak mümkündür, vs. Üstte gördüğümüz onun notasyonu.

Gradyanların belki de en “havalı” özellikleri şudur.

Teori

İddia ediyorum ki ∇w vektörü, $w =$ bir sabit ile elde edilecek kesit yüzeyine (level surface) her zaman diktir.

Eğer fonksiyonumun bir kontur grafini çizsem



gosterilen noktada hesaplanacak gradyan vektörü o noktadaki kontura diktir.

Ornek 1

Lineer bir w kullanalım.

$$w = a_1x + a_2y + a_3z$$

Gradyan nedir? Kismi turevleri alalım:

$$\nabla w = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

Konturlari nasıl elde ederim? $a_1x + a_2y + a_3z = c$ ki c bir sabittir, bu formulu tatmin eden tüm x, y, z degerleri bir düzlem olustururlar.

Bu düzlemin normalinin nasıl alınacağını biliyoruz, katsayılara bakarız, $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Bu vektörün gradyanla aynı çıktığına dikkat, ki normal vektör de düzleme diktir zaten. Aynı çıkmaları mantıklı.

Aslında bu örnek gradyanın dikliğini bir anlamda ispatlıyor, çünkü düzlem olmasa bile herhangi bir fonksiyonun birinci yaklaşıksallığı bir düzlem yaratır, o düzlemin normali, gradyanı eşitliği bizi yine gradyanın dikliğine götürür. Ama bu yeterince ikna edici olmadıysa başka bir örneğe bakabiliriz.

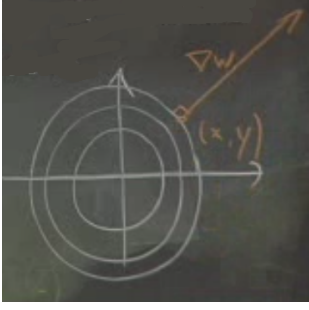
Ornek 2

$$w = x^2 + y^2$$

Bu fonksiyonun kesit seviyeleri, değişik yarıçaplara sahip dairelerdir, $x^2 + y^2 = c$ formundeki değişik c degerleri bu daireleri tanımlar.

Gradyan vektörü

$$\nabla w = \langle 2x, 2y \rangle$$



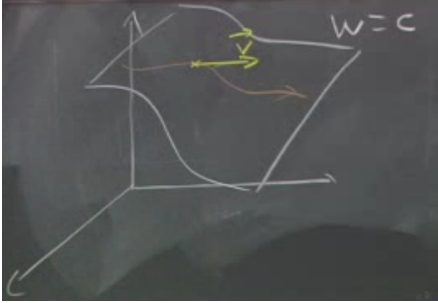
Secilen x, y noktasında ∇w gosterilmis. Bu vektorun x ve y eksenlerinde boyunun, basladigi noktaya gore olan x, y degerlerinin yaklasik iki kati olduguna dikkat, ki bu da $\langle 2x, 2y \rangle$ vektoru ile uyumlu.

Simdi gradyanin niye kesit egrilerine hep dik oldugunu ispatlayalim.

Ispat

Once kesit egrileri “uzerinde” hareket eden bir nokta hayal edecegiz. Bu nokta fonksiyonun sabit oldugu yerlerden geciyor demektir, cunku kontur uzerinde fonksiyon degeri hep aynidir.

Egri $\vec{r} = \vec{r}(t)$ hep $w = c$ uzerinde olacak. Resme bakalim, hayali bir kesit yuzeyi uzerinde bir egri bu (kirmizi renkli) ve bu egrinin uzerinde giden noktanin bir hizi olacak. Bu arada w mesela $w = x^2 + y^2$ belki, herhangi bir uc boyutlu fonksiyon. \vec{r} 'nin w ustunde gitmesi demek, \vec{r} ile w parametrize edilebilir demek, $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ ve onu kullanarak $w(\vec{r}(t)) = c$.



Iddia o ki,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

vektoru, kesit $w = c$ 'ye muhakkak teget olmalı, cunku hiz egriye teget, ve

egri kesit icinde. Bu arada w 'nin aslında $w(\vec{r}(t))$ oldugunu belirttik.

Bu sayede Zincirleme Kanununu kullanarak

$$\frac{dw(\vec{r})}{dt} = \nabla w \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dc}{dt}$$

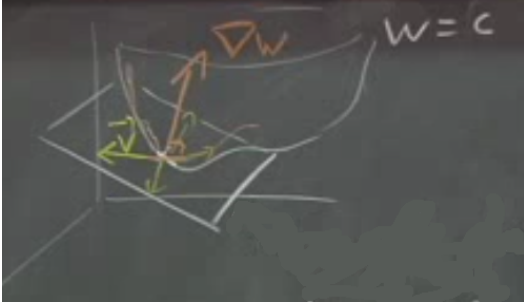
esitligini kurabiliriz. Noktasal carpim nereden geldi? Bu ifade w 'nin her kısmi turevinin alip, ona tekabül eden $\vec{r}(t)$ ogesinin turevi ile carpip sonuclarin toplanmasi demek. Sonuc Zincirleme Kanunu'ndaki goruntu olacaktır. Ayrica

$$= \nabla w \cdot \vec{v} = 0$$

Sifira esitligin sebebi $w = c$ olmasi ve sabitin turevi dc/dt sifir oldu.

Simdi sifir sonucundan ters yone gidelim: iki vektorun noktasal carpimi ne zaman sifir sonucu verir? Eger vektorler birbirine dik ise. Demek ki $\nabla w \perp \vec{v}$.

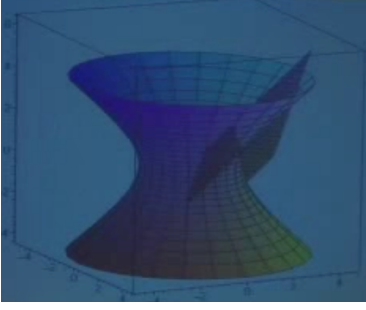
Hatta iddia ediyorum ki bu diklik $w = c$ uzerindeki her hareket (motion) icin gecerlidir. Yani \vec{v} , kesit yuzeyine teget olan herhangi bir vektor olabilir, ustteki diklik hep dogru olacaktır.



Bunun guzel bir uygulaması su, artık istedigimiz her şeyin teget düzlemini bulabiliriz.

Ornek

Yüzey $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ 'un $(2, 1, 1)$ noktasındaki teget düzlemini bul.



Resimde teget düzlem pek teget gibi değil, diğer grafiğin içine girmiş gibi duruyor, fakat problemin verdiği noktada düzlem teget.

Bu düzlemi nasıl bulacağız? Gradyanı hesaplayarak.

Kesit seviyesi $w = 4$ ve Yüzey $w = x^2 + y^2 - z^2$.

$$\nabla w = \langle 2x, 2y, -2z \rangle$$

Verilen nokta değerlerini bu gradyan vektörüne verirsek, sonuç $\langle 4, 2, -2 \rangle$. Bu sonuç yüzeye ya da teget düzleme normal (dik) olan vektörü verecek.

Bu normal vektörü kullanarak düzlemin formülünü bulabiliriz.

$$4x + 2y - 2z = ?$$

Soru işareti ne olur? $(2, 1, 1)$ noktasını formüle koyarsak, sonuç 8 çıkar.

$$4x + 2y - 2z = 8$$

Alternatif Yöntem

Aslında tüm bunları gradyan olmadan da yapabiliriz, bir diferansiyel ile işe başlayabiliriz

$$dw = 2xdx + 2ydy - 2zdz$$

$(2, 1, 1)$ noktasında

$$= 4dx + 4dy - 2dz$$

Yaklaşık olarak

$$\Delta w \approx 4\Delta x + 2\Delta y - 2\Delta z$$

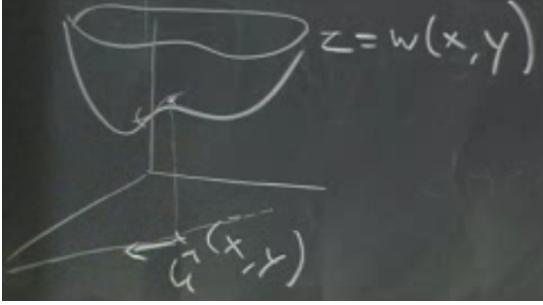
Ne zaman kesit yüzeyi, kontur üzerindeyiz? Eğer w 'de hiç değişim yok ise,

yani $\Delta w = 0$ ise. Bu arada ustteki yaklasiksalligin bir lineer yaklasiksallik oldugunu unutmayalim. $(2, 1, 1)$ noktasinda bu tegeti kullanmak istersek, $\Delta w = 0$ esitligi bize $4\Delta x + 2\Delta y - 2\Delta z$ teget duzlemini verecektir. Nasil? Δx degisimdir, teget duzlem uzerinde degisimi tanimlamak istiyorsak, $(2, 1, 1)$ 'den baslayarak bir yere gittigimizi dusunmemiz gerekir, ki mesela $x - 2$ degisimini yapabiliriz, vs. Tam formül

$$4(x - 2) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0$$

Yonsel Turevler (Directional Derivatives)

Elimdeki bir $w = w(x, y)$ formulunun kısmi turevini aldığım zaman $\partial w / \partial x$, $\partial w / \partial y$ ile mesela, bu turevler x-ekseni ya da y-ekseni yonunde degisim oldugu zaman w 'nun nasıl degistini olcerler. Peki baska yonlere gore, mesela bir birim vektor \hat{u} yonunde turev alinamaz mi? Cevap evet. Yonsel turevler bu ise yariyorlar.



Bir düz çizgi üzerindeki gidisata (trajectory) bakalım. s adlı bir parametreye bağlı bir pozisyon vektörü $\vec{r}(s)$ hayal edelim, ve $d\vec{r}/ds = \hat{u}$ olsun.

Niye üstte t yerine s kullandım? Bu hem mesafe için alisilagelmis bir kullanış, hem de aslında sonuç pek fark yaratmıyor [bir de hoca özellikle arada terminoloji degistererek öğrencilerin fazla ezbere öğrenmesinin önüne geçmek istiyor], çizgi boyunca birim hızda ilerliyorum, o zaman 1,2,3.. gibi zaman indeksleriyle (ya da 1.0,1.1,1.2,vs..) hesaplanabilecek pozisyon yerine, 1,2,3.. gibi indeksler de kullanabilirim. Şimdi parametrize ettiğim şey katedilen yol o zaman, s 'i daha önce eğri uzunluğu olarak gördük, benzer anlam, sadece bu sefer eğri yerine düz çizgi var, ama yine mesafe kavramını kullanıyoruz.

Devam edelim, o zaman dw/ds nedir? Bunu hesaplamak için Zincirleme Kanunu'nun özel bir durumunu kullanacağız.

Eger $\hat{u} = \langle a, b \rangle$ ise

$$x(s) = x_0 + as$$

$$y(s) = y_0 + bs$$

Bu formulleri w 'ye sokariz, sonra dw/ds 'i hesaplariz.

Yonsel turev soyle gosterilir.

$$\frac{dw}{ds} \Big|_{\hat{u}}$$

Daha once kısmi turevleri incelerken onlari geometrik olarak, x ve y eksenine paralel duzlemlerin fonksiyonu kesmesi olarak gormustuk. Yonsel turevler ise herhangi bir yondeki (daha dogrusu \hat{u} yonundeki) bir duzlemin fonksiyonu kesmesi olarak gorulebilir.



Tanim

$dw/ds|_{\hat{u}}$ = Bir grafigin (fonksiyonun) \hat{u} vektorunu iceren / ona paralel olan, ve dikey duzlem (vertical plane) kesilmesi ile elde edilen, o duzlemdek yansimasinin olusturdugu egrinin degisimi / egimi (slope).

Zincirleme Kanunun uygulanirsa

$$\frac{dw}{ds} = \nabla w \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \nabla w \cdot \hat{u}$$

Hatirlamamiz gereken formül o zaman

$$\frac{dw}{ds} \Big|_{\hat{u}} = \nabla w \cdot \hat{u}$$

Esitligin sag tarafi “gradyanin \hat{u} yonunde giden bilezeni, kısmi” olarak ta nitelenebilir.

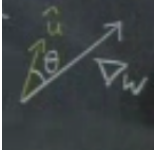
Kavramların birbiriyle alakasını iyice görmek için suna bakalım

Örnek

$$\begin{aligned}\frac{dw}{ds}|_{\hat{i}} &= \nabla w \cdot \hat{i} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}$$

Geometrik olarak

$$\begin{aligned}\frac{dw}{ds}|_{\hat{u}} &= \nabla w \cdot \hat{u} \\ &= |\nabla w| |\hat{u}| \cos(\theta) \\ \hat{u} \text{ birim vektör olduğuna göre } |\hat{u}| &= 1, \text{ formülden atılır} \\ &= |\nabla w| \cos(\theta)\end{aligned}$$



Bu ifade “gradyanın \hat{u} yönündeki bileşeni” hesabının bir diğer versiyonudur aslında.

Su soruyu soralım: hangi yöndeki değişim en büyüktür? $|\nabla w| \cos(\theta)$ ifadesinin en büyük olduğu yer $\cos(\theta) = 1$ olduğu zamandır, yani $\theta = 0$, ki bu durum $\hat{u} = \text{dir}(\nabla w)$, yani \hat{u} ’nın gradyan ile aynı yönde olduğu zamandır.

O zaman su yorumu da yapabiliriz, gradyan belli bir noktada fonksiyonun en çok artacağı yönü gösterir.

Peki $|\nabla w|$, yani ∇w ’nın büyüklüğü neye esittir?

$$|\nabla w| = \frac{dw}{ds}|_{\hat{u}=\text{dir}(\nabla w)}$$

En hızlı düşüş (azalış) hangi yöndedir? En fazla artışın tam tersi yönünde.

Yani $\min dw/ds|_{\hat{u}}$ için $\cos(\theta) = -1$ olmalıdır, yani $\theta = 180^\circ$, $\hat{u} = -\nabla w$ yönünde olduğu zaman.

Peki su ne zaman dogrudur?

$$\frac{dw}{ds}|_{\hat{u}} = 0$$

Yani fonksiyon hangi yonde degismez?

Bunun icin $\cos(\theta) = 0$ olmalidir, ki bu $\theta = 90^0$ oldugu zamandır. Yani $\hat{u} \perp \nabla w$ ise. Bunu anlamannin bir diger yolu, hic degisimin olmadigi yonun kesit yuzeyine teget oldugudur, bu yuzeyde w hic degismedigine gore degisim olmaz, degisim yoksa, biz de teget hareket ediyoruz demektir.