

PDE - Ders 1

Konumuz Kismi Turevsel Denklemler (partial differential equations -PDE-). Bu dersin on gerekliliklerinden en onemlisi normal diferansiyel denklemlerdir (ordinary differential equations -ODE-), cunku pek cok PDE'yi cozmenin teknigi onlari bir ODE sistemine indirgemekten geciyor. Yani PDE cozmek icin ODE cozme tekniklerini de bilmek gerekiyor. Bir diger gerekli bilgi Lineer Cebir dersi.

Bu dersin ana amaci, bir muhendislik dersi olarak, denklem cozmek, ve pek cok denklemin cikis noktasini fiziksel problemler. Mesela sicaklik yayilmasi (heat diffusion), dalga hareketi (wave motion), titreten hucre zarini (vibrating membrane) gibi. Fakat PDE kavrami finansta bile ortaya cikabilen bir kavram, mesela Black-Sholes denklemlerinde oldugu gibi.

Yani dersimiz cok teori odakli olmayacak, bazi ispatlardan bahsedecegiz, ama onun haricinde teori uzerinde fazla durmayacagiz.

PDE nedir? Ilk once ODE tanimindan baslayalim.

$$y = y(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Baslangic sartlari

$$y(0) = y_0$$

Cozum

$$y = y_0 e^x$$

Bu bir ODE cunku sadece bir tane bagimsiz degisken var (x), ve bir tane bagimli degisken var (y).

PDE ise icinde kismi turevleri, ve bir veya *birden fazla* bagimsiz degiskeni barindiran bir denklemdir.

Eger gunes etrafındaki yorungeleri temsil etmek istiyorsanız gezegenleri boyutsuz parçacıklar gibi kabul ederek ODE'ler ile temsil etmek yeterli olabilir, ama diğer problemlerde daha fazla bağımsız değişken gerekeceği için ODE yetmez, mesela zaman, cismin 3D uzaydaki boyutları gibi.

Mesela bir PDE

$$u = u(x, y)$$

Cogunlukla problem taniminin ilk basinda fonksiyonel iliskiyi hemen goster-mek iyi olur, mesela ustte bagimsiz degiskenler x, y , ve u bu iki degiskene bagimli. Devam edelim PDE soyle olsun

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cos(y) \frac{\partial u}{\partial y} + 3 = 0$$

Bir PDE problemine cogunlukla ek olarak sinir kosullari (boundary condition -BC-) ve baslangic kosullari (initial conditions -IC-) eklemek de gerekir.

Kismi Turev nedir?

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{u(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Yani bir fonksiyonun kismi turevini almak istedigimiz degisken haricinde tum diger degiskenlerinin sabit tutuldugu bir durum.

Ornek

$$u = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2x_1 + \sin(x_2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 \cos(x_2)$$

Notasyon

Cogunlukla kismi turevler 3 farkli sekilde gosteriliyor.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x \equiv \partial_x u$$

Ustte soldaki tanimi gorduk, bazen ortadaki de tercih edilebiliyor, ya da bazen en sagdaki.

PDE Derecesi

Bir PDE'nin derecesi, o denklemdaki kismi turevlerin en yuksek dereceli

olanin derecesi neyse o'dur.

Mesela

$$u_{xxx} + u_y = 5$$

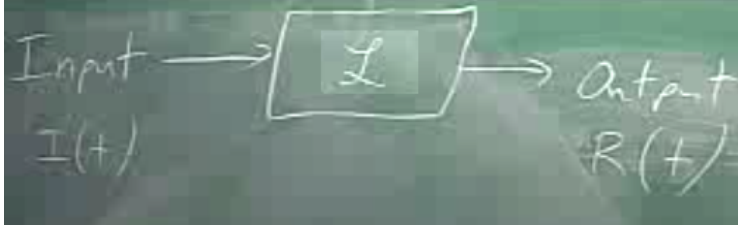
derecesi 3. Ayni zamanda bu lineer ve homojen olmayan (inhomogeneous) bir PDE. Bu son iki kavrami birazdan tanımlayacağım.

Ornek

$$(u_{xx})^2 + u_x u_y = u$$

Bu 2. derece. Bu bazı insanların kafasını karıştırıyor, çünkü u_{xx} 'in karesi var. Bu aynı zamanda homojen, ve gayri lineer. Bu dersteki çoğu PDE lineer olacak.

Lineer ve gayri lineerlikten bahsetmişken, sunu ekleyelim.



Şimdi diyelim ki bir girdi (input) fonksiyonu $I(t)$ bir işleme giriyor (L operatörü) ve çıktı (output) olarak $R(t)$ çıkıyor. Yani sistem

$$R = \mathcal{L} I$$

Bir lineer sistemde eğer girdiyi iki ile çarparsanız, çıktı da iki katına çıkar. O zaman kurallar

1. $\mathcal{L}(\alpha I) = \alpha \mathcal{L}(I)$, ki α bir sabit.
2. $\mathcal{L}(I_1 + I_2) = \mathcal{L}(I_1) + \mathcal{L}(I_2)$, ki buna üst üste eklenebilme (superposition) prensibi deniyor. Bu prensibi bu dersteki çoğu PDE'yi çözmek için kullanacağız. Bir lineer sistem varsa çoğu zaman arka planda bir yerlerde üst üste eklenebilme prensibi geziniyordur.

Diyelim ki PDE'nizi şöyle yazdınız

$$\mathcal{L}u = f(\vec{x})$$

Burada u bagimli degisken, \vec{x} bir vektor, $\vec{x} \in \Re^n$, ve bu vektorun icinde birden fazla degisken var, bu degiskenlerin hepsi bagimsiz.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1, \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Bu denkleme benzer bir diger denklem lineer cebirdeki $A\vec{x} = \vec{b}$ denklemdir. PDE sisteminde de cevabini aradigimiz, lineer cebir sisteminde “ A ile carpilip b sonucunu verecek \vec{x} hangisidir?” sorusuna benzer bir sekilde “ \mathcal{L} operatoru uygulanip $f(\vec{x})$ sonucunu verecek u hangisidir?” sorusudur.

Bu analogiden devam etmek gerekirse, belli bir noktada u ’nun icinde oldugu “fonksiyon uzayi” hakkında dusunmemiz gerekebilir, \vec{x} ’in icinde oldugu \Re^n uzayi gibi. Lineer cebir durumunda operatorun ozelliklerine bakilir, mesela “ b ’nin icinde oldugu ve A operatoru uygulanip hic sonuc alinamayacak uzayin belli kisimlari var midir?” gibi sorularla ugrasilabilir, bunlar A ’nin “ulasamadigi yerlerdir” vs. PDE’deki \mathcal{L} operatoru icin de benzer sorular sorulabilir.

Yani lineer cebirle pek cok kavram PDE dunyasina benziyor, orada vektor uzayi var, burada fonksiyon uzayi var. Yani bir analogi olarak bu benzerligi aklimizda tutmamiz faydali.

Bir operator su sekilde de olabilir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, u, \dots\right)$$

Yani operator kısmi turevlere ve hatta u ’nun kendisine de bagimli olabilir.

Eger elimizde gayri lineer bir PDE var ise, basimiz dertte demektir. Boyle bir sistemi cozmek icin cogunlukla sayisal cozumlere basvurmak gerekir. Eger lineer ise cozumde bayagi ilerlemek mumkundur.

Lineerlik

Bir operator ve onun tanimladigi bir ust uste eklenebilme durumu dusunelim

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \mathcal{L}u_1 + \alpha_2 \mathcal{L}u_2$$

ki α_1, α_2 birer tekil sayidir (scalar), ya reel, ya da kompleks.

Ornek

Birazdan bakacagimiz denklem dalga denklemi. Orada

$$u_{tt} - c^2 u_x = 0$$

Bu denklemi

$$\mathcal{L}u = 0$$

sekinde yazabiliriz ki \mathcal{L} soyle tanimli olacaktir

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0$$

c bir sabittir.

Simdi diyelim ki su denklemi cozmemiz lazim

$$\mathcal{L}u = f$$

ki

$$\mathcal{L} : V \rightarrow V$$

Yani, \mathcal{L} bir vektor uzayini bir digerine eslemekte (map), ve yine diyelim ki bu uzaylar birer Hilbert Uzayi (bunun anlamina simdi bilmemiz gerekmiyor, ileride bu konuya donecegiz, bu kelimeyi soyle bir ortaya atmak istedim).

Yani sordugumuz Hilbert Uzayi V 'de bir f 'e esleyecek bir u fonksiyonu olup olmadigi. Bu arada tipik bir Hilbert Uzayi mesela kare alip bir sinir bolgesinde (boundary domain) entegre edince elde edilen sonlu (finite) bir sonuclarin olusturdugu uzay. Yani "derli toplu" fonksiyonlar bir anlamda, absurt sonuclar vermeyen turden, sonsuzluga dogru patlayip giden turden olanlari degil.

Faraziyeve devam edelim, diyelim ki V icinde bir baz (basis) var. Baz nedir? Lineer cebirden hatirlayalim, mesela uc boyutlu Oklidsel (Euclidian) uzayi \mathbb{R}^3 .



$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Bu uzaydaki herhangi bir vektor \vec{r} ustteki uc baz vektoru kullanilarak parcalarina ayirilabilir, ya da, onlarin bir lineer kombinasyonu olarak gosterilebilir. Mesela

$$\vec{r} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

Bu uc vektorun bu uzay icin bir “baz olusturdugu” soylenebilir, cunku bu uzaydaki her vektor bu uc vektorun bir kombinasyonu olarak temsil edilebilir. Dikkat edelim, iki baz vektor yeterli olmazdi, dort taneye gerek yok. Tami tamina uc tane vektor bu uzayin bazini olusturuyor.

Bu sonlu (finite) miktarda bir uzay, herhangi bir vektörü tanımlamak için sonlu miktarda baz vektörü yeterli. Sonsuz boyutlu bir uzay da olabilirdi, o zaman herhangi bir fonksiyonu tanımlamak için sonsuz tane baz vektörü gerekirdi. Mesela Fourier Serilerini düşünelim

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \phi_i(x)$$

ki baz fonksiyonlar $\left\{ \phi_i(x) \right\}_{i=1}^{\infty}$.

Bu fonksiyonların her biri trigonometrik fonksiyonlar olabilir (cos, sin) gibi, o zaman seri Fourier Serisi olur. Her halukarda, yukarıdaki tanımla diyoruz ki belli (unique) α değerleri var ki, o değerleri zaten önceden bilinen baz fonksiyonları ile carpip toplayarak u 'yu oluşturabiliyoruz.

Eğer lineer operatörümüzü hatırlarsak

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \mathcal{L}u_1 + \alpha_2 \mathcal{L}u_2$$

Bu operatör herhangi iki katsayıyı kullanıyordu, fakat iki üstteki sonsuz tane toplamı da içerecek şekilde genişletilebilir, ve baz kavramı ile üst üste eklenbilme kavramının arasındaki alakayı gösterir.

Diyelim ki \mathcal{L} 'nin her baz vektörünü nasıl esledigini biliyoruz,

$$\mathcal{L}\phi_i = -\lambda_i \phi_i$$

Üstteki ifade ϕ 'in L 'in özfonksiyonu olduğunu söylüyor aynı zamanda. Eğer alttaki acilimi yaparsak, ki bunu yapabiliriz çünkü ϕ 'ler bazdırlar,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= \mathcal{L}\left(\sum_i \alpha_i \phi_i(x)\right) = \sum_i \alpha_i \left(\mathcal{L}\phi_i\right) \\ &= -\sum_i \alpha_i \lambda_i \phi_i \end{aligned}$$

Bir operatörün herhangi bir baz üzerinde nasıl işlem yaptığını anladığımız anda, o zaman \mathcal{L} 'in herhangi bir u fonksiyonu üzerinde ne etki yaptığını bilebiliriz. Diğer bir deyişle bir uzayda sonsuz tane fonksiyon olabilir, ama biz operatörümüzün bazlara nasıl etki ettigini biliyorsak, o bazlarla oluşturulan tüm fonksiyonlara nasıl etki ettigini de biliyoruz demektir.

Tekrar belirtelim, bu sadece \mathcal{L} lineer bir operatör olduğu zaman mümkün.

Ornek

Klasik Burger denklemi

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

Denklemi

$$\mathcal{L}u = 0$$

olarak yazabiliriz, ki

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Bu gayri lineer

Ornek

$$u_{xx} + u_{yy} + \sin(u)$$

$$\mathcal{L}u = 0$$

$$\mathcal{L} = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \sin(\cdot)$$

Usttteki ilginc bir durum sinus fonksiyonun da ici bos halde, operator olarak kullanilmis olmasi. Operator taniminda bazen boyle nokta konuldugu oluyor, ki neyin uzerinde operasyon yapildigi anlasilsin diye, mesela ustteki soyle de gosteriliyor bazen

$$\mathcal{L} = \partial \cdot_{xx} + \partial \cdot_{yy} + \sin(\cdot)$$

Bu da gayri lineer cunku sin fonksiyonu lineer degil, yani

$$\sin(u_1 + u_2) \neq \sin(u_1) + \sin(u_2)$$

Lineerlik uzerinde cok duruyoruz cunku diferansiyel denklemimiz hakkında bilmemiz gereken en onemli bilgilerden / ipuclarindan biri bu, cunku denkleminin lineer ya da gayri lineer olmasi, bizi cok farkli cozum teknikleri kullanmaya itecek.

Bir diger onemli terim homojen (homogeneous), homojen olmayan (inhomogeneous) kavrami.

Homojenlik

Eger $u = 0$ bir cozum ise PDE homojendir.

Yani $\mathcal{L}u = f(\vec{x})$ denklem taniminda eger $f(\vec{x}) = 0$ ise PDE homojendir.

Ornek

$$u_{xx} + u_y^2 = xu$$

Denklem 2. derece, gayri lineer cunku bir kare var, ve homojen cunku $u = 0$ 'in bir cozum oldugunu gorebiliyoruz.

Ornek

$$u_x^2 + u_y = 6y \sin\left(\frac{x^3}{5}\right)$$

PDE 1. derece, gayri lineer, ve homojen degil.

Soru

Bagimsiz degiskenlere bagli bir lineer operator olabilir mi?

Cevap

Evet. Mesela $u = u(x, y)$, ve denklem $xu_x + u_y = u$.

Bu homojen bir denklem, ve $\mathcal{L}u = 0$ olarak gosterilebilen bir denklem, ve

$$\mathcal{L} = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - 1$$

ve goruldugu uzere operator taniminda bagimsiz degisken x var.

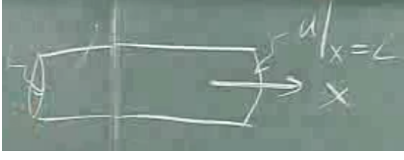
Bu lineer bir operator. Lineerligin bagli oldugu sey bagimli degiskenler, bagimsizlar degil, mesela ustteki x , x^3 gibi bir sey olabilirdi ama problem hala lineer olurdu.

Sinir kosullari da bu baglamda cok onemli, mesela diyelim ki tanimi lineer olan bir PDE var, ama problem tanimindaki sinir kosullari eger fonksiyonun gayri lineer bir kombinasyonunu iceriyorsa o zaman problemin tamami gayri lineer hale gelir.

Biraz formel olarak dusunursek, mesela tek boyutlu isi denklemi

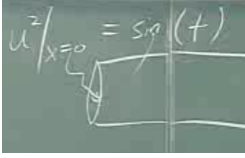
$$u_t = ku_{xx}$$

ki x mesafe belirten degisken, t zaman,



Bu denklem üstteki gibi bir borudaki isinin dağılımını, akisini gösteriyor olsun. $u|_{x=L}$ ile gösterilen bir sınır şartı, yani L uzunlugundaki borunun en ucunda (sağındaki) olması şart olan ısı seviyesi. Mesela bu şart $u|_{x=L} = T_2$ olsun, ki T_2 bir tekil sayı, 100° , 200° gibi. Şimdi homojenliğe ne oldu? Ana denklem homojen, ama homojenlik testini sınır şartına uyguladığımız zaman $0 = T_2$ gibi bir sonuç alıyoruz, ki bu absürt bir sonuç demek ki sınır şartı homojen değil. O zaman bu problemin tamamı homojen olamaz.

Benzer şekilde borunun öteki ucu için tanımlanan şart gayri lineer olsa



ki bu şart o uçtan bir tür sinusoidal bir enerji, ısı verildiği bir durumu tarif ediyor, o zaman ana denklem lineer olsa bile, sınır şartında gayri lineerlik olduğu için problemin tamamı gayri lineer olacaktır.

Aslında formel olarak sınır şartlarını alıp

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - k\partial_{xx}$$

operator tanımına bir şekilde dahil etmenin yolları var, ama biz bunlar çok ileri seviye teknikler, bu derste bu teknikleri görmeyeceğiz.

Baslangic Sartlari

Mesela yayılma (diffusion) denklemi $u(x, t)$ için $u(x, 0) = f(x)$, yani başlangic anında ısı dağılımının tüm boru boyunca hangi seviyelerde olduğunu (burada bu dağılım $f(x)$) belirtilmesi, başlangic şartını tanımlamak demektir.

Genel bir kural PDE'deki türev sayısı kadar şart tanımlanması gerektir. Mesela iki zaman türevi var ise, iki tane koşul gerekir, mesela $t = 0$ anındaki bir koşul, artı zamana göreve türevin $t = 0$ anındaki değeri, vs.

Soyle düşünebiliriz, u_{xx} 'in olduğu bir denklemde u elde etmek için iki kere

entegre edilir, ve bunun sonucu olarak iki tane entegrasyon sabiti ortaya cıkar, ki bu degerler herhangi bir sayı olabilir. O iki sabiti hesaplamak için iki tane kosul gerekecektir.

Genel kurali daha somutlastırırsak, “her bağımsız değısken için gereken sınır kosulu, o bağımsız değıskenin derecesine esittir”. Tabii bu genel bir kural, bazen gercek dünyadaki fizik problemlerinde bu gecerli olmayabiliyor, bir problem için duzgün sınır kosulları bulmak başlı başına bir sanat denebilir aslında.

Ornek

Laplace denklemi

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ki ∇^2 Laplacian operatoru olarak bilinir.

Ustteki turden bir denklem hic kaynak akım verilmeyen sonsuz uzayda elektrik potansiyeli alanını temsil ediyor olabilir.

Bu denklemin bir cozumun (ki sınır şartlarına dikkat edelim) su sekilde oldugunu gostermek kolaydır:

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Bu Potansiyel Teori’sinde tipik bir problem, bir alan değıskeni var, ve orijinden uzaklastıkca bu değısken azalıyor, bu azalma $1/\text{uzaklıgın karesi}$ oranında.

Bu “bir” cozum, fakat bir suru 2. derece turev var ortalıkta, o zaman x, y, z ’nin her türlü lineer fonksiyonu da aslında bir cozumdur. Mesela

$$u(\vec{x}) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$$

formulu de bir cozum olabilir. Niye? Herhangi bir lineer fonksiyonun iki kere turevini alırsak o fonksiyon yokolur.

Demek ki bu problemin tanımı eksik, sınır şartları da tanımlanması gerekli, aksi takdirde elde edilen sonuclar özgün olmayacak. Envai turden cozum mumkun.

Bu problem için tipik bir sınır kosulu $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} u = 0$ ifadesidir. Elektrik alan

ornegine donersek, elektrikalani sonsuzluga giderken sifira dusuyor demis oluyoruz. Bir sabite gidiyor da diyebilirdik, o da islerdi.

O tur bir sart

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

sonucunu saglardi, diger secenekleri elemis olurdu. Bu ornegi sinir kosullarinin onemini belirtmek icin sectik, bu kosullar ana denklemin kendisi kadar onemli.

Bir nokta daha:

Soyle bir ODE dusunelim

$$\frac{du}{dt} = 1$$

Entegre edince genel cozum

$$u(t) = t + c_1$$

Fakat PDE icin

$$u = u(x, y)$$

$$u_x = xy$$

Burada y bazli bir turev yok, basit bir PDE, cozmesi kolay, fakat unutmayin, entegre edince

$$u = \frac{1}{2}x^2y + [..]$$

Noktalarin oldugu yere ne gelecek? Bir sayi sabiti degil bir fonksiyon gelecek.

$$u = \frac{1}{2}x^2y + g(y)$$

cunku u , y 'nin bir fonksiyonu, o zaman elimize gecen y 'nin herhangi bir fonksiyonu olacak, ki bu fonksiyonun degeri sinir kosullari uzerinden tanimlanmis olmalidir. Bunu ozellikle vurgulamak istedim cunku insanlar bu detayi unutabiliyor.

Sinir kosulu nasil olabilir? Mesela $u(\alpha, y) = f(y)$ seklinde olabilir. Bu kosulu

yerine sokunca

$$\frac{1}{2}\alpha^2 y + g(y) = f(y)$$

Bu bize $g(y)$ 'in ne oldugunu soyler

$$g(y) = f(y) - \frac{1}{2}\alpha^2 y$$

ve bu ornek icin nihai cozum

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 y + f - \frac{1}{2}\alpha^2 y$$