

Fourier Transformu ve DFT

Unlu matematikci Fourier sunu kesfetmisti; periyodik olan bir fonksiyon $F(x)$ sinus ve cosinus terimlerinin toplami olarak temsil edilebilir.

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Bu fonksiyonda a ve b sayi degerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Onlari nasil buluruz?

a_k degerlerini bulmak icin iki tarafi $\cos kx$ ile carpip $\int_{-\pi}^{\pi}$ ile integralini alirsak,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos kx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos kx \, dx + \\ &\quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \sin nx \cos kx \, dx \end{aligned}$$

Esitligin sag tarafinda birinci terim $\cos(kx)$, $\sin(kx)$ 'e donusur. Fakat sinus fonksiyonu π ve $-\pi$ noktalarinda (ya da onlari k ile carpilmis 2π , -2π , vs. gibi katlarinda) sifir degerine sahip oldugu icin, bu terim tamamen sifir olacaktir, formulden atilabilir.

Ikinci terimde $\cos(nx) \cos(kx)$ 'in ustteki gibi integrali eger k ve n esit degilse, sifirdir. Sadece n ve k esit ise $a_k (\cos kx)^2$ degeri elde edilir. $(\cos kx)^2$ 'in ise ustteki sekilde integrali π sonucunu verir. Yani ikinci terimde olan, o sonsuza kadar giden koca toplam icinde sadece tek bir terim sag kalabilir.

Ucuncu terimde $\sin nx \cos kx$ carpiminin integrali her zaman sifir degerini dondurur. Bu terim de formulden atilir. Geri kalanlari tekrar duzenlersek,

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx \, dx$$

sonucunu elde ederiz. b_k icin benzer islemler, ama bu sefer $\sin kx$ ile carpilarak yapilrsa ve sonuc asagi yukari ayni.

$$b_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx \, dx$$

a_0 icin ise, $\cos kx$ ya da $\sin kx$ ile carpmaya gerek yok. Sadece iki tarafin integralini almak yeterli, a_0 'i istedigimiz icin $n = 0$ demektir, o zaman \sin ve \cos iceren hicbir terime ihtiyac yoktur.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx \\
&= a_0 x \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= a_0(\pi - (-\pi)) \\
&= 2\pi a_0
\end{aligned}$$

Yani

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$$

Kompleks Sayıları Kullanmak

a_0 , a_n ve b_n yerine tek bir c_n turu sayı kullanmak istersek, kompleks sayı sistemine geçmek lazım. O zaman ilk $F(x)$ formülünü de dönüştürmemiz lazım.

Trigonometrik fonksiyonlarda bilinen iki eşitlik şöyledir:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Bu formülde i değeri hayali sayı olarak bilinen $\sqrt{-1}$ değeridir.

$F(x)$ formülünü üstteki trigonometrik eşitliklere göre dönüştürelim.

$$\begin{aligned}
F(x) &= .. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\
&= .. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\
&= .. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{inx}}{2} + \frac{a_n e^{-inx}}{2} + \frac{b_n e^{inx}}{2i} - \frac{b_n e^{-inx}}{2i} \\
&= .. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{inx}}{2} + \frac{a_n e^{-inx}}{2} - \frac{i b_n e^{inx}}{2} + \frac{b_n e^{-inx}}{2}
\end{aligned}$$

Benzer terimleri, yani e^{inx} ve e^{-inx} terimlerini beraber yazalım:

$$= .. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n i}{2} e^{inx} + \frac{a_n + b_n i}{2} e^{-inx}$$

Bolumde olan $2i$ icindeki i nasil yukari cikabildi? Bu durum, hayali sayilarin bir ozelligiyle alakali: $1/i = -i$. Boylece ikinci ve dorduncu terimdeki arti ve eksi isaretleri degismis oldu. Daha kısa yazmak icin

$$c_{-n} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - b_n}{2}$$

olarak temsil edersek

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Ustteki c_{-n} ve c_n kullanimi bize ek bir avantaj sagliyor: $-inx$ ibaresindeki eksi degeri de cekip cikartabiliyoruz, eksi deger i 'den alinip n 'ye veriliyor yani, ve eksilik toplamdaki alt sinir olarak tanimlaniyor. Nasil olsa final formilde i ve n carpildigi icin sonuc degismiyecek, ve tek bir terim kullanabilecegiz. Ek olarak a_0 ise c_0 haline geldi.

Ustteki entegralli teknigin benzerini c_n icin de kullanabiliriz. Esitligin sag tarafindaki kisim ustteki formilde Σ toplamının acilmis halini kullanalim, ve iki tarafı da e^{-ikx} ile carpalım, sonra $-\pi$ ve π arasında integralini alalım:

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} c_0 e^{-ikx} dx +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_1 e^{ix} e^{-ikx} dx + ... +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{ikx} e^{-ikx} dx + ...$$

Toplamdaki tum terimleri gostermedik, onemli olan kisim zaten k'inci terim, yani e^{-ikx} ile carpilan e^{ikx} ifadesi. Bu carpım basit bir cebirsel islemlerle $e^{-ikx} e^{ikx} = e^{-ikx+ikx} = e^0 = 1$, yani bir degerine esit. Diger tum terimler eger integrali hesaplarsak gorebilecegimiz gibi sifira esit. Bir degerinin $-\pi$ ve π arasında integrali 2π .

O zaman

$$2\pi c_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} dx$$

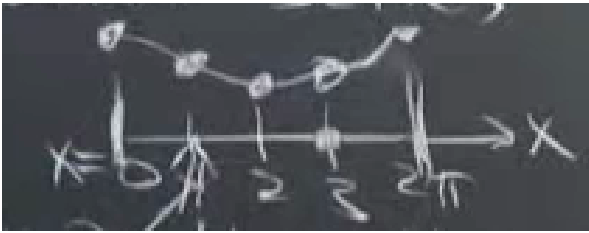
$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} dx$$

Sifira esitligin nasıl olduğunu cebirsel olarak gösterelim. Entegrali alalım,

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx \\ &= \frac{e^{i(n-k)x}}{i(n-k)} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= e^{in\pi} e^{-ik\pi} - e^{-in\pi} e^{ik\pi} = 0 \end{aligned}$$

DFT

Ayrık (discrete) olarak Fourier modellemesi yapmak istiyorsak, elimizde devamlı (continuous) $f(x)$ fonksiyonu olmayacak, bir $f(x)$ fonksiyonun belli noktalarındaki değerleri (olduğunu farzettığımız) verileri içeren bir *vektor* olacak. Bu vektörün N elemanı var diyelim. Fonksiyon periyodik olduğuna göre, x için 2π 'i N esit parçaya böleriz (tahtadan alınan resim altta). Bunu söylemekle fonksiyonun periyodunun N olduğunu farz etmiş oluyoruz, bir anlamda diyoruz ki eğer elimizde N tane daha nokta olsaydı, onlar elimizde olan değerlerle tipatip aynı olacaktı. Örneğimizde $N=4$ olsun.



Ayrıca $F(x)$ formülü biraz değişecek. Elimizde sonsuz tane nokta olmadığının göre

$$F(x) = \sum_{n=0}^N c_n e^{inx}$$

olması lazım. Şimdi, eğer bütün c_k değerlerini biliyor olsaydık, bu fonksiyon, $x=0$ noktasında hangi değere sahip olurdu?

$$f(0) = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = Y_0$$

Sonraki x degerleri $2\pi/N, 4\pi/N, ..$ icin (cunku her parca $2\pi/N$, bir sonraki parca $2\pi/N + 2\pi/N$, bir kere topluyoruz, yani parcayi 2 ile carpiyoruz, sonra 3 ile, vs) asagidaki gibi devam edecegiz, ama ondan once bir w degiskeni tanimlayalim, bu degiskeni $w = e^{2\pi i/N}$ olarak alalim. Boylece w^2 dedigimizde ustel islemlerde carpim islemi toplama islemine donusecegi icin $e^{4i\pi/N}$ degeri elde edilebilir, w^3 ile $e^{6i\pi/N}$ elde edilir, vs. Bu degerler bize lazim olacak degerler, w sayesinde formuller daha temiz olacak. $F(2\pi/N)$ icindeki 3. terim ($n = 2$) nedir? $c_n e^{inx} = c_2 e^{2i2\pi/N} = c_2 e^{4i\pi/N} = c_2 w^2$. O zaman

$$f(2\pi/N) = c_0 + wc_1 + w^2c_2 + w^3c_3 = Y_1$$

Devam edelim:

$$f(4\pi/N) = c_0 + w^2c_1 + w^4c_2 + w^6c_3 = Y_2$$

$$f(6\pi/N) = c_0 + w^3c_1 + w^6c_2 + w^9c_3 = Y_3$$

Elimizdeki dort toplam islemine bakinca, bu toplamalar ve carpimlari aslinda lineer cebir uzerinden matrisler ile gosterilebildigini farkedebiliriz.

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Her matris icin bir degisken kullanirsak

$$Y = WC$$

$F(x)$ 'ten (yani Y 'den) C 'ye gitmek istersek, elimizde Y_n degerleri var, w degerleri zaten sabittir, W bu sabit degere gore olusturulur, o zaman, c_n sayilarini nasil buluruz?

$$Y = WC$$

$$W^{-1}Y = W^{-1}WC$$

$$W^{-1}Y = C$$

Yani W matrisinin tersini (inverse) alıp, onu Y ile carpinca elimize C degerleri gececek.

Gunes Benekleri

Guneste periyodik olarak olan benekler, asagi yukari 11 senede bir ortaya cikarlar. Bu benekler uzun suredir gozlenmekte ve olculmektedir, siddetlerine gore, `sunspots.dat` adli dosyada bulabiliriz. Benek verisindeki periyodik olus, Fourier transformu ile analiz etmek icin uygun. Alttaki Python kodu w , W gibi kavramlari kullanarak, ustteki carpinimlarla C vektorunu bulacak. Bu vektor icindeki sayilar Fourier analizindeki belli frekanslara, harmoniklere tekabul ediyor olacaklar.

Bu C degerlerinden bazilari digerlerinden daha guclu bir etkidir, mesela 11 senelik periyot, C icinde daha guclu olarak cikacaktır, cikmalidir.

```
import scipy

tempdata = np.loadtxt("sunspots.dat")

year=tempdata[:,0]

Y=tempdata[:,1]

print len(Y), 'tane veri noktası var'

N = len(Y)

w = np.exp((2*np.pi*1j)/N)

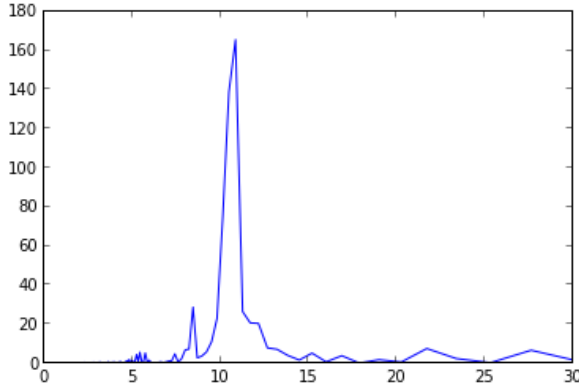
W = np.zeros((N,N), complex)
for i in range(N):
    for k in range(N):
        W[i,k] = w**(i*k)

C = np.dot(np.linalg.inv(W), Y)
305 tane veri noktası var
```

En yuksek periyotu gormek istersek, alttaki kodu kullanabiliriz [6].

```
n=len(Y); print 'n=',n
power = np.abs(C[0:int(n/2)])**2
nyquist = 1./2
freq = np.array(map(float, np.array(arange(0,int(n/2))))) / (n/2)*nyquist
print 'len(freq)=',len(freq)
period=1./freq;
plt.plot(period,power)
plt.xlim(0,30)
plt.savefig('fourier_02.png')
```

```
n= 305
len(freq)= 152
```



Sonucun 11 sene civarında olduğunu görebiliyoruz.

FFT

Bitirmeden önce FFT konusundan bahsedelim. **DFT** algoritması kodda görüldüğü gibi bir W matrisi ortaya çıkarır ve önce tersini alır, sonra bu ters ile bir çarpım işlemi yaparak C sonucunu üretir. O notasyonunu kullanırsak DFT'nin karmaşıklığı $O(N^2)$ 'dir. Bu iyi bir hızdır.

FFT algoritması üstteki çarpımın bazı özelliklerini kullanarak DFT'yi daha da hızlandırır ve $O(\frac{1}{2}N \log_2 N)$ hızına getirir. FFT'den bu makalede bahsetmeyeceğiz, aklımızda olsun, Scipy üzerinde `fft` çağırısı bu algoritmayı kullanır.

Eğer scipy kullanılmak istenirse, bu kutuphanenin `fft` çağırısı çok basit:

```
C = scipy.fft(Y)
print C[:3]

[ 15318.00000000 +0.j          1153.09522938 +866.74784921j
 -72.35158374+1347.22954505j]
```

Kaynaklar

- [1] Strang, G., OCW MIT Lecture #30, Computational Science and Engineering
- [2] Strang, G., Computational Science and Engineering, sf. 340-370
- [3] Chu, E., Discrete and Continuous Fourier Transforms
- [4] Kammler, D., A First Course in Fourier Analysis
- [5] Mattuck, A., OCW MIT Lecture #17-19, Differential Equations
- [6] www.mathworks.de/products/matlab/examples.html?file=/products/demos/shipping/matlab/sunspots.html