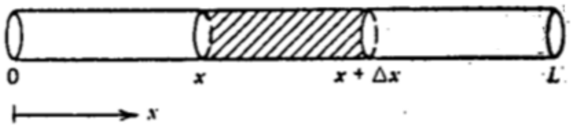
Isi Denklemini Turetmek

Bu denklemi turetmek icin “enerjinini muhafazasi (conservation of energy)” kuralini kullanacagiz. Bu muhafaza kuralini bir esitlige cevirecegiz, ve bu esitligi manipule ederek ortaya bir kismi turevsel denklem (PDE) cikaratacagiz. Baz aldigimiz fiziksel ortam bir metal cubuk, ki bu cubukta materyel yogunlugu her noktada ayni. Formul soyle;

$[x, x + \Delta x]$ icindeki net isi degisimi = Tanimlanan bolge sinirlarindaki net isi akisi + $[x, x + \Delta x]$ icinde uretilen isi miktari



$[x, x + \Delta x]$ icindeki toplam isiyi nasil hesaplariz? Eger $u(x, t)$ metal cubugun x noktasinda t anindaki isiyi veriyorsa, verilen kesit uzerinden bir entegral aliriz,

$$[x, x + \Delta x] \textit{ Icindeki Toplam Isi} = c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u(s, t) ds$$

Tanimlanan bolge icindeki net isi degimini ise alttaki ile hesaplariz, ustteki formulun zamana gore turevini aliriz.

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} c\rho A u(s, t) ds = c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u_t(s, t) ds$$

Turevin entegral icine nufuz ettigini goruyoruz, sabit olan $c\rho A$ ise disari cikartiliyor. Bu son ifade, enerji formulunun sol tarafi. Sag tarafi soyle ifade edilebilir

$$= kA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]A \int_x^{x+\Delta x} f(s, t) ds$$

Newton’un kurali isi akisinin isi fonksiyonunun uzakliksal gradyanina (spatial gradient) orantili oldugunu soyler. Uzakliksal gradyan u_x’tir. Uzakliksal gradyan, yani u_x, sonsuz kucuk boyutta yanyana iki parcacagin isi farkini verecektir. Bu farki, $[x, x + \Delta x]$’in iki ucunda alirsak, yani farklarin farkini bize gereken orantiyi verecektir. Sezgizel olarak bunun niye oldugunu anlamak icin fizik kaynaklarina basvurmak faydali olabilir. Formulun tamami soyle

$$c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u_t(s, t) ds = kA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]A \int_x^{x+\Delta x} f(s, t) ds \quad (1)$$

Bu noktada ustteki formulde entegrallerden kurtulmak istiyoruz. Ne yapariz? Ortalama Deger Teoremi’en ihtiyacimiz var, bu teoriyi Calculus’un Temel Teoremi yazisinda bulabilirsiniz. Teori ozetle eger $f(x)$ bir $[a, b]$ araliginda surekli ise o zaman en az bir ξ olmali, $a < \xi < b$ olacak sekilde ve

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

dogru olmalidir. Bu teoriyi (1)'e uygularsak,

$$c\rho A u_t(\xi_1, t)\Delta x = kA[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)] + Af(\xi_2, t)\Delta x$$

$$x < \xi < x + \Delta x$$

elde ederiz. ξ_1, ξ_2 yerine sadece ξ kullanilabilir, sebebini altta gorecegiz, sonra iki tarafi $c\rho A\Delta x$'e bolersek

$$u_t(\xi, t) = \frac{k}{c\rho}\Big[\frac{u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)}{\Delta x}\Big] + \frac{1}{c\rho} f(\xi, t)$$

Simdi

$$\Delta x \to 0$$

olsun, bu durumda ustteki buyuk parantez icindeki bolum bir kismi turev haline gelecektir, $\xi \to x$ olacaktir, cunku aralik oyle kuculuyor ki arada kalan ξ degeri sadece x olabilir.

$$u_t(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t) + F(x,t)$$

Ayrica

$$\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$$

$$F(x,t) = \frac{1}{c\rho} f(x,t)$$

esitliklerini kullandik.

Kaynaklar

Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Murlow, sf. 27