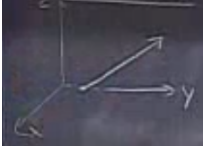


MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 1

Bir vektor 1) yon 2) buyukluk (magnitude) bilgisini tasiyan bir olcumdur.



Uc boyutlu bir ortamda x,y,z eksenleri uzerinden ustteki gibi bir vektor cizebiliriz. Bu vektor (ok istikametinde) bir yonu gosteriyor, bir buyuklugu da var. Vektoru bu eksenler icinde cizince, o vektoru her eksendeki yansimasina gore temsil edebiliriz demektir; x yonunde ne kadar degisim var, y yonunde ne kadar var, vs. gibi.

Sembolik olarak harfin uzerinde bir ok isareti, mesela \vec{A} gibi, bize elimizdeki degiskenin bir vektor oldugunu hatirlatmak icindir. Bazi kitaplarda ok yerine sembol sadece koyu renkli olarak gosterilmis olabilir, bunu tarihi sebepleri var, cunku matbaa baskisinde eskiden koyulugu (bold) yapmak kolaydi, ok isaretini yapmak zordu.

Bir vektoru birim vektorler uzerinden temsil etmek mumkundur, mesela

$$\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

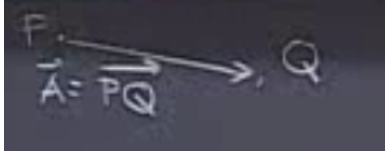
ki birim vektorler tek bir eksen uzerinde tek birimlik bir adimi temsil ederler. Mesela \hat{i} , x eksen uzerinde 1 adimlik bir buyukluktur, digerlerinde degisim sifirdir, $\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$. Notasyonun isleyip islemedigine bakalim, eger $\langle 2, 3, 5 \rangle$ vektorunu temsil etmek isteseydik, bunu $2 \cdot \langle 1, 0, 0 \rangle + 3 \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle + 5 \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle$ ile yapabiliriz. Toplam $\langle 2, 3, 5 \rangle$ verecekti.

Hazir bahsetmiskem, diger vektor notasyonu

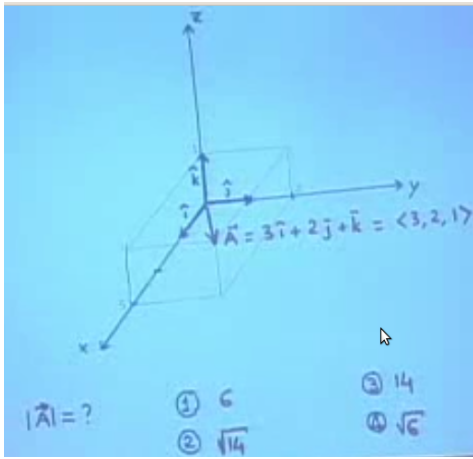
$$\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

Vektor buyuklugu $|\vec{A}|$ ile gosterilir, ki $|\cdot|$ isareti kesin deger (absolute value) notasyonu ile aynidir. Bu deger tek bir sayi (scalar) geri getirir. Vektor yonu, ki bu bazen $\text{dir}(\vec{A})$ ile gosterilir, vektorun birim vektor haline getirilmesi ile elde edilir, yani vektorun tum ogelerinin onun buyuklugune bolunmesi ile. Bu yapilınca vektor buyukluk bilgisi kaybolmus olur tabii, geriye sadece yon kalir. Bu bilgi, daha dogrusu, “sadece yon” verisi icerir, yoksa vektor oldugu sekliyle de yon bilgisini zaten icerir.

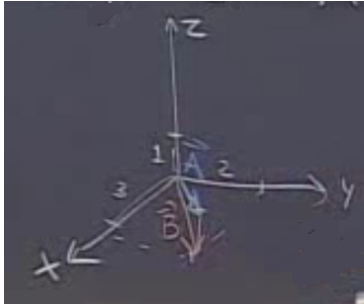
İki nokta P ve Q arasında bir vektörü \vec{PQ} olarak gösterebilirim. Fakat bu illa ki P 'den başlayıp Q 'ye gelmem gerektiği anlamına gelmez, aynı yonde aynı uzunlukta paralel bir başka vektor de \vec{PQ} vektörü olabilir. Bu derste pek çok vektörü orijin noktasından $(0,0,0)$ başlayarak çiziceğiz, fakat aslında bunu yapmak mecburi değil. Çizimsel basitlik için bunu yapacağız.



Şimdi alttaki grafiğe bakalım. Uzunluk nedir?

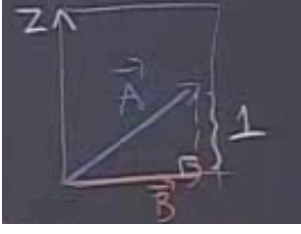


Yani $\vec{A} = \langle 3, 2, 1 \rangle$ 'in uzunluğu nedir? Bu uzunluğu bulmak için ikinci bir resme bakalım:



Burada \vec{A} 'nin yz düzlemine olan yansımalarını \vec{B} olarak düşünelim, \vec{A} sadece xy değerlerini taşıyor yani $\vec{B} = \langle 3, 2 \rangle$. Şimdi \vec{A} ve \vec{B} 'nin ikisinin de

uzerinde oldugu ve bir tarafı z eksenini olan bir kesiti hayal edelim. Bu kesiti ayırıp alttaki gibi cizebiliriz:



Goruldugu gibi \vec{A} ve \vec{B} arasında z baglamında 1 birimlik bir fark var, bu da $\vec{A} = \langle 3, 2, 1 \rangle$ vektorunu $\vec{B} = \langle 3, 2 \rangle$ olarak alirken dahil etmedigimiz 1 degeri.

Ustteki grafige bakarsak Pitagor teoresini kullanarak $|\vec{A}|$ 'yi bulabiliriz. $|\vec{A}|^2 = |\vec{B}|^2 + 1^2$. Demek ki problem $|\vec{B}|$ 'nin hesaplanmasina indirgendi, cunku onu bulursak ustteki formolden $|\vec{A}|$ 'yi da bulabiliriz. $|\vec{B}|$ nedir? Onu da xy du-zleminde / kesitinde Pitagor kullanarak bulabiliriz, $|\vec{B}|$ x ekseninde 3 birim, y ekseninde 2 birimlik adimlar iceriyor, Pitagoru kullanirsak

$$|\vec{B}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{|\vec{B}|^2 + 1^2} = \sqrt{13 + 1} = \sqrt{14}$$

Genel formül

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Vektorlerle baska ne yapabiliriz? Onlari ekleyebiliriz, ve olcekleyebiliriz.

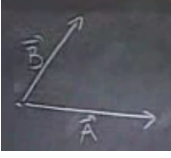
Ekleme

Elimizde \vec{A} ve \vec{B} var ise, $\vec{A} + \vec{B}$ hesabini yapabiliriz.

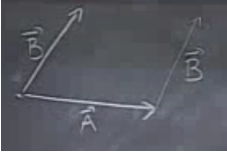
Bu noktada su yorumu eklemek gerekir, vektorler iki farkli dunyada yasarlar, bir tanesi geometrik dunya (sekilsel), digeri hesapsal dunya (sayilarla tem-silleri). Bu sebeple vektorler hakkındaki her sorunun iki cevabi vardir, biri geometrik digeri sayisal cevap.

Geometrik cevap ile baslayalım:

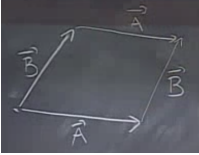
Diyelim ki iki vektoru ayni noktadan cikacak sekilde cizmistim



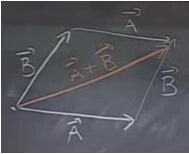
Toplami almak için \vec{B} 'yi alıp hareket ettiririm (başlangıç bitiş noktalarının önemli olmadığını söylemiştik), ve \vec{A} 'nin bittiği noktadan başlamasını sağlarım.



Bunun bir paralelogram ortaya çıkardığını görüyoruz.



Eğer bu paralelogramın çaprazını hesaplarsak / çizersek, işte bu çapraz $\vec{A} + \vec{B}$ olarak nitelenebilir.



Yani bu iki vektörün birbiriyle toplanması \vec{A} üzerinde, sonra \vec{B} üzerinde hareket etmekle eşdeğer. Ya da, paralelogramın üst kısmına bakarsak, önce \vec{B} sonra \vec{A} yönünde hareket etmekle eşdeğer ($\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ eşitliğini grafiksel olarak böylece doğrulamış olduk).

Sayısal olarak düşünersek

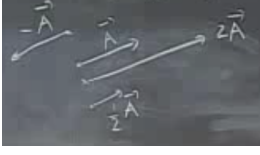
$$\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

$$\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

Tek Sayı İle Carpmak

Eger elimizde \vec{A} var ise, $2 \cdot \vec{A}$ ile bu vektörü aynı yönde iki kat daha fazla gitmesini sağlayabiliriz. Ya da yarısı, ya da eksi yönde, vs.



Simdi vektorler hakkında birkac yeni operasyon daha ogrenecegiz. Bu operasyonlar geometriye daha detayli sekilde baslayinca isimize yarayacak. İleride gorecegimiz gibi, geometri vektorler uzerinden yapılabilir, hatta pek cok acidan, geometri de calismak icin vektorlerin “en uygun dil” oldugu soylenebilir. Ozellikle fonksiyonlar konusuna gelince vektorler kullanmak, diger tur geometrik islemleri kullanmaktan daha faydali olacak.

Tum bunlar bir tur “dil”, bir seyin farkli bir sekillerde temsilinden ibaret, vektorler, fonksiyonlar, vs. gibi temsili objeler. Fakat notasyon fark yaratabiliyor, bazi seyleri kolaylastirip, temizlik getirebilmesi acisindan.

Noktasal Carpim

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1)$$

Onemli bir nokta: Sonuc bir tek sayi (scalar), bir vektor degil.

Peki bu operasyon niye kullanilir? Neye yarar? Aslinda biraz garip bir operasyon. Bu sorunun cevabini vermeden once belki de geometrik olarak ne yaptigini gostermek daha iyi olur. İddia ediyorum ki

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \quad (2)$$

ki θ iki vektorun arasindaki aci

Fakat dedigimiz gibi, bu operasyon cok suni bir sey gibi duruyor. Niye bu cetrefil operasyonu yapalim ki? Su sebepten: elde ettigimiz sonuc, $|\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$ esitligi uzerinden bize hem buyuklukler baglaminda, hem de acisal baglamda bir seyler soyluyor / bilgi veriyor. Ekstra bir bonus ise bu hesabin cok kolay yapılabilmesi, iki vektorun ogelerini teker teker birbiriyle carpinca noktasal carpim sonucunu elde ediyoruz.

Fakat noktasal carpim ve buyukluk, aci iceren formul arasinda ne baglanti

var? Matematikte bu tür bağlantıların ispatlanması gerekir. Üstteki eşitlik bir teoremdir (bu dersin ilk teorisi!). İspatlayalım. İçinde büyüklük ve açı içeren geometrik tanım ne anlama geliyor? Altındaki ifade üzerinden kontrol edelim. Eğer \vec{A} 'nin kendisi ile noktasal çarpımını alsak ne olurdu?

$$1) \vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 \cos(0) = |\vec{A}|^2$$

$\cos(0)$ çünkü vektörün kendisi ile noktasal çarpımını alıyoruz, vektörün kendisi ile arasındaki açı sıfır. Sıfırın \cos değeri 1. Peki diğer formu kullansaydık ne olacaktı? O zaman

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

elde edecektik, ki bu ifade $|\vec{A}|^2$ 'ye eşittir çünkü büyüklüğün tanımını hatırlarsak

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

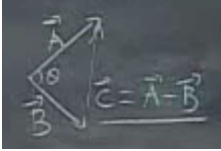
iki tarafın karesini alırsak

$$|\vec{A}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

bu ifadenin sağ tarafı noktasal çarpımdan elde ettiğimizle aynı.

2) Peki ya elimizde iki farklı vektör varsa?

İddiam şu ki formül 1 ve 2 arasındaki ilişkiye Kosinus Kanunu ile kurabiliriz. Bu kanunu yazalım



$$|\vec{C}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta)$$

Bu arada, eğer bu formülü

$$|\vec{C}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2$$

şeklinde yazsaydım Pitagor Formülü olurdu, ama burada Pitagor kullanamayız çünkü arada dik açı yok, o yüzden üçüncü terimi eklemek gerekti.

İspat

Soyle baslayalim

$$|\vec{C}|^2 = \vec{C} \cdot \vec{C}$$

Bunun dogru oldugunu biliyoruz, daha once ispatladik. \vec{C} 'nin ustteki tanimini yerine koyarsak

$$= (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})$$

Simdi bu carpimi acararak 4 terimin toplami haline getirmek isterdik, ama bunu yapabilir miyiz? Daha bilmiyoruz, noktasal carpim operasyonunu daha yeni gorduk, gizemli yeni bir operasyon bizim icin su anda. Fakat cevap evet, cunku formül 1'deki tanima bakarsak, acilim yapmak icin bize gerekli sekilde davranacagini gorebiliriz. O zaman

$$= \vec{A} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B}$$

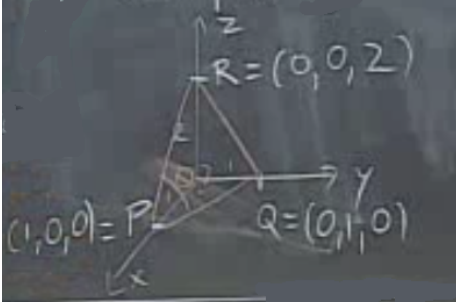
Ilk ve son terimin karsiligini hemen yazabiliriz, alttaki ilk iki terim onlar zaten

$$= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B}$$

Geride kalan en son terimi, son formül icindeki cos iceren formül ile karsilastiralim, aralarindaki tek fark, bir tarafta $2\vec{A} \cdot \vec{B}$ diger tarafta $2|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta)$ olmasi.. Ve formül 2'deki esitlikten bu iki terimin de aslinda birbirine esit oldugunu biliyoruz.

Uygulamalar

1) Uzunluklari ve acilari (ozellikle acilari) hesaplamak.



Diyelim ki sol alt kosedeki θ acisini hesaplamak istiyoruz.

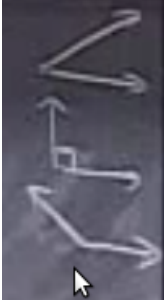
$$\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = |\vec{PQ}||\vec{PR}|\cos(\theta)$$

Bu formilde bilinmeyen θ , bilahere $\cos(\theta)$. Uzunluklari hesaplayabiliriz, formulu biliyoruz. Noktasal carpimlari da hesaplayabiliriz, onun da basit bir formulu var.

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{PR}}{|\vec{PQ}||\vec{PR}|} \\ &= \frac{\langle -1, 1, 0 \rangle \cdot \langle -1, 0, 2 \rangle}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}} \\ &= \frac{1 + 0 + 0}{\sqrt{2}\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 71.5^\circ$$

Burada $\vec{A} \cdot \vec{B}$ 'nin isaretine (arti mi eksi mi) dikkat cekelim.



Eger isaret > 0 ise, o zaman $\theta < 90^\circ$ (ustteki resimdeki 1. figur).

Eger isaret $= 0$ ise, o zaman $\theta = 90^\circ$ (ustteki resimdeki 2. figur).

Eger isaret < 0 ise, o zaman $\theta > 90^\circ$ (ustteki resimdeki 3. figur).

Yani noktasal carpim bir nevi iki vektorun ne kadar “beraber gittigini” olcuyor. Ustte 1. sekil asagi yukari ayni yone dogru giden iki vektor, ve isaretleri pozitif. 2. sekil dikine giden vektorler, alaka yok. Tersine gidenlerde isaret negatif.

2) Diklik Kontrolu

Diyelim ki size

$$x + 2y + 3z = 0$$

sekinde bir formül verdim. Sizce bu formül nasıl bir şekle sebebiyet verir?

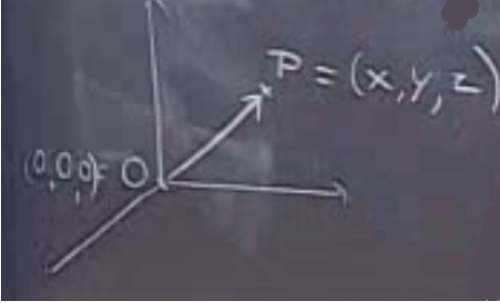
Cevaplar:

1. Bos küme (çözüm yok)
2. Tek bir nokta
3. Bir çizgi
4. Bir düzlem
5. Bir küre (sphere)
6. Üsttekilerin hiçbirisi
7. Bilmiyorum

Düşünün..

Doğru cevap: 4.

Bunun bir düzlem olduğunu nasıl görebiliriz? Vektörler burada yardımımıza yetişiyor. Bir \vec{OP} vektörü olduğunu düşünelim, ki bu vektörün öğeleri x, y, z olsun.



$x + 2y + 3z = 0$ ifadesine bakarsak, onu bir noktasal çarpım olarak temsil edebiliriz, bu çarpım \vec{OP} ile “bir başka vektörün” çarpımı olabilir. Bu diğer vektör $\vec{A} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ vektörü olabilir. O zaman şu koşul

$$x + 2y + 3z = 0$$

Aslında

$$\vec{OP} \cdot \vec{A} = 0$$

olarak ta temsil edilebilir.

Peki üstteki noktasal çarpımın sifıra esit olması ne demektir? Vektörler hakkındaki bilgilerimizi kullanırsak, sifıra esitlik bu iki vektörün birbirine dik olması anlamına gelir. O zaman düzlemin ne olduğu hakkında bir ek bilinc daha geliştirmiş olduk. Elde ettiğimiz orijin noktasından geçen bir düzlem ve \vec{A} 'ya dik.

Fakat elimize geçen özgün / tekil (unique) bir düzlem mi yoksa seçeneklerden sadece biri mi? Çünkü su akla gelebilir: eğer bir vektör başlangıç olarak herhangi bir yere konulabiliyorsa, o zaman herhangi bir yerden başlayabilecek $< 1, 2, 3 >$ 'ye dik olmak ne demektir?

İyi bir soru fakat sunu hatırlayalım: Başlangıç değişse de yön değişmiyor, yani farklı düzlemler olsa bile birbirlerine paralel olurlar. Ayrıca $x + 2y + 3z = 0$ formülüne iyi bakalım, bu formülü tatmin eden pek çok x, y, z değerlerinden birisi $0, 0, 0$ değeridir, yani orijin noktasıdır. O zaman bu düzlem orijinden kesinlikle geçmeli, ki bu mümkün düzlemleri tek bir seçeneğe indiriyor.

Düzlem formülü $ax + by + cz + d = 0$ diye gider, bizim formülde $d = 0$. Bu form orijinden geçme zorundadır.

Bu düzlemi grafiklemek için `plane.py` adlı programı kullanabilirsiniz.