

## Euler Esitligi

Bu yazımızda ilginç bir eşitlik olan Euler eşitliğini işleyeceğiz. Euler eşitliği şöyledir:

$$e^{\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

i sayısı irrasyonel bir sayıdır ve değeri -1'in kareköküdür.

Euler eşitliği önemli bir eşitliktir .

## Tekrar Bulmak

Yazımızın geri kalan kısmında bu tekniği gösterirken, onu "pişmiş hâlde" koyup bırakmamaya özen göstereceğiz. Bu sonucun nasıl "pişirileceğini" göreceğiz. Bunu yapmamızın sebebi, Cahit Arf hocamızın şu sözleridir:

"Ben öğrenciliğimde kitaptaki teoremlerin ispatlarını hiç okumaz, teoremin ifadesini yazdıktan sonra kitabı kapatıp onu problem gibi çözmeye çalışırdım. Bir anlamda onu yeniden keşfetmeyi denerdim. Bunda başarılı olamasam bile daha bilinçli öğrenmiş olurdum [1]".

O zaman, tekrar keşfetmeye başlayalım:

Bir yöntem, ustel (exponential) kanununu kullanmak. Bu kanun çok basit:  $e^a e^b = e^{a+b}$ . Yani bazı aynı olan ustel sayıların çarpımında ustel bolumler toplanır. Şimdi ispatın devamında ustel kanununu kullanmadan, çarpımı değişik bir yonden yapalım ve toplama esit cikip çıkmayacağına bakalım:

$$\begin{aligned} e^a e^b &= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i[\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)] \end{aligned}$$

Bu formülde gerçek değer olan birinci bolumun bir trigonometrik kisayol üzerinden  $\cos(a+b)$  olduğunu biliyoruz. Hayali olan kısmın da baska bir kisayol üzerinden  $\sin(a+b)$  olduğunu biliyoruz. Ustel kanunu kullansaydık elimize  $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$  sonucu gecekti ve bu sonucun acilimi ustteki formül ile aynı olacaktır. Demek ki Euler Esitligi dogru bir esitliktir.

Bir diger yöntem  $e^{\theta}$ ,  $\cos(\theta)$  ve  $\sin(\theta)$  fonksiyonlarının Taylor açılımını yapmaktır:

Cos açılımı:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$$

$$\cos'(\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos''(\theta) = -\cos(\theta)$$

$$\cos'''(\theta) = \sin(\theta)$$

$$\cos''''(\theta) = \cos(\theta)$$

$$\cos''''(\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \cos(a) + \cos'(a)(x-a) + \frac{\cos''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$a = 0$  için McLaurin serisi olur

$$\cos(\theta) \approx \cos(0) + \sin(0)(\theta-0) + \frac{-\cos(a)}{2!}(\theta-0)^2 + \dots$$

$$\cos(\theta) = \frac{0 \cdot \theta}{1!} + \frac{-1 \cdot \theta^2}{2!} + \frac{-1 \cdot \theta^3}{3!} + \dots$$

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

Sin açılımı

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$\cos(0) = 1, \sin(0) = 0$$

$$\sin'(\theta) = \cos(\theta), \sin''(\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\sin'''(\theta) = -\cos(\theta), \sin''''(\theta) = \sin(\theta)$$

$$\sin''''(\theta) = \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \sin(a) + \sin'(a)(x-a) + \frac{\sin''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$a = 0$  McLaurin serisi

$$\sin(\theta) = \sin(0) - \cos(0)(\theta - 0) + \frac{-\sin(0)}{2!}(\theta - 0)^2 + \frac{-\cos(0)}{3!}(\theta - 0)^3 + \dots$$

$$= 0 + \frac{1 \cdot \theta}{1!} + \frac{0 \cdot \theta^2}{2!} + \frac{-1 \cdot \theta^3}{3!} + \dots$$

$$= 0 + \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}$$

$e^\theta$  açılımı:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

$$e^0 = 1$$

$e^\theta$ 'nin her dereceden turevi yine kendisi olacaktır. O zaman

$$e^\theta = e^a + e^a(x - a) + \frac{e^a}{2!}(x - a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

$a = 0$  McLaurin serisi

$$e^\theta = e^0 + e^0(\theta - 0) + \frac{e^0}{2!}(\theta - 0)^2 + \frac{e^0}{3!}(\theta - 0)^3 + \dots$$

$$= 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

Sin ve cos fonksiyonlarının açılımı alt alta konulunca şöyle gözükecek...

$$\sin(\theta) \approx 0 + \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}$$

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

Hmm... Acaba bu iki açılımı toplarsak,  $e^\theta$ 'nin tanımına yaklaşabilir miyiz? Deneyelim.

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = 1 + \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta}{2!} - \frac{\theta}{3!} - \frac{\theta}{4!} + \frac{\theta}{5!} + \dots$$

Olmadı. Çünkü  $e^\theta$ 'nin açılımı yukarıda görüldüğü gibi.

İşaretlerde uyumsuzluk var.

Bu noktada Euler'in yaptığı en büyük buluş, irrasyonel sayı olan  $i$ 'yi bu karışıma koymaktır. İşaretleri tam uymayan önceki toplamın işaretlerinin eksi ve artı olma tekrarına bakarak,  $i$  sayısının üstlerinin yardımıyla sonuç denkleminde daha yaklaşacağını düşünmüştür. Tekrarı (pattern) görmek, matematikçilerin ana yeteneklerinden biridir.

Devam edelim,  $e^\theta$  yerine  $e^{i\theta}$ 'yi McLaurin serisi kullanarak açarsak, şunu elde ederiz:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!}$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{-\theta^2}{2!} + \frac{-i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!}$$

Bu son açılımın  $i$  içeren terimleri biraraya toplar, ve  $i$ 'yi bunlardan dışarı çekersek

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{-\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots)$$

Bu toplamın sol bölümündeki terimler  $\cos$ 'un açılımı, öteki de ( $i$  hariç)  $\sin$ 'in açılımına benzemiyor mu? Evet.

O zaman ispati tamamlamış olduk.