Log Lineer Modeller ve Kosulsal Rasgele Alanlar (Log Linear Models and Conditional Random Fields -CRF-)

Ders 2

Charles Elkan ders notlari

Elkan'in makine ogrenimi konusuna bakisi ilginc, ona gore makine ogrenimi bir bilgisayar bilim (computer science) konusudur, mesela altta islenen maksimum olurluk bilgisayar bilimdir.

Kosulsal Olurluk (Conditional Likelihood)

Diyelim ki elimizde egitim verisi olarak ikili $< x, y >$ veri noktalari var. O zaman y'nin x'e kosulsal olarak bagli (conditional on) bir dagilimi oldugunu soyleyebiliriz.

$$y \sim f(x; \theta)$$

Yani her x icin farkli bir y dagilimi ortaya cikabilir. Ve tum bu farkli dagilimlarin ortak noktasi θ parametresidir. Kosulsal olasilik yani soyle yazilabilir,

$$P(Y = y|X = x; \theta)$$

Usttekiler Y icin bir model ortaya koydu, peki elimizde X'in dagilimi icin bir olasilik modelimiz var mi? Cevap hayir. Niye? Dusunelim, $p(y, x)$ nedir ?

$$p(x, y) = p(x)p(y|x)$$

Ustte $p(y|x)$'i tanimlayacak (θ uzerinden) bir olasilik demeti / ailesi tanimladik, fakat elimizde $p(x)$ dagilimini verecek bir model yok, o zaman $p(x, y)$'yi tanimlayacak bir model de yok.

Fakat bu dunyanin sonu degil. Belki de Makine Ogrenimi bransinin bir slogani su olmali: "Ogrenmen gerekmeyen seyi ogrenme". Ustteki ornekte $p(y|x)$'i ogrenebiliriz, ama $p(x)$'i illa ogrenmemiz gerekir mi?

Siniflayici (classifier) ve takip edilen (supervised) ogrenim durumunu dusunursek, bize egitim amacli olarak $< x, y >$ ikili veri noktalari saglanacak. x kaynak veri, y tahmin edilecek (ya da basta egitim hedefi olan) etiket olacak. y icin bir model ortaya cikartiyoruz, cunku test zamaninda y olmayacak, fakat x hep olacak. Yani y'nin modellenmesi mecburi, cunku "genelleyerek" onun ne oldugunu bulacagiz, ama x hep verili.

Kosulsal Olurluk Maksimum Olurluk Prensibi

Egitim verisi $< x_1, y_1 >, ..., < x_n, y_n >$ icin, θ'yi soyle sec

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta} \prod_{i=1}^{n} p(y_i | x_i; \theta)$$

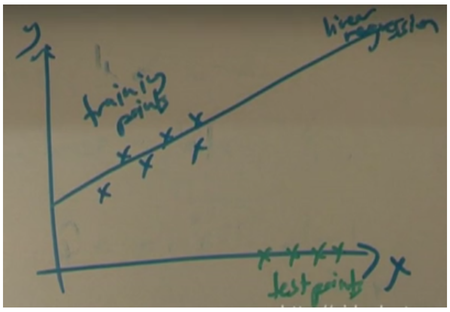
Normal maksimum olurlukta bilindigi gibi olasiliklarin carpimi maksimize edilir, burada maksimize ettigimiz "kosulsal" olasiliklarin carpimi.

Burada onemli bir soru su: bildigimiz gibi maksimum olurluk hesabi her veri noktasinin bir digerinden bagimsiz oldugunu farzeder [cunku her olurluk hesabini bir diger ile carpiyoruz, baska ek carpim, toplama, vs yapmiyoruz], bu faraziye dogru bir faraziye midir? Bu soru ve ona verilecek cevap cok onemli. Evet, eger egitim noktalari birbirinden bagimsiz degilse maksimum olurluk kullanmamaliyiz. Bagimsizligi da iyi tanimlamak gerekiyor tabii, eger ustteki durumda x_i *verildikten sonra* y_i'larin birbirinden bagimsiz olmasi yeterli.

Bu model klasik Istatistik'te cokca kullanilan bir yaklasimdir, hatta lineer regresyon'un temeli ustteki faraziyedir.

$$y = \alpha + \bar{\beta}\bar{x} + N(0, \sigma^2)$$

Bu standart lineer regresyon modeli, ve bu modelde her y ona tekabul eden x'e bagli, bu sayede x'ler biliniyorsa y'ler birbirinden kosulsal olarak bagimsiz hale geliyor, boylece x'ler birbirine bagimli olsa bile α ve β'nin bulunmasi mumkun oluyor.



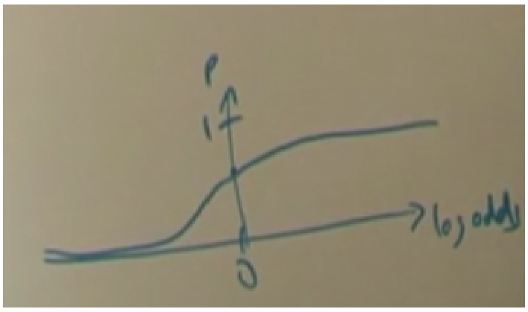
Ustteki resimde egitim noktalari (training points) mavi olsun, test noktalari yesil olsun (hemen altinda). Bazi Yapay Ogrenim yaklasimlari diyebilir ki egitim x'lerinin dagilimi test x'lerinin dagilimindan farkli, bu veri seti ogrenilemez (yani genellenemez, modellenemez). Fakat klasik Istatistik buna bakar ve der ki x'lerin verildigi durumda y'ler bagimsizdir, bu sekilde bir kosulsal model ogrenilebilir.

Lojistik Regresyon ayni sekilde isler (lojistik regresyon, log lineer modellerin ozel bir halidir, CRF'ler ayni sekilde). Burada da ogrenilen bir

$$p = p(y|x; \alpha, \beta)$$

modeli vardir ve y degerleri sadece 0 ve 1 olabilir. Tahmin edilen olasilik ise y'nin 1 olma olasiligidir. Bu model Rasgele Gradyan Cikisi ile egitilir [detaylar icin *Lojistik Regresyon* notlarimiza bakabilirsiniz].

$$log \frac{p}{1-p} = \alpha + \sum_j \beta_j x_j$$



p log sansinin monotonik bir fonksiyonudur, ve ters yonden bakarsak, log sans p'nin monotonik bir fonksiyonudur. Yani lineer bir fonksiyon (sag taraf) ne kadar buyurse, olasilik / log sans o kadar buyuyecektir. Bu buyume durumu mesela β_j katsayisini veri analizi baglaminda yorumlanabilir hale getirir. Diyelim ki β_4 katsayisi pozitif, o zaman diger tum sartlarin esit oldugu durumda (with all else being equal) x_4 ne kadar buyurse 1 olma olasiligi o kadar artar.

Lojistik modellerin onemli bazi avantajlari var, ki bu avantajlar log lineer modellere de sirayet ediyor (bu iyi).

1) Degiskenler arasi ilinti (correlation) probleme yol acmaz: Bu fayda aslinda daha once belirttigimiz x'lerin birbirine bagimli olabilmesi ile alakali. Bagimsizlik onsarti aranmadigi icin istedigimiz kadar x'i problemin uzerine atabiliriz, egitici algoritma bunlardan cikartabildigi kadar iyi bir model bulacaktir.

Kiyasla mesela Naive Bayes boyle degildir, eger bir NB siniflayicisini egitiyorsak, ve ogelerin (feature) arasinda ilinti var ise, siniflayicinin dogrulugu (accuracy) azalabilir.

2) LR ile "1 olma olasiligini", yani "bir sayisal skoru", elde ediyoruz, bu sadece 1/0 degerinden daha fazla bir bilgi demektir.

3) Bu skor, anlami olan bir olasiliksal degerdir: Sonucta SVM siniflayicilari da $-\infty$ ve $+\infty$ arasinda degerler dondururler, ve bu degerler siralama (ranking) amacli kullanilabilir, fakat olasilik matematigi acisindan anlami olan bir degerin olmasi bundan bile iyidir. Naive Bayes 0 ve 1 arasinda deger dondurebilir, fakat bu degerlerin de olasiliksal olarak aslinda anlami yoktur, pratikte goruldu ki bu degerler cok uc noktalarda, ya sifira cok yakin, ya bire cok yakin. Literaturde NB skorlarinin "iyi kalibre edilmis olmadigi" soylenir.

$X_1, ..., X_n$ test ornekleri ve tahmin edilen olasiliklar $P(Y=1|x_i) = v_i$ olsun. Diyelim ki $s = \sum_i v_i$ ve t sayisi $1, .., n$ tane ogenin icinden $y = 1$ degerini tasiyan ogelerin sayisi olsun. Ornek, elimizde 100 tane egitim noktasi var, bunlarin 60'i 1 degerinde. Bu durumda s yaklasik 60 olacaktir (rasgele gurultuyu hesaba katarsak tabii), yani $E[t] = s$ denebilecektir ve bu sadece eger olasiliklar iyi kalibre edilmisse soylenebilir.

4) Dengesiz egitim verisi kullanilabilir: pek cok egitim setinde mesela 1 degeri tasiyan

degerleri 0 degeri tasiyanlardan cok daha fazla. Lojistik regresyon bu tur veriyle rahatca calisabilir.

Ders 3

Lojistik regresyon icin log olurlugun (LCL) turevini almak lazim. Once basitlestirme amacli $\alpha = \beta_o$, ve $x_0 = 1$. O zaman log sansin eski hali (altta esitligin sol tarafi) soyle yazilabilir (sag taraf), daha derli toplu bir formul olur,

$$\alpha + \sum_j \beta_j x_j = \sum_{j=0}^{d} \beta_j x_j$$

Bulmak istedigim her j icin $\frac{d}{d\beta_j} LCL$ lazim

$$\frac{d}{d\beta_j} LCL = \sum_{i:y_i=1} \frac{d}{d\beta_j} \log p(1|..) + \sum_{i:y_i=0} \frac{d}{d\beta_j} \log p(0|..) \quad (3)$$

Eger ustteki bir bolumu p digerine $1-p$ dersem, yani soyle

$$= \sum_{i:y_i=1} \frac{d}{d\beta_j} \underbrace{\log p(1|..)}_{p} + \sum_{i:y_i=0} \frac{d}{d\beta_j} \underbrace{\log p(0|..)}_{1-p}$$

O zaman

$$= \sum_{i:y_i=1} \frac{d}{d\beta_j} \log p + \sum_{i:y_i=0} \frac{d}{d\beta_j} \log(1-p)$$

Biliyoruz ki

$$\frac{d}{d\beta_j} \log p = \frac{1}{p} \frac{d}{d\beta_j} p \quad (1)$$

$$\frac{d}{d\beta_j} \log(1-p) = \frac{1}{1-p} (-1) \frac{d}{d\beta_j} p \quad (2)$$

Ustteki son iki formulun her ikisinde de $d/d\beta_j p$ kismi olduguna dikkat.

Notasyon

$$e = \exp\,[-\sum_{j=0}^{n} \beta_j x_j]$$

$$p = \frac{1}{1+e}$$

$$1 - p = \frac{1 + e - 1}{1 + e} = \frac{e}{1 + e}$$

Simdi $d/d\beta_j p$'e donelim, ve p'nin ustteki gibi oldugundan hareketle,

$$\frac{d}{d\beta_j} p = (-1)(1+e)^{-2} \frac{d}{d\beta_j} e$$

$$= (-1)(1+e)^{-2}(e) \frac{d}{d\beta_j}(x_j)$$

$$= \frac{1}{1+e} \frac{e}{1+e} x_j = p(1-p)x_j$$

Son ifade kodlama icin oldukca uygun, $d/d\beta_j p$ hesabini yine icinde p iceren bir ifadeye bagladik, ayrica turev x_j ile orantili.

Bu hesapla aslinda (1) icindeki $d/d\beta_j p$ kismini hesaplamis olduk. Eger yerine koyarsak,

$$\frac{d}{d\beta_j} \log p = \frac{1}{p} p(1-p)x_j$$

p'ler iptal olur

$$= (1-p)x_j$$

Ayni sekilde (2) icin

$$\frac{d}{d\beta_j} \log(1-p) = \frac{1}{1-p}(-1)p(1-p)x_j$$

$$= -px_j$$

Ustteki turevler tek bir egitim veri noktasi icin. Tum egitim veri setinin turevi her noktanin turevlerinin toplami olacak, (3)'de goruldugu gibi.

$$\frac{d}{d\beta_j} LCL = \sum_{i:y_i=1} (1-p_i)x_{ij} + \sum_{i:y_i=0} -p_i x_{ij} \quad (4)$$

x_{ij} notasyonunda j, j^{inci} oge / ozellik anlamina geliyor. Simdi notasyonel bir numara kullanacagim,

$$= \sum_{tum\ i} (y_i - p_i)x_{ij}$$

Bunu niye yaptim? (4) formulunde esitligin sag tarafi, birinci terim icinde 1 sayisi var, sonraki terimde 1 yok. Eger 1 olup olmamasi yerine y_i kullanirsam, ki zaten 1'in olup olmamasi y_i'nin 1 olup olmamasina bagli, tek bir terimde isi halledebilirim. $y_i = 1$ oldugu zaman ustteki ifade $1 - p_i$ olacaktir, olmadigi zaman $-p_i$ olacaktir.

Eristigimiz sonucu analiz etmemiz gerekirse, nihai formul gayet basit ve temiz cikti.

[24:10] kalibrasyonla alakali bir yorum

Rasgele Gradyan Cikisi (Stochastic Gradient Ascent)

Fikir: turevi egitim noktasi basina hesapla, ve modeli hemen guncelle.

Egitim noktalari $< x, y >$ olarak gelsinler. Her nokta icin, ve her β_j icin

$$\frac{d}{d\beta_j} p(y|x;\beta) = g_j$$

hesapla.

$$\beta_j := \beta_j + \alpha g_j$$

Gradyanin ne oldugunu hatirlayalim, bir fonksiyonun maksimumuna "dogru" olan bir gidis yonunu gosterir, ve bu gidis yonu o fonksiyonu olusturan degiskenlerin (parcali turevleri) uzerinden belirtilir. O zaman elimizdeki gradyan o ic degiskenlerin maksimum yondeki degisim seklini bize tarif eder.

Algoritmanin tamami: alttaki formul icin

$$\frac{d}{d\beta_j} p(y|\bar{x};\bar{\beta}) = (y - p)x_j$$

Her x icin

- O anki modele gore p'yi hesapla

- Her $j = 0, .., d$ icin

  - $\beta_j := \beta_j + \alpha \underbrace{(y-p)x_j}_{kismi\ turev}$ hesapla

Peki metotun ismindeki "rasgele (stochastic)" tanimi nereden geliyor? Iyi bir soru bu cunku metotta rasgele sayi uretimi gibi seyler gormuyoruz. Cevap, metot yine de rasgele, cunku her noktayi ayri ayri isliyoruz, ve bu noktalarin egitim algoritmasini gelisi bir nevi "veriyi orneklemek" gibi sanki, ek olarak veriyi egitime almadan once rasgele sekilde karistirmak ta iyi olabilir.

Bazi Tavsiyeler (Heuristics)

1) Her ozellik (feature) x_j'i olceklemek, yani ayni ortalama (mean) ve varyansa sahip olacak sekilde tekrar ayarlamak. Yani mesela 0 ile 100 arasinda olabilecek "yas" gibi

bir ozelligi, 0 ve 1 arasinda degisen ozellikler ile ayni ortalama ve varyansa sahip olacak sekilde ayarlamak. Bunun sebebi guncelleme hesabindaki λ'nin tek bir sabit olmasi, ve bu sabit her j icin aynidir, o sebeple λ'nin her ogeye "ayni sekilde" uygulanabilmesi icin ogelerin birbirine yakin olmasi iyidir. Ek olarak, genellikle egitim verisinde 0 ile 1 arasinda ikisel turden ogeler vardir, o sebeple bu sekilde olmayan diger ogeleri 0 ve 1 arasinda cekmek daha uygun ve kolay olur.

2) Veriyi rasgele sekilde siralamak. Terminoloji: egitim veri seti uzerinden bir gecis yapmak bir "cag" (epoch) olarak bilinir.

3) λ'yi deneme / yanilma yontemi ile bulun (bu sabiti bulmanin sistemik bir yontemi yok). Belki verinin icinden alinan daha ufak bir orneklem uzerinde bu deneme / yanilma islemi yapilabilir.

4) Deneme yanilma islemini soyle yapabilirsiniz: buyuk bir λ ile ise baslarsiniz, ve her cagda λ degerini azaltabilirsiniz (mesela her cag sonunda 1/2 ile carparak).

Ders 4

Log Lineer Modeller

Bu modeller lojistik regresyonun yapiya sahip (structured) girdiler ve ciktilar icin genellenmis halidir. Lojistik regresyonda girdi $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ ve cikti $y \in 0, 1$ idi, yani cikti ikiseldi. Fakat biz bundan daha genel makine ogrenimi problemlerini cozmek istiyoruz, yani istedigimiz $x \in \mathbb{X}$, ki $\mathbb{X}$ herhangi bir uzay olabilmeli, ve $y \in \mathbb{Y}$ ki $\mathbb{Y}$ ayni sekilde herhangi bir uzay olabilmeli.

Mesela x bir cumle olabilmeli, diyelim ki $x =$ "he sat on the mat", tercumesi "adam paspasin uzerinde oturdu". Buna karsilik olan y ise mesela soyle olabilmeli, $y =$ "pronoun verb article noun", yani her kelimenin hangi gramer ogesi oldugunu gosteren bir ibare. Mesela "sat" yani oturmak, bir fiil (verb), "mat" paspas, bir isim (noun), ve y icinde gelen egitim verisinde bunlar olabilmeli (ustteki ornekte ikinci oge), sadece 0/1 degerleri degil.

Bu tabii ki takip edilen (supervised) bir egitim sekli olacak. Fakat dikkat bazi makine ogrenimi uygulamalarinda "cok siniftan gelen" ama tek bir deger vardir, mesela $y \in 1, 2, 3$ olabilir, 3 sinifli bir cikti yani. Bazen cikti gercek sayi (real number) olabilir, ama yine de tek bir y degeri vardir. Ustteki durum boyle degildir. Potansiyel olarak y'nin buyuklugu x ile birebir ayni bile olmayabilir. Bu tur bir karisik eslemeden bahsediyoruz. Tek sinirlamamiz $\mathbb{Y}$'nin sonlu (finite) olmasi.

Model soyle (notasyonu biraz degistirdik, β yerine w kullaniyoruz mesela, w modelin "agirliklarini (weights)" temsil ediyor.

$$p(y|x; w) = \frac{\exp\left[\sum_j w_j F_j(x, y)\right]}{Z(x, w)}$$

Yakindan bakarsak model LR modeline benziyor. Bir lineer fonksiyonun exp'si aliniyor ve bu deger olasilik hesabinda kullaniliyor. Ileride zaten gorecegiz ki LR ustteki yaklasimin bir "ozel durumu", yani ustteki model daha genel bir tanim.

Aklimiza bircok soru geliyor herhalde, mesela “Z nedir?” ya da “F_j nasil hesaplanir?” gibi. Z soyle tanimlanir

$$Z(x,w) = \sum_{y'} \exp\,[\sum_j w_j F_j(x,y')]$$

Tum y''lere bakiliyor, yani tum mumkun $\mathbb{Y}$ degerleri teker teker y' uzerinden toplamda kullaniliyor. $\mathbb{Y}$'nin sonlu olma faraziyesi burada onemli hale geliyor, toplami sonsuz bir kume uzerinden yapamayiz.

Z normalizasyon icin kullaniliyor, cunku olasilik teorisinde eger elimizde coklu bir hedef var ise, bu hedeflere olan olasilik degerlerinin toplami 1 olmalidir. Z iste bunu garantiler, bu sebeple bolen (denominator) bolumun (nominator) toplami olmalidir.

Her $F_j(x,y)$ bir ozellik fonksiyonudur (feature function). Niye? Cunku elimdeki x'ler illa bir vektor olmayabilir, yani x_j “vektorunu” alip w_j “vektoru” ile carpamam, bu sebeple once bir fonksiyon ile bir numerik deger uretmem gerekiyor. Kume olarak

$$F_J : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$$

Eger $F_j(x,y) > 0$ ve $w_i > 0$ ise, o zaman $F_j(x,y) = 0$'a kiyasla $p(y|x;w)$ artar. Sezgisel olarak tarif edersek ozellik fonksiyonun (OF) soyledigi sudur, eger agirlik pozitif ise OF'in degeri ne kadar buyurse elimizdeki y, x ile o kadar “uyumludur” (tabii ki belli bir ozellik yani j icin). Negatif ilinti bunun tam tersi olurdu.

Egitim w_j agirliklarini bulmamizi saglar. F onceden tanimlidir (yani egitime bile baslamadan once), bu fonksiyonun ne olacagi “secilir”. Secilirken tabii ki x, y arasindaki ilintiye gore fazla / az sonuc geri getirebilecek sekilde secilmelidir.

Kelime ornegine geri donersek, bir F soyle olabilir,

$F_{15}(x,y)$ = “eger ikinci kelimenin bas harfi buyuk ve ikinci etiket isim (noun)”. OF'ler reel degerlidir. Bunun ozel durumu 0/1 degeri veren OF'lerdir. Biraz onceki ornek mesela 0/1 donduruyor.

Ya da $F_{14}(x,y)$ diyelim ki soyle “ilk kelimenin bas harfi buyuk, ve ilk etiket bir isim”. Tahmin edebiliriz ki egitim setimizde ilk kelimesinin bas harfi buyuk *olan* ama o kelimesi isim olmayan pek cok ornek olacaktir. Bu durumda w_{14} kucuk olur.

Dedigimiz gibi F reel degeri olabilir, mesela

$$F_{16}(x,y) = lengh(y) - lengh(x)$$

yani bu fonksiyonda x'nin uzunlugunu y'nin uzunlugundan cikartiyoruz. Bu ne ise yarar? Diyelim ki otomatik tercume yapmasi icin bir yapay ogrenim programi yaziyoruz, x, y egitim noktalari birbirinin tercumesi olan Ingilizce/Fransizca cumleler. Cogunlukla Fransizca cumleler tekabul ettikleri Ingilizce cumlelerden cok daha uzun oluyorlar, yani ustteki cikarma cogunlukla pozitif sonuc verecek. Degisik bir acidan bakarsak, pozitif bir sonuc, bir tercumenin dogru oldugu yonunde bir isaret olarak kabul edilebilir, ve ustteki OF uzerinden egitim algoritmasi bunu kullanir. Egitim sonrasi w_{16} pozitif bir agirlik alacaktir.

Bir log lineer modelde (buna CRF'ler de dahil) ilk yapilan is probleminiz icin onemli olan OF'leri ortaya cikartmak.

F tanimlamanin degisik bir baska yolu:

$a(x)$ bir fonksiyon olsun. Her $v \in \mathbb{Y}$ icin

$$F_j(x, y) = a(x) I(y = v)$$

tanimlayalim.

$$p(y|x; w) = \frac{\exp \sum_j w_j F_j(x, y)}{Z}$$

Simdi lineer zincirli CRF konusuna bakalim. Yine $x \in \mathbb{X}$ ve $y \in \mathbb{Y}$. x bir girdi zinciri, y bir cikti zinciri ve en basit durumda x ile ayni uzunlukta. Konusma bolumlerini etiketlemek bu kategoriye dahil, ama bir diger uygulama kelimeyi arasina eksi isaretleri koyarak bolme (hyphenation).

Mesela girdi $x =$"beloved", cikti $y =$"00100000" cunku bu kelime "be-loved" olarak bolunur.

Bu uygulama icin bir OF

$$F_j(x, y) = \frac{kac\ tane\ 1\ var}{x\ uzunlugu}$$

$x =$"beloved", cikti $y =$"00100000" icin sonuc 1/7 olurdu.

Lineer zincir CRF icin hangi OF'lerin bazi sinirlari var.

$$F_j(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_i f_j(y_{i-1} y_i \bar{x} i)$$

ki sembol uzeri duz cizgiyi ($\bar{x}$ gibi) bu sefer bir sirali veri temsil etmek icin kullaniyorum)

Mesela

$$f_{18} = f_j(y_{i-1} y_i \bar{x} i) = "i = 2, y_{i-1} = 0, y_i = 1, x_1 x_2 = "as""$$

Mesela "async" kelimesi "a-sync" olarak bolumebilir, ve egitim setinde "async" ile "$y =$01..." gelirse ustteki OF bu bolunmeyi odullendirir / ogrenir.

Simdi CRF olmayan bir Lineer Model'e bakalim,

Mesela cok etiketli takip edilen ogrenim. "Cok etiketli" ne demektir? Dikkat, "cok sinifli (multi label)" degil, yani tek ogenin iki veya daha fazla deger arasindan birini secmesinden bahsetmiyoruz. Birde fazla etiket alabilmekten bahsediyoruz, mesela bir Internet sayfasi, bir veya daha fazla kategoriye ayni anda ait olabilir, mesela hem Spor, hem Is Dunyasi. Diyelim ki 10 mumkun etiket var, bir dokuman kac degisik sekilde etiketlenebilir?

$2^{10} = 1024$ sekilde (bu sayi, hesap bir kumenin kac degisik sekilde alt kumesi olabilir hesabini yansitiyor ayni zamanda, yani siralama onemli olmadan belli sayida ogenin kac degisik sekilde alt kumeleri olabilir sorusu). Bu buyuk bir rakam. Ve bu kadar cok olasilik var ise, egitim verisi tum kombinasyonlar icin ornek veri icermeyebilir. Fakat muhakkak algoritmamizin bu kombinasyonlari tahmin edebilmesini tercih ederiz.

Cozum? 10 degisik siniflayici kurarark bu problemi cozebiliriz (ayri ayri, tek basina tek sinifa bakilinca yeterli veri cikar herhalde), fakat bu sekilde "siniflararasi" iliskileri yakalayamayiz. Log lineer model yaklasiminda oyle bir ikisel (binary) OF yaratirsiniz ki, mesela,

$$F_{19}(x, y) = "Spor \in y, Is\ Dunyasi \in y"$$

Dikkat edersek OF sadece y'ye bakiyor. Bu OF'yi iceren algoritma egitilince ustteki OF icin bir pozitif agirlik ogrenilebilecektir.

Soru: bir anlamda problemin yerini degistirmis olmuyor muyuz? Mesela ustteki sekilde bu sefer her turlu kombinasyon icin OF'mi yaratacagiz? Cevap: eger sadece ikili eslere bakiyorsak, kombinasyon hesabi $C(10, 2) = 45$ sonucunu verir. Bu fena bir sayi degil.

Ayrica verinin seyrekligi bize hangi kombinasyonlarin dahil edilip edilmeyecegi yonunde yardimci olabilir.

Soru: cok sinifli problemler[lojistik regresyonu gelistirerek cozulemez mi? Cevap: boyle bir yaklasim var, buna multinom lojistik regresyon deniyor. Fakat bu yaklasimin log lineer modellerin ozel bir hali oldugunu belirtmek isterim, yani makine ogrenimi dunyasinin aktif olarak arastirdigi alan artik burasi, multinom lojistik regresyon asildi. Zaten log lineer modeller ile cok etiketli problemleri de cozebiliyorsunuz.

Ders 5

Soru: biraz once sadece y'ler arasinda bir OF tanimlayabildigimizi gorduk. Peki sadece x'ler arasinda OF tanimlamak faydali olur muydu? Cevap: Formulu tekrar hatirlayalim,

$$p(y|x; w) = \frac{\exp \sum_j w_j F_j(x, y)}{Z(x, w)}$$

OF'nin gorevi hangi y'lerin daha yuksek olasiligi oldugunu belirtmek. Eger sadece x var ise, bu durumda bolum ve bolendeki degerler birbirini iptal ederdi. Her y icin ayni x "katkisi" olurdu ve bunun siniflayiciya hicbir faydasi olmazdi.

[8:00-18:00 atlandi]

Cozdugumuz problemler su formatta

$$p(\bar{y}|\bar{x};w) = \frac{\exp \sum_j w_j F_j(\bar{x}, y)}{Z(\bar{x}, w)}$$

Tahmin etmek icin

$$\hat{y} = \arg\max_y \exp \sum_j w_j F_j(\bar{x}, y)$$

Bir $\bar{y}$ tahmin etmek icin bu modellerden birini kullanacaksak, $p(\bar{y}|\bar{x};w)$ formulune $\bar{x}$'i koyariz, ve elde edilen dagilimda hangi $\bar{y}$'nin olasiligi daha yuksekse onu seceriz. Daha yuksek olasiliga sahip olan $\bar{y}$, $p(\bar{y}|\bar{x};w)$ formulunde bolumu daha yuksek olandir. Bolen her $\bar{y}$ icin sabit / ayni.

Aslinda exp'ye ihtiyac yok, cunku exp monotonik bir fonksiyon, yani sadece su kullanilabilir,

$$\hat{y} = \arg\max_y \sum_j w_j F_j(\bar{x}, y)$$

En olasi y'yi bulmak icin Z'nin gerekmedigine de dikkat, cunku bu sabit tum secenekler icin ayni.

Burada tahmin etmek baglaminda zor olan sey, en yuksek y'yi bulmak icin tum y'lere teker teker bakmaya mecbur olmamiz. Bu bakma islemi cok zaman alabilir, o zaman bu problemi bir sekilde cozmem lazim.

Diger problem, tum olasiliklarin 1'e toplanabilmesini saglayan normalize sabitinin hesabi, yani $Z(\bar{x}, w) = \sum_{y'} \exp[\sum_j w_j F_j(\bar{x}, \bar{y})]$, ki eger olasilik degeri hesaplayacaksak bu sabit gerekli.

Yani iki ana problem var, bir de egitim algoritmasi var, ki bu aynen lojistik regresyon orneginde oldugu gibi rasgele gradyan cikisi uzerinden olacak, bu 3 algoritmayi simdi sunacagiz.

Algoritma 1

Once,

$$\hat{y} = \arg\max_{\bar{y}} \sum_j w_j F_j(\bar{x}, \bar{y})$$

Bu hesabi polinom zamanda (polynomial time) yapmak istiyoruz. Tanimi biraz degistirelim,

$$= \arg\max_{\bar{y}} \sum_j w_j \sum_i f_j(y_{i-1} y_i \bar{x} i)$$

j tum ozellikler, i x, y “boyunca” ilerleyen indisler. Ustteki ibare tek bir egitim veri noktasi icin yapiliyor, yani i degisik veri noktalarini indislemiyor (genellikle oyle olur, o yuzden belirtmek istedik).

Toplam islemlerinin sirasini degistirelim,

$$= \arg\max_{\bar{y}} \sum_i \sum_j w_j f_j(y_{i-1} y_i \bar{x} i)$$

Icerideki toplama $g_i(y_{i-1} y_i)$ ismi verelim, boylece her i icin degisik bir g fonksiyonuna sahip oluyorum.

$$= \arg\max_{\bar{y}} \sum_i g_i(y_{i-1} y_i)$$

y_{i-1}, y_i kelime bolme probleminde iki degerden birini alabilir. Cumle etiketleme probleminde belki 20 degerden birini alabilirler. $\bar{x}, \bar{w}$ zaten sabit (egitim verisi icindeler, ya da sabit olarak goruluyorlar). Bu durumda g'yi temsil etmek icin nasil bir veri yapisi kullanmaliyim? Cunku bilgisayar bilim yapiyoruz, ve bilgisayar bilimde veri yapilari vardir. Bize gereken belli y_{i-1}, y_i kombinasyonu icin bir g degeri dondurulmesi, ve bu sonucu bir yerde depolayabilmek.

Gereken yapi basit bir matris olabilir. Diyelim ki m farkli y degeri var ise, m^2 hucresi olan bir matris isimizi gorur. Her g_i icin ayri bir m^2 matrisi olacak tabii ki. n tane matris, d deger var ise islem zamani $O(m^2 nd)$.

Algoritmamda ilk yapacagim is mumkun g degerlerini onceden hesaplayip (precompute) bir yerde depolu olarak tutmak / hazir etmek.

Tanim

$Skor(y_1, ..., y_k) = \sum_{i=1}^{k} g_i(y_{i-1} y_i)$

Amacimiz oyle bir y siralamasi (sequence) bulmak ki bu siranin skoru en yuksek olsun.

$U(k)$ = en iyi siralama $y_1, ..., y_k$'nin skoru

$U(k, v) = y_k = v$ olma sartiyla en iyi siralama $y_1, ..., y_k$'nin skoru

Amacim $U(n+1, BITIS)$'i bulmak. Mumkun etiketlere BASLA, BITIS adli iki yeni deger ekledik, bu bazi formulleri kolaslastiracak. Bu tanim aslinda $\arg\max$ ile bulmaya calistigim seyin bir bolumj aslinda, sadece amacimi bu sekilde tekrar tanimladim. Tekrar belirtmek gerekirse,

$$U(k,v) = \max_{y_1,y_{k-1}} [\sum_{i=1}^{k-1} g_i(y_{i-1}y_i) + g_k(y_k, v)]$$

Ilginc bolume geldik. Ustteki tanimi ozyineli olarak tanimlarsak,

$$U(k,v) = \max_{y_{k-1}} [U(k-1, y_{k-1}) + g_k(y_{k-1}, v)]$$

Bu ozyineli fonksiyonun avantaji nedir? Aslinda bir onceki formule gore cok daha cetrefil duruyor. Avantaj surada, dinamik programlama (dynamic programming) tekniklerini kullanarak bir dongu icinde ustteki ozyineli hesabi yapmak mumkun. Simdi teker teker bakalim,

$y_0 = BASLA$

$U(1,v) = \max_{y_0}[U(0,y_o) + g_1(y_0,v)]$

Bu ilk basamakta aslinda bir maksimizasyon yok, o zaman

$= g(BASLA, v)$

yeterli.

Ama ikinci basamakta isler zorlasiyor,

$U(2,v) = \max_{y_1}[U(1,y_1) + g_2(y_1,v)]$

Fakat esitligin sag tarafindaki U hesabini bir onceki basamakta hesapladim ve depoladim, onu hemen kullanabilirim. Bu hesabin yuku nedir? Her mumkun v degerine (m tane) bakmam lazim, ve bu islem sirasinda her y_1 mumkun degeri (yine m tane) irdelemem lazim. Yani $O(m^2)$.

Bu islemi $U(n+1, BITIS)$'e kadar yapmam lazim. Toplam yuk $O(nm^2)$.

g matrislerini hesaplamak icin $O(nm^2d)$ demistik, bu $O(nm^2)$'ten daha buyuktur / ona baskindir, ve O aritmetigine gore daha buyuk olan kullanilir.

Bu algoritma dinamik programlamanin ozel bir halidir, bazen ona Viterbi algoritmasi ismi de verilir. Bilindigi gibi Viterbi algoritmasi Gizli Markov Modelleri (Hidden Markov Models) yapisini dekode etmek icin kullaniliyor. CRF'lerin HMM'e kismen baglantisi oldugu dusunulurse, Viterbi algoritmasinin burada da ortaya cikmasi sasirtici degil.

Algoritma 2

Sunu hesapla

$$Z(\bar{x}, w) = \sum_{y'} \exp \underbrace{\sum_j w_j F_j(\bar{x}, \bar{y})}_{g}$$

Icerideki toplama g_i demistik,

$$g = \sum_i g_i(y_{i-1} y_i)$$

Yani

$$Z(\bar{x}, w) = \sum_{\bar{y}} \exp \sum_i g_i(y_{i-1} y_i)$$

Bir toplamin exp'si, exp'lerin carpimi haline donusur, yani exp toplamdan "iceri" nufuz eder,

$$= \sum_{\bar{y}} \prod_i \exp g_i(y_{i-1} y_i) \quad (5)$$

$t = 1, .., n+1$ icin sunu tanimlayalim,

$M_t(u, v) = \exp g_t(u, v)$

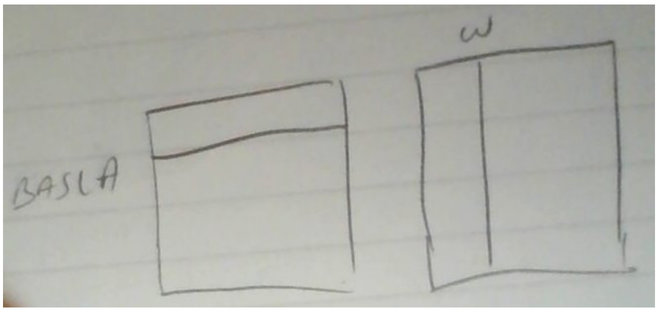
M_t asagi yukari g ile ayni sey, her degisik g fonsiyonu icin degisik bir matris var, bu matris hucrelerinin exp'sinin alinmis hali M_t matrisi.

$M_1(u, v)$ sadece $u = BASLA$ icin gecerli.

$M_{n+1}(u, v)$ sadece $b = BITIS$ icin gecerli.

$M_{12} = M_1 M_2$ yani matris carpimi.

$M_{12}(BASLA, w)$'yu dusunelim (ki bu tek bir hucre degeri)



Bu ifadenin sol taraftaki M_1 icinde $BASLA$ satirini sag taraftaki M_2 w kolonu ile carptigini dusunebiliriz.

$$M_{12}(BASLA, w) = \sum_v M_1(BASLA, v) M_2(v, w)$$

$$= \sum_v \exp[g_1(BASLA, v) + g_2(v, w)]$$

Bu istedigimiz gibi bir ifadeye donusmeye basladi, cunku hatirlarsak, (5)'e benzeyen bir seyleri elde etmeye ugrasiyoruz. Gerci ustteki ifade tum y degerleri icin degil, tek bir v icin, ama yine de uygun, ustteki v yerine y_1 dersek belki daha uygun olur,

$$= \sum_{y_1} \exp[g_1(BASLA, y_1) + g_2(y_1, w)]$$

Uclu bir carpma gorelim: M_{123}.

$$M_{123} = \sum_{y_2} M_{12}(BASLA, y_2) M_3(y_2, w)$$

$$= \sum_{y_2} [\sum_{y_1} \exp[g_1(BASLA, y_1) + g_2(y_1 y_2)] \exp g_3(y_2, w)]$$

$$\sum_{y_1, y_2} \exp[g_1(BASLA, y_1) + g_2(y_1 y_2) + g_3(y_2, v)]$$

Yani uc matrisi birbiriyle carparak y_1, y_2 uzerinden toplam almis oluyorum. Ve boyle devam edersem, yani tum matrisleri birbiriyle carparsam ve $BASLA, BITIS$ degerlerine bakarsam,

$$M_{123 \ldots n+1}(BASLA, BITIS) =$$

$$\sum_{y_1, \ldots, y_n} \exp[(g_1(BASLA, y_1) + g_2(y_1, y_2) + g_3(y_2, y_3) + \ldots + g_{n+1}(y_n, BITIS)]$$

Bu ifade parcalara ayirma (partition) fonsiyonu icin tam ihtiyacim olan sey. Daha once Viterbi algoritmasindan bahsettik, hatta bu algoritma dinamik programlama kategorisine girer dedik, ustteki algoritma dinamik programlama bile sayilmaz, aslinda bir matris carpimi sadece. Daha genel olarak ustteki algoritma ileri-geri (forward-backward) algoritmasinin bir turevi, bu algoritmalar bildigimiz gibi HMM'lerde sikca kullaniliyorlar.

Bu iki algoritma CRF'ler icin gerekli. Simdi CRF'leri nasil egitecegimizi gorelim.

Egitim

Maksimizasyon icin rasgele gradyan cikisi kullanacagiz.

$$p(y|x; w) = \frac{\exp \sum_j w_j F_j(x, y)}{Z(x; w)}$$

adyan cikisi icin ustteki formulun turevini alabilmeliyiz. Once log'unu almak lazim, cunku $\partial / \partial w_j \log p$ hesabi gerekli, usttekinin log'u ise bolumun log'u eksi bolenin log'u.

$$\frac{\partial}{\partial w_j} \log p = \frac{\partial}{\partial w_j} [\sum_j w_j F_j(x,y)] - \frac{\partial}{\partial w_j} \log Z(x;w)$$

Turevin eksi oncesi ilk bolumu cok basit, w_j ve toplam yokolacak (tum j'lerin toplami yokoldu, cunku turev "tek" bir j degeri ile ilgileniyor, digerleri sifir oluyor)

$$= F_j(x,y) - \frac{\partial}{\partial w_j} \log Z(x;w)$$

Eksiden sonraki kisim cok zarif bir sonuca donusecek, birazdan gorecegiz.

$$\frac{\partial}{\partial w_j} \log Z(x;w) = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial w_j} Z$$

Turevi toplam icine tasiyoruz,

$$= \frac{1}{Z} \sum_{y'} \frac{\partial}{\partial w_j} [\exp[\sum_{j'} w_j' F_{j'}(x,y')]]$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{y'} \left[\exp[\sum_{j'} w_{j'} F_{j'}(x,y')] F_j(x,y') \right]$$

$$= \sum_{y'} F_j(x,y') \frac{\exp[\sum_{j'} w_{j'} F_{j'}(x,y')]}{Z}$$

Simdi ilginc kisma geldik, ustteki kesirli kisim $p(y'|x;w)$ degerine esittir.

$$= \sum_{y'} F_j(x,y') p(y'|x;w)$$

Ilginc durum burada ortaya cikiyor, cunku ustteki ayni zamanda bir beklenti (expectation) tanimi degil mi? Tum F_j degerlerini o degerlerin olasiliklari ile carpip toplarsak bir beklenti elde etmez miyiz? Evet. O zaman beklenti tanimini kullanabiliriz,

$$\frac{\partial}{\partial w_j} \log p = F_j(x,y) - E[F_j(x,y')]$$

ki y' soyle bir dagilimi takip ediyor,

$$y' \sim p(y'|x;w)$$

Soru: $\frac{\partial}{\partial w_j} \log p =$? Yani bu turev ne zaman sifira esittir?

Cevap: Turevin acilimina bakinca mesela, $F_j = 0$ olunca mi? Hayir, cunku OF sifir olsa bile beklenti kismi sifir olmayabilir. O zaman soyle soylemek gerekir, eger tum y' icin $F_j(x, y') - 0$ ise, o zaman turev sifir olur.

Cogunlukla $F_j(x, y) = a(x)I(y = v)$. Hatirlarsak bu yontem bir ozelligi (ki $(a(x)$ ile temsil ediliyor), her mumkun v degeri icin bir OF'ye cevirmenin yolu idi (tek x'e bagli OF olamaz).

O zaman sunu da soyleyebiliriz, eger $a(x) = 0$ ise, her y icin $F_j(x, y) = 0$ demektir.

Bu bilginin faydasi sudur, veride seyreklik var ise, lojistik regresyon bunlari atlamayi bilir. Demek ki ayni sekilde kosulsal lineer modeller de bu ozellikleri atlayabilir. Eger bir ozellik $a(x) = 0$ ise, o ozellik agirlik guncellemesi (weight update) sirasinda atlanir.

Algoritma

Her egitim noktasi x, y icin

j icin

$E[F_j(x, y')]$ hesapla (buna sadece E diyelim)

Guncelle: $w_j := w_j + \lambda[F_j(x, y) - E]$

Bu hesabin en pahali kismi neresi? Beklenti hesabi. Bu beklentileri hesaplanmasi icin daha once verdigimiz matris carpimi yontemine benzer bir yontem kullanmak gerekiyor (burada vermeyecegiz, arama motorunde Rahul Gupta uzerinden arayabilirsiniz, bu kisi bu konuyu anlatiyor).

[atlandi]