MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 3

Capraz carpimlar hakkinda bilinmesi gereken bazi sasirtici gelebilecek kurallar var. Bunlardan bir tanesi $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$. Niye boyle? Bunu gormenin yollarindan bir tanesi geometrik olarak dusunmek. Sag el kuralini dusunursek, yonun niye farkli olabilecegini anlariz. Isaretler tam terstir, yani

$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

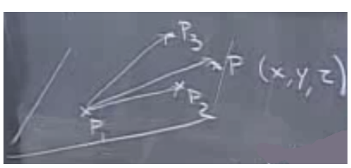
Determinant acilimini da dusunursek, ikinci terim eksi isareti tasir, ama carpim sirasi degisince eksi isaretinin yeri degisir.

Peki $\vec{A} \times \vec{A}$ nedir? Capraz carpim alan hesabinda onemli olduguna gore ve $\vec{A} \times \vec{A}$'in bir parallelogram yaratmayacagina gore (ya da sifir alanli bir parallelogram yaratacagina gore) cevap sifir, daha dogrusu sifir "vektoru" (o vektorun buyuklugu de tabii ki sifir).

Uygulamalar

Diyelim ki bize uzayda 3 nokta verildi, ve bu noktalari iceren bir duzlemin formulunu bulmamiz gerekiyor. 3 nokta 3 boyutlu uzayda bir duzlem yaratmak icin yeterli, bunu biliyoruz. Bunun icin bir dorduncu nokta P hayal edelim ki bu noktanin ogeler x, y, z olsun.

Simdi duzlemi tanimlayalim. Su sekilde 3 tane vektor yaratalim



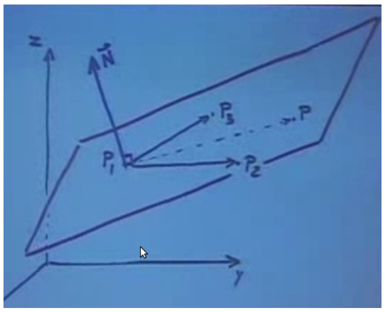
Bu vektorlerin ayni duzlem uzerinde olmasi, ayni zamanda bu vektorlerin tanimladigi parallelipipe'nin hacimsiz olmasi demektir. Yani birisi uzerinden bastirip onu dumduz etmistir sanki, sadece alani kalmistir.

Bunu formulsel olarak soylemenin yolu sudur:

$det(\vec{P_1P}, \vec{P_2P}, \vec{P_3P}) = 0$

Gercek uygulama baglaminda problem bize P_1, P_2, P_3 sayilarini vermis olacakti bu sayilari ustteki formule yerlestirirdik, tanimsiz olan sadece x, y, z kalirdi, ve bu x, y, z'ler ile beraber elde edilecek formul bu noktalarin tanimladigi alan olurdu.

Bu hesabi daha da hizli yapmanin bir yolu var. Alttaki resmi dusunelim.



Resme bakalim. Duzlem uzerindeki iki vektore dik bir $\vec{N}$'i nasil hesaplayacagimizi biliyoruz (carpraz carpim ile). Devam edelim, x, y, z degiskenlerini iceren ucuncu bir vektor $\vec{P_1 P}$'in ayni duzlemde olmasi demek, bu $\vec{N}$ vektorune dik olmasi demektir ($\vec{N}$ "normal vektor" olarak isimlendirilir). Bunu matematiksel olarak nasil ifade ederiz? Dikligin formulsel karsiligini biliyoruz, noktasal carpim sifir olmali.

$\vec{P_1 P} \cdot \vec{N} = 0$

$\vec{N}$ hesabi icin

$\vec{N} = \vec{P_1 P_2} \times \vec{P_1 P_3}$

Bu kadar.

Ek not, eger capraz carpimin sirasini degistirmis olsaydim, o zaman ustteki hesabin ters yonunde bir baska dik vektor elde ederdim, duzlem yine ayni olurdu, sadece baska bir normal vektor olurdu. Bu problem degil, herhangi bir duzlemin sonsuz sayida normal vektoru olabilir. Elde ettigimiz bir normal vektoru herhangi bir sabit ile carpinca yeni bir normal vektor elde etmis olurdum cunku.

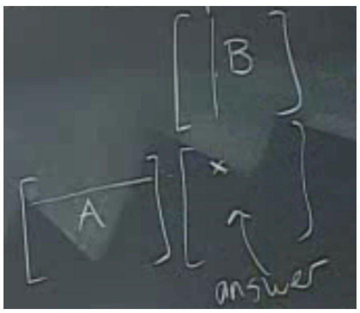
$\vec{P_1 P} \cdot \vec{N} = \vec{P_1 P} \cdot (\vec{P_1 P_2} \times \vec{P_1 P_3})$

Esitligin sagindaki carpima uclu carpim (triple product) deniyor.

Son formulu takip edersek determinant sifirligi uzerinden tanimlanan diger formul ile ayni sonucu getirdigini gorurduk.

Matrisler

A B seklindeki bir matris carpiminda hangi hucrenin hangi kolon, hangi satirin noktasal carpim sonucu (answer) oldugunu hayal edebilmek icin alttaki sekil faydali olabilir. B, sonuc matrisinin (altta bos) ustunde hayal edilir, ve carpi isaretindeki sonuc icin onun heme ustundeki kolona, ve hemen yanindaki satira gidilir.



Sezgisel (intuitive) olarak AB carpimi neyi temsil eder? Bu carpimi soyle dusunebiliriz, once B transformu yap, sonra A transformu yap. Bu biraz acaip gelebilir, cunku normalde islemleri soldan saga yapmaya alisigizdir. Fakat AB'yi belki de sirali fonksiyon islemleri olarak gormek daha dogru olur, mesela $f(g(x))$ gibi. Burada once g uygulanir, sonra f uygulanir.

$(AB)X = A(BX)$

Ustteki aktarim kanunudur (associativity) ve "iyi davranan" carpimlarin bir ozelligidir. Bu arada ustteki carpimin noktasal degil, matris carpimi olduguna dikkat edelim.

Not: $AB \neq BA$. En azindan sagdaki carpimin olabilecegini beklemememiz gerekir. AB carpimi boyutlar uydugu icin mumkun olmustur, fakat bu uyumlu boyutlar yerler degisince belki mumkun olmaz. Boyutlar olsa bile sonuc farkli cikabilir, o sebeble esitlik farz edilemez. Ufak bir Python kodu ile test edelim:

```
import numpy as np

a = [[2,3,4],[4,4,5],[9,3,2]]
b = [[2,3,9],[4,2,5],[9,3,2]]
```

```python
print np.dot(a,b)

print np.dot(b,a)
```

Sonuclar farkli cikacak.

Ornek

Cevirmek / Rotasyon

Bir duzlem uzerinde bir vektoru 90^o, saat yonu tersine cevirmek icin

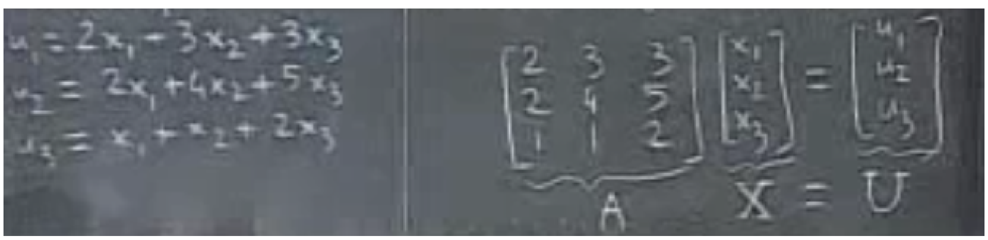
$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ilginc bir durum

$R^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Yani birim (identity) matrisinin negatifi. Niye boyle oldu? Dusunelim, eger bir vektoru 90 derece dondurursem, sonra bir daha 90 derece dondurursem, o zaman tam tersi yone gitmis olurum. Birim matrisin negatifi de budur zaten.

Matrisler denklem sistemlerini temsil edebilirler, alttaki gibi



Bu tur sistemlerde belki X degerleri verilmistir, U'yu hesaplamamiz isteniyordur, ya da tam tersi de olabilir, U verilmistir, X hesaplamamiz isteniyordur. Ters yonde gitmek icin matris tersini (inverse) almak gerekir.

Not: Bir matrisin tersini alabilmemiz icin onun kare matrisi olmasi gerekir, yani n x n boyutunda olmalidir.

Ters yonde cozume gelelim. Mesela elimizde soyle bir sistem var

$AX = B$

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$X = A^-1B$

Boylece X'i elde edebilmis oluruz. O zaman A matrisinin tersini alma operasyonunu yapabiliyorsak, istedigimiz herhangi bir lineer denklem sistemini cozebiliriz demektir.

Tersini alma islemini ufak matrisler icin elle hesaplamanin yontemi alttaki formulden geciyor.

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} = adj(A)$$

Ustte *adj* diye tanimlanan bir matrisin bitisigini (adjoint matrix) nasil buluruz?

Mesela

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Bu matrisin "minorlerini" bulmak lazim. O nedir? Aslinda minorleri determinant islemini isledigimizde gormustuk, sadece bu ismi vermemistik. Onlar en ust satirdaki matris hucrelerini teker teker merkez alip, onun satirini, kolonunu iptal edip geri kalan daha ufak bolgenin determinantlariydi. Bitisiklik icin bu hesabi sadece ust satir icin degil, tum hucreler icin yapacagiz. Ustteki ornek icin

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Kofaktorler (cofactors). Dama tahtasi gibi bir sekil dusunelim, bunun uzerinde +,- isaretleri olsun.

$$\begin{matrix} + - + \\ - + - \\ + - + \end{matrix}$$

Kural soyle, mesela ust sol kosede + ile basladik, onun hemen yani, ve alti onun tam tersi olmalidir.

Kofaktorleri soyle kullaniriz, bitisiklikteki tekabul eden degerlere bakariz, eger kofaktor bir deger icin + ise, onu oldugu gibi birakiriz, - ise, isaretini degistiririz, eksiyi arti, artiyi eksi yapariz.