Ders 1

Diziler (Sequences)

Bir dizi aslinda sadece bir listedir. Listede 1. eleman vardir, 2. eleman vardir, vs. ve bu sonsuza kadar devam eder. Bu nokta onemli, matematikte sonlu / sinirli (finite) bir liste dizi degildir. Dizilerin onemli bir ozelligi sonsuza kadar devam etmeleridir.

Daha formel olarak bakarsak dogal sayilarin, yani $\mathbb{N}$ kumesinin de tanimda bir rol oynadigini gorebiliriz. Listedeki her eleman dizideki sira numarasi ile etiketlenebilir, 1. elemani "1", 2. elemani "2", vs. olarak etiketleyebiliriz, o zaman bu acidan bakarsak bir dizinin, dogal sayilar ile baska bir kume arasindaki bir *eslesme* oldugunu da soyleyebiliriz. Bu eslesme bir diger tanimla bir fonksiyondur. Yani bir dizi aslinda bir fonksiyondur, yani

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Dizimizi

$f(1), f(2), f(3), ..., f(n), ..$

olarak gosterebiliriz.

Yaklasmak (Convergence)

Acik bir sekilde gorulecegi uzere alttaki dizi

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$

gittikce 0 degerine dogru gidiyor. Bu dizi "sifira yaklasiyor (convergence)" deriz, ya da "dizinin limiti sifir" deriz. Peki bu fikri nasil daha acik, net olarak tanimlayabiliriz?

Yaklasan seriler 18. yuzyilda incelendi ve gelistirildi, fakat o zamanlarda bu tur dizilerin tanimi hicbir net olarak ortaya koyulmadi. Literatur taranirsa tanima en yakin olacak sey soyledir:

"Bir dizi $\{s_n\}$ L sayisina yaklasir, eger bu dizideki terimler gittikce L'e yakinlasliyorsa".

Bu tanimin oldukca genel, kabaca olarak yapilmis olmasi bir yana, bazen bizi yanlis yollara bile surukleyebilir. Mesela su diziyi ele alalim

$.1, .01, .02, .001, .002, .0001, .0002, .00001, .00002, ...$

Bu dizi muhakkak sifira “yakinlasiyor”, fakat terimler duzenli bir sekilde sifira yaklasmiyorlar. Her ikinci adimda birazcik sapiyorlar. Ya da su dizi

$.1, .11, .111, .1111, .11111, .111111, ...$

Bu dizi gittikce .2’ye “yakinlasiyor”, fakat bu dizinin .2’ye yaklastigi iddia edilemez. Gercek limit 1.9 olmali, 2 degil. Ne oldugu belli olmayan bir “gittikce yaklasma” tanimina degil, bizim aslinda “gelisiguzel yakinlik (arbitrarily close)” tanimina ihtiyacimiz var.

Bu fikri en iyi yakalayabilen 1820’li yillarda Augustin Cauchy oldu. Esitsizlikleri kullanarak “herhangi / gelisiguzel yakinlik” kavramini formule eden bir tanim bulmayi basardi. Bu sekilde limit kavrami gayet acik matematiksel esitliszlikler ile gosterilebildi.

Tanim: Bir Dizinin Limiti

$\{s_n\}$’nin reel sayilardan mutesekkil bir dizi oldugunu dusunelim. $\{s_n\}$’nin bir reel sayi L’e yaklastigini soyleriz, ve bunu

$$\lim_{n \to \infty} s_n = L$$

olarak belirtiriz. Ya da

$$s_n \to L \ olur, \ n \to \infty \ iken$$

eger her $\epsilon > 0$ icin oyle bir tam sayi N var ise, ki bu N su sartlara uymali

$$|s_n - L| < \epsilon$$

$n \geq N$ oldugu her zaman icin.

Bir dizi yaklasmiyorsa, ona uzaklasan (divergent) dizi adi verilir. Bu her iki tur ile ayni derecede ilgileniyoruz.

Not: Tanimda N’nin ϵ’a bagli oldugu goruluyor, eger ϵ cok ufak ise mesela, o zaman N’in oldukca buyuk olmasi gerekebilir. Bu acidan bakilinca aslinda N’nin ϵ’nun bir fonksiyonu oldugu soylenebilir. Bu durumu tam vurgulamak icin bazen $N(\epsilon)$ yazmak daha iyi olabilir.

Not: Tanima dikkat edersek, sartlara uyan bir N bulununca, o N degerinden daha buyuk herhangi bir N de kullanabiliriz. Yani ustteki tanim bize herhangi bir N bulmamizi soyler, illa ki "en kucuk" N'i bulmamiz gerekmez.

Tanim bunu soylemiyor olsa bile ibarenin asil gucu N'nin ϵ *ne kadar kucuk olursa olsun bulunabiliyor olmasidir.* Eger ϵ buyuk bir sayi ise N'i bulmak kolay olur. Eger $\epsilon = 0.1$ icin (ki bu sayi ϵ turu sayilar icin buyuk sayilir) isleyen bir N bulursak, ayni N daha buyuk ϵ degerleri icin de isleyecektir.

Ornek

Ustteki tanimi kullanarak

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$$

oldugunu ispat edelim. Yanliz sunu belirtelim, ustteki tanim limitin 1/2 olacagini hesaplamak teknigi olarak verilmiyor. Ifade limit kavramina kesin bir tanim getiriyor ama o limiti hesaplamak icin kesin bir metot sunmuyor. Neyse ki cogumuz bu hesabi yapmak icin yeterince calculus hatirliyoruz, boylece limitin dogrulugunu ispatlamadan once ne oldugunu bulabiliriz.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2+1/n^2} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty}(2+1/n^2)}$$

$$= \frac{1}{2+\lim_{n \to \infty}(1/n^2)} = \frac{1}{2}$$

Bu hesap, eger tum adimlarin dogrulugu ispatlanirsa, limitin ne oldugunun da ispati olabilirdi. Adimlarin dogrulugunu daha sonra gosterecegiz, boylece her seferinde ϵ, N temelli argumanlari kullanmamiza gerek kalmayacak. Simdi ϵ, N bazli ispata gelelim,

Pozitif bir ϵ'un verildigini varsayalim. Oyle bir N (ya da $N(\epsilon)$, hangisini tercih ederseniz) bulmamiz gerekiyor ki, dizide N. terimden sonraki her eleman 1/2'ye ϵ'dan daha yakin olsun, ve su ifade dogru olsun

$$\left| \frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

ki $n = N, n = N+1, n = N+1, N+2, ...$ Sonuctan geriye dogru gidersek isimiz kolaylasir, yani verilen N icin ϵ'nun ne kadar buyuk olmasi gerektigini hesaplarsak. Ustteki tam deger (absolute deger) isaretinin icine bakalim,

$$\frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2n^2}{2(2n^2+1)} - \frac{2n^2+1}{2(2n^2+1)}$$

$$= \frac{2n^2 - 2n^2 - 1}{2(2n^2+1)} == \frac{-1}{2(2n^2+1)}$$

Tam deger alininca

$$\frac{1}{2(2n^2+1)} < \epsilon$$

olmali, ya da

$$4n^2 + 2 > \frac{1}{\epsilon}$$

Dikkat, tersine cevirince kucukluk isareti buyukluk oldu.

Bu ifadeye uyan en kucuk n, aradigimiz N. O zaman

$$N^2 > \frac{1}{4}\bigg(\frac{1}{\epsilon} - 2\bigg)$$

ifadesine uyan her tam sayi N bizim icin uygun. Illa ki en kucuk N olmasi gerekmez, en rahat olan N biraz buyukce olabilir, mesela eger sag taraftaki $1/4\epsilon$ terimine (sag tarafta daha fazlasi var, ama eksi isareti bu terimi daha kucultecek nasil olsa) esit bir seyleri sol tarafta istiyorsak, onun karesini N olarak kabul ederiz,

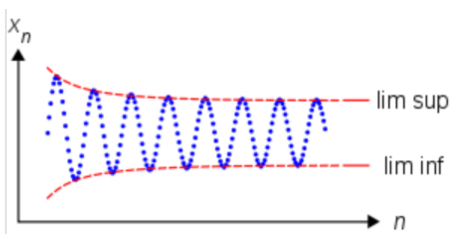
$$N > \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$$

deriz.

Bu ornegin bize verdigi asil ders, aslinda, tanimin bize limit teorisini gelistirmek icin teorik / kesin (rigourous) bir yontem sunmasi ama bu limitlerin hesabini yapmak icin pratik bir yontem olmamasi. Bir limitin dogrulugunu hesaplamak icin nadiren boyle bir yonteme basvurulur.

Eger S kumesi "yukaridan sinirlanmis (bounded from above)" ise o zaman $x \in S$ icin oyle bir y var demektir ki her x icin $x \leq y$ olsun. Yani S icindeki her deger bu y degerinden kucuk olsun. Bu x degerine S'in supremum'u da deniyor, ve $\sup_{x \in S}(x)$ ya da $sup\{x : x \in S\}$ olarak gosterilebiliyor. Benzer sekilde kumenin en alt siniri, yani infimum degeri $\inf_{x \in S}(x)$ ya da $inf\{x : x \in S\}$ olarak gosteriliyor.

Eger elimizde bir seri (sequence) var ise o zaman sartlari biraz daha gevsetmek iyidir, burada limit superior kavrami devreye girer. Inf ve sup degerleri alti / ustu deger olamaz, ama limit superior oyle bir sayidir ki onun sonrasinda sonlu (finite) / belli sayida kume ogesi olmasina izin verilir. Limit superior aslinda bir serinin yaklastigi (converge) degerden baskasi degildir.



Formel olarak diyelim ki $\{x_n\}$ bir seri, ve diyelim ki bir reel sayi S var, ki bu reel sayi su sartlari tatmin ediyor 1) Her $\epsilon > 0$ icin bir N var, oyle ki her $n > N$ icin $x_n < S + \epsilon$ ve 2) her $\epsilon > 0$ ve $M > 0$ icin bir $n > M$ var ki $x_n > S - \epsilon$. O zaman S sayisina $\{x_n\}$ serisinin limit superior'u denir.

Bu tanimin soylemeye calistigi serinin yaklastigi degerden sonra ve once sonlu buyuklukte (bir pencere tanimlarsak bu pencere icinde sonlu sayida eleman olacaktir (sonsuz degil). Bu pencerenin tanimlanabiliyor olmasi, onun makul bir noktada olmasini gerektirir, ki bu nokta da yaklasilan degerden baskasi degildir.

Limit inferior bunun tersidir,

$\liminf x_n = -\limsup(-x_n)$