Büyük Sayılar Kanunu

Olasılık kuramında önemli matematiksel bir denklem, büyük sayılar kanunudur. Bu kanun, tahmini olarak bildiğimiz günlük bir gerçeğin matematiksel ispatıdır da denebilir.

Yazı-tura atarken yazı çıkma ihtimalinin 1/2 olduğunu biliyoruz. Herhalde çoğumuz da bu yazı-tura işleminin "bir çok kere" tekrarlandığı durumda, toplam sonucun aşağı yukarı "yarısının" yazı olacağını tahmin biliyoruz. Bu tahminin matematiksel olarak söylemi, büyük sayılar kanunudur. Yıllarca önce Öklid'in geometriyi ispat ederek yaptığı gibi, matematiğe eklediğimizi her yeni bilgi dağarcığını önce matematiksel olarak ispatlamamız gerekiyor.

Farzedelim ki her yazı-tura atışı bir deney olsun. Her ayrı deneyin sonucu $X_1, X_2 ... X_n$ olarak rasgelen değişkenlerle tanımlanmış olsun. Bu değişkenler ya 1 ya da 0 değeri taşıyacak, Yazı=1, Tura=0 olmak üzere.

Buna göre, n tane deneyden sonra elimize gelmesi gereken yazı oranı şudur.

$$\bar{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Büyük sayılar kanunu, n büyüdükçe X_n'in 1/2'ye yaklaştığını ispatlar.

Başlayalım.

$X_1, X_2, .., X_n$ bagimsiz degiskenler olsun.

$$E(X_i) = \mu$$

$$Var(X_i) = \sigma$$

$$\bar{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

O zaman her $\epsilon > 0$ icin ve $n \to \infty$, $p(|\bar{X_n} - \mu|) \to 0$.

Bu tanımlara göre, her rasgele değişkenin (deneyin) ortalaması ayni değerdir diyoruz. Bu zaten beklenir bir tanımdı, çünkü her rasgele değişkenin dağılımının aynı olduğunu kabul etmiştik. Her yazı tura aynı şartlar altında atılmazlar mı?

$\bar{X_n}$ de bir rasgele değişkendir, çünku Büyük sayılar kanununu, matematiksel olarak,$\bar{X_n}$ değişkeninin ortalamasını tekil olarak her Xi dağılımının (aynı olan) ortalaması arasında birkü onun da formülü başka rasgelen değişkenlere dayanıyor.

İspat devam etmek için, şapkalı Xn dağılımının beklentisini bulmamız gerekiyor.

$$\bar{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(\bar{X_n}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)$$

E dogrusal bir islec (linear operator) oldugu icin disaridan iceri dogru nufuz eder.

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu$$

$$= \mu$$

$\bar{X_n}$ dağılımının standart sapmasını da bulalım.

Diger bir olasilik kuramina gore

$$Y = a + bX$$

$$Var(Y) = b^2 Var(X)$$

oldugunu biliyoruz. O zaman,

$$\bar{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$Var(\bar{X_n}) = Var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

$$Var(\bar{X_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Artık Çebişev kuramını kullanmaya hazırız.

$n \to \infty$,

$$P(|\bar{X_n} - \mu| > \epsilon) \to 0$$

Cebisev'den

$$P(|\bar{X_n} - \mu| > \epsilon) \le \frac{Var(\bar{X_n})}{\epsilon^2}$$

$$P(|\bar{X_n} - \mu| > \epsilon) \le \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \to 0$$

$\sigma^2/n\epsilon^2$'in sifira gitmesi normal cunku n sonsuza gidiyor.

Peki $P(|\bar{X_n} - \mu| > \epsilon)$'nin sifira gittigini gosterdik mi?

$\sigma^2/n\epsilon^2$'nin sifira gittigini gosterdik. $\sigma^2/n\epsilon^2$ de $P(|\bar{X_n} - \mu| > \epsilon)$'den buyuk olduguna gore, demek ki o da sifira iner.