

Sınırlı Elementler Metodu (Finite Elements Method)

Bu metot differansiyel, kısmi differansiyel denklemleri (partial differential equations) yaklasiksal olarak modelleme ve cozmenin yontemleridir.

Formul: Baslangic denklemi

$$\frac{-d}{dx} \left(c(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x)$$

İki tarafı da $v(x)$ ile carpiyoruz ve 0 to 1 sinirlariyla entegralini aliyoruz.

$$\int_0^1 \frac{-d}{dx} \left(c(x) \frac{du}{dx} \right) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

Parcali entegral (integration by parts) formulu soyledir:

$$\int y dz = yz - \int z dy$$

Ana formulun bolumlerini, parcali entegrale gore bolusturursek:

$$dz = \frac{-d}{dx} \left(c(x) \frac{du}{dx} \right) dx$$

$$z = -c(x) \frac{du}{dx}$$

$$y = v(x)$$

$$dy = \frac{dv}{dx} dx$$

Yukarida dz icinde dx ve $\frac{1}{dx}$ birbirini iptal eder. Parcali entegral formulunun sag tarafina gore yerlerine koyarsak:

$$\int_0^1 v(x) dx \frac{-d}{dx} \left(c(x) \frac{du}{dx} \right) = -[v(x) c(x) \frac{du}{dx}]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 c(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

Ustteki parcali entegral aciliminda sol taraf entegrale sinir degerleri aldiginde, sag taraftaki yz sonucunun ayni sinir degerlerine tabi olduguna dikkat edelim.

Differansiyel denklemde sinir kosullari $x = 1$ durumunda $c(1)u'(1) = 0$, ve $x = 0$ durumunda $v(0) = 0$ olarak biliniyor. O zaman ustteki denklemin sol tarafında

$x = 0$ ve $x = 1$ kosullari icin tanimli bolum $0 - 0 = 0$ olacaktir ve denklemden atilabilir. Geriye kalanlar

$$\int_0^1 c(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

Bu fonksiyonu Galerkin adli bir matematikci bulmus, "zayif form (weak form)" olarak adlandiriliyor.

Simdi diyelim ki n tane test fonksiyonu sectik $\phi_1(x), \dots, \phi(n)$ ve bu fonksiyonlari U_j sayilari ile carpiminin toplamini, yani bir tur kombinasyonunu $u(x)$ yerine kullanmaya karar verdik.

$$U(x) = U_1 \phi_1 + \dots + U_n \phi_n$$

O zaman

$$U'(x) = U_1 \phi_1' + \dots + U_n \phi_n'$$

$$= \sum_1^n U_j \frac{d\phi_j}{dx}$$

Simdi du/dx yerine $U'(x)$ koyarsak

$$\int_0^1 c(x) \left(\sum_1^n U_j \frac{d\phi_j}{dx} \right) \frac{dV_i}{dx} dx = \int_0^1 f(x) V_i(x) dx$$

Dikkat edelim, $v(x)$ yerine $V_i(x)$ kullandik. Ustteki formül her i için yeni bir formül "uretecek". Niye V_i ? Zayif formdaki $v(x)$ formülünü de zaten biz uydurmüstük, yani $v(x)$ biz ne istersek o olur. O zaman bu fonksiyonu n tane formül üretmek için bir numara olarak kullaniliyoruz, n tane formül olunca matrisin $n \times n$ elemanini doldurabileceğiz ve cozume erisebileceğiz. Ek not, cogunlukla $V_i(x)$ için ϕ_i formulleri kullaniliyor.

Ayrica formüldeki U_j kismini cekip cikartirsak ve bir vektor icine koyarsak, geri kalanlar bir K_{ij} matrisi icinde tutulabilir.

$$K_{ij} = \int_0^1 c(x) \frac{d\phi_j}{dx} \frac{dV_i}{dx} dx$$

Sag taraf ayni sekilde i tane formül üretir

$$F_i = \int_0^1 f(x) V_i(x) dx$$

Final formul matrix formunda basit bir sekilde temsil edilebilecektir.

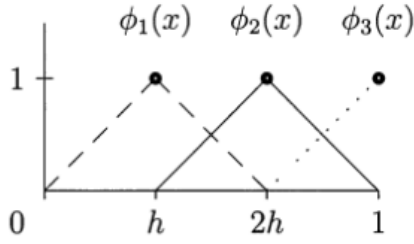
$$KU = F$$

Ornek

Ornek olarak $-u'' = 1$ denklemini cozelim. Not: Differansiyel denklemlerde sonuc bulmak demek bir "fonksiyon" bulmak demektir. Normal cebirsel denklemlerde sonuc bulmak degiskenlerin "sayisal" degerini bulmak demektir. Birazdan bulacagimiz sonuc $u(x)$ "fonksiyonu" olacak.

Eger denklem $-u'' = 1$ ise o zaman bu formulu ana forma uygun hale getirmek icin $c(x) = 1$ olarak almamiz gerekir. $-u'' = 1$ denkleminde esitligin sag tarafi 1 olduguna gore $f(x) = 1$ demektir.

Artik ϕ fonksiyonlarini secme zamani geldi. Bu fonksiyonlari "toplami" hedefledigimiz fonksiyonu yaklasiksal (approximate) olarak temsil edecek. Ornek olarak secebilecegimiz bir fonksiyon "sapka fonksiyonu (hat function)" olarak bilinen ucgen fonksiyonlar olabilir. Altteki figurde bu fonksiyonlari goruyoruz.



Bu figurde x ekseninin h buyuklugundeki parcalara bolundugunu goruyoruz.

Entegralleri hesaplayalim

$$F_1 = \int_0^1 V_1(x) dx$$

Daha once V_1 ve ϕ_1 'i ayni kabul ettigimizi belirtmistik.

Yukaridaki integralin aslinda bir alan hesabi yaptigini goruyoruz. Sinirlar 0 ve 1 arasinda, ama $2h$ otesinde zaten ϕ_1 fonksiyonu yok. ϕ_1 'in alani nedir? Alan ucgenin alani: Taban carpi yukseklik bolu 2: $2h$, yuksekligi 1, o zaman alan $(2h \times 1)/2 = 1/3$

Benzer mantikla bakarsak, F_2 ile F_1 ayni, yani $1/3$. F_3 ise onlari yarisi, yani $1/6$.

K_{ij} nasil hesaplanacak? $c(x) = 1$ oldugu icin formolden cikarilabilir ve V_1 ve ϕ_1 'in ayni olduguna soyledik:

$$K_{ij} = \int_0^1 c(x) \frac{d\phi_j}{dx} \frac{dV_i}{dx} dx$$

$$K_{11} = \int_0^1 \left(\frac{dV_1}{dx} \right)^2 dx$$

dV_1/dx nedir? Birinci sapka fonksiyonunun turevidir. Bu tureve bakarsak, 0 ve h arasında artı eğim (slope) $1/h$, h ve $2h$ arasında eksi eğim $-1/h$ oluyor. Ama kare aldığımız için sonuç aynı, $1/h^2$. O zaman $h = 1/3$ olduğuna göre $1/(1/3)^2$, yani $dV_1/dx = 9$.

$$K_{11} = \int_0^{2/3} 9dx = 9x \Big|_0^{2/3} = (9)(2/3) - 0 = 6$$

K_{22} seklen aynı fonksiyon parçasını temel aldığı için aynı değere sahip: 6. K_{33} onların yarısı, esittir 3.

K_{12} farklı eğimlerin çarpımı anlamına gelir, yani V_1' ile V_2' çarpımı olur. Bu iki fonksiyona bakalım, 0 ile h arasında V_2 yok, eğim 0. İkisinin de sıfır olmadığı, çarpımda kullanılabilecek bir eğiminin olduğu tek aralık h ve $2h$ arası. Burada $V_1' = -3, V_2 = 3$.

$$K_{12} = \int_{1/3}^{2/3} (3)(-3)dx = -9x \Big|_{1/3}^{2/3} = -6 - (-3) = -3$$

Aynı şekilde $K_{23} = -3$. Ama $K_{13} = 0$ çünkü hiç çakışma yok.

Matrisi doldurursak,

$$KU = F$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Python kodu

```
K = [[6., -3., 0],
      [-3., 6., -3.],
      [0., -3., 3.]]

f = [1./3., 1./3., 1./6.]

print np.linalg.solve(K,f)

[ 0.27777778  0.44444444  0.5          ]

print 5./18., 4./9., 1./2.
```

0.277777777778 0.444444444444 0.5

Rapor edilen degerler bu denklemin bilinen cozumu $u(x) = x - \frac{1}{2}x^2$ ile 0, h, 2h noktalarinda (mesh points) birebir uyum gosterdigini goruyoruz. Yani yaklasiksal olarak differansiyel denklemini cozmeyi basardik.

Kaynaklar

Strang, G., Computational Science and Engineering, 2007