

Degisimsel Calculus (Calculus of Variations) ve Euler-Lagrange Denklemleri

Degisimsel, Varyasyonel Calculus bir fonksiyonelin (dikkat “fonksiyon” degil) ekstrema (minimum / maksimum) ya da duragan (stationary) oldugu noktalarin bulunmasi icin kullanilir.

Bir *fonksiyonel* bir veya daha fazla fonksiyonun birlesimidir. Fonksiyonel girdi olarak bir fonksiyon alip sonuc olarak bir sayisal deger hesaplayan bir ikinci fonksiyondur aslinda. Diger bir tanim fonksiyonelin belli fonksiyon “tipleri”, “siniflari” icin bir sayisal deger atamasi yaptigidir.

Degimsel calculus’un en temel, bilinen, standart problemi, sabit x degerleri icin alttaki fonksiyonelin (entegralin) duragan oldugu $\phi(x)$ fonksiyonlarini bulmaktır. Yine dikkat: Bulmaya calistigimiz bir skalar x degeri degil, bir veya daha fazla fonksiyondur.

$$I(\phi) = \int_a^b F(x, \phi, \phi_x) dx$$

δ isareti varyasyon operatorudur, ve diferansiyel operatoru d ’ye oldukca benzer. $\phi(x)$ ’nin varyasyon operatoru uygulanmis hali olan $\delta\phi(x)$ ’in tanimi, sabit bir x degeri icin herhangi (arbitrary), sonsuz ufaklikta (infinitesimal) bir degisim demektir. Dogal olarak x ’in sabit olmasi $\delta x = 0$ anlamina gelir (bu esitligi birazdan formulumuzun aciliminda basitlestirme amaci ile kullanacagiz). Fonksiyonelin duraganligi da $\delta I = 0$ demektir.

Degisimsel Calculus ve Euler-Lagrange aciliminin puf noktası altta birazdan gorecegimiz cebirsel islemlerle, $\delta\phi$ ’yi formilde tek basina birakarak bir anlamda duraganlik mantiginin disina atmasidir. Oyle bir $\phi(x)$ buluyoruz ki ondan δ sapmalari var, ama biz oraya degil, formulun geri kalanina bakiyoruz, formulun o tarafinda ustunde sapmalar olmayan ϕ ile islemler yapacagiz, ve optimal bir ϕ fonksiyonu bulacagiz.

I fonksiyoneli pek cok fizik, diger tur problemlerde ortaya cikan bir formdur. Minimize edilmeye ugrasilan bir fonksiyonel var ise, degisimsel calculus burada devreye girebilir, duragan nokta uzerinden optimal bir $\phi(x)$ sonucunu verir.

Turetmeye baslayalim:

δ operasyonu diferansiyel ve entegral ortamlarinda sirabagimsiz (commutative) ozelliklere sahiptir, bu operasyonlari icine “nufuz edebilir”. Mesela

$$\delta \left(\int F dx \right) = \int (\delta F) dx$$

ve

$$\delta \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta\phi)$$

Ustte bahsettigimiz fonksiyonelin varyasyonu o zaman

$$\begin{aligned}\delta I &= \delta \int_a^b F(x, \phi, \phi_x) dx = 0 \\ &= \int_a^b \delta F dx\end{aligned}$$

Simdi δF 'in acilimini gosterelim. Bu acilim tam diferansiyel (total differential) acilimi ile tipatip ayni.

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta \phi_x + \frac{\partial F}{\partial x} \delta x \right) dx$$

$\delta x = 0$ oldugunu bildigimize gore bu terimi formulden atabiliriz. Geri kalanlar:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta \phi_x$$

Bunlari δI formülünün icine koyarsak:

$$\delta I = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta \phi_x \right) dx = 0$$

Entegraldeki ikinci terime bakalim: $\delta \phi$ formülünü $\delta \phi_x$ formulu icinden "cekup cikartacagiz". Bunu niye yapiyoruz? Cunku $\delta \phi$ 'un herhangi (arbitrary) bir degere sahip olabileceginden hareketle ek bazi sonuclara gelmeye calisacagiz, bu da sadece $\delta \phi$ 'nin tek basina kalmasiyla mumkun olabilir.

δ operatorunun sirabagimsiz oldugunu gormustuk. O zaman

$$\delta \phi_x = \delta \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (\delta \phi)$$

$\delta \phi$ 'yi diferansiyel operatorunun icine attik. Simdi parcalayarak entegral alma (integration by parts) teknigini kullanarak diferansiyel operatorunden de kurtulacagiz. Parcalayarak entegral alma bilindigi gibi soyledir:

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v - \int_a^b v \cdot du$$

Eger $\delta \phi$ 'in diferansiyelini dv 'ye atarsak, o zaman parcalayarak entegral alma teknigi dv 'yi v yaparken bize istedigimiz sonucu verecektir. O zaman acmak istedigimiz entegrali hatirlayalim ve sirabagimsiz islemi uygulayalim:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta \phi_x dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \frac{d}{dx} (\delta \phi) dx \quad (1)$$

Parcalayarak entegral alma teknigi icin parcalarin ne oldugunu tanimlayalim:

$$u = \frac{\partial F}{\partial \phi_x}$$

$$du = d\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\right)$$

$$dv = \frac{d}{dx}(\delta\phi)dx = d(\delta\phi)$$

$$v = \delta\phi$$

O zaman (1)'in acilimi soyle olacaktir:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta\phi \Big|_a^b - \int_a^b \delta\phi \cdot d\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\right)$$

Sagdaki terime dx 'leri eklersek:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta\phi \Big|_a^b - \int_a^b \delta\phi \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\right) dx$$

Goruldugu gibi $\delta\phi$ 'in diferansiyelinden tamamen kurtulduk. Simdi bu sonucu δI icindeki ikinci terim yerine koyelim:

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} \delta\phi - \delta\phi \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\right) \right] dx - \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta\phi \Big|_a^b$$

$\delta\phi$ 'lari disari cikartalim:

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\right) \right] \delta\phi dx - \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta\phi \Big|_a^b$$

Bu sonuc uzerinden bazi ek mantik yurutmeye baslayabiliriz. Mesela $\delta\phi$ (belli sinirlar dahilinde olmak sartıyla) herhangi bir degere sahip olabilecegi icin, o zaman δI 'in sifir olmasi demek, $\delta\phi$ 'in sifir olmasi garanti olmadigi icin (herhangi bir deger dedik ya) $\delta\phi$ 'in icinde oldugu carpimda onun *haricindeki* degerlerin sifir olmasini mecbur kilacaktır. Bu demektir ki

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\right) \right] = 0$$

olmalidir. Literaturde bu sarta Euler-Lagrange sarti ismi verilmistir. Ayni sekilde

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta\phi \Big|_a^b = 0$$

olmalidir. Bu demektir ki ya $\delta\phi(a) = \delta\phi(b) = 0$ olacaktir, ki bu sarta geometrik ya da kesinlikle gerekli sinir sartlari (geometric or essential boundary condition) denir, ya da

$$\frac{\partial F(a)}{\partial \phi_x} = \frac{\partial F(b)}{\partial \phi_x} = 0$$

olacaktir, bu sarta da dogal sinir sarti (natural boundary condition) ismi verilir.

Ornek

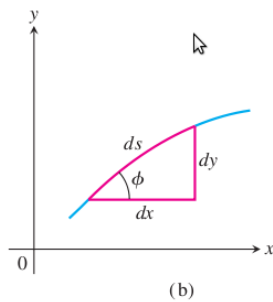
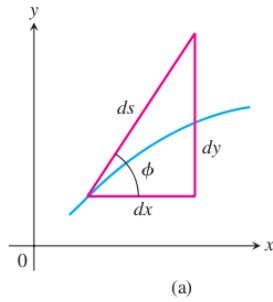
Simdi ornek olarak iki nokta arasindaki en kısa egrinin düz çizgi fonksiyonu olması gerektiğini bulacağız. Önce “egri uzunluğu” kavramını tanımlayarak başlayalım.

$y(x)$ formülüne sahip bir egrinin diferansiyel uzunluğu ds

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

olarak gösterilebilir. Bu formül nereden gelir? Eger sonsuz küçüklikteki ds uzunluğunu hesaplamak istiyorsak, x ve y eksenlerindeki yine sonsuz küçüklikteki değişimlere göre bu hesabi yapabiliriz.

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \sqrt{dx^2 + \frac{dy^2}{dx^2} dx^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \end{aligned}$$



Egri uzunluğunun tamamını bulmak için ise bu diferansiyel parçaları birbirine ekleriz, yani üstteki formülün integralini alırız, $\int ds$ formülü integral sınır şartlarının tanımlanması sonrası gerekli hesabi yapacaktır.

Diyelim ki $x = 0$ ve $x = 1$ arasındaki hangi egrinin en kısa uzunlukta olacağını

bulmak istiyoruz. O zaman ustteki formulu I haline getiririz:

$$I(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Bu formül Euler-Lagrange formuna sokulabilir bir formül değil mi? İki noktayı birleştirecek pek çok y fonksiyonu olabilir, bizim aradığımız en kısa olanı ve bunu üstteki I 'yi duragan yapacak fonksiyonlar. Bu bir örnek tabii ki, sezgisel olarak ta sonucu söyleyebiliriz, aradığımız fonksiyon düz çizgi olmalı.

Baslayalım: F fonksiyonu nedir?

$$F(x, y, y') = [1 + (y')^2]^{1/2}$$

Bu fonksiyonun içinde y olmadigina göre Euler-Lagrange'in ϕ (yani y) içeren kısmın atabiliriz. Kalanlar:

$$\left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] = 0$$

Parantez içindeki kısmi türevi hesaplayalım

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2} [1 + (y')^2]^{-1/2} 2y' = \frac{y'}{[1 + (y')^2]^{1/2}}$$

Euler-Lagrange formülüne koyarak iki tarafın entegralini alalım ve dx 'ten kurtulalım:

$$\int \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{[1 + (y')^2]^{1/2}} \right) \right] dx = c$$

$$\frac{y'}{[1 + (y')^2]^{1/2}} = c$$

Sifirin entegrali bir sabit sayı olacaktır, bu sabite c ismini verdik. Şimdi üstteki formülü y' sol tarafta tek başına kalacak şekilde tekrar düzenleyelim:

$$\frac{y'}{[1 + (y')^2]^{1/2}} = c$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = c$$

$$\frac{y'^2}{1 + (y')^2} = c^2$$

$$\frac{1 + (y')^2}{y'^2} = \frac{1}{c^2}$$

$$1 + \frac{1}{y'^2} = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{y'^2} = \frac{1}{c^2} - 1$$

$$\frac{1}{y'^2} = \frac{1 - c^2}{c^2}$$

$$y' = \sqrt{\frac{c^2}{1 - c^2}} = a$$

Sagdaki sonuca bakarsak elimize gecen c 'lerden olusan bir islem obegidir, ve bu obek te dogal olarak yine bir sabit sonucunu verir, bu sabite a ismini verdik. Devam edelim, y' , yani turevi bir sabit olan fonksiyon, $y(x)$ suna benzemez mi?

$$y(x) = ax + b$$

ki sinir sartlari $y(x) = x$ (0 ve 1 degerleri icin). Bu formul bildigimiz gibi bir duz cizginin formuludur!

Demek ki Degisimsel Calculus kullanarak iki nokta arasindaki en kisa yolun duz cizgi olacagini ispatlamis olduk.

Kaynaklar

Everstine, G. C., Numerical Solutions of Partial Differential Equations

Rao, S. S., The Finite Element Method in Engineering

Thomas' Calculus, 11. Baski