MIT OCW ODE - Ders 13

Bugunku dersimizin hedefi ozel cozumler bulmak. Formu yazalim

$y'' + Ay' + By = f(x)$

Ve genel cozum $y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$ formunda olacak.

Gercek su ki esitligin sag tarafina yazilabilecek her fonksiyon o kadar ilginc degil. Ilginc olanlardan bir tanesi ustel (exponential) fonksiyonlar, yani e^{ax} formundaki fonksiyonlar, ki cogunlukla $a < 0$ kullanilir. Diger bazi ilginc olanlar

$sin\omega x$

$cos\omega x$

gibi salinim ornekleri, ki bunlar da elektriksel devrem baglaminda alternatif AC/DC akimi temsil ediyorlar.

Ya da "gittikce yokolan salinim" ilginc, Burada

$e^{ax}sin\omega x$

$e^{ax}cos\omega x$

gibi ornekler var. Ama aslinda ustteki tum ilginc fonksiyonlar genel tek bir forma baglanabilir, bu form icin ustel sayinin kompleks olmasina izin vermek gerekiyor. Form soyle

$e^{(a+i\omega)x}$

$\omega = 0$ ise o zaman e^{ax} elde ederim. $a = 0$ ise $sin\omega x$, $cos\omega x$ elde ederim. Ikisi de sifir degilse o zaman gittikce yokolan salimi elde ederim.

Bundan sonra habire $a + i\omega$ yazmamak icin onun yerine α kullanacagiz, α'yi gorunce onun bir kompleks sayi oldugunu anlayin. Yani esitligin sag tarafi $e^{\alpha x}$ olacak.

Birazdan gorecegimiz uzere, bu tur bir girdi kullanmak aslinda kolaylikla cozum sagliyor. Yerine gecirme (substitution) kuralini kullanarak cozume erismek cok kolay.

$y'' + Ay' + By = f(x)$

Polinom operator kullanirsak

$(D^2 + AD + B)y = f(x)$

Parantez icindekine $p(D)$ diyelim. Ve su formulu ortaya atalim.

$p(D)e^{\alpha x} = p(\alpha)e^{\alpha x}$

Bu yerine gecirme kurali (substitution rule).

Ispat

$(D^2 + AD + B)e^{\alpha x}$

$= D^2e^{\alpha x} + ADe^{\alpha x} + Be^{\alpha x}$

$= \alpha^2e^{\alpha x} + A\alpha e^{\alpha x} + Be^{\alpha x}$

$= e^{\alpha x}(\alpha^2 + A\alpha + B)$

Parentez icinin $p(\alpha)$ oldugunu goruyoruz.

$= e^{\alpha x}p(\alpha)$

Simdi bunlari yeni bir teori icin kullanalim

Ustel Girdi Teorisi

Bu teori Ustel Cevap Formulu (Exponential Response Formulu -ERF- olarak ta biliniyor).

ODE

$y'' + Ay' + By = e^{\alpha x}$

yani

$p(D)y = e^{\alpha x}$

icin ozel cozum sudur

$y_p = \dfrac{e^{\alpha x}}{p(\alpha)}$

Bu teori bu dersin en onemli teorilerinden biri. Bu dersteki pek cok kavrami yanyana getiriyor.

Ispat

Ispatlamak icin cozum y_p'yi ana denkleme koyalim ve alttaki ifadenin dogru olup olmayacagina bakalim. ODE'yi tekrar ifade edelim,

$$p(D)y = e^{\alpha x}$$

ama y yerine y_p koyalim, ve bakalim ifadenin sol tarafini donusturunce, sag taraftaki ayni sonuc cikacak mi?

$$= p(D)y_p$$

$$= p(D)\frac{e^{\alpha x}}{p(\alpha)}$$

Ust taraf icin yerine gecirme kuralini kullanalim

$$= \frac{p(\alpha)e^{\alpha x}}{p(\alpha)}$$

$$= e^{\alpha x}$$

Sag tarafta ayni ifadeye eristik, demek ki teori dogru. Peki ya $p(\alpha) = 0$ olsaydi? Bu onemli bir istisnai durum, ama problemde boyle olmadigini farzediyoruz.

Ornek

$$y'' - y' + 2y = 10e^{-x}sin(x)$$

Sag taraf gittikce yokolan (decaying) bir salinim. Genel cozumu bul.

Ozel cozumu bulalim ve sag tarafi kompleklestirelim.

$$(D^2 - D + 2)y = 10e^{(-1+i)x}$$

Komlekslestirmeyi nasil yaptim? Dikkat edersek, $10e^{-x}sin(x)$ ifadesi $10e^{(-1+i)x}$ ifadesinin kompleks kismini temsil ediyor.

$$e^{(-1+i)x} = e^{-x}e^{ix}$$

Euler acilimina gore $e^{ix} = cos(x) + isin(x)$, sadece hayali kismi alirsak

$$e^{-x}sin(x)$$

Basindaki 10'u da eklemeyi unutmuyoruz tabii. Bu teknigi daha once de kullanmistik, ve kullandigimiz zaman orijinal ODE'deki degiskenin uzerine bir dalga isareti koymustuk, cunku elimizde farkli bir ODE var, farkli ODE'den aldigimiz cozumun kompleks kismini almak gerekecek. Yeni formul

$$(D^2 - D + 2)\tilde{y} = 10e^{(-1+i)x}$$

Ozel cozum ne? ERF'ten hareketle

$$\tilde{y}_p = \frac{10e^{(-1+i)x}}{(-1+i)^2 - (-1+i) + 2}$$

$$= \frac{10e^{(-1+i)x}}{3-3i}$$

$$= \frac{10}{3}\frac{(1+i)}{2}e^{-x}\Big(cos(x) + isin(x)\Big)$$

y_p, $\tilde{y}_p$'nin hayali kismi olacak

$$\frac{5}{3}e^{-x}(cos(x) + sin(x))$$

Bu son formdan hoslanmiyorsak, onu hemen cevirebiliriz, dik ucgeni hatirlayalim, kenarlar 1 ve 1 ise hipotenusu $\sqrt{2}$

$$= \frac{5}{3}e^{-x}\sqrt{2}cos(x - \frac{\pi}{4})$$

Ya $p(\alpha) = 0$ Olursa?

Bu durumda ERF yerine yeni bir formul gerekecek. Bu yeni formul icin de yeni bir Yerine Gecirme Kanunu gerekecek.

Bu noktada α sembolu yerine a sembolunu kullanacagiz, ama temsil edilen sey hala kompleks bir sayi (not: kompleks olmasi garanti degil bu arada, en azindan kompleks olmasina izin veriliyor).

Ustel Kaydirma Kanunu (Exponential Shift Law)

Bu kanun alttaki ifadeyi basitlestirmekte kullaniliyor. Once bu ifadenin icerdigi cebirsel zorlugu gorelim.

$$p(D)e^{ax}u(x)$$

Eger bu formulun turevini alirsak, $u(x)$'in 2. hatta daha fazla derecelerdeki turevini almamiz gerecek. Bundan kurtulmanin bir yolu yok mu? Var. Ustel Kaydirma Kanununa gore eger e^{ax} $p(D)$ uzerinden sol tarafa gecerse, $p(D)$

degiserek $p(D+a)$ haline gelir.

$p(D)e^{ax}u(x) = e^{ax}p(D+a)u(x)$

Ispat

Ozel bir sarta bakalim, $p(D) = D$ olsun. O zaman

$p(D)e^{ax}u(x)$

su hale gelir

$= De^{ax}u$

$= De^{ax}Du + ae^{ax}u$

$= De^{ax}Du + ae^{ax}u$

$= e^{ax}(D+a)u$

ki son ifade kaydirma kanununu ile uyumlu.

Peki $P(D) = D^2$ olsaydi? Bunun ispati icin ustteki islemlerin hepsini tekrarlamaya gerek yok, mesela D^2e^{ax} hesabi yapmaya gerek yok, onceki hesabi kullanalim, $De^{ax}u$'u zaten biliyoruz

$D^2e^{ax}u = D(De^{ax}u) = D(e^{ax}(D+a)u)$

$= e^{ax}(D+a)[(D+a)u] = e^{ax}(D+a)^2u$

Bu sonucun D^3, D^4, vs. icin genellestirilebilecegini gorebiliyoruz herhalde. Matematiksel tumevarim (induction) ile $D^N N$ icin bu formul ispatlanabilir.

Devam edelim

$(D^2 + AD + B)y = e^{ax}$

a'nin kompleks olabilecegini unutmayalim, ama problemimiz su: $p(a) = 0$. Simdi ozel cozumu nasil elde edecegim?

$$y_p = \frac{xe^{ax}}{p'(a)}$$

Peki ya $p'(a) = 0$ olursa? Bunun icin a'nin $p(D)$'nin basit bir koku oldugunu farzedecegiz, cunku bu faraziye sayesinde $p'(a)$ hicbir zaman sifir olamaz.

Ya iki kokun ikisi de a olsaydi? Elde ikiden fazla kok olamaz tabii, cunku bir karesel denklemin ancak o kadar koku olabilir. O zaman ozel cozum soyle olacakti

$$y_p = \frac{x^2 e^{ax}}{p''(a)}$$

Daha ust seviye polinomlar icin bu isin nereye gittigi belli oluyor herhalde.

Bunlardan birini ispatlayalim isterseniz. Sunu mesela

$$y_p = \frac{xe^{ax}}{p'(a)}$$

Bu ispati ustel kaydirma kanunu kullanarak yapacagiz.

Ispat

Basit kok durumu

$$p(D) = (D - b)(D - a)$$

ve $b \neq a$ cunku iki tane farkli kok var. O zaman turevi alirsak

$$p'(D) = (D - a) + (D - b)$$

$$p'(a) = a - b$$

Onerdigimiz ozel cozum suydu

$$\frac{P(D)e^{ax}x}{p'(a)}$$

Amacimiz bu cozum icine daha once elde ettigimiz sonuclari koyarsak, ODE'nin sag tarafini, girdiyi elde etmek, boylece elimizde bir cozum oldugunu anlayabilmis olacagiz.

$$= e^{ax}(D + a - b)\frac{Dx}{p'(a)} = e^{ax}\frac{(a-b)\cdot 1}{a-b}$$

$$= e^{ax}$$

Ornek

$$y'' - 3y + 2y = e^x$$

e^x ile e^{ax} formunu karsilastirirsak, a'nin 1 oldugunu goruruz, yani a reel bir sayi. Ayrica a, $D^2 - 3D + 2$'nin basit bir koku, yerine koyarsak $D^2 - 3D + 2$'nin sifir verdigini gorurduk.

$$y_p = \frac{xe^x}{-1}$$

alttaki -1 nereden geldi?

$$p'(D) = 2D - 3$$

$$p'(1) = -1$$

Yani nihai sonuc

$$y_p = -xe^x$$