

En Yakın k-Komsu (k-Nearest Neighbor)

Yapay Ogrenim alanında örnek bazlı öğrenen algoritmalarından bilinen kNN, eğitim verinin kendisini sınıflama (classification) amaçlı olarak kullanır, yeni bir model ortaya çıkartmaz. Algoritma şöyle işler: etiketleri bilinen eğitim verisi alınır ve bir kenarda tutulur. Yeni bir veri noktası sorgulunca bu veriye geri donulur ve o noktaya “en yakın” k tane nokta bulunur. Daha sonra bu noktaların etiketlerine bakılır ve çoğunluğun etiketi ne ise, o etiket yeni noktanın etiketi olarak kabul edilir. Mesela elde 1 kategorisi altında $[2 \ 2]$, 2 kategorisi altında $[5 \ 5]$ var ise, yeni nokta $[3, \ 3]$ için yakınlık açısından $[2 \ 2]$ bulunmalı ve etiket olarak 1 sonucu dondurulmalıdır.

Ustte tarif edilen basit bir ihtiyaç, yöntem gibi görülebilir. Fakat yapay öğrenim ve yapay zeka çok boyutlarda örüntü tanıma (pattern recognition) ile uğraşır, ve milyonlarca satırlık veri, onlarca boyut (üstteki örnekte 2, fakat çoğunlukla çok daha fazla boyut vardır) işler hakikaten zorlaşabilir. Mesela görüntü tanımadaki veri $M \times N$ boyutundaki dijital imajlar (düzleştirilince $M \cdot N$ boyutunda), ve onların içindeki resimlerin kime ait olduğu etiket bilgisi olabilir. kNN bu tür multimedya, çok boyutlu veri ortamında başarılı şekilde çalışabilmektedir. Ayrıca en yakın k komşunun içeriği tarıfsel bilgi çıkarımı (knowledge extraction) amacıyla da kullanılabilir [2].

“En yakın” sözü bir koordinat sistemi anlamına geliyor, ve kNN, aynen k-Means ve diğer pek çok koordinatsal öğrenme yöntemi gibi eldeki çok boyutlu veri noktalarının elemanlarını bir koordinat sistemindeymiş gibi görür. Kiyasla mesela APriori gibi bir algoritma metin bazlı veriyle olduğu gibi çalışabilirdi.

Peki arama bağlamında, bir veri obesi içinden en yakın noktaları bulmanın en basit yolu nedir? Listeyi bastan sonra taramak (kaba kuvvet yöntemi -brute force-) listedeki her nokta ile yeni nokta arasındaki mesafeyi teker teker hesaplayıp en yakın k taneyi içinden seçerdi, bu bir yöntemdir.. Bu basit algoritmanın yuku $O(N)$ 'dir. Eğer tek bir nokta arıyor olsaydık, kabul edilebilir olabilirdi. Fakat genellikle bir sınıflayıcı (classifier) algoritmasının sürekli işlemesi, mesela bir online site için günde milyonlarca kez bazı kararları alması gerekebilir. Bu durumda ve N 'in çok büyük olduğu şartlarda, üstteki hız bile yeterli olmayacaktır.

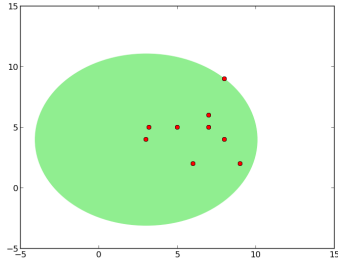
Arama işlemini daha hızlı yapmanın yolları var. Akıllı arama algoritmaları kullanarak eğitim verilerini bir ağac yapısı üzerinden tarayıp erişim hızını $O(\log N)$ 'e indirmek mümkündür.

Küre Ağaçları (Ball Tree, BT)

Bir noktanın diğer noktalara yakın olup olmadığının hesabında yapılması gereken en pahalı işlem nedir? Mesafe hesabıdır. BT algoritmasının puf noktası bu hesabi yapmadan, noktalara değil, noktaları kapsayan “kürelere” bakarak hız kazandırmasıdır. Noktaların her biri yerine o noktaları temsil eden kürenin mihenk noktasına (pivot -bu nokta küre içindeki noktaların ortalamasal olarak merkezi de olabilir, herhangi bir başka nokta da-) bakılır, ve oraya olan mesafeye göre bir küre altındaki noktalara olabilecek en az ve en fazla uzaklık hemen anlaşılmış olur.

Not: Kure kavrami uc boyutta anlamlı tabii ki, iki boyutta bir cemberden bahsetmek lazım, daha yüksek boyutlarda ise merkezi ve çapı olan bir “hiper yüzeyden” bahsetmek lazım. Tarifi kolaylaştırdığı için cember ve kure tanımlarını kullanıyoruz.

Mesela elimizde alttaki gibi noktalar var ve kureyi oluşturduk.

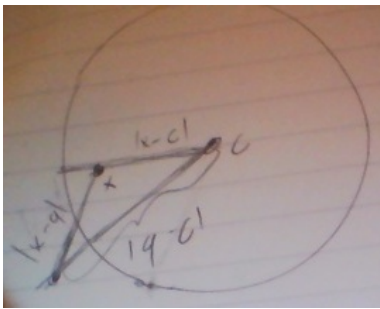


Bu kureyi kullanarak kure dışındaki herhangi bir nokta q 'nın kuredeki ”diğer tüm noktalar x 'e” olabileceği en az mesafenin ne olacağını üçgenel eşitsizlik ile anlayabiliriz.

Üçgenel eşitsizlik

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

$||$ operatörü norm operatörü anlamına gelir ve uzaklık hesabının genelleştirilmiş halidir. Konu hakkında daha fazla detay için *Fonksinel Analiz* ders notlarımıza bakabilirsiniz. Kısaca söylenmek istenen iki nokta arasında direkt gitmek yerine yolu uzatırsak, mesafe artacaktır. Tabii uzaklık, yol, nokta gibi kavramlar tamamen soyut matematiksel ortamda da işleyecek şekilde ayarlanmıştır. Mesela mesafe (norm) kavramını değiştirebiliriz, Öklitsel yerine Manhattan mesafesi kullanırız, fakat bu kavram bir norm olduğu ve belirttiğimiz uzayda geçerli olduğu için üçgenel eşitsizlik üzerine kurulmuş tüm diğer kurallar geçerli olur.



Şimdi diyelim ki dışarıdaki bir q noktasından bir kure içindeki diğer tüm x noktalarına olan mesafe hakkında bir şeyler söylemek istiyoruz. Üstteki şekilde bir üçgenel eşitsizlik çıkarabiliriz,

$$|x - c| + |x - q| \geq |q - c|$$

Bunun doğru bir ifade olduğunu biliyoruz. Peki şimdi yarıçapı bu ise dahil edelim,

çünkü yarıçap hesabi bir kere yapılıp küre seviyesinde depolanacak ve bir daha hesaplanması gerekmeyecek, yani algoritmayı hızlandıracak bir şey olabilir bu, o zaman eğer $|x - c|$ yerine yarıçapı kullanırsak, eşitsizlik hala geçerli olur, sol taraf zaten büyüktü, şimdi daha da büyük olacak,

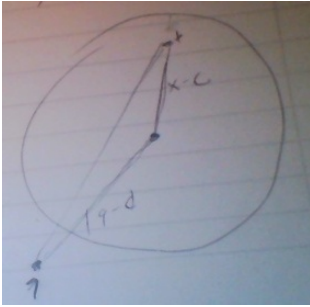
$$radius + |x - q| \geq |q - c|$$

Bunu nasıl böyle kesin bilebiliyoruz? Çünkü BT algoritması radius'u $|x - c|$ 'ten kesinlikle daha büyük olacak şekilde seçer). Şimdi yarıçapı saga geçirelim,

$$|x - q| \geq |q - c| - radius$$

Boylece güzel bir tanım elde ettik. Yeni noktanın kuredeki herhangi bir nokta x 'e olan uzakligi, yeni noktanın mihenke olan uzakliginin yarıçapı cikartilmis halinden *muhakkak* fazladır. Yani bu cikartma isleminde ele gecen rakam yeni noktanın x 'e uzakligina bir "alt sinir (lower bound)" olarak kabul edilebilir. Diger tum mesafeler bu rakamdan daha büyük olacaktır. Ne elde ettik? Sadece bir yeni nokta, mihenk ve yarıçap kullanarak kuredeki "diger tum noktalar hakkında" bir irdelime yapmamiz mumkun olacak. Bu noktalara teker teker bakmamiz gerekmeyecek. Bunun nasıl ise yaradigini algoritma detaylarında görecegiz.

Benzer şekilde



Bu ne diyor?

$$|q - c| + |x - c| \geq |q - x|$$

$|x - c|$ yerine yarıçap kullanırsak, sol taraf büyüyeceği için büyüklük hala büyüklük olarak kalır,

$$|q - c| + radius \geq |q - x|$$

Ve yine daha genel ve hızlı hesaplanan bir kural elde ettik (önceki ifadeye benzemesi için yer düzenlemesi yapalım)

$$|q - x| \leq |q - c| + radius$$

Bu ifade ne diyor? Yeni noktanin mihenke olan uzakligina yaricap “eklenirse” bu uzaklikten, buyuklukten daha buyuk bir yeni nokta / kure mesafesi olamaz, kuredeki hangi nokta olursa olsun. Bu esitsizlik te bize bir ust sinir (upper bound) vermis oldu.

Algoritma

Kure Agaclari (BT) metodu once kureleri, agaclari olusturmalidir. Bu kureler hiyerarsik sekilde planlanir, tum noktalarin icinde oldugu bir ”en ust kure” vardir her kurenin iki tane cocuk kuresi olabilir. Belli bir (disaridan tanimlanan) minimum r_{min} veri noktasina gelinceye kadar sadece noktalar geometrik olarak kapsamakla goreli kureler olusturulur, kureler noktalar sahiplenmezler. Fakat bu r_{min} sayisina erisince (artik oldukca alttaki) kurelerin uzerine noktalar konacaktır.

Once tek kurenin olusturulusuna bakalim. Bir kure olusumu icin eldeki veri icinden herhangi bir tanesi mihenk olarak kabul edilebilir. Daha sonra bu mihenkten diger tum noktalara olan uzaklik olculur, ve en fazla, en buyuk olan uzaklik yaricap olarak kabul edilir (her seyi kapsayabilmesi icin).

Not: Bu arada ”tum diger noktalara bakilmasi” dedik, bundan kacinmaya calismiyor muyduk? Fakat dikkat, ”kure olusturulmasi” evresindeyiz, k tane yakin nokta arama evresinde degiliz. Yapmaya calistigimiz aramalar hizlandirmak - egitim / kure olusturmasi bir kez yapilacak ve bu egitilmis kureler bir kenarda tutulacak ve surekli aramalar icin ardi ardina kullanilacaklar.

Kureyi olusturmanin algoritmasi soyledir: verilen noktalar icinde herhangi birisi mihenk olarak secilir. Sonra bu noktadan en uzakta olan nokta f_1 , sonra f_1 ’den en uzakta olan nokta f_2 secilir. Sonra tum noktalara teker teker bakilir ve f_1 ’e yakin olanlar bir gruba, f_2 ’ye yakin olanlar bir gruba ayrilir.

```
import itertools

def dist(vect,x):
    return np.fromiter(itertools.imap
                        (np.linalg.norm, vect-x),dtype=np.float)

def norm(x,y): return np.linalg.norm(x-y)

points = np.array([[3.,3.],[2.,2.]])
q = [1.,1.]
print "diff", points-q
print "dist", dist(points,q)

diff [[ 2.  2.]
      [ 1.  1.]]
dist [ 2.82842712  1.41421356]

# k-nearest neighbor Ball Tree algorithm in Python
import pprint
```

```

__rmin__ = 2

# node: [pivot, radius, points, [child1,child2]]
def new_node(): return [None,None,None,[None,None]]

def zero_if_neg(x):
    if x < 0: return 0
    else: return x

def form_tree(points,node):
    pivot = points[0]
    radius = np.max(dist(points,pivot))
    node[0] = pivot
    node[1] = radius
    if len(points) <= __rmin__:
        node[2] = points
        return
    idx = np.argmax(dist(points,pivot))
    furthest = points[idx,:]
    idx = np.argmax(dist(points,furthest))
    furthest2 = points[idx,:]
    dist1=dist(points,furthest)
    dist2=dist(points,furthest2)
    diffs = dist1-dist2
    p1 = points[diffs <= 0]
    p2 = points[diffs > 0]
    node[3][0] = new_node() # left child
    node[3][1] = new_node() # right child
    form_tree(p1,node[3][0])
    form_tree(p2,node[3][1])

# knn: [min_so_far, [points]]
def search_tree(new_point, knn_matches, node, k):
    pivot = node[0]
    radius = node[1]
    node_points = node[2]
    children = node[3]

    # calculate min distance between new point and pivot
    # it is direct distance minus the radius
    min_dist_new_pt_node = norm(pivot,new_point) - radius

    # if the new pt is inside the circle, its potential minimum
    # distance to a random point inside is zero (hence
    # zero_if_neg). we can only say so much without looking at all

```

```

# points (and if we did, that would defeat the purpose of this
# algorithm)
min_dist_new_pt_node = zero_if_neg(min_dist_new_pt_node)

knn_matches_out = None

# min is greater than so far
if min_dist_new_pt_node >= knn_matches[0]:
    # nothing to do
    return knn_matches
elif node_points != None: # if node is a leaf
    print knn_matches_out
    knn_matches_out = knn_matches[:] # copy it
    for p in node_points: # linear scan
        if norm(new_point,p) < radius:
            knn_matches_out[1].append([list(p)])
            if len(knn_matches_out[1]) == k+1:
                tmp = [norm(new_point,x) \
                        for x in knn_matches_out[1]]
                del knn_matches_out[1][np.argmax(tmp)]
                knn_matches_out[0] = np.min(tmp)
    else:
        dist_child_1 = norm(children[0][0],new_point)
        dist_child_2 = norm(children[1][0],new_point)
        node1 = None; node2 = None
        if dist_child_1 < dist_child_2:
            node1 = children[0]
            node2 = children[1]
        else:
            node1 = children[1]
            node2 = children[0]

    knn_tmp = search_tree(new_point, knn_matches, node1, k)
    knn_matches_out = search_tree(new_point, knn_tmp, node2, k)

return knn_matches_out

points = np.array([[3.,4.],[5.,5.],[9.,2.],[3.2,5.],[7.,5.],
                  [8.,9.],[7.,6.],[8,4],[6,2]])
tree = new_node()
form_tree(points,tree)
pp = pprint.PrettyPrinter(indent=4)
print "tree"
pp.pprint(tree)
newp = np.array([7.,7.])

```

```
dummysp = [np.Inf,np.Inf] # it should be removed immediately
res = search_tree(newp,[np.Inf, [dummysp]], tree, k=2)
print "done", res
```

```
tree
[ array([ 3.,  4.]),
  7.0710678118654755,
  None,
  [ [ array([ 8.,  9.]),
      3.1622776601683795,
      array([[ 8.,  9.],
        [ 7.,  6.]]),
      [None, None]],
    [ array([ 3.,  4.]),
      6.324555320336759,
      None,
      [ [ array([ 9.,  2.]),
          3.6055512754639891,
          None,
          [ [ array([ 7.,  5.]),
              1.4142135623730951,
              array([[ 7.,  5.],
                [ 8.,  4.]]),
              [None, None]],
            [ array([ 9.,  2.]),
              3.0,
              array([[ 9.,  2.],
                [ 6.,  2.]]),
              [None, None]]]],
          [None, None]]],
      [ array([ 3.,  4.]),
        2.2360679774997898,
        None,
        [ [ array([ 5.,  5.]),
            0.0,
            array([[ 5.,  5.]]),
            [None, None]],
          [ array([ 3.,  4.]),
            1.019803902718557,
            array([[ 3.,  4.],
              [ 3.2,  5. ]]),
            [None, None]]]]],
        [None, None]]]]]]]
None
done [1.0, [[[8.0, 9.0]], [[7.0, 6.0]]]]
```

```

Procedure BallKNN ( $PS^{in}, Node$ )
begin
  if ( $D_{minp}^{Node} \geq D_{sofar}$ ) then                                /* If this condition is satisfied, then impossible
    Return  $PS^{in}$  unchanged.                                     for a point in Node to be closer than the
                                                                previously discovered  $k^{th}$  nearest neighbor.*/
  else if (Node is a leaf)
     $PS^{out} = PS^{in}$ 
     $\forall x \in Points(Node)$ 
    if ( $\|x - q\| < D_{sofar}$ ) then                                /* If a leaf, do a naive linear scan */
      add  $x$  to  $PS^{out}$ 
      if ( $\|PS^{out}\| == k + 1$ ) then
        remove furthest neighbor from  $PS^{out}$ 
        update  $D_{sofar}$ 
  else                                                         /* If a non-leaf, explore the nearer of the two
     $node_1 = \text{child of Node closest to } q$                     child nodes, then the further. It is likely that
     $node_2 = \text{child of Node furthest from } q$                 further search will immediately prune itself.*/
     $PS^{temp} = BallKNN(PS^{in}, node_1)$ 
     $PS^{out} = BallKNN(PS^{temp}, node_2)$ 
end

```

Bu iki grup, o anda islemekte oldugumuz agac dugumun (node) iki cocuklari olacaktir. Cocuk noktaları kararlaştirildikten sonra artık sonraki asamaya gecilir, fonksiyon `form_tree` bu cocuk noktaları alarak, ayri ayri, her cocuk grubu icin ozyineli (recursive) olarak kendi kendini cagirir. Kendi kendini cagiran `form_tree`, tekrar basladiginda kendini yeni (bir) nokta grubu ve yeni bir dugum objesi ile bas-basa bulur, ve hicbir seyden habersiz olarak isleme koyulur. Tabii her ozyineli cagri yeni dugum objesini yaratirken bir referansi ustteki ebeveyn dugume koymayi unutmamistir, böylece ozyineli fonksiyon dunyadan habersiz olsa bile, agacin en ustunden en altina kesintisiz bir baglanti zinciri hep elimizde olur.

Not: `form_tree` icinde bir numara yaptik, tum noktaların f_1 'e olan uzakligi `dist1`, f_2 'e olan uzakligi ise `dist2`. Sonra `diffs = dist1-dist2` ile bu iki uzakligi birbirinden cikartiyoruz ve mesela `points[diffs <= 0]` ile f_1 'e yakin olanları buluyoruz, cunku bir tarafta f_1 'e yakınlık 4 diger tarafta f_2 'ye yakınlık 6 ise, $4-6=-2$ ie o nokta f_1 'e yakın demektir. Ufak bir numara ile Numpy dilimleme (slicing) teknigini kullanabilmiş olduk ve bu önemli cunku böylece `for` dongusu yazmıyoruz, Numpy'in arka planda C ile yazılmış hizli rutinlerini kullanıyoruz.

Ek bazı bilgiler: kurelerin sinirlari kesisebilir.

Arama

Ustte sozde program (pseudocode) *BallKNN* olarak gosterilen ve bizim kodda `search_tree` olarak anılan fonksiyon arama fonksiyonu. Aranan `new_point`'e olan k en yakin diger veri noktalar. Disaridan verilen degisken `knn_matches` üzerinde fonksiyon ozyineli bir sekilde arama yaparken "o ana kadar bulunmus en yakin k nokta" ve o noktaların `new_point`'e olan en yakin mesafesi saklanır, arama isleyisi sirasinda `knn_matches`, `knn_matches_out` surekli verilip geri dondurulen degiskenlerdir, sozde programdaki P^{in}, P^{out} 'un karsiligidirlar.

Arama algoritmasi soyle isler: simdi onceden olusturulmus kure hiyerarisisini ustten alta dogru gezmeye baslariz. Her basamakta yeni nokta ile o kurenin mihenkini, yaricapini kullanarak bir "alt sinir mesafe hesabi" yapariz, bu mesafe hesabının

arkasında yatan düşünceyi yazının başında anlatmıştık. Bu mesafe kure içindeki tüm noktalara olan bir en az mesafe idi, ve eğer eldeki `knn_matches` üzerindeki şimdiye kadar bulunmuş mesafelerin en azından daha az ise, o zaman bu kure "bakmaya değer" bir kuredir, ve arama algoritması bu kureden işleme devam eder. Şimdiye kadar bulunmuş mesafelerin en azı `knn_matches` veri yapısı içine `min_so_far` olarak saklanıyor, sözde programdaki $D_{so\ far}$.

Bu irdeleme sonrası (yani vs kuresinden yola devam kararı arkasından) işleme iki şekilde devam edilebilir, çünkü bir kure iki turden olabilir; ya nihai en alt kurelerden biridir ve üzerinde gerçek noktalar depolanmıştır, ya da ara kurelerden biridir (sona gelmedik ama doğru yoldayız, daha alta inmeye devam), o zaman fonksiyon yine ozyineli bir şekilde bu kurenin çocuklarına bakacaktır - her çocuk için kendi kendini çağıracaktır. İkinci durumda, kurede noktalar depolanmıştır, artık basit lineer bir şekilde o tüm noktalara teker teker bakılır, eldekilerden daha yakın olanı alınır, eldeki liste sismeye başlamışsa (k'den daha fazla ise) en büyük noktalardan biri atılır [3], vs.

Daha alta inmemiz gereken birinci durumda yapılan iki çağrının bir özelliğine dikkat çekmek isterim. Yeni noktanın bu çocuklara olan uzaklığı da ölçülüyor, ve en önce, en yakın olan çocuğa doğru bir ozyineleme yapılıyor. Bu nokta çok önemli: niye böyle yapıldı? Çünkü içinde muhtemelen daha yakın noktaların olabileceği kurelere doğru gidersek, ozyineli çağrının teker teker bitip yukarı doğru çıkmaya başlaması ve kaldıkları yerden bu sefer ikinci çocuk çağrılarını yapmaya başlaması ardından, elimizdeki `knn_matches` üzerinde en yakın noktaları büyük bir ihtimalle zaten bulunmuş olacağız. Bu durumda ikinci çağrı yapılsa bile tek bir alt sınır hesabı o kurede dikkate değer hiçbir nokta olamayacağını ortaya çıkaracak (çünkü en iyiler zaten elimizde), ve ikinci çocuğa olan çağrılar hiç alta inmeden pat diye geri dönecektir, hiç aşağı inilmeyecektir.

Bu muthis bir kazanımdır: zaten bu stratejiye liteturde "budamak (pruning)" adı veriliyor, bu da çok uygun bir kelime aslında, çünkü ağaçlarla uğraşıyoruz ve bir düğüm (kure) ve onun altındaki hiçbir alt kureye uğramaktan kurtularak o dalların tamamını bir nevi "budamış" oluyoruz. Bir sürü gereksiz işlemde de kurtuluyoruz bu arada, ve aramayı hızlandırıyoruz.

Mesafeler

Algoritmanın mesafeleri anlatan kısmında norm ve uzaylar gibi kavramlardan bahsettik. Yeni noktanın mihlenke olan uzaklığının o kure içindeki tüm diğer noktalara olan uzaklığını temsil edebileceğini söyledik: peki niye bu kavramları direk bu şekilde anlatmadık, ve norm, ügensel esitsizlik gibi kavramlardan bahsettik? Çünkü 2 ve 3 boyut sonrası uzayları görsel olarak düşünmek mümkün değildir, istediğimiz kadar ellerimizi kollarımızı sallayalım, bu kavramları görsel olarak tarif edemeyiz, ve değişik bir norm (mesafe) ölçütü kullanmayı seçebiliriz. Bu her iki durumda da elimizde soyut matematik bağlamında sağlam bir temel olduğunu bilmek algoritmanın genelliğini, ve değişik şartlarda uygulanabilirliğini arttırır. Mesela Oklit mesafesi yerine Manhattan mesafesi kullansam bile, bu mesafenin ölçütünün norm kurallarını uyduğunu bildiğim için kNN yapısının geri kalanını olduğu gibi kullanabilirim,

çünkü o yapının geçerliliğini normlar üzerinde geçerli uçsuzluk üzerinde ispat ettim.

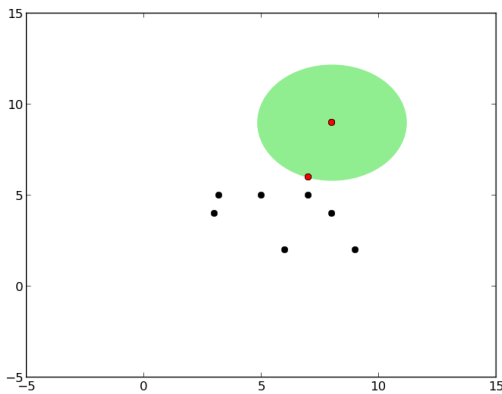
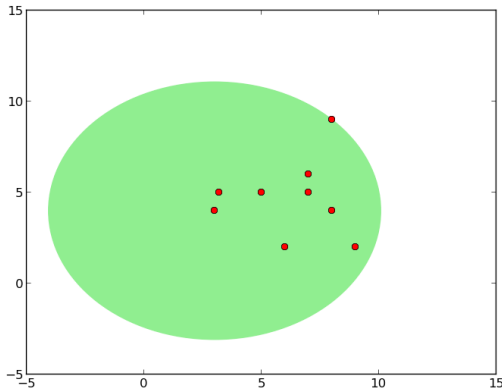
Model

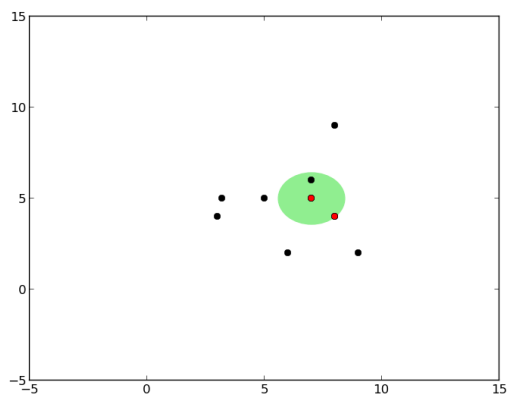
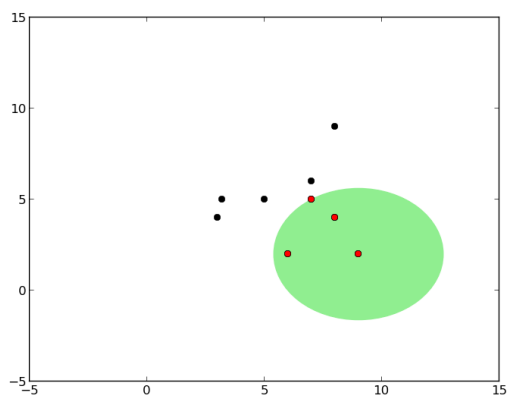
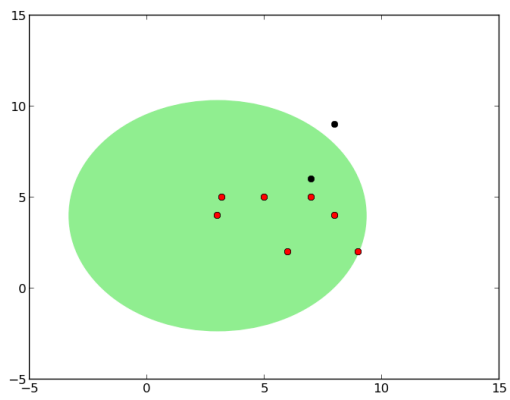
kNN'in model kullanmayan, model yerine verinin kendisini kullanan bir algoritma olarak tanıttık. Peki “eğitim” evresi sonrası ele geçen küreler ve ağacı yapısı bir nevi model olarak görülebilir mi?

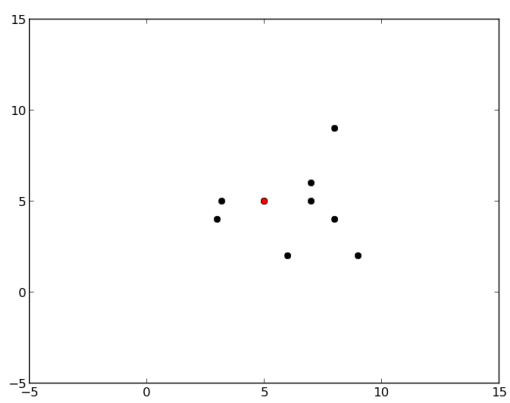
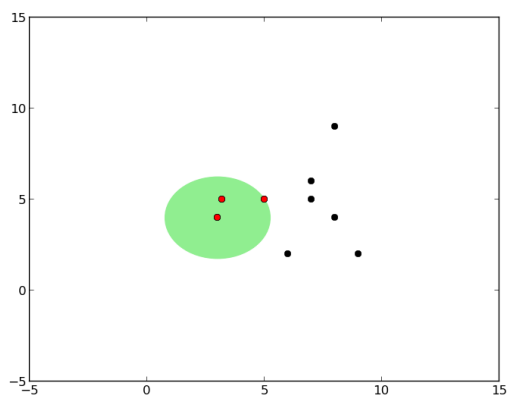
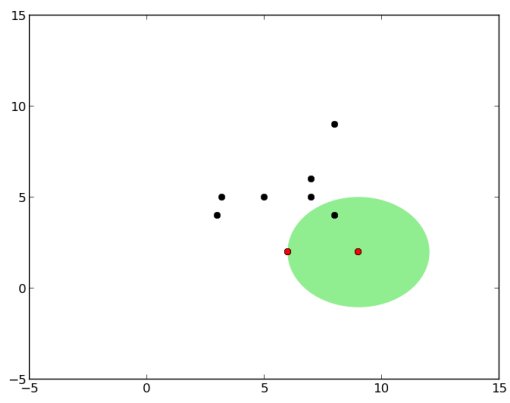
Bu önemli bir soru, ve bir bakıma, evet ağacı yapısı sanki bir modelmiş gibi duruyor. Fakat, mesela istatistiksel, grafiksel, yapay sinir ağları (neural net) bağlamında bakılırsa bu yapıya tam bir model denemez. Model bazlı metodlarda model kurulunca veri atılır, ona bir daha bakılmaz. Fakat kNN, küre ve ağacı yapısını hala eldeki veriye erismek için kullanmaktadır. Yani bir bakıma veriyi “indeksliyoruz”, ona erişimi kolaylaştırıp hızlandırıyoruz, ama ondan model çıkartmıyoruz.

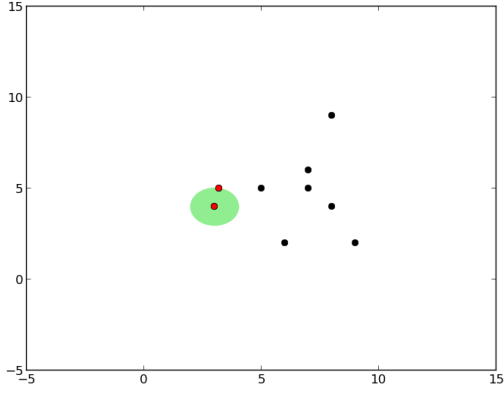
Not: Verilen Python kodu ve algoritma yakın noktaları hesaplıyor sadece, onların etiketlerinden hareketle yeni noktanın etiketini tahmin etme aşamasını gerçekleştirmiyor. Fakat bu son aşama işin en basit tarafı, eğitim veri yapısına eklenecek bir etiket bilgisi ve sınıflama sonrası k noktanın ağırlıklı etiketinin hesabi ile basit şekilde gerçekleştirilebilir.

Ağacı oluşumu sırasında kürelerin grafiği alttadır.









Kaynaklar, Notlar

- [1] Liu, Moore, Gray, New Algorithms for Efficient High Dimensional Non-parametric Classification
- [2] Alpaydın, Introduction to Machine Learning
- [3] Silme islemi ornek kodumuzda Python `del` ile gercekleştirildi. Eger bu islem de hizlandirilmak istenirse, en alt kure seviyesindeki veriler bir oncelik kuyruğu (priority queue) üzerinde tutulabilir, ve silme islemi hep en sondaki elemani siler, ekleme islemi ise yeni elemani (hep sirali olan) listede dogru yere koyar.