

## MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 5

Bir cizginin formülünü iki düzlemin kesişimi olarak gördük, fakat bu şekilde bir tanım cöğunlukla bir cizgiyi tanımlamak için en rahat / uygun yol değildir, çünkü elinizde bazı denklemler var, bunları çözmekle uğrasmak lazım, vs.

Soyle bir yöntem daha iyi olmaz mı? Cizgi üzerinde bir nokta hayal edelim, ve bu noktanın, her zaman adimında, cizgimizin olduğu yerlerden geçtiğini düşünelim. Bu tür denklemlere parametrik denklem ismi veriliyor.

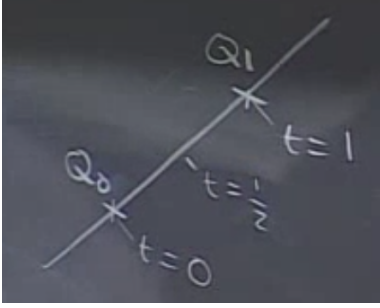
Örnek

Cizgi üzerinde iki nokta verelim.

$$Q_0 = (-1, 2, 2)$$

$$Q_1 = (1, 3, -1)$$

Güzel, bu iki nokta var ama ötekilerini nasıl tanımlarız? Bu iki noktalarının arasında, sonrasında, öncesinde olan tüm noktalar da cizgiye dahildir.



Zaman aralıklarını öyle düşünelim ki zaman indeksi sıfır ( $t = 0$ ) noktasında, cizgi  $Q_0$  üzerinde, tek birim adım atıldığında ( $t = 1$ )  $Q_1$  üzerinde, gibi. O zaman yarım birim zamanda tam iki nokta ortasında.

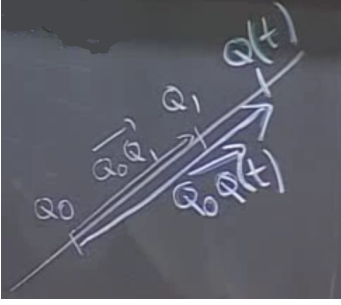
Boylece cizgiyi temsil etmenin yolu onu  $t$  bazında hareket eden noktanın geçtiği yerler olarak tanımlamak. Bu temsilin en basit hali eğer hareket sabit hızda olursa olur.

$t$  anındaki pozisyon  $Q(t)$  nedir?

Sorunun cevabını söyle vermeye başlayabiliriz:  $Q_0\vec{Q}(t)$  vektörü  $Q_0\vec{Q}_1$  bir-biriyle ortalıdır. Bu orantı neye esittir?

Bu oran  $t$ 'ye esittir. O zaman

$$Q_0 \vec{Q}(t) = t Q_0 \vec{Q}_1$$



O zaman iddia ediyorum ki bu formulu kullanarak ornegimizdeki hareket eden noktanin yer formulunu bulabilirim.

$$Q_0 \vec{Q}(t) = t \langle 2, 1, -3 \rangle$$

Simdi cizgi uzerinde hareket eden noktanin formulu  $Q(t)$ 'yi su sekilde temsil edelim

$$Q(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

O zaman

$$x(t) + 1 = t^2$$

$$y(t) - 2 = t$$

$$z(t) - 2 = -3t$$

Usttekiler, alttaki su formun acilimindan ibaret aslinda

$$Q(t) = Q_0 + t Q_0 \vec{Q}_1$$

Ustteki uc formül bu derste gordugumuz ilk parametrik cizgi formulu. Formulun parcalari olan  $x(t), y(t), z(t)$  sadece  $t$ 'nin fonksiyonudurlar, ve hep  $t$  ile bir katsayinin carpimi + bir sabit formundadirlar.  $t$ 'nin katsayilari cizgi uzerindeki vektor hakkında bilgi verir, ve sabitler ise  $t = 0$  aninda nerede oldugumuzu gosteren baslangic degerleridirler.

Uygulama - Bir Duzlem ile Kesisme

Duzlem  $x + 2y + 4z = 7$ . Cizgi biraz onceki formül olsun. Kesisme var midir,

var ise nerededir?

Önce su soruyu soralım kendimize.  $x + 2y + 4z = 7$  düzlemine göre,  $Q_0 = (-1, 2, 2)$  ve  $Q_1 = (1, 3, -1)$  noktaları düzlemin

1. Aynı tarafında
2. Farklı taraflarında
3. Bir tanesi düzlem üzerinde
4. Karar veremiyorum

Cevaplayın.

$Q_0$  ve  $Q_1$  noktalarını düzlem formülünün sol tarafına sokarız.  $Q_0$  için sonuç  $> 7$ , düzlem üzerinde değil,  $Q_1$  için sonuç  $< 7$ , yine düzlem üzerinde değil. Peki noktalar düzlemin hangi tarafında? Ters tarafında, çünkü biri  $< 7$ , diğeri  $> 7$  sonuç verdi. Bir düzlem uzayı iki yarı-parçaya (halfspace) ayırır ve noktalar bu ayrı parçalardadırlar. Doğru cevap 2.

Uygulamamızda cevaplanmayan bir soru daha var. Kesişme noktası neresi?  $Q(t)$  nedir? Soyle

$$\begin{aligned} x(t) + 2y(t) + 4z(t) \\ = (-1 + 2t) + 2(2 + t) + 4(2 - 3t) \end{aligned}$$

Basitleştirelim

$$= -8t + 11$$

Bu formülü 7 ile karşılaştıralım çünkü  $Q(t)$  nin düzlem üzerinde olduğu an  $-8t + 11 = 7$  olduğu andır. Cebirsel olarak  $t$ 'yi elde edebiliriz, sonuç  $t = 1/2$ . Bu değeri  $Q(t)$ 'ye koyarsak

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Kesişim noktası eşitliğin sağındaki değerdir.

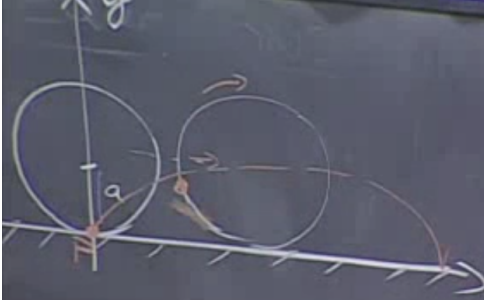
Yani eğer çizginin parametrik denklemini biliyorsak, onu düzlem formülüne sokarız, ve kesişimin hangi noktada olduğunu hemen hesaplayabiliriz.

Simdiye kadar gorduklerimizden parametrik denklemlerin cizgileri temsil etmek icin iyi bir yontem olduklari belli olmustur herhalde. Bunun otesinde parametrik denklemler uzaydaki herhangi bir egri (curve), herhangi bir gidisati, yolu (trajectory) temsil etme kabiliyetine de sahiptir.

Genel baglamda soylemek gerekirse, parametrik denklemleri uzayda icinde ya duzlem üzerindeki herhangi (arbitrary) bir hareketi temsil etmek icin kullanabiliriz.

Cycloid (Yuvarlanma Egrisi)

$a$  yari capindaki bir tekerlek yerde (x-ekseninde) donerek ilerliyor,  $P$  bu tekerlegin dis ceperinde (rim) bir nokta, baslangic noktası 0 üzerinde. Ne olur? Daha detayli olarak sormak gerekirse  $P$  noktasinin hareketini  $t$ 'nin bir fonksiyonu  $x(t), y(t)$  olarak hesaplayabilir miyiz?



[x-ekseni biraz saga yatik cikmis ama bu video kamerasinin acisi yuzunden]. Bu ornegi bir bisikletin tekerligine takilmis bir isigin, bisiklet gece giderken ortaya cikartabilecegi goruntuyu dusunurek te hayal edebiliriz. Yani hem donus hareketi var, hem de yatay olarak duz bir gidis hareketi var.

Bu  $P$  noktasinin gidis yolunu hesaplamak icin tekerlegin ne kadar hizli dondugu onemli mi? Hayir degil. Yavas ta hizli da dondursek,  $P$  ayni noktalar-dan gececektir.

Bu problemde en onemli faktor zaman degil, mesafe, tekerlegin ne kadar mesafe katettigi. Ya da daha bile iyisi, mesafe ile donus birbirine baglan-tili olduguna gore, ve problemdeki en cetretil, girift olus donme (rotation) olduguna icin, belki de tekerlegin ne kadar dondugunu gosteren bir aci degeri, bu buyuklugu kullanirsak belki daha faydali olacak. Pek cok degisik temsil yontemi olabilir, fakat aciya gore parametrize edersek en temiz formulu elde etmek mumkun olur.