Ozdegerler ve Ozvektorler ile Imaj Bolmek, Gruplamak

Sentetik görüş (machine vision) dalında, karşımıza çıkan en temel problemlerden biri, pikselleri guruplayarak bir nesneleyi tanımlamaktır. Bildiğimiz gibi, robot gözden gelen sayısal bilgiler ışığında, 3-boyutlu dünya bilgisayar için 2 boyutlu bir dünyaya dönüşür. Bu dünyada, pikseller arasındaki bağlantı kaybolmuştur. Yani, elimizdeki veriye tarafsız bir şekilde bakarsak, iki pikselin hangi nesneye ait olduğunu belirten 'gizli' bir kodlama bulmamız imkansızdır. İmgecikler arasında yapmamız gereken bu bağlantıyı, algoritmalar kullanarak sonradan yapmaya mecbur kalıyoruz. Yani, insan gözünün aynen yaptığı gibi.

İşte burada, guruplama (clustering) yöntemleri denen bir dizi algoritma ve 'düşünce şekli' yardımımıza yetişiyor. Çok temel bir konu olduğu için, guruplama hakkında bir çok araştırmacı harıl harıl yeni yaklaşımlar bulmak ile meşguller. Fakat daha hala tek bir kuram diyebileceğimiz 'hep işleyen' bir yaklaşım bulunabilmiş değil. Her değişik ortam için, değişik guruplama yöntemleri kullanılıyor.

Her yöntemin başarı miktarı ötekine göre farklı. Burada özetleyeceğim yöntem, doğrusal cebir ve çizge spektrum (spectrum) analizi yaparak guruplamayı başarıyor. Bu kelimelerin anlamlarını aşağıda belirtelim.

Doğrusal cebir, matematik derslerinden hatırlayabileceğimiz gibi, üstü olmayan bilinmezli denklemleri çözmenin aritmetiği demektir. Yani doğrusal cebir denklemlerindeki bilinmeyenler, x, y, z gibi değerlerdir. x^2, y^2 gibi bilinmezlerle bu dalda uğraşılmaz.

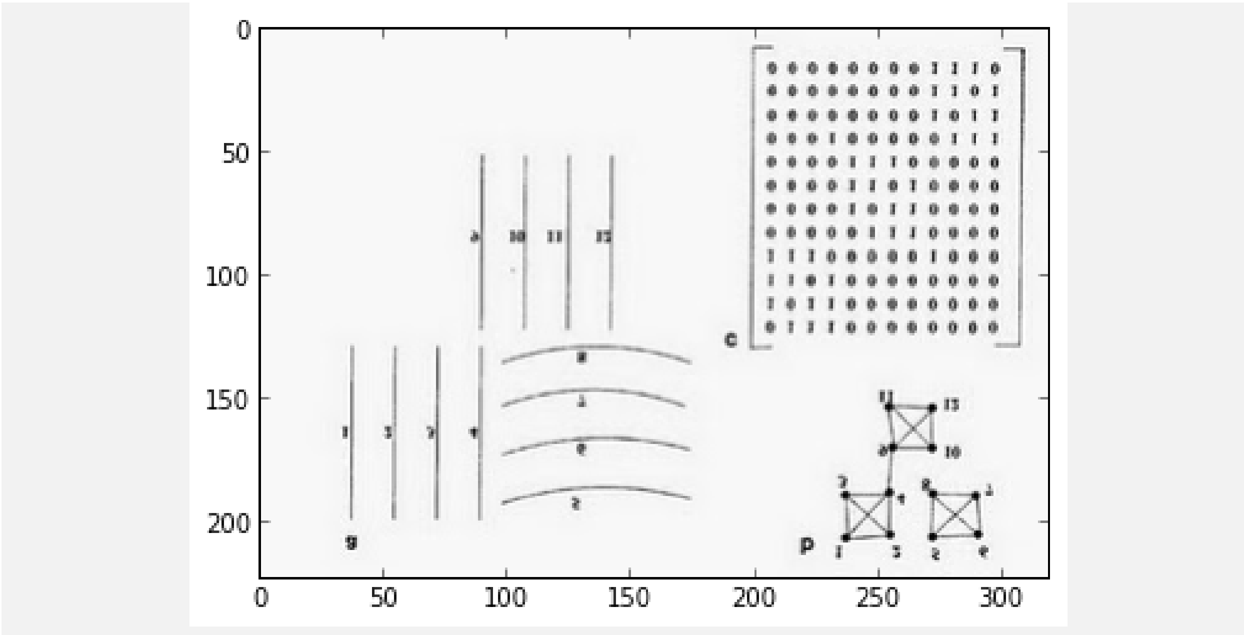
Doğrusal cebir oldukca iyi araştırılmış ve kuramları yerine oturmuş bir matematik dalıdır. Her ne kadar üniversitelerde analiz (calculus) dersi kadar önem verilmese de, bilgisayarların daha güçlenmesi ile doğrusal cebir daha da çok ragbet görür oldu. Doğrusal cebirin bizim icin ilginç olan tarafı, son zamanlarda çizge kuramı (graph theory) ile kurulan bağlantılarıdır. Yani, doğrusal cebirden bildiğimiz matris kavramının, çizgeleri çözmek icin kullanılabilmesinin keşfedilmesi.

Bir sayısal görüntu ile çizge arasındaki bağlantı nedir diye merak edebilirsiniz... Daha sonra, çizge ile matris arasındaki bağlantı nedir diye merak edilebilir... Bu iki bağlantıyı teker teker özetleyecegiz.

Daha rahat göz önüne getirebilmek için, aşağıdaki resme bakabiliriz.

```
im=imread("adjacency_graph.jpg"); imshow(im)
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0xa71122c>
```



Bu resimde gördüğümüz (b) şeklinde görünen çizge, (a) şeklinde gösterilen 'ekrandaki' nesnelerin birbirine olan alakasına göre çizilmiş bir çizgedir. Yani, (a) da görülen ner nesneyi (b) çizgesi üzerinde bir düğüm noktası olarak belirtirsek, o zaman iki nesnenin birbiri ile, herhangi bir ilişkisi durumunda, iki düğüm arasında bir bağlantı kurarız. Bu işlemden sonra elimize gecen çizgeye bitişiklik çizgesi diyoruz.

Bir çizge düğümler ve bunların arasındaki bağlantılardan ibârettir.

Cebire gelelim. Aynen doğrusal cebir de olduğu gibi, çizge üzerinde kurulmuş bir kuram ve yöntem de var. Bu iki konu uzun sure ayrı yollarda geliştiler ve râfine edildiler. Fakat yakın zamanda matematikçiler çizge problemlerini çözmek için doğrusal cebir kullanmaya başladılar. Meselâ bahsettiğimiz bitişiklik çizgesini 'bitişiklik matrisine' çevirirsek, doğrusal cebirin yontemlerini kullanarak, çizge hakkında bazı sonuçlara varmamız mümkün oluyor. Bu çok ilginç ve harika bir bağlantı, ve bir takim yapıcı yan etkileri var.

Bitişiklik matrisine örnek olarak (c) şekline bakabilirsiniz.

Bu matrisi yaratırken, her çizge üzerindeki her düğüme bir sayı verdiğimizi unutmayalım; o zaman bu kodlamaya göre düğüm 1 ve düğüm 3 arasında bir ilişki var ise, matrise bakıp X ekseni = 1, ve Y ekseni = 3 üzerine tekâbül eden matris değerinin 1 olarak tanımlıyoruz.

Arasında ilişki olmayan düğümler, matris üzerinde 0 değeri taşıyorlar.

İşte bu matris üzerinde özdeğer, özvektör yöntemleri kullanarak çizge hakkında sonuçlara varmak mümkün oluyor.

0 ve 1 degerleri yerine yakinligi piksel degerleri arasindaki farka bagli olarak ta hesaplayabiliriz.

Gruplamak

Bir imaji nasil gruplara ayirabiliriz? Ekran piksellerini, çizge (graph) düğümleri olarak gösterebiliriz, sonra bu çizgeyi yakinsallik (affinity) matrisine çevirebiliriz. Bu matris üzerinde öyle işlemler yapalım ki, elimize Wx denen bir vektör geçsin; bu vektörün $1..N$ üyeleri, $1..N$ piksellerinin x gurubuna üyelik katsayısı olsun. Katılım değerleri en fazla olan vektör (gurup), ekran üzerindeki en büyük nesne demektir!

Matematiksel olarak şöyle bir formül kuralım, sadece temsil etmeye ugraşıyoruz, yani bir gurup ve içinde olan pikseller arasında bağlantı kurmak istiyoruz. Piksel ve herhangi bir gurup arasındaki ilişkiyi formül ile kağıt üzerine dökmeyi amacliyoruz. Matematik, sayılar arasında alâka kurma sanatıdır. Elimizde şimdilik bir algoritma olmasa bile, temsili olarak bir alâka kurmak mümkün.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_ix_j = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Bu formüle göre, Wij, çizge üzerinde gösterilen i ve j düğümu arasındaki bağlantı ağırlığı olacak. x vektörünün içindeki her değer, çizgedeki düğümlerin bu x gurubuna dâhil olma katsayısı olacak. Formülun sol tarafına göre, bu tanımları her i ve j değeri için yaparak sonuçlarını toplamis oluyoruz.

Dikkat, toplam sonucu tek bir sayi, yani bir skalar. Nelerin birbiri ile carpildigi optimizasyon icin cok onemli, i ve j arasindaki agirligi, i'nin uyelik agirligi ve j'nin uyelik agirligi ile carpiyoruz, bunlari tum diger kombinasyonlar icin yapiyoruz, ama bu carpimlari topluyoruz. Carpim daha fazla buyutur, ve maksimizasyon icin bu buyukluk daha on planda olacaktir.

Ve bu toplâmın 'en büyük' olduğu yer, görüntü üzerindeki en büyük nesnenin olduğu yerdir! Yâni elimizde bir matematiksel maksimizasyon problemi var.

Caprimi tekrar kontrol edelim

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Diyelim ki $i = 2$, $j = 1$. O zaman a_2, b_{21} ve c_1'in birbiriyle carpilmasi gerekir. Hakikaten caprimi elle kontrol edersek bunun oldugunu gorecegiz. Icinde $a_1 \cdot b_{21}$ caprimini iceren terim, sonra c_1 ile caprilacaktir.

Formülun yazarı, maksimizasyon işlemine atlamadan once, bir matematiksel sınır daha koymaya mecbur olmuş. Maksimizasyon problemlerinde, her sayıyı muazzam büyüklüklere getirerek formül sonucunu sürekli büyütmek mümkün olabilirdi. Buna bir sınır getirmek için, sağ tarafta, A'nin yanına çarpan olarak x vektörünün norm'u (yani uzunluğu) 1 olsun demiş. Altta, bu tanımın açılmış halini görüyorsunuz. (Not: X vektörünün norm'u = X'in devriği çarpı X). Lagrange formulu soyle gosterilebilir:

$$w^TAw - \lambda(w^Tw - 1)$$

$$w^TAw - \lambda(w^Tw - 1) = 0$$

$$\frac{d}{dw}w^TAw - \lambda(w^Tw - 1) = 0$$

$$2Aw - 2\lambda w = 0$$

$2Aw = 2\lambda w$

$Aw = \lambda w$

Ustteki son formul ozdeger (eigenvalue), ozvektorler (eigenvector) formuludur. Rayleigh-Ritz kuramına göre, yukarıdaki formülün enbuyütülmüş x vektörü , A matrisinin en buyuk özdeğerine tekabül eden özvektör olacaktir! Dügümler birbirine ne kadar iyi bağlıysa, bir gurubun içsel baglantısı ve 'gurupluğu' o kadar iyi oluyor.

Bu son formül aşağıda

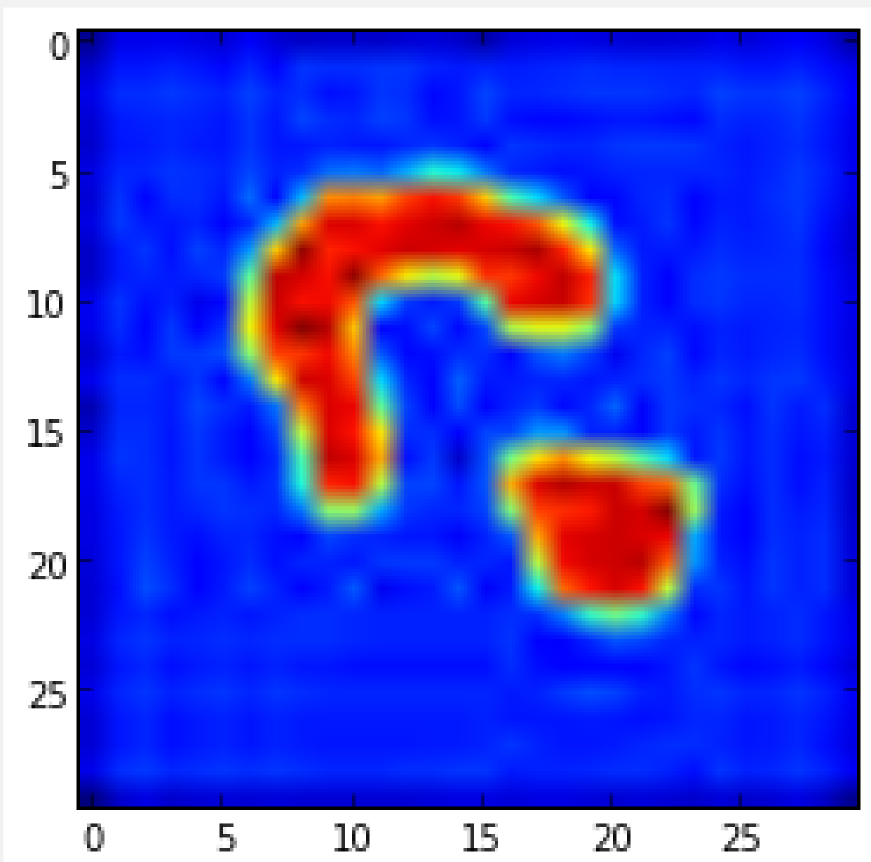
$$\lambda_{n-k} = \max_{x \perp x_{\lambda_n},\ldots,x_{\lambda_{n-k+1}}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Ornek

Alttaki imaji gruplarina ayirmaya calisalim.

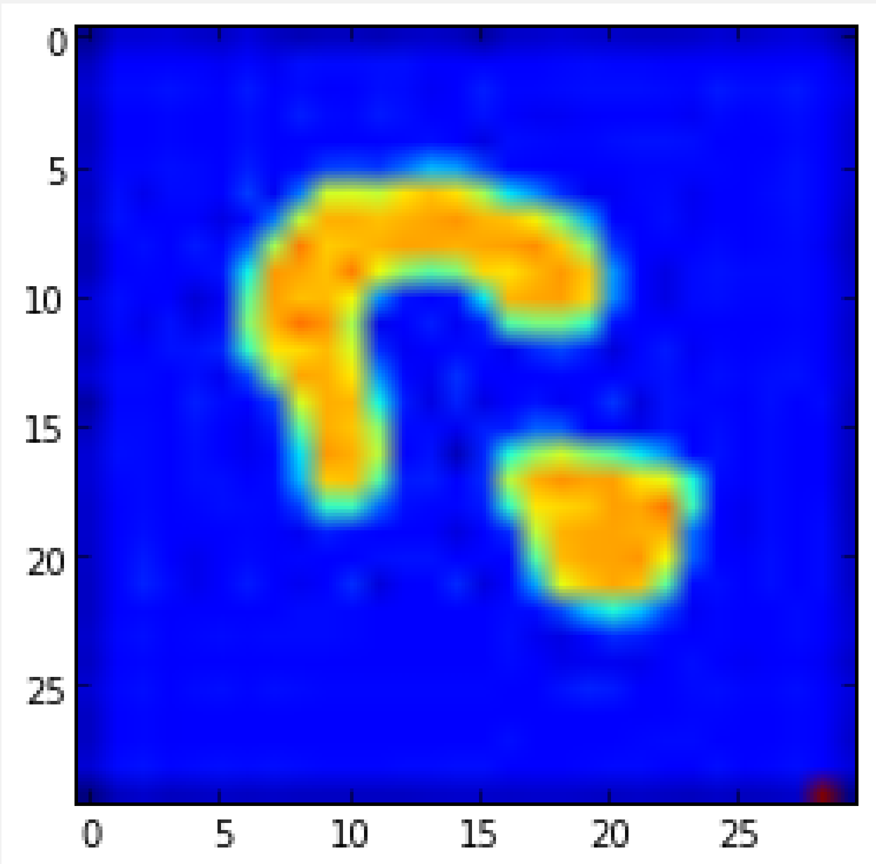
```
im=imread("twoObj.jpg"); imshow(im)
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0xa92124c>
```



```python
Img = plt.imread("twoObj.jpg")
n = Img.shape[0]
Img2 = Img.flatten(order='C')
nn = Img2.shape[0]

A = np.zeros((nn,nn))

for i in range(nn):
    for j in range(nn):
        A[i,j]=np.exp(-((Img2[i]-Img2[j])**2))

V,D = np.linalg.eig(A)
V = np.real(V)
a = np.real(D[0])

threshold = 0 # filter
a = np.reshape(a, (n,n))
Img[a<threshold] = 255
imshow(Img)
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0xac4972c>
```



Kodda imread ile imaji okuduk, elimize 30x30 boyutunda bir matris gecti. Bu matrisi once "duzlestirerek" bir vektor haline # getirdik, ki bu vektorun elemanlari yeni bir yakinlilik matrisinin kenarlari olacakti. Sonra bu yeni elemanlarin her birini bir digeri ile karsilastirark yakinligini hesapladik, bunu piksel degerinin ne kadar yakin olduguna bakarak karar verdik, exp bunun icin kullanildi. Ayrica yakinlik ve uzaklik kavramini tersine cevrildi, exp icinde eksi olmasi bundan, birbirine "benzer" yani degerleri birbirine yakin olan piksellerin farklari az olacaktir, fakat biz bu azligi maksimizasyon problemi icin bir fazlaliga cevirmek istiyoruz.

Bu noktada A matrisinin ozdegerlerini hesaplattik, ve geriye C, D geri geldi. Numpy ozdegerleri ve ona tekabul eden ozvektorleri buyukluk sirasina dizerek geri getirir, bu sayede sifirini (ilk) D'ye bakarak en buyuk ozdegere tekabul eden ozvektoru alabildik. Bu vektorun degerleri ise uyeligi en yuksek olan grubu iceriyordu. Ciplak gozle bakinca bu degerlerin uyelik icin pozitif, digerleri icin negatif degerler oldugunu anladik, bu yuzden esik (threshold) degerini sifir olarak tanimladik. Esigin altinda kalan degerleri grup disi olarak kabul ettik ve o degerlerin kordinatina 255 piksel degerini atadik, ki ustteki resimde mavi renkli gozuken pikseller bu degerleri temsil ediyor.

Kaynaklar

Sarkar ve Boyer makalesi "Değisimlerin Sayısal Ölçümünü Özellik Organizasyonu Kullanarak Yapmak: Özdeğerler ve Özvektörler". (Quantitative Measures of Change Based on Feature Organization: EigenValues and EigenVectors)

Forsyth ve Ponce kitabı "Bilgisayar Görüşü, Yeni Yaklaşım (Computer Vision, A Modern Approach)