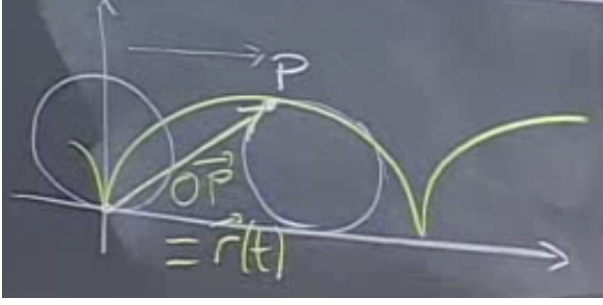


## MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 6

Bir önceki derste cycloid konusunu isledik.



Hareket eden bir noktanin pozisyonu

$$(x(t), y(t), z(t))$$

Bu noktayi takip etmenin diger yollarindan biri onu pozisyonu vektörü olarak gormek, ki bu vektörün bileşenleri noktanin kordinatları.

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

Vektör orijin (başlangıç) noktasından gelinen noktayı işaret eden bir vektör (resimde  $\vec{OP}$ ).

Cycloid probleminde tekerlek yarıçapını 1 alalım ve birim hızda ilerliyor olalım, ki böylece açı  $\theta$  ve zaman aynı şey haline gelsin

$$\vec{r}(t) = \langle t - \sin(t), 1 - \cos(t) \rangle$$

Tamam. Şimdi, noktanin pozisyonunu zaman açısından bildigimize göre, onun değişimini inceleyebiliriz, mesela hızına, ivmesine bakabiliriz. İlk önce hızı bakabiliriz. Fakat, aslında, hızdan daha iyisini hesaplayabiliriz. Hız tek bir sayıdır sadece, ama eğer şu içinde GPS olan satafatlı spor arabalarından birine sahip değilseniz, size hızınızın “hangi yönde” olduğunu söylemez. Sadece “gittiginiz yönde” (her ne yöne gidiyorsanız) ne kadar hızlı olduğunuzu söyler.

O zaman biz hızımızı hesaplarken, hem yönü, hem hızı aynı anda göze alabiliriz. Bu demektir ki vektör kavramı tekrar isimize yarayacak. Hızı vektör olarak hesaplayabiliriz.

Bunu nasıl yaparız? Pozisyon vektörünün zamana göre türevini alabiliriz.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Bu tür bir türevi bu derste ilk kez görüyoruz, ilk kez bir vektörün türevini alıyoruz. Bu şekilde türev almak demek, o vektörün bileşenlerinin teker teker türevini almak demektir. Yani

$$= \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\rangle$$

Cycloid orneğine dönersek

$$\vec{r}(t) = \langle t - \sin(t), 1 - \cos(t) \rangle$$

formülünün türevini alırsak ne olur?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \langle 1 - \cos(t), \sin(t) \rangle$$

İşte bu türev bize hangi yönde ve ne kadar hızlı gittiğimizi gösteriyor.

Bu arada bir vektörünün büyüklüğünün (magnitude) her zaman mesafesiz, uzaklıksal anlamı olmayabileceğini de görmüş oluyoruz. Hız kavramı bir orandır, katedilmiş bir mesafe, bir yer değildir,  $t$  anında bir yönde olan bir büyüklüktür. Fakat yine de bir büyüklüktür, bir yönü vardır, ve bu sebeple vektörler ile temsil edilebilir.

Problemimize dönelim. Önceki derste tekerlekten izlenen noktanın en alta gelip yükseldiği sıralarda hareketinin nasıl olduğunu irdelemiştik. Şimdi bu konuyu hız kavramını kullanarak incelemeye uğralım. Üstteki vektöre  $t = 0$  koyarsam, ne olur? Sonuç  $\langle 0, 0 \rangle$ , yani  $\vec{v} = 0$ . Tabii ki nokta  $t = 0$  öncesi hareket ediyor, sonra da ediyor, yani bir hızı var, sadece “o anda” hızı yok.

Peki hız vektör olarak daha fazla bilgi veriyor olmasına rağmen, ben yine de klasik anlamda hızı, yani o tek sayıyı elde etmek istiyorsam ne yaparım? Hız vektörünün büyüklüğünü hesaplarım,  $|\vec{v}|$ .

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(t)} \end{aligned}$$

Bu formüle bakarak hizin nerede en fazla, en az oldugunu hesaplayabiliriz. Eger  $t = 0$  ise, sonuc sifir olur.  $t = \pi$  ise elimizde  $\sqrt{4} = 2$  vardır, bu an noktanin tekerlegin en ustunde oldugu andir, bu an ayni zamanda en hizli hareket ettigimiz de andir. Hatta bu hiz tekerlegin saga dogru yatay gidis hizinin iki katidir, tekerlegin saga dogru birim hizda ilerledigini soylemistik, fakat nokta bunun ustune bir de merkeze gore bir donme hareketi icinde, ve bu iki etki birbirine eklenerek 2 hizina sebebiyet veriyor.

O nokta tepe noktasindan asagi inmeye baslayinca tabii ki noktamiz donusun “geriye dogru” olan etkisiyle toplami hizinda dusme yasiyor.

Ivme

Bu konuyu islemeden once klasik olarak bilinen ivme kavrami ile burada kullanacagimiz ivme kavrami ile ciddi uyusmazliklar oldugunu belirtmeliyim. Klasik anlayista ivme mesela bir arabada giderken “hissettigimiz sey” bizi koltuga iten kuvvet, hizdaki degisim (hizin turevi) olarak bilinir, ve eger bir arabada saatte 40 km ile gidiyorsam, ivme yok denir. Fakat simdi bu arabanin bir virajdan dondugunu farzedelim, bu durumda bir kuvvet hissederiz, hala saatte 40 ile gidiyor olabilirim, ama bir ivme vardır. Burada aslında yana dogru bir hizlanma / ivme sozkonusudur. O zaman yine vektor kavramini kullanmamiz lazim.

Ivme vektorunu soyle belirtelim:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Fizikteki ivme tanimi da budur,  $F = ma$  derken kastedilen  $a$  iste bu  $\vec{a}$ 'dir. Bir vektordur.

Cycloid'e donelim.

$$\vec{v} = \langle 1 - \cos(t), \sin(t) \rangle$$

Turevi alalim

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \langle \sin(t), \cos(t) \rangle$$

$t = 0$  noktasinda ivme nedir?  $\langle 0, 1 \rangle$ .



Yani  $t = 0$  anındaki ivme bir birim vektor, ve yonu tam yukariya dogru. Bu ilginç bir şey, o anda hız sıfır, fakat bir ivme mevcut.

Bu arada, hemen belirtelim

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \neq \frac{d|\vec{r}|}{dt}$$

Yani bir vektorun turevinin buyuklugu, o vektorun buyuklugunun turevi ile aynı şey değildir. Esitsizligin sagindaki kavram zaten cogunlukla pek işe yarar bir şey değildir, hesaplanabilir, biraz sac bas yoldurabilir ama mümkündür, fakat cogunlukla kullanılmaz.

Egri Uzunlugu (Arc Length)

Egri uzunlugu bir egri uzerinde ne kadar yol katettigimizi gosteren bir buyukluktur. Mesela bir arabadaki ne kadar yol katettiginizi gosteren kilometre sayaci bunu arabanin hizini belli bir zaman uzerinden entegre ederek hesapliyor.

$s$  = bir yol uzerinde katedilmis mesafe

Bunun anlami olmasi icin tabii ki bir sabit, referans noktasi dusunmeliyiz. Orijin noktasi bu nokta olabilir. Bu arada  $s$  referans noktasinin neresinde oldugumuza gore negatif olarak ta hesaplanabilir. Referansa kadar eksi, son-rasi arti olabilir mesela.

Peki  $s$  ile  $t$ , yani egri uzunlugu ve zamani nasil birbirine baglariz?

$$\frac{ds}{dt} = \text{hız} = |\vec{v}|$$

Yani birim zamanda katedilen egri uzunlugu hizdir.

Ama acik olmak gerekirse, aslinda turevin kesin degerini (absolute value) almak daha dogru olur (dikkat, vektor buyuklugu isareti degil, kesin deger

isareti bu sefer)

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = \text{hız} = |\vec{v}|$$

Niye? Belki bir egri uzerindeyiz ama o egri uzerindeki hareketimiz bir ileri bir geri seklinde. Bu durumda egri uzunlugunu surekli saymak istemeyiz, onu “cogalan (ileri), azalan (geri)” turunden bir buyukluk olarak gormek isteriz.

Egri uzunlugu hesabi icin hizi zaman uzerinden entegre ederiz. Mesela bir cycloid’in (resimde sari ile gosterilen) bir turunun uzunlugu ne kadar diye hesaplamak istiyorsak,

$$\vec{v} = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$$

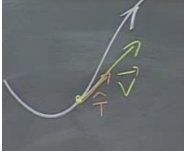
ifadesinin 0 ile  $2\pi$  arasinda entegralini almamiz lazim.

$$\int_0^{2\pi} \vec{v} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt$$

Acikca soylemek gerekirse bunun entegrali analitik olarak nedir bilmiyoruz, ama ileriki derslerde bu hesabi yapmak icin fiyakali bir numara gorecegiz.

Gidisatin Birim Teget Vektoru

Notasyonda bu kavram cogunlukla  $\hat{T}$  olarak gosterilir. Sapka var cunku vektor birim vektor.  $T$  cunku “teget”.



Vektor  $\vec{v}$  gidisata (trajectory) zaten tegettir (dikkat, bu illa pozisyon vektoru  $\vec{r}$ a dik olacak anlamina gelmez, detaylar icin bu dersin sonundaki ornek sorulara bakin).  $\hat{T}$  bir anlamda bu vektorun sadece yonudur, o zaman  $\vec{v}$ ’nin yonu bize gerekli, demek ki onu birim vektor haline getirirsek,  $\hat{T}$ ’yi elde etmis oluruz.

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Bir suru kavram birikti. Bunlarin birbiriyle bir alakasi olmalı, onlardan

bahsedelim.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

Ustte zincirleme kanununu (chain rule) kullandik.

Biraz once goruk ki  $ds/dt = |\vec{v}|$ .

Eger

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} |\vec{v}|$$

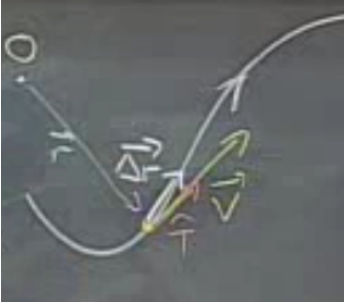
ise, vektor  $\vec{v}$ 'nin buyuklugunu oyle bir sey ile carpiyorum ki sonuc olarak vektorun kendisi ortaya cikiyor. O sey ne olabilir? Tabii ki vektorun birim vektor olarak gosterilecek yonu olabilir. Bu birim vektoru zaten hesaplamadik mi? Bu vektor  $\hat{T}$ 'den baskasi degil.

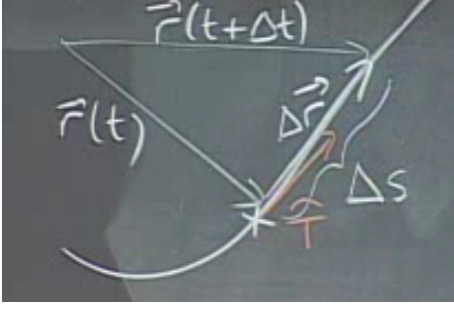
$$\vec{v} = \hat{T} |\vec{v}|$$

ya da

$$\vec{v} = \hat{T} \frac{ds}{dt}$$

Peki sezgisel olarak dusunursek,  $d\vec{r}/dt$  niye  $\hat{T}$ 'ye esit olmalı? Alttaki grafiklere bakalim.





Yerimizi  $t$  anında  $\vec{r}(t)$ ,  $\Delta t$  kadar bir adım atıyoruz, ve  $\vec{r}(t + \Delta t)$  noktasına geliyoruz. Bu noktada eğri üzerinde katedilen mesafe  $\Delta s$ , o zaman

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \text{hız}$$

Yer vektörümüzün değişimi ise

$$\Delta \vec{r} \approx \hat{T} \Delta s$$

İki tarafı  $\Delta t$  ile bölersek

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \approx \hat{T} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ve  $\Delta t \rightarrow 0$  olarak limitini alırsak, o zaman üsttekiler türev haline gelir, yaklaşık isaret eşitlik olur. Yani

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{T} \frac{ds}{dt}$$

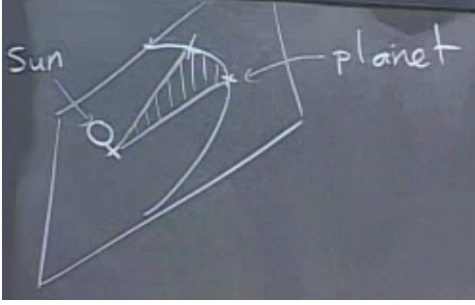
Peki bu tür konularda vektörler kullanalım. Aslında şimdiye kadar gördüklerimizi diğer yollarla da temsil edebilirdik. Fakat vektör “dili” özellikle hareketleri modellerken oldukça faydalı oluyorlar.

Örnek - Kepler’in İkinci Kanunu

Kanun 1609’da keşfedildi, yani pek yeni bir gelişme olduğu iddia edilemez. Kepler gezegenlerin hareketini modellemeye uğraşıyordu. Bazı insanlar gezegenler mükemmel bir çember içinde dönerler, vs. diyordu. Kepler gezegenlerin yörüngesinin çember değil elips (elliptik) olduğunu öne sürdü. Kepler’in Kanunu şöyle der:

Gezegenlerin hareketi bir düzlem üzerindedir, güneşten gezegene çekilebilecek bir hayali çizginin kapsadığı alanın büyümesi / asılması sabit bir oran-

dadir. Bu ilginç bir kanun çünkü bir kez yorungenin şeklini bilirsek, o yorunge üzerinde ne kadar hızlı gidebileceğimizi bize söylüyor.



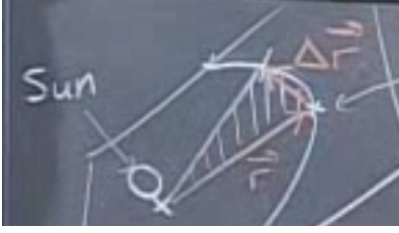
Üstteki şekle bakarsak, güneş (sun) etrafında bir gezegen (planet) var, ve katedilen yol taralı şekilde çizili. Kepler Kanunu şu anlama gelir, katedilen alan zamana orantılıdır, eğer gezegen güneşe daha yakın olsa, daha hızlı gitmek zorundadır, uzak olsa, daha yavaş gitmek zorundadır, ki katedilen alanın zamana oranı aynı kalsın. Niye? Eğer yakın olursak, güneşe direkt mesafe azalacaktır, boydan kaybettığımızı diğer yonden kazanmamız gerekir, yani aynı zamanda aynı alanı katetmek için bu sefer yorunde üzerine daha hızlı gidilmelidir, ki aynı alana erişebilelim. Tabii gezegenlerin akli yoktur, böyle olsun diye uğrasmazlar, Kepler gözlemlerini yaparken, modellerken değişmeyen bu büyüklüğü keşfetmiştir, ve sayede bazı hesapları temiz şekilde yapabilmesi mümkün olmuştur.

Biz de şimdi bu kanunu, mekanik / fizikten bugün bildiklerimizi kullanarak doğrulamaya çalışacağız. Newton, ki 1600'lu yılların sonlarında ortaya çıktı, bu durumu yerçekimi formülleri ile açıklamayı başardı.

Şimdi vektörler kullanarak bu modeli yaratacağız ve Kepler'in onları kullanarak alan hesabının aslında ne kadar doğal / bariz olduğunu göreceğiz. Fakat Kepler bu kanunu ortaya atarken işler hiçbir bu kadar bariz değildi!

Tekrar bir pozisyon vektörü  $\vec{r}$  yaratalım, başlangıcı güneş, bitiş noktası gezegen olsun, katedilen yol  $\Delta\vec{r}$  olsun.





Katedilen alani nasıl hesaplarız. Şekilde çizdiklerimiz yeterince ipucu veriyor, yaklaşık olarak bir üçgen oluştu. Alan bir kenarı  $\vec{r}$ , diğer kenarı  $\Delta\vec{r}$  olan paralelogramın yarısı. Paralelogram hesabını yapmayı biliyoruz nasılsa,

$$\Delta t \text{ 'de Kapsanan Alan} \approx \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta\vec{r}|$$

ki  $\Delta t$  oldukça küçük olmalı.

Ayrıca

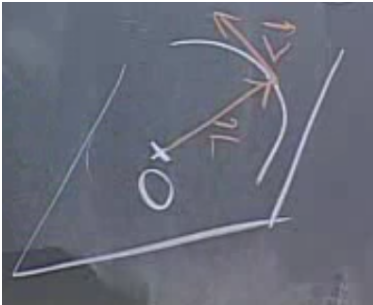
$$\Delta\vec{r} \approx \vec{v}\Delta t$$

O zaman alan

$$\approx \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| \Delta t$$

Peki bu alanın zamana sabit oranda olması ne demektir? Alanın  $\Delta t$ 'ye oranlı olması demektir, bu da üstteki formülde  $|\vec{r} \times \vec{v}|$  teriminin sabit olması demektir.

2. kanunu düşünelim, gezegenin yörüngesinin hep aynı düzlem üzerinde olduğunu söylüyordu. Bu demektir ki  $\vec{r} \times \vec{v}$  ile ortaya çıkan ve bu ikisine normal (dik) olan üçüncü vektörün “yonu” hep aynı kalmalıdır. Çünkü iki vektör bir düzlem tanımlar, bu iki vektöre dik olan düzlem de diktir, ve düzlem hiç değişmiyorsa bu vektörün yonu da değişmez.



O zaman hem buyukluk ayni, hem yon ayni, o zaman Kepler'in 2. Kanunu  $\vec{r} \times \vec{v}$  bir sabit vektor demektir. Ne yonu ne buyuklugu degismeyecektir.

Turevler baglaminda bunu soyle soyleyebiliriz

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = 0$$

Turevler normal carpimlar icine nufuz ederken Carpim Kanunu (Product Rule) kullaniliyordu. Capraz carpimlar icin de ayni kural gecerli, yani ustteki

$$= \frac{\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Daha once turettigimiz esitlikleri usttekilerin yerine koyarsak

$$= \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = 0$$

Bir vektorun kendisi ile capraz carpimi her zaman sifirdir. O zaman  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ . Denklemden atilabilir. Geriye kalanlar

$$= \vec{r} \times \vec{a} = 0$$

Ustteki ifade ne zaman dogru olabilir? Ya da genel olarak iki vektorun capraz carpimi ne zaman sifirdir? Eger birbirlerine paraleller ise. Bu demektir ki ivme  $\vec{a}$  ile pozisyon  $\vec{r}$  birbirine paraleldir. Yani Kepler'in 2. Kanunu aslinda bunu soylemektedir.

Ve biz bugun yercekim gucunun  $\vec{r}$ 'e paralel oldugunu biliyoruz, yani mesela gunesin bir gezegeni kendine direk bir yonde cektigini biliyoruz. Demek ki ustteki ifadenin sifir oldugu da dogrudur.

Not: Bu arada paralellik hem cekim, hem itme icin gecerli olurdu (her iki durumda da yon paralel). Hakikaten elektriksel alanda parcaciklarin cekilmesi ve itilmesi baglaminda da Kepler'in Kanunu aynen islemektedir.

Soru

Diyelim ki  $P$  noktası bir kure (sphere) uzerinde hareket ediyor ve

$$OP = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Hiz vektoru  $\vec{v}$ 'nin her zaman pozisyon vektoru  $\vec{r}$ 'ye dik oldugunu  $x, y, z$  kor-

dinamlarini kullanmadan ve alttaki esitlikten faydalanarak

$$\frac{d}{dt} \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \quad (1)$$

ispatlayin.

Cevap

Eger  $\vec{r}$  ve  $\vec{v}$  birbirine dik ise, o zaman  $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$  demektir.

Bu arada hatirlayalim ki hiz pozisyon vektorunun zamana gore turevidir.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Suradan bir giris yapalim. Eger uzerinde olunan kurenin yaricapi  $a$  ise,

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = a^2$$

Usttekinin formül 1'e gore turevini alalim

$$\frac{d}{dt} \vec{r} \cdot \vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Sag taraf sifir cunku sabit  $a^2$ 'nin turevi sifir. Buradaki onemli gozlem sudur, esitligin sag tarafi “ $t$ ”ye bagli olmayan, sabit bir degerdir”, bunu soyleyebiliyoruz, cunku problem bir kure uzerinde gezinildigi bize soylemis. Bu onemli bir puf noktası, bu bilgi sayesinde turevi alip sag tarafi sifir yapabiliyoruz. Devam edelim

$$2 \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$$

Demek ki iki vektor birbirine dik. 2 degeri formulden atildi, sag taraf sifir oldugu icin onemli degil.

Soru IJ-4

Bir onceki soruda ispatlananin tam ters yonunu ispatlayin. Eger  $\vec{r}$  ve  $\vec{v}$  dik ise,  $P$ 'nin hareketi kesinlikle bir kure uzerinde olmak zorundadir.

Cevap

Biliyoruz ki

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{r}|^2$$

Turevi alinca

$$\frac{d}{dt} \vec{r} \cdot \vec{r} = 0$$

Sag taraf sifir oldu cunku orada bir sabit vardi. Diger taraftan, eger diklik oldugunu biliyorsak su dogru olmalı

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$$

$\vec{v}$  ayni zamanda pozisyonun turevidir, ustte yerine koyalım

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} = 0$$

Onceden gormustuk ki

$$2 \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r})$$

Bu denklemin sol tarafı iki ustteki formulun sol tarafına benziyor, o zaman

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = 0$$

Simdi sunu soralım: Turevi sifir olan sey nedir? Bir sabittir.

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = c \text{ adında bir sabit}$$

$$\text{O zaman } |\vec{r}| = \sqrt{c}.$$

Eger  $\vec{r}$ 'nin uzunlugu hic degismiyor ise, o zaman pozisyon bir kure uzerinde hareket ediyor olmalıdır.

Soru 1I-1

$P$  noktası sabit hız  $v$  (dikkat bu vektor degil) ile sabit vektor  $a\hat{i} + b\hat{j}$  yonunde ilerliyor. Eger  $t = 0$  anında  $x_0, y_0$ 'da isek, pozisyon vektoru  $\vec{r}(t)$  nedir?

Cevap

Anahtar kelime “yon”. Sabit vektor “yonunde” gitmemiz isteniyor o zaman

bu vektorun yonunu bulalım. Onu birim vektor haline getirirsek

$$\vec{u} = \frac{a\hat{i} + b\hat{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Yon bu. Bu yonde ilerlemek icin

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \langle x_0, y_0 \rangle + \vec{u}vt \\ &= \langle x_0, y_0 \rangle + \frac{(x_0 + avt)\hat{i} + (y_0 + bvt)\hat{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}\end{aligned}$$