

## Cok Degiskenli Calculus - Ders 11

Onceki derste cok degiskenli fonksiyonlari min, maks uzerinden inceledik. Bu derste bu tur fonksiyonlari herhangi bir yondeki varyasyonunu nasil hesaplayacagimizi gorecegiz. Bunu yapabilmek icin daha fazla kavramsal araclara ihtiyacimiz var.

Bugunku konumuz diferansiyeller.

### Diferansiyeller

Tek degiskenli Calculus'tan dolayli (implicit) diferansiyel almayi biliyoruz herhalde. Mesela elimizde

$$y = f(x)$$

var. Dolayli turevler ile  $x$  uzerindeki sonsuz kucuk bir degisimi  $y$  uzerindeki sonsuz kucuk bir degisime baglayabiliyoruz.

$$dy = f'(x)dx$$

Ornek

$$y = \sin^{-1}(x)$$

Bu formulun turevini bulmak icin, soyle bir zincir takip edebiliriz. Usttekinen tersten bakalim

$$x = \sin(y)$$

O zaman

$$dx = \cos(y)dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Esitligin sag tarafini nasil elde ettik? Hatirlayalim

$$\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$$

$$\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

$\sin^2(y)$  nedir?

$$y = \sin^{-1}(x)$$

$$\sin(y) = \sin(\sin^{-1}(x))$$

Ters sinus fonksiyonunun sinusu alinirsa, geriye sadece  $x$  kalir.

$$\sin(y) = x$$

O zaman

$$\cos(y) = \sqrt{1 - x^2}$$

Iste bu tur  $dy, dx$  iceren formulleri kullanacagiz, bu derste cok degiskenli ortamda bunu yapacagiz.

Tam Diferansiyeller

Eger  $f(x, y, z)$  varsa,

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

Diger notasyonla

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Bu formulun hesapladigi nedir? Elde edilen bir sayi, matris, vektor degildir. Bu degisik turden bir nesne ve bu nesneleri manipule etmenin, kullanmanin kendine has kurallari var. Onlari nasil kullanacagimizi ogrenmemiz gerekiyor.

Onlari nasil irdelemek gerekir? Bunu cevaplayabilmek icin onlari nasil “gormememiz” gerektigini anlamamiz lazim.

Onemli

$df$  ile  $\Delta f$  farkli seylerdir.

Bir kere  $\Delta f$  bir sayidir, onu hesaplamak icin  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ , vs.. gibi sayilar kullaniriz. Kiyasla  $df$  bir sayi degildir, onu gostermenin tek yolu diger diferansiyeller uzerindendir.

Diferansiyelleri, yani  $dx, dz$  gibi nesneleri bir “yerine baska seyler koyabileceginiz bir tur isaret (placeholder)” gibi dusunebilirsiniz. Onlari sonsuz kucuklukteki degisimi temsil ettigi de dogrudur, ama hoca bu tanimi pek sevmiyor. Bu “isaretleyici” nesnelere degisim degerlerini (evet, sayisal olarak, ama yaklasiksal baglamda) verirse, esitligin sol tarafinda  $df$  icin bir teget duzlem yaklasiksallamasi elde edebiliriz.

O zaman diferansiyeller

1)  $x, y, z$ 'deki değisinin  $f$ 'i nasıl etkilediğinin kodlarını / sifrelerini (encode) içerirler. Tam diferansiyel formulu hakkında söyleyebileceğimiz en genel söz budur.

2) Onlar  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  gibi varyasyonlar için bir işaret / yer tutucu görevi görürler ve onların sayesinde  $\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z$  yaklaşıksal formülünü elde etmek mümkün olur.  $\Delta f$  formulu ile  $df$  formülünde birincinin  $\approx$  ikincisinin = kullandığına dikkatinizi çekirim.

3) Tam diferansiyel üzerinde yapabileceğimiz bir diğer işlem, tüm formulu herkesin bağlı olduğu bir başka değiskene bolmektir. Diyelim ki  $x, y, z$  değiskenlerinin hepsi de  $t$  adındaki bir başka değiskene bağlı. O zaman tüm formulu  $dt$ 'ye bölerek  $t$  bazındaki değisinin  $f$ 'i nasıl etkilediğini görebilirim, yani  $df/dt$ 'yi hesaplayabilirim. Yani sunu elde ederim,

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + f_z \frac{dz}{dt}$$

ki bu  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  ise olabilir. Böylece  $f$ 'in değisim oranını (rate of change) elde ederim.

Bu arada üstteki formül Zincirleme Kanunu (Chain Rule) olarak ta bilinir, çünkü  $x, y, z$  değiskenleri  $t$ 'ye bağlı, ve üstteki formülle “zincirleme olarak”  $f$ 'den  $x, y, z$ , oradan  $t$ 'ye gidiyoruz, ve değisim oranını hesabını elde ediyoruz.

Üstteki 2. ifade niye geçerlidir? Matematiksel olarak onu nasıl hesaplayabilirim?

1. Deneme

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

ile başlarız. Eger  $x = x(t)$  ise, o zaman

$$dx = x'(t)dt$$

ifadesi de doğrudur. Aynı şekilde

$$dy = y'(t)dt$$

$$dz = z'(t)dt$$

Bunlari ana formulde yerine koyarsak

$$df = f_x x'(t)dx + f_y y'(t)dy + f_z z'(t)dz$$

olur. Tum formulu  $dt$ 'ye bolersem, Zincirleme Kanununu elde ederim.

Bu isliyor, fakat diyelim ki cok supheciniz, ve diferansiyel kavramina hala inanmiyorsunuz. Bu ispatta mesela  $dx = x'(t)dt$  gibi yine diferansiyel alma islemini kullandim. Aslinda Zincirleme Kanunu boyle ispatlanmiyor.

## 2. Deneme

Simdiye kadar guvendigimiz kavramlardan biri yaklasiksallama formulumuz. Ona guveniyoruz. O da diyor ki

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z$$

Her seyi  $\Delta t$  ile bolelim.

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} \approx \frac{f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z}{\Delta t}$$

Burada sayilar kullaniyorum,  $\Delta$ .. ile ifade edilenler sayidir. Bir “diferean-siyele” bolmek ne demektir bilmiyoruz, ama bir sayiyla bolmenin ne demek oldugunu iyi biliyoruz.

Sunu da biliyoruz - eger  $\Delta t \rightarrow 0$  ise

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} \rightarrow \frac{df}{dt}$$

Turevlerin tanimi matematiksel olarak budur. Bu durum tum degiskenler icin de gecerlidir. Mesela

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow \frac{dx}{dt}$$

O zaman bolumun tamami,  $\Delta t \rightarrow 0$  iken alttaki gibi olur, yaklasiksallik  $\Delta t$  sifira dogru yaklasikca esitlige donusur.

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} + f_z \frac{dz}{dt}$$

Ornek

$$w = x^2 y + z$$

$$x = t$$

$$y = e^t$$

$$z = \sin(t)$$

$$\frac{dw}{dt} = 2xy \frac{dx}{dt} + x^2 \frac{dy}{dt} + 1 \frac{dz}{dt}$$

$$= 2te^t 1 + t^2 e^t + \cos(t)$$

$$= 2te^t + t^2 e^t + \cos(t)$$

Bu sonuca baska türlü nasıl erisebilirdik?

Ana formül  $w$  içine tüm değişkenlerin  $t$  bazında karşılıklarını geçirelim

$$w(t) = t^2 e^t + \sin(t)$$

O zaman

$$\frac{dw}{dt} = 2te^t + t^2 e^t + \cos(t)$$

Uygulama

Calculus'taki Türevlerde Çarpım (Product Rule) ve Bölüm Kanunlarını (Quotient Rule) doğrula.

$$f = uv$$

$$u = u(t)$$

$$v = v(t)$$

Tam Diferansiyeli uygulayalım

$$\frac{d(uv)}{dt} = f_u \frac{du}{dt} + f_v \frac{dv}{dt}$$

$$= v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt}$$

Boylece Çarpım Kanununu aynen elde etmiş olduk.

Bölüm Kanunu için

$$g = \frac{u}{v}$$

$$u = u(t)$$

$$v = v(t)$$

$$\frac{d(u/v)}{dt} = \frac{1}{v} \frac{du}{dt} + \frac{-u}{v^2} \frac{dv}{dt}$$

Tekrar duzenlersek

$$= \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Bolum Kanununu elde ettik.

Simdi biraz daha cilginca bir sey yapalim. Iddia ediyorum ki daha fazla degisken icin Zincirleme Kanununu kullanabilirim.

$$w = f(x, y), \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

Bu degisken isimleri belki acaip, anlamsiz geliyor, ama daha somut bir ornek olarak sunu dusunelim. Mesela kutupsal kordinat sistemine gidip gelmem gerekiyor ve  $x, y$ 'nin bagimli oldugu degiskenler  $r$  ve  $\theta$ . Belki de turevlerin kutupsal forma nasil yansidigina gormek istiyorum, gibi..

Devam edelim. Turev almak icin bir yontem,  $x, y$ 'yi yerlerine koymak ve

$$w = f(x(u, v), y(u, v))$$

hesabi yapmak. Boylece  $w$  formulu  $u, v$  bazinda bir formül haline gelir. Sonra kısmi turevleri alirim, vs. Ama bu cok cetrefil bir islem olabilir. Alternatif?

$\partial w / \partial u, \partial w / \partial v$  kısmi turevlerini  $\partial w / \partial x$  ve  $\partial w / \partial y$  bazinda goster.

Ayrica  $x_u, x_v, y_u, y_v$ 'yi goster.

$$dw = f_x dx + f_y dy$$

Biz  $dx$  ve  $dy$ 'den kurtulmak istiyoruz cunku cevap istedigimiz sorulardan biri “ $u, v$  biraz degisince  $w$  ne kadar degisir” seklindeki sorular. Devam edelim

$$= f_x (x_u du + x_v dv) + f_y (y_u du + y_v dv)$$

$$= (f_x x_u + f_y y_u) du + (f_x x_v + f_y y_v) dv$$

Bu formülde kısmi türevler şöyle gösterilebilir

$$= \underbrace{(f_x x_u + f_y y_u)}_{\partial f / \partial u} du + \underbrace{(f_x x_v + f_y y_v)}_{\partial f / \partial v} dv$$

Yani

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Bu formülde, mesela birincisinde, insanın içinden hem bolum, hem bolende olan  $\partial x$  ve  $\partial y$ 'leri iptal etmek gelebilir. Ama bunu yaparsak

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u}$$

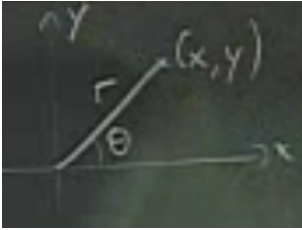
gibi bir formül çıkardı, ki bu formül doğru olmazdı. Çünkü bu tür bir iptal operasyonu yanlıştır, bunlar kısmi türevler, tam türevler (total derivatives) değil. Zaten  $d$  yerine kıvrık  $d$ , yani  $\partial$  sembolü kullanmamızın sebebi de bu – bize hatırlatıcı olmaları için.  $d$ 'ler ile yapabileceğimiz bazı basitleştirme işlemlerini  $\partial$ 'lar ile yapamadığımızı hatırlamak amacıyla değişik semboller kullanıyoruz.

Örnek

Kutupsal koordinatlarımız varsa, değişim formülü şöyledir

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$



Ve elimizde bir  $f = f(x, y)$  var ise, üstteki  $x, y$  formüllerini yerine koyup  $f$  formülünü  $r, \theta$  bazında elde edebiliriz.

Sonra su hesabi yapariz

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ &= f_x \cos(\theta) + f_y \sin(\theta)\end{aligned}$$

Bu tur numaralar sonraki derste faydali olacak. Mesela gradyan vektoru kısmi turevlerden olusan bir vektordur.

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_x \rangle$$

Yani aslında bir diferansiyeli kısmi turevleri bir paket halinde bir araya getirip size sunan bir şey olarak görebilirsiniz. Gradyan vektor de bu paketlemeyi degisik bir sekilde yapan bir diger nesnedir.