Seriler

Bir guc serisi tek boyut icin

$$ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n $$

olarak gosterilir, a_n katsayilari bilinmesi gereken katsayilardir. Cogu durumda $c = 0$'dir. O zaman

$$ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n^n = 1 + x + x^2 + x^3 + .. $$

diye gider. Herhangi bir polinom herhangi bir c merkezi etrafinda rahat bir sekilde bir guc serisi (power series) olarak temsil edilebilir (muhakkak bu serinin cogu katsayisi sifir degerinde olacaktir).

Unlu ustel baz e^x'in sayisinin acilimi,

$$ e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + ... $$

Ispat

Hatta ispattan once, "bu seriyi kendimiz nasil kesfedebilirdik?" diye sormamiz lazim. e^x'in ozelligi nedir? Turevinin kendisine esit olmasidir. O zaman oyle bir seri dusunelim ki turevini alinca kendisine esiti olsun. Mesela

$$ 1 + x + x^2 + x^3 + ... $$

serisi "neredeyse" bu sarta uyuyor, cunku turevini alinca

$$ 0 + 1 + 2x + 3x^2 + ... $$

Bu seri, e^x acilimina benzer, ustel degerler dogru, ama katsayilar tam uymuyor. Onu telafi edebiliriz. $2x$'i 2 ile, $3x^2$'i 3 ile, vs bolersek, yani $n = 0, 1, 2, ..$ icin $n!$ ile bolersek, katsayilar da uyumlu hale gelir, yani

$$ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} $$

$\square$

Ustteki aslinda hem ispat hem de kesif amacli kullanilabilir. Bir sezgi ile baslariz, ve olabilecek bir esitlikten bastaki formule erismeye ugrasiriz.

[devami gelecek]

Kaynak

http://en.wikipedia.org/wiki/Power_series