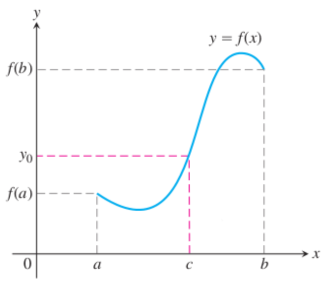
Calculus'un Temel Teoremi (The Fundamental Theorem of Calculus)

Ana teoriyi ispatlamadan once iki diger teoriden bahsetmemiz, ispatlamamiz lazim. Bu teorilerden biri Gecis Degeri Teorisi (Intermediate Value Theorem) digeri Tanimli Entegraller Icin Ortalama Deger Teoremi (Mean Value Theorem for Definite Integrals). Gecis Degeri Teorisi basitce sunu soyler

Teori

$[a, b]$ araliginda surekli bir fonksiyon $y = f(x)$, $f(a)$ ve $f(b)$ arasindaki her degeri muhakkak alir. Bir diger degisle, eger y_o, $f(a)$ ve $f(b)$ arasindaki bir deger ise $[a, b]$ araligindaki bir c icin muhakkak $y_0 = f(c)$ olmalidir.

Geometrik olarak bu teori y eksenini $f(a)$ ve $f(b)$ arasinda kesen $y = y_0$ yatay cizgisinin $y = f(x)$ fonksiyonunu muhakkak, en az bir kez kesecegidir. Grafik altta.



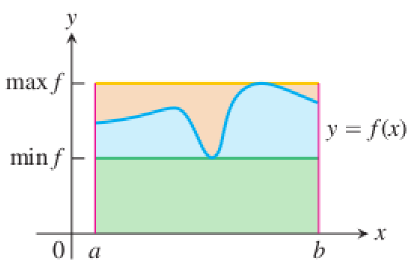
Sezgisel olarak bu anlamli degil mi? Eger surekli bir fonksiyon var ise, $f(a)$'dan $f(b)$'ye giderken o araliktaki her sayiya bir kez "ugramaya" mecburuz. Etraflarindan dolasmamiz mumkun degil, cunku kesintili bir fonksiyon degil, kesintisiz / surekli bir fonksiyonumuz var. Bu teorinin daha detayli ispati icin [4]'e bakabilirsiniz.

Maks-Min Esitsizligi

Eger $[a, b]$ araliginda f, maksimum deger $\max f$'e ve minimum deger $min\ f$'e sahipse,

$$\min f \cdot (b - a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \max f \cdot (b - a)$$

demektir.



Bu kural diyor ki f'in $[a, b]$ uzerindeki entegrali hicbir zaman f'in minimum'u carpi $[a, b]$ araliginin uzunlugu'ndan kucuk olamaz, ve f'in maksimumu carpi $[a, b]$ araliginin uzunlugu'ndan buyuk olamaz.

Ispat

Eger $(b - a)$'yi $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$ olarak gorursek

$$\min\ f \cdot (b - a) = \min\ f \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \min\ f \cdot \Delta x_k$$

$[a, b]$ araligindaki herhangi bir deger c_k icin

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

Oyle degil mi? $min\ f$ degeri en kucuk deger ise, $[a, b]$ araligindaki herhangi bir nokta c_k'nin f degeri bu degere ya esit, ya da ondan buyuktur. Yani $min\ f \leqslant f(c_k)$. Devam edersek

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \max f \cdot \Delta x_k$$

Ustteki benzer mantigi takip ediyor, bu sefer $f(c_k) \leqslant \max f$. Son ifadedeki max'i disari alabiliriz.

$$= \max f \sum_{k=1}^{n} \cdot \Delta x_k$$

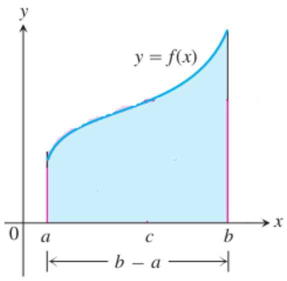
$$= \max f(b - a)$$

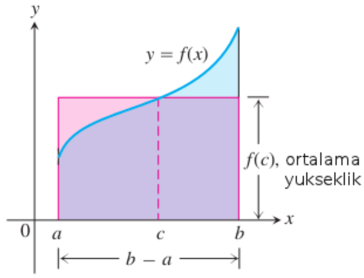
Ortalama Deger Teoremi

Eger f fonksiyonu $[a, b]$ arasinda surekli ise o zaman $[a, b]$ araliginda olan bir c noktasinda

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

esitligi dogru olmalidir. Yani alttaki resimde sol grafikteki mavi alanin $b - a$ ile bolunerek elde edilen ortalama degeri, $[a, b]$ araligindaki bir c uzerinden $f(c)$'ye muhakkak esittir. Ya da bir kenari $f(c)$, digeri $b - a$ olan bir diktortgenin alani (alt sagdaki resim), mavi alanin tamamina esit olacaktir.





Maks-Min Esitsizliginin iki tarafini $b-a$'ya bolersek

$$ \min f \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leqslant \max f $$

elde ederiz. Eger Gecis Degeri Teorisi dogruysa, $\min f$ ve $\max f$ arasindaki tum noktalar ziyaret edilmelidir. O zaman boyle bir $f(c)$ kesinlikle var demektir.

Calculus'un Temel Teoremi

Teori

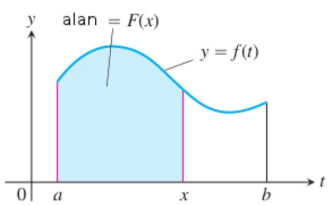
Eger f fonksiyonu $[a,b]$ arasinda surekli ise o zaman

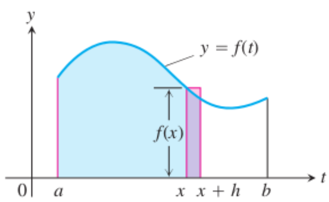
$$ F(x) = \int_a^x f(t)dt $$

fonksiyonu da $[a,b]$ arasinda sureklidir, ve bu fonksiyonun turevi $f(x)$'in kendisidir.

Yani

$$ F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x) $$





Ispat

Turevin tanimini direk $F(x)$ uzerinde uygulayalim, $[a,b]$ icinde olan x ve $x+h$ araligini alalim, ve

$$ \frac{F(x+h)-F(x)}{h} $$

bolumunun limitinin, $h \to 0$ iken, $f(x)$'e gittigini gostermeye calisalim. $F(x+h)$ ve $F(x)$ fonksiyonlarini entegralleri uzerinden tanimlayalim. O zaman ustteki formulun bolum kismi

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

Entegrallerin toplam kuralina gore ustteki formulun sag tarafi

$$\int_x^{x+h} f(t)dt$$

ifadesidir. O zaman bolumun tamami

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

Ortalama Deger Teoremine gore, ustteki esitligin sagindaki ifadenin, x ve $x+h$ araliginda f'in aldigi degerlerden birine aynen esit oldugunu biliyoruz. Yani o araliktaki bir c icin

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)$$

kesinlikle dogru olmali. Simdi, $h \to 0$ oldukca, $x+h$ mecburen x'e yaklasmak zorunda kalacaktir, cunku c, x ile $x+h$ arasinda sıkışıp kalmistir. f fonksiyonu x noktasinda surekli olduguna gore, o zaman $f(c)$, $f(x)$'e yaklasmalidir.

$$\lim_{h \to 0} f(c) = f(x)$$

Simdi elimizdeki bu bilgiyle basa donersek,

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

$$= \lim_{h \to 0} f(c)$$

$$= f(x)$$

Kaynaklar

[1] Thomas Calculus 11. Baski, sf. 130

[2] Thomas Calculus 11. Baski, sf. 347

[3] Thomas Calculus 11. Baski, sf. 358

[4] Thomas Calculus 11. Baski, sf. 257