MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 19

Konumuz vektor alanlari (vector fields) ve cizgi entegralleri (line integrals). Bundan onceki derslerde cift entegral (double integral) konusunu isledik, fakat o tur entegraller cizgi entegrallerinden tamamen farklidir, yani bu dersi takip ederken cift entegraller ile baglantilari dusunmemek daha iyi olur, kafalar karismasin.

Vektor Alanlari

Vektor alanlari bir vektordurler aslinda, diyelim ki $\vec{F}$

$\vec{F} = M\hat{i} + N\vec{j}$

Farkli olan M, N kendilerinin x, y'nin bir fonksiyonu olmalaridir. Bu demektir ki kordinat sistemindeki her x, y kombinasyonu icin degisik bir vektor olacaktir. Bir misir tarlasinda her noktada misir vardir, vektor alaninda her noktada bir vektor vardir [hoca bu analojiyi misirlar uzun, yonleri olan seyler oldugu icin kullaniyor herhalde]. Daha once $\vec{r}(t)$ baglaminda t degiskenine bagliligi gorduk, fakat o tek degisken idi, zaten bir egriyi vektor ile temsil etmek icin oyle olmasi gerekiyordu, burada birden fazla degisken x, y'ye bagimlilik var.

Bu kavram bir sivi, bir ruzgar icindeki akis vektorlerini temsil etmek icin kullanilabilir mesela. Ya da kuvvet alani (force field) kavrami – bu kavram Star Wars filminden bir kavram degil. Yeryuzunde elimizde bir cismi herhangi bir yerde tuttugumuzda onun uzerinde etki eden bir kuvvet vektoru var, bu vektor her noktada degisik, ve tum bu vektorlerin toplami bir kuvvet alani olusturuyorlar, ki bu alan bir vektor alanidir.

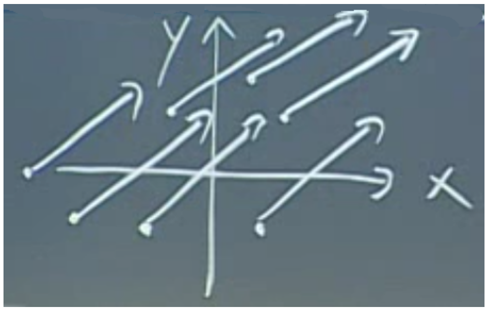
Biz bu derste konuya pur matematiksel olarak bakiyoruz, sadece arka plandaki bu fiziksel baglantiyi motivasyon acisindan aklimizda tutabiliriz.

Once cizimden baslayalim

Ornek

$\vec{F} = 2\hat{i} + \hat{j}$

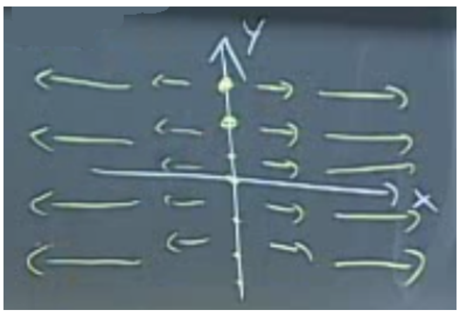
Tam x, y'ye baglantidan bahsetmistik, baglantisiz bir tane verdik! Ama ornegi soyle gorebiliriz, bu alan her x, y icin ayni vektore sahip. Yani yine x, y'yi merkez alarak dusunuyoruz, sadece vektorun her noktada ayni oldugunu soylemis oluyoruz.



Ornek

$\vec{F} = x\hat{i}$

Y-ekseni uzerinde, yani x'in sifir oldugu noktada (zaten hic y yok) vektor sifir buyuklugunde. Diger noktalarda vektor yatay, x buyudukce, ya a eksi yonde kuculdukce, saga ya da sola dogru vektorun buyuklugu de degisecek.

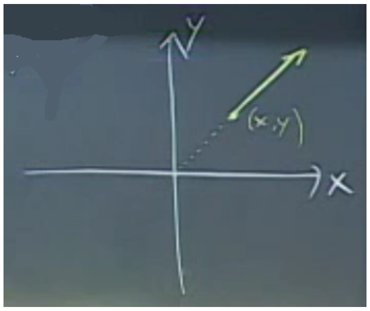


Aslinda bu tur cizimleri cogunlukla bilgisayara yaptiriyoruz, ama kabaca vektor alanlarinin neye benzedigini hayal edebilmek ise yariyor.

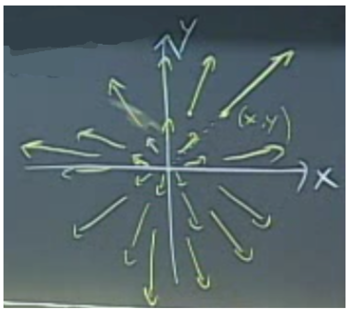
Ornek

$\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$

Bu alanin ilginc bir geometrik sonucu var. Orijinden herhangi bir noktaya cizilebilecek bir vektoru (... ile belirtiliyor) alip, kopyalarsak, bu kopyayi o noktadan baslayacak sekilde yerlestirirsek, dogru sonucu elde etmis oluruz.



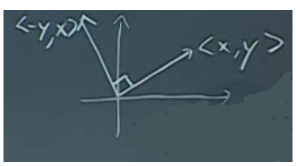
Hepsini cizince su sekil ortaya cikiyor.



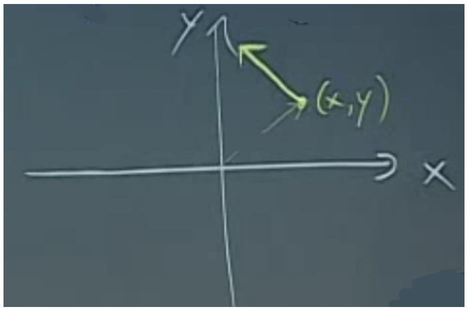
Ornek

$\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$

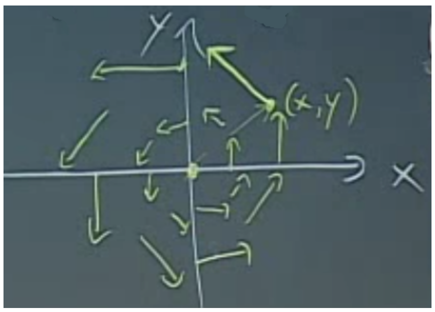
Yine orijinden baslama numarasini dusunursekm simdi elimizde $< -y, x >$ vektoru var, acaba bu vektor $< x, y >$ gore nasil bir vektor?



Bu iki vektorun arasinda 90 derece vardir. O zaman bu $< x, y >$'ye dik olan kopyayi almamiz lazim, ve onu x, y'den baslatmamiz lazim.



Hepsini cizersek



Bu alan mesela orijin etrafinda her yuvarlakta sabit hizda bir akisi olan bir siviyi temsil ediyor olabilir. Yani vektor alani bir hiz alani (velocity field) olabilir. Ilginc sorulardan biri, sivi icindeki bir parcacigin halkalarin birinde tam bir atmasinin ne kadar zaman alacagi. Cevap 2π cunku halkanin uzunlugu $2\pi \cdot r$, yani 2π carpi yaricap (radius). Bu cevap birim acisal hiz (unit angular velocity), 1 radyan / zaman. Hizin buyuklugu bir halka icinde sabit, cunku hizin buyuklugu demek vektorun buyuklugu demek, eger halkayi biz sectiysek, o halkanin orijinden uzakligi ayni olacaktir, bu uzakligin kopyasi da ayni buyuklukte olacaktir.

Kuvvet alanlarina gelelim, yani simdi vektor alandaki vektorler kuvvetleri temsil edecekler. Simdi su senaryoyu dusunelim. Bir parcacigin uzerine bir kuvvet uygulaniyor ve bu parcacik bir seyahat cizgisi uzerinde ilerliyor. Fizikten bilindigi gibi kuvvetin yaptigi "is (work)" kuvvetin o kuvvetin sayesinde ne kadar yer degisikligi oldugunun vektoru (displacement vector) ile noktasal carpimina esittir. Eger gidisat duz olursa, ve kuvvet sabitse bu hesap basitce yapilabilir, ama daha cetrefil bir gidisat takip ediliyorsa ve kuvvet o sirada surekli degisiyorsa, o zaman uzerinden entegrasyon yapmamiz gerekir.

Is ve Cizgi Entegrali

$W = (kuvvet) \cdot (mesafe) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$

W yapilan is (work)'i temsil ediyor.

Fakat senaryomuzda demistik ki gidisat karmasik ve guc surekli degisiyor.

O zaman is hesabini yapmak icin gidisati ufak parcalara ayirmaliyim, o parcalar icin carpimi yapip sonuclari toplamaliyim. Parcalar olabilecegi kadar ufak olmali tabii ki, bu ne demektir? Bir entegral demektir. Yani

Bir gidisat C uzerinde yapilan is

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Notasyonun hesapsal anlamina bakalim simdi. Soyle gorebiliriz

$$= \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_i$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \vec{F} \cdot \left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Delta t \right)$$

Aslinda hem bolume, hem bolene Δt ekleyerek hic bir sey degistirmedik, ama yeni ortaya cikan terim $\Delta\vec{r}/\Delta t$ hiz vektoru $d\vec{r}/dt$'ye esit. Limitin Δt'ye donustugune dikkat.

Yani ilk bastaki entegralimizi su sekilde hesaplayabiliriz

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

Ornek

Su kuvvetin

$\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$

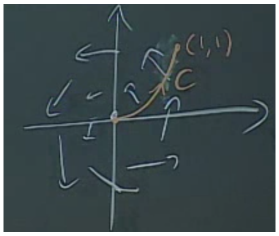
Su parametrik egri C uzerinde

$x = t$

$y = t^2$

$0 \le t \le 1$

yaptigi isi hesapla.



Bu arada, "C'yi nereden buldun?" diye bir soru gelebilir, bu yanlis bir soru. C'yi bulmadik, o bize sorunun icinde verildi, yani elimizdeki veri bu. Kuvvet alani ve egri tamamen ayri yerlerden, ayri sekilde tanimlanmis olabilir.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$\vec{F}$ nedir?

$\vec{F} =< -y, x >=< -t^2, t >$

Hiz nedir?

$dx/dt = 1$

$dy/dt = 2t$

O zaman

$$W = \int_0^1 < -t^2, t > \cdot < 1, 2t > dt$$

$$= \int_0^1 (-t^2 + 2t^2) dt$$

$$= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

Baska Bir Yol

Vektor alanimizin bilesenleri

$$\vec{F} =< M, N >$$

olduguna gore, su da dogru olmali

$$d\vec{r} =< dx, dy >$$

Bunun bize soyledigi sudur

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = Mdx + Ndy$$

Bu esitlik uzerinden problemlerin cogunlukla su sekilde yazildigini gorursunuz

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Mdx + Ndy$$

Esitligin sagindaki vektor alani degil artik, ama aslinda asagi yukari ayni seyler. Yani aradaki fark bir fonksiyonun gradyani ile kismi diferansiyelleri arasindaki iliskiye benziyor. Notasyon farkli, ama aslinda ayni icerige sahipler.

Peki bu yeni formdaki cizgi entegralini nasil hesaplayalim? Hem M hem N icinde x, y var, eger entegrali sadece dx, sadece dy icin alirsak yine y'ler, x'ler ortaya cikacak, fakat biz bunu istemiyoruz, biz tek bir sayi istiyoruz. Buradaki puf nokta su, egri boyunca x, y birbiriyle baglantili. Yani M, N iceren bir formulu entegre ediyor olabiliriz, ama C boyunca aslinda sadece tek bir parametre var. Bu tek degiskn x olabilir, y olabilir, t olabilir. O zaman

Metot: x, y degiskenlerini tek bir degisken baglaminda belirt. O tek degiskeni digerlerinin yerine gecir.

Biraz onceki ornek

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C -ydx + xdx$

Her seyi yeni, tek bir degisken t baglaminda belirtelim. Problem zaten sunu vermisti

$x = t$

$y = t^2$

dx, dy'yi bulmak icin

$dx = dt$

$dy = 2tdt$

O zaman entegral suna donusur

$= \int_C -t^2 dt + t \cdot 2tdt$

$= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ entegrali C'ye baglidir, parametrizasyonun nasil yapildigina bagli degildir. Yani hangi degiskeni istersek onu seceriz, mesela yukaridaki ornekte

$\begin{cases} x = sin\theta \\ y = sin^2\theta \end{cases}$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

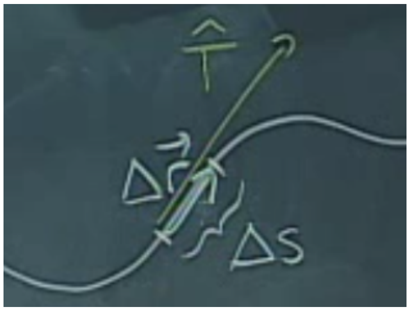
farz etmek te mumkundur. Sonra dx, dy bulunurdu, bir suru trigonometrik islemden sonra ayni sonucu bulabilirdik. Daha zor olurdu ama bulunurdu. O zaman bir tavsiye, isimizi en kolaylastiracak parametrizasyonu kullanmak en iyisi. Ustte en sondaki parametrizasyon pek iyi degil.

Geometrik Yaklasim

Parametrizasyon, vs. ile her zaman bir cozume varilabilir. Fakat bazen geometrik olarak yaklasmak cozumu daha hizlandirabiliyor.

Vektor $\Delta\vec{r}$'yi dusunelim.

Eger bu vektoru cok ufak alirsam, vektorun gidisata teget oldugunu dusunebiliriz. Yani birim teget vektor ile ayni yonu gosterecek, uzunlugu ise gidisat uzerinde alinan mesafenin ufak bir parcasi Δs olacak.



$d\vec{r} =< dx, dy >$

oldugu soylemistik, o zaman ayni sekilde

$d\vec{r} = \vec{T}\ ds$

Her seyi dt'ye bolunce elimize anlamli bir ifade ciktigini gorebiliyoruz

$$\frac{d\vec{r}}{dt} =< \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} >= \vec{T}\ \frac{ds}{dt}$$

Yani geometrik dusunerek sunu da soylemem mumkun,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M dx + N dy = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$$

$\vec{F} \cdot \vec{T}$'yi tek sayisal (scalar) bir nicelik olarak gorebiliriz, ki bu tek sayi, kuvvetin teget yonunde olan etkisi, kuvveti o yone "yansitinca (projection)" ele gecen degerdir. Sonra bu yansimayi alip tum egri boyunca entegre ediyorum.

Ornek

C = ortasi orijinde olan a yaricapindaki cember, ve gidisat saat yonunun tersi yonde.

$\vec{F} = x\hat{i} + y\vec{j}$

Fizigi iyi olanlar sonucun ne olacagini tahmin edebilir, sifir olacak cunku gidisat her zaman kuvvet vektorlerine dik.

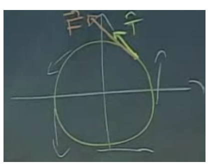
Yani $\vec{F} \perp \vec{T}$, o zaman $\vec{F} \cdot \vec{T} = 0$, yani

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = 0$$

Sonuc basit sekilde hesaplandi. Burada iki saat parametrizasyon yapabilirdik, vs. ve sonuc yine ayni cikardi.

Ornek

Ustteki ayni C, ama $\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$.



Bu durumda her iki vektor ayni yone isaret ediyor (ama ayni buyuklukte degiller, $\vec{T}$'nin birim vektor oldugunu unutmayalim).

Yani $\vec{F} // \vec{T}$, o zaman $\vec{F} \cdot \vec{T} = |\vec{F}| = a$.

Artik entegrali cok hizli sekilde hesaplayabiliriz.

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_C a\ ds = a \int_C ds = a \cdot C\text{'nin uzunlugu}$$

C'nin uzunlugu nedir? $2\pi a$. Yani ustteki entegral

$= 2\pi a^2$

Eger bu hesabi parametrizasyon ile yapsaydik?

$x = acos\theta$

$y = asin\theta$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\int_C -ydx + xdy$$

$$= \int_C -(asin\theta)(-asin\theta d\theta) + (acos\theta)(acos\theta d\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(sin^2\theta + cos^2\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 d\theta$$

Ayni sonuca eristik.

Soru

C egrisi xy duzleminde $x^2 + y^2 = 1$ cemberi, ve yonu saat yonunun tersinde olsun. Su cizgi entegralini hesaplayin.

$$\int_C (2x - y)dx + (x + 3y))dy$$

Parametrizasyon icin kare toplami 1 olan formulleri bulalim. Bunlar

$x = cos(t)$

$y = sin(t)$

$dx/dt = -sin(t)$

$dy/dt = cos(t)$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(2cos(t) - sin(t)\Big)(-sin(t))dt + \Big(cos(t) + 3sin(t)\Big)cos(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-2cos(t)sin(t) + sin^2(t) + cos^2(t) + 3sin(t)cos(t)\Big)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(cos(t)sin(t) + 1\Big)dt$$

$cos(t)sin(t)$'nin entegrali nedir? Birbirinin turevi olan terimler carpim olarak ayni formule olunca bir numara yapmak mumkun oluyor. Sunu diyebiliyoruz mesela, $u = sin(t)$ ve $du = cos(t)dt$, ve $\int udu = u^2/2$ olacagi icin,

$$\int cos(t)sin(t)dt = \frac{sin^2(t)}{2}$$

O zaman

$$= \frac{sin^2(t)}{2} + t \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi$$