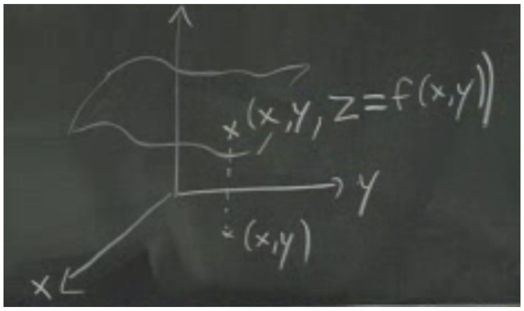
MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 8

Iki degiskenli bir fonksiyonu grafiklemek (plot) icin

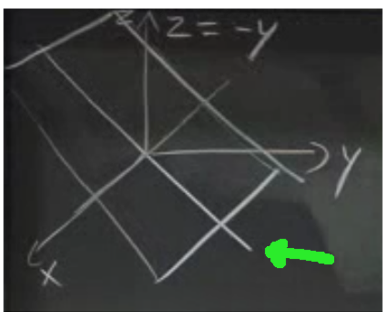


x, y degerlerine tekabul eden $f(x, y)$'yi, z ekseni uzerindeki yukseklik olarak kabul ederiz, ve oraya bir nokta koyariz. Tum x, y'ler icin bu yapilirsa bir yuzey ortaya cikar. Dikkat 3 boyutlu bir sekil gorulecektir, fakat ici dolu degildir, fonksiyon sadece yuzeydedir.

Ornek

$f(x, y) = -y$

2 degiskenli de olsa illa her iki degisken fonksiyonda kullanilmali diye bir sart yok. Bu formul bir duzlem tanimlar.



Hoca cizmek icin once yesil okun gosterdigi cizgiden basladi, ki bu cizgi $z = -y$, -1 egimi olan bir cizgi. x tanimli olmadigina gore bu cizgi her x icin gecerli olmali, ve ustteki duzlem ortaya cikiyor. x-ekseni bu duzlemin icinden geciyor.

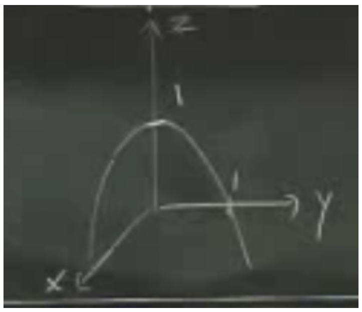
Ornek

$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

Grafigi anlamak icin yz duzleminde neler oluyor onu anlamaya ugrasalim. Sadece yz duzlemine bakmak demek, $x = 0$ kabul etmek demektir, o zaman geri kalanlar

$z = 1 - y^2$

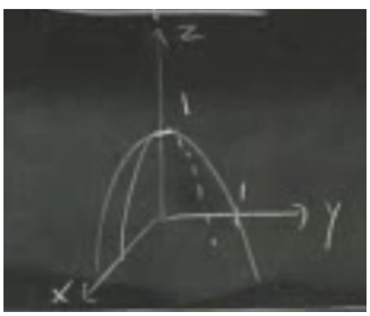
bir parabolu tanimlar.



Peki xz duzleminde neler olur?

$z = 1 - x^2$

yine asagi donuk bir parabol.



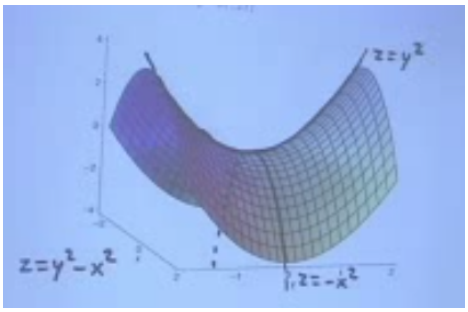
xy duzlemiyle nerede kesisim olur? $z = 0$ ise,

$1 - x^2 - y^2 = 0$

$x^2 + y^2 = 1$

Bu birim yaricapi olan bir cemberdir (unit circle).

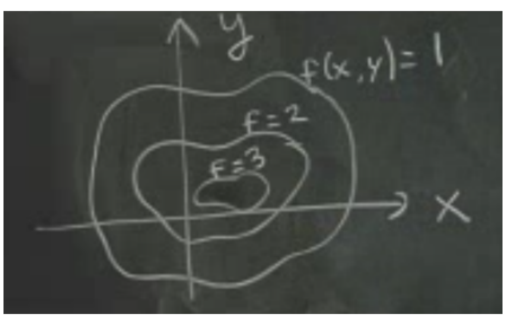
Ilginc bir diger fonksiyon



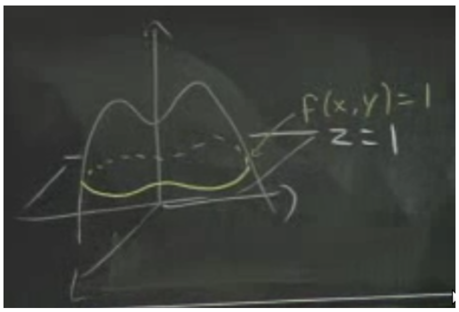
Bir at egerine (saddle) benziyor, yz duzleminden bakilinca yukari giden bir parabol $z = y^2$, ama xz duzleminde asagi donuk bir parabol, $z = -x^2$.

Kontur Grafikleri (Contour Plot)

2 degiskenli fonksiyonlari cizmenin bir diger yolu onun konturlarini cizmektir. Konturlar yeryuzunu resmetmek icin kullanilan haritalara benzerler, 3 boyutlu sekillerin yassilastirilarak, sadece ustten gorunuslerini gosteren grafikleme sekilleridirler.

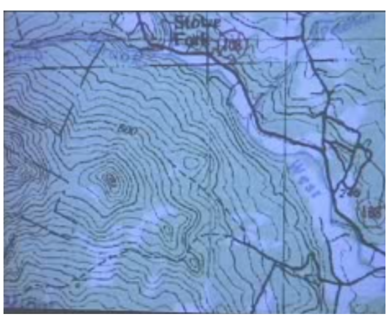


Bir kontur grafigi uzerindeki cizgilerin her biri, bir yukseklige (elevation) tekabul eder. Mesela $f(x,y) = 1$ esitligi icin olan tum x, y noktalari ustte en distaki kapali egridir, $f = 2$, $f = 3$, vs ayni sekilde. 3 boyutlu "normal" bir grafikte yukseklik olarak (3. boyut) temsil edilen degerler yassilastirilarak onlarin ustten gorunusu resmedilir. Ayrica bir z "sabitlenerek" ona tekabul eden x, y grafiklenir (bu sabit degerler cogunlukla duzenli araliklarla olacak sekilde secilir, 1,2,3,4,vs gibi), 3 boyutlu bir resimde tum z degerleri grafiklenir. Farkliliklar bunlardir. Konturlar kullanarak 3 boyutlu bir fonksiyonu iki boyutta kismen temsil edebilmis oluruz. 3 boyutlu fonksiyon ve $z = 1$ anindaki bir kesit ornegi alttadir.



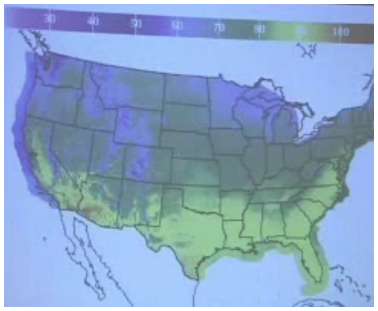
Bu teknige "seviye egrileri (level curve)" ismi de verilir. $z = 1$ seviyesinde kesit yapilinca o kesit uzerinde bir egri olusur, diger seviyelerde de kesitler yapilabilir, vs.

Bir topografik harita da aslinda bir kontur grafigidir. Mesela alttaki harita ABD Jeolojik Olcumler (US Geological Survey) haritalarindan biri



Mesela 500 yazan bir cizgi var, bu yuksekligi gosteriyor. Eger o yukseklikte kalmak istersek, hep o cizgi uzerinde yuruyebilirdik, ve hic yukari ya da asagi gitmemis olurduk. Eger cizgiler arasinda gidip gelirsek, o zaman yukseklik degisimi yapmis olurduk.

Tabii kontur grafiklerinin illa bir cografi yuksekligi temsil etmesi gerekmez. Mesela alttaki grafik ABD haritasinda herhangi kac derece sicaklik oldugunu bolgesel olarak gosteriyor.

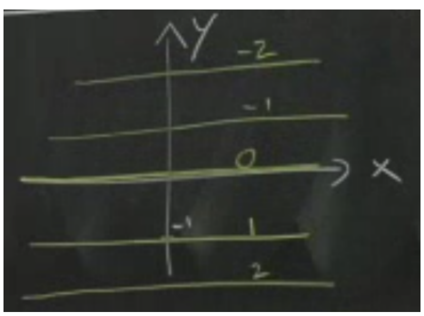


Renkler belli sicakliklari temsil ediyorlar, ve renkler arasinda bazi sinirlar var. Bu grafik te bir kontur grafigidir.

Ornek

$f(x,y) = -y$

Konturlar neye benzer?



Konturlar degisik yukseklikleri temsil ediyor, ve ustteki resim icin de bu gecerli. Bu grafigin 3D hali icinde yesil ok olan en ustten 2. grafik. O grafikte bir duz yokus var, iste ustteki cizgiler, bu yokustaki yukseklik farkinda tekabul ediyorlar.

Ornek

$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

Bu fonksiyon sifir ise birim cember olur dedik, yani

$x^2 + y^2 = 1$

Eger $f = 1$ ise

$x^2 + y^2 = 0$

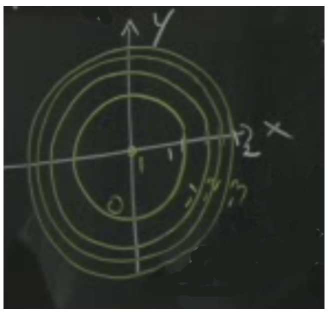
Eger $f = -1$ ise

$x^2 + y^2 = 2$

Eger $f = -2$ ise

$x^2 + y^2 = 3$

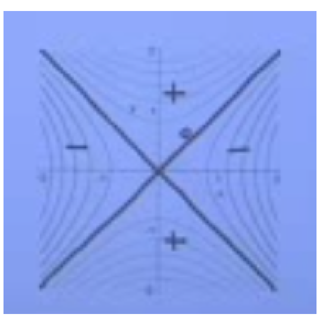
Grafik soyle



Seviye egrilerinin disa dogru nasil daha sıklaştığına dikkat cekmek isterim. Bu demektir ki disa dogru gittikce yukseklik artisi daha dik hale geliyor, cunku (yukari dogru) ayni birim mesafeyi almak icin gittikce daha az mesafe katetmek gerekiyor. Orta kisim neredeyse dumduz.

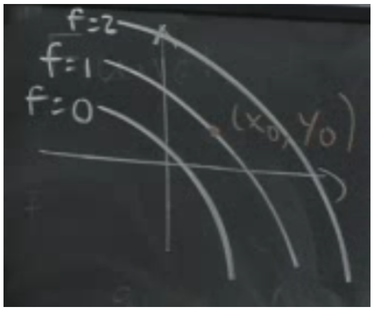
Ornek

At egrisi grafiginin konturlari



Kontur grafikleri bize x, y degisirken neler oldugunu soyler. Mesela degerler azaliyor mu, cogaliyor mu? Bu tur bir sorunun cevabini kontur grafigi hizli bir sekilde saglayabilir.

Mesela su grafige bakalim



Eger $x \uparrow$, $f(x,y) \uparrow$

Eger $x \downarrow$, $f(x,y) \downarrow$

Eger $y \uparrow$, $f(x,y) \uparrow$

Eger $y \downarrow$, $f(x,y) \downarrow$

Bu tur nicelik analiz kontur grafiklerinin cizgilerine bakarak hemen yapilabilir. Ama belki de ben daha detayli bir analiz istiyorum, mesela bir degiskeneki bir degisimin $f(x,y)$'daki degisimi ne kadar etkiledigini detayli sekilde gormek istiyorum.

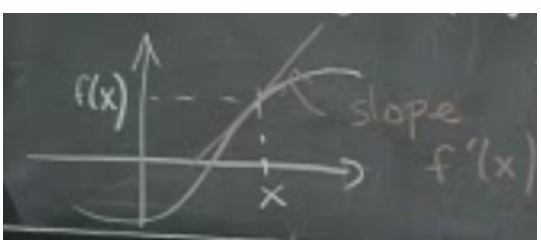
Degisim oranlarinin hesabi turevlerle yapilir.

Kismi Turevler (Partial Derivatives)

Tek degiskenli fonksiyonlar, mesela $f(x)$ gibi, o zaman $f(x)$'in turevi bir limit olarak tanimlidir

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Grafiksel olarak



x noktasindaki egim (slope) $f'(x)$'e esittir.

Yaklasiksallik Formulu

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Bu formule daha fazla terim eklesek, ortaya Taylor Formulu cikardi.

Benzer seyleri 2 degiskenli fonksiyonlar icin nasil yapardik?

Buradaki problem iki degiskenin ikisinin birden degisebilecegi. Bu sebeple bize birden fazla turev sekli gerekiyor.

Notasyon

Parcali turev kivrik bir "d" sembolunu andirir

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

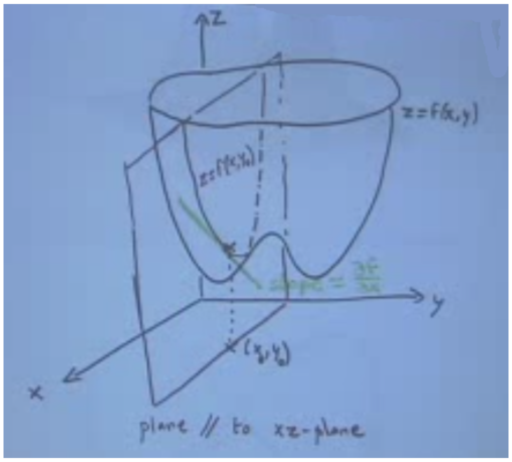
Bu ibare "sadece x degisiyor, digerleri degismiyor" demek. O yuzden bu klasik bir turev degil, kismi bir turev. Tamami

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Gordugumuz gibi y uzerinde hicbir degisiklik yapmiyorum. Sadece x'i degistirip, bu degisimin fonksiyonun tamami uzerindeki oranini (rate of change) hesapliyorum. Ayni sekilde

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Geometriksel olarak



Ustteki $\partial f / \partial x$. Bir x_0, y_0 noktasina bakiyorum, sonra y'nin hic degismemesi durumunun ortaya cikaracagi bir duzlem hayal ediyorum. Sonra bu duzlemin f'ten aldigi "kesiti" dusunuyorum, iste bu yansima bir yeni fonksiyon yaratiyor, ve bu fonksiyona x_0, y_0 noktasinda teget gecen cizginin egimi (slope), $\partial f / \partial x$.

Peki bu hesap nasil yapilir? Bu arada notasyon olarak

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

ayni seyler. Soldaki fizik notasyonu, sagdaki uygulamali matematik notasyonu [burada hoca uygulamali matematik, zaten notasyonu degistirilmis fizik sadece diye espri yapiyor]. Her neyse, hesap icin y sabit tutulur, x degisken kalir.

Ornek

$$f(x, y) = x^3 y + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2y$$

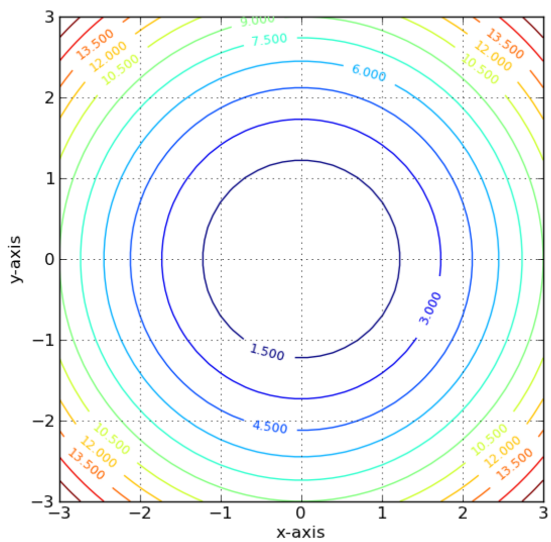
Ornekler

Python Matplotlib ile kesit seviyeleri cizmek icin ornek bir program

```
from pylab import *
```

```
x=linspace(-3,3,40)
y=linspace(-3,3,40)
x,y=meshgrid(x,y)
z=sqrt(x**2+y**2)
z=x**2+y**2
#z=x**2+y**2
#z=1-x**2-y**2
cs=contour(x,y,z,15)
grid(True)
axis('scaled')
xlabel('x-axis')
ylabel('y-axis')
clabel(cs,inline=1,fontsize=9)
show()
```

$x^2 + y^2$ fonksiyonun grafigi alttadir.



Soru 2D-5

$T = x^2 + 2y^2 + 2z^2$ fonksiyonu her x, y, z noktasindaki sicakligi rapor ediyor.

a) Bu fonksiyonun isosicaklik (isotherms) fonksiyonu hangi sekle benzer?

Cevap

Isosicaklik T fonksiyonun bir sabite esitlendiginde elde edilen fonksiyondur, o "sey" ne ise, o cisim yuzeyinde sicaklik hic degismeyecektir.

Bu cisim bir ellipsoid, bir ellipsoid bir yumurtaya benzeyen, bir elips'in alip bir nevi cevrilerek elde edilen bir sekildir. Peki seklin ellipsoid oldugunu nereden biliyoruz? Cunku ellipsoid formulu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

seklinde, ve $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = c$ formulunu ustteki forma cevirmek mumkun. Iki tarafi c'ye boleriz,

$$\frac{x^2}{c} + \frac{2y^2}{c} + \frac{2z^2}{c} = 1$$

Boylece $1/a^2 = 1/c$ olur, vs..

Peki bir ellipsoid'i nasil grafikleriz? Bu noktada sorunun istediginden daha ileri gidiyoruz.

Grafiklerken, mesela $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 10$ icin diyelim, ilk aklimiza gelebilecek fikir formulu tekrar organize ederek z'yi yanliz birakmak, ve x, y kombinasyonlarini bu fonksiyona gecerek sonuclari grafiklemek.

Buradaki problem z formulu ortaya bir karekok cikartacak, ve bu karekok sonucu hem eksi, hem arti olabilir. Daha iyi bir yontem, kutupsal forma gecmek, boylece hep arti olacak vektor buyuklugu ve acilar uzerinden bir cizim yapmak [1]. Su formule tekrar bakarsak

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}_{w^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bunu

$$w^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

olarak gorelim, burada karelerinin toplami '1' olan bir sey var.

Bu "seyler" cos ve sin olabilirler, cunku cos ve sin karelerinin toplami 1 degerini verir.

Eger

$w = sin\ \phi$

$\frac{z}{c} = cos\ \phi$

dersek, karelerin toplami ustteki gibi 1 olur.

Simdi w'nin detayina inelim

$w^2 = sin^2\phi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

Esitligin en sagina bakarsak, yine kareler toplami goruyoruz. Ama bu sefer karelerin toplami 1 degil, $sin^2\phi$ vermis. Problem degil, karelerin icine bir $sin\ \phi$ biz sokarsak, o zaman sonucta istedigimiz bir ekstra $sin^2\phi$ kendiliginden gelecek.

$\frac{x}{a} = sin\phi\ cos\theta$

$\frac{y}{b} = sin\phi\ sin\theta$

O zaman

$x = a\ sin\phi\ sin\theta$

$y = b\ sin\phi\ cos\theta$

$z = c\ cos\ \phi$

O zaman grafiklemeyi ϕ, θ acilarinin $0..\pi$ arasindaki degerlerinin kombinasyonlarini kullanarak rahatca yapabiliriz. Alttaki kodda `linspace` ile bu ayriksal degerleri bulunuyor, `outer` ile onlarin her turlu kombinasyonla carpimi aliniyor.

Not: w ile z/c'nin aldigi cos, sin degerleri ters sekilde de olabilir, sonuc farketmiyor, yine ellipsoid grafikleniyor.

```
from __future__ import division

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
fig = plt.figure(figsize=plt.figaspect(1))  # Square figure
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# Katsayilar a0/c x**2 + a1/c y**2 + a2/c z**2 = 1
coefs = (1, 4, 10)

# Katsayilara tekabul eden caplar
rx, ry, rz = [1/np.sqrt(coef) for coef in coefs]

u = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)
v = np.linspace(0, np.pi, 100)

x = rx * np.outer(np.cos(u), np.sin(v))
y = ry * np.outer(np.sin(u), np.sin(v))
z = rz * np.outer(np.ones_like(u), np.cos(v))

ax.plot_surface(x, y, z,  rstride=4, cstride=4, color='b')

max_radius = max(rx, ry, rz)
ax.set_xlim(-max_radius, max_radius)
ax.set_ylim(-max_radius, max_radius)
ax.set_zlim(-max_radius, max_radius)

plt.show()
```

[1] Thomas Calculus, 11. Baski