

Egim (Curvature)

Kesit seviyeleri tekniginde bir egri normal formda degil, dolayli (implicit) bir fonksiyon ile $F(x, y) = 0$ olarak gosterilir. Bu fonksiyonun tam diferansiyelini alirsak,

$$dF = F_x dx + F_y dy = 0$$

$$dy = \frac{-F_x}{F_y} dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y} = f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Burada bir faraziye daha var, o da aslinda ilk verilen formulde olmasa bile $y = f(x)$ olarak kabul etmemiz, yani $F(x, y)$ nasil bir formul olursa olsun, y 'nin x 'leri icerecek sekilde tekrar duzenlenebilecegini farz etmemiz, boylece $F(x, f(x))$ olabilecegini soylemis oluyoruz.

Simdi y'' 'in turevini bir daha alalim. Yukaridaki y' formulunde en sag taraf bir bolme islemi icerdigi icin burada Calculus'un Bolumler Kuralini (Quotient Rule) uygulamamiz lazim (detaylar icin Bolum Kurali yazisina bakiniz). Bu kural soyle gosterilir:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Bolumler Kurali icin u ve v tanimlari nedir?

$$u = -F_x(x, f(x))$$

$$v = F_y(x, f(x))$$

O zaman

$$v \frac{du}{dx} = F_y \frac{dF_x}{dx} \tag{1}$$

$$u \frac{dv}{dx} = -F_x \frac{dF_y}{dx} \tag{2}$$

Bunlardan mesela dF_x/dx uzerinde Zincirleme Kanunu (Chain Rule) uygulamak lazim (bu kural tam integral kuralinin bir sonucu).

$$\begin{aligned} \frac{dF_x(x, f(x))}{dx} &= \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F_x}{\partial y} \frac{df}{dx} \\ &= F_{xx}(x, f(x)) + F_{xy}(x, f(x)) f'(x) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\frac{dF_y(x, f(x))}{dx} = F_{xy}(x, f(x)) + F_{yy}(x, f(x)) f'(x) \tag{4}$$

Zincirleme Kanunu niye ustteki sekilde acildi? Tam Diferansiyeli bir daha hatir-

layalım:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

O zaman formuller (1) (2) (3) ve (4) bir araya konulursa,

$$y'' = - \frac{F_y F_{xx} - F_y F_{xy} \frac{F_x}{F_y} - F_x F_{xy} + F_x F_{yy} \frac{F_x}{F_y}}{F_y^2}$$

$$y'' = - \frac{F_y F_{xx} - F_{xy} F_x - F_x F_{xy} + \frac{F_x^2 F_{yy}}{F_y}}{F_y^2}$$

Ustteki bolumun hem bolen, hem bolunen terimlerini F_y ile carparsak, ve sadelestirsek

$$y'' = - \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy} F_x F_y + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}$$

Simdi Wolfram sitesinde turetimi gosterilen egim (curvature) formulune bakalim [2]. Not: Eger

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

formulunun alttaki formule nasil donustugu tam anlasilir degilse, hatirlayalim ki, $y = f(x)$, ve $x' = 1$, ve $x'' = 0$.

Bu formulun Courant [1] sf. 231'de benzer bir formunu goruyoruz [3].

$$\kappa = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

Bu formuldeki f'' yani y'' icin ustte buldugumuz sonucu, f' yani y' icin bu yazinin basindaki formulu koyarsak,

$$\kappa = \frac{- \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy} F_x F_y + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

Bolen kısmi nedir?

$$(1 + f'^2)^{3/2} = \left(1 + \left(\frac{-F_x}{F_y}\right)^2\right)^{3/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{F_x^2}{F_y^2}\right)^{3/2} \\
&= \left(\frac{F_y^2 + F_x^2}{F_y^2}\right)^{3/2} \\
&= (F_y^2 + F_x^2)^{3/2} (F_y^{-2})^{3/2} \\
&= (F_y^2 + F_x^2)^{3/2} F_y^{-6/2} \\
&= (F_y^2 + F_x^2)^{3/2} F_y^{-3}
\end{aligned}$$

Yerine koyarsak,

$$\kappa = \frac{\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy} F_x F_y + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}}{(F_y^2 + F_x^2)^{3/2} F_y^{-3}}$$

F_y^{-3} ve F_y^3 birbirlerini iptal ederler ve sonuc:

$$\kappa = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy} F_x F_y + F_x^2 F_{yy}}{(F_y^2 + F_x^2)^{3/2}} \quad (5)$$

Ustteki unlu egim (curvature) formuludur.

Bu egim formülünün diger bir sekli soyledir (F yerine ϕ kullanirsak)

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

Bunun okunus sekli “birim normal gradyanin uzaklasim olcusu (divergence of the unit normal gradient)” seklindedir. Acaba bu formül, (5). formül ile uyumlu mu?

$$\begin{aligned}
\kappa &= \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \\
&= \nabla \cdot \frac{(\phi_x, \phi_y)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \\
&= \left(\partial_x \frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right) + \left(\partial_y \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right) \\
&= \frac{\phi_{xx}}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} - \frac{\phi_x(\phi_x \phi_{xx} + \phi_y \phi_{xy})}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} + \frac{\phi_{yy}}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} - \frac{\phi_y(\phi_x \phi_{xy} + \phi_y \phi_{yy})}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\phi_{xx}(\phi_x^2 + \phi_y^2) - \phi_x(\phi_x \phi_{xx} + \phi_y \phi_{xy}) + \phi_{yy}(\phi_x^2 + \phi_y^2) - \phi_y(\phi_x \phi_{xy} + \phi_y \phi_{yy})}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}}$$

Bu formül bizim (5). formül ile tipatip aynı.

Ustteki işlemlerde uzaklaşım ölçüsü (divergence) operatörü $\nabla \cdot$ ile gradyan operatörü ∇ arasındaki farkı belirtelim: $\nabla \cdot$ operatörü $F(x, y)$ üzerinde kısmi türevlerin toplamını verir, yani bir skalar tek sayı döndürür. Gradyan ise her bir elemanı bir kısmi türeve tekabül eden bir *vektor* geri getirir.

Python Numpy kodlaması bağlamında, daha önce *Kesit Seviyeleri* yazısında ayrık-sal olarak bir ϕ değişkeni içindeki bir fonksiyon üzerinde eğimselliği (curvature) şöyle hesaplamistik:

```

1 gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
2 absGradPhi=np.sqrt(gradPhiX**2+gradPhiY**2)
3
4 normGradPhiX=gradPhiX/(absGradPhi+(absGradPhi==0))
5 normGradPhiY=gradPhiY/(absGradPhi+(absGradPhi==0))
6
7 divYnormGradPhiX, divXnormGradPhiX=np.gradient(normGradPhiX)
8 divYnormGradPhiY, divXnormGradPhiY=np.gradient(normGradPhiY)
9
10 K = divXnormGradPhiX + divYnormGradPhiY
```

Bu satırların $\nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ ifadesiyle birebir uyum gösterdiğini herhalde görebiliyoruz. Satır 1, $\nabla \phi$ ifadesidir. Satırlar 4-5 $\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ işlemini gerçekleştiriyor, gradyanı onun uzunluğuna (magnitude) bölerek onu birim vektörü haline getiriyor. Satırlar 7-10 tekrar sonucun gradyanını bir daha alıyor, ama bu sefer hesapsal kısmi türevleri birbiriyle topluyor, böylece uzaklaşım ölçüsü (divergence) hesaplanmış oluyor. Tüm bu işlemlerin sonucu eğimsellik κ oluyor.

Dikkat edilirse Python kodundaki K yani κ , $N \times N$ boyutlu bir matristir, bu mantıklı çünkü κ hesabi için kullandığımız F_x, F_y gibi türevler aslında $F_x(x, y), F_y(x, y)$ formüllerine sahipler, yani her x, y kombinasyonu için farklı bir sonuç döndürebilirler. Bu sebeple K yani $\kappa \phi$ fonksiyonunun her x, y noktası için tanımlidir.

Bazen literatürde $\nabla \cdot$ yerine $\text{div}(\cdot)$ kullanıldığını görebilirsiniz, bu operatörlerin ikisi de aynıdır.

–

Kaynaklar

[1] Courant, Introduction to Calculus and Analysis Volume 2, sf. 223-232

[2] Wolfram - <http://mathworld.wolfram.com/Curvature.html>

[3] Bu arada o karmaşık formül yerine yaklaşıksal olarak hesaplama sırasında

sadece f'' kullanmak ta mumkun [4]

[4] Strang, G. Computational Science and Engineering, sf. Introduction bolumu