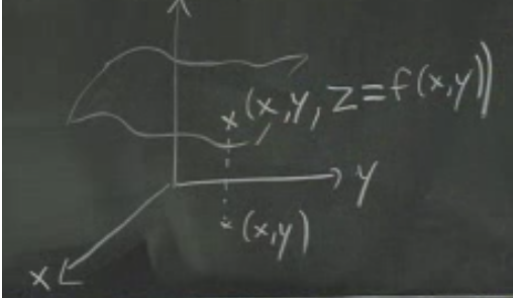


## MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 8

İki degiskenli bir fonksiyonu grafiklemek (plot) için

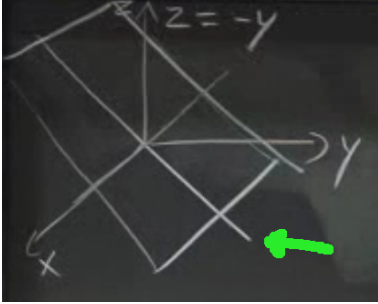


$x, y$  degerlerine tekabül eden  $f(x, y)$ 'yi,  $z$  eksenini uzerindeki yukseklik olarak kabul ederiz, ve oraya bir nokta koyariz. Tum  $x, y$ 'ler için bu yapilrsa bir yuzey ortaya cikar. Dikkat 3 boyutlu bir sekil gorulecektir, fakat ici dolu degildir, fonksiyon sadece yuzeydedir.

Ornek

$$f(x, y) = -y$$

2 degiskenli de olsa illa her iki degisken fonksiyonda kullanilmali diye bir sart yok. Bu formül bir düzlem tanımlar.



Hoca çizmek için önce yeşil okun gösterdiği çizgiden başladı, ki bu çizgi  $z = -y$ ,  $-1$  eğimi olan bir çizgi.  $x$  tanımlı olmadığina göre bu çizgi her  $x$  için geçerli olmalı, ve üstteki düzlem ortaya çıkıyor.  $x$ -ekseni bu düzlemin içinden geçiyor.

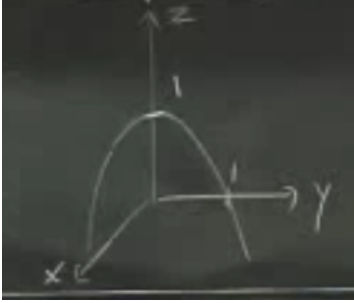
Ornek

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

Grafiği anlamak için  $yz$  düzleminde neler oluyor onu anlamaya uğrasalım. Sadece  $yz$  düzlemine bakmak demek,  $x = 0$  kabul etmek demektir, o zaman geri kalanlar

$$z = 1 - y^2$$

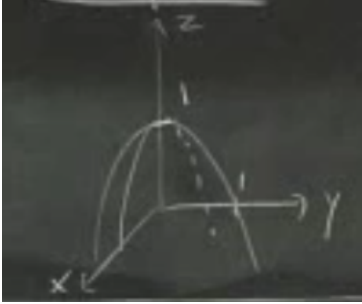
bir parabolü tanımlar.



Peki  $xz$  düzleminde neler olur?

$$z = 1 - x^2$$

yine aşağı doğru bir parabol.

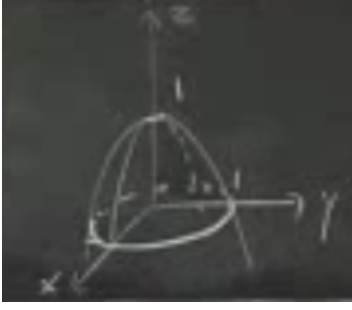


$xy$  düzlemiyle nerede kesişim olur?  $z = 0$  ise,

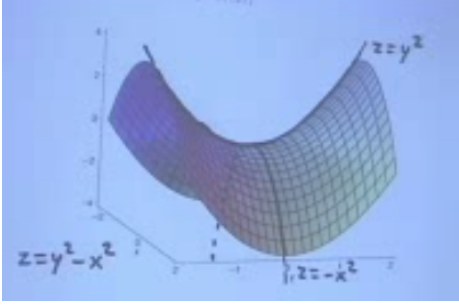
$$1 - x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Bu birim yarıçaplı olan bir dardir (unit circle).



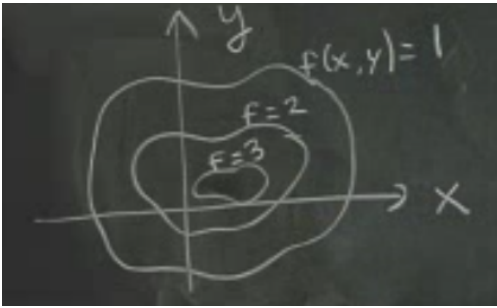
İlginc bir diğer fonksiyon



Bir at egerine (saddle) benziyor,  $yz$  düzleminde bakılınca yukarı giden bir parabol  $z = y^2$ , ama  $xz$  düzleminde aşağı dönük bir parabol,  $z = -x^2$ .

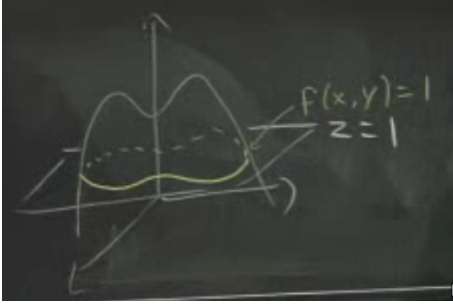
Kontur Grafikleri (Contour Plot)

2 değişkenli fonksiyonları çizmenin bir diğer yolu onun konturlarını çizmektir. Konturlar yeryüzünü resmetmek için kullanılan haritalara benzerler, 3 boyutlu şekillerin yassılaştırılarak, sadece üstten görünüşlerini gösteren grafikleme şekilleridirler.



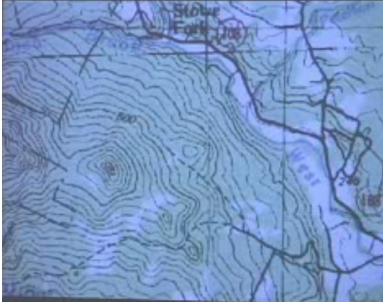
Bir kontur grafiği üzerindeki çizgilerin her biri, bir yüksekliğe (elevation) tek-

abul eder. Mesela  $f(x, y) = 1$  esitligi icin olan tum  $x, y$  noktaları ustte en distaki kapali egridir,  $f = 2$ ,  $f = 3$ , vs ayni sekilde. 3 boyutlu “normal” bir grafikte yukseklik olarak (3. boyut) temsil edilen degerler yassilastirililarak onlarin ustten gorunusu resmedilir. Ayrica bir  $z$  “sabitlenerek” ona tekabul eden  $x, y$  grafiklenir (bu sabit degerler cogunlukla duzenli araliklarla olacak sekilde secilir, 1,2,3,4,vs gibi), 3 boyutlu bir resimde tum  $z$  degerleri grafiklenir. Farkliliklar bunlardir. Konturlar kullanarak 3 boyutlu bir fonksiyonu iki boyutta kismen temsil edebilmis oluruz. 3 boyutlu fonksiyon ve  $z = 1$  anindaki bir kesit ornegi alttadir.



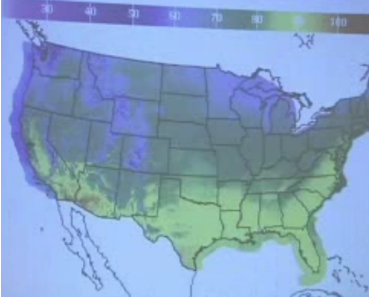
Bu teknige “seviye egrileri (level curve)” ismi de verilir.  $z = 1$  seviyesinde kesit yapilınca o kesit uzerinde bir egri olusur, diger seviyelerde de kesitler yapilabilir, vs.

Bir topografik harita da aslında bir kontur grafigidir. Mesela alttaki harita ABD Jeolojik Olcumler (US Geological Survey) haritalarindan biri



Mesela 500 yazan bir cizgi var, bu yuksekligi gosteriyor. Eger o yukseklikte kalmak istersek, hep o cizgi uzerinde yuruyebilirdik, ve hic yukari ya da asagi gitmemis olurduk. Eger cizgiler arasinda gidip gelirsek, o zaman yukseklik degisimi yapmis olurduk.

Tabii kontur grafiklerinin illa bir coğrafi yüksekliği temsil etmesi gerekmez. Mesela alttaki grafik ABD haritasında herhangi kaç derece sıcaklık olduğunu bölgesel olarak gösteriyor.

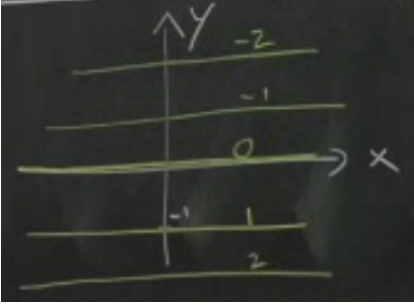


Renkler belli sıcaklıkları temsil ediyorlar, ve renkler arasında bazı sınırlar var. Bu grafikte bir kontur grafiğidir.

Örnek

$$f(x, y) = -y$$

Konturlar neye benzer?



Konturlar değişik yükseklikleri temsil ediyor, ve üstteki resim için de bu geçerli. Bu grafiğin 3D hali içinde yeşil ok olan en üstten 2. grafik. O grafikte bir düz yüz yok, iste üstteki çizgiler, bu yüzüstü yükseklik farkında tekabül ediyorlar.

Örnek

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

Bu fonksiyon sıfır ise birim çember olur dedik, yani

$$x^2 + y^2 = 1$$

Eger  $f = 1$  ise

$$x^2 + y^2 = 0$$

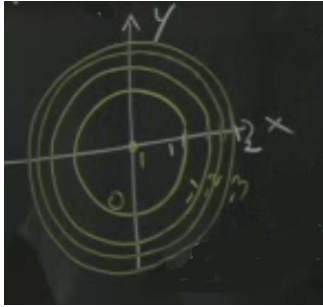
Eger  $f = -1$  ise

$$x^2 + y^2 = 2$$

Eger  $f = -2$  ise

$$x^2 + y^2 = 3$$

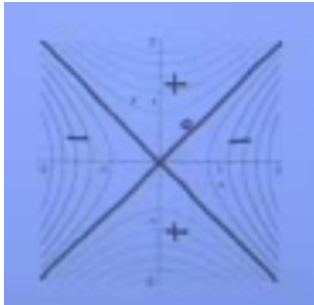
Grafik soyle



Seviye egrilerinin disa dogru nasil daha sıklaştığına dikkat cekmek isterim. Bu demektir ki disa dogru gittikce yukseklik artisi daha dik hale geliyor, cunku (yukari dogru) ayni birim mesafeyi almak icin gittikce daha az mesafe katetmek gerekiyor. Orta kisim neredeyse dumduz.

Ornek

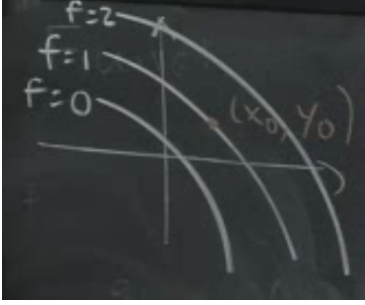
At egrisi grafiginin konturlari



Kontur grafikleri bize  $x, y$  degisirken neler oldugunu soyler. Mesela degerler azaliyor mu, cogaliyor mu? Bu tur bir sorunun cevabini kontur grafigi hizli

bir sekilde saglayabilir.

Mesela su grafige bakalim



Eger  $x \uparrow$ ,  $f(x, y) \uparrow$

Eger  $x \downarrow$ ,  $f(x, y) \downarrow$

Eger  $y \uparrow$ ,  $f(x, y) \uparrow$

Eger  $y \downarrow$ ,  $f(x, y) \downarrow$

Bu tur nicelik analiz kontur grafiklerinin cizgilerine bakarak hemen yapilabilir. Ama belki de ben daha detayli bir analiz istiyorum, mesela bir degiskeneki bir degisimin  $f(x, y)$ 'daki degisimi ne kadar etkiledigini detayli sekilde gormek istiyorum.

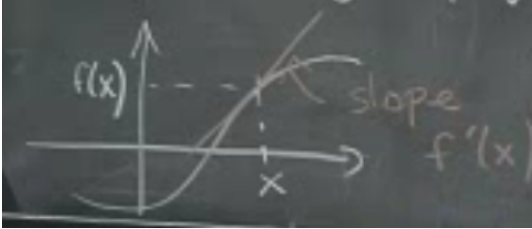
Degisim oranlarinin hesabi turevlerle yapilir.

Kismi Turevler (Partial Derivatives)

Tek degiskenli fonksiyonlar, mesela  $f(x)$  gibi, o zaman  $f(x)$ 'in turevi bir limit olarak tanimlidir

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Grafiksel olarak



$x$  noktasındaki egim (slope)  $f'(x)$ 'e esittir.

Yaklasiksallik Formulu

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Bu formule daha fazla terim eklese, ortaya Taylor Formulu cikardi.

Benzer seyleri 2 degiskenli fonksiyonlar icin nasil yapardik?

Buradaki problem iki degiskenin ikisinin birden degisebilecegi. Bu sebeple bize birden fazla turev sekli gerekiyor.

Notasyon

Parcali turev kivrik bir “d” sembolunu andirir

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Bu ibare “sadece  $x$  degisiyor, digerleri degismiyor” demek. O yuzden bu klasik bir turev degil, kısmi bir turev. Tamami

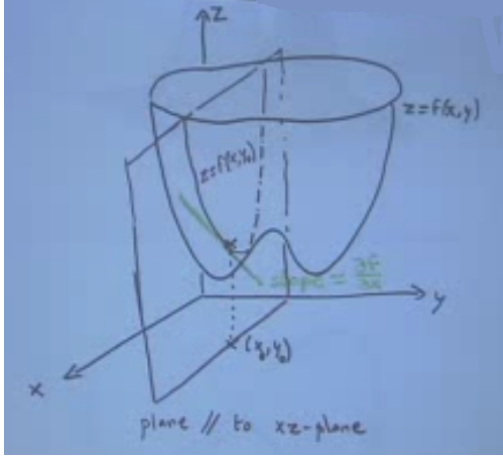
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Gordugumuz gibi  $y$  uzerinde hicbir degisiklik yapmiyorum. Sadece  $x$ 'i degistirip, bu degisimin fonksiyonun tamami uzerindeki oranini (rate of change) hesapliyorum. Ayni sekilde

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Geometriksel olarak





Ustteki  $\partial f / \partial x$ . Bir  $x_0, y_0$  noktasına bakıyorum, sonra  $y$ 'nin hiç degismemesi durumunun ortaya cikaracagi bir düzlem hayal ediyorum. Sonra bu düzlemin  $f$ 'ten aldığı “kesiti” düşünüyorum, iste bu yansima bir yeni fonksiyon yaratıyor, ve bu fonksiyona  $x_0, y_0$  noktasında teget geçen cizginin egimi (slope),  $\partial f / \partial x$ .

Peki bu hesap nasıl yapılır? Bu arada notasyon olarak

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

ayni seyler. Soldaki fizik notasyonu, sagdaki uygulamali matematik notasyonu [burada hoca uygulamali matematik, zaten notasyonu degistirilmis fizik sadece diye espri yapıyor]. Her neyse, hesap için  $y$  sabit tutulur,  $x$  degisken kalir.

Ornek

$$f(x, y) = x^3 y + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2y$$