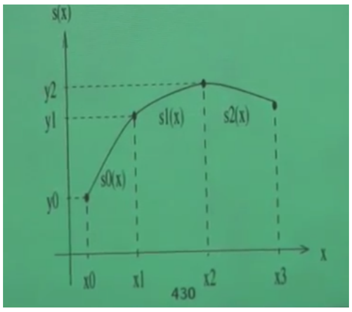
Spline Egrileri

Diyelim ki elimizde 4 x_i, y_i noktasi var, ve bu noktalardan gecen, hepsinden *kesinlikle* gecen, yaklasiksal bir egri olusturmak istiyoruz. Spline yontemi her iki nokta arasini farkli bir kupsel (ucuncu derece) polinom ile temsil etmektir. Tekrar dikkat: tum noktalari temsile edebilecek farkli polinomlari toplamiyoruz, her aralikta baska bir polinom fonksiyonu parcasini devreye sokuyoruz. Parcalar niye kupsel olarak secildi? Cunku kupsel bir egri yeterince kavis saglayabilir ve ayni zamanda cok fazla inisli cikisli, sivri degildir, yeterince puruzsuz bir egrinin ortaya cikmasini saglar.



Her $i = 0, .., n+1$ icin

$$p(x) = p_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \tag{1}$$

kullanalim. Noktalar x_i olarak gosteriliyor, ve her noktada aktif olan bir p_i spline olacak, o noktadan bir sonrakine kadar egriyi bu p_i tanimlayacak. Noktalarin sayisini n yerine $n+1$ olarak aldik boylece n egri parcasi ile calismamiz mumkun olacak. Her spline bir kubik polinom ise niye bu kubik polinomu en basit sekliyle

$$p(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$$

olarak tanimlamadik? Cunku iki ustteki form ile calismak daha rahat. Mesela, eger x icin x_i degrini verirsek, ki bu x_1 ya da x_2 olabilirdi, o zaman parantez icinde $x_i - x_i$ sayesinde tum terimler sifir oluyor, geriye sadece a_i kaliyor.

Parcalarin uclarinin birbirini tutmasi, ve tum seklin surekli, akiskan bir sekilde gozukmesi icin ise birkac kosulu bizim tanimlamamiz, ve zorlamamiz gerekli. Once en basit olani: bir onceki parca ile bir sonraki parca orta nokta uzerinde ayni degere sahip olmali. $i = 1, .., n+1$ icin

$$p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1})$$

Bir diger basit gereklilik, her x_i'ye tekabul eden spline fonksiyonun elimizdeki y_i degerini vermesi,

$$p_i(x_i) = y_i$$

"Tum noktalardan kesinlikle gecmeli" demistik. Son parca bir istisna olusturuyor, bu son parcanin fonksiyonu hem son noktayi, hem de ondan bir onceki nokta icin kullanilmali, bir onceden en sona kadar ayni fonksiyon uzerindeyiz.

$$p_n(x_n) = y_{n+1}$$

Sistemi daha detayli olarak gormek gerekirse, tum denklemleri yazalim,

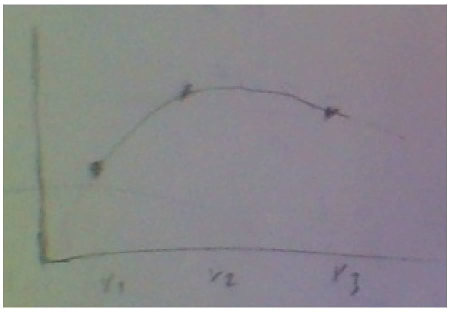
$$p_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$$

$$p_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_1(x - x_2)^3$$

$$\vdots$$

$$p_n(x) = a_n + b_n(x - x_n) + c_n(x - x_n)^2 + d_3(x - x_n)^3$$

Uc noktali soyle bir grafik dusunelim,



Ustte bahsettigimiz gibi, $p_1(x_1) = a_1 = y_1$ olacak, ve tum indisler icin bu gecerli. Ayrica x_2 noktasinda bir onceki parca ve sonraki parca ayni degere sahip olmali demistik, yani mesela p_1'in sonunda (ustteki ilk parca) x_2 noktasi vardir, ve ayni noktada p_2 baslayacaktir, o noktada

$$p_1(x_2) = a_1 + b_1h_1 + c_1h_1^2 + d_1h_1^3$$

ve bu denklem $p_2(x_2) = a_2 = y_2$'ye esit. Bir de, daha once gorduk, $a_1 = y_1$ ise, o zaman

$$y_2 = p_1(x_2) = y_1 + b_1h_1 + c_1h_1^2 + d_1h_1^3$$

haline gelir. Hepsini birarada yaziyoruz (y'yi sag tarafa aldik)

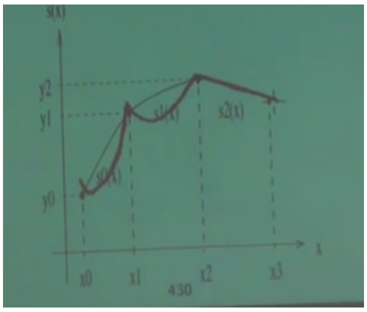
$$y_1 + b_1h_1 + c_1h_1^2 + d_1h_1^3 = y_2 \tag{2}$$

$$y_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 + d_2 h_2^3 = y_3$$

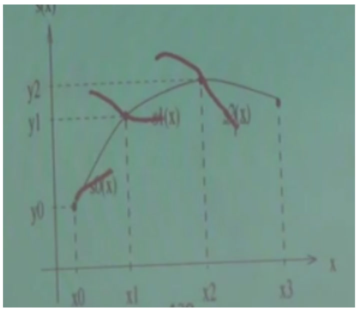
$$\vdots$$

$$y_n + b_n h_n + c_n h_n^2 + d_n h_n^3 = y_n$$

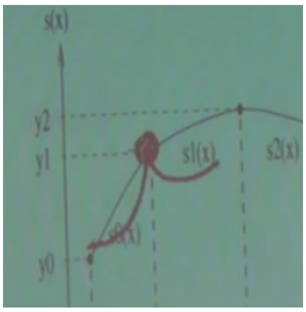
ki $h_1 \equiv x_2 - x_1$, $h_2 \equiv x_3 - x_2$ olarak tanimladik, $\equiv$ isareti "tanimlamak (defined as)" anlamina geliyor, h harfi bir tur kisaltma olarak kullanildi. Fakat kesintisizlik icin parcalarin uclarinin bitismesi yeterli degil. Mesela alttaki figurun de uclari birlesiktir,



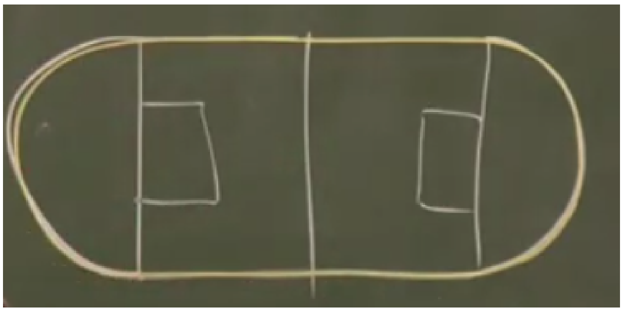
Demek ki ek bazi sartlar lazim. Bu ek sart "sureklilik" olabilir. Mesela alttaki ornek surekli degildir.



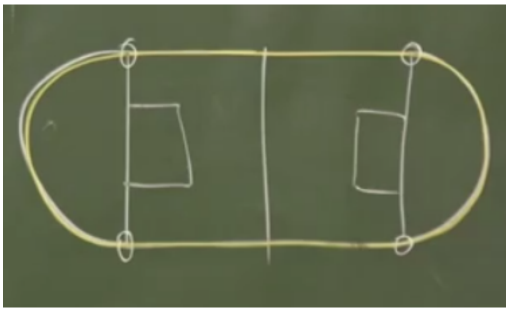
Ya da daha iyisi, fonksiyonun her noktada "turevi alinabilir" olma sarti. Mesela altta koyu yuvarlakli gosterilen noktada fonksiyonun turevi alinamaz.



O zaman sarti koyalim – Fonksiyonun her noktasinda, ikinci turev surekli alinabilmeli. Bu cok agir / net bir sart aslinda, ve hakikaten cok puruzsuz (smooth) fonksiyonlara sebebiyet veriyor. Simdi bunun ne anlamina biraz daha yakindan bakalim. Bilirsiniz futbol sahalarinin etrafinda kosu alani vardir. Bu alan soyledir.



Bu sekil iki ayri figurun birlesimidir aslinda, duz cizgiler ve iki tane yari cember. Ustteki duz cizgili kisim sonsuz kere turevi alinabilir bir fonksiyondur. Degil mi? Duz cizgi sabit bir sayidir, 1. turev sifir, ikinci turev yine sifir, boyle gider. Peki yari cember olan kisimlar? Ayni sekilde. Peki her noktada durum boyle midir? Kritik noktalar ufak yuvarlaklarla gosterilen yerler (altta)



Bu noktalarda kac kere "surekli turevler" alinabilir? Cevap, sadece bir kere. Cunku iki kere turev alininca ne olacagina bakalim, duz kisimda ikinci, ucuncu, vs. turev sifir. Peki yari cember? Onun ikinci turevi sifir olmayan sabit bir sayi. O zaman fonksiyonun tamaminin (duz cizgi ve yari cemberin beraber) 2. turevini grafiklesek, soyle bir sekil ortaya cikardi,

ve bu grafikte goruyoruz ki bir ziplama var. Bu ziplama yuzunden sureklilik (2. turevde) bozulmus oldu. O zaman spline duzgun, puruzsuz olsun istiyorsak, her noktada, yani baglanti noktalarinda, sagdaki ve soldaki parcanin birinci ve ikinci turevinin ayni olmasi sartini koyabiliriz, o zaman bu noktalarda fonksiyonun tamami iki kere surekli turevi alinabilir hale gelir. Parcalarin kendisi uzerinde bu sarti tanimlamaya gerek yok, cunku orada polinom kullanacagimizi belirttik zaten, polinomlar sonsuz kere surekli turevi alinabilen objelerdir.

Denklem sistemimize iki tane daha sart gerekiyor. Bu sartlar fonksiyonun ilk noktada ve son noktada ikinci turevinin sifir olmasi sarti olabilir. Her hangi yondeki bir cizgi $y = ax + b$'nin iki kere turevi alininca sifir gelir, yani bu sart fonksiyonumuzun son noktalarda, fonksiyonun "asagi yukari ayni yonde" olacak sekilde duz olarak devam etmesi anlamina geliyor. Yaklasiksal baglamda fena bir sart degil.

O zaman ana formullerimize donelim, ve mesela $p_1(x), p_2(x)$'in turevini alalim,

$$p_1'(x) = b_1 + 2c_1h_1 + 3d_1h_1^2$$

$$p_2'(x) = b_2 + 2c_2h_2 + 3d_2h_2^2$$

$$\vdots$$

Turevleri esitleyelim $p_1'(x_2) = p_2'(x_2)$.

$$p_1'(x_2) = b_1 + 2c_1h_1 + 3d_1h_1^2$$

$$p_2'(x_2) = b_2$$

Ustteki niye sadece b_2 oldu? Cunku $x_i - x_i$ numarasi onun icin de gecerli, geriye sadece b_2 kaldi. Hepsi bir arada

$$b_1 + 2c_1h_1 + 3d_1h_1^2 = b_2 \tag{3}$$

$$b_2 + 2c_2h_2 + 3d_2h_2^2 = b_3$$

$$\vdots$$

$$b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 = b_n$$

Ikinci turevler icin benzer bir durum var, bu sefer sol taraftan b'ler yokoluyor,

$$2c_1 + 6d_1h_1 = 2c_2 \tag{4}$$

$$2c_2 + 6d_2h_2 = 2c_3$$

$$\vdots$$

$$2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} = 2c_n$$

Ilk ve son ikinci turevi sifira esitlemeyi unutmayalim. Son turev

$$2c_n + 6d_nh_n = 2c_{n+1} = 0$$

Ilk turev

$$p_1''(x_1) = c_1 + 6d_1(x_1 - x_1) = c_1 = 0$$

$$6d_1(x_1 - x_1)$$

sifir olur

Denklem (4)'den baslayan blogu tekrar duzenlersek,

$$d_1 = \frac{c_2 - c_1}{3h_1} \tag{5}$$

$$d_2 = \frac{c_3 - c_2}{3h_2}$$

$$\vdots$$

$$d_n = \frac{c_{n+1} - c_n}{3h_n}$$

Ustteki denklemleri (2) ve (3)'e geri koyarsak,

$$b_1 + \frac{c_2 + 2c_1}{3}h_1 = s_1 \tag{7}$$

$$b_2 + \frac{c_3 + 2c_2}{3}h_1 = s_2$$

$$\vdots$$

$$b_n + \frac{c_{n+1} + 2c_n}{3} h_n = s_n$$

ki $s_1 \equiv \frac{y_2 - y_1}{h_1}$, $s_2 \equiv \frac{y_3 - y_2}{h_2}$.
(3) ifadesini alip tekrar duzenlersek,

$$2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2 = b_2 - b_1$$

$3d_1 h_1$ icin baska bir ifade kullanabiliriz, eger (5)'i tekrar duzenlersek,

$$3h_1 d_1 = c_2 - c_1$$

ve iki ustteki formule koyarsak

$$2c_1 h_1 + (c_2 - c_1)h_1 = b_2 - b_1$$

$$2c_1 h_1 + c_2 h_1 - c_1 h_1 = b_2 - b_1$$

$$c_1 h_1 + c_2 h_1 = b_2 - b_1$$

$$(c_1 + c_2)h_1 = b_2 - b_1$$

Bu ifade tum i noktalari icin gecerli, hepsi bir arada

$$(c_1 + c_2)h_1 = b_2 - b_1 \tag{6}$$

$$(c_2 + c_3)h_2 = b_3 - b_2$$

$$\vdots$$

$$(c_{n-1} + c_n)h_{n-1} = b_n - b_{n-1}$$

(7)'deki ardi ardina gelen denklemleri birbirinden cikartip sonucu 3 ile carparsak,

$$c_1 h_1 + 2c_2(h_1 + h_2) + c_3 h_2 = 3(s_2 - s_1)$$

$$c_2h_2 + 2c_3(h_2+h_3) + c_4h_3 = 3(s_3 - s_2)$$

$$\vdots$$

$$c_{n-1}h_{n-1} + 2c_n(h_{n-1}+h_n) + c_{n+1}h_n = 3(s_n - s_{n-1})$$

Bu formuller birarada dusunulurse, bilinmeyenleri $c_2, c_3, .., c_n$ olan normal (ordinary) $n-1$ tane lineer denklemdirler, ve bir matris carpimi olarak dusunulebilirler.

c_1h_1 matris formunda yok cunku $c_1 = 0$.

$$\begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & .. & 0 \\ 0 & h_3 & 2(h_3+h_4) & h_4 & .. & 0 \\ 0 & 0 & h_4 & 2(h_4+h_5) & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & .. & 0 & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Bu denklem sag tarafta suna esit

$$\begin{bmatrix} 3(s_2 - s_1) \\ 3(s_3 - s_2) \\ 3(s_4 - s_3) \\ \vdots \\ 3(s_n - s_{n-1}) \end{bmatrix}$$

Bir ucgen kosegen (tridiagonal) matris iki tane ikili kosegen (bidiagonal) matrisin carpimina esittir. LU carpanlarina ayirma islemi de (bkz Lineer Cebir Ders 4) bize bu matrisleri saglayacaktir.

$$Ax = b$$

su hale gelir

$$LUx = b$$

Simdi eger $Ux = y$ kabul edersek, yani yeni bir degiskeni dahil edersek, L'i bulduktan sonra

$$Ly = b$$

kabul edebiliriz, ve bu formulu de y icin cozmek cok kolaydir. Sonra cozulen y'yi alip geriye sokma (backsubstitution) ile x'i buluruz, yani

$$Ux = y$$

denklemini cozeriz.

```
import scipy.linalg as lin

a = np.array( [[3.,-3.,0,0],
               [-3.,8.,-2.,0],
               [0,1.,2.,4.],
               [0,0,-2.,6.]])

p,l,u = lin.lu(a)

Ly = np.array([[7.,8.,2.,-3.]])

y = lin.solve(l,Ly.T)

x = lin.solve(u,y)
print x
```

```
[[ 5.44047619]
 [ 3.10714286]
 [ 0.26785714]
 [-0.41071429]]
```

Spline yontemine donersek, elimizdeki veri ve kod soyle olsun

```
import scipy.linalg as lin

xx = np.array([4.,9.,12.,16.,22.])

yy = np.array([157.,41.,145.,92.,7.])

h = np.diff(xx)

dy = np.diff(yy)

s = dy / h

ds = np.diff(s)

s3 = 3 * ds

a = np.array([[ 2*(h[0]+h[1]), h[1], 0],
              [ h[1], 2*(h[1]+h[2]), h[2]],
              [ 0, h[2], 2*(h[2]+h[3])]])
```

```
p,l,u = lin.lu(a)

y = lin.solve(l,s3.T)

c = lin.solve(u,y)
print c
```

```
[ 13.45756677 -13.90702275   2.64390455]
```

c'ler bulunduktan sonra h'lerle beraber kullanilarak d'ler bulunur, vs, ve tum spline parcalarinin katsayilari ortaya cikartilir.

Kaynaklar

http://spartan.ac.brocku.ca/~jvrbik/MATH2P20/notes.pdf

http://www.youtube.com/watch?v=3rHBCglD1LQ

http://www.youtube.com/watch?v=nA0YpqraP9A