

## Filtrelemek

Filtreler dis dunyadaki bir aksiyon hakkında elde edilen gurultulu sinyalleri, tersine cevirecek arka plandaki aksiyon hakkında hesaplama yapabilmemizi saglar. Mesela Kalman Filtreleri (KF) icin gizlenmis konum bir robotun nerede oldugu, bir senetin fiyati gibi bir sey olabilir, gizli konum bilgisi  $x_t$  degiskeninde o konum hakkindaki gurultulu olcum  $y_t$  icindedir. Hem gizli konumlar arasindaki gecis, hem de olcumun gurultusu lineer bir fonksiyon uzereindir.

$$x_{t+1} = Ax_t + v$$

$$y_t = Hx_t + w$$

$v$  ve  $w$ 'in dagilimi Gaussian'dir ve kovaryans sirasiyla  $Q$  ve  $R$  icindedir. Coglu filtre hesaplamasinda  $A, H, Q, R$  matrisleri onceden bilinir.

Zaman faktorunu de dahil etmek gerekirse;

$$\hat{x}_t^t = E[x_t|y_0, \dots, y_t]$$

$$P_t^t = E[(x_t - \hat{x}_{t|t})(x_t - \hat{x}_{t|t})'|y_0, \dots, y_t]$$

Filtremenin amaci  $x_{t+1}$  ve  $P_{t+1}$  hesabini yeni bir olcum  $y_{t+1}$  uzereinden yapmak olacak. “Gizli”  $x_t$  derken bunu kastediyorduk, bu deger bize verilmiyor, sadece  $x_t$  ve  $x_{t+1}$  arasindaki gecisin nasil oldugunu biliyoruz, gurultunun nasil eklendigini biliyoruz, ama bunlari bilsek bile elde bir suru bilinmeyen var. Filtrelemenin matematiksel numaralari sayesinde bunu hesaplayabiliyor olacagiz. Yani yapmamiz gereken “oku tersine cevirmek”, yani  $x_t$ 'nin  $y_t$  uzereindeki sartasal baglilikini (conditional dependence) ortaya cikartmak, bunu  $y_t$ 'nin  $x_t$ 'ye olan sartasal bagimlilikini tersine cevirecek yapmak. Ana denklemin iki tarafinin da beklentisini (expectation) alalim:

$$E[x_{t+1}] = E[Ax_t + v] = E[Ax_t] = AE[x_t] = A\mu_t = A\hat{x}_t$$

Notasyon olarak sunu soylesek iyi olur

$$E[x_{t+1}] = \hat{x}_{t+1}$$

Beklentiye alinca  $v$  yok oldu cunku bu rasgele degiskenin beklentisinin sifir oldugunu biliyoruz. Simdi iki tarafin kovaryansini alalim ve  $P_t$ 'yi  $cov\ x_t$  olarak belirtelim:

$$P_{t+1} = AP_tA' + Q$$

Bu gecis “zaman guncellemesi” olarak adlandirilir. Normal dagilimleri  $t$  anindan  $t + 1$  anina gecirmemizi saglar.  $y$  iceren formullerde benzer bir durum var.

$$\hat{x}_{t+1}^t = Ax_t^t$$

$$P_{t+1}^t = AP_t^tA' + Q$$

$$y_{t+1} = Cx_{t+1} + w_t$$

$$E[y_{t+1}|y_0, \dots, y_t] = E[Cx_{t+1} + w_t|y_0, \dots, y_t]$$

$$\hat{y}_{t+1}^t = C\hat{x}_{t+1}$$

Kovaryans icin benzer durum

$$E[(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1}^t)(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1}^t)' | y_0, \dots, y_t] = C_{t+1}^t C' + R$$

Simdi daha zor is olan oku tersini cevirmeye geelim. Eger amacimiz  $p(x_t|y_t)$  denklemini elde etmek ise o zaman bu iki degiskeni iceren birlesik dagilimi (joint distribution) elde etmek zorundayiz. Iki Gaussian'in birlesiminin yeni bir Gaussian oldugunu biliyoruz, o zaman hem  $x_t$  hem de  $y_t$ 'in kendisi cok boyutlu birer Gaussian olduklari icin onların birlesimi  $p(x_t|y_t)$ 'in hakikaten devasa bir Gaussian olacagini tahmin edebiliriz.

$x_t$  ve  $y_t$ 'in birlesimi olan Gaussian'i bulmak demek, bu Gaussian'in ortalamasini (mean) ve kovaryansini bulmak demektir cunku bir Gaussian ortalama ve kovaryansi ile net bir sekilde tanimlanabilir bir seydir. Bir numara yapalim, ve  $y_t = Cx_t + w_t$ 'yi  $z = Hu$  seklinde yazalim. Sonra

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} x_t \\ w_t \end{bmatrix}$$

Boylece daha basit bir denklemin kovaryansini alabiliriz

$$cov(z) = H cov(u) H'$$

$$cov(u) = \begin{bmatrix} P_t & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

Tam carpim suna esit

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_t & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & C' \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

bunun sonucu ise

$$\begin{bmatrix} P_t & P_t C' \\ C P_t & C P_t C' + R \end{bmatrix}$$

Bunu baglantisal denklem icin ve ortalamayi icerecek sekilde yazabiliriz

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_t^t \\ C\hat{x}_t^t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_t^t & P_t^t C' \\ C P_t^t & C P_t^t C' + R \end{bmatrix}$$

Ayni sekilde  $x_{t+1}, y_{t+1}$  birlesik dagilim icin

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{t+1}^t \\ C\hat{x}_{t+1}^t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{t+1}^t & P_{t+1}^t C' \\ C P_{t+1}^t & C P_{t+1}^t C' + R \end{bmatrix} \quad (1)$$

Simdi  $x_{t+1}^{t+1}$ 'in ortalama ve varyansi icin parcali Gaussian kavramini anlatmaliyiz. Bir n boyutlu Gaussian daha kucuk boyutlardaki p ve q alt Gaussian'lara parcalanabilir (tabii ki  $n = p + q$ ). Yani su ifade kullanilabilir

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$p(x|\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{(p+q)/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \right\}$$

Uzun cebirsel işlemlerden sonra  $p(x_1|x_2)$  ifadesini elde ederiz. Bu cebirsel türetimi görmek istiyorsanız, *Istatistik* ders notlarımızda Ders 3'e bakabilirsiniz.

Bundan sonra şartlanmış (conditioned)  $\mu$  ve  $\Sigma$  alınır.

$$\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2) \quad (3)$$

$$\Sigma_{1|2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

Simdi denklem (3)'u alip (1)'in icine koydugumuzda ve (2)'deki yerlesim yapisini dikkate aldigimizda  $\hat{x}_{t+1}^{t+1}$  ve  $P_{t+1}^{t+1}$  formullerini ortaya cikartabiliriz.

$$\hat{x}_{t+1}^{t+1} = x_{t+1}^t + P_{t+1}^t C' (C P_{t+1}^t C' + \Sigma_w)^{-1} (y_{t+1} - C \hat{x}_{t+1}^t)$$

$$P_{t+1}^{t+1} = P_{t+1}^t - P_{t+1}^t C' (C P_{t+1}^t C' + R)^{-1} C P_{t+1}^t$$

$$\text{Eger } K = P_{t+1}^t C' (C P_{t+1}^t C' + \Sigma_w)^{-1} \text{ dersek}$$

$$\hat{x}_{t+1}^{t+1} = \hat{x}_{t+1}^t + K_t (y_{t+1} - C \hat{x}_{t+1}^t)$$

$$P_{t+1}^{t+1} = P_{t+1}^t - K_t C P_{t+1}^t$$

Ornek: Veriye Duz Cizgi Uydurmak (Line Fitting)

Eger elimizde bir cizgiye uydurmak icin kullanacagimiz tum veri olsaydi, uydurma islemi icin en az kareler (least squares) yontemini kullanabilirdik. Kalman Filtreleri bize yeni veri geldigi anda, her seferinde, azar azar bir cizgiyi uydurmamizi sagliyor. Hatta matematiksel olarak ispalanmistir ki eger baslangic noktası aynıysa, azar azar veriyi KF ile almanın sonunda, tüm veriyi bir kerede en az karesel yöntem ile uydurmak aynı sonucu verir.

Peki bu uydurma islemini nasıl yaparız? Burada veriyi nasıl temsil ettigimiz konusunda ufak bir numara kullanmamız lazım.

Kendimize bir soru soralım: bu sistemin konum bilgisi nedir? Bir robotu izliyorsak mesela soru cevabi basittir, onun  $x, y$  gibi kordinat bilgisi. Duz cizgi fit ederken takip edilen bunlar degil, bize gerekli olan bir cizginin “egimi (slope)”. Yani hem bir cizginin  $y$  eksenini kestigi nokta, hem de cizginin egimi  $x_t$  konum bilgisi icinde dahil edilecek. Burada KF literaturunden gelen  $x, y$  harfleri birbirine karismasin diye cizginin degerlerini  $xx_t$  ve  $yy_t$  olarak tanimlayacagiz. O zaman  $x_t$  vektörü suna benzer:

$$x_t = \begin{bmatrix} yy_t \\ a \end{bmatrix}$$

ki burada  $a$  harfi egimi temsil etmektedir.  $a$  bir sabit olduguna gore KF her zaman diliminde aynı kalacak bir degiskeni hesaplayacaktır. Cogunlukla KF ile her zaman diliminde degisik olan degerlerin hesaplandigini goruruz, bu uygulamaya gore degisen bir seydir, matematiksel bir mecburiyet degildir.  $A$  matrisimiz ile de biraz numara yapmamız gerekli. Bu matris  $x_t$ 'yi donusturup  $x_{t+1}$ 'i elde etmemizi saglayan

sey olduguna gore  $A$ 'nin soyle olmasi gerekir:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & \Delta xx \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrisi  $x_t$  ile carptigimizda  $yy_t \cdot 1 + a \cdot \Delta xx$  degerini elde ediyoruz, ki bu deger bir cizgi uzerinde bir sonraki noktayi temsil ediyor. Dis olcumu veren gurutlu matrisi  $H$  ise

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sekinde. Bunu  $x_t$  ile carptigimizda  $y_t$ 'yi (iki kere) elde ettigimizi gorecegiz. Not: Niye iki kere? Kodlama sirasinda boyutlarin uyumlu olmasi icin boyle gerekti, cok buyuk bir rahatsizlik degil. Kod altta gorulebilir.

```
import numpy.linalg as lin
slope = 2

#
#  $x_{t+1} = A x_t + Q$ 
#  $y_t = Hx_t + R$ 
#
def Kalman(obs,x,mu_init,nsteps):

    ndim = shape(mu_init)[0]

    Q = np.zeros((ndim, ndim))
    A = np.eye(ndim)
    H = np.array([[1, 0], [1, 0]])

    mu_hat = mu_init
    cov = np.ones((ndim, ndim))
    R = np.eye(ndim) * 10

    m = np.zeros((ndim,nsteps),dtype=float)
    ce = np.zeros((ndim,ndim,nsteps),dtype=float)

    for t in range(1,nsteps):
        # Tahmini yap
        # A transofmrasyon matrisi ve suna esit
        # | 1 delta_x |
        # | 0      1   |
        A = np.array([[1, x[t]-x[t-1]], [0, 1]])
        mu_hat_est = np.dot(A,mu_hat)
        cov_est = np.dot(A,dot(cov,transpose(A))) + Q

        # tahmini guncelle
```

```

    error_mu = obs[:,t] - dot(H,mu_hat_est)
    error_cov = np.dot(H,np.dot(cov,np.transpose(H))) + R
    K = np.dot(np.dot(cov_est,np.transpose(H)),lin.inv(error_cov))
    mu_hat = mu_hat_est + np.dot(K,error_mu)
    m[:,t] = mu_hat
    cov = np.dot((np.eye(ndim) - np.dot(K,H)),cov_est)
    ce[:,t] = cov
    return mu_hat

N = 20

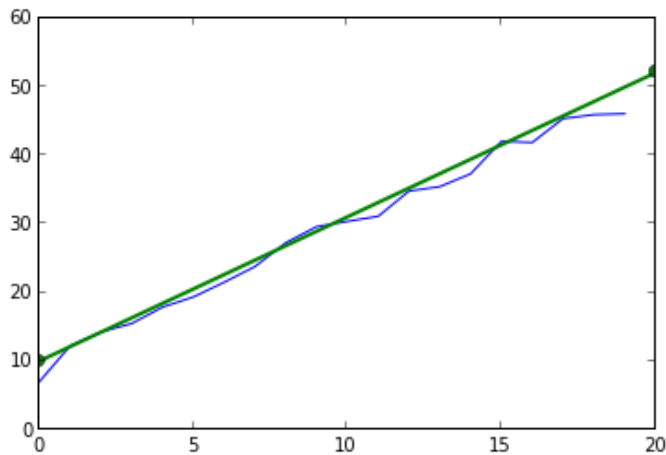
#
# ornek veri yarat
#

obs = zeros((2, N))
x = xrange(N)
for i in xrange(N):
    obs[0, i] = obs[1, i] = (slope*i)+random.normal(10)

mu_hat = Kalman(obs, x, mu_init=array([0, 0]),nsteps=N)

plt.plot(obs[0, :])
plt.plot([0,N], [10,N*mu_hat[1]], 'go-', label='line 1', linewidth=2)
plt.savefig('kalman-line-fit.png')

```



Ornek: Obje Takibi

Daha degisik bir ornekten bahsedelim. Bu ornekte OpenCV kutuphanesinden elde ettigimiz 2 boyutlu degerleri  $y_t$  icin kullanacagiz. Degerler OpenCV'nin bir satranc tahtasi seklinin kose noktalarini otomatik olarak bulabilen `cvFindChessboardCorners` cagrisinden gelecek (ayrica `cvDrawChessboardCorners` ile bu noktalar ekranda

anında gösterebileceğiz).

Elimizdeki “gurultulu” olcunlar iki boyutlu noktasal değerler. Gurultulu çünkü kamera bize bu imajları aktarırken hata eklemiş olabilir, OpenCV fonksiyonu hesabi yaparken hata eklemiş olabilir, bir sürü olasılık var.

Bu örnekte, ayrıca, ilk kez KF ortamında boyut değişikliği olasılığını net bir şekilde görebiliyoruz. Gizli konum bilgisi  $x_t$  3 boyutlu bir nokta, ama elimizdeki ölçüm 2 boyutlu bir “yansima”. Yansima sırasında kaçınılmaz olarak değer kaybediliyor, bir boyutun bilgisi ortadan yok oluyor. Ama tüm bu bilinmezlerle rağmen Kalman filtresinin bizim için gizli bilgiyi hesaplamasını istiyoruz.

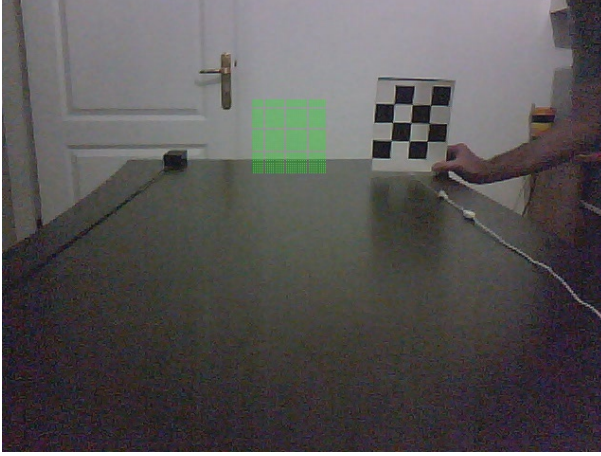
Bu problemde  $A$  matrisi ne olacaktır? Obje takibi konularında  $A$ ’nın ne olduğunu hayal etmek daha kolay,  $A$  matrisi iki zaman dilimi arasındaki “hareketi” temsil edecek. Bu problemdeki ek bir kolaylık bu hareketi önceden bildiğimiz, ve hareketin tek yönde olduğu. Yani resimde benim tuttuğum kartonu ne kadar hızla hareket ettirdiğimi ben önceden probleme bildiriyorum. Yer değişikliğini  $d$  olarak betimledim, ve  $A$  şöyle oldu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dikkat edersek  $A$  4x4 boyutunda, 3x3 değil. 3 boyutlu koordinatları temsil etmek için homojen koordinat sistemini kullandığımız için böyle oldu, o sebeple zaten  $x_t$  de 4x1 oldu, ona uymak için  $A$ ’nın değişmesi gerekiyordu.  $Ax_t$  carpımının hakikaten kartonu hareket ettirdiğini göstermek için bu carpımı bir örnek üzerinde yapalım: Diyelim ki  $x_t = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]$  o zaman  $Ax_t$  ya da  $x_{t+1}$  şu hale gelir:  $[a_1 \ a_2 \ a_3 + d \ a_4]$ .

Bakıyoruz, hakikaten de  $d$  kadarlık bir yer değişimi  $z$  koordinatı, yani derinlik üzerinde eklenmiş. Test amaçlarımız için  $d = -0.5$  aldık, yani satranc tahta kartonunun her zaman diliminde kameraya doğru 0.5 cm ilerlediğini belirttik. Tabii bu da kabaca bir tahmindir (her ne kadar hareketi yaptıran ben olsam bile!), ama filtrelemenin gücünü burada görüyoruz. Benim tahminimde “gurultu” yani “hata payı” var, ölçümde gurultu var, tüm bunlar üst üste konsa bile filtre yine de gizli konumu bulacak.

Olcumsal dönüşümü temsil eden  $H$ ’e ben onun temeli olan yansima (projection) kelimesinden gelen  $P$  matrisinden bahsedelim. Yansima matrisi görüntü (vision) literatüründe tek delikli kamera (pinhole camera) modelinden ileri gelen bir matristir ve bu matrisi hesaplamak ayarlama / kalibrasyon (calibration) denen ayrı bir işlemin parçasıdır. OpenCV içinde kalibrasyon için fonksiyonlar var, biz de bunları denedik, kalibrasyon için kullandığımız resimlerle alakalı olmalı, elde edilen sonuçlardan memnun kalmadık. Alternatif olarak bunu yaptık; resimde görülen yeşil yüzey bizim programın oluşturduğu hayali bir yüzey. Filtrenin o anki tahminini  $P$  üzerinden görüntüye yansıtarak bu yüzeyi oluşturduk, böylece deneme / yanılma yöntemiyle pek çok  $P$  değerini deneyerek, yüzeyin resimde görülen masanın sonunda çıkacak şekilde olmasını sağladık.



O noktaya gelince istedigimiz P degerini bulmus oluyorduk. Yansitma matrisleri 3x3 olur, KF buna bir dorduncu  $[0 \ 0 \ 0]$  satiri ekleyerek onu 4x3 H haline getiriyor.

KF'in baslangic noktası olarak P'yi bulmak için kullandığımız masa sonunu kullandık. Kararsızlık ölçütü Q için, ki bu değişken bir Gaussian kovaryansidir,  $Q = I \cdot 150cm$  degerini kullandık, yani oldukça büyük bir kararsızlık degeri kullandık. Sebep baslangic degeri olan masa ortasını seçtik, ve takip edeceğimiz satranc tah-tasının nerede olduğunu bilmiyoruz, “emin değiliz”. Bu kararsızlığı sayısal olarak programa bildirmiş olduk.

Altındaki resimlerde filtrenin tahminini temsil eden yeşil yüzeyin satranc tah-tasını başarıyla takip ettiğini göreceksiniz.

```
import sys, os
if sys.argv[1] == "kf":
    file = "$HOME/Dropbox/Public/skfiles/campy/chessb-right.avi"
    os.system("python track-chess-kf.py %s" % file)
if sys.argv[1] == "pf":
    file = "$HOME/Dropbox/Public/skfiles/campy/chessb-right.avi"
    os.system("python track-chess-pf.py %s" % file)

from numpy import *

#  $x_{t+1} = A x_t + \text{Sigma}_x$ 
#  $y_t = Hx_t + R$ 
class Kalman:
    # T is the translation matrix
    # K is the camera matrix calculated by calibration
    def __init__(self, K, mu_init):
        self.ndim = 3
        self.Sigma_x = eye(self.ndim+1)*150
        self.A = eye(4)
        self.A[2,3] = -0.5
        self.H = append(K, [[0], [0], [0]], axis=1)
```

```

        self.mu_hat = mu_init
        self.cov = eye(self.ndim+1)
        self.R = eye(self.ndim)*1.5

def normalize_2d(self, x):
    return array([x[0]/x[2], x[1]/x[2], 1.0])

def update(self, obs):

    # Make prediction
    #print "self.mu_hat=" + str(self.mu_hat)
    self.mu_hat_est = dot(self.A, self.mu_hat)
    prod = dot(self.A, dot(self.cov, transpose(self.A)))
    self.cov_est = prod + self.Sigma_x
    #print "self.mu_hat_est=" + str(self.mu_hat_est)
    #print "self.cov_est=" + str(self.cov_est)

    # Update estimate
    prod = self.normalize_2d(dot(self.H, self.mu_hat_est))
    self.error_mu = obs - prod

    prod = dot(self.cov, transpose(self.H))
    prod = dot(self.H, prod)
    self.error_cov = prod + self.R
    prod = dot(self.cov_est, transpose(self.H))
    self.K = dot(prod, linalg.inv(self.error_cov))
    self.mu_hat = self.mu_hat_est + dot(self.K, self.error_mu)

    prod = dot(self.K, self.H)
    left = eye(self.ndim+1)
    diff = left - prod
    self.cov = dot(diff, self.cov_est)

if __name__ == "__main__":

    # camera matrix
    K = array([[653.52398682, 0., 326.47888184],
               [0., 653.76440430, 259.63595581],
               [0., 0., 1.]])

    kalman = Kalman(K, mu_init=array([1., 1., 165., 1]))
    kalman.update(array([100.0, 100.0, 1.]))
    kalman.update(array([120.0, 120.0, 1.]))

import cv
import sys

```



```

from kalman_3d import *
from K import *

def proj_board(im, xl, yl, z):
    color = cv.CV_RGB(0, 255, 0)
    image_size = cv.GetSize(im)
    for x in arange(xl-9, xl+9, 0.5):
        for y in arange(yl-9, yl+9, 0.5):
            X = array([x, y, z])
            q = dot(K, X)
            q = [int(q[0]/q[2]), int(q[1]/q[2])]
            cv.Set2D(im, im.height-q[1], q[0], color)

def show_data(image, mu_x):
    line_type = cv.CV_AA
    pt1 = (30, 400)
    font = cv.InitFont (cv.CV_FONT_HERSHEY_SIMPLEX,
                        0.8, 0.1, 0, 1, cv.CV_AA)
    cv.PutText (image, "Kalman Filter " + str(mu_x),
                pt1, font, cv.CV_RGB(255,255,0))

def detect(image):
    image_size = cv.GetSize(image)

    # create grayscale version
    grayscale = cv.CreateImage(image_size, 8, 1)
    cv.CvtColor(image, grayscale, cv.CV_BGR2GRAY)
    storage = cv.CreateMemStorage(0)

    im = cv.CreateImage (image_size, 8, 3)

    status, corners = cv.FindChessboardCorners( grayscale, (dim,dim))
    if status:
        cv.DrawChessboardCorners( image, (dim,dim), corners, status)
        is_x = [p[0] for p in corners]
        is_y = [p[1] for p in corners]
        return is_x, is_y
    return [], []

if __name__ == "__main__":

    snap_no = 1
    frame_no = 0

    # create windows
    cv.NamedWindow('Camera', cv.CV_WINDOW_AUTOSIZE)

```

```

# create capture device
device = 0 # assume we want first device

capture = cv.CreateFileCapture (sys.argv[1])
#capture = cvCreateCameraCapture (0)

dim = 3

pts = dim * dim
mid = int(pts / 2)

cv.SetCaptureProperty(capture, cv.CV_CAP_PROP_FRAME_WIDTH, 640)
cv.SetCaptureProperty(capture, cv.CV_CAP_PROP_FRAME_HEIGHT, 480)

# check if capture device is OK
if not capture:
    print "Error opening capture device"
    sys.exit(1)

kalman = Kalman(K, mu_init=array([1., 1., 165., 2.]))

frame = cv.QueryFrame(capture)
proj_board(frame, 1, 1, 160)
cv.SaveImage('first-projection.jpg', frame)
cv.ShowImage('Camera', frame)

while True:
    frame_no += 1

    # capture the current frame
    frame = cv.QueryFrame(capture)
    image_size = cv.GetSize(frame)
    if frame is None:
        break

    is_x, is_y = detect(frame)

    if len(is_x) > 0 :
        kalman.update(array([is_x[5], frame.height-is_y[5], 1.]))
        proj_board(frame,
                    kalman.mu_hat[0],
                    kalman.mu_hat[1],
                    kalman.mu_hat[2])

    show_data(frame, kalman.mu_hat)

```

```

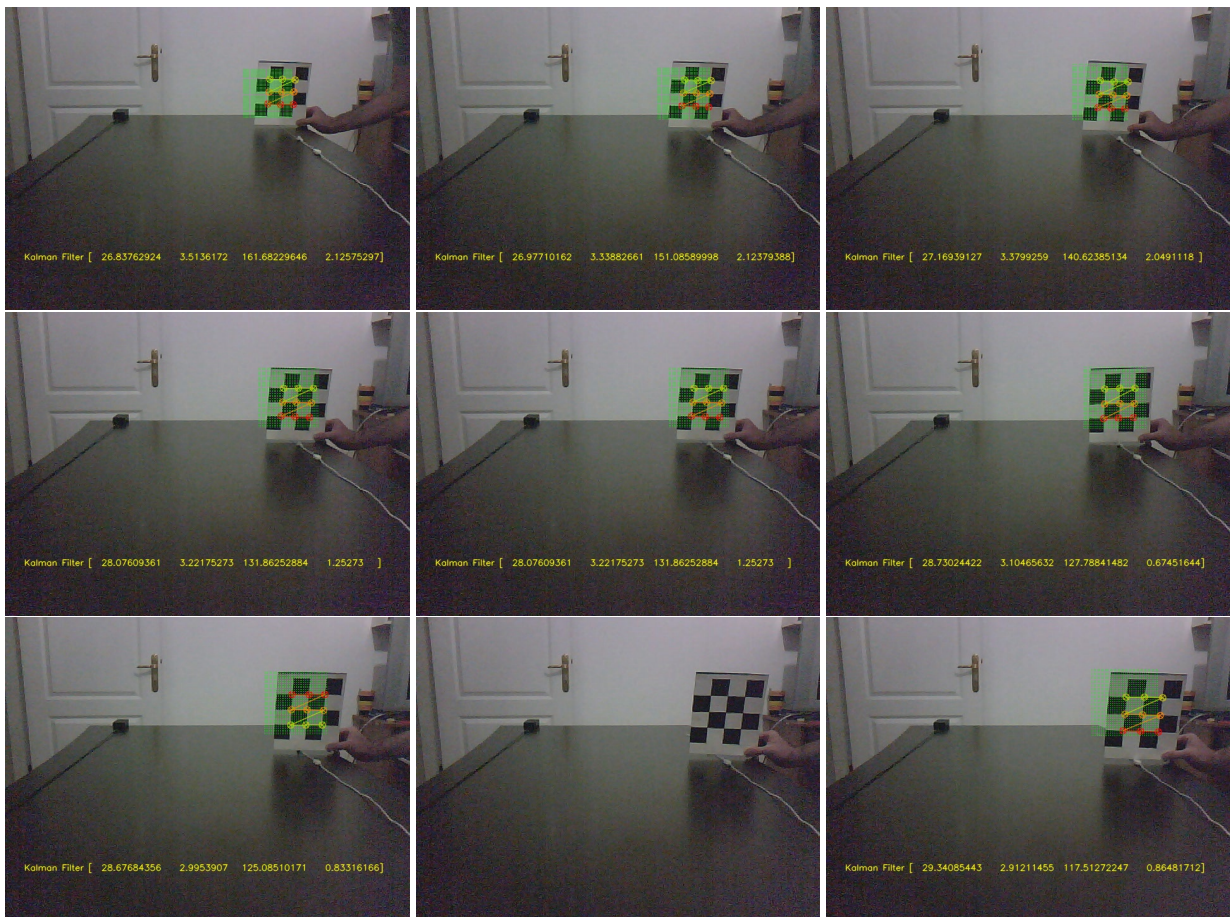
# display webcam image
cv.ShowImage('Camera', frame)

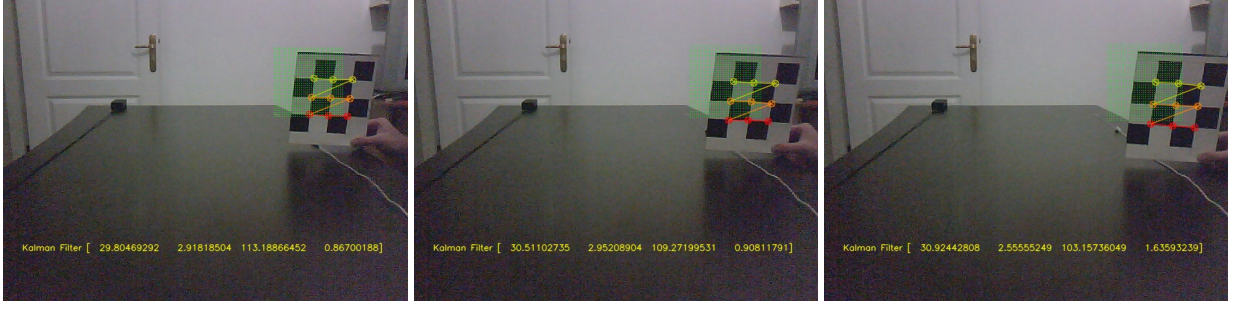
if snap_no == 12: break
if frame_no % 10 == 0:
    cv.SaveImage('cb-kf-' + str(snap_no) + '.jpg', frame)
    snap_no += 1

# handle events
k = cv.WaitKey(40)
if k == 27: # ESC
    print 'ESC pressed. Exiting ...'
    break

```

!python run\_filter.py kf





## Parcacik Filtreleri

Filtrelemede tek yontem Kalman filtreleri degil. KF kararsizlik Gaussian olarak gosterilebiliyorsa cok faydali, ve hizli bir yontem. Bir KF bellekte cok az yer tutar, 3 boyutlu bir Gaussian icin 3x1 boyutunda bir ortalama vektoru, ve 3x3 boyutunda bir kovaryans matrisi yeterlidir, yani  $3 + 9 = 12$  sayi.

Parcacik filtreleri (PF) bir dagilimi “ayriksal” olarak temsil ederler. Yani diyelim ki tek boyutlu bir dagilimi 100 eleman iceren bir dizin ile temsil edebiliriz, o zaman dagilimin degerlerini 100 tane noktada tasimamiz gerekir. Bunun faydolari her türlü dagilim seklini temsil edebilmemiz. Gaussian sadece belli bir sekilde olabilir, tek bir tepe noktasi olmalidir, vs. Ayriksal temsil ile 2, 3, istedigimiz kadar tepe noktasi olan (ya da hic olmayan) bir dagilim kullanabiliriz.

Bu neye yarar? Birden fazla hipotezi ayni anda isletebilmemize yarar. KF ile tepe noktasi en iyi tahminimizdir (mesela.. satranc kartonu masa ortasinda), PF ile birkac tahmini ayni anda hesaplatmak mumkun olabilir.

Daha detaylandirmak gerekirse, PF kodlamasi  $x_t$  icin iki tane veri yapisi gerektirir. Bir veri yapisi dagilimdaki degerleri temsil eden parcaciklardir, digeri ise bu parcaciklari dagilimdaki onemini temsil eden agirliklardir. Filtreleme sistemi KF’e benzer, once bir gecis uygulanir, ki bu gecis kararsizligi arttiracaktir, fakat ardindan gozlem verisi bir hata fonksiyonu uzerinden dagilim guncellenir. Bu islem sirasinda hatasi yuksek olan parcaciklar cezalandirilir, onlari agirliagi azalir, otekilerinki yukselir. Her parcacik icin hata fonksiyonu sudur:

$$w^{[i]} = \frac{1}{1 + (y^{[i]} - p^{[i]})^2)}$$

$y^{[i]}$  gozlem degeri,  $p^{[i]}$  gecis uygulandiktan sonra elimizdeki tahminimizdir, ki bu KF dunyasindaki  $Ax_t + Q$ ’nun karsiligidir. PF icin hareket gecisi soyle hesaplanir: Bir uniform dagilimdan ornekleme yapilir, ve bu orneklenen degerler  $x$ ’e eklenir. Ornekleme icin z-kordinati icin  $Unif(-0.1, -1)$ ’i, x kordinati icin  $Unif(-40, 40)$ ’i kullandik. Yani ileri dogru 0.1 ve 1 santimetre arasinda bir hareket ekliyoruz, ve saga ve sola donuk olarak 80 santimetrelilik bir kararsizligi hesaplara ekliyoruz.

Ustteki formulde  $(y^{[i]} - p^{[i]})^2$  e niye 1 degeri ekledigimiz aciktir herhalde, bu sayede hata fonksiyonunun olasilik degerlerini andiran bir sonuc don- durmesini istiyoruz. Cok ufak hatalar icin  $1 + hata$  bolunendeki 1’i bolecek, ve 1’e yakin bir deger geri getirecek. Istedigimiz de bu zaten, kucuk hatalarin daha buyuk agirliga sebebiyet

vermeleri, büyük hataların ise tam tersi sonuca sebep olmaları.

Tekrar örnekleme (resampling) sürecinde parçacıklar tekrar düzenlenerek ağırlığı çok olan parçacıkların ağırlığı az olanlara göre daha fazla tekrarlanması istiyoruz. Dikkat: tekrar örnekleme süreci yeni parçacık değerleri yaratmıyor, sadece mevcut olanları tekrarlıyor ya da onları atlıyor.

```
from numpy import *
from numpy.random import *

class PF:

    def __init__(self, K, n):
        self.H = append(K, [[0], [0], [0]], axis=1)
        self.n = n
        self.x = zeros((self.n, 4))
        self.x[:, :] = array([1., 1., 165., -1])

    def normalize_2d(self, x):
        return array([x[0]/x[2], x[1]/x[2], 1.0])

    def resample(self, weights):
        n = len(weights)
        indices = []
        C = [0.] + [sum(weights[:i+1]) for i in range(n)]
        u0, j = random(), 0
        for u in [(u0+i)/n for i in range(n)]:
            while u > C[j]:
                j+=1
            indices.append(j-1)
        return indices

    def update(self, y):
        u = uniform(-0.1, -1, self.n) # forward with uncertainty
        self.x[:, 2] += u
        u = uniform(-40, 40, self.n) # left right uncertainty
        self.x[:, 0] += u
        p = dot(self.x, self.H.T)
        for i, item in enumerate(p): # modify in place
            p[i, :] = self.normalize_2d(item)
        self.w = 1./(1. + (y-p)**2)
        self.w = self.w[:, 0] + self.w[:, 1]
        #self.w = self.w[:, 0]
        self.w /= sum(self.w)
        self.x = self.x[self.resample(self.w), :]
```

```

def average(self):
    return sum(self.x.T*self.w, axis=1)

if __name__ == "__main__":

    K = array([[700., 0., 300.],[0., 700., 330.],[0., 0., 1.]])
    p = PF(K, 100)
    p.update(array([100.,100.,1.]))
    print p.average()

import sys
import cv
from numpy import *
from K import *
from PF import *

def proj_board(im, xl, yl, z):
    color = cv.CV_RGB(0, 255, 0)
    image_size = (im.width, im.height)
    for x in arange(xl-9, xl+9, 0.5):
        for y in arange(yl-9, yl+9, 0.5):
            X = array([x, y, z])
            q = dot(K, X)
            q = [int(q[0]/q[2]), int(q[1]/q[2])]
            cv.Set2D(im, im.height-q[1], q[0], color)

def detect(image):
    image_size = cv.GetSize(image)

    # create grayscale version
    grayscale = cv.CreateImage(image_size, 8, 1)
    cv.CvtColor(image, grayscale, cv.CV_BGR2GRAY)
    storage = cv.CreateMemStorage(0)

    im = cv.CreateImage (image_size, 8, 3)

    status, corners = cv.FindChessboardCorners( grayscale, (dim,dim))
    if status:
        cv.DrawChessboardCorners( image, (dim,dim), corners, status)
        is_x = [p[0] for p in corners]
        is_y = [p[1] for p in corners]
        return is_x, is_y
    return [], []

def show_data(image, mu_x):
    line_type = cv.CV_AA

```



```

pt1 = (30, 400)
font = cv.InitFont (cv.CV_FONT_HERSHEY_SIMPLEX,
                    0.8, 0.1, 0, 1, cv.CV_AA)
cv.PutText (image, "Particle Filter " + str(mu_x), pt1
            , font, cv.CV_RGB(255,255,0))

if __name__ == "__main__":

    snap_no = 0
    frame_no = 0

    # create windows
    cv.NamedWindow('Camera')

    # create capture device
    device = 0 # assume we want first device

    capture = cv.CreateFileCapture (sys.argv[1])
    dim = 3
    forward_step = -2.

    pts = dim * dim
    mid = int(pts / 2)

    cv.SetCaptureProperty(capture, cv.CV_CAP_PROP_FRAME_WIDTH, 640)
    cv.SetCaptureProperty(capture, cv.CV_CAP_PROP_FRAME_HEIGHT, 480)

    # check if capture device is OK
    if not capture:
        print "Error opening capture device"
        sys.exit(1)

    pf = PF(K, 200)

    frame = cv.QueryFrame(capture)
    proj_board(frame, 1, 1, 160)
    cv.ShowImage('Camera', frame)

    while 1:
        frame_no += 1
        frame = cv.QueryFrame(capture)

        image_size = cv.GetSize(frame)
        if frame is None:
            break

```

```

is_x, is_y = detect(frame)

if len(is_x) > 0:
    pf.update(array([is_x[5], frame.height-is_y[5], 1.]))
    mu_x = pf.average()
    proj_board(frame, mu_x[0], mu_x[1], mu_x[2])
    show_data(frame, mu_x)

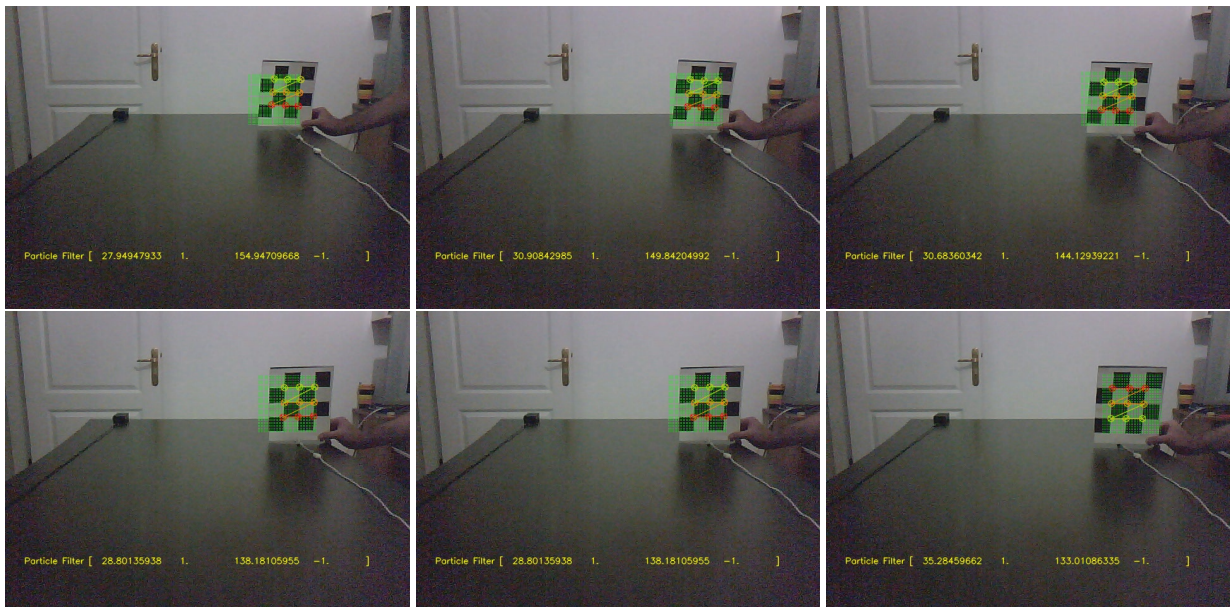
# display webcam image
cv.ShowImage('Camera', frame)

if snap_no == 12: break
if frame_no % 10 == 0:
    cv.SaveImage('cb-pf-' + str(snap_no) + '.jpg', frame)
    snap_no += 1

# handle events
k = cv.WaitKey(40)
if k == 27: # ESC
    print 'ESC pressed. Exiting ...'
    break

```

`!python run_filter.py pf`







## Kaynaklar

<http://dl.dropbox.com/u/1570604/skfiles/campy/chessb-left.avi>

<http://dl.dropbox.com/u/1570604/skfiles/campy/chessb-right.avi>

S. Marsland, Machine Learning: An Algorithmic Perspective, CRC Press, 2009.

S. Thrun, W. Burgard, and D. Fox, Probabilistic Robotics, MIT Press, Cambridge, MA, 2005

C. Bishop Pattern Recognition and Machine Learning , 2006.

Rabiner L. R. , A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition, Proceedings of IEEE vol. 77, no. 2, pp. 257-286, 1989.

Roweis S. and Z. Ghahramani, A Unifying Review of Linear Gaussian Models, Neural Computation 11(2):305-345, 1999.

Ghahramani Z., H. E. Hinton, Parameter Estimation for Linear Dynamical Systems, Technical Report CRG-TR-96-2

<ftp://ftp.cs.toronto.edu/pub/zoubin/tr96-2.ps.gz>, Department of Computer Science, University of Toronto, 1996.

Ghahramani Z., H. E. Hinton, Switching State Space Models, Technical Report CRG-TR-96-3, Dept. Comp. Sci., Univ. Toronto, 1996.

Shumway R., H. S. Stoffer Time series analysis and its applications 2nd Edition, New York, Springer, (Springer texts in statistics), 2000.

Jordan M. I. , C. Bishop An Introduction to Graphical Models, Not yet published, 2000.

Kalman R. E., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Trans-

actions of the ASME-Journal of Basic Engineering, 82 (Series D): 35-45, 1960.

Kalman, R.E. and R.S. Bucy, New results in filtering and prediction theory, Trans. ASME J. Basic Eng., 83, 95-108, 1961.

Welling, M., The Kalman Filter - Lecture Tutorial, California Institute of Technology, 2008.

Lall, S., Modern Control 2 Lecture Notes, Stanford University, 2006.

Quantitative Economics Lecture Notebooks - <http://quant-econ.net/kalman.html>