Rasgele İzdüşümü (Random Projection) ile SVD

Eger ana matrisimiz A'nin cok fazla kolonu var ise bunu bir sekilde azaltmanin yollarini arayabiliriz. [1]'e gore bunu yapmanin yollarindan biri rasgele izdusum hesabidir. Ilk once $n \times k$ boyutunda bir Gaussian rasgele matris Ω uretiriz. Ardindan

$$Y = A\Omega$$

hesaplanir. Bu Y uzerinde QR ayristirmasi yapariz, ve elde edilen Q ile

$$B = Q^T A$$

hesabini yapariz. Ardindan bu matris uzerinde SVD ayristirmasi yapariz,

$$B = \hat{U}\Sigma V^T$$

ve

$$U = Q\hat{U}$$

matrisini hesaplariz. Ana fikir suradan geliyor,

$$A = QQ^T A$$

ki bu standart bir cebir numarasi olurdu, Q yerine rasgele izdusumdan gelen yaklasiksal Q'yu kullanabiliriz, o zaman

$$A \approx \tilde{Q}\tilde{Q}^T A$$

olacaktir. Yani izdusumden gelen Q, R gercek versiyona yakin. Ustteki carpimda R yerine B harfi kullaniyoruz, ki $B = \tilde{Q}^T A$ oluyor, yani

$$A \approx \tilde{Q}B$$

ya da

$$B \approx \tilde{Q}^T A$$

.

O zaman Istatistik notlarimiz altindaki *Paralel Matris Carpımı, Ax, QR ve SVD* yazisinda oldugu gibi B'nin SVD'sini alarak yaklasiksal bir U elde etmek mumkun olacaktir.

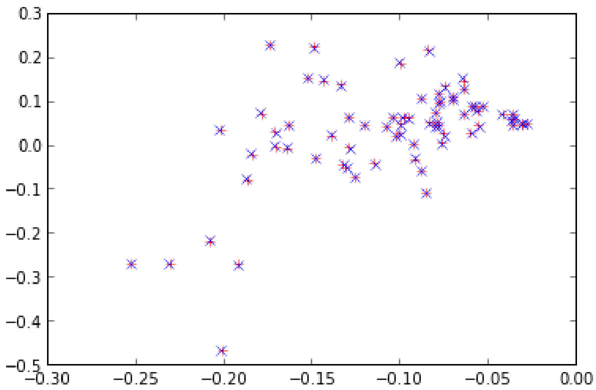
Bu yaklasiksal metot isler cunku noktalari yaklasiksal bir altuzaya yansittiktan sonra elde edilen yeni noktalarin arasindaki mesafelerin fazla bozulmadan muhafaza edildigi soylenir, daha detayli soylemek gerekirse, n-boyutlu verileri $O(\log n/\epsilon^2)$ boyutundaki bir rasgele altuzaya yansitmak, pozitif olasilikla, yeni noktalarin arasindaki mesafeleri sadece $1 \pm \epsilon$ olcusunde degistirir [2]. Y'nin, A'nin "menzilini" iyi temsil ettigi de soylenir.

Test olarak suradaki [3] veri seti uzerinde gorelim:

```
import numpy.random as rand
import numpy.linalg as lin
import pandas as pd

k = 7 # izdusum uzayinin boyutlari
df = pd.read_csv("w1.dat",sep=';',header=None)
A = np.array(df)[:,1:]

print "A",A.shape

rand.seed(1000)

Omega = rand.randn(A.shape[1],k)

Y = np.dot(A, Omega)

print "Y", Y.shape

Q, R = lin.qr(Y)

# niye devrigi ile is yaptigimizi altta anlatiyoruz
BT = np.dot(A.T, Q)

print "Q", Q.shape
print "BT", BT.shape

x, x, V = lin.svd(BT)

print 'V', V.shape

Uhat = V.T # cunku B=USV', B'=VSU' U of B icin V' lazim

print "Uhat", Uhat.shape

U = np.dot(Q, Uhat)

print "U", U.shape

plt.plot(U[:,0],U[:,1],'r+')

plt.hold(True)

# gercek SVD ile karsilastir

U, Sigma, V = lin.svd(A);
```

```
plt.plot(U[:,0],-U[:,1],'bx')
plt.savefig('rnd_1.png')
```

```
A (71, 30)
Y (71, 7)
Q (71, 7)
BT (30, 7)
V (7, 7)
Uhat (7, 7)
U (71, 7)
```



Mavi noktalar A uzerinde "gercek" SVD sonucu, kirmizilar yansitma sonrasi elde edilen U. Sonuclar cok iyi.

B yerine B^T

Kodlama acisindan, ya da buyuk veri baglaminda baska amaclar [4] icin $B = Q^T A$ yerine $B^T = A^T Q$ hesabi yapmak istenilebilir. Niye? Cunku cikti olarak $n \times k$ matrisi istiyor olabiliriz, $k \times n$ matrisi istemiyoruz, yani cok olanin satirlar olmasini istiyoruz, kolonlar olmasini istemiyoruz.

O zaman, elde edilen B^T ise, B uzerinde degil B^T uzerinde SVD alacagiz demektir, bu da sonuclari birazcik degistirir, yani

$$B = U \Sigma V^T$$

$$B^T = V \Sigma U^T$$

haline gelir. Yani B'nin U'sunu elde etmek icin B^T'nin SVD'si sonrasinda ele gecen sonucta $(U^T_{B^T})^T$ yapmak gerekir. Her seyin hafizada yapildigi durumda bu fark yaratmaz, fakat "ilerisi icin", yani esle / indirge ortamlari icin akilda tutmak faydali olur.

Kaynaklar

[1] Halko, N., Randomized methods for computing low-rank approximations of matrices

[2] Gupta, A., Dasgupta, S., An Elementary Proof of a Theorem of Johnson and Lindenstrauss

[3] `archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Breast+Cancer`

[4] `arxiv.org/abs/1310.4664`