

### MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 3

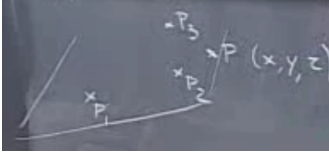
Capraz carpimlar hakkında bilinmesi gereken bazi sasirtici gelebilecek kurallar var. Bunlardan bir tanesi  $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$ . Niye boyle? Bunu gormenin yollarından bir tanesi geometrik olarak dusunmek. Sag el kuralini dusunursek, yonun niye farkli olabilecegini anlariz. Isaretler tam terstir, yani  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

Determinant acilimini da dusunursek, ikinci terim eksi isareti tasir, ama carpim sirasi degisince eksi isaretinin yeri degisir.

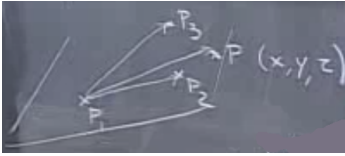
Peki  $\vec{A} \times \vec{A}$  nedir? Capraz carpim alan hesabinda onemli olduguna gore ve  $\vec{A} \times \vec{A}$ 'in bir parallelogram yaratmayacagina gore (ya da sifir alanli bir parallelogram yaratacagina gore) cevap sifir, daha dogrusu sifir “vektoru” (o vektorun buyuklugu de tabii ki sifir).

#### Uygulamalar

Diyelim ki bize uzayda 3 nokta verildi, ve bu noktaları iceren bir duzlemin formülünü bulmamiz gerekiyor. 3 nokta 3 boyutlu uzayda bir duzlem yaratmak icin yeterli, bunu biliyoruz. Bunun icin bir dorduncu nokta  $P$  hayal edelim ki bu noktanin ogeler  $x, y, z$  olsun.



Simdi duzlemi tanimlayalim. Su sekilde 3 tane vektor yaratalim



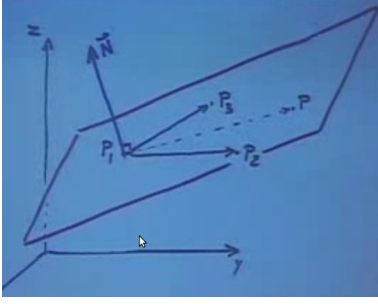
Bu vektorlerin ayni duzlem uzerinde olmasi, ayni zamanda bu vektorlerin tanimladigi paralelpipe'nin hacimsiz olmasi demektir. Yani birisi uzerinden bastirip onu dumduz etmistir sanki, sadecealani kalmistir.

Bunu formüsel olarak soylemenin yolu sudur:

$$\det(\vec{P_1P}, \vec{P_2P}, \vec{P_3P}) = 0$$

Gerçek uygulama bağlamında problem bize  $P_1, P_2, P_3$  sayılarını vermiş olacaktı bu sayıları üstteki formüle yerleştirdik, tanımsız olan sadece  $x, y, z$  kalırdı, ve bu  $x, y, z$ 'ler ile beraber elde edilecek formül bu noktaların tanımladığı alan olurdu.

Bu hesabi daha da hızlı yapmanın bir yolu var. Alttaki resmi düşünelim.



Resme bakalım. Düzlem üzerindeki iki vektöre dik bir  $\vec{N}$ 'i nasıl hesaplayacağımızı biliyoruz (çarpaz çarpım ile). Devam edelim,  $x, y, z$  değişkenlerini içeren üçüncü bir vektör  $\vec{P_1P}$ 'in aynı düzlemde olması demek, bu  $\vec{N}$  vektörüne dik olması demektir ( $\vec{N}$  “normal vektör” olarak isimlendirilir). Bunu matematiksel olarak nasıl ifade ederiz? Dikliğin formülse karşılığını biliyoruz, noktasal çarpım sıfır olmalı.

$$\vec{P_1P} \cdot \vec{N} = 0$$

$\vec{N}$  hesabi için

$$\vec{N} = \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3}$$

Bu kadar.

Ek not, eğer çarpaz çarpımın sırasını değiştirmiş olsaydım, o zaman üstteki hesabın ters yönünde bir başka dik vektör elde ederdim, düzlem yine aynı olurdu, sadece başka bir normal vektör olurdu. Bu problem değil, herhangi bir düzlemin sonsuz sayıda normal vektörü olabilir. Elde ettiğimiz bir normal vektörü herhangi bir sabit ile çarpınca yeni bir normal vektör elde etmiş olurum çünkü.

$$\vec{P_1P} \cdot \vec{N} = \vec{P_1P} \cdot (\vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3})$$

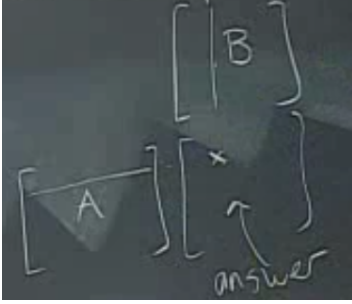
Esitliğin sağındaki çarpıma uclu çarpım (triple product) deniyor.

Son formülü takip edersek determinant sıfırlığı üzerinden tanımlanan diğer

formul ile ayni sonucu getirdigini gorurduk.

### Matrisler

$A$   $B$  seklindeki bir matris carpiminda hangi hucrenin hangi kolon, hangi satirin noktasal carpim sonucu (answer) oldugunu hayal edebilmek icin alttaki sekil faydali olabilir.  $B$ , sonuc matrisinin (altta bos) ustunde hayal edilir, ve carpi isaretindeki sonuc icin onun heme ustundeki kolona, ve hemen yanindaki satira gidilir.



Sezgisel (intuitive) olarak  $AB$  carpimi neyi temsil eder? Bu carpimi soyle dusunebiliriz, once  $B$  transformu yap, sonra  $A$  transformu yap. Bu biraz acaip gelebilir, cunku normalde islemleri soldan saga yapmaya alisigizdir. Fakat  $AB$ 'yi belki de sirali fonksiyon islemleri olarak gormek daha dogru olur, mesela  $f(g(x))$  gibi. Burada once  $g$  uygulanir, sonra  $f$  uygulanir.

$$(AB)X = A(BX)$$

Ustteki aktarim kanunudur (associativity) ve “iyi davranan” carpimlarin bir ozelligidir. Bu arada ustteki carpimin noktasal degil, matris carpimi olduguna dikkat edelim.

Not:  $AB \neq BA$ . En azindan sagdaki carpimin olabilecegini beklemememiz gerekir.  $AB$  carpimi boyutlar uydugu icin mumkun olmustur, fakat bu uyumlu boyutlar yerler degisince belki mumkun olmaz. Boyutlar olsa bile sonuc farkli cikabilir, o sebeble esitlik farz edilemez. Ufak bir Python kodu ile test edelim:

```
import numpy as np
```

```
a = [[2, 3, 4], [4, 4, 5], [9, 3, 2]]  
b = [[2, 3, 9], [4, 2, 5], [9, 3, 2]]
```

```
print np.dot(a,b)
```

```
print np.dot(b,a)
```

Sonuclar farkli cikacak.