

Dalga Denklemini Turetmek

PDE'lerin ortaya cikabilecegi durumlardan biri, ayriksal parcaciklardan olusan bir sistemin limite gittigi andir. Bu tur sartlarda ODE'lerden olusan bir sistem limite giderken bir PDE ortaya cikartabiliyor. Sureklilik Mekaniginden (Continuum Mechanics) bir ornek verecegiz yani.

Sistem ayriksal baslayacak, sureklilik limitine gidecek. Mesela sivilar mekaniginde (fluid mechanics) Euler denklemi, Navier-Stokes denklemleri sivi sisteminin (su gibi mesela) sureklilik limitidirler. Bu denklemler sivi icindeki ufak parcaciklari tarif etmezler, sistemin butunune bakarlar.

Hepimiz Newton Kanunu biliyoruz (ki bu kanun bu derste ihtiyacimiz olan yegane fizik bilgisi)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

Formul ne diyor? Kutle carpi ivme esittir kuvvet. Gayet basit.

Diyelim ki elimizde N tane tane parcacik var, $i = 1, \dots, N$, ve bu parcaciklar birbirleriyle etkilesim halindeler, aralarinda bir tur cekim var belki, ya da baska bir kuvvet. O zaman her parcacik icin ayri ayri hareket kanunu isleyecek. Ve i 'inci parcacik üzerinde bir kuvvet var, ve bu kuvvet sistemdeki tum diger degiskenlerle bir sekilde bagimli. x tabii ki pozisyon degiskeni. O zaman

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = F_i(\vec{x})$$

Dikkat edersek, F fonksiyonuna giren parametre tum parcaciklar, yani o parcacigin hissettigi kuvvet bir sekilde tum diger parcaciklarla alakali.

Baslangic Sarti

i 'inci parcacigin baslangic konumu

$$x_i(0) = \hat{x}_i$$

Tipik olarak baslangic hizi da verilir

$$\frac{dx_i}{dt}(0) = \hat{v}_i$$

Ustteki bir baslangic deger problemi (initial value problem). Biz bu derste PDE bazinda sinir degerli problemlerle ugrasacagiz.

Bu tur baslangic deger problemleri iyi huyludur, cunku, mesela bu ornekte 2. derece bir diferansiyel denklem var elimizde, ve bagimli degisken x var, ve bize verilen kosulu anlamak icin alttaki resme bakalim



Bize verilenler, $t = 0$ anında x_i noktasının olduğu yere ek olarak (soldaki nokta), bir de o noktadaki eğim bilgisi. Bu tür bilgi verilince, parçacığın hangi yöne gitmeye meyilli olacağını da görmüş oluyoruz. Sanki bir top ateslenmiş, ve topun ates ettiği anda nerede olduğuna ek olarak topun namlusunun gösterdiği yer de bize söyleniyor.

Bu iyi huylu bir problem. Sınır değerli denklemler çok daha karmaşık olabiliyor. Bu arada “sınır koşullu” kelimesindeki “sınır” cogunlukla bir fiziksel şeye tekabül eder, mesela bir ip vardır, ve ipin “sonunda” yani sınırlarında değerin ne olması gerektiği sabitlenir.

Devam edelim. Kurmak istediğimiz model bir tür “gitar teli” modeli.

$y_i = i$ 'inci parçacığın yüksekliği olsun.



Tel üzerinde bir sürü parçacık var, tel iki ucundan sabitlenmiş durumda. Bu problemde yatay hareketle ilgilenmiyoruz, sadece yukarı / aşağı hareketle ilgileniyoruz. Bir tanım daha:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

Basitleştirme amacıyla bu tanımi yaptık. Tüm parçacıkların arasındaki mesafeyi sabit, ve aynı olarak aldık. Benzer şekilde

$$m_i \equiv m$$

Yani tüm parçacıklar aynı kütleye sahip.

Şimdi Newton Kanununu parçacıklara uygulayalım [1].

$$m \frac{d^2 Y_i}{dt^2} = \tau \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \right) - \tau \left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta x} \right)$$

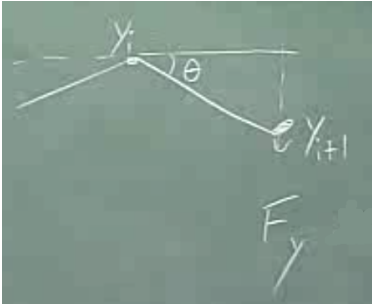
Bununla ne demis olduk? i 'inci parçacığın hissettiği çekimin, o parçacığın sağında ve solunda bağlı olduğu diğer parçacıkla baginin ipteki eğimi ile orantili olduğunu söylemiş olduk.

τ her tel için farklı olacak bir gerginlik sabiti, ama belli bir telde, her parçacık için aynı.



Üstteki formül aslında yerel türevin “ucuz” bir yaklaşıksallaması.

Gerginlikle kurulan alaka akla yatkın olmalı, düşünersek ipte parçacık ne kadar yuksekte olursa üzerinde o kadar güç hissedirdi, yanındaki parçacıklar(lar) tarafından aşağı çekilirdi, ne kadar altta ise o kadar az güç hissedirdi. Tabii “diğer parçacıklara göre” yukarıda ya da aşağıda olmanın ölçüsü de iki parçacık arasındaki ipin eğimi.



Diğer bir açıdan yaklaşırsak

$$F_y \equiv \tau \sin \theta$$

da diyebilirdik. Sadece \sin kullandık çünkü daha önce belirttiğimiz gibi, sadece dikey hareketlere bakıyoruz, yatay hareketlerle ilgilenmiyoruz (o yüzden \cos yok).

Bir yaklaşıksallama yapabiliriz şimdi, eğer $\theta \ll 1$ ise, yani açı 1 sayısından çok küçük ise, $\sin \theta \approx \tan \theta$ sayılabilir, bu sonuç Taylor Serileri ile alakalı ve \tan fonksiyonu, \sin/\cos olduğu için ve sifra yakın değerlerde bölün θ 'nin sifra yakınlığından \cos üzerinden hep 1'e yakın olacağı için, \tan bir nevi \sin sayılabilir. Peki bu problemde $\tan \theta$ nasıl hesaplanır?

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \end{aligned}$$

Yani yine aynı yere gelmiş olduk.

Bu model bir “en yakın komşu” modelidir, her parçacık yakınındaki parçacıktan etkileniyor.

Ana formulu su sekilde tekrar organize ederek yazalim

$$\frac{d^2 Y_i}{dt^2} = \tau \frac{\Delta x}{m} \left[\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{\Delta x^2} \right]$$

Koseli parantez icindeki ifade Calculus'ta 2. turevin ayriksal formdaki yaklasiksal-lamasi degil mi?

Ayriksal modelimiz boyle. Simdi sureklilik limitine gecmek istiyorsak, mesela sonsuz sayida parcacik oldugu bir duruma gecmek isteyebiliriz, $\lim_{N \rightarrow \infty}$, elimizde sonlu / belli miktarda bir tel var, bu durumda sonsuz sayida parcacik demek bu parcaciklari arasindaki mesafenin sifira gitmesi demektir, o zaman $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$.

Formul icin bunun anlami nedir? Δx ve m arasindaki oran sonlu (finite) bir sayiya yaklasacak demektir, ki bu sayiya yogunluk diyebiliriz. Oran niye sifira gitmiyor? Sureklilik sistemlerin kullanimi bir numara bu,

$$\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m}{\Delta x}$$

Δx 'in asagi indigini dusunuyoruz, ama olabilecek cok ufak bir hacim hayal ederek mesela molekul boyutundan daha fazla asagi inmeyecegini soyluyoruz, m ayni sekilde kuculuyor, ve oran bize bir yogunluk hesabi veriyor.

Taylor Serileri hakkında hizli bir ders

$$Y_{i+1} = Y(x_i + \Delta x)$$

Eger Δx cok kucuk ise

$$= \underbrace{Y(x_i)}_{Y_i} + \Delta x \frac{dY}{dx} \Big|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2 Y}{dx^2} \Big|_{x_i} + O(\Delta x^3)$$

Daha kisa bir sekilde yazalim

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta x Y'_i + \frac{\Delta x^2}{2} Y''_i + \dots$$

Ayni seyi Y_{i-1} icin yapabiliriz

$$Y_{i-1} = Y_i - \Delta x Y'_i + \frac{\Delta x^2}{2} Y''_i + \dots$$

Not: Esitligin sagindaki eksi, arti isaretlerinin nereden geldigini merak ediyorsak, Hesapsal Bilim 1 Ders 2 notlarinda $u(x-h)$ acilimina bakabiliriz.

Son iki formulu toplarsak

$$Y_{i+1} + Y_{i-1} = 2Y_i + \Delta x^2 Y''_i + O(\Delta x^4)$$

O zaman 2. turevin x_i 'daki yaklasiksallamasi

$$Y''_i = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

O zaman ana formülde

$$\frac{d^2 Y_i}{dt^2} = \tau \frac{\Delta x}{m} \left[\underbrace{\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{\Delta x^2}}_{\rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \right]$$

Yani $\Delta x \rightarrow 0$ iken koseli parantez içi $\partial^2 y / \partial x^2$ 'e gider. Niye kısmi türeve gider? Çünkü ayrışal değişimi sadece x üzerinde yaptık, fakat Y içinde aynı zamanda t de var. Notasyon olarak ODE dili kullanmamız kafa karıştırmaz, görüntü basit olsun diye bunu yaptık. Ama değişimin x te olması sebebiyle türev kısmi türev oldu.

O zaman bu sistemin süreklilik limiti, $\Delta x \rightarrow 0$ iken

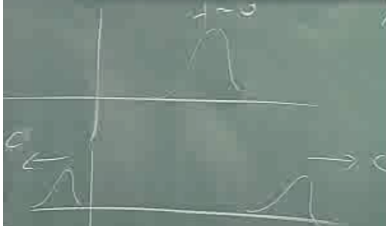
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

olacaktır. Bu denklem fizikte iyi bilinen dalga denklemdir. İnsanlar yoğunlukla

$$c^2 = \frac{\tau}{\rho}$$

şeklinde yazarlar ve c böylece “dalga hızı” olarak kullanılabilir.

Eğer teli bir noktada titrettiğimiz düşünürsek, ve telin sonlu değil sonsuz olduğunu düşünelim, o zaman “hareket eden dalgalar (traveling waves)” fenomenini görürüz. Altındaki resimde $t = 0$ anında bir tepe noktası var (tele vurduk), ve ikinci resimde iki tane tepe noktası sağa ve sola esit şekilde hareket ediyorlar.



PDE’ler ayrışal sistemlerin, ODE’lerin, süreklilik limitinde doğal olarak ortaya çıkarlar. Bu tür yaklaşımları ben araştırmalarımda sürekli kullanıyorum [hoca uygulamalı matematikçi], akışkanlık mekanizmasında mesela, bir sıvının, molekülün kısımlarını alıyoruz, ve kısımlar birbirleri ile etkileşimde oluyorlar. Ya da mesela yoğunluk değişkenini, kütleyi bir sürekli fonksiyon haline getiririz, ve parçacık hızı yerine sıvının tamamının hızına bakarız. Yani bu çok kullanılan bir teknik. Yoğunlukla ayrışal bir ağ yapısı için analitik bir denklem bulmak çok zordur, o sebeple süreklilik yaklaşımı kullanılır zaten. Belki üstteki problem için alternatif çok kötü olmayabilirdi, mesela burada ODE’leri matris formunda yazarak da çözüme gidebilirdik, bu çok zor olmazdı, fakat çoğu zaman bunu yapmak gerçekten zor olabiliyor.

Niye sistemi analitik olarak görmek istiyoruz? Çünkü o zaman formülasyonu istediğimiz gibi manipüle ederek, analitik şekilde istediğimiz yoldan ilerleyebiliyoruz.

* * *

Bir PDE kategorisinden bahsedelim, bu tur PDE'ler en cok kullandigim PDE'lerden, lineer 1. derece denklemler. Ve bu arada “karakteristikler” kavramindan bahsedecemiz.

1. Derece, Lineer PDE, 2 Bagimsiz Degisken

$$u = u(x, y)$$

PDE

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y)$$

Operator olarak

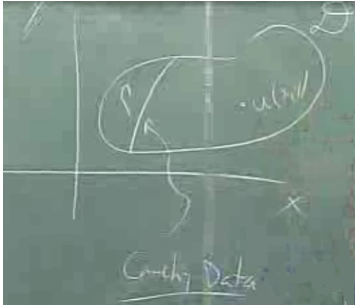
$$\mathcal{L}u = f$$

$$\mathcal{L} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}$$

Karakteristik kavramindan birazdan istifade edecegiz, ama simdi bu tur denklemleri kaba kuvvet kullanarak, “degisken degistirme (change of variables)” yontemi ile nasil cozulebilecegini gosterelim.

Tanim

Cauchy Problemi: $u(\vec{x})$ tanimi gerektirir. Bu tur problemler 1. derece, 2 degisken, vs. gibi tanimlarla sinirli degil aslinda, cok daha genel bir tanim onlar, bu tur problemlerde bir “Cauchy Verisi (Cauchy Data)”nden bahsedilir.



Ustteki resimde bu veri D alani (domain) icindeki Γ ile isaretli cizgidir, ki u 'nun bu cizgi uzerindeki degeri diyelim ki

$$u|_{\Gamma} = \alpha(x, y)$$

ki $\alpha(x, y)$ herhangi bir sonuc.

Mesela Γ cizgisi $x = \sin(y)$ ile tanimli egri, ve u onun uzerinde $u = y^2$ olmalı.

Bu tur bir kosula Cauchy Verisi ismi veriliyor, bizim ornegimizde bu bir tur sinir kosulunu andiriyor.

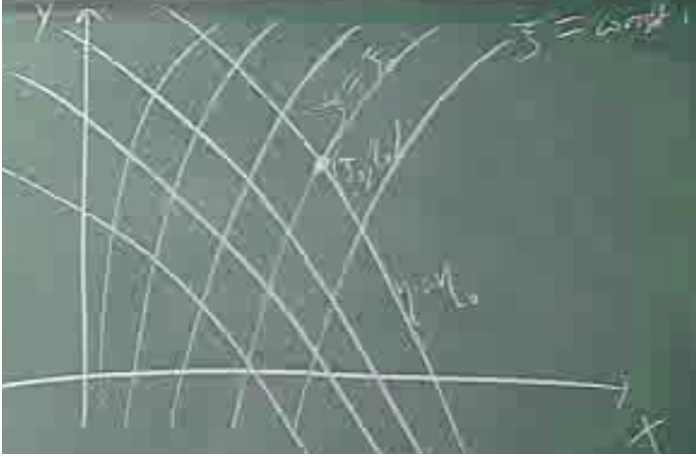
Bir kordinat sistemi nedir?



Diyelim ki öyle bir fonksiyon kümesi var ki, onlar üzerinden PDE'lerimizi değişik bir koordinat sisteminde temsil etmemiz mümkün olacak.

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y)\end{aligned}$$

ξ ve η 'yi kesit eğrileri (level curves) üzerinden incelemek mümkündür. Bu fonksiyonları belli sabitlere eşitleyip, durumlarına bakabiliriz, sonra sabitleri değiştiririz, bir daha bakarız, vs.



Üstteki resimde mesela, sağa yatık tüm eğriler, her biri değişik bir sabite (İngilizce const diye yazılmış) eşit olacak şekildeki ξ eğrileri olabilir. Sola yatık η çizgileri de olabilir. Ortadaki nokta iki önceki resimdeki bir noktanın bu yeni koordinata eşlenmiş bir nokta mesela.

Gerekliklerimiz

Eşleme, transformasyon bire bir (one-to-one) olmalı. İlk koordinat sistemindeki her nokta, diğer koordinat sistemindeki tek bir noktaya eşleniyor olmalı.

Jacobian'i yokolmayan (non-vanishing) olmalı.

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

Üstteki ifade Calculus'un Dolaylı Fonksiyon Teorisi (Implicit Function Theorem of

Calculus) ile alakali. Bu teorenin yerel baglamda niye birebir esleme yarattigini merak ediyorsaniz Calculus kaynaklarina danisabilirsiniz.

Amac: Sunu

$$au_x + bu_y + cu = f$$

transform et ve suna ceviri

$$W_\xi + h(\xi, \eta)W = R(\xi, \eta)$$

$$W(\xi, \eta) \equiv u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

Birebir transformasyon istemistik, o zaman esleme geriye cevirilebilir (invertible) de olmalı, yani istersek x, y degiskenlerini ξ, η cercevesinde temsil edebiliyor olmamız lazim.

Dikkat: W_η yoktur, bu sayede iki ustteki formül 1. derece ODE haline gelir, entegre edici faktor kullanip entegre edip Cauchy Verisini uygulayarak bu problemi cozebilirsiniz. Analitik olarak biraz karmasikliga sebep verebilir, ama bu en azindan mumkun bir stratejidir.

Simdi sira transformasyonu bulmaya geldi. x, y degiskenlerini ξ, η cercevesinde temsil edelim. Zincirleme Kanununu kullanalim.

$$\frac{\partial}{\partial x}u \equiv \frac{\partial}{\partial x}W(\xi(x, y), \eta(x, y)) = W_\xi \eta_x + W_\eta \eta_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u = W_\xi \eta_y + W_\eta \eta_y$$

Bunu orijinal denkleme sokalim

$$a(\xi, \eta) [W_\xi \eta_x + W_\eta \eta_x] + b(\xi, \eta) [W_\xi \eta_y + W_\eta \eta_y] + c(\xi, \eta)W = f(\xi, \eta)$$

Tekrar duzenleyelim

$$= [a\xi_x + b\xi_y]W_\xi + [a\eta_x + b\eta_y]W_\eta + cW = f$$

Soyle sec

1.

$$a\eta_x + b\eta_y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\eta_x}{\eta_y} = -\frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

2.

$$\xi = x$$

Boylece

$$h = \frac{c}{a}$$

$$R = \frac{f}{a}$$

elde edilir.

Unutmayalım Jacobian sartini tatmin etmemiz lazim.

Farz edelim

$$\eta_y \neq 0$$

Bu ise yarar

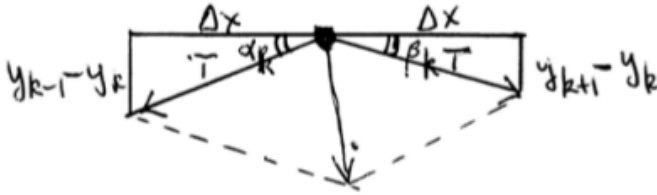
$$J = \xi_x \eta_y - \overset{0}{\cancel{\xi_y}} \eta_y$$

$$J = \eta_y \neq 0$$

Bir dahaki derste η' 'yi nasıl hesaplayacağımızı göreceğiz.

—

[1] Diğer bir açıdan bakarsak, mesela matematikçi David Mumford turetirken (i yerine k kullanmış)



$$\tau\left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x}\right) + \tau\left(\frac{Y_{i-1} - Y_i}{\Delta x}\right)$$

kullanmış. Yani bir parçacığın üzerindeki kuvvet sağındaki ve solundaki kuvvetlerin “toplamı” olarak görülüyor, bu formül de aynı kapağa çıkıyor.