Euler Esitligi

Bu yazımızda ilginç bir eşitlik olan Euler eşitliğini işleyeceğiz. Euler eşitliği şöyledir:

$e^{\theta} = cos\theta + isin\theta$

i sayısı irrasyonel bir sayıdır ve değeri -1'in kareköküdür.

Euler eşitliği önemli bir eşitliktir .

Tekrar Bulmak

Yazımızın geri kalan kısmında bu tekniği gösterirken, onu "pişmiş hâlde" koyup bırakmamaya özen göstereceğiz. Bu sonucun nasıl "pişirileceğini" göreceğiz. Bunu yapmamızın sebebi, Cahit Arf hocamızın şu sözleridir:

"Ben öğrenciliğimde kitaptaki teoremlerin ispatlarını hiç okumaz, teoremin ifadesini yazdıktan sonra kitabı kapatıp onu problem gibi çözmeye çalışırdım. Bir anlamda onu yeniden keşfetmeyi denerdim. Bunda başarılı olamasam bile daha bilinçli öğrenmiş olurdum [1]".

O zaman, tekrar keşfetmeye başlayalım:

Bir yontem, ustel (exponential) kanununu kullanmak. Bu kanun cok basit: $e^a e^b = e^{a+b}$. Yani bazi ayni olan ustel sayilarin carpiminda ustel bolumler toplanir. Simdi ispatin devaminda ustel kanununu kullanmadan, carpimi degisik bir yonden yapalim ve toplama esit cikip cikmayacagina bakalim:

$e^a e^b = (cos(a) + isin(a))(cos(b) + isin(b))$

$= cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b) + i[sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)]$

Bu formulde gercek deger olan birinci bolumun bir trigonometrik kisayol uzerinden cos(a+b) oldugunu biliyoruz. Hayali olan kismin da baska bir kisayol uzerinden isin(a+b) oldugunu biliyoruz. Ustel kanunu kullansaydik elimize $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$ sonucu gececekti ve bu sonucun acilimi ustteki formul ile ayni olacaktir. Demek ki Euler Esitligi dogru bir esitliktir.

Bir diger yontem e^{θ}, $cos(\theta)$ ve $sin(\theta)$ fonksiyonlarının Taylor açılımını yapmaktir:

Cos açılımı:

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$

$cos\ 0 = 1, sin\ 0 = 0$

$cos'(\theta) = -sin\ \theta$

$cos''(\theta) = -cos(\theta)$

$cos'''(\theta) = sin(\theta)$

$cos'''(\theta) = cos(\theta)$

$cos''''(\theta) = -sin(\theta)$

$$cos(\theta) = cos(a) + cos'(a)(x-a) + \frac{cos''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$a = 0$ icin McLaurin serisi olur

$$cos(\theta) \approx cos(0) + sin(0)(\theta - 0) + \frac{-cos(a)}{2!}(\theta - 0)^2 + ...$$

$$cos(\theta) = \frac{0 \cdot \theta}{1!} + \frac{-1 \cdot \theta^2}{2!} + \frac{-1 \cdot \theta^3}{3!} + ..$$

$$cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ..$$

Sin acilimi

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$$

$cos(0) = 1, \; sin(0) = 0$

$sin'(\theta) = cos(\theta), \; sin''(\theta) = -sin(\theta)$

$sin'''(\theta) = -cos(\theta), \; sin'''(\theta) = sin(\theta)$

$sin''''(\theta) = cos(\theta)$

$$sin(\theta) = sin(a) + sin'(a)(x-a) + \frac{sin''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$a = 0$ McLaurin serisi

$$sin(\theta) = sin(0) - cos(0)(\theta - 0) + \frac{-sin(0)}{2!}(\theta - 0)^2 + \frac{-cos(0)}{3!}(\theta - 0)^3 + ...$$

$$= 0 + \frac{1 \cdot \theta}{1!} + \frac{0 \cdot \theta^2}{2!} + \frac{-1 \cdot \theta^3}{3!} + ...$$

$$= 0 + \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}$$

e^θ açılımı:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$$

$e^0 = 1$

e^θ'nin her dereceden turevi yine kendisi olacaktir. O zaman

$$e^\theta = e^a + e^a(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + ...$$

$a = 0$ McLaurin serisi

$$e^\theta = e^0 + e^0(\theta - 0) + \frac{e^0}{2!}(\theta - 0)^2 + \frac{e^0}{3!}(\theta - 0)^3 + ...$$

$$= 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + ..$$

Sin ve cos fonksiyonlarının açılımı alt alta konulunca şöyle gözükecek...

$$sin(\theta) \approx 0 + \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}$$

$$cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ..$$

Hmm... Acaba bu iki açılımı toplarsak, e^{θ}'nın tanımına yaklaşabilir miyiz? Deneyelim.

$$cos(\theta) + sin(\theta) = 1 + \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta}{2!} - \frac{\theta}{3!} - \frac{\theta}{4!} + \frac{\theta}{5!} + ..$$

Olmadı. Çünkü e^{θ}'nın açılımı yukarida goruldugu gibi.

İşaretlerde uyumsuzluk var.

Bu noktada Euler'in yaptığı en büyük buluş, irrasyonel sayı olan i'yi bu karışıma koymaktır. İşaretleri tam uymayan önceki toplamın işaretlerinin eksi ve artı olma tekrarına bakarak, i sayısının üstlerinin yardımıyla sonuç denklemine daha yaklaşacağını düşünmüştür. Tekrarı (pattern) görmek, matematikçilerin ana yeteneklerinden biridir.

Devam edelim, e^{θ} yerine $e^{i \cdot \theta}$'yı McLaurin serisi kullanarak açarsak, şunu elde ederiz:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!}$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{-\theta^2}{2!} + \frac{-i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!}$$

Bu son açılımın i içeren terimleri biraraya toplar, ve i'yi bunlardan dışarı çekersek

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{-\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + ...i(\theta - \frac{-\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + ...)$$

Bu toplamın sol bölümündeki terimler cos'un açılımı, öteki de (i hariç) sin'in açılımına benzemiyor mu? Evet.

O zaman ispati tamamlamis olduk.