Tam Diferansiyel

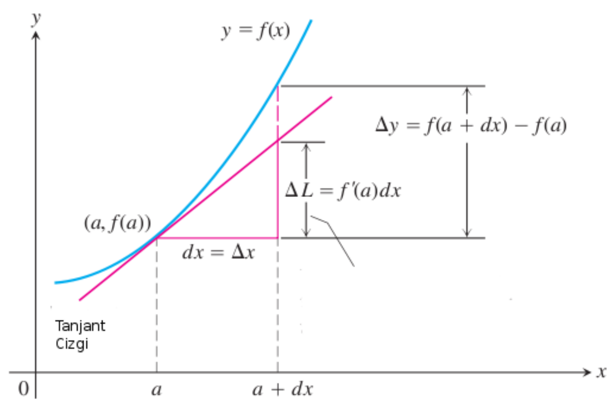
Bir f fonksiyonunun tam diferansiyeli (total differential) o fonksiyonun lineerlestirilmesi anlamina gelir. Iki degiskenli bir fonksiyon icin soyle temsil edilir:

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

Bu formu nasil turetiriz? Bize lazim olan lineerlestirme formulasyonu. Tek degiskenli bir fonksiyonu lineerlestirmenin teknigi sudur:

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Burada $L(x)$ gercek fonksiyonu yaklasiksal (approximate) olarak temsil eden lineer fonksiyondur.



Bu fonksiyonu genisleterek iki degiskenli hale getirelim (sadece y ekleyecegiz)

$$L(x, y) = f(x_0, y) + f_x(x_0, y)\Delta x$$

Bu fonksiyon da bir onceki kadar "gecerli". Sonucta fonksiyonlar noktasal degerlere gore sonuc verirler, bu sebeple bir lineerlestirme islemi 2 boyutlu ortamda herhangi bir x noktasinda yapilabildigi gibi, herhangi bir x, y noktasinda da yapilabilir.

Simdi ustteki denklemin sag tarafinda yer alan $f(x_0, y)$'yi lineerlestirelim.

$$L(x, y) = L(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\Delta y + f_x(x_0, y_0)\Delta x$$

Artik $L(x_0, y_0)$'yi sol tarafa tasiyabiliriz:

$\Delta L = L(x, y) - L(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)\Delta y + f_x(x_0, y_0)\Delta x$

ΔL yani df istedigimiz tam diferensiyel sonucudur, Δx yerine dx, Δy yerine dy kullanabiliriz, o zaman bastaki formun aynisini elde etmis oluruz.

Turetirken kullandigimiz numarayi uc, dort, vs. gibi istedigimiz kadar degisken tasiyan f fonksiyonlari icin yapabilirdik, ve sonuc ustteki forma benzer olurdu. Her degiskenin kismi turevi o degiskenin sonsuz ufakliktaki "degisimi" ile carpilip, o carpimlar toplaninca elimize tam diferansiyel geciyor.

Kaynaklar

Thomas Calculus 11. Baski