

Ozvektorler, Ozdegerleri Elle Hesaplamak (Eigenvectors, Eigenvalues)

Ozdegerler ve ozvektorler her matrise gore ozel vektorlerdir, ki matris bu ozel vektorleri transform ettiginde / islediginde sonuc yine ozvektorun kendisidir, daha dogrusu onun bir sabit (ozdeger) ile carpilmis halidir. Yani

$$Ax = \lambda x$$

Tek tarafa gecirelim

$$Ax - \lambda x = 0$$

Bu noktada x 'leri disari cekmek isterdik, fakat bunu yapamayiz, cunku o zaman iceride $A - \lambda$ kalir ve bu olmaz, cunku A bir matris, λ bir tek sayi. Ama $Ix = x$ 'ten hareketle

$$Ax - \lambda Ix = 0$$

diyebiliriz. Simdi disari cekersek

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Bu ifadenin dogru olmasi icin parantez icindeki ifade / matris tekil (singular) olmalıdır. Bunun icin ise parantez icinin determinanti sifir olmalıdır. Yani

$$|A - \lambda I| = 0$$

Ornek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 3 & 5 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(5 - \lambda) - 4 \cdot 3$$

Ustteki denkleme karakteristik denklem (characteristic equation) denir.

$$= -7 - 6\lambda + \lambda^2$$

Kokleri $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -1$.

Her ozdegere tekabul eden ozvektoru bulmak istiyorsak, cikartma islemini yapalim

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-7 & 4 \\ 3 & 5-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Su formule donersek

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Cikartma sonrasi elimize gecen matrisi carpacak oyle bir x vektörü ariyoruz ki bu vektorle carpinca elimize sifir (vektoru) gecsın. Yani bu aradigimiz x vektörü $(A - \lambda I)$ 'nin sifir uzayında (nullspace).

2 x 2 boyutundaki boyle ufak bir ornek icin x 'i aslında tahmin edebiliriz. Oyle iki sayi bulalim ki, 1. ve 2. kolonu onlarla ayri ayri carpip topladigimizda sonuc sifir olsun. Her iki kolonun tepesinde -6 ve 4 goruyorum, sadece bu iki sayinin sifira toplanmasi icin acaba -6'yi 2 ile 4'u 3 ile carpip toplanmasi olur mu? Kolondaki diger sayılara bakiyoruz, 3 ve -2 icin de bu ise yariyor. Demek ki ozvektorlerden biri

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Diger ise ayni teknigi kullanarak

$$x_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$