

Analitik PDE - Ders 1

Dersin kullanacağı ana kitap L. C. Evans'ın Kısmi Türevsel Denklemler (partial differential equations -PDE-) kitabı olacak. Bir sonraki ders için okuma ödevi şöyle:

1. Sf. 1-13'teki özet
2. Alt bölüm 2.1 sf. 17-19
3. Bölüm 3 sf. 91-115 arasını tamamen.

PDE'leri incelerken çoğunlukla onların temsil ettiği fiziksel fenomenleri de inceleyeceğiz. Mesela taşıma (transport) denklemleri, ki

$$\partial_t u + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} u = 0$$

Üstteki ifadede gradyan operatörü var, bu bilindiği gibi

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

\vec{b} içinde sabitler olan bir vektör olabilir

$$\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$$

Bu denklem 1. derece PDE'lerin özel bir durumudur bu arada. 1. derece PDE'ler

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0$$

şeklinde. D notasyonu Evans'ın gradyan için kullandığı notasyon, alırsak iyi olur. Yani

$$Du = \nabla u$$

Üstteki gibi denklemlere bakacağız, çözümlerini göreceğiz. Mesela üstteki denklem direkt ODE yaklaşımı ile çözülebiliyor. Bu hakikaten ilginç bir şey, yani üstteki gibi geniş bir PDE kategorisi, n tane değişken içerebilen türden denklemler ODE'lere indirgenerek çözülebiliyor. Bu yonteme “karakteristikler metodu (method of characteristics)” ismi veriliyor.

Bu arada

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0$$

formu oldukca geneldir, cok genel gayri lineer, normal (ordinary) diferansiyel denklemin formudur. Bir ornek

$$|\nabla u|^2 = n^2(x)$$

denklemdir, ki bu denklem dalga denkleminde dalgaların uc noktalarını (wavefront) incelerken ortaya çıkar.

Lineer PDE

Lineer PDE'lerin örnekleri mesela isi denklemi (heat equation), ya da yayılma / difüzyon (diffusion) denklemi.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u$$

Bir diğerk örnek dalga denklemi (wave equation)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u$$

yayılmanın hızı c sabiti olarak gösteriliyor.

Schrodinger denklemi ise şöyle

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla^2 \psi$$

Isi denklemiyle alakalı önemli bir nokta denge (equilibrium) noktasıdır. Denklem uzun zaman zarfı bağlamında incelendiğinde bir denge noktasına eriştiği görülecektir. Ki bu bizi Laplace denklemine götürür.

$$\nabla^2 u = 0$$

Ya da daha genel olarak

$$\nabla^2 u = f$$

ise bu denkleme Poisson denklemi adı veriliyor.

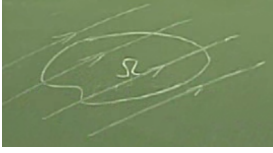
Tüm bu denklemler aslında pek çok uygulama alanında ortaya çıkan, çok geniş belli başlı bazı kategorilerin prototipleridir. Mesela Isı denklemine parabolik (parabolic) kısmi denklem kategorisi deniyor. Dalga denklemi hiperbolik (hyperbolic) kategorisi, Schrodinger ise dağılan (dispersive) PDE kategorisi olarak anılıyor. Laplace, Poisson denklemlerine eliptik (elliptic) kategorisi ismi veriliyor.

Tum bu denklemleri incelerken onlari temsil ettikleri daha genis kategorinin ornekleri olarak gorecegiz.

Simdi PDE'lerin ortaya ciktigi cok basit bir ornegi gorelim.

Elimizde bir Ω bolgesi /alani oldugunu hayal edelim, ki $\Omega \in \mathbb{R}^n$ olsun, yani alttaki resimde cizdigimiz \mathbb{R}^2 .

Yine diyelim ki bu Ω bolgesinin etrafinda bir tur siviyla kapli, ve bu sivi hareket ediyor. Bu hareketi sabit bir hiz vektor alanini olarak gosteriyoruz.



\mathbb{R}^n 'deki bu sabit hiz alanini \vec{V} olarak gosterelim. \vec{V} 'nin vektor isaretini koyduk, ama ileride bunu yapmayabiliriz, ama anlatimin cercevesinden bir sey vektor olup olmadigini anlamak kolay.

Yani bu sivi olusturan parcacikler ayni (uniform) hizda hareket ediyorlar.

Sivinin x noktasindaki t anindaki yogunlugu $\rho(x, t)$ olarak gosterilsin. O zaman t aninda Ω alanindaki kutleyi hesaplamak istiyorsam, o zaman yogunlugun hacim uzerinden integralini alirim.

$$Kutle = \int_{\Omega} \rho(x, t) dx$$

Birimleri kontrol edeli, $\rho(x, t)$ kutle / hacim (mesela kg/cm^3) birimine sahip, hacim uzerinden integral alinca elimize kutle gecer.

Bu sivi belirlenen alan uzerinden surekli akiyor. O alan icindeki kutlenin degisim oranini merak ediyorum. Su hesabi yapmam lazim

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(x, t) dx$$

Degisim orani Ω bolgesinin sinirlarindan ne geciyorsa o'dur.

Bolgenin dis sinirina dik olan birim normal vektorler dusunelim. Eger bu vektorlerden kirmizi okla gosterilen soldaki normale bakarsak, sivi akisi ona pek etki etmiyor, yani zarin o bolgesine giris ve cikis fazla yok. Fakat sagda isaretli normal uzerinde oldukca fazla akis var.

