

Tam Diferansiyel

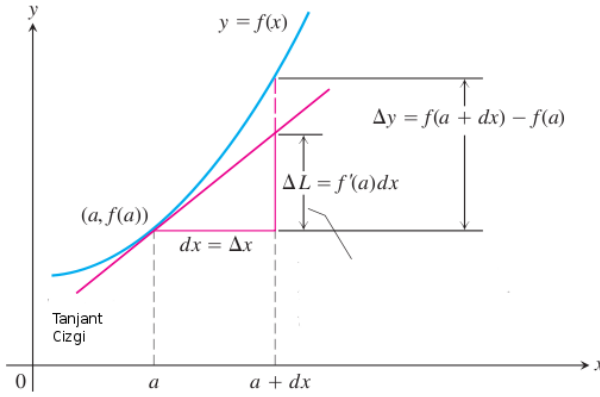
Bir f fonksiyonunun tam diferansiyeli (total differential) o fonksiyonun lineerleştirilmesi anlamına gelir. İki değişkenli bir fonksiyon için şöyle temsil edilir:

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

Bu formu nasıl türetiriz? Bize lazım olan lineerleştirme formülasyonu. Tek değişkenli bir fonksiyonu lineerleştirmenin tekniği şudur:

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Burada $L(x)$ gerçek fonksiyonu yaklaşıksal (approximate) olarak temsil eden lineer fonksiyondur.



Bu fonksiyonu genişleterek iki değişkenli hale getirelim (sadece y ekleyeceğiz)

$$L(x, y) = f(x_0, y) + f_x(x_0, y)\Delta x$$

Bu fonksiyon da bir önceki kadar “geçerli”. Sonuçta fonksiyonlar noktasal değerlere göre sonuç verirler, bu sebeple bir lineerleştirme işlemi 2 boyutlu ortamda herhangi bir x noktasında yapılabildiği gibi, herhangi bir x, y noktasında da yapılabilir.

Şimdi üstteki denklemin sağ tarafında yer alan $f(x_0, y)$ ’yi lineerleştirelim.

$$L(x, y) = L(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\Delta y + f_x(x_0, y_0)\Delta x$$

Artık $L(x_0, y_0)$ ’yi sol tarafa taşıyabiliriz:

$$\Delta L = L(x, y) - L(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)\Delta y + f_x(x_0, y_0)\Delta x$$

ΔL yani df istediğimiz tam diferansiyel sonucudur, Δx yerine dx , Δy yerine dy kullanabiliriz, o zaman bastaki formun aynısını elde etmiş oluruz.

Türetirken kullandığımız numarayı üç, dört, vs. gibi istediğimiz kadar değişken taşıyan f fonksiyonları için yapabiliriz, ve sonuç üstteki forma benzer olurdu. Her değişkenin kısmi türevi o değişkenin sonsuz ufaklıktaki “değişimi” ile carpılıp, o carpımlar toplanınca elimize tam diferansiyel geliyor.

Kaynaklar

