MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 14

Bagimsiz Olmayan Degiskenler (Non-independent Variables)

Ornek

Fizikteki $f(P, V, T)$ formulu, ki bu degiskenler

$PV = nRT$

seklinde ilintili. Daha genel olarak bir $f(x, y, z)$ formulu var, ve degiskenler x, y, z birbiriyle $g(x, y, z) = c$ uzerinden baglantili. Aslinda bir onceki dersteki ayni durum, sadece bu sefer min, maks degil, kismi turevlere neler oldugunu inceleyecegiz.

Yine onceki dersteki gibi, belki g'yi cebirsel olarak degistirip, f'e sokup degisken yoketmek mumkun degil. Eger oyle yapabilsek, bir $z = z(x, y)$ olabilirdi, ve onun kismi turevlerine bakabilirdik,

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, ..$$

gibi. Peki ya z'yi bulamiyorsak? Belki ustteki kismi turevleri z'yi bulmadan elde edebiliriz.

Ornek

$x^2 + yz + z^3 = 8$

$(2, 3, 1)$ noktasina bakalim (yerine koyunca hakikaten 8 ciktigini goruyoruz). Fakat bu degerlerde azicik degisiklik yapinca, z nasil degisir? Bu soruyu nasil cevaplarim?

Formulden z'yi cekip cikarmak gerekir, kupsel (cubic) formullerde bunu yapmanin bir yolu var, fakat cok karmasik bir formul ortaya cikartiyor. Aradigimiz sonuca ulasmanin daha kolay bir yolu var.

g'nin tam diferansiyeline, yani dg'ye bakalim (ustteki formulu g kabul ediyoruz). Tam diferansiyel

$2xdx + zdy + (y + 3z^2)dz = 0$

Sag taraf sifir cunku ustteki g bir sabite esit, $g = 8$, sabitin degisimi sifir, yani $dg = 0$.

Tam diferansiyele $(2,3,1)$ degerini verelim

$4dx + dy + 6dz = 0$

Bu formul bize her degiskenin degisiminin digeri ile nasil baglantili oldugunu gosteriyor. Mesela dx ve dy'yi biliyorsak, dz'yi, yani z'nin degisimini hesaplayabiliriz. Yani $z = z(x,y)$ uzerinden

$$dz = -\frac{1}{6}(4dx + dy)$$

Bu formul bize kismi turevleri de gostermis oluyor aslinda, cunku tam diferansiyel formulunde kismi turevler vardir, ustteki formulde dx, dy'nin yaninda yer alan degerler onlardir. O zaman

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{6}$$

Bunu dusunmenin bir diger yolu su. $\partial z/\partial x$ z'nin x'e gore degisimi ise, y sabit demektir, ustteki dz formulunde $dy = 0$ deriz, geri kalanlar

$$dz = -\frac{2}{3}dx$$

ki bu formul z'nin x'teki degisime gore nasil degistigini gosteriyor.

Genel olarak

$g(x,y,z) = c$

ise, o zaman

$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz$

formulu sifira esitlenir, ve bir diferansiyel digerinin formunda elde edilebilir.

$$dz = -\frac{g_x}{g_z}dx - \frac{g_y}{g_z}dy$$

O zaman $\frac{\partial z}{\partial x}$'i gormek istiyorsak, dx'in katsayisina bakabiliriz, ya da $y = sabit$ yani $dy = 0$ deriz, ve geri kalanlar

$$dz = -\frac{g_x}{g_z}dx, \ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{g_x}{g_z}dx$$

Daha fazla ilerlemeden, simdiye kadar gordugumuz notasyonun bazi problemlerini inceleyelim.

$f(x,y) = x + y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$

Degisken degisim (change of variables) yapalim

$x = u$

$y = u + v$

Pek cetrefilli bir degisim degil bu. O zaman

$f = x + y = 2u + v$

$\frac{\partial f}{\partial u} = 2$

Bu nasil oldu? $x = u$ dedigimize gore, x, u birbiriyle esitler, o zaman kismi turevleri de ayni olmaliydi.

Bu uyusmazligin niye ortaya ciktigini anlamak icin notasyonun ne demek istedigine yakindan bakmamiz lazim. $\partial f / \partial x$ ile x'i degistiriyor, ama y'yi sabit tutuyoruz. $\partial f / \partial u$ ile u'yu degistiriyor, ama v'yi sabit tutuyoruz.

Yani evet, x ile u'yu degistirmek ayni sey olabilir, ama v'yi sabit tutmak ile y'yi sabit tutmak ayni sey degildir. Cunku mesela y'yi sabit tutarsam ve u'yu degistirirsem, v de degismelidir (ki biz bunu istemiyoruz) $y = u + v$ ifadesindeki toplaminin sabit kalmasi icin. Ya da v sabit ise ve u'yu degistiriyorsam, y degisecektir.

Yani hos, guzel kismi turev notasyonumuz neyin degistigini acikca gostermesine ragmen, neyin sabit tutuldugunu gostermedigi icin yanilgilara yol acabiliyor. Bunu aklimizda tutmamiz lazim. Ornekteki kismi turevler birbiriyle ayni degil cunku

$\partial f / \partial x$, $u = x$'i degistir, ve y'yi sabit tut

$\partial f / \partial u$, $u = x$'i degistir, ve $v = y - x$'i sabit tut

anlamina geliyor.

Daha acik bir notasyon soyle olabilir

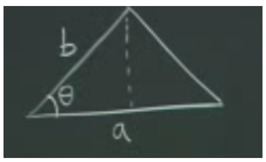
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = \text{ y sabit}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = \text{ v sabit}$$

Ornege donersek

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}_{1} \neq \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_v = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v}_{2}$$

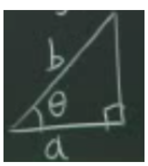
Ornek



$$A = \frac{1}{2} absin(\theta)$$

Alan, a, b, θ'nin fonksiyonu.

Farz edin ki size a, b, θ arasinda bir iliski oldugunu soyledim.



Diyelim ki ucgen aslinda bir dik ucgen, bunu cebirsel olarak soylemenin yolu da alttaki kisitlama ifadesi

$$a = bcos(\theta)$$

Incelemek istedigimiz alanin θ'ya olan baglantisi, yani, mesela A'nin degisiminin θ'nin degisimine orani nedir? Bunu hesaplamanin 3 yontemi olabilir

1) a, b, θ'yi bagimsiz kabul et, o zaman

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_{a,b}$$

Tabii a, b sabitken θ degissin demek, ucgenin dikliginin ihlali demektir, cunku hem kenarlar sabit, hem aci degissin diyoruz, ama o zaman dik aci degismek zorundadir. Her neyse, kismi turevleri hesaplayalim.

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{1}{2} abcos(\theta)$$

Simdiye kadar kisitlama ifadelerimi kullanmadim.

2) a'yi sabit tutalim, b degisebilsin, ki boylece dik aci yerinde kalabilsin.

$$b = b(a, \theta) = \frac{a}{cos(\theta)}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_a$$

3) b'yi sabit tutalim, $a = a(b, \theta)$ degissin, ki boylece dik aci yerinde kalabilsin.

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_b$$

Bunlardan bir tanesini hesaplayalim, mesela $\left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_a$.

Hesabi yapmanin uc degisik yolunu gorecegiz.

0. Metot: b'yi yanliz birak (cebirsel), ve diger formule sok

$$a = b\ cos(\theta) => b = \frac{a}{cos(\theta)} = a\ sec(\theta)$$

$$A = \frac{1}{2}\ ab\ sin(\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{a^2 sin(\theta)}{cos(\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} a^2 tan(\theta)$$

O zaman

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_a = \frac{1}{2} a^2 sec^2(\theta)$$

Bu arada sec, $1/cos$ demektir, eger ve onun turevini $1 + tan^2$ olarak biliyorsaniz, o da ayni kapiya cikar.

Hoca bu metotu tavsiye etmiyor (onun icin metot sayisi biraz espri yaparak 'sifir' vermis) cunku her zaman yanliz birakma, baska formule sokma mumkun olmayabilir.

1. Metot: Diferansiyelleri Kullan

Yapilacaklar sunlar

* a'yi sabit tut, $da = 0$

* kisitlama ifadesi $a = b\ cos(\theta)$

Ustteki ifadenin diferansiyelini alalim

$da = cos(\theta)db - b\ sin(\theta)d\theta$

Simdi elimizde $da, db, d\theta$'yi iliskilendiren bir ifade var. a'nin sabit oldugunu biliyoruz, o zaman $da = 0$

$0 = cos(\theta)db - b\ sin(\theta)d\theta$

db'yi yanliz birakabiliriz

$cos(\theta)db = b\ sin(\theta)d\theta$

$db = b\ sin(\theta)d\theta\ /\ cos(\theta)$

$db = b\ tan(\theta)d\theta$

Boylece b'nin θ'ya gore degisim oranini bulduk. Bu ne ise yarar? Ana formulu hatirlayalim, ve onun da diferansiyelini alalim

$A = \dfrac{1}{2}\ ab\ sin(\theta)$

$dA = \dfrac{1}{2}\ b\ sin(\theta)da + \dfrac{1}{2}\ a\ sin(\theta)db + \dfrac{1}{2}\ ab\ cos(\theta)d\theta$

$da = 0$ ise, ilk terim yokolur.

$dA = \dfrac{1}{2}\ a\ sin(\theta)db + \dfrac{1}{2}\ ab\ cos(\theta)d\theta$

Geri kalanlarda, db var, ama biz θ'ya gore degisimi istiyoruz, db'yi orada gormek istemiyoruz. O zaman elimizdeki db formulunu buraya sokalim.