

Ders 1

Önce Reel Analiz (Real Analysis) ile başlayalım. Fonksiyonel Analizdeki pek çok kavram Reel Analiz ile benzer (ama daha geneldir).

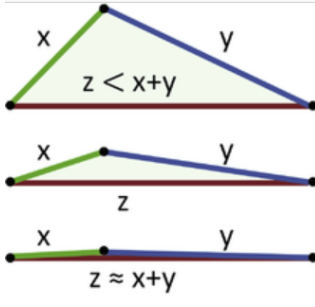
Reel Cizgi

Reel sayıların olduğu küme \mathbb{R} 'ye geometrik bir açıdan “reel çizgi” ismi de verilir. Reel çizgi üzerinde uzaklık kavramı, mesela iki nokta x, y arasında

$$d(x, y) = |x - y|$$

olarak gösterilebilir. Uzaklık fonksiyonu d 'nin özellikleri şunlardır:

1. $d(x, y) > 0$. Her uzaklık ya sıfır, ya da pozitiftir.
2. $d(x, y) = 0$ eğer $x = y$ ise.
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Bu eşitsizliğe “üçgen eşitsizliği (triangle inequality)” ismi verilir.



Özet olarak söylenmeye çalışılan, x, y arasında üçüncü bir noktaya ziplanarak gidiliyorsa, bu mesafeyi arttırır, ve bu artış en az x, y arasındaki mesafe kadardır. Daha fazla da olabilir.

Diziler (Sequences)

Bir dizi aslında sadece bir listedir. Listede 1. eleman vardır, 2. eleman vardır, vs. ve bu sonsuza kadar devam eder. Bu nokta önemli, matematikte sonlu / sınırlı (finite) bir liste dizi değildir. Dizilerin önemli bir özelliği sonsuza kadar devam etmeleridir.

Daha formel olarak bakarsak doğal sayıların, yani \mathbb{N} kümesinin de tanımı

bir rol oynadigini gorebiliriz. Listedeki her eleman dizideki sıra numarası ile etiketlenebilir, 1. elemanı “1”, 2. elemanı “2”, vs. olarak etiketleyebiliriz, o zaman bu acıdan bakarsak bir dizinin, doğal sayılar ile başka bir küme arasındaki bir *eslesme* olduğunu da söyleyebiliriz. Bu eslesme bir diğer tanımla bir fonksiyondur. Yani bir dizi aslında bir fonksiyondur, yani

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dizimizi

$$f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$$

olarak gösterebiliriz.

Yaklaşmak (Convergence)

Acık bir şekilde göreceği üzere alttaki dizi

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

gittikçe 0 değerine doğru gidiyor. Bu dizi “sıfıra yaklaşıyor (convergence)” deriz, ya da “dizinin limiti sıfır” deriz. Peki bu fikri nasıl daha açık, net olarak tanımlayabiliriz?

Yaklaşan seriler 18. yüzyılda incelendi ve geliştirildi, fakat o zamanlarda bu tür dizilerin tanımı hiçbir net olarak ortaya koyulmadı. Literatur taranırsa tanıma en yakın olacak şey şöyledir:

“Bir dizi $\{s_n\}$ L sayısına yaklaşıyor, eğer bu dizideki terimler gittikçe L ’e yaklaşıyorsa”.

Bu tanımın oldukça genel, kabaca olarak yapılmış olması bir yana, bazen bizi yanlış yollara bile sürükleyebilir. Mesela şu diziyi ele alalım

$$.1, .01, .02, .001, .002, .0001, .0002, .00001, .00002, \dots$$

Bu dizi muhakkak sıfıra “yaklaşıyor”, fakat terimler düzenli bir şekilde sıfıra yaklaşmıyorlar. Her ikinci adımda birazcık sapıyorlar. Ya da şu dizi

$$.1, .11, .111, .1111, .11111, .111111, \dots$$

Bu dizi gittikçe .2’ye “yaklaşıyor”, fakat bu dizinin .2’ye yaklaştığı iddia edilemez. Gerçek limit 1.9 olmalı, 2 değil. Ne olduğu belli olmayan bir “gittikçe yaklaşma” tanımına değil, bizim aslında “gelişigüzel yakınlık (arbi-

trarily close)” tanimina ihtiyacımız var.

Bu fikri en iyi yakalayabilen 1820’li yıllarda Augustin Cauchy oldu. Esitsizlikleri kullanarak “herhangi / gelisiguzel yakinlik” kavramini formule eden bir tanim bulmayi basardi. Bu sekilde limit kavrami gayet acik matematiksel esitlisizlikler ile gosterilebildi.

Tanim: Bir Dizinin Limiti

$\{s_n\}$ ’nin reel sayılardan mutesekkil bir dizi oldugunu dusunelim. $\{s_n\}$ ’nin bir reel sayi L ’e yaklastigini soyleriz, ve bunu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L$$

olarak belirtiriz. Ya da

$$s_n \rightarrow L \text{ olur, } n \rightarrow \infty \text{ iken}$$

eger her $\epsilon > 0$ icin oyle bir tam sayi N var ise, ki bu N su sartlara uymali

$$|s_n - L| < \epsilon$$

$n \geq N$ oldugu her zaman icin.

Bir dizi yaklasmiyorsa, ona uzaklasan (divergent) dizi adi verilir. Bu her iki tur ile ayni derecede ilgileniyoruz.

Not: Tanimda N ’nin ϵ ’a bagli oldugu goruluyor, eger ϵ cok ufak ise mesela, o zaman N ’in oldukca buyuk olmasi gerekebilir. Bu acidan bakilince aslinda N ’nin ϵ ’nun bir fonksiyonu oldugu soylenebilir. Bu durumu tam vurgulamak icin bazen $N(\epsilon)$ yazmak daha iyi olabilir.

Not: Tanima dikkat edersek, sartlara uyan bir N bulununca, o N degerinden daha buyuk herhangi bir N de kullanabiliriz. Yani ustteki tanim bize herhangi bir N bulmamizi soyler, illa ki “en kucuk” N ’i bulmamiz gerekmez.

Tanim bunu soylemiyor olsa bile ibarenin asil gucu N ’nin ϵ ne kadar kucuk olursa olsun bulunabiliyor olmasidir. Eger ϵ buyuk bir sayi ise N ’i bulmak kolay olur. Eger $\epsilon = 0.1$ icin (ki bu sayi ϵ turu sayilar icin buyuk sayilir) isleyen bir N bulursak, ayni N daha buyuk ϵ degerleri icin de isleyecektir.

Ornek

Ustteki tanimi kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

oldugunu ispat edelim. Yanliz sunu belirtelim, ustteki tanim limitin $1/2$ olacagini hesaplamak teknigi olarak verilmiyor. Ifade limit kavramina kesin bir tanim getiriyor ama o limiti hesaplamak icin kesin bir metot sunmuyor. Neyse ki cogumuz bu hesabi yapmak icin yeterince calculus hatirliyoruz, boylece limitin dogrulugunu ispatlamadan once ne oldugunu bulabiliriz.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + 1/n^2} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + 1/n^2)} \\ &= \frac{1}{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Bu hesap, eger tum adimlarin dogrulugu ispatlanirsa, limitin ne oldugunun da ispati olabilirdi. Adimlarin dogrulugunu daha sonra gosterecegiz, boylece her seferinde ϵ, N temelli argumanlari kullanmamiza gerek kalmayacak. Simdi ϵ, N bazli ispata geelim,

Pozitif bir ϵ 'un verildigini varsayalim. Oyle bir N (ya da $N(\epsilon)$, hangisini tercih ederseniz) bulmamiz gerekiyor ki, dizide N . terimden sonraki her eleman $1/2$ 'ye ϵ 'dan daha yakin olsun, ve su ifade dogru olsun

$$\left| \frac{n^2}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

ki $n = N, n = N + 1, n = N + 1, N + 2, \dots$. Sonuctan geriye dogru gidersek isimiz kolaylasir, yani verilen N icin ϵ 'nun ne kadar buyuk olmasi gerektigini hesaplarsak. Ustteki tam deger (absolute deger) isaretinin icine bakalim,

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2} &= \frac{2n^2}{2(2n^2 + 1)} - \frac{2n^2 + 1}{2(2n^2 + 1)} \\ &= \frac{2n^2 - 2n^2 - 1}{2(2n^2 + 1)} = \frac{-1}{2(2n^2 + 1)} \end{aligned}$$

Tam deger alinince

$$\frac{1}{2(2n^2 + 1)} < \epsilon$$

olmalı, ya da

$$4n^2 + 2 > \frac{1}{\epsilon}$$

Dikkat, tersine cevирince kucukluk isareti buyukluk oldu.

Bu ifadeye uyan en kucuk n , aradigimiz N . O zaman

$$N^2 > \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\epsilon} - 2 \right)$$

ifadesine uyan her tam sayi N bizim icin uygun. Illa ki en kucuk N olmasi gerekmez, en rahat olan N biraz buyukce olabilir, mesela eger sag taraftaki $1/4\epsilon$ terimine (sag tarafta daha fazlasi var, ama eksi isareti bu terimi daha kucultecek nasil olsa) esit bir seyleri sol tarafta istiyorsak, onun karesini N olarak kabul ederiz,

$$N > \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$$

deriz.

Bu ornegin bize verdigi asil ders, aslinda, tanimin bize limit teorisini gelistirmek icin teorik / kesin (rigourous) bir yontem sunmasi ama bu limitlerin hesabini yapmak icin pratik bir yontem olmamasi. Bir limitin dogrulugunu hesaplamak icin nadiren boyle bir yonteme basvurulur.

Alt Dizinler (Subsequences)

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \dots$$

sekindeki bir dizinin icinde iki tane daha dizin oldugu gorulebilir. Bunlardan biri

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Digeri

$$-1, -2, -3, -4, -5, \dots$$

Bu dizin icinde dizin kavramini temsil etmek icin “altdizin” kelimesini kullanacagiz. Cogunlukla bir dizini incelemenin en iyi yolu onun altdizinlerine bakmaktır. Ama altdizinlerin daha derli toplu bir tanimi ne olabilir acaba? Ustte kabaca yaptigimiz kavramin formel matematiksel bir tanimina ihtiyacimiz var.

Tanim

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$$

gibi herhangi bir dizini ele alalım. Altdizin ile

$$s_{n_1}, s_{n_2}, s_{n_3}, s_{n_4}, \dots$$

demek istiyoruz ki

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

olmalı, altdizinde kullanılan indekslerin her biri, bir öncekinden büyük olmalı.

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

dizini,

$$1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \dots$$

dizinin altdizini çünkü orijinal dizinden çekip çıkartılan elemanların indekleri $n_1 = 1, n_2 = 3, n_3 = 5$ şeklinde.

Bolzano-Weierstrass Teorisi

Her sınırlı (bounded) dizi içinde yaklaşılan (convergent) bir altdizi vardır. Teorinin ispatını burada vermeyeceğiz.

Limitlerin Sınırlı Olmaları Özelliği

Eğer bir dizi belli değerler arasındaki değerleri içeren bir küme ise, yani sınırlı bir küme ise (bounded set), bu diziye sınırlı bir dizi denir (bounded sequence). Yani dizi $\{s_n\}$ sınırlıdır, eğer M diye bir sayı var ise, ki dizideki her dizi için

$$|s_n| \leq M$$

Teori

Her yaklaşılan (convergent) dizi sınırlıdır. Bu teoremin ispatını vermeyeceğiz, fakat sınırlı olmayan bir dizinin limiti olamayacağı açıktır.

Cauchy Kriteri

Bir dizinin hangi özelliği onun yakınlığını karakterize eder? “Karakterize eder” kelimeleriyle gerekli ve yeterli (necessary and sufficient) bir durum arıyoruz ki bu durum gerçekleştiğinde dizinin yakınlığını bilelim.

Her türlü diziye uygulanabilen böyle bir karakterizasyon Cauchy tarafından keşfedildi. Cauchy'nin bulduğu tanımın ilginç bir tarafı var, hiçbir nihai limit değerine referans yapmıyor. Sadece, son derece gevsek bir şekilde, bir dizinin terimleri birbiriyle rasgele (arbitrary) bağlamda, eninde sonunda (eventually) yaklaşırsa, o dizinin yakınlasacağını söylüyor. Kriter şöyle:

Bir dizi $\{s_n\}$ yaklaşıksaldır, eğer, ve sadece eğer her $\epsilon > 0$ için bir tamsayı N var ise, ki

$$|s_n - s_m| < \epsilon$$

$n \geq N, m \geq M$ olmak koşuluyla.

İspat

Teorinin bu ögesi o kadar önemli ki kendine has yeni bir terminolojiyi hak ediyor. Üstteki ögeye uyan her diziye Cauchy dizisi adı veriliyor. Yani teori “bir dizi sadece ve sadece Cauchy dizisi ise yaklaşıksaldır” diyor. Bu terminoloji daha ileri matematikte (mesela temel alınan küme reel sayılar değil, daha cıtrefil uzaylar olduğu zaman) geçerli olmayabilecektir, ama bu durumda da gerektirdiği ek şartlar, ve ortaya koyduğu ifadenin kesinliği çok önemlidir.

İspat biraz uzun, ve Bolzano-Weierstrass teorisini gerektirecek. Bir yandeki ispat oldukça kolay. Farz edelim ki $\{s_n\}$ bir L sayısına yaklaşıyor. Diyelim ki $\epsilon > 0$. O zaman bir tam sayı N olmalı ki

$$|s_k - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

ki $k \geq N$. Eğer hem m hem n N 'den büyüklerse,

$$|s_n - s_m| \leq |s_n - L| + |L - s_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Üstteki ilk eşitsizlik / acilim ucgen eşitsizliğinden ortaya çıkıyor. Bu eşitsizlikten ortaya çıkan iki yeni terimin hangi değerlere sahip olduğunu biliyoruz, yerlerine koyunca ϵ elde ediyoruz.

Şimdi daha zor olan ikinci bölüme geelim. Bu bölümün ispatı için yine iki alt bölüm lazım.

Önce her Cauchy dizisinin sınırlı olduğunu iddia ediyoruz. İspat için üstteki sınırlı diziler hakkındaki teoriye başvururuz, her yaklaşan dizi sınırlıdır,

her Cauchy dizisi bir degere yaklastigina gore, o zaman her Cauchy dizisi sinirlidir.

Ikinci bolum icin yaklasik (sinirli) $\{s_n\}$ dizisine Bolzano-Weierstrass teorisi uygulayarak yaklasik bir alt dizin $\{s_{n_k}\}$ elde ediyoruz.