Iki Boyutlu f(x,y) Fonksiyonunun Taylor Serisi, Acilimi

Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun Taylor acilimini yapmak icin, daha onceden gordugumuz tek boyutlu fonksiyon acilimindan faydalanabiliriz.

Once iki boyutlu fonksiyonu tek boyutlu olarak gostermek gerekir. Tek boyutta isleyen bir fonksiyon $F$ dusunelim ve bu $F$, arka planda iki boyutlu $f(x,y)$'i kullaniyor olsun

Eger

$$f(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y)$$

fonksiyonun acilimini elde etmek istiyorsak, onu

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_o + t\Delta y)$$

uzerinden $t = 1$ oldugu durumda hayal edebiliriz. $x, y$ parametrize oldugu icin $f(x(t), y(t))$, yani

$$x(t) = x_0 + t\Delta x$$

$$y(t) = y_0 + t\Delta y$$

$F(t)$ baglaminda $x_o, y_o, \Delta x, \Delta y$ sabit olarak kabul edilecekler. Simdi bildigimiz tek boyutlu Taylor acilimini bu fonksiyon uzerinde, bir $t_0$ noktasi yakininda yaparsak,

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}F''(t_0)(t - t_0)^2 + ...$$

Eger $t = 1, t_0 = 0$ dersek

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + ...$$

olurdu. Bu iki degeri, yani $t = 1, t_0 = 0$'i kullanmamizin sebebi $t$'nin yokolmasi, boylece cok basit bir tek boyutlu acilim elde etmek.

Simdi bize gereken $F', F''$ ifadelerini $x, y$ baglaminda elde edelim, ki bu diferansiyeller $F$'in $t$'ye gore birinci ve ikinci diferansiyelleri, ama $F$'in icinde $x, y$ oldugu icin acilimin Zincirleme Kanunu ile yapilmasi lazim.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy(t)}{dt}$$

Dogal olarak

$$\frac{d}{dt}x(t) = \Delta x$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = \Delta y$$

dogru olduguna gore, tam diferansiyel daha da basitlesir

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y$$

Bu ifadenin bir daha tam diferansiyelini alacagiz.

Ama ondan once sunu anlayalim ki ustteki ifade icinde mesela birinci terim de aslinda bir fonksiyon, ve asil hali

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F(x(t), y(t))}{\partial x}\Delta x + ...$$

seklindedir. O zaman, bu terim uzerinde tam diferansiyel islemini bir daha uyguladigimizda, Zincirleme Kanunu yine isler, mesela ustte, $dx(t)/dt$'nin bir daha disari cikmasini beklememiz gerekir. O zaman

$$\frac{d^2F}{dt} = \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dt} + \Big)\Delta x + \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{dx}{dt} + \Big)\Delta y$$

$$= \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Delta x + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Delta y\Big)\Delta x + \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\Delta x + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Delta y\Big)\Delta y$$

$$= \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\Delta y \Delta x\Big) + \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Delta y^2\Big)$$

Calculus'tan biliyoruz ki

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

yani kismi turevin alinma sirasi farketmiyor. Daha kisa notasyonla

$$= (f_{xx}\Delta x^2 + f_{xy}\Delta y \Delta x) + (f_{yx}\Delta x \Delta y + f_{yy}\Delta y^2)$$

$f_{xy} = f_{yx}$ ise

$$= (f_{xx}\Delta x^2 + f_{xy}\Delta y \Delta x) + (f_{xy}\Delta x \Delta y + f_{yy}\Delta y^2)$$

$$\frac{d^2F}{dt} = (f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta y\Delta x + f_{yy}\Delta y^2)$$

Artik elimizde $F$ ve $F'$ var, bunlari

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + ...$$

icine yerlestirebiliriz. En son su kaldi, $F(0)$ nedir? $F$'in $t = 0$ oldugu anda degeridir,

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_o + t\Delta y)$$

$$F(0) = f(x_0 + 0 \cdot \Delta x, y_o + 0 \cdot \Delta y)$$

$$= f(x_0, y_o)$$

Benzer sekilde, tum turevler de $t = 0$ noktasinda kullanilacaktir, o zaman onlar da

$$F'(0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$$F''(0) = (f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta y\Delta x + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2)$$

seklinde olurlar. Tamam. Simdi ana formulde yerlerine koyalim,

$$\begin{aligned}
F(1) \quad = \quad & f(x_0, y_o)+ \\
& f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y+ \\
& \tfrac{1}{2}[f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta y\Delta x + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2] + ...
\end{aligned}$$

Ve

$$F(1) = f(x_0 + \Delta x, y_o + \Delta y)$$

olduguna gore, Taylor 2D acilimimiz tamamlanmis demektir.

Kaynaklar

http://www.math.ubc.ca/ feldman/m200/taylor2dSlides.pdf

http://math.uc.edu/ halpern/Calc.4/Handouts/Taylorseries.pdf