OCW MIT 18.03 Ders 7

Ozel form

$y' + ky = kq_e(t)$

Su cozulunce

$y' + ky = q(t)$

su elde edilir

$y = e^{-kt} \int q(t) e^{kt} dt + ce^{-kt}$

Bu denklemdeki sag ilk kt ve soldaki $-kt$ ust degerlerinin ters isaretli oldugunu hatirlamanin iyi bir yolu $q(t) = 1$ olunca ic ve dis e degerlerinin birbirini iptal etmesi ve bu sayede sonucun sabit bir sayi olmasi.

c'yi iceren terim arti isaretinden sonra da (ustteki gibi) koyulabilir. Ya da onun yerine entegrale sifir alt siniri ve t fuzuli (dummy) degiskeni verilerek tanimsiz entegral tanimli entegral haline de getirilebilir.

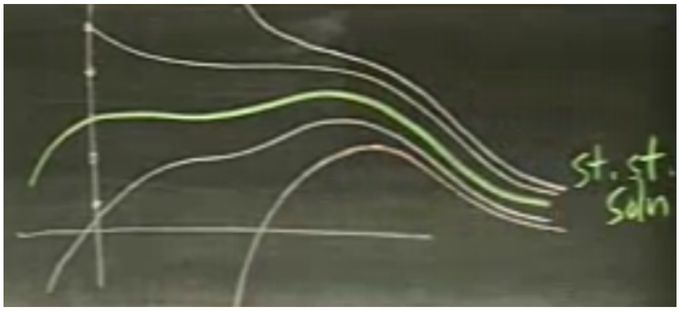
Bu denklemde, sadece ve sadece $k > 0$ oldugu zaman, t sonsuzluga giderken e^{-kt} sifira gider (ve c'nin ne oldugu farketmez), geri kalan

$y = e^{-kt} \int q(t) e^{kt} dt$

denklemi ise istikrarli konum (steady-state) cozumu olacaktir.

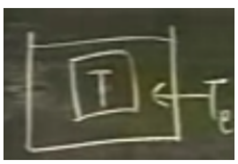
Denklemdeki c $y(0)$ degerini kullanir.

Birkac cozumu grafiklersek soyle bir sonuc gorebiliriz. Sari renkli olan istikrarli olan cozumdur, diger tum cozumler ona yaklasir. Peki sari renkli olan grafigin ozel tarafi nedir? Aslinda yoktur, tum cozumler sariya degil, birbirlerine yaklasirlar. Daha detaylandirmak gerekirse, aslinda bir degil, birden fazla istikrarli cozum vardir.



O zaman hangi istikrarli cozumden bahsetmek gerekir? ce^{-kt}'in sifira gittigi en basit olani tabii ki, fakat ce^{-kt}'dan once gelen terim bir sekilde ce^{-kt} ile beraber daha basit bir formule de sebebiyet verebilir. Yani duruma gore degisir. Genel olarak bizim en basit erisebilecegimiz istikrarli cozum secilir.

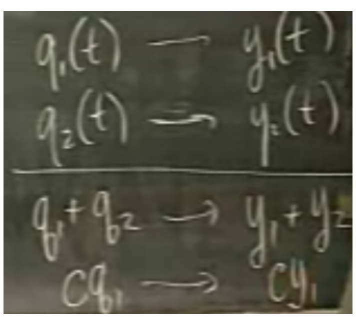
$q(t)$'yi bu problemde "girdi" olarak niteleyecegiz, cunku hep daha once bahsettigimiz sicaklik problemini, ve o problemdeki T_e'yi dusunuyoruz, T_e havuza pompalanan bir sicaklik girdisi.



Sistemin "cevabi (response)" ise diferansiyel denklemin cozumu $y(t)$.

$q(t)$ yerine $q_e(t)$ kullanalim.

Bu arada, bu denklemde girdilerin ust uste eklenebilmesi ozelligi vardir.



$q_1 + q_2$ birbirine eklenince sonuc $y_1 + y_2$ olur.

Soru: Eger girdi trigonometrik bir fonksiyon ise ne olur? Bu en onemli durumdur (Fourier serilerinin mevcudiyeti sebebiyle, bu konuya ileride girecegiz).

$y' + ky = kq_e(t)$

icin girdi olarak $cos(\omega t)$ verilmis. ω acisal frekans olarak modelleniyor, yani 2π icinde kac tane tam salinimin (oscillation) oldugu. *cos* egrisini hatirlarsak, bir salinim 0 ile 2π arasindadir, fonksiyon basladigi yere doner, salinim biter. ω ile salinim sıkligi arttirilabilir, $\omega = 2$ ile 0 ile 2π arasinda iki kere tam salinim olur. Yani frekans kelimesi burada biraz karisiklik yaratabilir, cunku 2π icinde olanlara bakiyoruz, 1 birimlik zaman icinde neler olduguna bakmiyoruz (ki bu frekansin cogunlukla kullanilan tanimidir).

Problem

$q_e = cos\ \omega t$ girdisini kullanarak cevabi hesapla (yani ODE'yi coz).

Cozum icin kompleks sayilari kullanacagiz. ODE'yi alip kompleks sayilari kullanan bir hale cevirecegiz. Onu cozecegiz, sonra elimizdeki cevapla reel sayilarin dunyasina donecegiz. Niye bu gecis? Cunku ustel fonksiyonlari entegre etmek kolaydir.

$e^{i\omega t} = cos\ \omega t + isin\ \omega t$

ODE'yi tekrar yazalim, girdiyi kompleks olarak yazalim

$y' + ky = ke^{i\omega t}$

Fakat bunu yapinca tum y'lerin kompleks hale geldigini gormek lazim, bunu belirgin hale getirmek icin y yerine $\tilde{y}$ kullanalim

$\tilde{y}' + k\tilde{y} = ke^{i\omega t}$

$\tilde{y}$ kompleks cozumdur ve $\tilde{y} = y_1 + iy_2$. O zaman her seyi cozup cozumu bulup $\tilde{y}$'yi elde edersek aradigimiz cozum $\tilde{y}$'nin reel kismidir. Bunun niye islediginin ispati bu dokumanin altinda.

Cozelim. Entegre edici faktor e^{kt}. Iki tarafi carpalim

$(\tilde{y}e^{kt})' = ke^{(k+i\omega)t}$

$$\tilde{y}e^{kt} = \frac{k}{k+iw}e^{(k+i\omega)t}$$

$$\tilde{y} = \frac{k}{k+iw} e^{i\omega t}$$

Bir olcekleme yaparak bolumu k'ye bolelim ve sabitleri gruplayalim

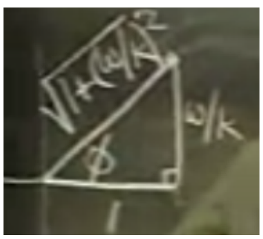
$$\tilde{y} = \frac{1}{1+i(\frac{w}{k})} e^{i\omega t}$$

Reel kismini bulalim. Nasil? Ustteki sonucun iki kismi var, birinci faktor kartezyen, ikinci kisim kutupsal. Elimizdeki secenekler de bunlar.

1. Kutupsal forma gec

2. Kartezyen forma gec

Biz kutupsal formu deneyelim. $\tilde{y}$'nin sadece bolenine bakalim. Oradaki form $cos(1) + isin(w/k)$'un grafiksel hali alttaki gibi



Aradaki aci ϕ, yani $arg(1 + i(w/k)) = \phi$.

Kompleks sayilarda bir kural soyledir, eger kompleks sayi 1'i boluyorsa, aci degeri negatiflenir, ayrica kesin (absolute), yani r degeri, $1/r$ haline gelir, o zaman

$$\frac{1}{1+i(w/k)} = Ae^{-i\phi}$$

Peki A nedir? A ustteki ucgenin hipotenusu boleninde yer alan $1/\sqrt{1+(w/k)^2}$.

$$Ae^{-i\phi} = \frac{1}{\sqrt{1+(w/k)^2}} e^{-i\phi}$$

Artik $\tilde{y}$'yi yazabiliriz. $Ae^{-i\theta}$ ve $e^{i\omega t}$'yi biraraya koyarsak

$$\tilde{y} = Ae^{i\omega t - i\phi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(w/k)^2}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

Reel sonuc icin kompleks sistemden reel'e donuyoruz. Reel kisim kartezyen formda *cos* altinda olan terimdir, *sin* kismini atariz, o zaman

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(w/k)^2}} cos(\omega t - \phi)$$

ϕ'nin formulu nedir? Ustteki resme gore $\phi = tan^{-1}(w/k)$.

$cos(\omega t - \phi)$ baglaminda bakarsak ϕ'ye faz gecikmesi de denebilir, cunku ϕ olmadan *cos* egrisinin nasil olacagini biliyoruz, ϕ eklenince bu *cos* egrisine bir gecikme etkisi yapacaktir.

Ekler

Teori: Alttaki denklem

$$y' + ky = kq_e(t)$$

icin girdi $q_e(t)$, $cos\ \omega t$ olarak veriliyor. Biz problemi komplekslestiriyoruz, ve $e^{i\omega t}$ ibaresinin reel tarafinin kullaniyoruz cunku bu ibare Euler formulunun bir parcasi. O zaman elimizde su var

$$y' + ky = ke^{i\omega t}$$

Fakat sonuc ta komplekslesecegi icin notasyonu y'den $\tilde{y}$'ye degistiriyoruz,

$$\tilde{y}' + k\tilde{y} = ke^{i\omega t}$$

kompleks cozum $\tilde{y} = y_1 + iy_2$. Iddiamiz $\tilde{y}$'yi bulursak, o zaman y_1 ilk, orijinal ODE'yi de cozer.

Ispat

$\tilde{y} = y_1 + iy_2$ ifadesini komplekslesmis ODE icine koyuyoruz.

$$(y_1 + iy_2)' + k(y_1 + iy_2) = ke^{i\omega t}$$

$$y_1' + iy_2' + ky_1 + kiy_2 = ke^{i\omega t}$$

Reel ve kompleks sayilari yanyana olacak sekilde grupluyoruz

$$(y_1 + ky_1) + i(y_2' + ky_2) = ke^{i\omega t}$$

Ve goruyoruz ki ustteki denklemin sol tarafi icindeki reel kisim $(y_1 + ky_1)$, orijinal ODE'nin (y icin y_1 kullanilirsa olacagi) sol tarafi ile tipatip ayni, ayrica ustteki denklemin sag tarafinin reel kismi $kcos\ \omega t$, orijinal ODE'nin sag tarafina esit. Yani bekledigimiz cozum sol tarafta ortaya cikinca, sag tarafta girdi olarak verdigimiz seyi aynen goruyoruz.