Cok Degiskenli Calculus - Ders 12

Zincirleme Kanunu hatirlayalim

$$\frac{dw}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_y \frac{dy}{dt} + w_z \frac{dz}{dt}$$

Bu formul, kismi turevler uzerinden, w'daki degisimin x, y, z'deki degisime ne kadar "hassas" ne kadar "bagli" oldugnu gosteriyor.

Simdi usttekini daha azaltilmis, ozetli (compact, concise) bir formda soyle yazacagim.

$$= \nabla w \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Gradyan vektoru tum kismi turevlerin bir araya konmus halidir.

$$\nabla w =< w_x, w_y, w_z >$$

Tabii ki bunu soyleyince ustteki gradyan'in x, y, z'ye bagli oldugunu da soyluyoruz, mesela w'nun belli bir nokta x, y, z'da gradyanini alabilirsiniz, o zaman her degisik x, y, z noktasinda farkli bir vektor elde edersiniz, ki bu vektorlerin tamamina ileride "vektor alani (vector field)" ismini verecegiz. Devam edelim,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} =< \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} >$$

Yani hiz vektoru (velocity vector) $d\vec{r}/dt$ yukaridaki gibi tanimlidir.

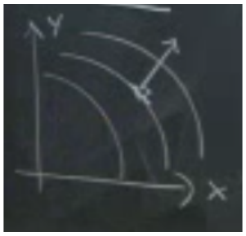
Bugunku amacimiz gradyan vektorunu anlamak, ve nerelerde kullanabilecegimizi incelemek. Gradyanlari yaklasiksal formullerde kullanmak mumkundur, vs. Ustte gordugumuz onun notasyonu.

Gradyanlarin belki de en "havali" ozellikleri sudur.

Teori

Iddia ediyorum ki ∇w vektoru, $w =$ bir sabit ile elde edilecek kesit yuzeyine (level surface) her zaman diktir.

Eger fonksiyonumun bir kontur grafigini cizersem



gosterilen noktada hesaplanacak gradyan vektoru o noktadaki kontura diktir.

Ornek 1

Lineer bir w kullanalim.

$w = a_1 x + a_2 y + a_3 z$

Gradyan nedir? Kismi turevleri alalim:

$\nabla w =< a_1, a_2, a_3 >$

Konturlari nasil elde ederim? $a_1 x + a_2 y + a_3 z = c$ ki c bir sabittir, bu formulu tatmin eden tum x, y, z degerleri bir duzlem olustururlar.

Bu duzlemin normalinin nasil alinacagini biliyoruz, katsayilara bakariz, $< a_1, a_2, a_3 >$. Bu vektorun gradyanla ayni ciktigina dikkat, ki normal vektor de duzleme diktir zaten. Ayni cikmalari mantikli.

Aslinda bu ornek gradyanin dikligini bir anlamda ispatliyor, cunku duzlem olmasa bile herhangi bir fonksiyonun birinci yaklasiksalligi bir duzlem yaratir, o duzlemin normali, gradyani esitligi bizi yine gradyanin dikligine goturur. Ama bu yeterince ikna edici olmadiysa baska bir ornege bakabiliriz.

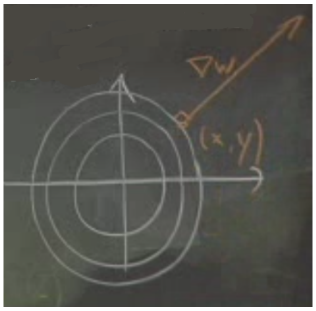
Ornek 2

$w = x^2 + y^2$

Bu fonksiyonun kesit seviyeleri, degisik yaricaplara sahip dairelerdir, $x^2 + y^2 = c$ formulundeki degisik c degerleri bu daireleri tanimlar.

Gradyan vektoru

$\nabla w =< 2x, 2y >$



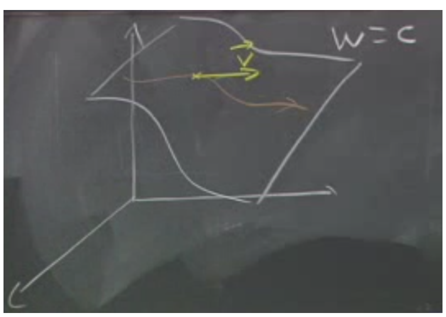
Secilen x, y noktasinda ∇w gosterilmis. Bu vektorun x ve y eksenlerinde boyunun, basladigi noktaya gore olan x, y degerlerinin yaklasik iki kati olduguna dikkat, ki bu da $< 2x, 2y >$ vektoru ile uyumlu.

Simdi gradyanin niye kesit egrilerine hep dik oldugunu ispatlayalim.

Ispat

Once kesit egrileri "uzerinde" hareket eden bir nokta hayal edecegiz. Bu nokta fonksiyonun sabit oldugu yerlerden geciyor demektir, cunku kontur uzerinde fonksiyon degeri hep aynidir.

Egri $\vec{r} = \vec{r}(t)$ hep $w = c$ uzerinde olacak. Resme bakalim, hayali bir kesit yuzeyi uzerinde bir egri bu (kirmizi renkli) ve bu egrinin uzerinde giden noktanin bir hizi olacak. Bu arada w mesela $w = x^2 + y^2$ belki, herhangi bir uc boyutlu fonksiyon. $\vec{r}$'nin w ustunde gitmesi demek, $\vec{r}$ ile w parametrize edilebilir demek, $\vec{r}(t) =< x(t), y(t), z(t) >$ ve onu kullanarak $w(\vec{r}(t)) = c$.



Iddia o ki,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

vektoru, kesit $w = c$'ye muhakkak teget olmali, cunku hiz egriye teget, ve egri kesit icinde. Bu arada w'nin aslinda $w(\vec{r}(t))$ oldugunu belirttik.

Bu sayede Zincirleme Kanununu kullanarak

$$\frac{dw(\vec{r})}{dt} = \nabla w \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dc}{dt}$$

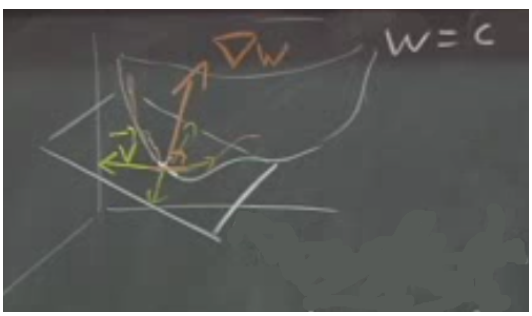
esitligini kurabiliriz. Noktasal carpim nereden geldi? Bu ifade w'nin her kismi turevinin alip, ona tekabul eden $\vec{r}(t)$ ogesinin turevi ile carpip sonuclarin toplanmasi demek. Sonuc Zincirleme Kanunu'ndaki goruntu olacaktir. Ayrica

$$= \nabla w \cdot \vec{v} = 0$$

Sifira esitligin sebebi $w = c$ olmasi ve sabitin turevi dc/dt sifir oldu.

Simdi sifir sonucundan ters yone gidelim: iki vektorun noktasal carpimi ne zaman sifir sonucu verir? Eger vektorler birbirine dik ise. Demek ki $\nabla w \perp \vec{v}$.

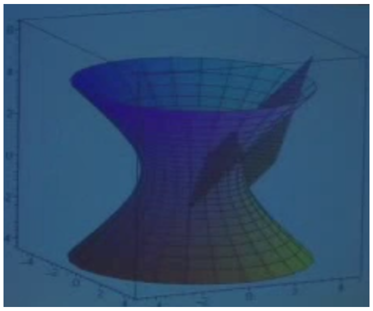
Hatta iddia ediyorum ki bu diklik $w = c$ uzerindeki her hareket (motion) icin gecerlidir. Yani $\vec{v}$, kesit yuzeyine teget olan herhangi bir vektor olabilir, ustteki diklik hep dogru olacaktir.



Bunun guzel bir uygulamasi su, artik istedigimiz her seyin teget duzlemini bulabiliriz.

Ornek

Yuzey $x^2 + y^2 - z^2 = 4$'un $(2, 1, 1)$ noktasindaki teget duzlemini bul.



Resimde teget duzlem pek teget gibi degil, diger grafigin icine girmis gibi duruyor, fakat problemin verdigi noktada duzlem teget.

Bu duzlemi nasil bulacagiz? Gradyani hesaplayarak.

Kesit seviyesi $w = 4$ ve Yuzey $w = x^2 + y^2 - z^2$.

$\nabla w =< 2x, 2y, -2z >$

Verilen nokta degerlerini bu gradyan vektorune verirsek, sonuc $< 4, 2, -2 >$. Bu sonuc yuzeye ya da teget duzleme normal (dik) olan vektoru verecek.

Bu normal vektoru kullanarak duzlemin formulunu bulabiliriz.

$4x + 2y - 2z =?$

Soru isareti ne olur? $(2, 1, 1)$ noktasini formule koyarsak, sonuc 8 cikar.

$4x + 2y - 2z = 8$

Alternatif Yontem

Aslinda tum bunlari gradyan olmadan da yapabilirdik, bir diferansiyel ile ise baslayabilirdik

$dw = 2xdx + 2ydy - 2zdz$

$(2, 1, 1)$ noktasinda

$= 4dx + 4dy - 2dz$

Yaklasiksal olarak

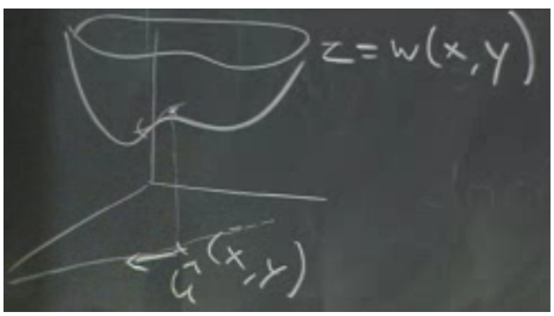
$\Delta w \approx 4\Delta x + 2\Delta y - 2\Delta z$

Ne zaman kesit yuzeyi, kontur uzerindeyiz? Eger w'de hic degisim yok ise, yani $\Delta w = 0$ ise. Bu arada ustteki yaklasiksalligin bir lineer yaklasiksallik oldugunu unutmayalim. $(2,1,1)$ noktasinda bu tegeti kullanmak istersek, $\Delta w = 0$ esitligi bize $4\Delta x + 2\Delta y - 2\Delta z$ teget duzlemini verecektir. Nasil? Δx degisimdir, teget duzlem uzerinde degisimi tanimlamak istiyorsak, $(2,1,1)$'den baslayarak bir yere gittigimizi dusunmemiz gerekir, ki mesela $x-2$ degisimini yapabiliriz, vs. Tam formul

$4(x-2) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0$

Yonsel Turevler (Directional Derivatives)

Elimdeki bir $w = w(x,y)$ formulunun kismi turevini aldigim zaman $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ ile mesela, bu turevler x-ekseni ya da y-ekseni yonunde degisim oldugu zaman w'nun nasil degistini olcerler. Peki baska yonlere gore, mesela bir birim vektor $\hat{u}$ yonunde turev alinamaz mi? Cevap evet. Yonsel turevler bu ise yariyorlar.



Bir duz cizgi uzerindeki gidisata (trajectory) bakalim. s adli bir parametreye bagli bir pozisyon vektoru $r(\vec{s})$ hayal edelim, ve $d\vec{r}/ds = \hat{u}$ olsun.

Niye ustte t yerine s kullandim? Bu alisilagelmis bir kullanis, bu cizgi boyunca birim hizda ilerliyorum, bu demektir ki parametrize ettigim sey katedilen yol. s'i daha once egri uzunlugu olarak gorduk, benzer anlam, sadece bu sefer egri yerine duz cizgi var, ama yine mesafe kavramini kullaniyoruz.

Devam edelim, o zaman dw/ds nedir? Bunu hesaplamak icin Zincirleme Kanunu'nun ozel bir durumunu kullanacagiz.

Eger $\hat{u} =< a, b >$ ise

$x(s) = x_0 + as$

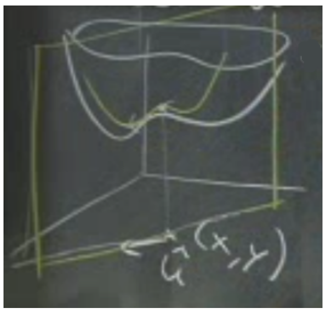
$y(s) = y_0 + bs$

Bu formulleri w'ye sokariz, sonra dw/ds'i hesaplariz.

Yonsel turev soyle gosterilir.

$$\frac{dw}{ds}_{|\hat{u}}$$

Daha once kismi turevleri incelerken onlari geometrik olarak, x ve y eksenine paralel duzlemlemlerin fonksiyonu kesmesi olarak gormustuk. Yonsel turevler ise herhangi bir yondeki (daha dogrusu $\hat{u}$ yonundeki) bir duzlemin fonksiyonu kesmesi olarak gorulebilir.



Tanim

$dw/ds_{|\hat{u}}$ = Bir grafigin (fonksiyonun) $\hat{u}$ vektorune paralel dikey bir duzlem ile alinan kesiti uzerindeki yansimasinin / bolumunun egimi.

Zincirleme Kanunun uygulanirsa

$$\frac{dw}{ds} = \nabla w \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \nabla w \cdot \hat{u}$$

Hatirlamamiz gereken formul o zaman

$$\frac{dw}{ds}_{|\hat{u}} = \nabla w \cdot \hat{u}$$

Esitligin sag tarafi "gradyanin $\hat{u}$ yonunde giden bileseni, kismi" olarak ta nitelenebilir.

Kavramlarin birbiriyle alakasini iyice gormek icin suna bakalim

Ornek

$$\frac{dw}{ds}_{|\hat{i}} = \nabla w \cdot \hat{i}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial x}$$

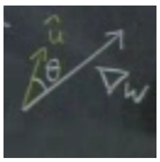
Geometrik olarak

$$\frac{dw}{ds}_{|\hat{u}} = \nabla w \cdot \hat{u}$$

$$= |\nabla w||\hat{u}|cos(\theta)$$

$\hat{u}$ birim vektor olduguna gore $|\hat{u}| = 1$, formulden atilir

$$= |\nabla w||cos(\theta)$$



Bu ifade "gradyanin $\hat{u}$ yonundeki bileseni" hesabinin bir diger versiyonudur aslinda.

Su soruyu soralim: hangi yondeki degisim en buyuktur? $|\nabla w||cos(\theta)$ ifadesinin en buyuk oldugu yer $cos(\theta) = 1$ oldugu zamandir, yani $\theta = 0$, ki bu durum $\hat{u} = dir(\nabla w)$, yani $\hat{u}$'nun gradyan ile ayni yonde oldugu zamandir.

O zaman su yorumu da yapabiliriz, gradyan belli bir noktada fonksiyonun en cok artacagi yonu gosterir.

Peki $|\nabla w|$, yani ∇w'nun buyuklugu neye esittir?

$$|\nabla w| = \frac{dw}{ds}_{|\hat{u}=dir(\nabla w)}$$

En hizli dusus (azalis) hangi yondedir? En fazla artisin tam tersi yonunde.

Yani min $dw/ds_{|\hat{u}}$ icin $cos(\theta) = -1$ olmalidir, yani $\theta = 180^o$, $\hat{u}$, $-\nabla w$ yonunde oldugu zaman.

Peki su ne zaman dogrudur?

$$\frac{dw}{ds}_{|\hat{u}} = 0$$

Yani fonksiyon hangi yonde degismez?

Bunun icin $cos(\theta) = 0$ olmalidir, ki bu $\theta = 90^0$ oldugu zamandir. Yani $\hat{u} \perp \nabla w$ ise. Bunu anlamanin bir diger yolu, hic degisimin olmadigi yonun kesit yuzeyine teget oldugudur, bu yuzeyde w hic degismedigine gore degisim olmaz, degisim yoksa, biz de teget hareket ediyoruz demektir.