

İki Boyutlu $f(x,y)$ Fonksiyonunun Taylor Açılımı

Bir $f(x,y)$ fonksiyonunun Taylor açılımını yapmak için, daha önceden gördüğümüz tek boyutlu fonksiyon açılımından faydalanabiliriz.

Önce iki boyutlu fonksiyonu tek boyutlu olarak göstermek gerekir. Tek boyutta isleyen bir fonksiyon F düşünelim ve bu F , arka planda iki boyutlu $f(x,y)$ 'i kullanıyor olsun

Eğer

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

fonksiyonun açılımını elde etmek istiyorsak, onu

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$$

üzerinden $t = 1$ olduğu durumda hayal edebiliriz. x, y parametrize olduğu için $f(x(t), y(t))$, yani

$$x(t) = x_0 + t\Delta x$$

$$y(t) = y_0 + t\Delta y$$

$F(t)$ bağlamında $x_0, y_0, \Delta x, \Delta y$ sabit olarak kabul edilecekler. Şimdi bildiğimiz tek boyutlu Taylor açılımını bu fonksiyon üzerinde, bir t_0 noktası yakınında yaparsak,

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}F''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots$$

Eğer $t = 1, t_0 = 0$ dersek

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \dots$$

olurdu. Bu iki değeri, yani $t = 1, t_0 = 0$ 'i kullanmamızın sebepleri $t = 1$ ile mesela $x_0 + t\Delta x$ 'in $x_0 + \Delta x$ olması, diğer yandan $t = 0$ ile üstteki formülde t 'nin yok olması, basit bir tek boyutlu açılım elde etmek.

Şimdi bize gereken F', F'' ifadelerini x, y bağlamında elde edelim, ki bu diferansiyeller F 'in t 'ye göre birinci ve ikinci diferansiyelleri. Ama F 'in içinde x, y olduğu için açılımın Zincirleme Kanunu ile yapılması lazım.

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt}$$

Ayrıca

$$\frac{d}{dt}x(t) = \Delta x$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = \Delta y$$

olduguna gore, tam diferansiyel daha da basitlesir

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y$$

Simdi bu ifadenin bir tam diferansiyelini alacagiz. Ama ondan once sunu anlayalim ki ustteki ifade icinde mesela birinci terim de aslinda bir fonksiyon, ve asil hali

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F(x(t), y(t))}{\partial x} \Delta x + \dots$$

sekinde. O zaman, bu terim uzerinde tam diferansiyel islemini bir daha uyguladigimizda, Zincirleme Kanunu yine isleyecek, mesela ustte $dx(t)/dt$ 'nin bir daha disari cikmasi gerekecek. O zaman

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dt^2} &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dt} + \right) \Delta x + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{dy}{dt} + \right) \Delta y \\ &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Delta x + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Delta y \right) \Delta x + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Delta y \right) \Delta y \\ &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \Delta y \Delta x \right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) \end{aligned}$$

Calculus'tan biliyoruz ki

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

Daha kısa notasyonla

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Yani kısmi turevin alınma sirasi farketmiyor. O zaman, ve her sey daha kısa notasyonla bir daha yazarsak

$$= (f_{xx} \Delta x^2 + f_{xy} \Delta y \Delta x) + (f_{xy} \Delta x \Delta y + f_{yy} \Delta y^2)$$

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = (f_{xx} \Delta x^2 + 2f_{xy} \Delta y \Delta x + f_{yy} \Delta y^2)$$

Artik elimizde F ve F' var, bunlari

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(0) + \dots$$

icine yerlestirebiliriz. En son su kaldi, $F(0)$ nedir? F' 'in $t = 0$ oldugu anda degeridir,

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$$

$$F(0) = f(x_0 + 0 \cdot \Delta x, y_0 + 0 \cdot \Delta y)$$

$$= f(x_0, y_0)$$

Benzer sekilde, tum turevler de $t = 0$ noktasinda kullanılacaktır, o zaman onlar da

$$F'(0) = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y$$

$$F''(0) = f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta y\Delta x + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2$$

sekinde olurlar. Tamam. Simdi ana formulde yerlerine koyelim,

$$F(1) = f(x_0, y_0) +$$

$$f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y +$$

$$\frac{1}{2}[f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta y\Delta x + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2] + \dots$$

Ve

$$F(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

olduguna gore, Taylor 2D acilimimiz tamamlanmis demektir.

Kaynaklar

<http://www.math.ubc.ca/~feldman/m200/taylor2dSlides.pdf>

<http://math.uc.edu/~halpern/Calc.4/Handouts/Taylorseries.pdf>