PDE - Ders 1

Konumuz Kismi Turevsel Denklemler (partial differential equtions -PDE-). Bu dersin on gerekliliklerinden en onemlisi normal diferansiyel denklemlerdir (ordinary differential equtions -ODE-), cunku pek cok PDE'yi cozmenin teknigi onlari bir ODE sistemine indirgemekten geciyor. Yani PDE cozmek icin ODE cozme tekniklerini de bilmek gerekiyor. Bir diger gerekli bilgi Lineer Cebir dersi.

Bu dersin ana amaci, bir muhendislik dersi olarak, denklem cozmek, ve pek cok denklemin cikis noktasi fiziksel problemler. Mesela sicaklik yayilmasi (heat diffusion), dalga hareketi (wave motion), titresen hucre zari (vibrating membrane) gibi. Fakat PDE kavrami finansta bile ortaya cikabilen bir kavram, mesela Black-Sholes denklemlerinde oldugu gibi.

Yani dersimiz cok teori odakli olmayacak, bazi ispatlardan bahsedecegiz, ama onun haricinde teori uzerinde fazla durmayacagiz.

PDE nedir? Ilk once ODE tanimindan baslayalim.

$y = y(x)$

$\dfrac{dy}{dx} = y$

Baslangic sartlari

$y(0) = y_0$

Cozum

$y = y_0 e^x$

Bu bir ODE cunku sadece bir tane bagimsiz degisken var (x), ve bir tane bagimli degisken var (y).

PDE ise icinde kismi turevleri, ve bir veya *birden fazla* bagimsiz degiskeni barindiran bir denklemdir.

Eger gunes etrafindaki yorungeleri temsil etmek istiyorsaniz gezegenleri boyutsuz parcaciklar gibi kabul ederek ODE'ler ile temsil etmek yeterli olabilir, ama diger problemlerde daha fazla bagimsiz degisken gerekecegi icin ODE yetmez, mesela zaman, cismin 3D uzaydaki boyutlari gibi.

Mesela bir PDE

$u = u(x,y)$

Cogunlukla problem taniminin ilk basinda fonksiyonel iliskiyi hemen gostermek iyi olur, mesela ustte bagimsiz degiskenler x, y, ve u bu iki degiskene bagimli. Devam edelim PDE soyle olsun

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + cos(y)\frac{\partial u}{\partial y} + 3 = 0$$

Bir PDE problemine cogunlukla ek olarak sinir kosullari (boundary condition -BC-) ve baslangic kosullari (initial conditions -IC-) eklemek de gerekir.

Kismi Turev nedir?

$u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{u(x_1, .., x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, ..., x_n) - u(x_1, .., x_i, x_{i+1}, ..., x_n)}{\Delta x_i}$$

Yani bir fonksiyonun kismi turevini almak istedigimiz degisken haricinde tum diger degiskenlerinin sabit tutuldugu bir durum.

Ornek

$u = x_1^2 + x_1 sin(x_2)$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2x_1 + sin(x_2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 cos(x_2)$$

Notasyon

Cogunlukla kismi turevler 3 farkli sekilde gosteriliyor.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x \equiv \partial_x u$$

Ustte soldaki tanimi gorduk, bazen ortadaki de tercih edilebiliyor, ya da bazen en sagdaki.

PDE Derecesi

Bir PDE'nin derecesi, o denklemdeki kismi turevlerin en yuksek dereceli olanin derecesi neyse o'dur.

Mesela

$u_{xxx} + u_y = 5$

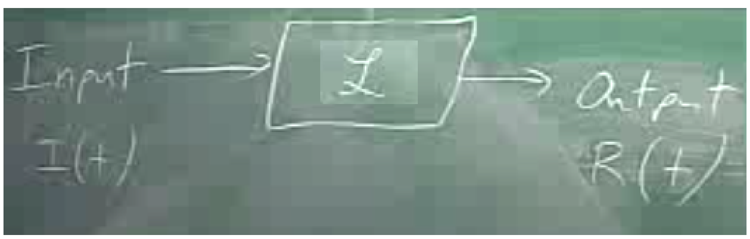
derecesi 3. Ayni zamanda bu lineer ve homojen olmayan (inhomogeneous) bir PDE. Bu son iki kavrami birazdan tanimlayacagim.

Ornek

$(u_{xx})^2 + u_x u_y = u$

Bu 2. derece. Bu bazi insanlarin kafasini karistiriyor, cunku u_{xx}'in karesi var. Bu ayni zamanda homojen, ve gayri lineer. Bu dersteki cogu PDE lineer olacak.

Lineer ve gayri lineerlikten bahsetmisken, sunu ekleyelim.



Simdi diyelim ki bir girdi (input) fonksiyonu $I(t)$ bir isleme giriyor (L operatoru) ve cikti (output) olarak $R(t)$ cikiyor. Yani sistem

$R = L\ I$

Bir lineer sistemde eger girdiyi iki ile carparsaniz, cikti da iki katina cikar. O zaman kurallar

1. $L(\alpha I) = \alpha\ L(I)$, ki α bir sabit.
2. $L(I_1 + I_2) = L(I_1) + L(I_2)$, ki buna ust uste eklenebilme (superposition) prensibi deniyor. Bu prensibi bu dersteki cogu PDE'yi cozmek icin kullanacagiz. Bir lineer sistem varsa cogu zaman arka planda bir yerlerde ust uste eklenebilme prensibi geziniyordur.

Diyelim ki PDE'nizi soyle yazdiniz

$Lu = f(\vec{x})$

Burada u bagimli degisken, $\vec{x}$ bir vektor, $\vec{x} \in \Re^n$, ve bu vektorun icinde birden fazla degisken var, bu degiskenlerin hepsi bagimsiz.

$$\vec{x} = \left(\begin{array}{r} x_1, \\ .. \\ x_n \end{array} \right)$$

Bu denkleme benzer bir diger denklem lineer cebirdeki $A\vec{x} = \vec{b}$ denklemidir. PDE sisteminde de cevabini aradigimiz, lineer cebir sisteminde "A ile carpilip b sonucunu verecek $\vec{x}$ hangisidir?" sorusuna benzer bir sekilde "L operatoru uygulanip $f(\vec{x})$ sonucunu verecek u hangisidir?" sorusudur.

Bu analojiden devam etmek gerekirse, belli bir noktada u'nun icinde oldugu "fonksiyon uzayi" hakkinda dusunmemiz gerekebilir, $\vec{x}$'in icinde oldugu $\Re^n$ uzayi gibi. Lineer cebir durumunda operatorun ozelliklerine bakilir, mesela " b'nin icinde oldugu ve A operatoru uygulanip hic sonuc alinamayacak uzayin belli kisimlari var midir?" gibi sorularla ugrasilabilir, bunlar A'nin "ulasamadigi yerlerdir" vs. PDE'deki L operatoru icin de benzer sorular sorulabilir.

Yani lineer cebirle pek cok kavram PDE dunyasina benziyor, orada vektor uzayi var, burada fonksiyon uzayi var. Yani bir analoji olarak bu benzerligi aklimizda tutmamiz faydali.

Bir operator su sekilde de olabilir

$$L = L\bigg(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, .., u, ..\bigg)$$

Yani operator kismi turevlere ve hatta u'nun kendisine de bagimli olabilir.

Eger elimizde gayri lineer bir PDE var ise, basimiz dertte demektir. Boyle bir sistemi cozmek icin cogunlukla sayisal cozumlere basvurmak gerekir. Eger lineer ise cozumde bayagi ilerlemek mumkundur.

Lineerlik

Bir operator ve onun tanimladigi bir ust uste eklenebilme durumu dusunelim

$$L = L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 L u_1 + \alpha_2 L u_2$$

ki α_1, α_2 birer tekil sayidir (scalar), ya reel, ya da kompleks.

Ornek

Birazdan bakacagimiz denklem dalga denklemi. Orada

$u_{tt} - c^2 u_x = 0$

Bu denklemi

$Lu = 0$

seklinde yazabiliriz ki L soyle tanimli olacaktir

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2 = 0}$$

c bir sabittir.

Simdi diyelim ki su denklemi cozmemiz lazim

$Lu = f$

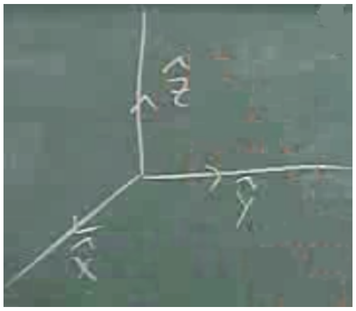
ki

$L : V \to V$

Yani, L bir vektor uzayini bir digerine eslemekte (map), ve yine diyelim ki bu uzaylar birer Hilbert Uzayi (bunun anlamina simdi bilmemiz gerekmiyor, ileride bu konuya donecegiz, bu kelimeyi soyle bir ortaya atmak istedim).

Yani sordugumuz Hilbert Uzayi V'de bir f'e esleyecek bir u fonksiyonu olup olmadigi. Bu arada tipik bir Hilbert Uzayi mesela kare alip bir sinir bolgesinde (boundary domain) entegre edince elde edilen sonlu (finite) bir sonuclarin olusturdugu uzay. Yani "derli toplu" fonksiyonlar bir anlamda, absurt sonuclar vermeyen turden, sonsuzluga dogru patlayip giden turden olanlari degil.

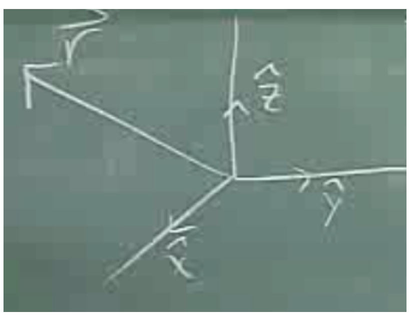
Faraziyeye devam edelim, diyelim ki V icinde bir baz (basis) var. Baz nedir? Lineer cebirden hatirlayalim, mesela uc boyutlu Oklidsel (Euclidian) uzayi $\Re^3$.



$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Bu uzaydaki herhangi bir vektor $\vec{r}$ ustteki uc baz vektoru kullanilarak parcalarina ayirilabilir, ya da, onlarin bir lineer kombinasyonu olarak gosterilebilir. Mesela

$$\vec{r} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

Bu uc vektorun bu uzay icin bir "baz olusturdugu" soylenebilir, cunku bu uzaydaki her vektor bu uc vektorun bir kombinasyonu olarak temsil edilebilir. Dikkat edelim, iki baz vektor yeterli olmazdi, dort taneye gerek yok. Tami tamina uc tane vektor bu uzayin bazini olusturuyor.

Bu sonlu (finite) miktarda bir uzay, herhangi bir vektoru tanimlamak icin sonlu miktarda baz vektoru yeterli. Sonsuz boyutlu bir uzay da olabilirdi, o zaman herhangi bir fonksiyonu tanimlamak icin sonsuz tane baz vektoru gerekirdi. Mesela Fourier Serilerini dusunelim

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \phi_i(x)$$

ki baz fonksiyonlar $\Big\{ \phi_i(x) \Big\}_{i=1}^{\infty}$.

Bu fonksiyonlarin her biri trigonometrik fonksiyonlar olabilir (cos, sin) gibi, o zaman seri Fourier Serisi olur. Her halukarda, yukaridaki tanimla diyoruz ki belli (unique) α degerleri var ki, o degerleri zaten onceden bilinen baz fonksiyonlari ile carpip toplayarak u'yu olusturabiliyoruz.