MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 9

Bu dersin konusu birden fazla degisken iceren fonksiyonlarin minimizasyonu ile ugrasirken yardimci olacak kismi turev (partial derivative) kavrami. Cok degiskenli bir fonksiyon $f(x,y)$'nin birden fazla turevi vardir. Mesela bunlardan bir tanesi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

Bu turev x'in degistirildigi ama y'nin sabit tutuldugu bir durumu gosterir.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

ise y'in degistirildigi ama x'nin sabit tutuldugu bir durumu gosterir.

Simdi her ikisinin birden degistirildigi durumda ne olacagini gosteren yaklasiksal (approximate) formulu gorelim. Degisim matematiksel olarak soyle

$$x \sim x + \Delta x$$

$$y \sim x + \Delta x$$

O zaman z icin

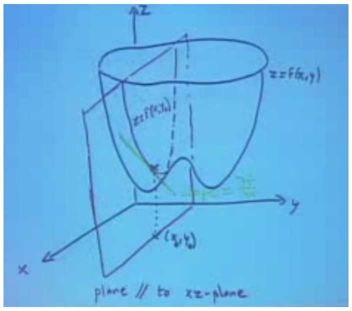
$$z = f(x,y)$$

yaklasiksal degisim soyle olur

$$\Delta z \approx f_x \Delta x + f_y \Delta f_y \tag{1}$$

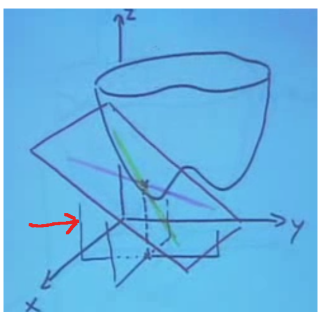
Tekrar vurgulamak gerekirse bu yaklasiksal bir formul, daha "dogru" bir temsil icin 2., 3. turevleri iceren daha yuksek dereden (higher order terms) terimlerin de olmasi gerekir, fakat bu terimler 1. derece lineer bir yaklasiksallik icin kullanilmaz.

Bu formulu nasil dogrulariz? Bunu yapmanin yollarindan biri teget duzlem yaklasiksallamasi (tangent plane approximation). Mesela $z = f(x,y)$ fonksiyonuna olan teget bir duzlemi dusunelim.



Hatirlarsak $\frac{\partial f}{\partial x}$ kismi turevi x'in degistigi ama y'nin sabit tutuldugu bir durumu tarif ediyordu. Yukaridaki grafige gore bu bir anlamda iki cukurlu kap gibi duran z fonksiyonun bir kesitine bakmak gibi (unutmayalim, fonksiyon sadece kabin disinda tanimli, ici bos). Bu kesit uzerine f'in bir yansimasi olusuyor, o yansima ustteki grafikte bir parabol seklinde. Bu parabolda x degistikce o noktanin parabol uzerindeki cizgizel tegeti de degisiyor (grafikteki yesil cizgi) ki bu cizgisel egim $\frac{\partial f}{\partial x}$'e esit.

Eger ayni seyi x'in sabit y'nin degistigi durum icin yapsaydim, benzer bir kesit elde edecektim (resimde kirmizi okun gosterdigi duzlem).



Ve, bu iki kesit uzerinden elde edilen ikinci teget cizgi birinci ile beraber kullanilinca bir duzlemi tanimlamak icin kullanilabilir (iki cizgi paralel bir duzlem tanimlamak icin yeterlidir), ki teget duzlem yaklasiksallamasi icin kullanilacak duzlem budur. Ustteki resimde bu yeni duzlem capraz yatik olarak gozuken duzlem.

Formulsel olarak bunu nasil yapacagimizi gosterelim.

f_x ve f_y iki teget cizgiyi tanimlamak icin kullaniliyorsa, bu formulleri bir araya koyarak duzlemi temsil edebilirim. Eger

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a$$

ise bu demektir ki birinci teget cizgi (yesil cizgi) L_1 soyledir:

$$L_1 = \begin{cases} z = z_0 + a(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

Bu cizgi icin y'yi sabit tutuyorum, z'deki degisimi z_0 ustune egim a'nin katlari kadar (x'in degisimi oraninda carparak) ekleyerek hesapliyorum.

Benzer sekilde

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$$

$$L_2 = \begin{cases} z = z_0 + b(y - y_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

Hem L_1 hem de L_2 $z = f(x, y)$'ye tegettir. Bu iki cizgi beraber bir duzlem olusturur. Bu formul

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0) \tag{2}$$

formuludur.

Formul 1, ustteki formulun yaklasiksal halidir. Eger teget duzlem uzerinde olsaydik, $\approx$ isareti $=$ isaretine donusecekti. Bu yaklasiksallik ufak Δx ve ufak Δy icin gecerli. Yani yaklasiksal formul, f'nin grafigi teget duzleme yakin diyor.

Maksimum Minimum Problemleri

Kismi turevlerin kullanim alanlarindan biri optimizasyon problemleridir. Mesela cok degiskenli bir fonksiyonun maksimumunu bulmak gibi. Eger fonksiyon tek degiskenli olsaydi, hemen turevini alip sonucu sifira esitleyebilirdik, ve buna gore bir cozum arardik. Cok degiskenli fonksiyonlarda kismi turevler kullanmak lazim.

Bu derste iki degiskenli duruma bakacagiz fakat ayni prensipler, 10, 15, milyon tane degisken icin ayni.

Lokal bir minimum icin hem $f_x = 0$ hem $f_y = 0$ olmalidir. Bu niye dogudur?

Yine formul 1'e bakarsak, hem $f_x = 0$ hem $f_y = 0$ oldugu zaman Δz sifir olacaktir, yani birinci derecede dusunursek $f(x, y)$'de degisim yok demektir.

Teget duzlemlerin dilinden konusursak, minimum aninda teget duzlem tamamen yatay olacaktir.

Formul 2 baglaminda dusunursek, bu durum $a = 0$ ve $b = 0$ oldugu ana tekabul ediyor ve o anda duzlemi tanimlayan $z = z_0$ formuludur.

Tanim

Eger $f_x(x_0, y_0) = 0$ ve $f_y(x_0, y_0) = 0$ ise o zaman x_0, y_o f'in kritik noktasidir. Not: Birden fazla degisken icin tabii ki tum kismi turevlerin o noktada sifir olmasi gerekir.

Ornek

$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 2y$

Bakalim bunu minimize ya da maksimize edebilecek miyiz?

$f_x = 2x - 2y + 2 = 0$

$f_y = -2x + 6y - 2 = 0$

Ustteki iki denklemi ayni anda cozmeliyiz.

Bu tur durumlarda iki denklemi birbiriyle toplayip basitlestirmeye calismak iyi bir yontemdir. Fakat unutmayin, elimizde her zaman iki tane denklem olmali, iki denklemi ortadan kaldirip birdenbire tek denklem ile yola devam edemeyiz.

Toplami yaparsak

$4y = 0$

elde ederiz. Bunu alip birinci denkleme sokalim, sonuc

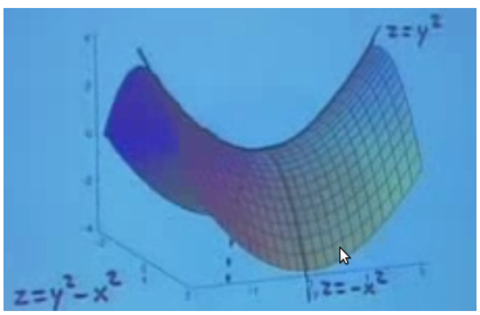
$2x + 2 = 0$

$x = -1$

Demek ki kritik nokta $(x, y) = (-1, 0)$.

Peki bu kritik noktanin minimum mu maksimum mu oldugunu nereden bilecegiz? Eger tek degiskenli bir fonksiyona bakiyor olsaydik, ikinci tureve bakabilirdik. Benzer bir seyi burada da yapabilirdik, ama sadece birinci turevden bile elimizde iki tane var, ikinci turevlerden cok daha fazlasi olacak. O duruma bakacagiz, simdilik daha az otomatik olarak isi nasil anlayacagimizla ilgilenelim.

Elimizde birden fazla minimum olabilir. Turev(lerin) sifir oldugu noktada bir duzluk vardir, bu bir lokal minimumdur. Yani o noktaya yakin oldugumuz surece (ki lokalligin tanimi bu) bu minimum gecerlidir. Baska bir noktada, turev(lerin) yine sifir oldugu ama daha asagi noktada bir minimum daha olabilirdi. Maksimumlar icin ayni durum gecerli.



Yanliz bir diger secenek daha var. Bu secenek kritik noktanin ne maksimum, ne minimum oldugu durumdur. Bu durumda kritik noktadan hangi "yone dogru" bakiyorsak, degisik bir cevap elde ederiz. Bu at egeri gibi gozuken grafigin orta noktasina, 0,0,0 noktasina bakalim, burada teget duzlem tam yatay. Bu noktaya eger noktasi (saddle point) deniyor. Eger $z = y^2$ yonune dogru bakarsak min durumdayiz, eger $z = -x^2$ yonune dogru bakarsak maks durumdayiz.

2. turevlerden bahsetmisik, ve bu derste kritik noktanin ne oldugunu daha az otomatik bulacagimizi soyledik (2. turevler bir dahaki derste).

Bu yontemde kareler kullanacagiz. Niye kareler? Cunku karesel ifadeler en az sifir olabilirler – bir deger ne olursa olsun, eksi bile olsa karesi alinirsa arti olur, ve bu tur ifadeler sadece sifirda "en az" olurlar.

O zaman $f(x,y)$'i karelerin toplami olarak tekrar temsil etmeye ugrasalim. $f(x,y)$'de zaten kareler var ama tum formulu bir seylerin karesi olarak gosterebilirsek, hedefimize erisebiliriz. Tek problem xy terimi, ama $x^2 - 2xy$.. diye giden bir baska formul biliyoruz, Kareyi Tamamlama ile onu kullanalim.

$f(x,y) = (x-y)^2 + 2y^2 + 2x - 2y$

Basitlesti ama biraz daha basitlesebilir. Acaba $(x-y)^2$ icindeki $(x-y)$ ile disaridaki $2x-2y$ arasindaki bir baglanti kurabilir miyiz? Iceriye bir $+1$ eklersek bu olabilir, o zaman disaridaki $2x-2y$ iptal olur. Icerideki 1'i dengelemek icin ise disari bir -1 ekleriz.

$= ((x-y)+1)^2 + 2y^2 - 1$

Iste, tum formul artik karelerden olusuyor. Bu formul eger

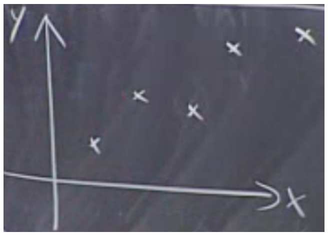
$= \underbrace{((x-y)+1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2y^2}_{\geq 0} - 1$

ise ancak ≥ -1 olabilir. Ve kritik nokta (-1,0)'da f'in degeri hakikaten -1'dir. Ustteki iki terimin niye ≥ 0 oldugundan bahsettik. Demek ki bu nokta bir minimum. Yani biraz cebirsel takla, ve ufak bir numarayla istedigimiz sonuca erismis olduk.

Simdi min/maks probleminin ilginc bir uygulamasini gorelim. Bu uygulamayi min/maks kategorisinde gormeyebilirsiniz, ama aslinda problem min/-maks ile cok guzel bir sekilde cozuluyor.

Deneysel bilimlerde en az karelesel interpolasyon (least squares interpolation) adli bir teknik kullanilir. Mesela bir deney yapariz, ve deneyden gelen verileri aliriz. Mesela kurbagalari inceliyoruz, ve kurbaga bacak uzunlugunu kurbaga goz buyuklugu arasinda bir baglanti ariyoruz. Ya da baska bir seyi olcuyoruz, genel olarak bir x degiskeni icin onun etki ettigi, alakali oldugu bir y degiskenini olcuyoruz.

Olculen iki degiskeni grafikleyince, su ortaya cikiyor diyelim.



Arada bir korelasyon oldugunu goruyoruz. Bu konu hakkinda bilimsel bir makale yaziyor olsaydik, bu grafikte soyle bir cizgi cizerdik,

Fakat veri noktalarinin tam ortasindan gecen bu cizgiyi nasil cizecegiz? Yani cozmek istedigimiz problem verilen $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_n, y_n)$ seklindeki deney verileri icin "en iyi uyan (best fit)" cizgi $y = ax+b$, en iyi yaklasiksallik nedir?

Bu problemde onemli bir puf noktasina isaret edelim: $y = ax + b$ denkleminde bilinmeyenler nedir? Genellikle ogrenciler x ve y degiskenine bakiyorlar. Fakat bu dogru degil. Bir optimal cizgi ortaya cikarmak istiyorsak ilgilendigimiz x ve y degil, esas ilgilendiklerimiz a ve b katsayilari. Cizginin hangi sekilde oldugunu onlar kontrol ediyorlar, yani dogru uyum icin cizginin nereden gectiginin hesaplanmasi problemindeki bilinmeyenler onlar. Yani uyum icin en iyi a ve b'yi bulmamiz gerekiyor.

Bu noktada "en iyi a ve b" ifadesinin ne olduguna karar vermemiz lazim. En iyi, a ve b'nin bir fonksiyonunun minimize edilmesi olabilir, ki bu fonksiyon deneysel veri ile bir teorik cizgi arasindaki uyum hatalarinin toplamini temsil edebilir. Yani hata, o cizginin deney noktalarindan ne kadar uzakta oldugunun toplami ile temsil edilebilir.

"Uzakligi" hesaplamanin da degisik yollari olabilir. Mesela her noktanin bir cizgiye olan duz uzakligi olculebilir. Ya da deneysel noktadan dikey olarak yukari / asagi cikip cizgiye gelinceye kadar olan uzaklik. Ya da uzakligi en fazla olan tek noktanin mesafesi azaltilmaya ugrasilabilir (ama bu son yontem pek iyi bir secim olmayabilir, cunku belki deney sirasinda uykuya dalmissinizdir, ve cok yanlis bir nokta olcmussunuzdur, ve o nokta tum uyum hesabini bozukluga ugratir).

Bu tur seceneklerden bir tanesi en iyisidir, ve evrensel olarak kullanilan yaklasim da o'dur. En Az Kareler demistik, bu yontemde hata noktalarin cizgiye olan uzakliklarin karesinin toplamidir. Bu yontem iyi sonuclar veriyor ve hesap icin oldukca temiz bir formul ortaya cikartiyor. Demek ki "en iyi" tanimi hata noktalarin cizgiden olan sapmasinin karesinin toplaminin minimize edilmesi demek. Sapma nedir? Tahmin edilen ile gercek veri noktasinin farkidir.

$y_i - (ax_i + b)$

O zaman problem

Minimize Et $D = \sum_{i=1}^{n} \Big[y_i - (ax_i + b) \Big]^2$

Tekrar vurgulayalim, bu fonksiyonda bilinmeyenler a ve b. x_i ve y_i deneyden gelen veriler.

Minimize etmek icin simdiye kadar ogrendiklerimizi kullanabiliriz. Kritik noktayi bulalim.

Yani istedigimiz

$$\frac{\partial D}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = 0$$

esitliklerini dogru oldugu an. Kritik nokta burada. Kismi turevleri alalim.

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i(ax_i + b))(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i(ax_i + b))(-1) = 0$$

Cozmemiz gereken denklemler bunlar.

Eger dikkat edersek bu denklemler a ve b baglaminda lineer. Denklemlerde biraz kalabaliklik var, onlari acip tekrar duzenleyerek bu lineerligi gormeye ugrasalim.

Ilk once '2' terimini atalim, ona gerek yok. Iki denklem ayri ayri soyle olur:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 a + x_i b - x_i y_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 a + b - y_i) = 0$$

a ve b leri yanyana getirelim. Yine ayri ayri

$$\bigg(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\bigg)a + \bigg(\sum_{i=1}^{n} x_i\bigg)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\bigg(\sum_{i=1}^{n} x_i\bigg)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

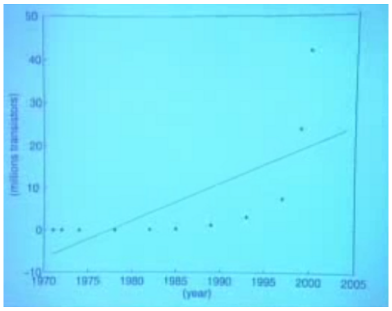
Parantezler icindeki x_i'li ifadeler korkutucu gorunuyor olabilir, fakat bunlar deney verisinden gelen sayilarin toplamindan ibaret, onlar elimizde sayisal olarak mevcut zaten. Deney verisini alip, hepsini toplayinca bu sayiyi elde edecegiz.

Sonuc olarak elimize gecen 2 x 2 boyutlarinda bir lineer sistem. Yani x_i ve y_i iceren ifadeleri hesapladigimiz anda bu sistemi elde ederiz, ve 2 x 2 bir lineer sistemi cozmeyi zaten biliyoruz. Ve kritik noktayi boylece elde ederiz. Bir sonraki derste gorecegimiz 2. kismi turevleri kullanacagiz yontemle de bu noktanin min/maks oldugunu anlariz. Bu testi uygulasak ustteki yontemin hakikaten bir min urettigini gorebilirdik.

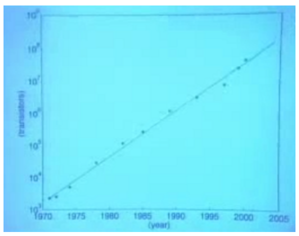
En Az Kareler interpolasyonu cok daha genel kullanimlarda da ise yarar.

Ornek

Bilgisayar dunyasinda Moore Kanunu denen bir kural vardir, bu kural bilgisayar ciplerinin nasil surekli daha hizli, daha iyiye dogru gittigini anlatir. Unlu cip ureticisi Intel baskani Andy Grove tarafindan ortaya atilmistir, bir hipotezdir, fakat sasirtici bir sekilde dogru cikmistir. Kuralin olctugu bir mikropcipin icine koyulabilecek transistor sayisidir. Bu olcumun bir ornegi alttadir.



Bu veriye lineer olarak uyum yapamazdik. Fakat logaritmik skalayi kullanirsak, yani transistor sayisi yerine onun logaritmasini alip grafiklersek,



veriler daha cizgisel olurlar. Bu demektir ki zaman ve transistor sayisi arasindaki iliski ustel (exponential) bir iliskidir. Zaten kuralin soyledigi de bu, kural her 18 ayda bir cip icindeki transistor sayisinin ikiye katlandigini soyler. Bir sonraki buyuklugun o buyuklugun o anki halinin belli bir kati olmasi (aynen nufus artisinda oldugu gibi) ustel bir iliskiye isaret eder.

Peki en iyi ustel uyumu nasil buluruz? Boyle bir uyumun formulsel hali sudur. Duz cizgi formulu yerine bir ustel ifade icerir.

$y = ce^{ax}$

Fakat bu formulu direk hata hesabinda kullanirsak, ele gecen formuller cok karmasik hale geliyor. Ama ustteki numarayi hatirlayalim, log skalasinda bakinca her sey lineer cikiyor. O zaman uyumu su sekilde yapabiliriz, ustteki formulun log'unu alalim:

$ln(y) = ln(c) + ax$

ki bu formul lineerdir. Bunun uzerinde En Az Kareler yontemini kullanabiliriz.

Ustel iliski yerine karesel bir iliski de olabilirdi, mesela

$$y = ax^2 + bx + c$$

o zaman en iyi parabolu uydurmaya ugrasiyor olabilirdik, bu uyum icin a, b ve c'yi bulmamiz gerekirdi. Yani sunu minimize edecektik:

$$D(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2$$

Burada kismi turevler 3 tane ayri denklem uretir, ve iliski yine lineer cikar, 3 x 3 boyutunde bir sistem elde ederiz.

Yani soyledigimiz gibi, bu problemler ilk basta minimizasyon problemi gibi gozukmeyebiliyordu, ama oyle olduklarini simdi gormus olduk.