Naive Bayes

Reel sayilar arasinda baglanti kurmak icin istatistikte regresyon kullanilir. Eger reel degerleri, (mesela) iki kategorik grup arasinda secmek icin kullanmak istenirse, bunun icin lojistik regresyon gibi teknikler de vardir.

Fakat kategoriler / gruplar ile baska kategorik gruplar arasinda baglantilar kurulmak istenirse, standart istatistik yontemleri faydali olamiyor. Bu gibi ihtiyaclar icin makine ogrenimi (machine learning) dunyasindan Naive Bayes gibi tekniklere bakmamiz lazim.

Not: Daha ilerlemeden belirtelim, bu teknigin ismi Naive Bayes ama bu tanim dogru degil, cunku bu teknik Olasilik Teorisi'nden bilinen Bayes Teorisini kullanmiyor.

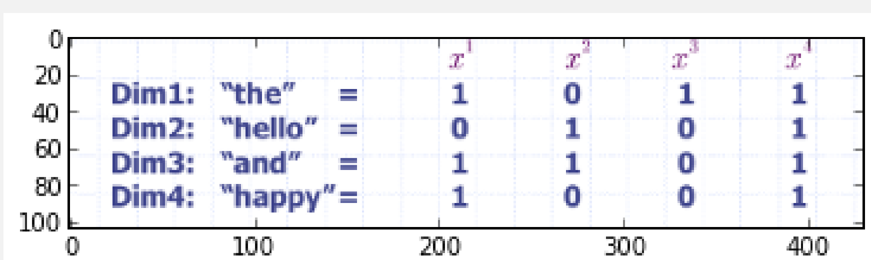
Oncelikle kategorik degerler ile ne demek istedigimizi belirtelim. Reel sayilar $0.3423, 2.4334$ gibi degerlerdir, kategorik degerler ile ise mesela bir belge icinde 'a','x' gibi harflerin mevcut olmasidir. Ya da, bir evin 'beyaz', 'gri' renkli olmasi.. Burada oyle kategorilerden bahsediyoruz ki istesek te onlari sayisal bir degere ceviremiyoruz; kiyasla mesela bir gunun 'az sicak', 'orta', 'cok sicak' oldugu verisini kategorik bile olsa regresyon amaciyla sayiya cevirip kullanabilirdik. Az sicak = 0, orta = 1, cok sicak = 2 degerlerini kullanabilirdik, regresyon hala anlamli olurdu (cunku arka planda bu kategoriler aslinda sayisal sicaklik degerlerine tekabul ediyor olurlardi). Fakat 'beyaz', 'gri' degerlere sayi atamanin regresyon acisindan bir anlami olmazdi, hatta bunu yapmak yanlis olurdu. Eger elimizde fazla sayida 'gri' ev verisi olsa, bu durum regresyon sirasinda beyaz evlerin beyazligini mi azaltacaktir?

Iste bu gibi durumlarda kategorileri oldugu gibi isleyebilen bir teknik gerekiyor. Bu yazida kullanacagimiz ornek, bir belgenin icindeki kelimelere gore kategorize edilmesi. Elimizde iki turlu dokuman olacak. Bir tanesi Stephen Hawking adli bilim adaminin bir kitabindan 3 sayfa, digeri baskan Barack Obama'nin bir kitabindan 3 sayfa. Bu sayfalar ve icindeki kelimeler NB yontemini "egitmek" icin kullanilacak, sonra NB tarafindan hic gorulmemis yeni sayfalari yontemimize kategorize ettirecegiz.

Cok Boyutlu Bernoulli ve Kelimeler

```
im=plt.imread("dims.png"); imshow(im)
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0xb25bb4c>
```



Bir dokuman ile icindeki kelimeler arasinda nasil baglanti kuracagiz? Burada olasilik teorisinden Cok Boyutlu Bernoulli (Multivariate Bernoulli) dagilimini kullanacagiz. Ustteki resimde goruldugu gibi her dokuman bir x^i rasgele degiskeniyle temsil edilecek. Tek boyutlu Bernoulli degiskeni '1' ya da '0' degerine sahip olabilir, cok boyutlu olani ise bir vektor icinde '1' ve '0' degerlerini tasiyabilir. Iste bu vektorun her hucresi, onceden tanimli bir kelimeye tekabul edecek, ve bu kelimeden bir dokuman icinde en az bir tane var ise, o hucre '1' degerini tasiyacak, yoksa '0' degerini tasiyacak. Ustteki ornekte 2. kelime "hello" ve 4. dokuman icinde bu kelimeden en az bir tane var, o zaman $x_2^4 = 1$. Tek bir dokumani temsil eden dagilimi matematiksel olarak soyle yazabiliriz:

$$p(x_1, ..., x_D) = \prod_{d=1}^{D} p(x_d) = \prod_{d=1}^{D} \alpha_d^{x_d} (1 - \alpha_d)^{1 - x_d}$$

Bu formulde her d boyutu bir tek boyutlu Bernoulli, ve bir dokuman icin tum bu boyutlarin ortak (joint) dagilimi gerekiyor, carpimin sebebi bu. Formuldeki α_d bir dagilimi "tanimlayan" deger, α bir vektor, ve unutmayalim, her "sinif" icin NB ayri ayri egitilecek, ve her sinif icin farkli α vektoru olacak. Yani Obama'nin kitaplari icin $\alpha_2 = 0.8$ olabilir, Hawking kitabi icin $\alpha_2 = 0.3$ olabilir. Birinin kitabinda "hello" kelimesi olma sansi fazla, digerinde pek yok. O zaman NB'yi "egitmek" ne demektir? Egitmek her sinif icin yukaridaki α degerlerini bulmak demektir.

Bunun icin istatistikteki "olurluk (likelihood)" kavramini kullanmak yeterli. Olurluk, bir dagilimdan geldigi farzedilen bir veri setini alir, tum veri noktalarini teker teker olasiliga gecerek olasilik degerlerini birbirine carpar. Sonuc ne kadar yuksek cikarsa, bu verinin o dagilimdan gelme olasiligi o kadar yuksek demektir. Bizim problemimiz icin tek bir sinifin olurlugu, o sinif icindeki tum (N tane) belgeyi kapsamalidir, tek bir "veri noktasi" tek bir belgedir, o zaman:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{d=1}^{D} p(x_d^i) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{d=1}^{D} \alpha_d^{x_d^i} (1 - \alpha_d)^{1 - x_d^i}$$

θ bir dagilimi tanimlayan her turlu degisken anlaminda kullanildi, bu ornekte icinde sadece α var.

Devam edelim: Eger α'nin ne oldugunu bilmiyorsak (ki bilmiyoruz -egitmek zaten bu demek-) o zaman maksimum olurluk (maximum likelihood) kavramini resme dahil etmek gerekli. Bunun icin ustteki olurluk formulunun α'ya gore turevini alip sifira esitlersek, bu formulden bir maksimum noktasindaki α elimize gececektir. Iste bu α bizim aradigimiz deger. Veriyi en iyi temsil eden α degeri bu demektir. Onu bulunca egitim tamamlanir.

Turev almadan once iki tarafin log'unu alalim, boylece carpimlar toplamlara donusecek ve turevin formulun icine nufuz etmesi daha kolay olacak.

$$log(L) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{D} x_d^i \; log(\alpha_d) + (1 - x_d^i) \; log(1 - \alpha_d)$$

Turevi alalim:

$$\frac{dlog(L)}{d\alpha_d} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_d^i}{\alpha_d} - \frac{1 - x_d^i}{1 - \alpha_d} \right) = 0$$

1- α_d'ye gore turev alirken x_d^i'ler sabit sayi gibi muamele gorurler. 2- log'un turevi alirken log icindeki degerlerin turev alinmis hali bolumun ustune, kendisini oldugu gibi bolum altina alinir, ornek $dlog(-x)/dx = -1/x$ olur ustteki eksi isaretinin sebebi bu.

Peki $\sum_{d=1}^{D}$ nereye gitti? Turevi α_d'ye gore aliyoruz ve o turevi alirken tek bir α_d ile ilgileniyoruz, mesela α_{22}, bunun haricindeki diger tum $\alpha_?$ degerleri turev alma islemi sirasinda sabit kabul edilirler, turev sirasinda sifirlanirlar. Bu sebeple $\sum_{d=1}^{D}$ icinde sadece bizim ilgilendigimiz α_d geriye kalir. Tabii ki bu ayni zamanda her $d = 1, 2, ..D$, α_d icin ayri bir turev var demektir, ama bu turevlerin hepsi birbirine benzerler, yani tek bir α_d'yi cozmek, hepsini cozmek anlamina gelir.

Devam edelim:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_d^i}{\alpha_d} - \frac{1 - x_d^i}{1 - \alpha_d} \right) = \frac{N_d}{\alpha_d} - \frac{N - N_d}{1 - \alpha_d} = 0$$

$\sum_{i=1}^{N} x_d^i = N_d$ olarak kabul ediyoruz, N_d tum veri icinde d boyutu (kelimesi) '1' kac tane hucre oldugunu bize soyler. x_d^i ya '1' ya '0' olabildigine gore bir d icin, tum N hucrenin toplami otomatik olarak bize kac tane '1' oldugunu soyler. Sonra:

$$\frac{N_d}{\alpha_d} - \frac{N - N_d}{1 - \alpha_d} = 0$$

$$\frac{1 - \alpha_d}{\alpha_d} = \frac{N - N_d}{N_d}$$

$$\frac{1}{\alpha_d} - 1 = \frac{N}{N_d} - 1$$

$$\frac{1}{\alpha_d} = \frac{N}{N_d}$$

$$\alpha_d = \frac{N_d}{N}$$

Python Kodu

α_d'nin formulunu buldumuza gore artik kodu yazabiliriz. Ilk once bir dokumani temsil eden cok boyutlu Bernoulli vektorunu ortaya cikartmamiz lazim. Bu vektorun her hucresi belli bir kelime olacak, ve o kelimelerin ne oldugunu onceden kararlastirmamiz lazim. Bunun icin her siniftaki tum dokumanlardaki tum kelimeleri iceren bir sozluk yaratiriz:

```
import re
import math

words = {}

# find all words in all files, creating a
# global dictionary.
for file in ['a1.txt','a2.txt','a3.txt',
             'b1.txt','b2.txt','b3.txt']:
    f = open (file)
    s = f.read()
    tokens = re.split('\W+', s)
    for x in tokens: words[x] = 0.

hawking_alphas = words.copy()
```

```
for file in ['a1.txt','a2.txt','a3.txt']:
    words_hawking = set()
    f = open (file)
    s = f.read()
    tokens = re.split('\W+', s)
    for x in tokens:
        words_hawking.add(x)
    for x in words_hawking:
        hawking_alphas[x] += 1.

obama_alphas = words.copy()
for file in ['b1.txt','b2.txt','b3.txt']:
    words_obama = set()
    f = open (file)
    s = f.read()
    tokens = re.split('\W+', s)
    for x in tokens:
        words_obama.add(x)
    for x in words_obama:
        obama_alphas[x] += 1.

for x in hawking_alphas.keys():
    hawking_alphas[x] = hawking_alphas[x] / 3.
for x in obama_alphas.keys():
    obama_alphas[x] = obama_alphas[x] / 3.

def prob(xd, alpha):
    return math.log(alpha*xd + 1e-10) + \
        math.log((1.-alpha)*(1.-xd) + 1e-10)

def test(file):
    test_vector = words.copy()
    words_test = set()
    f = open (file)
    s = f.read()
    tokens = re.split('\W+', s)
    for x in tokens:
        words_test.add(x)
    for x in words_test:
        test_vector[x] = 1.
    ob = 0.
    ha = 0.
    for x in test_vector.keys():
        if x in obama_alphas:
            ob += prob(test_vector[x], obama_alphas[x])
        if x in hawking_alphas:
            ha += prob(test_vector[x], hawking_alphas[x])

    print "obama", ob, "hawking", ha, \
    "obama", ob > ha, "hawking", ha > ob
```

```python
print "hawking test"
test('a4.txt')
print "hawking test"
test('a5.txt')
print "obama test"
test('b4.txt')
print "obama test"
test('b5.txt')
```

```
hawking test
obama -34048.7734496 hawking -32192.3692113 obama False hawking True
hawking test
obama -33027.3182425 hawking -32295.7149639 obama False hawking True
obama test
obama -32531.9918709 hawking -32925.037558 obama True hawking False
obama test
obama -32205.4710748 hawking -32549.6924713 obama True hawking False
```

Test icin yeni dokumani kelimelerine ayiriyoruz, ve her kelimeye tekabul eden alpha vektorlerini kullanarak bir yazar icin toplam olasiligi hesapliyoruz. Nasil? Her kelimeyi $\alpha_d^{x_d}(1-\alpha_d)^{1-x_d}$ formulune soruyoruz, yeni dokumani temsilen elimizde bir $[1,0,0,1,0,0,...,1]$ seklinde bir vektor oldugunu farz ediyoruz, buna gore mesela $x_1 = 1$, $x_2 = 0$. Eger bir d kelimesi yeni belgede "var" ise o kelime icin $x_d = 1$ ve bu durumda $\alpha_d^{x_d} = \alpha_d^1 = \alpha_d$ haline gelir, ama formulun oteki tarafi yokolur, $(1-\alpha_d)^{1-x_d} = (1-\alpha_d)^0 = 1$, o zaman $\alpha_d \cdot 1 = \alpha_d$.

Carpim diyoruz ama biz aslinda siniflama sirasinda $\alpha_d^{x_d}(1-\alpha_d)^{1-x_d}$ carpimi yerine yine log() numarasini kullandik; cunku olasilik degerleri hep 1'e esit ya da ondan kucuk sayilardir, ve bu kucuk degerlerin birbiriyle surekli carpimi nihai sonucu asiri fazla kucultur. Asiri ufak degerlerle ugrasmamak icin olasiliklarin log'unu alip birbirleri ile toplamayi sectik, yani hesapladigimiz deger $x_d \cdot log(\alpha_d) + (1-x_d) \cdot log(1-\alpha_d)$

Fonksiyon prob icindeki 1e-7 kullanimi neden? Bu kullanim log numarisini yapabilmek icin – sifir degerinin log degeri tanimsizdir, bir kelime olmadigi zaman log'a sifir gelecegi icin hata olmamasi icin log icindeki degerlere her seferinde yeterince kucuk bir sayi ekliyoruz, boylece pur sifirla ugrasmak zorunda kalmiyoruz. Sifir olmadigi zamanlarda cok eklenen cok kucuk bir sayi sonucta buyuk farklar (hatalar) yaratmiyor.

Toparlarsak, yeni belge a4.txt icin iki tur alpha degerleri kullanarak iki farkli log toplamini hesaplatiyoruz. Bu iki toplami birbiri ile karsilastiriyoruz, hangi toplam daha buyukse, dokumanin o yazardan gelmesi daha olasidir, ve o secimimiz o yazar olur.

Kaynaklar

Jebara, T., Columbia U., *COMS 4771 Machine Learning* Lecture Notes, Lecture 7