

Tam Diferansiyel

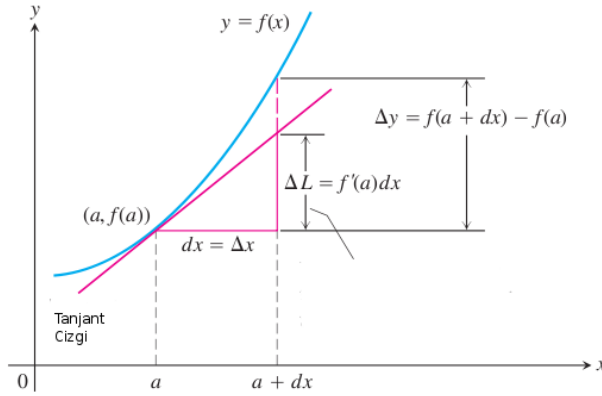
Bir f fonksiyonunun tam diferansiyeli (total differential) o fonksiyonun lineerlestirilmesi anlamına gelir. İki degiskenli bir fonksiyon için şöyle temsil edilir:

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

Bu formu nasıl turetiriz? Bize lazım olan lineerlestirme formülasyonu. Tek degiskenli bir fonksiyonu lineerlestirmenin tekniği şudur:

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Burada $L(x)$ gerçek fonksiyonu yaklaşık (approximate) olarak temsil eden lineer fonksiyondur.



Bu fonksiyonu genişleterek iki degiskenli hale getirelim (sadece y ekleyeceğiz)

$$L(x, y) = f(x_0, y) + f_x(x_0, y)\Delta x$$

Bu fonksiyon da bir önceki kadar “geçerli”. Sonuçta fonksiyonlar noktasal değerlere göre sonuç verirler, bu sebeple bir lineerlestirme işlemi 2 boyutlu ortamda herhangi bir x noktasında yapılabildiği gibi, herhangi bir x, y noktasında da yapılabilir.

Şimdi üstteki denklemin sağ tarafında yer alan $f(x_0, y)$ ’yi lineerlestirelim.

$$L(x, y) = L(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)\Delta y + f_x(x_0, y_0)\Delta x$$

Artık $L(x_0, y_0)$ ’yi sol tarafa taşıyabiliriz:

$$\Delta L = L(x, y) - L(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)\Delta y + f_x(x_0, y_0)\Delta x$$

ΔL yani df istedigimiz tam diferensiyel sonucudur, Δx yerine dx , Δy yerine dy kullanabiliriz, o zaman bastaki formun aynisini elde etmis oluruz.

Turetirken kullandigimiz numarayi uc, dort, vs. gibi istedigimiz kadar degisken tasiyan f fonksiyonlari icin yapabildik, ve sonuc ustteki forma benzer olurdu. Her degiskenin kısmi turevi o degiskenin sonsuz ufakliktaki “degisimi” ile carpilip, o carpimlar toplaninca elimize tam diferansiyel geciyor.

Kaynaklar

Thomas Calculus 11. Baski