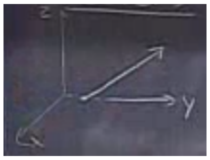
MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 1

Bir vektor 1) yon 2) buyukluk (magnitude) bilgisini tasiyan bir olcumdur.



Uc boyutlu bir ortamda x,y,z eksenleri uzerinden ustteki gibi bir vektor cizebilirdik. Bu vektor (ok istikametinde) bir yonu gosteriyor, bir buyuklugu de var. Vektoru bu eksenler icinde cizince, o vektoru her eksendeki yansimasina gore temsil edebilirim demektir; x yonunde ne kadar degisim var, y yonunde ne kadar var, vs. gibi.

Sembolik olarak harfin uzerinde bir ok isareti, mesela $\vec{A}$ gibi, bize elimizdeki degiskenin bir vektor oldugunu hatirlatmak icindir. Bazi kitaplarda ok yerine sembol sadece koyu renkli olarak gosterilmis olabilir, bunu tarihi sebepleri var, cunku matbaa baskisinda eskiden koyulugu (bold) yapmak kolaydi, ok isaretini yapmak zordu.

Bir vektoru birim vektorler uzerinden temsil etmek mumkundur, mesela

$$\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

ki birim vektorler tek bir eksen uzerinde tek birimlik bir adimi temsil ederler. Mesela $\hat{i}$, x ekseni uzerinde 1 adimlik bir buyukluktur, digerlerinde degisim sifirdir, $\hat{i} =< 1, 0, 0 >$. Notasyonun isleyip islemedigine bakalim, eger $< 2, 3, 5 >$ vektorunu temsil etmek isteseydik, bunu $2\cdot < 1, 0, 0 > +3\cdot < 0, 1, 0 > +5\cdot < 0, 0, 5 >$ ile yapabilirdik. Toplam $< 2, 3, 5 >$ verecekti.

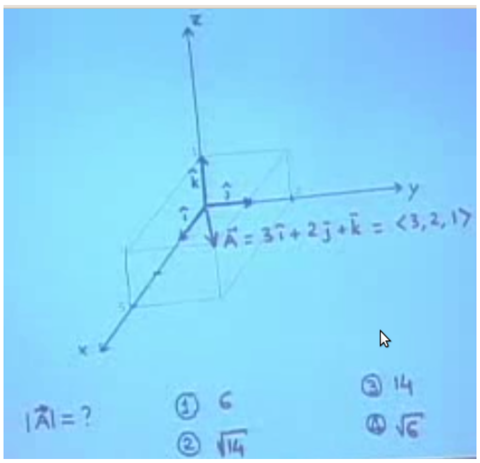
Hazir bahsetmisken, diger vektor notasyonu

$$\vec{A} =< a_1, a_2, a_3 >$$

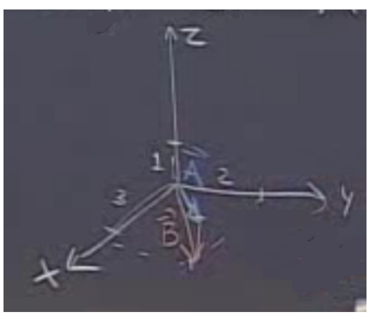
Vektor buyuklugu $|\vec{A}|$ ile gosterilir, ki $|\cdot|$ isareti kesin deger (absolute value) notasyonu ile aynidir. Bu deger tek bir sayi (scalar) geri getirir. Vektor yonu, ki bu bazen $dir(\vec{A})$ ile gosterilir, vektorun birim vektor haline getirilmesi ile elde edilir, yani vektorun tum ogelerinin onun buyuklugune bolunmesi ile. Bu yapilinca vektor buyukluk bilgisi kaybolmus olur tabii, geriye sadece yon kalir. Bu bilgi, daha dogrusu, "sadece yon" verisi icerir, yoksa vektor oldugu sekliyle de yon bilgisini zaten icerir.

Iki nokta P ve Q arasinda bir vektoru $\vec{PQ}$ olarak gosterebilirim. Fakat bu illa ki P'den baslayip Q'ye gelmem gerektigi anlamina gelmez, ayni yonde ayni uzunlukta paralel bir baska vektor de $\vec{PQ}$ vektoru olabilir. Bu derste pek cok vektoru orijin noktasindan (0,0,0) baslayarak cizecegiz, fakat aslinda bunu yapmak mecburi degil. Cizimsel basitlik icin bunu yapacagiz.

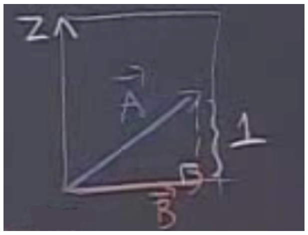
Simdi alttaki grafige bakalim. Uzunluk nedir?



Yani $\vec{A} =< 3, 2, 1 >$'in uzunlugu nedir? Bu uzunlugu bulmak icin ikinci bir resme bakalim:



Burada $\vec{A}$'nin yz duzlemine olan yansimasini $\vec{B}$ olarak dusunelim, $\vec{A}$ sadece xy degerlerini tasiyor yani $\vec{B} =< 3, 2 >$. Simdi $\vec{A}$ ve $\vec{B}$'nin ikisinin de uzerinde oldugu ve bir tarafi z ekseni olan bir kesiti hayal edelim. Bu kesiti ayirip alttaki gibi cizebiliriz:



Goruldugu gibi $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasinda z baglaminda 1 birimlik bir fark var, bu da $\vec{A} =< 3, 2, 1 >$ vektorunu $\vec{B} =< 3, 2 >$ olarak alirken dahil etmedigimiz 1 degeri.

Ustteki grafige bakarsak Pitagor teoresini kullanarak $|\vec{A}|$'yi bulabiliriz. $|\vec{A}|^2 = |\vec{B}|^2 + 1^2$. Demek ki problem $|\vec{B}|$'nin hesaplanmasina indirgendi,cunku onu bulursak ustteki formulden $|\vec{A}|$'yi da bulabiliriz. $|\vec{B}|$ nedir? Onu da xy duzleminde / kesitinde Pitagor kullanarak bulabiliriz, $|\vec{B}|$ x ekseninde 3 birim, y ekseninde 2 birimlik adimlar iceriyor, Pitagoru kullanirsak

$\vec{B} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$|\vec{A}| = \sqrt{|\vec{B}|^2 + 1^2} = \sqrt{13 + 1} = \sqrt{14}$

Genel formul

$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Vektorlerle baska ne yapabiliriz? Onlari ekleyebiliriz, ve olcekleyebiliriz.

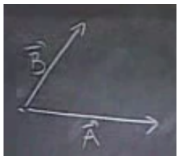
Ekleme

Elimizde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ var ise, $\vec{A} + \vec{B}$ hesabini yapabiliriz.

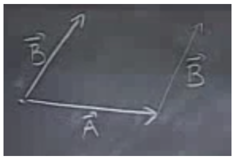
Bu noktada su yorumu eklemek gerekir, vektorler iki farkli dunyada yasarlar, bir tanesi geometrik dunya (sekilsel), digeri hesapsal dunya (sayilarla temsilleri). Bu sebeple vektorler hakkindaki her sorunun iki cevabi vardir, biri geometrik digeri sayisal cevap.

Geometrik cevap ile baslayalim:

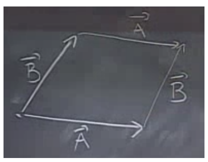
Diyelim ki iki vektoru ayni noktadan cikacak sekilde cizmistim



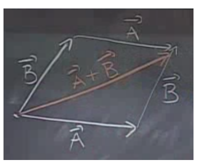
Toplami almak icin $\vec{B}$'yi alip hareket ettiririm (baslangic bitis noktalarinin onemli olmadigini soylemistik), ve $\vec{A}$'nin bittigi noktadan baslamasini saglarim.



Bunun bir paralelogram ortaya cikardigini goruyoruz.



Eger bu paralelogramin caprazini hesaplarsak / cizersek, iste bu capraz $\vec{A}+\vec{B}$ olarak nitelenebilir.



Yani bu iki vektorun birbiriyle toplanmasi $\vec{A}$ uzerinde, sonra $\vec{B}$ uzerinde hareket etmekle esdeger. Ya da, paralelogramin ust kismina bakarsak, once $\vec{B}$ sonra $\vec{A}$ yonunde hareket etmekle esdeger ($\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$ esitligini grafiksel olarak boylece dogrulamis ta olduk).

Sayisal olarak dusunursek

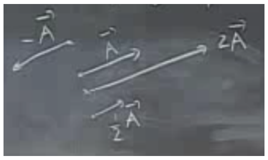
$\vec{A} =< a_1, a_2, a_3 >$

$\vec{B} =< b_1, b_2, b_3 >$

$\vec{A} + \vec{B} =< a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 >$

Tek Sayi Ile Carpmak

Eger elimizde $\vec{A}$ var ise, $2 \cdot \vec{A}$ ile bu vektoru ayni yonde iki kat daha fazla gitmesini saglayabiliriz. Ya da yarisi, ya da eksi yonde, vs.



Simdi vektorler hakkinda birkac yeni operasyon daha ogrenecegiz. Bu operasyonlar geometriye daha detayli sekilde baslayinca isimize yarayacak. Ileride gorecegimiz gibi, geometri vektorler uzerinden yapilabilir, hatta pek cok acidan, geometri de calismak icin vektorlerin "en uygun dil" oldugu soylenebilir. Ozellikle fonksiyonlar konusuna gelince vektorler kullanmak, diger tur geometrik islemleri kullanmaktan daha faydali olacak.

Tum bunlar bir tur "dil", bir seyin farkli bir sekillerde temsilinden ibaret, vektorler, fonksiyonlar, vs. gibi temsili objeler. Fakat notasyon fark yaratabiliyor, bazi seyleri kolaylastirip, temizlik getirebilmesi acisindan.

Noktasal Carpim

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{1}$$

Onemli bir nokta: Sonuc bir tek sayi (scalar), bir vektor degil.

Peki bu operasyon niye kullanilir? Neye yarar? Aslinda biraz garip bir operasyon. Bu sorunun cevabini vermeden once belki de geometrik olarak ne yaptigini gostermek daha iyi olur. Iddia ediyorum ki

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| cos\ \theta \tag{2}$$

ki θ iki vektorun arasindaki aci

Fakat dedigimiz gibi, bu operasyon cok suni bir sey gibi duruyor. Niye bu cetrefil operasyonu yapalim ki? Su sebepten: elde ettigimiz sonuc, $|\vec{A}||\vec{B}| cos\ \theta$ esitligi uzerinden bize hem buyuklukler baglaminda, hem de acisal baglamda bir seyler soyluyor / bilgi veriyor. Ekstra bir bonus ise bu hesabin cok kolay yapilabilmesi, iki vektorun ogelerini teker teker birbiriyle carpinca noktasal carpim sonucunu elde ediyoruz.

Fakat noktasal carpim ve buyukluk, aci iceren formul arasinda ne baglanti var? Matematikte bu tur baglantilarin ispatlanmasi gerekir. Ustteki esitlik bir teoridir (bu dersin ilk teorisi!). Ispatlayalim. Icinde buyukluk ve aci iceren geometrik tanim ne anlama geliyor? Alttaki ifade uzerinden kontrol edelim. Eger $\vec{A}$'nin kendisi ile noktasal carpimini alsak ne olurdu?

1) $\vec{A} \cdot \vec{A} = |A|^2 cos(0) = |A|^2$

$cos(0)$ cunku vektorun kendisi ile noktasal carpimini aliyoruz, vektorun kendisi ile arasindaki aci sifir. Sifirin cos degeri 1. Peki diger formu kullansaydik ne olacakti? O zaman

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

elde edecektik, ki bu ifade $|A|^2$'ye esittir cunku buyuklugun tanimini hatirlarsak

$|\vec{A}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

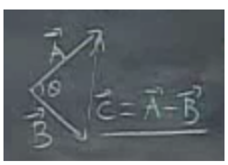
iki tarafin karesini alirsak

$|\vec{A}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

bu ifadenin sag tarafi noktasal carpimdan elde ettigimizle ayni.

2) Peki ya elimizde iki farkli vektor varsa?

Iddiam su ki formul 1 ve 2 arasindaki iliskiye Kosinus Kanunu ile kurabilirim. Bu kanunu yazalim



$|\vec{C}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|cos(\theta)$

Bu arada, eger bu formulu

$|\vec{C}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2$

seklinde yazsaydim Pitagor Formulu olurdu, ama burada Pitagor kullanamayiz cunku arada dik aci yok, o yuzden ucuncu terimi eklemek gerekti.

Ispat

Soyle baslayalim

$|\vec{C}|^2 = \vec{C} \cdot \vec{C}$

Bunun dogru oldugunu biliyoruz, daha once ispatladik. $\vec{C}$'nin ustteki tanimini yerine koyarsak

$= (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B})$

Simdi bu carpimi acarak 4 terimin toplami haline getirmek isterdik, ama bunu yapabilir miyiz? Daha bilmiyoruz, noktasal carpim operasyonunu daha yeni gorduk, gizemli yeni bir operasyon bizim icin su anda. Fakat cevap evet, cunku formul 1'deki tanima bakarsak, acilim yapmak icin bize gerekli sekilde davranacagini gorebiliriz. O zaman

$= \vec{A} \cdot \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B}$

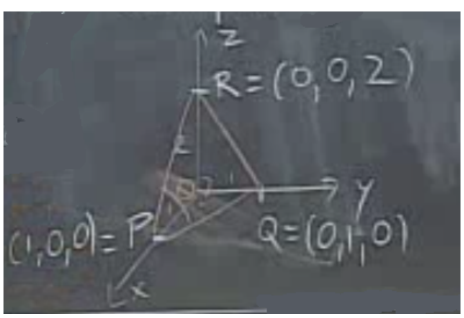
Ilk ve son terimin karsiligini hemen yazabiliriz, alttaki ilk iki terim onlar zaten

$= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B}$

Geride kalan en son terimi, son formul icindeki cos iceren formul ile karsilastiralim, aralarindaki tek fark, bir tarafta $2\vec{A} \cdot \vec{B}$ diger tarafta $2|\vec{A}||\vec{B}|cos(\theta)$ olmasi.. Ve formul 2'deki esitlikten bu iki terimin de aslinda birbirine esit oldugunu biliyoruz.

Uygulamalar

1) Uzunluklari ve acilari (ozellikle acilari) hesaplamak.



Diyelim ki sol alt kosedeki θ acisini hesaplamak istiyoruz.

$\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = |\vec{PQ}||\vec{PR}|cos(\theta)$

Bu formulde bilinmeyen θ, bilahere $cos(\theta)$. Uzunluklari hesaplayabiliriz, formulunu biliyoruz. Noktasal carpimlari da hesaplayabiliriz, onun da basit bir formulu var.

$$cos(\theta) = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{PR}}{|\vec{PQ}||\vec{PR}|}$$

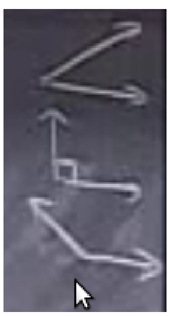
$$= \frac{< -1, 1, 0 > \cdot < -1, 0, 2 >}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{1 + 0 + 0}{\sqrt{2}\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\theta = cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{10}}) \approx 71.5^o$$

Burada $\vec{A} \cdot \vec{B}$'nin isaretine (arti mi eksi mi) dikkat cekelim.



Eger isaret > 0 ise, o zaman $\theta < 90^o$ (ustteki resimdeki 1. figur).

Eger isaret $= 0$ ise, o zaman $\theta = 90^o$ (ustteki resimdeki 2. figur).

Eger isaret < 0 ise, o zaman $\theta > 90^o$ (ustteki resimdeki 3. figur).

Yani noktasal carpim bir nevi iki vektorun ne kadar "beraber gittigini" olcuyor. Ustte 1. sekil asagi yukari ayni yone dogru giden iki vektor, ve isaretleri pozitif. 2. sekil dikine giden vektorler, alaka yok. Tersine gidenlerde isaret negatif.

2) Diklik Kontrolu

Diyelim ki size

$x + 2y + 3z = 0$

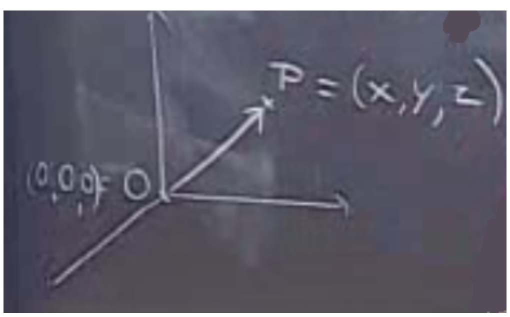
seklinde bir formul verdim. Sizce bu formul nasil bir sekle sebebiyet verir? Cevaplar:

1. Bos kume (cozum yok)
2. Tek bir nokta
3. Bir cizgi
4. Bir duzlem
5. Bir kure (sphere)
6. Usttekilerin hicbiri
7. Bilmiyorum

Dusunun..

Dogru cevap: 4.

Bunun bir duzlem oldugunu nasil gorebiliriz? Vektorler burada yardimimiza yetisiyor. Bir $\vec{OP}$ vektoru oldugunu dusunelim, ki bu vektorun ogeleri x, y, z olsun.



$x + 2y + 3z = 0$ ifadesine bakarsak, onu bir noktasal carpim olarak temsil edebiliriz, bu carpim $\vec{OP}$ ile "bir baska vektorun" carpimi olabilir. Bu diger vektor $\vec{A} =< 1, 2, 3 >$ vektoru olabilir. O zaman su kosul

$x + 2y + 3z = 0$

Aslinda

$\vec{OP} \cdot \vec{A} = 0$

olarak ta temsil edilebilir.

Peki ustteki noktasal carpimin sifira esit olmasi ne demektir? Vektorler hakkindaki bilgilerimizi kullanirsak, sifira esitlik bu iki vektorun birbirine dik olmasi anlamina gelir. O zaman duzlemin ne oldugu hakkinda bir ek bilinc daha gelistirmis olduk. Elde ettigimiz orijin noktasindan gecen bir duzlem ve $\vec{A}$'ya dik.