

MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 19

Konumuz vektor alanlari (vector fields) ve cizgi entegralleri (line integrals). Bundan onceki derslerde cift integral (double integral) konusunu isledik, fakat o tur entegraller cizgi entegrallerinden tamamen farklıdır, yani bu dersi takip ederken cift entegraller ile baglantilari dusunmemek daha iyi olur, kafalar karismasin.

Vektor Alanlari

Vektor alanlari bir vektordurler aslinda, diyelim ki \vec{F}

$$\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j}$$

Farkli olan M, N kendilerinin x, y 'nin bir fonksiyonu olmalaridir. Bu demektir ki kordinat sistemindeki her x, y kombinasyonu icin degisik bir vektor olacaktır. Bir misir tarlasinda her noktada misir vardır, vektor alanında her noktada bir vektor vardır [hoca bu analogiyi misirlar uzun, yonleri olan seyler oldugu icin kullaniyor herhalde]. Daha once $\vec{r}(t)$ baglaminda t degiskenine bagliligi gorduk, fakat o tek degisken idi, zaten bir egriyi vektor ile temsil etmek icin oyle olmasi gerekiyordu, burada birden fazla degisken x, y 'ye bagimlilik var.

Bu kavram bir sivi, bir ruzgar icindeki akis vektorlerini temsil etmek icin kullanilabilir mesela. Ya da kuvvet alanı (force field) kavrami – bu kavram Star Wars filminden bir kavram degil. Yeryuzunde elimizde bir cisim herhangi bir yerde tuttugumuzda onun uzerinde etki eden bir kuvvet vektörü var, bu vektor her noktada degisik, ve tum bu vektorlerin toplami bir kuvvet alanı olusturuyorlar, ki bualan bir vektor alanidir.

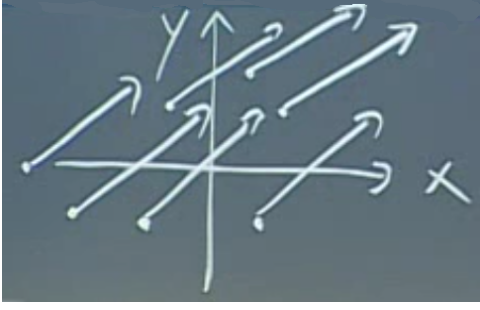
Biz bu derste konuya pur matematiksel olarak bakiyoruz, sadece arka plan-daki bu fiziksel baglantiyi motivasyon acisindan aklimizda tutabiliriz.

Once cizimden baslayalim

Ornek

$$\vec{F} = 2\hat{i} + \hat{j}$$

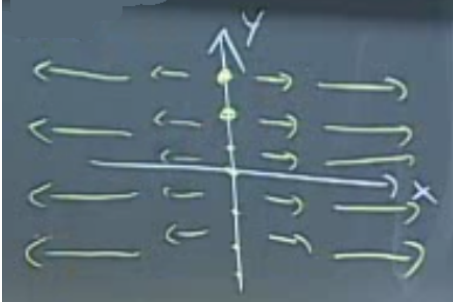
Tam x, y 'ye baglantidan bahsetmistik, baglantisiz bir tane verdik! Ama ornegi soyle gorebiliriz, bu alan her x, y icin ayni vektore sahip. Yani yine x, y 'yi merkez alarak dusunuyoruz, sadece vektorun her noktada ayni oldugunu soylemis oluyoruz.



Ornek

$$\vec{F} = x\hat{i}$$

Y-ekseni üzerinde, yani x 'in sıfır olduğu noktada (zaten hiç y yok) vektor sıfır büyüklüğünde. Diğer noktalarda vektor yatay, x büyüdükçe, ya a eksi yonde kuculdukce, saga ya da sola dogru vektorun büyüklüğü de degisecek.

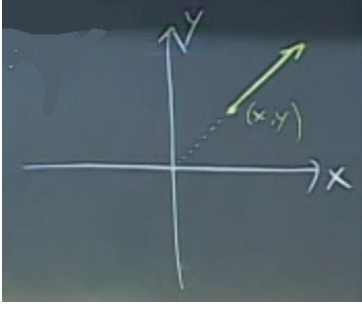


Aslında bu tür çizimleri çoğunlukla bilgisayara yaptırıyoruz, ama kabaca vektor alanlarının neye benzediğini hayal edebilmek ise yarıyor.

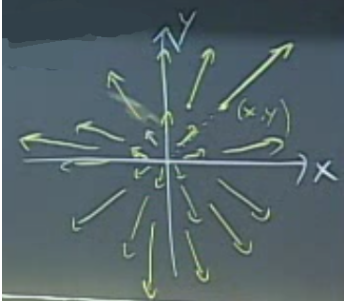
Ornek

$$\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

Bu alanın ilginç bir geometrik sonucu var. Orijinden herhangi bir noktaya çizilebilecek bir vektörü (... ile belirtiliyor) alıp, kopyalarsak, bu kopyayı o noktadan başlayacak şekilde yerleştirirsek, doğru sonucu elde etmiş oluruz.



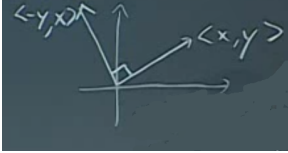
Hepsini cizince su sekil ortaya cikiyor.



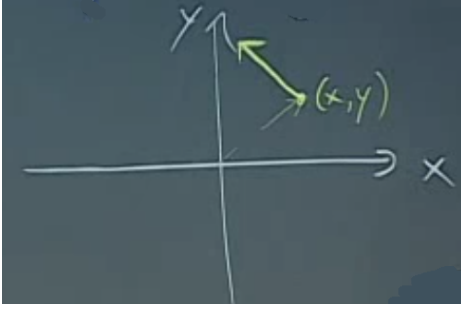
Ornek

$$\vec{F} = -y\hat{i} + x\hat{j}$$

Yine orijinden baslama numarasini dusunursekm simdi elimizde $\langle -y, x \rangle$ vektörü var, acaba bu vektor $\langle x, y \rangle$ göre nasıl bir vektor?



Bu iki vektorun arasinda 90 derece vardir. O zaman bu $\langle x, y \rangle$ 'ye dik olan kopyayi almamiz lazim, ve onu x, y 'den baslatmamiz lazim.



Hepsini cizersek

