

QP

İçinde eşitsizlikleri de barındıran ve karesel olan bir matematiksel sistemi çözmek için karesel programlama (quadratic programming) tekniklerini kullanabiliriz. Problemler şu şekilde verilir:

$\frac{1}{2}x^T Qx + p^T x$ fonksiyonunu minimize et

şu koşullara uymak şartıyla (subject to)

$Gx \leq h$ (eşitsizlik koşulu)

$Ax = b$ (eşitlik koşulu)

Küçük harfli gösterilen değişkenler vektördür, büyük harfler ise bir matrisi temsil ederler. x içinde diğer bilinmeyenler x_1, x_2, \dots olarak vardır, bulmak istediğimiz değerler buradadır.

Somut örnek olarak suna bakalım:

$2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$ fonksiyonunu minimize et

koşullar:

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ (eşitsizlik koşulları)

$x_1 + x_2 = 1$ (eşitlik koşulu)

Fakat bu formül şu anda matris formunda değil. Matris formuna geçmek için iki aşama var. Önce x değişkenlerinin birbiri ve kendileri ile çarpım durumlarını halledelim. Öyle bir Q matrisi bulmalıyız ki, altta boş olan Q matrisinin değerleri doldurulup, çarpım yapıldığında x değişkenlerinin tüm çarpım ilişkilerini bulsun. Çarpım ilişkileri nelerdir? Formülün $2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$ kısmıdır.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Q matrisinin 1, 2, .. gibi koordinatları x_1, x_2, \dots 'ye tekabül ediyor olacaklar. (1,1) koordinatları x_1 'in kendisi ile çarpımını, x_1^2 'i temsil eder, (1,2) ise x_1x_2 'yi temsil eder, vs. O zaman (1,1) için 2 sayısını veririz, çünkü x_1^2 'nin başında 2 değeri var. (2,2) için 1 değeri lazım çünkü x_2^2 'nin başında sayı yok (yani '1' değeri var).

(1,2) ve (2,1) ilginç çünkü ikisi de aslında x_1x_2 'i temsil ediyorlar çünkü $x_1x_2 = x_2x_1$. O zaman (1,2) ve (2,1) için 0.5 değeri verirse, $0.5x_1x_2 + 0.5x_2x_1$ 'i kısaltıp x_1x_2 haline getirebiliriz. Sonuç

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol edelim:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 + 0.5x_2 & 0.5x_1 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 0.5x_2x_1 + 0.5x_1x_2 + x_2^2 \\ &= 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \end{aligned}$$

p vektörü ise, her terimin, tek basına ana formüle nasıl ekleneceğini kontrol ediyor. Elimizde $x_1 + x_2$ olduğuna göre $p = [1, 1]$ yeterli olacaktır, bakalım: $[1, 1]^T [x_1, x_2] = x_1 + x_2$

Şimdi eşitsizlik koşulları. Bizden istenen $x_1 \geq 0$ ve $x_2 \geq 0$ şartlarını $Gx \leq 0$ formunda temsil etmemiz. Burada önemli nokta matris formuna gecerken bir yandan da \geq işaretini tersine döndürmemiz, yani \leq yapmamız. Bu çok dert değil, değiskeni -1 ile çarparsak işareti tersine döndürebiliriz çünkü $x_1 \leq 0$ ile $-x_1 \geq 0$ aynıdır. O zaman Gx şöyle olacak:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Eşitlik koşulları

Eşitlik koşulları için problemimizin istediklerini $Ax = b$ formuna uydurmamız lazım. $x_1 + x_2$ 'yi nasıl forma sokarız? $A = [1, 1]$, $b = 1$ ile

$$[1, 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

CVXOPT

Bu paket ile karesel denklemleri minimizasyon / maksimizasyon baglaminda cozmek mumkundur. Ustte buldugumuz degerleri altta gorebiliyoruz. Q esitliginde 2 ile carpim var, bunun sebebi karesel denklem formunun basinda $\frac{1}{2}$ carpimi olmasi, boylece bu iki carpim birbirini dengeliyor.

```
from cvxopt import matrix
from cvxopt import solvers
Q = 2*matrix([ [2, .5], [.5, 1] ])
p = matrix([1.0, 1.0])
G = matrix([[ -1.0, 0.0], [0.0, -1.0]])
h = matrix([0.0, 0.0])
A = matrix([1.0, 1.0], (1,2))
b = matrix(1.0)
sol=solvers.qp(Q, p, G, h, A, b)
print sol['x']
```

Sonuc x_1 icin [2.50e-01] ve x_2 icin [7.50e-01] olmalı.

Bazi notlar: A matrisi yaratilirken (1,2) kullanimi goruluyor, bu matrisin boyutlarini tanimlamak icin. Cvxopt paketi bu arada Numpy formati degil kendi matris, vektor objelerini kullaniyor, ama ikisi arasinda gidip gelmek mumkun.

References

<http://abel.ee.ucla.edu/cvxopt/examples/tutorial/qp.html>

<http://www.mblondel.org/journal/2010/09/19/support-vector-machines-in-python/>