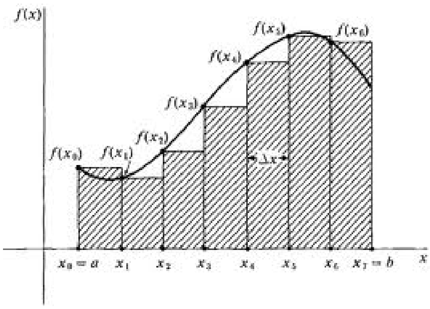
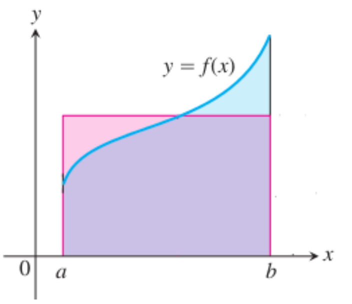
Entegralleri Nasil Dusunelim

Calculus kitaplarinda entegralleri anlatmak icin cogu zaman “toplam” kavrami on plana cikarilir, mesela entegralin alttaki resimde $f(x)$ fonksiyonunun altinda kalan ufak ufak dikdortgenlerinin alanlarinin “toplami” oldugundan bahsedilir.



Fakat bu tur bir anlatim bazen karisikliga yol acabiliyor. Daha iyi bir anlatim entegralin “degisen degerlerin carpimi” oldugudur. Alttaki resimdeki dikdortgeni dusunelim,

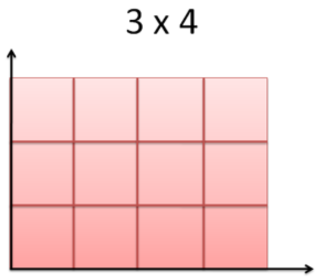


ve diyelim ki bir dikdortgen, entegralin hesapladigi alani yaklasiksal olarak temsil ediyor. Dikdortgen alani nasil hesaplanir? Iki kenarinin carpilmasiyla! Entegral de aslinda boyle bir hesaptir, sadece kenarlardan biri sabit degildir, ve surekli degismektedir. Bu tur bir anlayis birimleri sonuca dahil etmek gerektiginde ise yarar, mesela yatay eksen zaman t ise, ve dikey eksen hiz $v(t)$ ise, katedilen mesafe, $v(t)$ nasil bir sekilde verilmis olursa olsun,

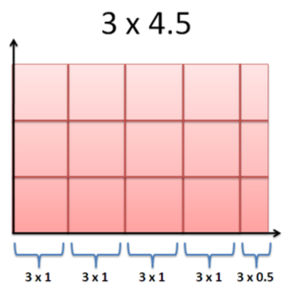
$$Mesafe = \int v(t)dt$$

formuluyle hesaplanacaktir. Eger hiz ve zaman sabit olsalar, mesela 5 ile 4 gibi, o zaman hesap son derece basit olacakti, 3 x 4 = 12 ile sonucu bulacaktik.

Tabii ki carpmak ile toplamak arasinda yakin baglantilar var, mesela 3 x 4’u su sekilde resmedelim



Burada, evet, 3 degerini dort kere birbiriyle topluyoruz, 3 + 3 + 3 + 3 = 12 ve bu durum 3 x 4 ile ayni sonucu veriyor. Fakat 3'lerin toplami, egri altindaki alan zihniyetini daha ilerletmeden azicik farkli bir durumu dusunelim.



Bu durumda dikey eksendeki kolonlara bir ek yaptik, ama bu ekin genisligi tam bir kolon degil, yarim bir kolon. Bu durumda alan hesabini sadece dikey kolonlarin toplanmasi olarak yapsakdik 3'u bes kere toplamamiz gerekirdi, ve 15 elde ederdik, yanlis bir hesap yapmis olurduk.

Toplamin dogru olmasi icin yatay eksenin genisliginin hesaba katilmasi gerekir, 3*1 + 3*1 + 3*1 + 3*1 + 3*0.5 = 13.5. Ya da tum genisligi tum yukseklik ile carpariz 3 * 4.5 = 13.5.

Peki ilk ornege donersek, madem carpimlardan bahsediyoruz, diyelim ki $v(t) = 2t$ o zaman $t \cdot 2t$ diyemez miyiz? Bu da olmaz, cunku $t \cdot 2t = 2t^2$ bize sadece tek bir t anindaki bir hesabi veriyor. Biz verilen bir baslangic ve bitis noktalari arasindaki "tum t'ler uzerindeki" katedilen mesafeyle ilgileniyoruz.

Yani entegral denince aklimiza carpim gelsin, x, y eksenleri baglaminda, y eksenindeki $f(x)$'i x'i carpiyoruz, bu carpim x icin entegrale dx olarak yansiyor, $f(x)$ ise entegre edilen fonksiyon haline geliyor.

Birimleri hesaba katarsak anlatilanlar biraz daha anlamlanir belki. Eger hiz km / saat ise, zaman saat ise, sadece hizlarin toplami mesafe birimini km / saat yapar, bu yanlis olur. Ama carpim olarak dusunursek km / saat * saat = km sonucunu verir ki bu mesafenin birimidir.

Kaynaklar

http://betterexplained.com/articles/a-calculus-analogy-integrals-as-multiplication/