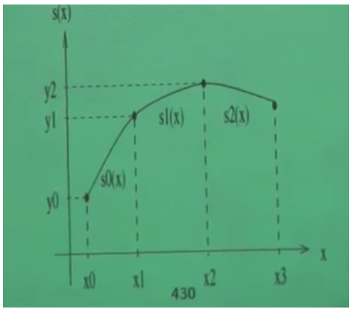
Spline Egrileri

Diyelim ki elimizde 4 x_i, y_i noktasi var, ve bu noktalardan gecen (bu onemli, tum noktalardan *kesinlikle* gecen) yaklasiksal bir egri olusturmak istiyoruz. Spline yontemi her iki nokta arasini farkli bir kupsel (ucuncu derece) polinom ile temsil etmektir. Tekrar dikkat: tum noktalari temsile edebilecek farkli polinomlari toplamiyoruz, her aralikta baska bir polinom fonksiyonunu devreye sokuyoruz. Peki parcalar niye kupsel? Cunku kupsel bir egri yeterince kavis saglayabilir ve ayni zamanda cok fazla inisli cikisli, sivri degildir.



Her $i = 0, .., n-1$ icin

$$p(x) = p_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad (1)$$

kullanalim. Noktalar x_i olarak gosteriliyor, ve her noktada aktif olan bir p_i spline olacak, o noktadan bir sonrakine kadar egriyi bu s_i tanimlayacak. Peki her spline bir kubik polinom ise niye bu kubik polinomu en basit sekliyle

$$p(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$$

olarak tanimlamadik? Cunku iki ustteki form ile calismak daha rahat. Mesela, eger x icin x_i degrini verirsek, ki bu x_1 ya da x_2 olabilirdi, o zaman parantez icinde $x_i - x_i$ sayesinde tum terimler sifir oluyor, geriye sadece a_i kaliyor.

Parcalarin uclarinin birbirini tutmasi, ve tum seklin surekli, akiskan bir sekilde gozukmesi icin ise birkac kosulu bizim tanimlamamiz, ve zorlamamiz gerekli. Once en basit olani: bir onceki parca ile bir sonraki parca orta nokta uzerinde ayni degere sahip olmali. $i = 1, .., n+1$ icin

$$p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1})$$

Bir diger basit gereklilik, her x_i'ye tekabul eden spline fonksiyonun elimizdeki y_i degerini vermesi,

$$p_i(x_i) = y_i$$

"Tum noktalardan kesinlikle gecmeli" demistik. Son parca bir istisna olusturuyor, o hem son nokta, hem de ondan bir onceki nokta icin gecerli olmali

$$p_{n-1}(x_n) = y_n$$

Genel yaklasim soyle, (1)'deki formulu ustteki gordugumuz her $p_i(x)$'in yerine geciririz, bunu yapinca elimize bir lineer sistem gecer, $4n$ tane denklem ve $4n$ tane bilinmez degiskenin oldugu bir denklem sistemi olur bu, ve boyle bir sistemin cozumu vardir.

Sistemi daha detayli olarak gormek gerekirse..

Indisleri $i = 1, .., n + 1$ olarak tasarlayalim. Tum denklemleri yazarsak,

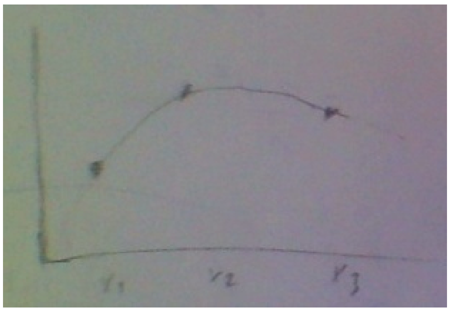
$p_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$

$p_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_1(x - x_2)^3$

$\vdots$

$p_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + c_3(x - x_2)^2 + d_3(x - x_2)^3$

Uc noktali soyle bir grafik dusunelim,



Ustte bahsettigimiz gibi, $p_1(x_1) = a_1 = y_1$ olacak, ve tum indisler icin bu gecerli. Ayrica x_2 noktasinda bir onceki parca ve sonraki parca ayni degere sahip olmali demistik, yani mesela p_1'in sonunda (ustteki ilk parca) x_2 noktasi vardir, ve ayni noktada p_2 baslayacaktir, o noktada

$p_1(x_2) = a_1 + b_1h_1 + c_1h_1^2 + d_1h_1^3$

ve bu denklem $p_2(x_2) = a_2 = y_2$'ye esit. Bir de, daha once gorduk, $a_1 = y_1$ ise, o zaman

$y_2 = p_1(x_2) = a_1 + b_1h_1 + c_1h_1^2 + d_1h_1^3$

haline gelir. Kisaca

$y_2 = y_1 + b_1h_1 + c_1h_1^2 + d_1h_1^3$

Hepsini birarada yaziyoruz, tek basina olan y'yi sag tarafa aliyoruz

$y_1 + b_1h_1 + c_1h_1^2 + d_1h_1^3 = y_2$

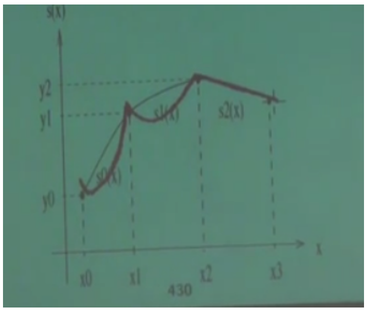
$y_2 + b_2h_2 + c_2h_2^2 + d_2h_2^3 = y_3$

$\vdots$

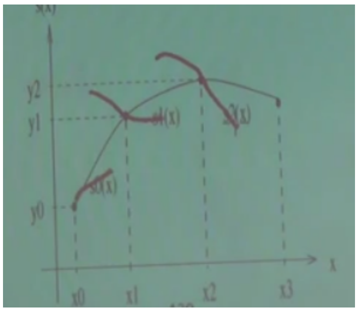
$y_n + b_nh_n + c_nh_n^2 + d_nh_n^3 = y_n$

ki $h_1 \equiv x_2 - x_1$, $h_2 \equiv x_3 - x_2$ olarak tanimladik. Yani bir tur kisaltma olarak h harfini kullaniyoruz.

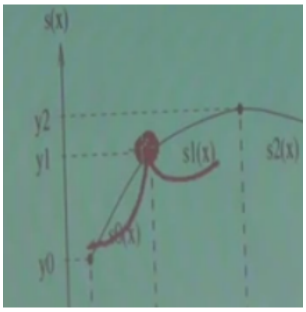
Fakat kesintisizlik icin parcalarin uclarinin bitismesi yeterli degil. Mesela alttaki figur de uclari birlesik halde



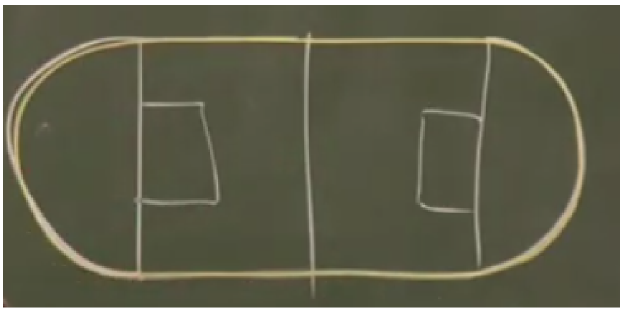
Demek ki ek bazi sartlar lazim. Bu ek sart “sureklilik” olabilir. Mesela alttaki ornek surekli degildir.



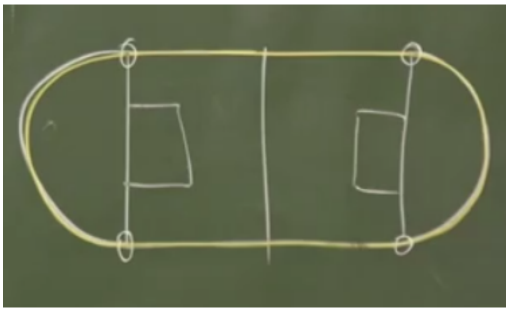
Ya da daha iyisi, fonksiyonun her noktada “turevi alinabilir” olma sarti. Mesela altta koyu yuvarlakli gosterilen noktada fonksiyonun turevi alinamaz.



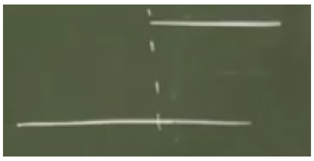
O zaman sarti koyalim – Fonksiyonun her noktasinda, ikinci turev surekli alinabilmeli. Bu cok agir / net bir sart aslinda, ve hakikaten cok puruzsuz (smooth) fonksiyonlara sebebiyet veriyor. Simdi bunun ne anlamina biraz daha derinden bakalim. Bilirsiniz futbol sahalarinin etrafinda kosu alani vardir. Bu alan soyledir.



Ustteki duz cizgili kisim sonsuz kere turevi alinabilir bir fonksiyondur. Degil mi? Duz cizgi sabit bir sayidir, 1. turev sifir, ikinci turev yine sifir, boyle gider. Peki yari cember olan kisimlar? Ayni sekilde. Peki her noktada durum boyle midir? Kritik noktalar ufak yuvarlaklarla gosterilen yerler (altta)



Bu noktalarda kac kere "surekli turevler" alinabilir? Cevap, sadece bir kere. Cunku iki kere turev alininca ne olacagina bakalim, duz kisimda ikinci, ucuncu, vs. turev sifir. Peki yari cember? Onun ikinci turevi sifir olmayan sabit bir sayi. o zaman tum fonksiyonun 2. turevini grafiklesek, soyle bir grafik ortaya cikardi,



ve bu grafikte goruyoruz ki bir ziplama var. Bu ziplama yuzunden sureklilik (2. turevde) bozulmus oldu.

O zaman spline duzgun, puruzsuz olsun istiyorsak, her noktada, yani baglanti noktalarinda, sagdaki ve soldaki parcanin birinci ve ikinci turevinin ayni olmasi sartini koyabiliriz, o zaman bu noktalarda fonksiyonun tamami iki kere surekli turevi alinabilir hale gelir. Parcalarin kendisi uzerinde bu sarti tanimlamaya gerek yok, cunku orada polinom kullanacagimizi belirttik zaten, polinomlar sonsuz kere surekli turevi alinabilen objelerdir.

Denklem sistemimize iki tane daha sart gerekiyor. Bu sartlar fonksiyonun ilk noktada ve son noktada ikinci turevinin sifir olmasi sarti olabilir. Her hangi yondeki bir cizgi $y = ax + b$'nin iki kere turevi alininca sifir gelir, yani bu sart fonksiyonumuzun son noktalarda, fonksiyonun "asagi yukari ayni yonde" olacak sekilde duz olarak devam etmesi anlamina geliyor. Yaklasiksal baglamda fena bir sart degil.

O zaman ana formullerimize donelim, ve mesela $p_1(x), p_2(x)$'in turevini alalim,

$$p_1'(x) = b_1 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2$$

$$p_2'(x) = b_2 + 2c_2 h_2 + 3d_2 h_2^2$$

$$\vdots$$

Turevleri esitleyelim $p_1'(x_2) = p_2'(x_2)$.

$$p_1'(x_2) = b_1 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2$$

$p_2'(x_2) = b_2$

Ustteki niye sadece b_2 oldu? Cunku $x_i - x_i$ numarasi onun icin de gecerli, geriye sadece b_2 kaldi. Hepsi bir arada

$b_1 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2 = b_2$

$b_2 + 2c_2 h_2 + 3d_2 h_2^2 = b_3$

$\vdots$

$b_{n-1} + 2c_{n-1} h_{n-1} + 3d_{n-1} h_{n-1}^2 = b_n$

Ikinci turevler icin benzer bir durum var, bu sefer sol taraftan b'ler yokoluyor,

$2c_1 + 6d_1 h_1 = 2c_2 \quad (2)$

$2c_2 + 6d_2 h_2 = 2c_3$

$\vdots$

$2c_{n-1} + 6d_{n-1} h_{n-1} = 2c_n$

Ilk ve son ikinci turevi sifira esitlemeyi unutmayalim. Son turev

$2c_n + 6d_n h_n = 2c_{n+1} = 0$

Ilk turev

$p_1''(x_1) = c_1 + \cancelto{0}{6d_1(x_1 - x_1)} = c_1 = 0$

Denklem (2)'den baslayan blogu tekrar duzenlersek,

http://spartan.ac.brocku.ca/ jvrbik/MATH2P20/notes.pdf

http://www.youtube.com/watch?v=3rHBCglD1LQ

http://www.youtube.com/watch?v=nA0YpqraP9A