MIT OCW Hesapsal Bilim 18.085 Ders 6

Ozvektor formulune tekrar bakalim

$Ay = \lambda y$

Simdi tum ozvektorler ayni anda tek bir matris icinde olacak sekilde ustteki formulun her ozvektor icin isleyecek "kombine" bir halini yazabiliriz. y_i vektorunun tum bir kolonu kaplayacak sekilde matrise yazildigini dusunuyoruz.

$$A \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ y_1 & y_2 & ... & y_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ Ay_1 & Ay_2 & ... & Ay_n \\ & & & \end{bmatrix}$$

Buna gore ustteki esitligin sagindaki carpim da mantiklidir.Peki Ay_i carpimi tanidik gelmiyor mu? Caprim ozvektor, ozdeger formulu. O zaman $Ay_i = \lambda y_i$. Demek ki,

$$\begin{bmatrix} & & & \\ Ay_1 & Ay_2 & ... & Ay_n \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ \lambda_1 y_1 & \lambda_2 y_2 & ... & \lambda_n y_n \\ & & & \end{bmatrix}$$

λ'lari disari cekebiliriz.

$$= \begin{bmatrix} & & & \\ y_1 & y_2 & ... & y_n \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & .. & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

λ matrisinde λ olmayan yerler sifir degerini tasiyor. Ozvektor matrisini S olarak, caprazinda ozdegerleri tasiyan matrisi Λ olarak nitelersek

$AS = S\Lambda$

Eger ustteki S (ya da herhangi bir) matrisinin tum kolonlari birbirinden bagimsiz ise S tersine cevirelebilir (invertible) demektir. O zaman sunu yapabiliriz:

$A = S\Lambda S^{-1}$

Bu forma matrisin caprazlastirilmasi (diagonalization) deniyor.

Biraz zihin egzersizi: A^2 ne olur?

$A^2 = (S\Lambda S^{-1})(S\Lambda S^{-1})$

$= S\Lambda S^{-1} S\Lambda S^{-1}$

ortadaki S ve S^{-1} birbirini iptal eder.

$= S\Lambda^2 S^{-1}$

Bu bana ne soyluyor? A^2'nin ozvektorleri A ile ayni, cunku formulun S ve S^{-1} iceren kismi degismedi, ozdegerler ise A'nin ozdegerlerinin karesi. Bu onceden buldugumuz $A^2 y = \lambda^2 y$ sonucu ile uyusuyor.

Peki, diyelim tersine cevirilebilir ise, A^{-1} nedir? Ana formulden baslayalim

$A = S\Lambda S^{-1}$

Tersine cevirme islemi esitligin sag tarafinda parantezin icinin sirasini degistirir, sonra tersine cevirir, S^{-1} ile baslariz, onun tersi S, vs, ve sonuc

$A^{-1} = S\Lambda^{-1} S^{-1}$

Ozvektorler matrislerinin yeri ve icerigi degismedi. Degisik olan tek sey Λ^{-1} ki bu matris icinde $1/\lambda_1$, $1/\lambda_2$, .. gibi degerler olacak. Diger bir acidan kontrol edelim:

$Ay = \lambda y$

$y = \lambda A^{-1} y$

$\frac{1}{\lambda} y = A^{-1} y$

Bu ustteki sonuc ile ayni seyi soyluyor. A^{-1}'in tersi ayni y ozvektor(ler)e sahip, ve solda olan ozdeger oncekine kiyasla $1/\lambda$ degerinde.

Tabii tum bunlara baslamadan once "λ'nin sifir olmadigi durumlarda" demeliydim, cunku bu sifirlik durum bize A'nin tersine cevirilir olmadigi yonunde bir isaret olurdu. Terminoloji olarak bir tane bile sifir ozdeger A tekilsel (singular) demektir, eger hicbiri sifir degilse A tersine cevirilebilir demektir.

Bir simetrik K matrisini ele alalim, simetrik oldugu icin tum ozdegerleri reel sayilar, ve ozvektorleri birbirine dik (orthagonal).

Dik yerine normalize edilmis (normalized) da diyebilirdik, numerik paketler (Python gibi) cogunlukla birimsellestirilmis, yani uzunlugu 1 olan vektorler dondurur, ve ozdeger/vektor ikilisi icin zaten yon onemlidir, hem ozdeger hem ozvektoru 2 ile carpip ayni seyi elde edebiliriz mesela.

Uzunluktan bahsederken, onu daha once $y_i^T \cdot y_j$ olarak gosterdik, ki simetrik bir matrisin dik ozdegerleri icin bu $y_i^T \cdot y_j = 0, \ i \neq j$. Normalize edilmis bir ozvektorun kendisi ile noktasal carpimi nedir? $y_i^T \cdot y_i = 1$ cunku vektor birimsel, uzunlugu 1. Tum ozdegerleri iceren matris uzerinden bu hesabi yapabilir miyiz? Daha once yarattigimiz su matris ile baslayalim:

$$
\left[\begin{array}{cccc}
\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
y_1 & y_2 & \dots & y_n \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow
\end{array}\right]
$$

sol tarafina devrigini (transpose) koyalim

$$
\left[\begin{array}{ccc}
\leftarrow & y_1^T & \rightarrow \\
 & \dots & \\
\leftarrow & y_n^T & \rightarrow
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{cccc}
\uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
y_1 & y_2 & \dots & y_n \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow
\end{array}\right]
$$

Bu carpimi yaparsak sonuc ne olacak? Mesela y_1^T ile y_1 carpimi 1 degerinde, y_1^T ile diger her carpim sifir. Boyle gider. Ve sonuc olarak caprazinda 1 diger her yerinde 0 iceren birim (identity) matrisini elde ederiz.

Uzerine basarak soyleyelim, bu simetrik matrisler icin, cunku diger A matrisleri icin ozvektorlerin hepsinin birbirine dik olmasini bekleyemeyiz.

Devam edelim, o zaman ustteki hesabi kisaca gosterirsek

$S^T S = I$

Bu hakikaten cok onemli bir sonuc.

Usttekinin dogru oldugu durumlarda S harfini degistirirsek aslinda daha iyi olur boylece ozvektor matrisinin bir simetrik K matrisinden geldigini daha iyi gorururuz. Bu durumlarda Q harfini kullanalim.

Q'ye bir "dik matris" te denebilir, cunku $Q^T Q = I$. Bu ifadeye bakarak baska bir sey daha soyleyebiliriz, Q'yu baska **ne** soldan carparsa sonuc birim matristir? Q^{-1}. O zaman $Q^T = Q^{-1}$ de diyebiliriz.

Bir dik matris ornegi gorelim:

$$
\left[\begin{array}{cc}
cos\theta & -sin\theta \\
sin\theta & cos\theta
\end{array}\right]
$$

Ilk kolona bakalim, uzunlugu hakikaten 1, cunku $cos\theta^2 + sin\theta^2 = 1$. Diger kolon da ona dik, 1. kolon ile carpilinca sonuc sifir olacak.

Not: Ustteki matrise “θ kadar donduren matris” ismi de verilir, eldeki bir v vektorunu Q ile carpimi, yani Qv, o vektoru uzunlugunu degistirmeden θ kadar dondurecektir.

Devam edelim

$K = S\Lambda S^{-1}$

S yerine Q kullanmaya karar vermistik

$K = Q\Lambda Q^{-1}$

O zaman, daha onceden gordugumuz esitlik uzerinden,

$K = Q\Lambda Q^T$

Su guzellige bakin. Buna mekanikte ana eksen teoremi (principal axis theorem), matematikte spektral teoremi (spectral theorem), kuantum mekanikte caprazlastirma (diagonalization) ismi verilir, her yerde ortaya cikar, pek cok sekilde kullanilir. Ne zaman elde bir simetrik matris var ise, o zaman ustteki tanim kullanilabilir demektir.

K matrisine geri donelim.

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Bu matris ikinci farkliliklari ayriksal olarak temsil etmek icin kullanilmisti, esnek cubugu temsil ettigi zaman sabit / sabit problemini cozuyordu. K surekli (continuous) baglamda hangi diferansiyel denklemi temsil edecektir? $-d^2y/dx^2$. Ozdeger, ozvektor olarak ise

$Ky = \lambda y$

Soyle bir gecis yapilabilir

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda y(x)$$

Burada ilginc bir numara var: daha once surekli fonksiyondan basliyorduk, sonra K matrisi uzerinden ayriksal hale geciriyorduk. Hoca burada ozdeger, ozvektor formundan basladi, ve surekli forma gecti. Sonra ustteki denklemin cozumunu bulunca, tekrar geri gidecek, ve ayriksal olarak ozvektorlerin birbirine dikligini gorecegiz, ve bunun surekli baglamda da hala gecerli oldugunu anlayacagiz.

Cozumu bulmak icin tahmin yontemini kullanalim: hangi fonksiyonun ikinci turevinin negatifi, o fonksiyonun katini verir? Sin ve cos fonksiyonlari, yani y $sin\omega x$, $cos\omega x$ olabilir, ya da onlarin birlesimi olarak ustel $e^{-i\omega x}$, $e^{i\omega x}$ formunda olabilir.

Eger y icin sin, cos kullanirsak ozdeger ne olur? Yerine koyarsak gorururuz, $sin\omega x$'in iki kere turevini alirsak ω iki kere disari cikar, arada bir eksi degeri mutlaka ortaya cikar (cunku $cos'\theta = -sin\theta$), eksi ile eksi carpilir, sonuc ω^2. Hatta ustteki tum y secenekleri icin sonuc aynidir.

Sinir kosullarini unutmayalim tabii. Problemin tamami

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda y(x)$$

$$y(0) = 0,\ y(1) = 0$$

Sinir kosullari sayesinde tum sin, tum cos fonksiyonlari arasindan belli bazilarini secebilecegiz. En basit eleme $y(0) = 0$, bu sart sayesinde cos fonksiyonlarinin tamami elenir. Degil mi? Cunku $cos(0) = 0$ dogru olamaz. Diger sarta bakalim, $y(1)$ uzerinden $sin(\omega) = 0$ olur, tersinden dusunursek $sin(\omega)$ ile sifir degeri verecek ω ne olabilir? π olabilir. O zaman bir cozum bulduk:

$$y_1 = sin\pi x$$

Elimizdeki ilk "ozfonksiyon (eigenfunction)" bu. Ozdegeri nedir?

$$\lambda_1 = \pi^2$$

cunku ustte belirttik, ω^2, o zaman π^2.

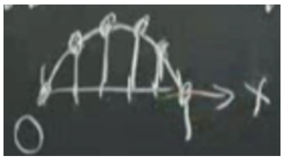
Ikinci deger ne olur? 2π.

$$y_2 = sin2\pi x,\ \lambda_2 = (2\pi)^2 = 4\pi^2$$

Eger sinir sartlarini degistirseydim, serbest / serbest, serbest / sabit gibi, o zaman farkli y degerleri elde ederdim. Mesela ilk sinir sarti $y'(0) = 0$ olsaydi, sin fonksiyonlari yerine cos fonksiyonlari elde ederdik, sin elenirdi cunku sin'in turevi $cos(0) = 0$ dogru bir ifade olamazdi.

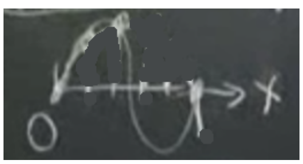
Ayriksal olarak temsil edersek, $sin\pi h$ ve $h = 1/n + 1$, $n = 4$ kullanalim

$$y_1 = \begin{bmatrix} sin\frac{\pi}{5} \\ sin\frac{2\pi}{5} \\ sin\frac{3\pi}{5} \\ sin\frac{4\pi}{5} \end{bmatrix}$$



Bu da ikinci ozvektor (ozfonksiyon).

$$y_2 = \begin{bmatrix} sin\frac{2\pi}{5} \\ sin\frac{4\pi}{5} \\ sin\frac{6\pi}{5} \\ sin\frac{8\pi}{5} \end{bmatrix}$$



Ozvektorler oldugunu soylemekle ikinci bir sey daha soyluyoruz, bu iki vektor birbirine dik. Buradan hareketle $sin(\pi x)$ fonksiyonu (iki ustteki resim) $sin(2\pi x)$ fonksiyonuna (bir ustteki resim) dik diyebilirdik, ki hakikaten oyledir. Hatta bu matematiksel durum Fourier Serilerinin islemesini saglayan onemli bir etkendir.

Bu baglantidan devam edelim: pur vektorler oldugu zaman diklik kontrolu icin $y_1^T \cdot y_2$ diyordum, ve y_1 ve y_2'nin eslesen elemanlari birbiriyle carpilip, bu sonuclar teker teker toplaniyordu. Elimde y_1 ve y_2 icin birer fonksiyon var ise, bir tarafta $sin(\pi x)$ var, her x icin degisik degerler veriyor, diger tarafta $sin(2\pi x)$ var, bunlari carpip toplamam lazim. Ama Elimde teker teker toplayabilecegim degerler olmadigi icin (x reel bir sayidir, belli bir aralikta bile sonsuz tane degere sahip olabilir), o zaman toplama yerine entegrasyon kullanmam lazim. O zaman

$$y_1^T \cdot y_2 = \int_0^1 (sin\pi x)(sin 2\pi x) dx$$

Sonuc sifir gelecek, cunku iki fonksiyon birbirine dik.

Soru 1.5.3

```
import numpy as np
import scipy.linalg as lin
import ktbc

K,T,B,C =  ktbc.ktbc(5)

u,v=lin.eig(K)

print u

print 2-np.sqrt(3), 2-1, 2-0, 2+1, 2+np.sqrt(3)

print 2*np.ones((5,1)).T - 2*np.cos((np.arange(5)+1) * np.pi/6)
```