

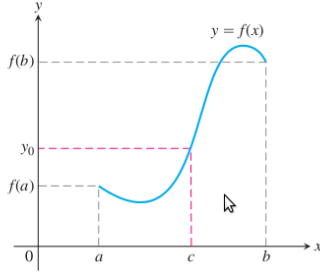
## Calculus'un Temel Teoremi (The Fundamental Theorem of Calculus)

Ana teoriyi ispatlamadan önce iki diğer teoriden bahsetmemiz, ispatlamamız lazım. Bu teorilerden biri Geçis Degeri Teorisi (Intermediate Value Theorem) diğeri Tanımlı Entegraller İçin Ortalama Deger Teoremi (Mean Value Theorem for Definite Integrals). Geçis Degeri Teorisi basitçe şunu söyler

### Teori

$[a, b]$  aralığında sürekli bir fonksiyon  $y = f(x)$ ,  $f(a)$  ve  $f(b)$  arasındaki her değeri muhakkak alır. Bir diğer deyişle, eğer  $y_0$ ,  $f(a)$  ve  $f(b)$  arasındaki bir değer ise  $[a, b]$  aralığındaki bir  $c$  için muhakkak  $y_0 = f(c)$  olmalıdır.

Geometrik olarak bu teori  $y$  eksenini  $f(a)$  ve  $f(b)$  arasında kesen  $y = y_0$  yatay çizgisinin  $y = f(x)$  fonksiyonunu muhakkak, en az bir kez keseceğidir. Grafik altta.



Sezgisel olarak bu anlamlı değil mi? Eğer sürekli bir fonksiyon var ise,  $f(a)$ 'dan  $f(b)$ 'ye giderken o aralıktaki her sayıya bir kez “ugramaya” mecburuz. Etraflarından dolasmamız mümkün değil, çünkü kesintili bir fonksiyon değil, kesintisiz / sürekli bir fonksiyonumuz var. Bu teoremin daha detaylı ispatı için daha ileri matematiksel kitaplara bakabilirsiniz.

### Maks-Min Esitsizliği

Eğer  $[a, b]$  aralığında  $f$ , maksimum değer  $\max f$ 'e ve minimum değer  $\min f$ 'e sahipse,

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max f \cdot (b - a)$$

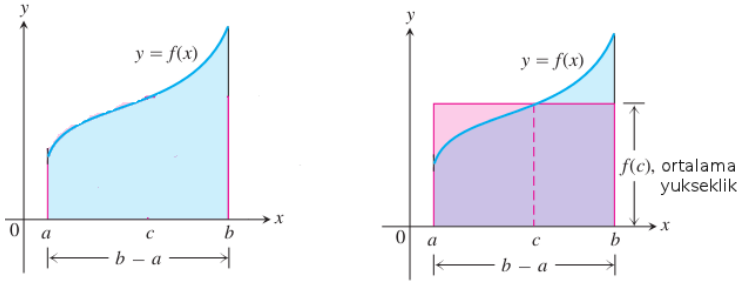
demektir.

### Ortalama Deger Teoremi

Eğer  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  arasında sürekli ise o zaman  $[a, b]$  aralığında olan bir  $c$  noktasında

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

esitliği doğru olmalıdır. Yani alttaki resimde sol grafikteki mavi alanın  $b-a$  ile bölünerek elde edilen ortalama değeri,  $[a, b]$  aralığındaki bir  $c$  üzerinden  $f(c)$ 'ye muhakkak esittir. Ya da bir kenarı  $f(c)$ , diğeri  $b-a$  olan bir dikdörtgenin alanı (alt sağdaki resim), mavi alanın tamamına esit olacaktır.



Maks-Min Esitsizliğinin iki tarafını  $b-a$ 'ya bölersek

$$\min f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \max f$$

elde ederiz. Eğer Geçis Değeri Teorisi doğruysa,  $\min f$  ve  $\max f$  arasındaki tüm noktalar ziyaret edilmelidir. O zaman böyle bir  $f(c)$  kesinlikle var demektir.

Calculus'un Temel Teoremi

Teori

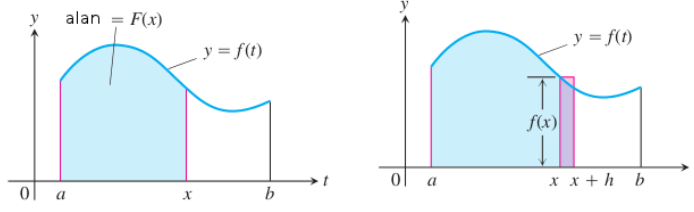
Eğer  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  arasında sürekli ise o zaman

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

fonksiyonu da  $[a, b]$  arasında sürekli, ve bu fonksiyonun türevi  $f(x)$ 'in kendisidir.

Yani

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$



Ispat

Turevin tanimini direk  $F(x)$  uzerinde uygulayalim,  $[a, b]$  icinde olan  $x$  ve  $x+h$  araligini alalim, ve

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

bolumunun limitinin,  $h \rightarrow 0$  iken,  $f(x)$ 'e gittigini gostermeye calisalim.  $F(x+h)$  ve  $F(x)$  fonksiyonlarini entegralleri uzerinden tanimlayalim. O zaman ustteki formulun bolum kismi

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

Entegrallerin toplam kuralina gore ustteki formulun sag tarafi

$$\int_x^{x+h} f(t)dt$$

ifadesidir. O zaman bolumun tamamı

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Ortalama Deger Teoremine gore, ustteki esitligin sagindaki ifadenin,  $x$  ve  $x+h$  araliginda  $f$ 'in aldigi degerlerden birine aynen esit oldugunu biliyoruz. Yani o aralıktaki bir  $c$  icin

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)$$

kesinlikle dogru olmalı. Simdi,  $h \rightarrow 0$  oldukca,  $x+h$  mecburen  $x$ 'e yaklasmak zorunda kalacaktır, cunku  $c$ ,  $x$  ile  $x+h$  arasinda sıkışıp kalmistir.  $f$  fonksiyonu  $x$  noktasinda surekli olduguna gore, o zaman  $f(c)$ ,  $f(x)$ 'e yaklasmalıdır.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

Simdi elimizdeki bu bilgiyle basa donersek,

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(c) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Kaynaklar

Thomas Calculus 11. Baski, sf. 130

Thomas Calculus 11. Baski, sf. 347

Thomas Calculus 11. Baski, sf. 358