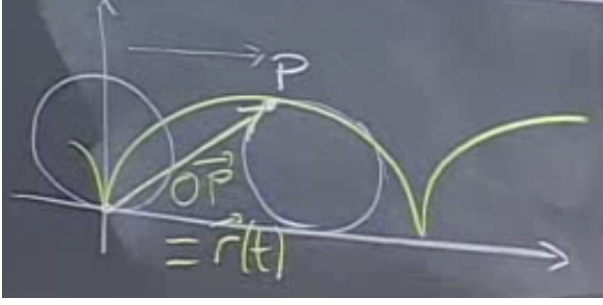


## MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 6

Bir önceki derste cycloid konusunu isledik.



Hareket eden bir noktanin pozisyonu

$$(x(t), y(t), z(t))$$

Bu noktayı takip etmenin diğer yollarından biri onu pozisyonu vektörü olarak görmek, ki bu vektörün bileşenleri noktanın koordinatları.

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

Vektör orijin (başlangıç) noktasından gelinen noktayı işaret eden bir vektör (resimde  $\vec{OP}$ ).

Cycloid probleminde tekerlek yarıçapını 1 alalım ve birim hızda ilerliyor olalım, ki böylece açı  $\theta$  ve zaman aynı şey haline gelsin

$$\vec{r}(t) = \langle t - \sin(t), 1 - \cos(t) \rangle$$

Tamam. Şimdi, noktanın pozisyonunu zaman açısından bildigimize göre, onun değişimini inceleyebiliriz, mesela hızına, ivmesine bakabiliriz. İlk önce hızı bakabiliriz. Fakat, aslında, hızdan daha iyisini hesaplayabiliriz. Hız tek bir sayıdır sadece, ama eğer şu içinde GPS olan satafatlı spor arabalarından birine sahip değilseniz, size hızınızın “hangi yönde” olduğunu söylemez. Sadece “gittiginiz yönde” (her ne yöne gidiyorsanız) ne kadar hızlı olduğunuzu söyler.

O zaman biz hızımızı hesaplarken, hem yönü, hem hızı aynı anda göze alabiliriz. Bu demektir ki vektör kavramı tekrar isimize yarayacak. Hızı vektör olarak hesaplayabiliriz.

Bunu nasıl yaparız? Pozisyon vektörünün zamana göre türevini alabiliriz.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Bu tür bir türevi bu derste ilk kez görüyoruz, ilk kez bir vektörün türevini alıyoruz. Bu şekilde türev almak demek, o vektörün bileşenlerinin teker teker türevini almak demektir. Yani

$$= \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\rangle$$

Cycloid orneğine dönersek

$$\vec{r}(t) = \langle t - \sin(t), 1 - \cos(t) \rangle$$

formülünün türevini alırsak ne olur?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \langle 1 - \cos(t), \sin(t) \rangle$$

İşte bu türev bize hangi yönde ve ne kadar hızlı gittiğimizi gösteriyor.

Bu arada bir vektörünün büyüklüğünün (magnitude) her zaman mesafesiz, uzaklıksal anlamı olmayabileceğini de görmüş oluyoruz. Hız kavramı bir orandır, katedilmiş bir mesafe, bir yer değildir,  $t$  anında bir yönde olan bir büyüklüktür. Fakat yine de bir büyüklüktür, bir yönü vardır, ve bu sebeple vektörler ile temsil edilebilir.

Problemimize dönelim. Önceki derste tekerlekten izlenen noktanın en alta gelip yükseldiği sıralarda hareketinin nasıl olduğunu irdelemiştik. Şimdi bu konuyu hız kavramını kullanarak incelemeye uğralım. Üstteki vektöre  $t = 0$  koyarsam, ne olur? Sonuç  $\langle 0, 0 \rangle$ , yani  $\vec{v} = 0$ . Tabii ki nokta  $t = 0$  öncesi hareket ediyor, sonra da ediyor, yani bir hızı var, sadece “o anda” hızı yok.

Peki hız vektör olarak daha fazla bilgi veriyor olmasına rağmen, ben yine de klasik anlamda hızı, yani o tek sayıyı elde etmek istiyorsam ne yaparım? Hız vektörünün büyüklüğünü hesaplarım,  $|\vec{v}|$ .

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(t)} \end{aligned}$$

Bu formüle bakarak hizin nerede en fazla, en az oldugunu hesaplayabiliriz. Eger  $t = 0$  ise, sonuc sifir olur.  $t = \pi$  ise elimizde  $\sqrt{4} = 2$  vardır, bu an noktanin tekerlegin en ustunde oldugu andir, bu an ayni zamanda en hizli hareket ettigimiz de andir. Hatta bu hiz tekerlegin saga dogru yatay gidis hizinin iki katidir, tekerlegin saga dogru birim hizda ilerledigini soylemistik, fakat nokta bunun ustune bir de merkeze gore bir donme hareketi icinde, ve bu iki etki birbirine eklenerek 2 hizina sebebiyet veriyor.

O nokta tepe noktasindan asagi inmeye baslayinca tabii ki noktamiz donusun “geriye dogru” olan etkisiyle toplami hizinda dusme yasiyor.

Ivme

Bu konuyu islemeden once klasik olarak bilinen ivme kavrami ile burada kullanacagimiz ivme kavrami ile ciddi uyusmazliklar oldugunu belirtmeliyim. Klasik anlayista ivme mesela bir arabada giderken “hissettigimiz sey” bizi koltuga iten kuvvet, hizdaki degisim (hizin turevi) olarak bilinir, ve eger bir arabada saatte 40 km ile gidiyorsam, ivme yok denir. Fakat simdi bu arabanin bir virajdan dondugunu farzedelim, bu durumda bir kuvvet hissederiz, hala saatte 40 ile gidiyor olabilirim, ama bir ivme vardır. Burada aslinda yana dogru bir hizlanma / ivme sozkonusudur. O zaman yine vektor kavramini kullanmamiz lazim.

Ivme vektorunu soyle belirtelim:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Fizikteki ivme tanimi da budur,  $F = ma$  derken kastedilen  $a$  iste bu  $\vec{a}$ 'dir. Bir vektordur.

Cycloid'e donelim.

$$\vec{v} = \langle 1 - \cos(t), \sin(t) \rangle$$

Turevi alalim

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \langle \sin(t), \cos(t) \rangle$$

$t = 0$  noktasinda ivme nedir?  $\langle 0, 1 \rangle$ .



Yani  $t = 0$  anındaki ivme bir birim vektor, ve yonu tam yukariya dogru. Bu ilginç bir şey, o anda hız sıfır, fakat bir ivme mevcut.

Bu arada, hemen belirtelim

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \neq \frac{d|\vec{r}|}{dt}$$

Yani bir vektorun turevinin buyuklugu, o vektorun buyuklugunun turevi ile aynı şey değildir. Esitsizligin sagindaki kavram zaten cogunlukla pek işe yarar bir şey değildir, hesaplanabilir, biraz sac bas yoldurabilir ama mümkündür, fakat cogunlukla kullanılmaz.

Egri Uzunlugu (Arc Length)

Egri uzunlugu bir egri uzerinde ne kadar yol katettigimizi gosteren bir buyukluktur. Mesela bir arabadaki ne kadar yol katettiginizi gosteren kilometre sayaci bunu arabanin hizini belli bir zaman uzerinden entegre ederek hesapliyor.

$s$  = bir yol uzerinde katedilmis mesafe

Bunun anlami olmasi icin tabii ki bir sabit, referans noktası dusunmeliyiz. Orijin noktası bu nokta olabilir. Bu arada  $s$  referans noktasinin neresinde oldugumuza gore negatif olarak ta hesaplanabilir. Referansa kadar eksi, son-rasi arti olabilir mesela.

Peki  $s$  ile  $t$ , yani egri uzunlugu ve zamani nasıl birbirine baglariz?

$$\frac{ds}{dt} = \text{hız} = |\vec{v}|$$

Yani birim zamanda katedilen egri uzunlugu hızdır.

Ama acik olmak gerekirse, aslinda turevin kesin degerini (absolute value) almak daha dogru olur (dikkat, vektor buyuklugu isareti degil, kesin deger

isareti bu sefer)

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = \text{hız} = |\vec{v}|$$

Niye? Belki bir egri uzerindeyiz ama o egri uzerindeki hareketimiz bir ileri bir geri seklinde. Bu durumda egri uzunlugunu surekli saymak istemeyiz, onu “cogalan (ileri), azalan (geri)” turunden bir buyukluk olarak gormek isteriz.

Egri uzunlugu hesabi icin hizi zaman uzerinden entegre ederiz. Mesela bir cycloid'in (resimde sari ile gosterilen) bir turunun uzunlugu ne kadar diye hesaplamak istiyorsak,

$$\vec{v} = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$$

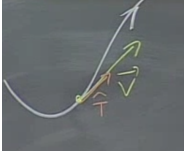
ifadesinin 0 ile  $2\pi$  arasinda entegralini almamiz lazim.

$$\int_0^{2\pi} \vec{v} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt$$

Acikca soylemek gerekirse bunun entegrali analitik olarak nedir bilmiyoruz, ama ileriki derslerde bu hesabi yapmak icin fiyakali bir numara gorecegiz.

Gidisatin Birim Teget Vektoru

Notasyonda bu kavram cogunlukla  $\hat{T}$  olarak gosterilir. Sapka var cunku vektor birim vektor.  $T$  cunku “teget”.



Vektor  $\vec{v}$  gidisata zaten tegettir.  $\hat{T}$  bir anlamda bu vektorun sadece yonudur, o zaman  $\vec{v}$ 'nin yonu bize gerekli, demek ki onu birim vektor haline getirirsek,  $\hat{T}$ 'yi elde etmis oluruz.

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Bir suru kavram birikti. Bunlarin birbiriyle bir alakasi olmalı, onlardan bahsedelim.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}$$

Ustte zincirleme kanununu (chain rule) kullandik.

Biraz once goruk ki  $ds/dt = |\vec{v}|$ .

Eger

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} |\vec{v}|$$

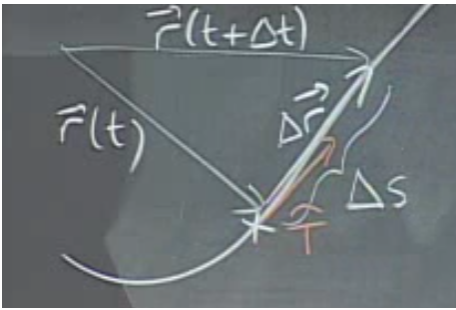
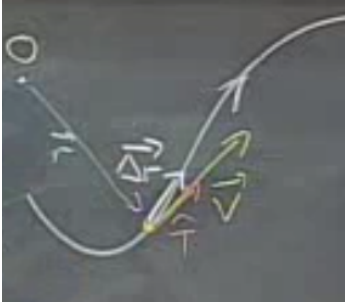
ise, vektor  $\vec{v}$ 'nin buyuklugunu oyle bir sey ile carpiyorum ki sonuc olarak vektorun kendisi ortaya cikiyor. O sey ne olabilir? Tabii ki vektorun birim vektor olarak gosterilecek yonu olabilir. Bu birim vektoru zaten hesaplamadik mi? Bu vektor  $\hat{T}$ 'den baskasi degil.

$$\vec{v} = \hat{T} |\vec{v}|$$

ya da

$$\vec{v} = \hat{T} \frac{ds}{dt}$$

Peki sezgisel olarak dusunursek,  $d\vec{r}/dt$  niye  $\hat{T}$ 'ye esit olmalı? Alttaki grafiklere bakalim.



Yerimizi  $t$  anında  $\vec{r}(t)$ ,  $\Delta t$  kadar bir adim atiyoruz, ve  $\vec{r}(t + \Delta t)$  noktasına

geliyoruz. Bu noktada egri uzerinde katedilen mesafe  $\Delta s$ , o zaman

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx h_{12}$$

Yer vektorumuzun degisimi ise

$$\Delta \vec{r} \approx \hat{T} \Delta s$$

İki tarafi  $\Delta t$  ile bolerek

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \approx \hat{T} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ve  $\Delta t \rightarrow 0$  olarak limitini alirsak, o zaman usttekiler turev haline gelir, yaklasiksal isaret esitlik olur. Yani

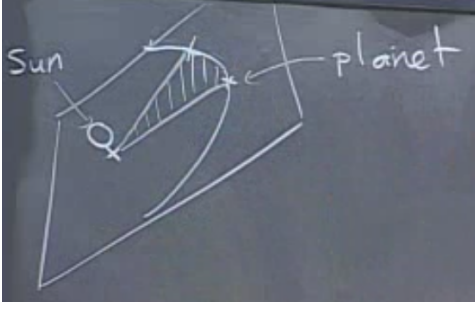
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{T} \frac{ds}{dt}$$

Peki bu tur konularda vektorler kullanalim. Aslinda simdiye kadar gorduklerimizi diger yollarla da temsil edebilirdik. Fakat vektor “dili” ozellikle hareketleri modellerken oldukca faydali oluyorlar.

Ornek - Kepler’in İkinci Kanunu

Kanun 1609’da kesfedildi, yani pek yeni bir gelisme oldugu iddia edilemez. Kepler gezegenlerin hareketini modellemeye ugrasiyordu. Bazi insanlar gezegenler mukemmel bir cember icinde donerler, vs. diyordu. Kepler gezegenlerin yorungesinin cember degil elips (ellipse) oldugunu one surdu. Kepler’in Kanunu soyle der:

Gezegenlerin hareketi bir duzlem uzerindedir, gunesten gezegene cekilebilecek bir hayali cizginin kapsadigi alanin buyumesi / asilmasi sabit bir orandadir. Bu ilginç bir kanun cunku bir kez yorungenin seklini bilirse, o yorunge uzerinde ne kadar hizli gidebilecegimizi bize soyluyor.

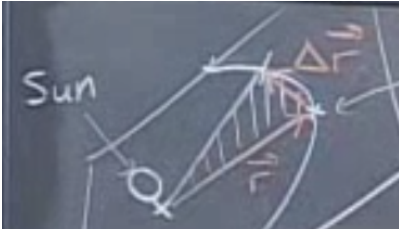


Ustteki sekile bakarsak, gunes (sun) etrafında bir gezegen (planet) var, ve katedilen yol tarali sekilde cizili. Kepler Kanunu su anlama gelir, katedilen alan zamana orantilidir, eger gezegen gunese daha yakin olsa, daha hizli gitmek zorundadir, uzak olsa, daha yavas gitmek zorundadir, ki katedilen alanin zamana orani ayni kalsin. Niye? Eger yakin olursak, gunese direk mesafe azalacaktır, boydan kaybettigimizi diger yonden kazanmamiz gerekir, yani ayni zamanda ayni alani katetmek icin bu sefer yorunde uzerine daha hizli gidilmelidir, ki ayni alana erisebilelim. Tabii gezegenlerin akli yoktur, boyle olsun diye ugrasmazlar, Kepler gozlemlerini yaparken, modellerken degismeyen bu buyuklugu kesfetmistir, ve sayede bazi hesaplari temiz sekilde yapabilmesi mumkun olmustur.

Biz de simdi bu kanunu, mekanik / fizikten bugun bildiklerimizi kullanarak dogrulamaya calisacagiz. Newton, ki 1600'lu yillarin sonlarinda ortaya cikti, bu durumu yercekimi formulleri ile aciklamayi basardi.

Simdi vektorler kullanarak bu modeli yaratacagiz ve Kepler'in onlari kullanarak alan hesabinin aslinda ne kadar dogal / bariz oldugunu gorecegiz. Fakat Kepler bu kanunu ortaya atarken isler hicbir bu kadar bariz degildi!

Tekrar bir pozisyon vektörü  $\vec{r}$  yaratalim, baslangici gunes, bitis noktasi gezegen olsun, katedilen yol  $\Delta\vec{r}$  olsun.



Katedilen alani nasil hesaplariz. Sekilde cizdiklerimiz yeterince ipucu veriyor,



yaklasiksal olarak bir ucgen olustu. Alan bir kenari  $\vec{r}$ , diger kenari  $\Delta\vec{r}$  olan paralelogramin yarisi. Paralelogram hesabini yapmayi biliyoruz nasilsa,

$$\Delta t \text{ de Kapsanan Alan} \approx \frac{1}{2} |\vec{r} \times \Delta\vec{r}|$$

ki  $\Delta t$  oldukca kucuk olmalı.

Ayrica

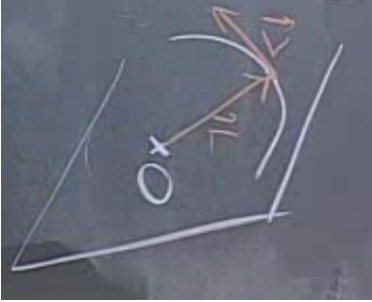
$$\Delta\vec{r} \approx \vec{v}\Delta t$$

O zaman alan

$$\approx \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| \Delta t$$

Peki bu alanin zamana sabit oranda olmasi ne demektir? Alanin  $\Delta t$ 'ye oranli olmasi demektir, bu da ustteki formilde  $|\vec{r} \times \vec{v}|$  teriminin sabit olmasi demektir.

2. kanunu dusunelim, gezegenin yorungesinin hep ayni duzlem uzerinde oldugunu soyluyordu. Bu demektir ki  $\vec{r} \times \vec{v}$  ile ortaya cikan ve bu ikisine normal (dik) olan ucuncu vektorun “yonu” hep ayni kalmalidir. Cunku iki vektor bir duzlem tanimlar, bu iki vektore dik olan duzleme de diktir, ve duzlem hic degismiyorsa bu vektorun yonu de degisemez.



O zaman hem buyukluk ayni, hem yon ayni, o zaman Kepler'in 2. Kanunu  $\vec{r} \times \vec{v}$  bir sabit vektor demektir. Ne yonu ne buyuklugu degismeyecektir.

Turevler baglaminda bunu soyle soyleyebiliriz

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = 0$$

Turevler normal carpimlar icine nufuz ederken Carpim Kanunu (Product

Rule) kullaniliyordu. Capraz carpimlar icin de ayni kural gecerli, yani ustteki

$$= \frac{\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Daha once turettigimiz esitlikleri usttekilerin yerine koyarsak

$$= \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = 0$$

Bir vektorun kendisi ile capraz carpimi her zaman sifirdir. O zaman  $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ . Denklemden atilabilir. Geriye kalanlar

$$= \vec{r} \times \vec{a} = 0$$

Ustteki ifade ne zaman dogru olabilir? Ya da genel olarak iki vektorun capraz carpimi ne zaman sifirdir? Eger birbirlerine paraleller ise. Bu demektir ki ivme  $\vec{a}$  ile pozisyon  $\vec{r}$  birbirine paraleldir. Yani Kepler'in 2. Kanunu aslinda bunu soylemektedir.

Ve biz bugun yercekim gucunun  $\vec{r}$ 'e paralel oldugunu biliyoruz, yani mesela gunesin bir gezegeni kendine direk bir yonde cektigini biliyoruz. Demek ki ustteki ifadenin sifir oldugu da dogrudur.

Not: Bu arada paralellik hem cekim, hem itme icin gecerli olurdu (her iki durumda da yon paralel). Hakikaten elektriksel alanda parcaciklari cekilmesi ve itilmesi baglaminda da Kepler'in Kanunu aynen islemektedir.