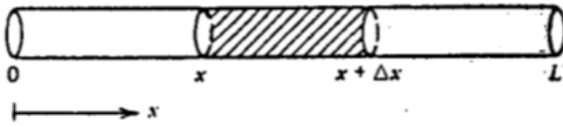


Isi Denklemini Turetmek

Bu denklemi turetmek için “enerjinin muhafazası (conservation of energy)” kuralını kullanacağız. Bu muhafaza kuralını bir esitliğe çevireceğiz, ve bu esitliği manipule ederek ortaya bir kısmi türevsel denklem (PDE) çıkaratacağız. Baz aldığımız fiziksel ortam bir metal çubuk, ki bu çubukta materyel yoğunluğu her noktada aynı. Formül şöyle;

$[x, x + \Delta x]$ içindeki net isi değişimi = Tanımlanan bölge sınırlarındaki net isi akisi
+ $[x, x + \Delta x]$ içinde üretilen isi miktarı



$[x, x + \Delta x]$ içindeki toplam isiyi nasıl hesaplarız? Eğer $u(x, t)$ metal çubuğun x noktasında t anındaki isiyi veriyorsa, verilen kesit üzerinden bir entegral alırız,

$$[x, x + \Delta x] \text{ içindeki Toplam Isi} = c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u(s, t) ds$$

Tanımlanan bölge içindeki net isi değişimini ise alttaki ile hesaplarız, üstteki formülün zamana göre türevini alırız.

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} c\rho A u(s, t) ds = c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u_t(s, t) ds$$

Türevin entegral içine nüfuz ettiğini görüyoruz, sabit olan $c\rho A$ ise dışarı çıkartılıyor. Bu son ifade, enerji formülünün sol tarafı. Sağ tarafı şöyle ifade edilebilir

$$= kA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]A \int_x^{x+\Delta x} f(s, t) ds$$

Newton’un kuralı isi akisinin isi fonksiyonunun uzaklıksal gradyanına (spatial gradient) orantili olduğunu söyler. Uzaklıksal gradyan u_x ’tir. Uzaklıksal gradyan, yani u_x , sonsuz küçük boyutta yanyana iki parçacığın isi farkını verecektir. Bu farkı, $[x, x + \Delta x]$ ’in iki ucunda alırsak, yani farkların farkını bize gereken orantıyı verecektir. Sezgisel olarak bunun niye olduğunu anlamak için fizik kaynaklarına başvurmak faydalı olabilir. Formülün tamamı şöyle

$$c\rho A \int_x^{x+\Delta x} u_t(s, t) ds = kA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]A \int_x^{x+\Delta x} f(s, t) ds \quad (1)$$

Bu noktada üstteki formülde entegrallerden kurtulmak istiyoruz. Ne yaparız? Ortalama Değer Teoremi’ne ihtiyacımız var, bu teoriyi Calculus’un Temel Teoremi yazısında bulabilirsiniz. Teori özetle eğer $f(x)$ bir $[a, b]$ aralığında sürekli ise o zaman en az bir ξ olmalı, $a < \xi < b$ olacak şekilde ve

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

dogru olmalidir. Bu teoriyi (1)'e uygularsak,

$$c\rho Au_t(\xi_1, t)\Delta x = kA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + Af(\xi_2, t)\Delta x$$

$$x < \xi < x + \Delta x$$

elde ederiz. ξ_1, ξ_2 yerine sadece ξ kullanılabilir, sebebini altta gorecegiz, sonra iki tarafi $c\rho A\Delta x$ 'e bolerek

$$u_t(\xi, t) = \frac{k}{c\rho} \left[\frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} \right] + \frac{1}{c\rho} f(\xi, t)$$

Simdi

$$\Delta x \rightarrow 0$$

olsun, bu durumda ustteki buyuk parantez icindeki bolum bir kısmi turev haline gelecektir, $\xi \rightarrow x$ olacaktir, cunku aralik oyle kuculuyor ki arada kalan ξ degeri sadece x olabilir.

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t) + F(x, t)$$

Ayrica

$$\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$$

$$F(x, t) = \frac{1}{c\rho} f(x, t)$$

esitliklerini kullandik.

Kaynaklar

Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Murlow, sf. 27