MIT OCW ODE - Ders 12

Bu derste homojen olmayan (inhomogeneous) denklemlere ciddi bir giris yapacagiz.

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

Simdiye kadar esitligin sag tarafi sıfır olmustu, artik orada bir fonksiyon var. Not: Cogu uygulamada $x$ yerine $t$ sembolu vardir, zaman (time) icin.

$f(x)$ icin pek cok isim kullanilir. Giris sinyali (input signal), surucu terimi (driving term), guc terimi (forcing term), vs. Bunlardan hangisinin kullanildigi hangi derste oldugunuza gore degisebilir, farkli muhendislik, bilim dallari farkli terimleri kullanabilirler, ama tum bu terimler ayni seyi kastediyorlar.

Cozum $y(x)$ ise cevap (response) olarak nitelenir, çıktı (output) kelimesi de kullanilir.

Simdiye kadar homojen kosulu incelememizin sebebi ustteki ODE'nin homojen denklemin cozumu bilinmeden cozulemeyecegi.. Yani $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$ denklemi cozum icin onemli. Sıfıra esit olan denkleme de farkli isimler veriliyor: Alakali homojen ODE, indirgenmis (reduced) denklem gibi.

Yani homojen denklemin cozumu $y = c_1y_1 + c_2y_2$ homojen olmayan denklem icin gerekli, o sebeple ayri bir sekilde bir sembolu de var. Bazen $y_c$, bazen $y_h$. Hic alt sembol (subscript) koymayanlar da var, bunlar isi oldukca karistiriyorlar tabii. $y_c$'ye verilen isim nedir? Bir ismi yok, cogu kitap ona "akalali homojen denklemin cozumu" gibi uzun bir etiket veriyor. Bu dersin kitabi ona "tamamlayici cozum (complimentary solution)" ismi vermis.

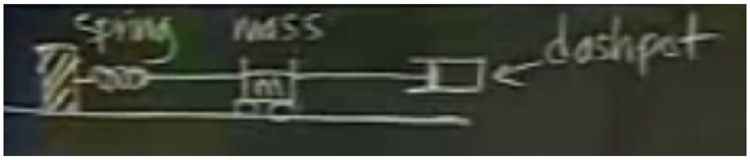
Klasik Ornekler

Ornek 1

$mx'' + bx' + kx = f(t)$

Bu daha onceden hatirlayacagimiz yay / kutle / engelleyici sistemi. Fakat bu sistemde daha once sag taraf sıfırdi. Simdi sıfır yerine olan $f(t)$ fiziksel sistemde neyi temsil ediyor?

Resmi hatirlayalim

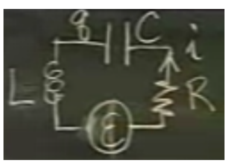



Ortada duran kutle ileri geri gidebiliyordu, eger denklemde $f(t)$ varsa, biri o kutle uzerinde ek olarak direk bir guc uygulamis olur, mesela kutlenin bir metal oldugunu farzedelim, ve uzaktan birinin bir miknatis tutarak yay, engelleyici "haricinde" degisik bir yonden de bir guc uyguladigini hayal edelim.

$f(t) = 0$ oldugu zaman (yani denklemde olmadigi zaman), sistem pasiftir. Disaridan hicbir guc uygulanmamaktadir. Baslangic sartlari olarak bazi seyler yapabiliriz tabii, mesela kutleyi bir tarafa dogru cekip, birakmak gibi. Ama ondan sonra sistemde hersey kendiliginden olacak, sistem salinima girecek, ya da girmeyecek, vs. Eger $f(t)$ varsa, bu sisteme guc uygulanmis sistem (forced system) denmesi bu yuzden.

Ornek 2

Diferansiyel bir modeli mukemmel bir sekilde takip eden bir diger sistem, basit bir elekrik devresidir.




$L$ bobinin yarattigi olusturucu (inductance) terimidir. Bu devreyi temsil etmek icin iki diferansiyel denklem kullanilir, ama bu denklemlerden biri otekinden turetilebilir, ikisi de Kirchoff'un voltaj kanununa baglidir. Bu kanun der ki "devrenin tum noktalarinda alinan voltaj farkliliklari / dusukluklerini toplarsak, sonuc sifir olmalidir".

$q$ kapasitans uzerindeki akim (charge), $i$ devredeki akimdir.

Denklem soyle

$$Li' + Ri + \frac{q}{C} = \varepsilon(t)$$

Sagdaki $\varepsilon$ belki bir pil, bir jenerator uzerinden devreye eklenen enerji. Bu enerji sinussel bir dalga seklinde olabilir, ki o zaman alternatif akimdan (AC/DC) bahsediyor olurduk, ya da sabit olabilir, o zaman duz akimdan

(DC) bahsediyor olurduk.

Formul hala nihai formunda degil, oraya gelmek icin bir sey daha bilmemiz gerekiyor, $q' = i$, yani akimin kapasitoru terk edis hizi devrenin akima esittir, akim bu yuzden hareket eder. Tabii aslinda hareket eden bir sey yok, her elektron yanindakini ittirir, ama aslinda yerlerini terk etmezler, her neyse [hoca ben de bu isi tam anlamiyorum diyor], bu noktada iki sey yapabiliriz. Ya tum denklemi entegre ederiz ve her seyi $q$ bazinda temsil ederiz, ya da denklemin turevini aliriz ve her seyi $i$ bazinda temsil ederiz. Bir turev yontemini takip edecegiz:

$$Li'' + Ri' + \frac{i}{C} = \varepsilon(t)'$$

Eger sag tarafta duz akim olsaydi turev sonrasi $\varepsilon(t)'$'nin sifir olacakti. Boylece elimize homojen bir denklem gecmis olurdu.

Eger duz akim bile koymamis olsaydik, yani devreye disaridan ek yapmasaydik, belki baslangic sarti olarak kapasitor icinde bir doluluk olabilirdi, ve bu akim yavasca devre uzerinden, az amartisorlu durumda mesela ileri geriye bir salinimla, akacak ve bitecekti. Ama genellikle uygulamalarda olan disaridan enerji verilmesi ve akimin ittirilmesi / surulmesi / idare edilmesi, ve buna gore akimin ne olacaginin hesaplanmasi.

Elimizdeki iki problemler iste bunlar. Ya pasif devre, ya da disaridan verilen enerji.

Simdi homojen bir denklemi cozmek icin gereken kilit teoremi gorelim.

Teori

$$Ly = f(x)$$

Ustteki bir ODE ve $L$ bir lineer operator. O zaman cozum su formdadir:

$$y_p + y_c$$

yani

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$y_p$ ozel (particular) cozum. Bu kelime bu dersin en kotu secilmis / kafa karistirici kelimelerinden biri. Ozel cozum derken sanki ozgun, tekil cagrisimi yapiliyor ama aslinda kastedilen herhangi bir cozum.

Teoriye donelim, eger $L$'in lineer operator olusunu kullanirsak teorinin ispati cok kolay. Iki ifadeyi ispatlamamiz gerekiyor.

1. Tum $y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$ ifadeleri cozumdur. Bu ifadeyi nasil ispatlariz? Ana denkleme koyarak.

$L(y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2)$

Ustteki lineer operator olduguna gore

$= L(y_p) + L(c_1 y_1 + c_2 y_2)$

Biliyoruz ki

$= \underbrace{L(y_p)}_{f(x)} + \underbrace{L(c_1 y_1 + c_2 y_2)}_{0}$

$= f(x)$

Demek ki tum $y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$'ler bir cozumdur.

Bu hikayenin bir yarisi tabii. Hikayenin ikinci yarisi bu cozumlerin "yegane" cozumler oldugunu gostermek. Simdi ortaya $u(x)$ diye ufaklik cikartacagiz, bu arkadas cozum oldugunu zannedecek. Ve bizde ispatta gostermeliyiz ki bu kendini farkli zanneden $u(x)$ bile $y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$ ifadesinden baska bir sey olamaz.

Bunu nasil yapacagiz. Cok kolay. Eger bir cozum ise

$L(u) = f(x)$

olmalidir. Peki su bizim "ozel cozumu" kullanalim, $L(y_p)$ nedir? Aynisi

$L(y_p) = f(x)$

Son iki denklemi birbirinden cikartirsak

$L(u) - L(y_p) = 0$

$L(u - y_p) = 0$

O zaman ustteki son ifade homojen denklemin bir cozumudur. O zaman su dogru olmali

$u - y_p = \tilde{c_1} y_1 + \tilde{c_2} y_2$

Diger yandan onceden bildigimiz gibi

$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$

$y - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$

Ya da

$u = y_p + \tilde{c_1} y_1 + \tilde{c_2} y_2$

$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$

Son iki ifade birbirinin aynisi, o zaman $u$ farkli bir cozum olamaz.

Eger katsayilar sabit ise, isin yarisini halletmisiz demek ki. Tamamlayici denklemi biliyorsak, ki onu nasil bulacagimizi biliyoruz artik, ustel, kompleks ustel, sin, cos fonksiyonlar kullanarak, vs. Geriye ne kaliyor? Sadece ozel bir cozum bulmak kaliyor. Yani hangisi olursa olsun, esitligin sag tarafina uyan "bir" cozum buldugumuz anda, isimiz bitiyor.

Is bitiyor dedik ama, onumuzdeki iki haftayi bu ozel cozumu bulmakla gecirecegiz. Fourier Serilerini kullanan bir genel metot gorecegiz, cunku bu serileri islemek icin iyi bir bahane bu, fakat sunu da eklememiz lazim. Birkac standart fonksiyon icin operatorler kullanaran genel bir yontem var, tum diger "standart olmayan" durumlar icin seriler kullaniliyor, ya da yaklasiksallama (approximation) kullaniliyor. Eger bunlari hicbiri islemezse, en kotu durumda bilgisayara hesaplattiririz, ve sayisal cevabi ozel cozum olarak kullaniriz.

Simdi bu yaptiklarimizi 1. seviye denklemlerle irtibatlandirmak istiyorum. Ders 8'den hatirlayalim:

$y' + ky = q(t)$

Cozum icin entegre edici faktoru bulmustuk, carpmistik, vs. Cozum soyleydi

$$y = e^{-kt} \int q(t) e^{kt} dt + ce^{-kt}$$

Ustteki formul 2. seviye denklemi cozmek icin gosterdigimiz paradigmaya nasil baglantili? Ustteki denklemde artinin sagindaki terim tamamlayici denklemin cozumu gibi durmuyor mu?

$$y = e^{-kt} \int q(t) e^{kt} dt + \underbrace{ce^{-kt}}_{y_c}$$

Bu mantikli cunku $ce^{-kt}$ alttaki homojen denklemin cozumu degil mi?

$y' + ky = 0$

Bunu hemen ilk bakista goruyoruz (dersin bu seviyesinde artik bunu aninda soyleyebilmemiz lazim).

O zaman ustteki cozumde $y_c$'den geri kalanlar da ozel cozum olurlar,

$$y = \underbrace{e^{-kt} \int q(t) e^{kt} dt}_{y_p} + \underbrace{ce^{-kt}}_{y_c}$$

Itiraz edenler olabilir, ama bu $y_p$ icinde tanimsiz bir entegral var, ayrica hic sabit yok, vs. Eger entegralin tanimsizligi bizi rahatsiz ediyorsa, onu tanimli hale getirmenin numarasini gormustuk, alt sinir icin bir sifir koyariz, uste $t$ koyariz, vs. Sabit konusuna gelince, entegre edince ortaya bir sabit cikmayacak mi?

Devam edelim. Ustteki cozum hakkinda bir yorum daha yapmistik, hatirlarsak, $k > 0$ ve $k < 0$ sartlari oyle farkli iki sonuca yol aciyor, oyle farkli fiziksel anlamlara sebep oluyor ki, aslinda ustteki ayni forma bagli olmalarina ragmen, bu sartlarin tamamen farkli denklemler olarak gorulmeleri gerektiginden bahsetmistik.

$k > 0$, ustteki cozumu $y_c$'nin gecici (transient) $y_p$'nin sabit konuma (steady-state) donustugu bir durum ortaya cikiyordu. Bu durumda baslangic sartlarinin tanimladigi $c$'nin ne oldugu onemli olmuyordu, cunku $c$'yi iceren kisim ne olursa olsun sifira gidiyordu.

$k < 0$ olunca isler degisiyor tabii, o zaman ust paragraftaki analiz ise yaramiyor.

Simdi yapmak istedigim ustteki anlatimin 2. ve daha ust seviye denklemlerdeki karsiligini bulmak. 2. seviyeyi anlamak yeterli aslinda, onu anlarsak, daha ust seviye denklemlerde yapilacaklar tipatip ayni. 2. derece denklemi yazalim:

$y'' + Ay' + By = f(t)$

Sormak istedigim soru su. Hangi sartlarda 1. derece durumunda gordugum turden bir sabit konum kismi, gecici kisim ayrimini 2. derece denklem icin de yapabilirim?

Cozum neye benziyor?

$y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$

Bu denklemde baslangic sartlari $c_1y_1+c_2y_2$ bolumunde olduguna gore, "hangi sartlarda olursa olsun" diyecegimiz kisim ve $t \to \infty$ sirasinda yokolup gidip gitmeyecegini anlamaya calisacagimiz kisim o'dur.

Simdi yokolma mantiginin mekanigine gelelim. 1. derece durumda o mekanigi gormek kolaydi, cunku $e^{-kt}$ ibaresinde $k$'nin etkisinin hemen gorebiliyorduk. 2. derece durumunda bu biraz daha zor, ama cozumu elde edince ne kadar guzel bir sonuc oldugunu gorecegiz.

Yani soru $t \to \infty$ ne zaman $c_1y_1 + c_2y_2 \to 0$? Cunku eger bu olursa o zaman ODE'ye stabil denebilir. O cevabi bulursak o zaman

$y = y_p + \underbrace{c_1y_1 + c_2y_2}_{gecici}$

olacak ve (onumuzdeki iki hafta icinde bulmak icin ter dokecegimiz) cozum $y_p$ aradigimiz stabil cozum olacak.

ODE'lerin stabil cozumunu bilmek cok onemli, cunku o zaman ODE hakkinda kabaca bir fikir sahibi olabiliyorsunuz, uzun vadede nasil davranacagini anliyorsunuz.

Bu analizi kalem kalem, her sart icin irdeleyerek (case by case basis) yapalim.

| Karakteristik denklemin kokleri | Cozumler | Stabilite şartı |
|---|---|---|
| $r_1 \neq r_2$ | $c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$ | $r_1 < 0$ ve $r_2 < 0$ |
| $r_1 = r_2$ | $(c_1 + c_2t)e^{r_1t}$ | $r_1 < 0$ |
| $r = a \pm bi$ | $e^{at}(c_1cos(bt) + c_2sin(bt))$ | $a < 0$ |

Yani tablonun sagindaki sartlar bir ODE icin gecerliyse, o ODE stabil demektir. Terminolojide bunu soylemenin kisa yolu "eger tum karakteristik koklerin reel bolumu negatif ise" sozudur.