Taylor Serisi

Formul

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

Bu formule nasil ulasirim? Su sekildeki bir seri olsun

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

Usttekinin turevini alalim. Tabii ki sabit a_0 yokolacak, x'in onundeki katsayi kalacak, vs. Sonuc

$$f' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ..$$

Birkac kez daha

$$f'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + ..$$

$$f''' = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 x + ...$$

Eger son formule sifir verirsem, 3. terimi cimbizla cekip alabilirim

$$f'''(0) = 3 \cdot 2a_3$$

Cunku geri kalan her sey sifir olup yokoldu, geriye sabitler kaldi. O zaman a_3'u elde etmek istiyorsam,

$$\frac{f'''(0)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = a_3$$

Bir kalip ortaya cikmistir herhalde, genel olarak

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)...1$$

Bu katsayilar Taylor formulunde x_n onune gelecek katsayilardir.

O zaman

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''\frac{x^2}{2!} + ...$$

Daha genel olarak 0 yerine a alirsak, a yakinindaki fonksiyonun acilimini temsil edebiliriz

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''\frac{(x-a)^2}{2!} + ...$$

Alternatif Turetim

Taylor serilerinin arkasindaki fikir, surekli ve sonsuz defa turevi alinabilen turden bir fonksiyon $f(x)$'i bir x_0 noktasinin (burada a sembolu de kullanilabilir) "cevresinde", yakin bolgesinde yaklasiksal olarak temsil edebilmektir.

Turetmek icin

Calculus'un Temel Teorisi der ki:

$$\int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t = f(x) - f(a)$$

Bu formulu tekrar duzenlersek, alttakini elde ederiz:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t$$

Bunun uzerinde Parcali Entegral yontemini uygulariz. Parcali Entegral teknigi genel olarak soyledir:

$$\int_a^b u\ dv = u\ v - \int_a^b v\ du$$

Simdi iki ustteki formulun entegral icindeki kismini parcali entegrale uyacak sekilde bolusturelim

$u = f'(t)$ ve $dv = dt$

O zaman acilim

$$f(a) + xf'(x) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\ \mathrm{d}t$$

Alttaki formulu kullanarak

$$\int_a^x xf''(t)\ \mathrm{d}t = xf'(x) - xf'(a)$$

iki ustteki formulu su hale getiririz

$$f(a) + \int_a^x xf''(t)\ \mathrm{d}t + xf'(a) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\ \mathrm{d}t$$

Bazi ortak terimleri disari cekersek

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\ \mathrm{d}t$$

Ayni teknigi bir daha uygulayinca

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f'''(t)\ \mathrm{d}t$$

Tum bunlari daha genel olarak kurallastirmamiz gerekirse, tumevarim (induction) teknigini kullanalim, varsayiyoruz ki Taylor'un Teorisi bir n icin gecerli ve

$$f(x) = f(x) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ...\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ \mathrm{d}t$$

Sonuncu entegrali parcali entegral teknigi ile tekrar yazmamiz mumkundur. $(x-t)^n$'in anti-turevi (anti-derivative) $\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}$ ile verilir, o zaman

$$\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ \mathrm{d}t$$

$$= -\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)n!}(x-t)^{n+1}\right]_a^x + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)n!}(x-t)^{n+1}\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\ \mathrm{d}t$$

Son entegral hemen cozulebilir

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Alternatif Form

Hesapsal Bilim derslerinde bu serinin alternatif bir formu daha cok karsimiza cikabilir. f'i t yakininda ufak bir h adimi atildigini farzederek Taylor serileri uzerinden $f(t+h)$'i gelistirmek suretiyle temsil edebiliriz. Eger $x = t + h$ ve $a = t$ alirsak alttaki orijinal Taylor serisini

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(x) + ...$$

donusturebiliriz. Baslayalim,

$$x = t + h \Rightarrow h = x - t$$

$$t = a$$

Once $a = t$ gecisini yapalim

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)(x-t) + f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} + ...$$

Simdi $h = x - t$ gecisi

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)h + f''(t)\frac{(h)^2}{2!} + ...$$

Boylece

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{1}{2}h^2 f''(t) + ...$$

Bu tanimin, birinci turevin formuluyle olan alakasini gormek icin

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ifadesini hatirlamak yararli olabilir, yaklasiksal isareti $\approx$ kullanildi, cunku bu ifade sadece $h \to 0$ iken dogrudur (turevlerin limit olarak tanimindan hareketle). Biraz cebirsel manipulasyon yaparsak

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

$$f(x+h) \approx f'(x)h + f(x)$$

En son formulun Taylor serisi 1. derece acilimiyla ayni oldugu goruluyor.

Kaynak

MIT OCW 18.01 Ders 38

http://www.proofwiki.org/wiki/Taylor's_Theorem