

## MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 4

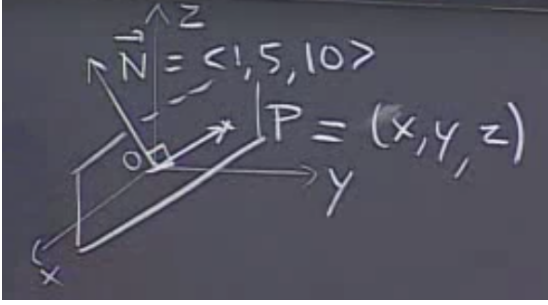
Düzlemin formülüne donelim.

$$ax + by + cz = d$$

Bu formül  $x, y, z$  noktalarının bir düzlem üzerinde olma şartını tarif ediyor.

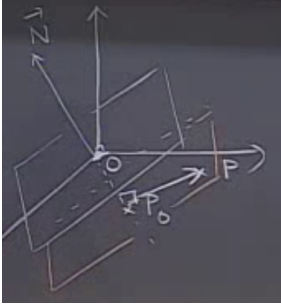
Su problemlere bakalım. Diyelim ki

- 1) Orijinden, yani  $(0, 0, 0)$  noktasından geçen ve normal vektörü  $\vec{N} = \langle 1, 5, 10 \rangle$  olan bir düzlem yaratmak istiyoruz. Yani alttaki gibi bir şekil:



Herhangi bir nokta  $P = (x, y, z)$  ne zaman bu düzlem üzerindedir? Eğer orijinden  $P$ 'ye giden vektör, düzlem normali ile doksan derece açı oluşturuyorsa. Yani  $\vec{OP} \cdot \vec{N} = 0$  olduğu zaman  $P$  noktası düzlem üzerindedir. Bu çarpımı normal için verdiğimiz örnek sayılar için yaparsak, sonuç  $x + 5y + 10z = 0$  olacaktır.

- 2) Şimdi düzlem  $P_0 = (2, 1, -1)$  noktasından geçsin (orijinden değil), ve normal yine aynı olsun,  $\vec{N} = \langle 1, 5, 10 \rangle$ . Bu durumu zihninizde canlandırmak için yeni bir düzlemi hayal etmemiz lazım, ve  $P$  noktası bu yeni düzlem üzerinde olacak.



$P$  ne zaman düzlem üzerinde? Eger

$$\vec{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$$

ise. O zaman

$$\langle x - 2, y - 1, z + 1 \rangle \cdot \langle 1, 5, 10 \rangle = 0$$

$$x + 5y + 10z = -3$$

1. problemdeki sonuctakiyle aradaki tek fark esitligin sagindaki -3 degeri. Bir benzerlik ise her iki durumda da  $x, y, z$  katsayilarinin normal vektorun degerlerine tekabül ediyor olmasi. Bu düzlemler hakkında önemli bir puf noktası, eger orjinden geçiyorlarsa esitligin sag tarafı sıfır, baska bir yerden geçiyorlarsa, baska bir deger. Peki bu -3 degerini daha hızlı bir şekilde bulamaz miydik? Bulabilirdik. Cunku esitligin sol tarafının katsayılarını hızlı bir şekilde bulabiliyoruz, orası tamam. Ayrıca düzlemdeki bir noktanın koordinatlarını da biliyoruz, bu nokta düzlemin içinden geçmesini şart kıldığımız  $P_0$  noktası. O zaman bu koordinatları  $x, y, z$  terimlerini içeren formüle koyarsak, esitligin sag tarafını hemen hesaplarız.

$$x + 5y + 10z = 1(2) + 5(1) + 10(-1) = 2 + 5 - 10 = -3$$

Bu arada bir düzlemin tek bir formülü yoktur, sonsuz tane denklemi vardır. Mesela her şeyi 2 ile çarpıyordum

$$2x + 10y + 20z = -6$$

olurdu, ve bu formülde aynı denklemin formülü olurdu. Bunun çoklugu sebebi normal vektorlerin herhangi bir “boyda” olabilmesi, diklik için yok yeterli olduğu için, farklı boylar ama değişmeyen yön hala aynı düzlemi tanımlıyor.

Düzlemi tanımlamak için normal vektor en önemlisi. Bir önceki derste düzlem üzerindeki noktalar, onların ortaya çıkardığı iki vektor o vektorlerin çarpımından üzerinden nasıl normal vektor hesaplanabileceğini görmüştük.

Soru

Vektor  $\langle 1, 2, -1 \rangle$  ve düzlem  $x + y + 3z = 5$  birbirine

1. Paralel

2. Dik

3. Hicbiri

Cevaplayin.

Vektörü ve düzlemin normal vektörünü çarptık.  $\langle 1, 2, -1 \rangle \cdot \langle 1, 1, 3 \rangle = 0$ . Doğru cevap 1.

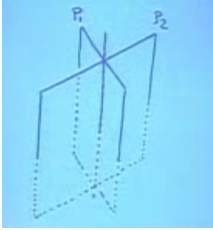
Şimdi bir lineer denklem sistemini inceleyelim.

$$x + z = 1$$

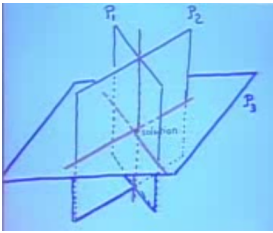
$$x + y = 2$$

$$x + 2y + 3z = 3$$

İlk iki denkleme bakalım. Bu denklem belli, özel iki  $x, z$  noktasından bahsediyor. İkinci denklemi de gözönüne alınca, aynı  $x, z$  noktalarının ikinci denklem için de geçerli olması gerekir.



İlk iki denklemleri ayrı düzlemler olarak düşünürsek, çözüm olacak  $x, y, z$  iki düzlemin kesiştiği yerdedir. Peki üçüncü denklem, yani üçüncü düzlem ne yapar?



O da iki düzlemin kesimindeki çizgiyi keser. Kesisimin kesimi bir noktadır. O nokta da, üstteki lineer sistemin çözümü olan noktadır.

Soru

Eger 3 x 3 boyutlarındaki bir lineer sistemin cozumu bir nokta degilse, nedir?

1. Cozum yoktur
2. Iki nokta (2 cozum)
3. Bir cizgi ( $\infty$  tane cozum)
4. Bir tetrahedron
5. Bir duzlem
6. Bilmiyorum

Diyelim ki ilk iki duzlemin kesismesi bir cizgi ortaya cikardi, ama bu cizgi ucuncu duzlem ile paralel. O zaman cozum yok demektir. Fakat su da dogru olabilir, belki bu cizgi ucuncu denklemin “uzerindedir”. Bu durum cebirsel olarak iki denklemin ortaya cikardigi bir denklemin ucuncu denklemin kati olmasidir. Bu durumda ucuncu denklem bize hicbir yeni bilgi saglamamistir. Bu durumda sonsuz tane cozum vardır, kesirmeden ortaya cikan cizgi üzerindeki “her” nokta bir cozumdur, ve sonsuza kadar uzayan bir cizgi üzerinde sonsuz tane nokta vardır.

O zaman dogru cevap 1, 3 ve 5.

5 niye dogru? Aynen iki denklemden ortaya cikan denklemin ucuncu denklemin bir kati olmasi gibi, her uc denklem ayri ayri birbirinin kati olabilir. O zaman bu denklemler aslinda ayni duzlemdirler. Cozum bu tek duzlemdir, ve sonsuz tanedir. Yani size ayni denklemleri uc kere vermisim demektir, bu pek ilginç bir sistem sayılmaz, ama yine de bu bir lineer sistemdir.

Soru

$x + y + z = ..$  gibi bir denklemin sagindaki sifir olmayan degerlerin geometrik anlami nedir? Cevap: Daha once gordugumuz  $x + y + z = 0$  orijinden gecer. Sag taraf sifir degilse, sifirdan gecen ayni duzleme paralel ama ondan belli miktarda uzakta bir duzlemden bahsediyoruz demektir. Ne kadar uzakta? Her zaman esitligin sagindaki buyukluk kadar degil. O uzaklik icin hesabin ayrica yapılması lazim. Simdilik sadece orijinden uzakta oldugunu bilelim.

Simdi matrislere donelim. Onceki derste gordugumuz lineer cebir formulu hatirlayalim

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

Buradaki problem, bir matrisin her zaman tersini alamayacagimiz gercegi.

Hatirlarsak

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

Bu hesapta eger determinant sifir cikarsa ustteki bolme islemini yapamayiz. Yani bir onceki derste aslinda sunu soylememistik; bir matris sadece determinanti sifir degilse tersine cevirilebilir.

Geometrik olarak cozumun tek nokta oldugu durum,  $A$ 'nin tersine cevirilebilir oldugu durum. Kesisim cizgisinin ucuncu duzleme paralel oldugu durum ise determinantin sifir, yani tersini cevirim yapilamadigi durum.

Homojen Durum

$AX = 0$  homojen durumdur, esitligin sagi sifirdir, yani uc denklem orneginde tum denklemlerin sag tarafi sifirdir.

Ornek

$$x + z = 0$$

$$x + y = 0$$

$$x + 2y + 3z = 0$$

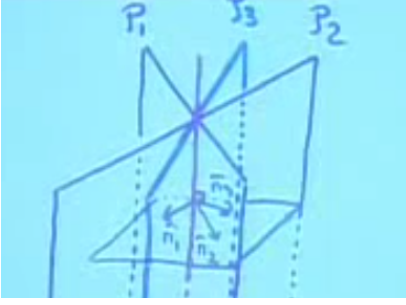
Aslinda bu denklemin bariz ve hep mevcut bir cozumunu zaten biliyoruz.  $x, y, z$ 'nin hepsi sifir. Matematiksel terminolojide bu cozume “basit cozum (trivial solution)” denir. Geometrik anlami nedir? Her denklemin sifira esit olmasi, onlari temsil ettigi her duzlemin orijinden gectigi anlamina gelir. Eh hepsi orijinden geciyorsa, hepsi orada kesiyorlar da demektir. Basit cozum budur.

Burada iki alt kalem / durum daha var.

1) Eger  $\det(A) \neq 0$  o zaman  $A$  tersine cevirilebilir, o zaman  $X = A^{-1} 0 = 0$ .

Baska hicbir cozum yoktur.

2) Eger  $\det(A) = 0$  o zaman  $\det(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3) = 0$ . Uc formulu temsil eden uc duzlemin normal vektorleri determinanti sifir, yani  $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$  ayni duzlemde (coplanar).



$\det(\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3)$  hesabının paralelpipe hacmini hesapladigini hatirlayalim, ve bu hacim sifir ise vektorlerin olusturdugu hacim sifirdir, yani paralelpipe tamamen yassi demektir. O zaman vektorler ayni duzlemde dir.

Simdi  $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{N}_3$ 'nin ayni duzlemde oldugu durumu dusunmeye devam edelim, bu vektorlere ayni anda dik olan bir cizgiyi dusunelim. Iddia ediyorum ki o cizgi, kesisme cizgisi olacak.