Dalga Denklemini Turetmek

PDE'lerin ortaya cikabilecegi durumlardan biri, ayriksal parcaciklardan olusan bir sistemin limite gittigi andir. Bu tur sartlarda ODE'lerden olusan bir sistem limite giderken bir PDE ortaya cikartabiliyor. Sureklilik Mekaniginden (Continuum Mechanics) bir ornek verecegiz yani.

Sistem ayriksal baslayacak, sureklilik limitine gidecek. Mesela sivilar mekaniginde (fluid mechanics) Euler denklemi, Navier-Stokes denklemleri sivi sisteminin (su gibi mesela) sureklilik limitidirler. Bu denklemler sivi icindeki ufak parcaciklari tarif etmezler, sistemin butunune bakarlar.

Hepimiz Newton Kanunu biliyoruz (ki bu kanun bu derste ihtiyacimiz olan yegane fizik bilgisi)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

Formul ne diyor? Kutle carpi ivme esittir kuvvet. Gayet basit.

Diyelim ki elimizde N tane tane parcacik var, $i = 1,..,N$, ve bu parcaciklar birbirleriyle etkilesim halindeler, aralarinda bir tur cekim var belki, ya da baska bir kuvvet. O zaman her parcacik icin ayri ayri hareket kanunu isleyecek. Ve i'inci parcacik uzerinde bir kuvvet var, ve bu kuvvet sistemdeki tum diger degiskenlerle bir sekilde bagimli. x tabii ki pozisyon degiskeni. O zaman

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = F_i(\vec{x})$$

Dikkat edersek, F fonksiyonuna giren parametre tum parcaciklar, yani o parcacigin hissettigi kuvvet bir sekilde tum diger parcaciklarla alakali.

Baslangic Sarti

i'inci parcacigin baslangic konumu

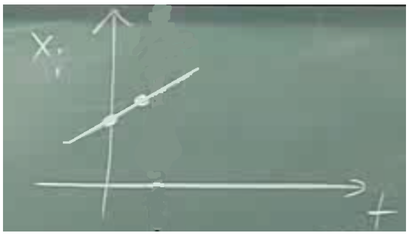
$$x_i(0) = \hat{x}_i$$

Tipik olarak baslangic hizi da verilir

$$\frac{dx_i}{dt}(0) = \hat{v}_i$$

Ustteki bir baslangic deger problemi (initial value problem). Biz bu derste PDE bazinda sinir degerli problemlerle ugrasacagiz.

Bu tur baslangic deger problemleri iyi huyludur, cunku, mesela bu ornekte 2. derece bir diferansiyel denklem var elimizde, ve bagimli degisken x var, ve bize verilen kosulu anlamak icin alttaki resme bakalim

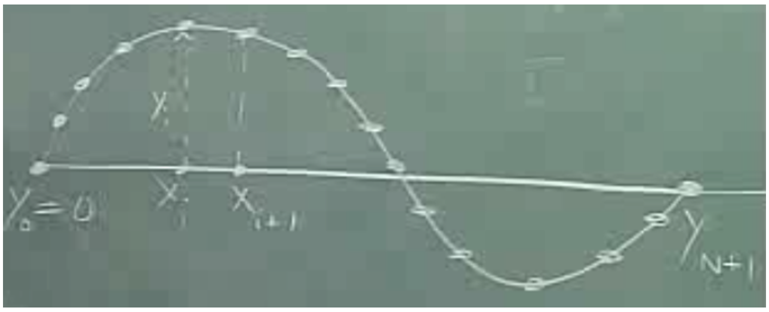


Bize verilenler, $t = 0$ aninda x_i noktasinin oldugu yere ek olarak (soldaki nokta), bir de o noktadaki egim bilgisi. Bu tur bilgi verilince, parcacigin hangi yone gitmeye meyilli olacagini da gormus oluyoruz. Sanki bir top ateslenmis, ve topun ates ettigi anda nerede olduguna ek olarak topun namlusunun gosterdigi yer de bize soyleniyor.

Bu iyi huylu bir problem. Sinir degerli denklemler cok daha karmasik olabiliyor. Bu arada "sinir kosullu" kelimesindeki "sinir" cogunlukla bir fiziksel seye tekabul eder, mesela bir ip vardir, ve ipin "sonunda" yani sinirlarinda degerin ne olmasi gerektigi sabitlenir.

Devam edelim. Kurmak istedigimiz model bir tur "gitar teli" modeli.

y_i = i'inci parcacigin yuksekligi olsun.



Tel uzerinde bir suru parcacik var, tel iki ucundan sabitlenmis durumda. Bu problemde yatay hareketle ilgilenmiyoruz, sadece yukari / asagi hareketle ilgileniyoruz. Bir tanim daha:

$\Delta x = x_{i+1} - x_i$

Basitlestirme amaciyla bu tanimi yaptik. Tum parcaciklarin arasindaki mesafeyi sabit, ve ayni olarak aldik. Benzer sekilde

$m_i \equiv m$

Yani tum parcaciklar ayni kutleye sahip.

Simdi Newton Kanununu parcaciklara uygulayalim [1].

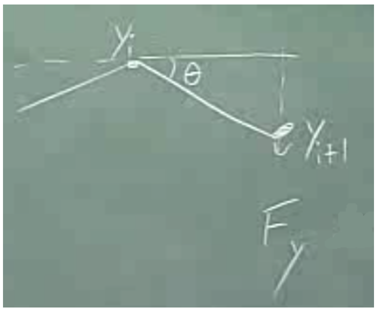
$$m\frac{d^2Y_i}{dt^2} = \tau\Big(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x}\Big) - \tau\Big(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta x}\Big)$$

Bununla ne demis olduk? i'inci parcacigin hissettigi cekimin, o parcacigin saginda ve solunda bagli oldugu diger parcacikla baginin ipteki egimi ile orantili oldugunu soylemis olduk.

τ her tel icin farkli olacak bir gerginlik sabiti, ama belli bir telde, her parcacik icin ayni.

Ustteki formul aslinda yerel turevin "ucuz" bir yaklasiksallamasi.

Gerginlikle kurulan alaka akla yatkin olmali, dusunursek ipte parcacik ne kadar yuksekte olursa uzerinde o kadar guc hissederdi, yanindaki parcaciklar(lar) tarafindan asagi cekilirdi, ne kadar altta ise o kadar az guc hissederdi. Tabii "diger parcaciklara gore" yukarida ya da asagida olmanin olcusu de iki parcacik arasindaki ipin egimi.



Diger bir acidan yaklasirsak

$F_y \equiv \tau sin\theta$

da diyebilirdik. Sadece sin kullandik cunku daha once belirttigimiz gibi, sadece dikey hareketlere bakiyoruz, yatay hareketlerle ilgilenmiyoruz (o yuzden cos yok).

Bir yaklasiksallama yapabiliriz simdi, eger $\theta << 1$ ise, yani aci 1 sayisindan cok kucuk ise, $sin\theta \approx tan\theta$ sayilabilir, bu sonuc Taylor Serileri ile alakali ve tan fonksiyonu, sin/cos oldugu icin ve sifira yakin degerlerde bolen θ'nin sifira yakinligindan cos uzerinden hep 1'e yakin olacagi icin, tan bir nevi sin sayilabilir. Peki bu problemde $tan\theta$ nasil hesaplanir?

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{Y_{1+1} - Y_i}{\Delta x}$$

Yani yine ayni yere gelmis olduk.

Bu model bir "en yakin komsu" modelidir, her parcacik yakinindaki parcaciktan etkileniyor.

Ana formulu su sekilde tekrar organize ederek yazalim

$$\frac{d^2Y_i}{dt^2} = \tau \frac{\Delta x}{m} \left[\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{\Delta x^2} \right]$$

Koseli parantez icindeki ifade Calculus'ta 2. turevin ayriksal formdaki yaklasiksallamasi degil mi?

Ayriksal modelimiz boyle. Simdi sureklilik limitine gecmek istiyorsak, mesela sonsuz sayida parcacik oldugu bir duruma gecmek isteyebiliriz, $\lim_{N\to\infty}$, elimizde sonlu / belli miktarda bir tel var, bu durumda sonsuz sayida parcacik demek bu parcaciklarin arasindaki mesafenin sifira gitmesi demektir, o zaman $\lim_{\Delta x\to\infty}$.

Formul icin bunun anlami nedir? Δx ve m arasindaki oran sonlu (finite) bir sayiya yaklasacak demektir, ki bu sayiya yogunluk diyebiliriz. Oran niye sifira gitmiyor? Sureklilik sistemlerin kullanilan bir numara bu,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m}{\Delta x}$$

Δx'in asagi indigini dusunuyoruz, ama olabilecek cok ufak bir hacim hayal ederek mesela molekul boyutundan daha fazla asagi inmeyecegini soyluyoruz, m ayni sekilde kuculuyor, ve oran bize bir yogunluk hesabi veriyor.

Taylor Serileri hakkinda hizli bir ders

$$Y_{i+1} = Y(x_i + \Delta x)$$

Eger Δx cok kucuk ise

$$= \underbrace{Y(x_i)}_{Y_i} + \Delta x \frac{dY}{dx}|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{dY^2}{dx^2}|_{x_i} + O(\Delta x^3)$$

Daha kisa bir sekilde yazalim

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta x Y_i' + \frac{\Delta x^2}{2} Y_i'' + ...$$

Ayni seyi Y_{i-1} icin yapabiliriz

$$Y_{i-1} = Y_i - \Delta x Y_i' + \frac{\Delta x^2}{2} Y_i'' + ...$$

Not: Esitligin sagindaki eksi, arti isaretlerinin nereden geldigini merak ediyorsak, Hesapsal Bilim 1 Ders 2 notlarinda $u(x-h)$ acilimina bakabiliriz.

Son iki formulu toplarsak

$$Y_{i+1} + Y_{i-1} = 2Y_i + \Delta x^2 Y_i'' + O(\Delta x^4)$$

O zaman 2. turevin x_i'daki yaklasiksallamasi

$$Y_i'' = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

O zaman ana formulde

$$\frac{d^2Y_i}{dt^2} = \tau\frac{\Delta x}{m}\Big[\underbrace{\frac{Y_{i+1}-2Y_i+Y_{i-1}}{\Delta x^2}}_{\to \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}\Big]$$

Yani $\Delta x \to 0$ iken koseli parantez ici $\partial^2 y / \partial x^2$'e gider. Niye kismi tureve gider? Cunku ayriksal degisimi sadece x uzerinde yaptik, fakat Y icinde ayni zamanda t de var. Notasyon olarak ODE dili kullanmamiz kafa karistirmasin, goruntu basit olsun diye bunu yaptik. Ama degisimin x te olmasi sebebiyle turev kismi turev oldu.

O zaman bu sistemin sureklilik limiti, $\Delta x \to 0$ iken

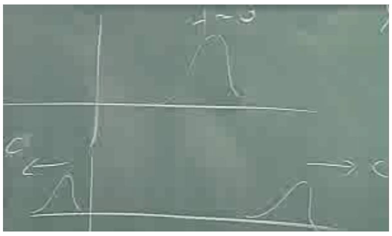
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\tau}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

olacaktir. Bu denklem fizikte iyi bilinen dalga denklemidir. Insanlar cogunlukla

$$c^2 = \frac{\tau}{\rho}$$

seklinde yazarlar ve c boylece "dalga hizi" olarak kullanilabilir.

Eger teli bir noktasinda titrettigimiz dusunursek, ve telin sonlu degil sonsuz oldugunu dusunelim, o zaman "hareket eden dalgalar (traveling waves)" fenomenini goruruz. Alttaki resimde $t = 0$ aninda bir tepe noktasi var (tele vurduk), ve ikinci resimde iki tane tepe noktasi saga ve sola esit sekilde hareket ediyorlar.



PDE'ler ayriksal sistemlerin, ODE'lerin, sureklilik limitinde dogal olarak ortaya cikarlar. Bu tur yaklasiksallamalari ben arastirmalarimda surekli kullaniyorum [hoca uygulamali matematikci], akiskanlik mekaniginde mesela, bir sivinin, molekulun kisimlarini aliyoruz, ve kisimlar birbirleri ile etkilesimde oluyorlar. Ya da mesela yogunluk degiskenini, kutleyi bir surekli fonksiyon haline getiririz, ve parcacik hizi yerine sivinin tamaminin hizina bakariz. Yani bu cok kullanilan bir teknik. Cogunlukla ayriksal bir ag yapisi icin analitik bir denklem bulmak cok zordur, o sebeple sureklilik yaklasiksallamasi kullanilir zaten. Belki ustteki problem icin alternatif cok kotu olmayabilirdi, mesela burada ODE'leri matris formunda yazarak ta cozume gidebilirdik, bu cok zor olmazdi, fakat cogu zaman bunu yapmak hakikaten zor olabiliyor.

Niye sistemi analitik olarak gormek istiyoruz? Cunku o zaman formulasyonu istedigimiz gibi manipule ederek, analitik sekilde istedigimiz yoldan ilerleyebiliyoruz.

* * *

Bir PDE kategorisinden bahsedelim, bu tur PDE'ler en cok kullandigim PDE'lerden, lineer 1. derece denklemler. Ve bu arada "karakteristikler" kavramindan bahsedecegiz.

1. Derece, Lineer PDE, 2 Bagimsiz Degisken

$u = u(x,y)$

PDE

$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)$

Operator olarak

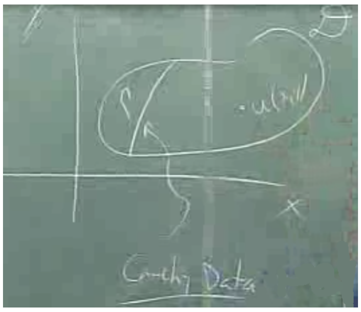
$\mathcal{L}u = f$

$$\mathcal{L} = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}$$

Karakteristik kavramindan birazdan istifade edecegiz, ama simdi bu tur denklemleri kaba kuvvet kullanarak, "degisken degistirme (change of variables)" yontemi ile nasil cozulebilecegini gosterelim.

Tanim

Cauchy Problemi: $u(\vec{x})$ tanimi gerektirir. Bu tur problemler 1. derece, 2 degisken, vs. gibi tanimlarla sinirli degil aslinda, cok daha genel bir tanim onlar, bu tur problemlerde bir "Caucy Verisi (Cauchy Data)"nden bahsedilir.



Ustteki resimde bu veri D alani (domain) icindeki Γ ile isaretli cizgidir, ki u'nun bu cizgi uzerindeki degeri diyelim ki

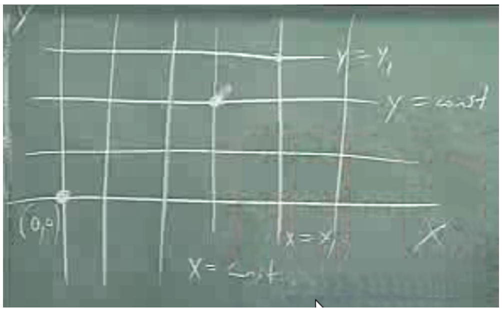
$u|_\Gamma = \alpha(x,y)$

ki $\alpha(x,y)$ herhangi bir sonuc.

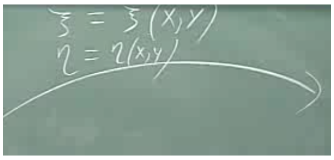
Mesela Γ cizgisi $x = sin(y)$ ile tanimli egri, ve u onun uzerinde $u = y^2$ olmali.

Bu tur bir kosula Cauch Verisi ismi veriliyor, bizim ornegimizde bu bir tur sinir kosulunu andiriyor.

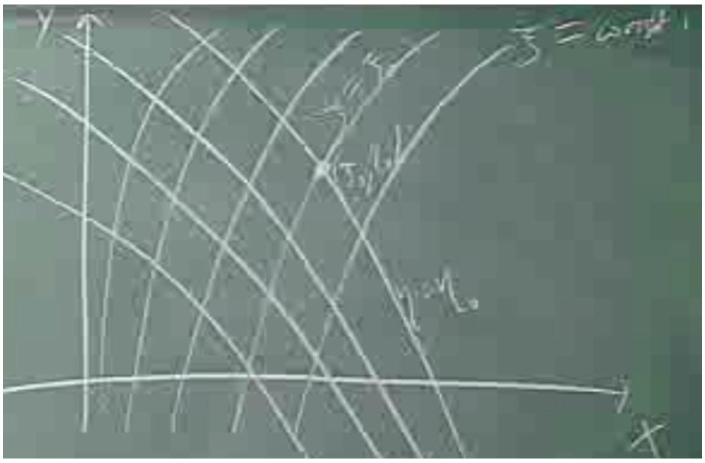
Bir kordinat sistemi nedir?



Diyelim ki oyle bir fonksiyon kumesi var ki, onlar uzerinden PDE'lerimizi degisik bir kordinat sisteminde temsil etmemiz mumkun olacak.



ξ ve η'yi kesit egrileri (level curves) uzerinden incelemek mumkundur. Bu fonksiyonlari belli sabitlere esitleyip, durumlarina bakabiliriz, sonra sabitleri degistiririz, bir daha bakariz, vs.



Ustteki resimde mesela, saga yatik tum egriler, her biri degisik bir sabite (Ingilizce const diye yazilmis) esit olacak sekildeki ξ egrileri olabilir. Sola yatik η cizgileri de olabilir. Ortadaki nokta iki onceki resimdeki bir noktanin bu yeni kordinata eslenmis bir nokta mesela.

Gerekliliklerimiz

Esleme, transformasyon bire bir (one-to-one) olmali. Ilk kordinat sistemindeki her nokta, diger kordinat sistemindeki tek bir noktaya esleniyor olmali.

Jacobian'i yokolmayan (non-vanishing) olmali.

$$\left(\begin{array}{cc} \xi & \eta \\ x & y \end{array} \right) = \left| \begin{array}{cc} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{array} \right| = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

Ustteki ifade Calculus'un Dolayli Fonksiyon Teorisi (Implicit Function Theorem of

Calculus) ile alakali. Bu teorinin yerel baglamda niye birebir esleme yarattigini merak ediyorsaniz Calculus kaynaklarina danisabilirsiniz.

Amac: Sunu

$au_x + bu_y + cu = f$

transform et ve suna cevir

$W_\xi + h(\xi, \eta) W = R(\xi, \eta)$

$W(\xi, \eta) \equiv u\Big(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\Big)$

Birebir transformasyon istemistik, o zaman esleme geriye cevirilebilir (invertible) de olmali, yani istersek x, y degiskenlerini ξ, η cercevesinde temsil edebiliyor olmamiz lazim.

Dikkat: W_η yoktur, bu sayede iki ustteki formul 1. derece ODE haline gelir, entegre edici faktor kullanip entegre edip Cauchy Verisini uygulayarak bu problemi cozebilirsiniz. Analitik olarak biraz karmasikliga sebep verebilir, ama bu en azindan mumkun bir stratejidir.

Simdi sira transformasyonu bulmaya geldi. x, y degiskenlerini ξ, η cercevesinde temsil edelim. Zincirleme Kanununu kullanalim.

$$\frac{\partial}{\partial x} u \equiv \frac{\partial}{\partial x} W(\xi(x,y), \eta(x,y)) = W_\xi \eta_x + W_\eta \eta_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u = W_\xi \eta_y + W_\eta \eta_y$$

Bunu orijinal denkleme sokalim

$$a(\xi, \eta)\Big[W_\xi \eta_x + W_\eta \eta_x\Big] + b(\xi, \eta)\Big[W_\xi \eta_y + W_\eta \eta_y\Big] + c(\xi, \eta) W = f(\xi, \eta)$$

Tekrar duzenleyelim

$$= \Big[a\xi_x + b\xi_y\Big] W_\xi + \Big[a\eta_x + b\eta_y\Big] W_\eta + cW = f$$

Soyle sec

1.

$a\eta_x + b\eta_y = 0$

$$\Rightarrow \frac{\eta_x}{\eta_y} = -\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

2.

$\xi = x$

Boylece

$$h = \frac{c}{a}$$

$R = \dfrac{f}{a}$

elde edilir.

Unutmayalim Jacobian sartini tatmin etmemiz lazim.

Farz edelim

$\eta_y \ne 0$

Bu ise yarar

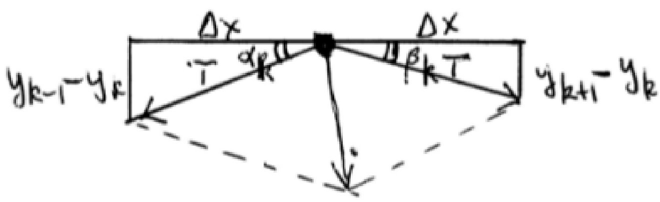
$J = \xi_x \eta_y - \cancelto{0}{\xi_y} \eta_y$

$J = \eta_y \ne 0$

Bir dahaki derste η'yi nasil hesaplayacagimizi gorecegiz.

—

[1] Diger bir acidan bakarsak, mesela matematikci David Mumford turetirken (i yerine k kullanmis)



$\tau\left(\dfrac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x}\right) + \tau\left(\dfrac{Y_{i-1} - Y_i}{\Delta x}\right)$

kullanmis. Yani bir parcacigin uzerindeki kuvvet sagindaki ve solundaki kuvvetlerin "toplami" olarak goruluyor, bu formul de ayni kapiya cikiyor.