Degisimsel Calculus (Calculus of Variations) ve Euler-Lagrange Denklemi

Degisimsel, Varyasyonel Calculus bir fonksiyon**el**in (dikkat "fonksiyon" degil) ekstrema (minimum / maksimum) ya da duragan (stationary) oldugu noktalarin bulunmasi icin kullanilir.

Bir *fonksiyonel* bir veya daha fazla fonksiyonun birlesimidir. Fonksiyonel girdi olarak bir fonksiyon alip sonuc olarak bir sayisal deger hesaplayan bir ikinci fonksiyondur aslinda. Diger bir tanim fonksiyonelin belli fonksiyon "tipleri", "siniflari" icin bir sayisal deger atamasi yaptigidir.

Degimsel calculus'un en temel, bilinen, standart problemi, sabit x degerleri icin alttaki fonksiyonelin (entegralin) duragan oldugu $\phi(x)$ fonksiyonlarini bulmaktir. Yine dikkat: Bulmaya calistigimiz bir skalar x degeri degil, bir veya daha fazla fonksiyondur.

$$I(\phi) = \int_a^b F(x, \phi, \phi_x) dx$$

δ isareti varyasyon operatorudur, ve diferansiyel operatoru d'ye oldukca benzer. $\phi(x)$'nin varyasyon operatoru uygulanmis hali olan $\delta\phi(x)$'in tanimi, sabit bir x degeri icin herhangi (arbitrary), sonsuz ufaklikta (infinitesimal) bir degisim demektir. Dogal olarak x'in sabit olmasi $\delta x = 0$ anlamina gelir (bu esitligi birazdan formulumuzun aciliminda basitlestirme amaci ile kullanacagiz). Fonksiyonelin duraganligi da $\delta I = 0$ demektir.

Degisimsel Calculus ve Euler-Lagrange aciliminin puf noktasi altta birazdan gorecegimiz cebirsel islemlerle, $\delta\phi$'yi formulde tek basina birakarak bir anlamda duraganlik mantiginin disina atmasidir. Oyle bir $\phi(x)$ buluyoruz ki ondan δ sapmalari var, ama biz oraya degil, formulun geri kalanina bakiyoruz, formulun o tarafinda ustunde sapmalar olmayan ϕ ile islemler yapacagiz, ve optimal bir ϕ fonksiyonu bulacagiz.

I fonksiyoneli pek cok fizik, diger tur problemlerde ortaya cikan bir formdur. Minimize edilmeye ugrasilan bir fonksiyonel var ise, degisimsel calculus burada devreye girebilir, duragan nokta uzerinden optimal bir $\phi(x)$ sonucunu verir.

Turetmeye baslayalim:

δ operasyonu diferansiyel ve entegral ortamilarinda sirabagimsiz (commutative) ozelliklere sahiptir, bu operasyonlarin icine “nufuz edebilir”. Mesela

$$\delta\Big(\int F dx\Big) = \int (\delta F) dx$$

ve

$$\delta\Big(\frac{d\phi}{dx}\Big) = \frac{d}{dx}(\delta\phi)$$

Ustte bahsettigimiz fonksiyonelin varyasyonu o zaman

$$\delta I = \delta \int_a^b F(x, \phi, \phi_x) dx = 0$$

$$= \int_a^b \delta F dx$$

Simdi δF'in acilimini gosterelim. Bu acilim tam diferansiyel (total differential) acilimi ile tipatip ayni.

$$\delta I = \int_a^b \Big(\frac{\partial F}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial F}{\partial \phi_x}\delta\phi_x + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x\Big) dx$$

$\delta x = 0$ oldugunu bildigimize gore bu terimi formulden atabiliriz. Geri kalanlar:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial F}{\partial \phi_x}\delta\phi_x$$

Bunlari δI formulunun icine koyarsak:

$$\delta I = \int_a^b (\frac{\partial F}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial F}{\partial \phi_x}\delta\phi_x) dx = 0$$

Entegraldeki ikinci terime bakalim: $\delta\phi$ formulunu $\delta\phi_x$ formulu icinden “cekip cikartacagiz”. Bunu niye yapiyoruz? Cunku $\delta\phi$'un herhangi (arbitrary) bir degere sahip olabileceginden hareketle ek bazi sonuclara gelmeye calisacagiz, bu da sadece $\delta\phi$'nin tek basina kalmasiyla mumkun olabilir.

δ operatorunun sirabagimsiz oldugunu gormustuk. O zaman

$$\delta\phi_x = \delta\Big(\frac{d\phi}{dx}\Big) = \frac{d}{dx}(\delta\phi)$$

$\delta\phi$'yi diferansiyel operatorunun icine attik. Simdi parcalayarak entegral alma (integration by parts) teknigini kullanarak diferansiyel operatorunden de kurtulacagiz. Parcalayarak entegral alma bilindigi gibi soyledir:

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v - \int_a^b v \cdot du$$

Eger $\delta\phi$'in diferansiyelini dv'ye atarsak, o zaman parcalayarak entegral alma teknigi dv'yi v yaparken bize istedigimiz sonucu verecektir. O zaman acmak istedigimiz entegrali hatirlayalim ve sirabagimsiz islemi uygulayalim:

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \delta\phi_x dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \phi_x} \frac{d}{dx}(\delta\phi) dx \tag{1}$$

Parcalayarak entegral alma teknigi icin parcalarin ne oldugunu tanimlayalim:

$$u = \frac{\partial F}{\partial \phi_x}$$

$$du = d\bigg(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\bigg)$$

$$dv = \frac{d}{dx}(\delta\phi)dx = d(\delta\phi)$$

$$v = \delta\phi$$

O zaman 1'in acilimi soyle olacaktir:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\delta\phi\bigg|_a^b - \int_a^b \delta\phi \cdot d\bigg(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\bigg)$$

Sagdaki terime dx'leri eklersek:

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\delta\phi\bigg|_a^b - \int_a^b \delta\phi \cdot \frac{d}{dx}\bigg(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\bigg) dx$$

Goruldugu gibi $\delta\phi$'in diferansiyelinden tamamen kurtulduk. Simdi bu sonucu δI icindeki ikinci terim yerine koyalim:

$$\delta I = \int_a^b \bigg[\frac{\partial F}{\partial \phi}\delta\phi - \delta\phi \cdot \frac{d}{dx}\bigg(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\bigg)\bigg] dx - \frac{\partial F}{\partial \phi_x}\delta\phi\bigg|_a^b$$

$\delta\phi$'lari disari cikartalim:

$$\delta I = \int_a^b \bigg[\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dx}\bigg(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\bigg)\bigg]\delta\phi \; dx - \frac{\partial F}{\partial \phi_x}\delta\phi\bigg|_a^b$$

Bu sonuc uzerinden bazi ek mantik yurutmeye baslayabiliriz. Mesela $\delta\phi$

(belli sinirlar dahilinde olmak sartiyla) herhangi bir degere sahip olabilecegi icin, o zaman δI'in sifir olmasi demek, $\delta\phi$'in sifir olmasi garanti olmadigi icin (herhangi bir deger dedik ya) $\delta\phi$'in icinde oldugu carpimda onun *haricindeki* degerlerin sifir olmasini mecbur kilacaktir. Bu demektir ki

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \phi} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\right)\right] = 0$$

olmalidir. Literaturde bu sarta Euler-Lagrange sarti ismi verilmistir. Ayni sekilde

$$\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\delta\phi\bigg|_a^b = 0$$

olmalidir. Bu demektir ki ya $\delta\phi(a) = \delta\phi(b) = 0$ olacaktir, ki bu sarta geometrik ya da kesinlikle gerekli sinir sartlari (geometric or essential boundary condition) denir, ya da

$$\frac{\partial F(a)}{\partial \phi_x} = \frac{\partial F(b)}{\partial \phi_x} = 0$$

olacaktir, bu sarta da dogal sinir sarti (natural boundary condition) ismi verilir.

Ornek

Simdi ornek olarak iki nokta arasindaki en kisa egrinin duz cizgi fonksiyonu olmasi gerektigini bulacagiz. Once "egri uzunlugu" kavramini tanimlayarak baslayalim.

$y(x)$ formulune sahip bir egrinin diferansiyel uzunlugu ds

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx$$

olarak gosterilebilir. Bu formul nereden gelir? Eger sonsuz kucuklukteki ds uzunlugunu hesaplamak istiyorsak, x ve y eksenlerindeki yine sonsuz kucuklukteki degisimlere gore bu hesabi yapabiliriz.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{dx^2 + \frac{dy^2}{dx^2}dx^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

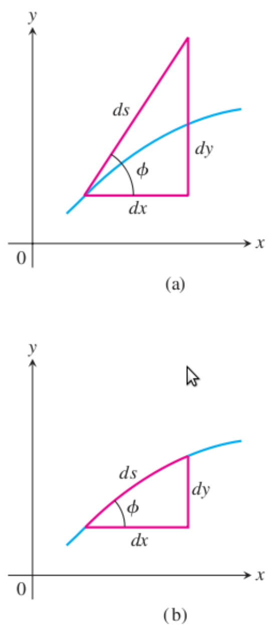

Figure 1: Egri Uzunlugunu Hesaplamak

Egri uzunlugunun tamamini bulmak icin ise bu diferansiyel parcalari birbirine ekleriz, yani ustteki formulun entegralini aliriz, $\int ds$ formulu entegral sinir sartlarinin tanimlanmasi sonrasi gerekli hesabi yapacaktir.

Diyelim ki $x = 0$ ve $x = 1$ arasindaki hangi egrinin en kisa uzunlukta olacagini bulmak istiyoruz. O zaman ustteki formulu I haline getiririz:

$$I(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Bu formul Euler-Lagrange formuna sokulabilir bir formul degil mi? Iki noktayi birlestirecek pek cok y fonksiyonu olabilir, bizim aradigimiz en kisa olani ve bunu ustteki I'yi duragan yapacak fonksiyonlar. Bu bir ornek tabii ki, sezgisel olarak ta sonucu soyleyebiliriz, aradigimiz fonksiyon duz cizgi olmali.

Baslayalim: F fonksiyonu nedir?

$F(x,y,y') = [1+(y')^2]^{1/2}$

Bu fonksiyonun icinde y olmadigina gore Euler-Lagrange'in ϕ (yani y) iceren kismin atabiliriz. Kalanlar:

$$\left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] = 0$$

Parantez icindeki kismi turevi hesaplayalim

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2}[1+(y')^2]^{-1/2} \ 2y = \frac{y'}{[1+(y')^2]^{1/2}}$$

Euler-Lagrange formulune koyarak iki tarafin entegralini alalim ve dx'ten kurtulalim:

$$\int \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{[1+(y')^2]^{1/2}} \right) \right] dx = c$$

$$\frac{y'}{[1+(y')^2]^{1/2}} = c$$

Sifirin entegrali bir sabit sayi olacaktir, bu sabite c ismini verdik. Simdi ustteki formulu y' sol tarafta tek basina kalacak sekilde tekrar duzenleyelim:

$$\frac{y'}{[1+(y')^2]^{1/2}} = c$$

$$\frac{y'}{\sqrt{[1+(y')^2]}} = c$$

$$\frac{y'^2}{1+(y')^2} = c^2$$

$$\frac{1+(y')^2}{y'^2} = \frac{1}{c^2}$$

$$1 + \frac{1}{y'^2} = \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{y'^2} = \frac{1}{c^2} - 1$$

$$\frac{1}{y'^2} = \frac{1-c^2}{c^2}$$

$$y' = \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}} = a$$

Sagdaki sonuca bakarsak elimize gecen c'lerden olusan bir islem obegidir, ve bu obek te dogal olarak yine bir sabit sonucunu verir, bu sabite a ismini verdik. Devam edelim, y', yani turevi bir sabit olan fonksiyon, $y(x)$ suna benzemez mi?

$$y(x) = ax + b$$

ki sinir sartlari $y(x) = x$ (0 ve 1 degerleri icin). Bu formul bildigimiz gibi bir duz cizginin formuludur!

Demek ki Degisimsel Calculus kullanarak iki nokta arasindaki en kisa yolun duz cizgi olacagini ispatlamis olduk.

Kaynaklar

Everstine, G. C., Numerical Solutions of Partial Differential Equations

Rao, S. S., The Finite Element Method in Engineering

Thomas' Calculus