Destek Vektor Makinalari (Support Vector Machines) En basit halleriyle SVM'ler risk minimize eden lineer siniflayicisidirlar.

$$R(\Theta) \le J(\Theta) = R_{emp}(\Theta) + \sqrt{\frac{h \times (log(\frac{2N}{h}) + 1) - log(\frac{\eta}{4})}{N}}$$

h: siniflayicinin kapasitesi

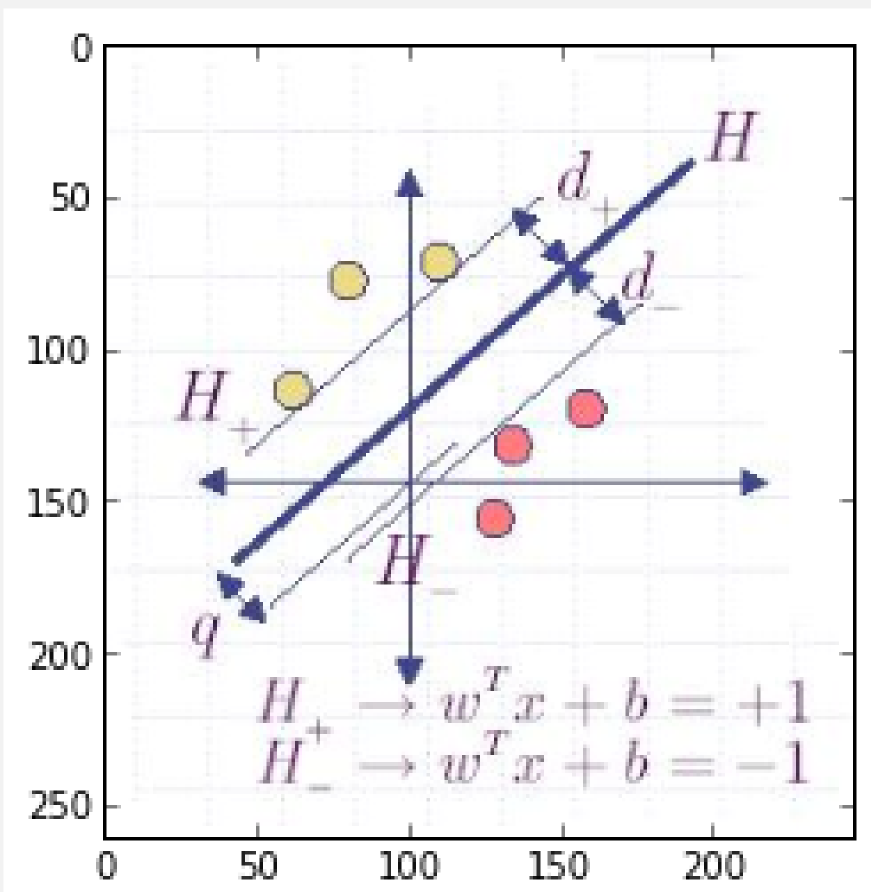
N: egitim verisinde kac veri noktasi oldugu

Vapnik ve Chernovenkis $1-\eta$ olasilikla ispaladi ki ustteki denklem dogrudur. SVM algoritmasi hem h degerini hem de sayisal, olcumsel riski ayni anda minimize etmektedir, ve bunu sinir noktalarini noktalarini ayirmakla yapmaktadir.

Turetelim

```
im=imread("svm-planes.png"); imshow(im)
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0xae51f4c>
```



Karar duzlemi: $w^T x + b = 0$

Soyle bir tanim yapalim: $q = min_x \left\| x - 0 \right\|$

q, H^+ ve H^- formullerini ileride kullanacagiz.

H icin: $q = min_x \left\| x - 0 \right\|$ su sarta tabi $w^T x + b = 0$

Lagrange: $min_x \frac{1}{2} \left\| x - 0 \right\|^2 + \lambda(w^T x + b)$

Gradyani alalim ($\frac{\partial}{\partial x}$) ve 0 degerine esitleyelim.

Biraz cebirsel numaradan sonra: $q = \frac{|b|}{||w||}$

Tanim: $H^+ = w^T x + b = +1$ $H^- = w^T x + b = -1$

Bu tanimi genellikte bir kayip olmadan yapabiliyoruz; b & w degerlerini hala duzeltebiliriz.

q^+ ve q^- degerlerinin hesapla

$q^+ = \frac{|b-1|}{||w||}$

$q^- = \frac{|-b-1|}{||w||}$

Ayrac o zaman soyle

$m = q^+ + q^- = \frac{|b-1-b-1|}{||w||} = \frac{|-2|}{||w||} = \frac{2}{||w||}$

Ayraclarin olabildigince ayirmasini istiyorsak m'i arttiriz (yani $\frac{2}{||w||}$'i maksimize ederiz), ya da $||w||$ degerini minimize ederiz.

Sinirlar

Veri noktalarini oyle siniflamak istiyoruz ki + ve - noktalar hiperduzlemlerin dogru noktalarinda kalsinlar.

$$w^T x + b \geq +1, \forall y_i = +1$$

$$w^T x + b \leq -1, \forall y_i = -1$$

Bu iki denklemi birlestirelim

$$y_i(w^T x + b) - 1 \geq 0$$

Her seyi biraraya koyalim

$$min \frac{1}{2} ||w||^2 \text{ subject to } y_i(w^T x_i + b) - 1 \geq 0$$

Bu form tanidik geliyor mu? Bu qp ile cozulebilecek karesel (quadratic) bir formul, programdir!

qp

Python dilinde cvxopt paketi vardir Matlab Optimization Toolbox'da qp() var. Steve Gunn'in SVM Toolbox'i icinde C ile yazilmis bir qp var SVMLight icinde ayrica bir qp var qp fonksiyonlari problemleri genelde

$\frac{1}{2}x^TPx + q^Tx$ formunda gormek isterler.

Biraz once elde ettigimiz denklemi bu istenen formata dogru "masajlayabiliriz"

Ikiz (dual)

SVM ihtiyaclari icin ikiz formul (dual) ile calismak daha rahattir Lagrange (tekrar) olusturalim, turevi alalim, ve sifira esitleyelim. Bunun sonucunda elimize KKT noktalari gececektir

$$L_p = \frac{1}{2}||w||^2 - \sum_i \alpha_i (y_i(w^Tx_i + b) - 1) \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} L_p = w - \sum_i \alpha_i y_i x_i = 0$$

$$w = \sum_i \alpha_i y_i x_i \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial b} L_p = -\sum_i \alpha_i y_i = 0 \tag{3}$$

Ustteki iki denklemi asal (primal) denkleme koydugumuz zaman

$$\text{Maksimize et } L_D = \sum_i \alpha_i - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i^T x_j \tag{4}$$

sinirlar

$$\sum_i \alpha_i y_i = 0$$

$$\alpha_i \geq 0$$

qp

Bu yine qp() formunda bir problem! Sadece bu sefer cozecegimiz degiskenler α_i'lar, x'lar degil. Ustteki denklem su forma $\frac{1}{2}x^TPx + q^Tx$ masajlanabilir Bunun yapmak icin $P_{i,j}$'ye $-y_i y_j x_i^T x_j$ degerini atariz. Ve qp'yi cagiririz Sonuc bir α'lar listesi olacaktir.

b degerini hesaplamak

KKT kosulunun sebebiyle sifir olmayan her α_i icin ana problemde ona tekabul eden kisitlayici sart sıkıdır (tight), yani bir esitliktir. O zaman sifir olmayan her α_i icin b'yi $w^Tx_i + b = y_i$ ifadesini kullanarak hesaplariz. Sifir olmayan her α_i'dan gelen b yaklasik olarak diger other b'lere esit olacaktir. Final b'yi hesaplamak icin tum b'lerin ortalamasini almak numerik olarak daha garantidir.

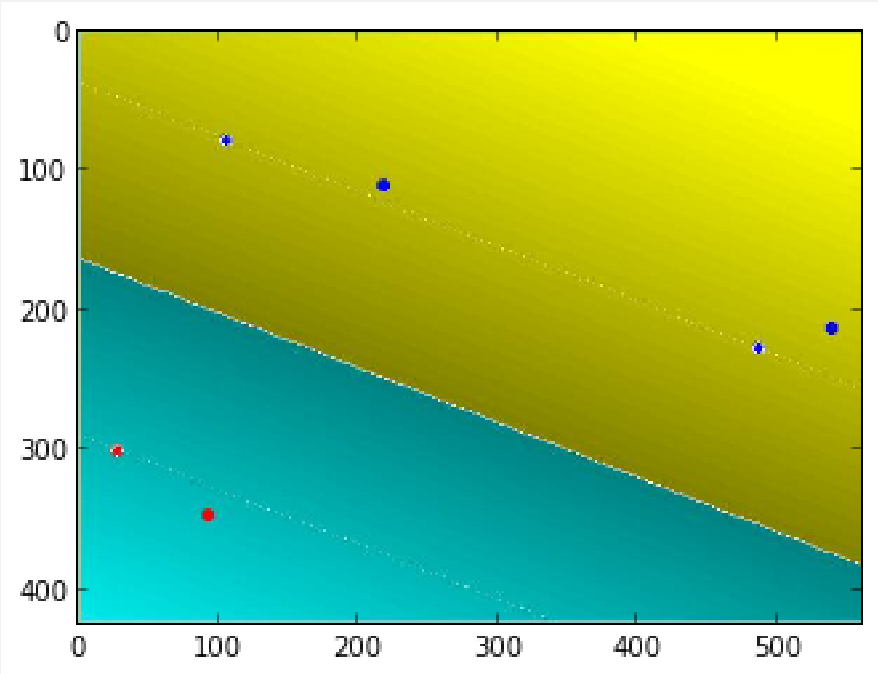
Siniflayici Tamamlandi

Her yeni x noktasi icin artik $sign(x^T w + b)$ ibaresini siniflayicimiz olarak kullanabiliriz. -1 ya da $+1$ olarak geri gelecek sonuc bize yeni noktanin hangi sinifa ait oldugunu soyleyecektir.

Ornek Çıktı

```
im=imread("svmlinear.png"); imshow(im)
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0xa7226ac>
```



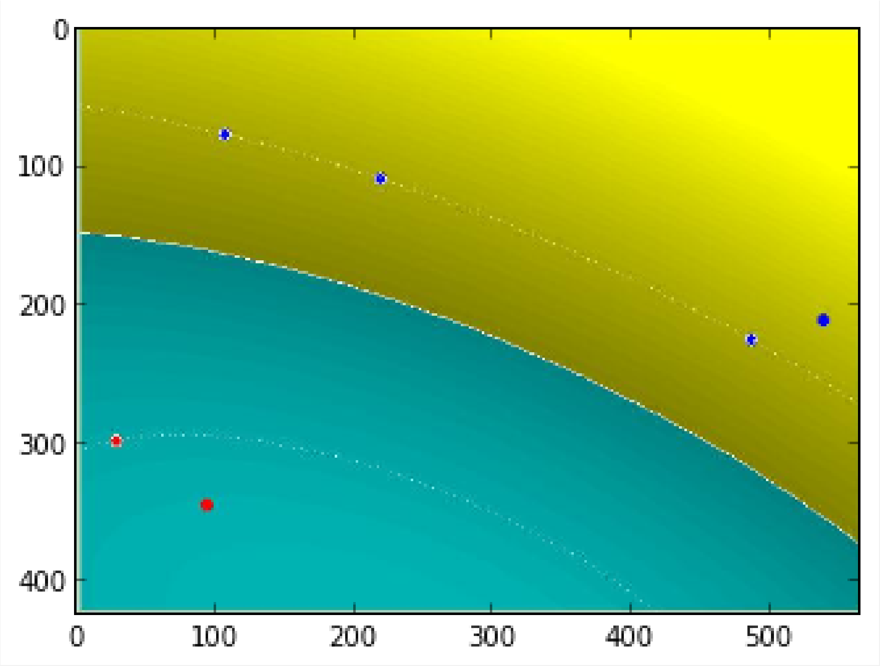
Cekirdekler (Kernels)

Simdiye kadar lineer ayraclardan bahsettik. SVM'ler lineer olmayan ayraclarla da calisabilir. Cok basit: Bir temel fonksiyon kullanarak girdiyi daha yuksek boyuta dogru bir onislemden gecirirsek bunu basarabiliriz. Algoritmanin geri kalani degismeden kalacaktir.

Gayri Lineer Cekirdek

```
im=imread("svmpoly.png"); imshow(im)
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0xa59ba2c>
```



Esneme Payı Bazen bir problem ayrilmaya musait olmayabilir. Cok uc noktalardaki bazi noktalar siniflayicinin calismasini imkansiz hale getirebilir Bunun cozumu icin siniflayiciya "esneme payı" dahil edebiliriz. Mesela $y_i = +1$ icin verinin yanlis tarafa dusmesini su durumda izin verebiliriz: $w^T + b \geq -0.03$ Fakat eklemek gerekir ki bu tur noktalarin "cok fazla" olmasini da istemiyoruz, bu sebeple bu "yanlis" noktalarin sayisina da bir ceza getirebiliriz.

```
from numpy import linalg
import cvxopt
import cvxopt.solvers

def svm(X, y):
    n_samples, n_features = X.shape

    # Gram matrix
    K = np.zeros((n_samples, n_samples))
    for i in range(n_samples):
        for j in range(n_samples):
            K[i,j] = np.dot(X[i], X[j])

    P = cvxopt.matrix(np.outer(y,y) * K)
    q = cvxopt.matrix(np.ones(n_samples) * -1)
    A = cvxopt.matrix(y, (1,n_samples))
    b = cvxopt.matrix(0.0)

    G = cvxopt.matrix(np.diag(np.ones(n_samples) * -1))
    h = cvxopt.matrix(np.zeros(n_samples))

    # solve QP problem
```

```
    solution = cvxopt.solvers.qp(P, q, G, h, A, b)

    print solution

    # Lagrange multipliers
    a = np.ravel(solution['x'])

    print "a", a

    # Support vectors have non zero lagrange multipliers
    ssv = a > 1e-5
    ind = np.arange(len(a))[ssv]
    a = a[ssv]
    sv = X[ssv]
    sv_y = y[ssv]
    print "%d support vectors out of %d points" % (len(a), n_samples)
    print "sv", sv
    print "sv_y", sv_y

    # Intercept
    b = 0
    for n in range(len(a)):
        b += sv_y[n]
        b -= np.sum(a * sv_y * K[ind[n],ssv])
    b /= len(a)

    # Weight vector
    w = np.zeros(n_features)
    for n in range(len(a)):
        w += a[n] * sv_y[n] * sv[n]

    print "a", a
    return w, b, sv_y, sv, a

X = np.array([[3.,3.],[4.,4.],[7.,7.],[8.,8.]])
y = np.array([1.,1.,-1.,-1.])
w, b, sv_y, sv, a = svm(X, y)
print "w", w
print "b", b
print 'test points'
print np.dot([2.,2.], w) + b # > 1
print np.dot([9.,9.], w) + b # < -1
```

```
pcost       dcost       gap    pres   dres
 0: -2.9061e-01 -5.0286e-01  6e+00  2e+00  1e+00
 1: -3.6857e-02 -3.0976e-01  3e-01  4e-16  1e-15
 2: -1.0255e-01 -1.2816e-01  3e-02  3e-17  7e-16
 3: -1.1074e-01 -1.1128e-01  5e-04  3e-17  7e-16
 4: -1.1111e-01 -1.1111e-01  5e-06  4e-17  7e-16
 5: -1.1111e-01 -1.1111e-01  5e-08  1e-17  6e-16
Optimal solution found.
```

```
{'status': 'optimal', 'dual slack': 7.403425105865883e-08, 'iterations': 5, 'relative gap': 4.7971882239
a [  2.76375125e-08   1.11111073e-01   1.11111073e-01   2.76375125e-08]
2 support vectors out of 4 points
sv [[ 4.  4.]
 [ 7.  7.]]
sv_y [ 1. -1.]
a [ 0.11111107  0.11111107]
w [-0.33333322 -0.33333322]
b 3.66666541806
test points
2.33333253877
-2.33333253877
```

Not: Ikizdeki L_d'yi maksimize ediyoruz, fakat hala qp()'deki minimize ediciyi cagiriyoruz. Bu sebeple tum α'larin toplamini temsil eden q'larin negatifini aliyoruz, np.ones(n_samples) *-1 isleminde goruldugu gibi. Formuldeki karesel kisim icinde zaten $-\frac{1}{2}$ negatif ibaresi var, boylece geri kalan formulun degismesine gerek yok.

Kaynaklar

http://www.mblondel.org/journal/2010/09/19/support-vector-machines-in-python

Jebara, T., Machine Learning Lecture, Columbia University