

Eğim (Curvature)

Kesit seviyeleri tekniginde bir egri normal formda degil, dolayli (implicit) bir fonksiyon ile $F(x, y) = 0$ olarak gosterilir. Bu fonksiyonun tam diferansiyelini alirsak,

$$dF = F_x dx + F_y dy = 0$$

$$dy = \frac{-F_x}{F_y} dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y} = f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Burada bir faraziye daha var, o da aslında ilk verilen formülde olmasa bile $y = f(x)$ olarak kabul etmemiz, yani $F(x, y)$ nasıl bir formül olursa olsun, y 'nin x 'leri icerecek şekilde tekrar duzenlenebilecegini farz etmemiz, boylece $F(x, f(x))$ olabilecegini soylemis oluyoruz.

Simdi y' 'in turevini bir daha alalim. Yukaridaki y' formülünde en sag taraf bir bolme islemi icerdigi icin burada Calculus'un Bolumler Kuralini (Quotient Rule) uygulamamiz lazim (detaylar icin Bolum Kurali yazisina bakiniz). Bu kural soyle gosterilir:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Bolumler Kurali icin u ve v tanimlari nedir?

$$u = -F_x(x, f(x))$$

$$v = F_y(x, f(x))$$

O zaman

$$v \frac{du}{dx} = F_y \frac{dF_x}{dx} \quad (1)$$

$$u \frac{dv}{dx} = -F_x \frac{dF_y}{dx} \quad (2)$$

Bunlardan mesela dF_x/dx üzerinde Zincirleme Kanunu (Chain Rule) uygulamak lazım (bu kural tam integral kuralının bir sonucu).

$$\frac{dF_x(x, f(x))}{dx} = \frac{\partial F_x}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F_x}{\partial y} \frac{df}{dx}$$

$$= F_{xx}(x, f(x)) + F_{xy}(x, f(x))f'(x) \quad (3)$$

$$\frac{dF_y(x, f(x))}{dx} = F_{xy}(x, f(x)) + F_{yy}(x, f(x))f'(x) \quad (4)$$

Zincirleme Kanunu niye üstteki şekilde acıldı? Tam Diferansiyeli bir daha hatırlayalım:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

O zaman formüller (1) (2) (3) ve (4) bir araya konulursa,

$$y'' = - \frac{F_y F_{xx} - F_y F_{xy} \frac{F_x}{F_y} - F_x F_{xy} + F_x F_{yy} \frac{F_x}{F_y}}{F_y^2}$$

$$y'' = - \frac{F_y F_{xx} - F_{xy} F_x - F_x F_{xy} + \frac{F_x^2 F_{yy}}{F_y}}{F_y^2}$$

Ustteki bolumun hem bolen, hem bolunen terimlerini F_y ile carparsak, ve sadelestirirsek

$$y'' = -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy} F_x F_y + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}$$

Simdi Wolfram sitesinde turetimi gosterilen egim (curvature) formulune bakalim [2].
Not: Eger

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$$

formulunun alttaki formule nasil donustugu tam anlasilir degilse, hatirlayalim ki, $y = f(x)$, ve $x' = 1$, ve $x'' = 0$.

Bu formulun Courant [1] sf. 231'de benzer bir formunu goruyoruz [3].

$$\kappa = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

Bu formuldaki f'' yani y'' icin ustte buldugumuz sonucu, f' yani y' icin bu yazinin basindaki formulu koyarsak,

$$\kappa = \frac{-\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy} F_x F_y + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

Bolen kismi nedir?

$$\begin{aligned} (1 + f'^2)^{3/2} &= \left(1 + \left(\frac{-F_x}{F_y}\right)^2\right)^{3/2} \\ &= \left(1 + \frac{F_x^2}{F_y^2}\right)^{3/2} \\ &= \left(\frac{F_y^2 + F_x^2}{F_y^2}\right)^{3/2} \end{aligned}$$

$$= (F_y^2 + F_x^2)^{3/2} (F_y^{-2})^{3/2}$$

$$= (F_y^2 + F_x^2)^{3/2} F_y^{-6/2}$$

$$= (F_y^2 + F_x^2)^{3/2} F_y^{-3}$$

Yerine koyarsak,

$$\kappa = \frac{-\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy} F_x F_y + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}}{(F_y^2 + F_x^2)^{3/2} F_y^{-3}}$$

F_y^{-3} ve F_y^3 birbirlerini iptal ederler ve sonuc:

$$\kappa = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy} F_x F_y + F_x^2 F_{yy}}{(F_y^2 + F_x^2)^{3/2}} \quad (5) \tag{1}$$

Ustteki unlu egim (curvature) formuludur.

Bu egim formülünün diger bir sekli soyledir (F yerine ϕ kullanirsak)

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

Bunun okunus sekli “birim normal gradyanin uzaklasim olcusu (divergence of the unit normal gradient)” seklindedir. Acaba bu formül, (5). formül ile uyumlu mu?

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

$$= \nabla \cdot \frac{(\phi_x, \phi_y)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\partial_x \frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right) + \left(\partial_y \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right) \\
&= \frac{\phi_{xx}}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} - \frac{\phi_x(\phi_x \phi_{xx} + \phi_y \phi_{xy})}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} + \frac{\phi_{yy}}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} - \frac{\phi_y(\phi_x \phi_{xy} + \phi_y \phi_{yy})}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\phi_{xx}(\phi_x^2 + \phi_y^2) - \phi_x(\phi_x \phi_{xx} + \phi_y \phi_{xy}) + \phi_{yy}(\phi_x^2 + \phi_y^2) - \phi_y(\phi_x \phi_{xy} + \phi_y \phi_{yy})}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Bu formül bizim (5). formül ile tipatip aynı.

Ustteki işlemlerde uzaklaşım ölçüsü (divergence) operatörü $\nabla \cdot$ ile gradyan operatörü ∇ arasındaki farkı belirtelim: $\nabla \cdot$ operatörü $F(x, y)$ üzerinde kısmi türevlerin toplamını verir, yani bir skalar tek sayı döndürür. Gradyan ise her bir elemanı bir kısmi türeve tekabül eden bir *vektor* geri getirir.

Python Numpy kodlaması bağlamında, daha önce *Kesit Seviyeleri* yazısında ayriksal olarak bir ϕ değişkeni içindeki bir fonksiyon üzerinde eğimselliği (curvature) şöyle hesaplamistik:

```

gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
absGradPhi=np.sqrt(gradPhiX**2+gradPhiY**2)

normGradPhiX=gradPhiX/(absGradPhi+(absGradPhi==0))
normGradPhiY=gradPhiY/(absGradPhi+(absGradPhi==0))

divYnormGradPhiX, divXnormGradPhiX=np.gradient(normGradPhiX)
divYnormGradPhiY, divXnormGradPhiY=np.gradient(normGradPhiY)

K = divXnormGradPhiX + divYnormGradPhiY

```

Bu satırların $\nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ ifadesiyle birebir uyum gösterdiğini herhalde görebiliyoruz. Satır 1, $\nabla \phi$ ifadesidir. Satırlar 2-4 $\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$ işlemini gerçekleştiriyor, gradyanı onun uzunluğuna (magnitude) bölerek onu birim vektörü haline getiriyor. Satırlar 6-7 tekrar sonucun gradyanını bir daha alıyor, ama bu sefer hesapsal kısmi türevleri birbiriyle topluyor, böylece uzaklaşım ölçüsü (divergence) hesaplanmış oluyor. Tüm bu işlemlerin sonucu eğimsellik κ oluyor.

Dikkat edilirse Python kodundaki K yani κ , $N \times N$ boyutlu bir matristir, bu mantikli cunku κ hesabi icin kullandigimiz F_x , F_y gibi turevler aslinda $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$ formullerine sahipler, yani her x, y kombinasyonu icin farkli bir sonuc dondurebilirler. Bu sebeple K yani κ ϕ fonksiyonunun her x, y noktası icin tanimlidir.

Bazen literaturde $\nabla \cdot$ yerine $div(..)$ kullanildigini gorebilirsiniz, bu operatorlerin ikisi de aynidir.

—

Kaynaklar

- [1] Courant, Introduction to Calculus and Analysis Volume 2, sf. 223-232
- [2] Wolfram - <http://mathworld.wolfram.com/Curvature.html>
- [3] Bu arada o karmasik formül yerine yaklasiksal olarak hesaplama sirasinda sadece f'' kullanmak ta mumkun [4]
- [4] Strang, G. Computational Science and Engineering, sf. Introduction bolumu