

PDE - Ders 1

Konumuz Kismi Turevsel Denklemler (partial differential equations -PDE-). Bu dersin on gerekliliklerinden en onemlisi normal diferansiyel denklemlerdir (ordinary differential equations -ODE-), cunku pek cok PDE'yi cozmenin teknigi onlari bir ODE sistemine indirgemekten geciyor. Yani PDE cozmek icin ODE cozme tekniklerini de bilmek gerekiyor. Bir diger gerekli bilgi Lineer Cebir dersi.

Bu dersin ana amaci, bir muhendislik dersi olarak, denklem cozmek, ve pek cok denklemin cikis noktasini fiziksel problemler. Mesela sicaklik yayilmasi (heat diffusion), dalga hareketi (wave motion), titreten hucre zarini (vibrating membrane) gibi. Fakat PDE kavrami finansta bile ortaya cikabilen bir kavram, mesela Black-Sholes denklemlerinde oldugu gibi.

Yani dersimiz cok teori odakli olmayacak, bazi ispatlardan bahsedecegiz, ama onun haricinde teori uzerinde fazla durmayacagiz.

PDE nedir? Ilk once ODE tanimindan baslayalim.

$$y = y(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Baslangic sartlari

$$y(0) = y_0$$

Cozum

$$y = y_0 e^x$$

Bu bir ODE cunku sadece bir tane bagimsiz degisken var (x), ve bir tane bagimli degisken var (y).

PDE ise icinde kismi turevleri, ve bir veya *birden fazla* bagimsiz degiskeni barindiran bir denklemdir.

Eger gunes etrafındaki yorungeleri temsil etmek istiyorsanız gezegenleri boyutsuz parçacıklar gibi kabul ederek ODE'ler ile temsil etmek yeterli olabilir, ama diğer problemlerde daha fazla bağımsız değişken gerekeceği için ODE yetmez, mesela zaman, cismin 3D uzaydaki boyutları gibi.

Mesela bir PDE

$$u = u(x, y)$$

Cogunlukla problem taniminin ilk basinda fonksiyonel iliskiyi hemen goster-mek iyi olur, mesela ustte bagimsiz degiskenler x, y , ve u bu iki degiskene bagimli. Devam edelim PDE soyle olsun

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cos(y) \frac{\partial u}{\partial y} + 3 = 0$$

Bir PDE problemine cogunlukla ek olarak sinir kosullari (boundary condition -BC-) ve baslangic kosullari (initial conditions -IC-) eklemek de gerekir.

Kismi Turev nedir?

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{u(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Yani bir fonksiyonun kismi turevini almak istedigimiz degisken haricinde tum diger degiskenlerinin sabit tutuldugu bir durum.

Ornek

$$u = x_1^2 + x_1 \sin(x_2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2x_1 + \sin(x_2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 \cos(x_2)$$

Notasyon

Cogunlukla kismi turevler 3 farkli sekilde gosteriliyor.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x \equiv \partial_x u$$

Ustte soldaki tanimi gorduk, bazen ortadaki de tercih edilebiliyor, ya da bazen en sagdaki.

PDE Derecesi

Bir PDE'nin derecesi, o denklemdaki kismi turevlerin en yuksek dereceli

olanin derecesi neyse o'dur.

Mesela

$$u_{xxx} + u_y = 5$$

derecesi 3. Ayni zamanda bu lineer ve homojen olmayan (inhomogeneous) bir PDE. Bu son iki kavrami birazdan tanimlayacagim.

Ornek

$$(u_{xx})^2 + u_x u_y = u$$

Bu 2. derece. Bu bazi insanlarin kafasini karistiriyor, cunku u_{xx} 'in karesi var. Bu ayni zamanda homojen, ve gayri lineer. Bu dersteki cogu PDE lineer olacak.

Lineer ve gayri lineerlikten bahsetmiskem, sunu ekleyelim.



Simdi diyelim ki bir girdi (input) fonksiyonu $I(t)$ bir isleme giriyor (L operatu) ve cikti (output) olarak $R(t)$ cikiyor. Yani sistem

$$R = \mathcal{L} I$$

Bir lineer sistemde eger girdiyi iki ile carparsaniz, cikti da iki katina cikar. O zaman kurallar

1. $\mathcal{L}(\alpha I) = \alpha \mathcal{L}(I)$, ki α bir sabit.
2. $\mathcal{L}(I_1 + I_2) = \mathcal{L}(I_1) + \mathcal{L}(I_2)$, ki buna ust uste eklenebilme (superposition) prensibi deniyor. Bu prensibi bu dersteki cogu PDE'yi cozmek icin kullanacagiz. Bir lineer sistem varsa cogu zaman arka planda bir yerlerde ust uste eklenebilme prensibi geziniyordur.

Diyelim ki PDE'nizi soyle yazdiniz

$$\mathcal{L}u = f(\vec{x})$$

Burada u bagimli degisken, \vec{x} bir vektor, $\vec{x} \in \Re^n$, ve bu vektorun icinde birden fazla degisken var, bu degiskenlerin hepsi bagimsiz.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1, \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Bu denkleme benzer bir diger denklem lineer cebirdeki $A\vec{x} = \vec{b}$ denklemdir. PDE sisteminde de cevabini aradigimiz, lineer cebir sisteminde “ A ile carpilip b sonucunu verecek \vec{x} hangisidir?” sorusuna benzer bir sekilde “ \mathcal{L} operatoru uygulanip $f(\vec{x})$ sonucunu verecek u hangisidir?” sorusudur.

Bu analogiden devam etmek gerekirse, belli bir noktada u ’nun icinde oldugu “fonksiyon uzayi” hakkında dusunmemiz gerekebilir, \vec{x} ’in icinde oldugu \Re^n uzayi gibi. Lineer cebir durumunda operatorun ozelliklerine bakilir, mesela “ b ’nin icinde oldugu ve A operatoru uygulanip hic sonuc alinamayacak uzayin belli kisimlari var midir?” gibi sorularla ugrasilabilir, bunlar A ’nin “ulasamadigi yerlerdir” vs. PDE’deki \mathcal{L} operatoru icin de benzer sorular sorulabilir.

Yani lineer cebirle pek cok kavram PDE dunyasina benziyor, orada vektor uzayi var, burada fonksiyon uzayi var. Yani bir analogi olarak bu benzerligi aklimizda tutmamiz faydali.

Bir operator su sekilde de olabilir

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, u, \dots\right)$$

Yani operator kısmi turevlere ve hatta u ’nun kendisine de bagimli olabilir.

Eger elimizde gayri lineer bir PDE var ise, basimiz dertte demektir. Boyle bir sistemi cozmek icin cogunlukla sayisal cozumlere basvurmak gerekir. Eger lineer ise cozumde bayagi ilerlemek mumkundur.

Lineerlik

Bir operator ve onun tanimladigi bir ust uste eklenebilme durumu dusunelim

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \mathcal{L}u_1 + \alpha_2 \mathcal{L}u_2$$

ki α_1, α_2 birer tekil sayidir (scalar), ya reel, ya da kompleks.

Ornek

Birazdan bakacagimiz denklem dalga denklemi. Orada

$$u_{tt} - c^2 u_x = 0$$

Bu denklemi

$$\mathcal{L}u = 0$$

sekinde yazabiliriz ki \mathcal{L} soyle tanimli olacaktir

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0$$

c bir sabittir.

Simdi diyelim ki su denklemi cozmemiz lazim

$$\mathcal{L}u = f$$

ki

$$\mathcal{L} : V \rightarrow V$$

Yani, \mathcal{L} bir vektor uzayini bir digerine eslemekte (map), ve yine diyelim ki bu uzaylar birer Hilbert Uzayi (bunun anlamina simdi bilmemiz gerekmiyor, ileride bu konuya donecegiz, bu kelimeyi soyle bir ortaya atmak istedim).

Yani sordugumuz Hilbert Uzayi V 'de bir f 'e esleyecek bir u fonksiyonu olup olmadigi. Bu arada tipik bir Hilbert Uzayi mesela kare alip bir sinir bolgesinde (boundary domain) entegre edince elde edilen sonlu (finite) bir sonuclarin olusturdugu uzay. Yani "derli toplu" fonksiyonlar bir anlamda, absurt sonuclar vermeyen turden, sonsuzluga dogru patlayip giden turden olanlari degil.

Faraziyeve devam edelim, diyelim ki V icinde bir baz (basis) var. Baz nedir? Lineer cebirden hatirlayalim, mesela uc boyutlu Oklidsel (Euclidian) uzayi \mathbb{R}^3 .



$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Bu uzaydaki herhangi bir vektor \vec{r} ustteki uc baz vektoru kullanilarak parcalarina ayirilabilir, ya da, onlarin bir lineer kombinasyonu olarak gosterilebilir. Mesela

$$\vec{r} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

Bu uc vektorun bu uzay icin bir “baz olusturdugu” soylenebilir, cunku bu uzaydaki her vektor bu uc vektorun bir kombinasyonu olarak temsil edilebilir. Dikkat edelim, iki baz vektor yeterli olmazdi, dort taneye gerek yok. Tami tamina uc tane vektor bu uzayin bazini olusturuyor.

Bu sonlu (finite) miktarda bir uzay, herhangi bir vektörü tanımlamak için sonlu miktarda baz vektörü yeterli. Sonsuz boyutlu bir uzay da olabilirdi, o zaman herhangi bir fonksiyonu tanımlamak için sonsuz tane baz vektörü gerekirdi. Mesela Fourier Serilerini düşünelim

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \phi_i(x)$$

ki baz fonksiyonlar $\left\{ \phi_i(x) \right\}_{i=1}^{\infty}$.

Bu fonksiyonların her biri trigonometrik fonksiyonlar olabilir (cos, sin) gibi, o zaman seri Fourier Serisi olur. Her halukarda, yukarıdaki tanımla diyoruz ki belli (unique) α değerleri var ki, o değerleri zaten önceden bilinen baz fonksiyonları ile carpip toplayarak u 'yu oluşturabiliyoruz.

Eğer lineer operatörümüzü hatırlarsak

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \mathcal{L}u_1 + \alpha_2 \mathcal{L}u_2$$

Bu operatör herhangi iki katsayıyı kullanıyordu, fakat iki üstteki sonsuz tane toplamı da içerecek şekilde genişletilebilir, ve baz kavramı ile üst üste eklenbilme kavramının arasındaki alakayı gösterir.

Diyelim ki \mathcal{L} 'nin her baz vektörünü nasıl esledigini biliyoruz,

$$\mathcal{L}\phi_i = -\lambda_i \phi_i$$

Üstteki ifade ϕ 'in L 'in özfonksiyonu olduğunu söylüyor aynı zamanda. Eğer alttaki acilimi yaparsak, ki bunu yapabiliriz çünkü ϕ 'ler bazdırlar,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= \mathcal{L}\left(\sum_i \alpha_i \phi_i(x)\right) = \sum_i \alpha_i \left(\mathcal{L}\phi_i\right) \\ &= -\sum_i \alpha_i \lambda_i \phi_i \end{aligned}$$

Bir operatörün herhangi bir baz üzerinde nasıl işlem yaptığını anladığımız anda, o zaman \mathcal{L} 'in herhangi bir u fonksiyonu üzerinde ne etki yaptığını bilebiliriz. Diğer bir deyişle bir uzayda sonsuz tane fonksiyon olabilir, ama biz operatörümüzün bazlara nasıl etki ettiğini biliyorsak, o bazlarla oluşturulan tüm fonksiyonlara nasıl etki ettiğini de biliyoruz demektir.

Tekrar belirtelim, bu sadece \mathcal{L} lineer bir operatör olduğu zaman mümkün.

Ornek

Klasik Burger denklemi

$$u_t + uu_x = vu_{xx}$$

Denklemini

$$\mathcal{L}u = 0$$

olarak yazabiliriz, ki

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Bu gayri lineer

Ornek

$$u_{xx} + u_{yy} + \sin(u)$$

$$\mathcal{L}u = 0$$

$$\mathcal{L} = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \sin(\cdot)$$

Ustteki ilginç bir durum sinus fonksiyonun da içi boş halde, operatör olarak kullanılmış olması. Operatör tanımında bazen böyle nokta konulduğu oluyor, ki neyin üzerinde operasyon yapıldığı anlaşılsın diye, mesela üstteki şöyle de gösteriliyor bazen

$$\mathcal{L} = \partial \cdot_{xx} + \partial \cdot_{yy} + \sin(\cdot)$$

Bu da gayri lineer çünkü sin fonksiyonu lineer değil, yani

$$\sin(u_1 + u_2) \neq \sin(u_1) + \sin(u_2)$$

Lineerlik üzerinde çok duruyoruz çünkü diferansiyel denklemimiz hakkında bilmemiz gereken en önemli bilgilerden / ipuçlarından biri bu, çünkü denkleminizin lineer ya da gayri lineer olması, bizi çok farklı çözüm teknikleri kullanmaya itecek.

Bir diğer önemli terim homojen (homogeneous), homojen olmayan (inhomogeneous) kavramı.

Homojenlik

Eğer $u = 0$ bir çözüm ise PDE homojendir.

Yani $\mathcal{L}u = f(\vec{x})$ denklem taniminda eger $f(\vec{x}) = 0$ ise PDE homojendir.

Ornek

$$u_{xx} + u_y^2 = xu$$

Denklem 2. derece, gayri lineer cunku bir kare var, ve homojen cunku $u = 0$ 'in bir cozum oldugunu gorebiliyoruz.

Ornek

$$u_x^2 + u_y = 6y \sin\left(\frac{x^3}{5}\right)$$

PDE 1. derece, gayri lineer, ve homojen degil.

Soru

Bagimsiz degiskenlere bagli bir lineer operator olabilir mi?

Cevap

Evet. Mesela $u = u(x, y)$, ve denklem $xu_x + u_y = u$.

Bu homojen bir denklem, ve $\mathcal{L}u = 0$ olarak gosterilebilen bir denklem, ve

$$\mathcal{L} = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - 1$$

ve goruldugu uzere operator taniminda bagimsiz degisken x var.

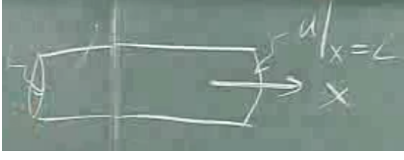
Bu lineer bir operator. Lineerligin bagli oldugu sey bagimli degiskenler, bagimsizlar degil, mesela ustteki x , x^3 gibi bir sey olabilirdi ama problem hala lineer olurdu.

Sinir kosullari da bu baglamda cok onemli, mesela diyelim ki tanimi lineer olan bir PDE var, ama problem tanimindaki sinir kosullari eger fonksiyonun gayri lineer bir kombinasyonunu iceriyorsa o zaman problemin tamami gayri lineer hale gelir.

Biraz formel olarak dusunursek, mesela tek boyutlu isi denklemi

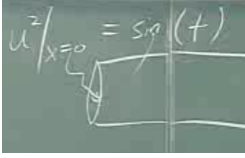
$$u_t = ku_{xx}$$

ki x mesafe belirten degisken, t zaman,



Bu denklem üstteki gibi bir borudaki isinin dağılımını, akisini gösteriyor olsun. $u|_{x=L}$ ile gösterilen bir sınır şartı, yani L uzunlugundaki borunun en ucunda (sağındaki) olması şart olan ısı seviyesi. Mesela bu şart $u|_{x=L} = T_2$ olsun, ki T_2 bir tekil sayı, 100° , 200° gibi. Şimdi homojenliğe ne oldu? Ana denklem homojen, ama homojenlik testini sınır şartına uyguladığımız zaman $0 = T_2$ gibi bir sonuç alıyoruz, ki bu absürt bir sonuç demek ki sınır şartı homojen değil. O zaman bu problemin tamamı homojen olamaz.

Benzer şekilde borunun öteki ucu için tanımlanan şart gayri lineer olsa



ki bu şart o uçtan bir tür sinusoidal bir enerji, ısı verildiği bir durumu tarif ediyor, o zaman ana denklem lineer olsa bile, sınır şartında gayri lineerlik olduğu için problemin tamamı gayri lineer olacaktır.

Aslında formel olarak sınır şartlarını alıp

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} - k\partial_{xx}$$

operator tanımına bir şekilde dahil etmenin yolları var, ama biz bunlar çok ileri seviye teknikler, bu derste bu teknikleri görmeyeceğiz.

Baslangic Sartlari

Mesela yayılma (diffusion) denklemi $u(x, t)$ için $u(x, 0) = f(x)$, yani baslangic anında ısı dağılımının tüm boru boyunca hangi seviyelerde olduğunu (burada bu dağılım $f(x)$) belirtilmesi, baslangic şartını tanımlamak demektir.

Genel bir kural PDE'deki türev sayısı kadar şart tanımlanması gerektirir. Mesela iki zaman türevi var ise, iki tane koşul gerekir, mesela $t = 0$ anındaki bir koşul, artı zamana göre türevin $t = 0$ anındaki değeri, vs.

Soyle düşünebiliriz, u_{xx} 'in olduğu bir denklemde u elde etmek için iki kere

entegre edilir, ve bunun sonucu olarak iki tane entegrasyon sabiti ortaya cıkar, ki bu degerler herhangi bir sayı olabilir. O iki sabiti hesaplamak için iki tane kosul gerekecektir.

Genel kurali daha somutlastırırsak, “her bağımsız değısken için gereken sınır kosulu, o bağımsız değıskenin derecesine esittir”. Tabii bu genel bir kural, bazen gercek dünyadaki fizik problemlerinde bu gecerli olmayabiliyor, bir problem için duzgün sınır kosulları bulmak başlı başına bir sanat denebilir aslında.

Ornek

Laplace denklemleri

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ki ∇^2 Laplacian operatörü olarak bilinir.

Ustteki turden bir denklem hiç kaynak akım verilmeyen sonsuz uzayda elektrik potansiyeli alanını temsil ediyor olabilir.

Bu denklemin bir çözümün (ki sınır şartlarına dikkat edelim) şu şekilde olduğunu göstermek kolaydır:

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Bu Potansiyel Teori’sinde tipik bir problem, bir alan değıskeni var, ve orijinden uzaklastıkça bu değısken azalıyor, bu azalma $1/\text{uzaklığın karesi}$ oranında.

Bu “bir” çözüm, fakat bir sürü 2. derece türev var ortalıkta, o zaman x, y, z ’nin her türlü lineer fonksiyonu da aslında bir çözümdür. Mesela

$$u(\vec{x}) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$$

formülü de bir çözüm olabilir. Niye? Herhangi bir lineer fonksiyonun iki kere türevini alırsak o fonksiyon yok olur.

Demek ki bu problemin tanımı eksik, sınır şartları da tanımlanması gerekli, aksi takdirde elde edilen sonuçlar özgün olmayacak. Envanir turden çözüm mümkün.

Bu problem için tipik bir sınır kosulu $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} u = 0$ ifadesidir. Elektrik alan

ornegine donersek, elektrikalani sonsuzluga giderken sifira dusuyor demis oluyoruz. Bir sabite gidiyor da diyebilirdik, o da islerdi.

O tur bir sart

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

sonucunu saglardi, diger secenekleri elemis olurdu. Bu ornegi sinir kosullarinin onemini belirtmek icin sectik, bu kosullar ana denklemin kendisi kadar onemli.

Bir nokta daha:

Soyle bir ODE dusunelim

$$\frac{du}{dt} = 1$$

Entegre edince genel cozum

$$u(t) = t + c_1$$

Fakat PDE icin

$$u = u(x, y)$$

$$u_x = xy$$

Burada y bazli bir turev yok, basit bir PDE, cozmesi kolay, fakat unutmayin, entegre edince

$$u = \frac{1}{2}x^2y + [..]$$

Noktalarin oldugu yere ne gelecek? Bir sayi sabiti degil bir fonksiyon gelecek.

$$u = \frac{1}{2}x^2y + g(y)$$

cunku u , y 'nin bir fonksiyonu, o zaman elimize gecen y 'nin herhangi bir fonksiyonu olacak, ki bu fonksiyonun degeri sinir kosullari uzerinden tanimlanmis olmalidir. Bunu ozellikle vurgulamak istedim cunku insanlar bu detayi unutabiliyor.

Sinir kosulu nasil olabilir? Mesela $u(\alpha, y) = f(y)$ seklinde olabilir. Bu kosulu

yerine sokunca

$$\frac{1}{2}\alpha^2 y + g(y) = f(y)$$

Bu bize $g(y)$ 'in ne oldugunu soyler

$$g(y) = f(y) - \frac{1}{2}\alpha^2 y$$

ve bu ornek icin nihai cozum

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 y + f - \frac{1}{2}\alpha^2 y$$

Ilginc bir ornege bakalim simdi.

PDE'lerin ortaya cikabilecegi durumlardan biri, ayriksal parcaciklardan olusan bir sistemin limite gittigi andir. Bu tur sartlarda ODE'lerden olusan bir sistem limite giderken bir PDE ortaya cikartabiliyor. Sureklilik Mekanigin-den (Continuum Mechanics) bir ornek verecegiz yani.

Sistem ayriksal baslayacak, sureklilik limitine gidecek. Mesela sivilar mekaniginde (fluid mechanics) Euler denklemi, Navier-Stokes denklemleri sivi sisteminin (su gibi mesela) sureklilik limitidirler. Bu denklemler sivi icindeki ufak par-caciklari tarif etmezler, sistemin butunune bakarlar.

Hepimiz Newton Kanunu biliyoruz (ki bu kanun bu derste ihtiyacimiz olan yegane fizik bilgisi)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$$

Formul ne diyor? Kutle carpi ivme esittir kuvvet. Gayet basit.

Diyelim ki elimizde N tane tane parcacik var, $i = 1, \dots, N$, ve bu parcacik-lar birbirleriyle etkilesim halindeler, aralarinda bir tur cekim var belki, ya da baska bir kuvvet. O zaman her parcacik icin ayri ayri hareket kanunu isleyecek. Ve i 'inci parcacik uzerinde bir kuvvet var, ve bu kuvvet sistemdeki tum diger degiskenlerle bir sekilde bagimli. x tabii ki pozisyon degiskeni. O zaman

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i(\vec{x})$$

Dikkat edersek, F fonksiyonuna giren parametre tum parcaciklar, yani o

parcacigin hissettigi kuvvet bir sekilde tum diger parcaciklarla alakali.

Baslangic Sartı

i 'inci parcacigin baslangic konumu

$$x_i(0) = \hat{x}_i$$

Tipik olarak baslangic hizi da verilir

$$\frac{dx_i}{dt}(0) = \hat{v}_i$$

Ustteki bir baslangic deger problemi (initial value problem). Biz bu derste PDE bazinda sinir degerli problemlerle ugrasacagiz.

Bu tur baslangic deger problemleri iyi huyludur, cunku, mesela bu ornekte 2. derece bir diferansiyel denklem var elimizde, ve bagimli degisken x var, ve bize verilen kosulu anlamak icin alttaki resme bakalim



Bize verilenler, $t = 0$ aninda x_i noktasinin oldugu yere ek olarak (soldaki nokta), bir de o noktadaki egim bilgisi. Bu tur bilgi verilince, parcacigin hangi yone gitmeye meyilli olacagini da gormus oluyoruz. Sanki bir top ateslenmis, ve topun ates ettigi anda nerede olduguna ek olarak topun nam-lusunun gosterdigi yer de bize soyleneiyor.

Bu iyi huylu bir problem. Sinir degerli denklemler cok daha karmasik ola-biliyor. Bu arada “sinir kosullu” kelimesindeki “sinir” cogunlukla bir fiziksel seye tekabul eder, mesela bir ip vardır, ve ipin “sonunda” yani sinirlarinda degerin ne olmasi gerektiği sabitlenir.

Devam edelim. Kurmak istedigimiz model bir tur “gitar teli” modeli.

$y_i = i$ 'inci parcacigin yuksekligi olsun.



Tel üzerinde bir sürü parçacık var, tel iki ucundan sabitlenmiş durumda. Bu problemde yatay hareketle ilgilenmiyoruz, sadece yukarı / aşağı hareketle ilgileniyoruz. Bir tanım daha:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

Basitleştirme amacıyla bu tanımı yaptık. Tüm parçacıkların arasındaki mesafeyi sabit, ve aynı olarak aldık. Benzer şekilde

$$m_i \equiv m$$

Yani tüm parçacıklar aynı kütleye sahip.

Şimdi Newton Kanununu parçacıklara uygulayalım.

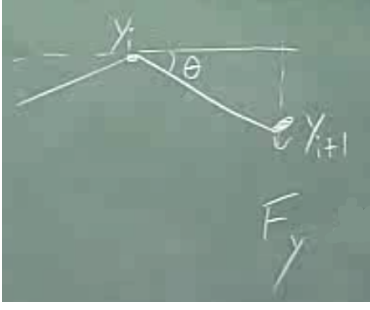
$$m \frac{d^2 Y_i}{dt^2} = \tau \left(\frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \right) - \tau \left(\frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta x} \right)$$

Bununla ne demis olduk? i 'inci parçacığın hissettiği çekimin, o parçacığın solunda bağlı olduğu diğer parçacıkla baginin ipteki eğimi ile orantili olduğunu söylemiş olduk.



τ her tel için farklı olabilecek bir gerginlik sabiti.

Üstteki formül aslında yerel türevin “ucuz” bir yaklaşıksallaması.



$$F_y \equiv \tau \sin \theta$$

Sadece sin kullandık çünkü daha önce belirttiğimiz gibi, sadece dikey hareketlere bakıyoruz, yatay hareketlerle ilgilenmiyoruz (o yüzden cos yok).

Bir yaklaşıksallama yapabiliriz şimdi, eğer $\theta \ll 1$ ise, yani acı 1 sayısından çok küçük ise, $\sin \theta \approx \tan \theta$ sayılabilir, bu sonuç Taylor Serileri ile alakalı. \tan fonksiyonu, \sin/\cos olduğu için ve sifra yakın değerlerde bölün hep 1'e yakın olacağı için, \tan bir nevi \sin de sayılabilir.

Bu problemde $\tan \theta$ nasıl hesaplanır?

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \end{aligned}$$

Bu model bir “en yakın komşu” modeli, her parçacık yakınındaki parçacıktan etkileniyor.

Şimdi bir numara yapalım ve ana formülü şu şekilde tekrar organize ederek yazalım

$$\frac{d^2 Y_i}{dt^2} = \tau \frac{\Delta x}{m} \left[\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{\Delta x^2} \right]$$

Koseli parantez içindeki ifade 2. türevin ayrık formdaki yaklaşıksallaması bu arada.

Ayrık modelimiz böyle. Şimdi süreklilik limitine geçmek istiyorsak, mesela sonsuz sayıda parçacık olduğu bir duruma geçmek isteyebiliriz, $\lim_{N \rightarrow \infty}$, elimizde sonlu / belli miktarda bir tel var, bu durumda sonsuz sayıda parçacık demek bu parçacıkların arasındaki mesafenin sifra gitmesi demektir, o

zaman $\lim_{\Delta x \rightarrow \infty}$.

Formul için bunun anlamı nedir? Δx ve m arasındaki oran sonlu (finite) bir sayıya yaklaşacak demektir, ki bu sayıya yoğunluk diyebiliriz. Oran niye sifıra gitmiyor? Süreklilik sistemlerin kullanılan bir numara bu,

$$\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m}{\Delta x}$$

Δx 'in aşağı indigini düşünüyoruz, ama olabilecek çok ufak bir hacim hayal ederek mesela molekül boyutundan daha fazla aşağı inmeyeceğini söylüyoruz, m aynı şekilde küçülüyor, ve oran bize bir yoğunluk hesabı veriyor.

Taylor Serileri hakkında hızlı bir ders

$$Y_{i+1} = Y(x_i + \Delta x)$$

Eğer Δx çok küçük ise

$$= \underbrace{Y(x_i)}_{Y_i} + \Delta x \frac{dY}{dx} \Big|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2Y}{dx^2} \Big|_{x_i} + O(\Delta x^3)$$

Daha kısa bir şekilde yazalım

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta x Y_i' + \frac{\Delta x^2}{2} Y_i'' + \dots$$

Aynı şeyi Y_{i-1} için yapabiliriz

$$Y_{i-1} = Y_i - \Delta x Y_i' + \frac{\Delta x^2}{2} Y_i'' + \dots$$

Not: Esitliğin sağındaki eksi, artı işaretlerinin nereden geldiğini merak ediyorsak, Hesapsal Bilim 1 Ders 2 notlarında $u(x-h)$ acilimine bakılabilir.

Son iki formülü toplarsak

$$Y_{i+1} + Y_{i-1} = 2Y_i + \Delta x^2 Y_i'' + O(\Delta x^4)$$

O zaman 2. türevin x_i 'daki yaklaşıksallaştırması

$$Y_i'' = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

O zaman ana formülde

$$\frac{d^2 Y_i}{dt^2} = \tau \frac{\Delta x}{m} \left[\underbrace{\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{\Delta x^2}}_{\rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \right]$$

Yani $\Delta x \rightarrow 0$ iken koseli parantez içi $\partial^2 y / \partial x^2$ 'e gider.

Simdiye kadar yazdiklarimda ODE dili kullandim, goruntu basit olsun diye, fakat unutmayalim, Y aynı zamanda t 'ye de bagli, o yuzden ustte kısmi turev kullandik.

Bu sistemin sureklilik limiti, $\Delta x \rightarrow 0$ iken

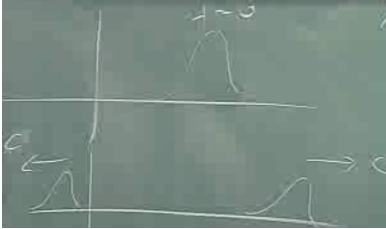
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

olacaktır. Bu denklem fizikte iyi bilinen dalga denklemdir. İnsanlar cogunlukla

$$c^2 = \frac{\tau}{\rho}$$

sekinde yazarlar ve c boylece “dalga hizi” olarak kullanilabilir (hakikaten de aynen ona esittir).

Eger teli bir noktasinda titrettigimiz dusunursek, ve telin sonlu degil sonsuz oldugunu dusunelim, o zaman “hareket eden dalgalar (traveling waves)” fenomenini goruruz. Altteki resimde $t = 0$ aninda bir tepe noktası var (tele vurduk), ve ikinci resimde iki tane tepe noktası saga ve sola esit sekilde hareket ediyorlar.



PDE'ler ayriksal sistemlerin, ODE'lerin, sureklilik limitinde dogal olarak ortaya cikarlar. Bu tur yaklasiksallamalari ben arastirmalarimda surekli kullaniyorum [hoca uygulamali matematikçi], akiskanlik mekaniginde mesela, bir sivinin, molekulun kisimlarini aliyoruz, ve kisimler birbirleri ile etkilesimde

oluyorlar. Ya da mesela yogunluk degiskenini, kutleyi bir surekli fonksiyon haline getiririz, ve parcacik hizi yerine sivinin tamamının hizina bakariz. Yani bu cok kullanan bir teknik. Cogunlukla ayriksal bir ag yapisi icin analitik bir denklem bulmak cok zordur, o sebeple sureklilik yaklasiksallamasi kullanilir zaten. Belki ustteki problem icin alternatif cok kotu olmayabilirdi, mesela burada ODE'leri matris formunda yazarak ta cozume gidebilirdik, bu cok zor olmazdi, fakat cogu zaman bunu yapmak hakikaten zor olabiliyor.

Niye sistemi analitik olarak gormek istiyoruz? Cunku o zaman formularyonu istedigimiz gibi manipule ederek, analitik sekilde istedigimiz yoldan ilerleyebiliyoruz.

* * *

Bir PDE kategorisinden bahsedelim, bu tur PDE'ler en cok kullandigim PDE'lerden, lineer 1. derece denklemler. Ve bu arada “karakteristikler” kavramindan bahsedecegiz.

1. Derece, Lineer PDE, 2 Bagimsiz Degisken

$$u = u(x, y)$$

PDE

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y)$$

Operator olarak

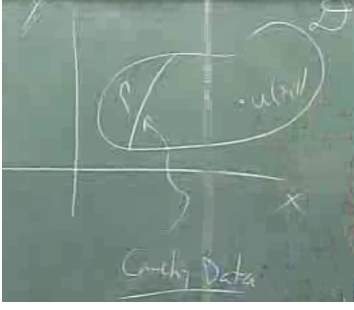
$$\mathcal{L}u = f$$

$$\mathcal{L} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}$$

Karakteristik kavramindan birazdan istifade edecegiz, ama simdi bu tur denklemleri kaba kuvvet kullanarak, “degisken degistirme (change of variables)” yontemi ile nasil cozulebilecegini gosterelim.

Tanim

Cauchy Problemi: $u(\vec{x})$ tanimi gerektirir. Bu tur problemler 1. derece, 2 degisken, vs. gibi tanimlarla sinirli degil aslinda, cok daha genel bir tanim onlar, bu tur problemlerde bir “Cauchy Verisi (Cauchy Data)”nden bahsedilir.



Ustteki resimde bu veri D alanı (domain) içindeki Γ ile işaretli çizgidir, ki u 'nun bu çizgi üzerindeki değeri diyelim ki

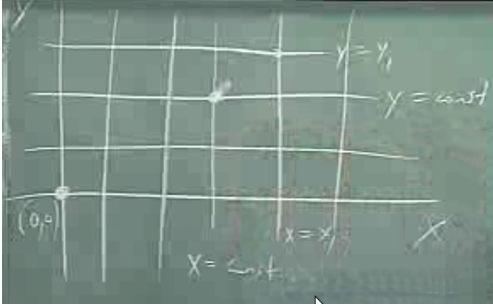
$$u|_{\Gamma} = \alpha(x, y)$$

ki $\alpha(x, y)$ herhangi bir sonuç.

Mesela Γ çizgisi $x = \sin(y)$ ile tanımlı eğri, ve u onun üzerinde $u = y^2$ olmalı.

Bu tür bir kosa Cauchy Verisi ismi veriliyor, bizim örneğimizde bu bir tür sınır koşulunu andırıyor.

Bir kordinat sistemi nedir?

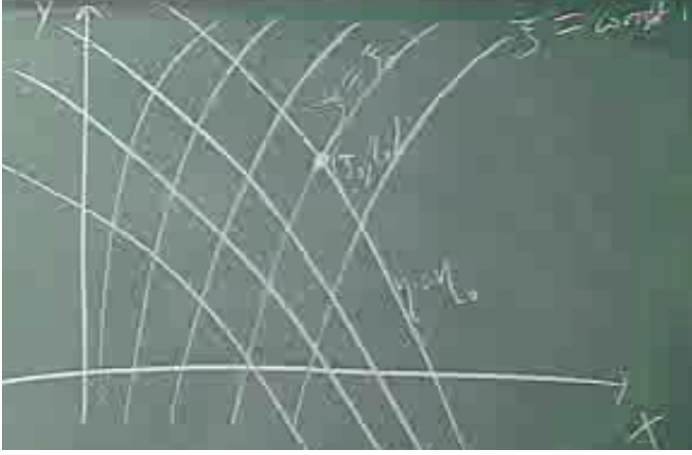


Diyelim ki öyle bir fonksiyon kümesi var ki, onlar üzerinden PDE'lerimizi değişik bir kordinat sisteminde temsil etmemiz mümkün olacak.

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned}$$

ξ ve η 'yi kesit eğrileri (level curves) üzerinden incelemek mümkündür. Bu fonksiyonları belli sabitlere eşitleyip, durumlarına bakabiliriz, sonra sabitleri

degistiririz, bir daha bakariz, vs.



Ustteki resimde mesela, saga yatik tum egriler, her biri degisik bir sabite (Ingilizce const diye yazilmis) esit olacak sekildeki ξ egrileri olabilir. Sola yatik η cizgileri de olabilir. Ortadaki nokta iki onceki resimdeki bir noktanin bu yeni kordinata eslenmis bir nokta mesela.

Gerekliklerimiz

Esleme, transformasyon bire bir (one-to-one) olmalı. İlk kordinat sistemindeki her nokta, diger kordinat sistemindeki tek bir noktaya esleniyor olmalı.

Jacobian'i yokolmayan (non-vanishing) olmalı.

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

Ustteki ifade Calculus'un Dolayli Fonksiyon Teorisi (Implicit Function Theorem of Calculus) ile alakali. Bu teorinin yerel baglamda niye birebir esleme yarattigini merak ediyorsaniz Calculus kaynaklarina danisabilirsiniz.

Amac: Sunu

$$au_x + bu_y + cu = f$$

transform et ve suna cevir

$$W_\xi + h(\xi, \eta)W = R(\xi, \eta)$$

$$W(\xi, \eta) \equiv u\left(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\right)$$

Birebir transformasyon istemistik, o zaman esleme geriye çevirilebilir (invertible) de olmalı, yani istersek x, y degiskenlerini ξ, η çerçevesinde temsil edebiliyor olmamız lazım.

Dikkat: W_η yoktur, bu sayede iki üstteki formül 1. derece ODE haline gelir, entegre edici faktör kullanıp entegre edip Cauchy Verisini uygulayarak bu problemi çözebilirsiniz. Analitik olarak biraz karmasikliga sebep verebilir, ama bu en azından mümkün bir stratejidir.

Simdi sıra transformasyonu bulmaya geldi. x, y degiskenlerini ξ, η çerçevesinde temsil edelim. Zincirleme Kanununu kullanalım.

$$\frac{\partial}{\partial x}u \equiv \frac{\partial}{\partial x}W(\xi(x, y), \eta(x, y)) = W_\xi \eta_x + W_\eta \eta_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u = W_\xi \eta_y + W_\eta \eta_y$$

Bunu orijinal denkleme sokalım

$$a(\xi, \eta) \left[W_\xi \eta_x + W_\eta \eta_x \right] + b(\xi, \eta) \left[W_\xi \eta_y + W_\eta \eta_y \right] + c(\xi, \eta)W = f(\xi, \eta)$$

Tekrar düzenleyelim

$$= \left[a\xi_x + b\xi_y \right] W_\xi + \left[a\eta_x + b\eta_y \right] W_\eta + cW = f$$

Soyle sec

1.

$$a\eta_x + b\eta_y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\eta_x}{\eta_y} = -\frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

2.

$$\xi = x$$

Boylece

$$h = \frac{c}{a}$$

$$R = \frac{f}{a}$$

elde edilir.

Unutmayalım Jacobian sartini tatmin etmemiz lazim.

Farz edelim

$$\eta_y \neq 0$$

Bu ise yarar

$$J = \xi_x \eta_y - \overset{0}{\cancel{\xi_y}} \eta_y$$

$$J = \eta_y \neq 0$$

Bir dahaki derste η' yi nasıl hesaplayacağımızı göreceğiz.