MIT OCW Hesapsal Bilim 18.085 Ders 5

Onceki derste $-u'' = \delta(x-a)$ denklemini cozmustuk. Ayriksal olarak bu denklem sol tarafta matris $-K$, sag tarafta ise noktasal agirligi tek hucre icinde 1 olan bir vektore tekabul edecektir. K baglaminda 1 -2 1 formu, -1 2 -1 haline gelir, u vektoru onceki gibi, sag tarafta ise ayriksal delta fonksiyonu. Agirligin 2. hucrede oldugu ornek alttadir.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ortaya ilginc bir durum cikti: sag taraftaki matrise bakarsak, agirlik 2. hucrede ve orasi 1. Eger 3. olsaydi 3. hucre 1 olurdu, vs. Tum bu vektorleri yanyana koysak, birim matrisini elde etmez miyiz? Evet. O zaman bir kolaylik ortaya cikti. Agirlik j uzerinde ise o vektoru δ_j ile temsil edersek,

$$Ku = \delta_j$$

δ_j yerine I kullanirsak, ve u vektoru yerine U kullanirsak,

$$KK^{-1}U = I \cdot K^{-1}$$

$$U = K^{-1}$$

olacaktir. U icinde her turlu j olasiligi icin bir cozum iceriyor. Eger $j = 2$ olasiliginin cozumunu gormek istiyorsak o zaman K^{-1} matrisinin yani U'nun 2. kolonuna bakmak yeterli.

Peki, eger yuk tek bir nokta yerine "tum" noktalarda olsaydi ne yapardik? Tum noktalardaki yuk esitligin sag tarafinin tamamen 1 olmasi demektir. O zaman bir baska numara yaparak, tamamen 1 iceren bu vektoru ayri ayri δ_j'ler "toplami" olarak gorebiliriz, mesela

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu ne demektir? Esitligin sag tarafinin "girdi" olarak gorulebildigini de biliyoruz. Lineer bir sistemde girdiler toplanirsa, mumkun tum ciktilar da toplanir. Ustteki K^{-1}'in kolonlari da bu mumkun tum ciktilari zaten verdigine gore tek yapmamiz gereken bu kolonlari birbiriyle toplamaktir.

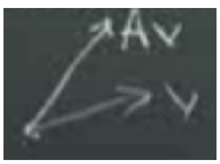
Green'in Fonksiyonu

$-u''$'ya esit olarak bir noktasal agirlik (point load) yani delta fonksiyonu varsa cikan sonuc Green'in fonksiyonu olarak bilinir ve bu fonksiyon $G(x,a)$ olarak ta gosterilebilir, cunku Green'in fonksiyonu hem x'e hem a'ya baglidir. Ayriksal, surekli (continuous) baglaminda ise Green'in fonksiyonu ustte gosterilen matris tersi isleminin surekli hali olarak dusunulebilir.

Ozdegerler ve Ozvektorler (Eigenvalues and Eigenvectors)

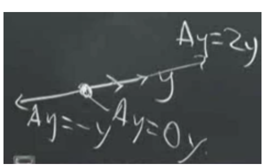
Ozdegerler $Ay = \lambda y$ formunda ortaya cikarlar. Eger bir problemde bu formu bulabilirsek, cozum icin muthis kolaylik saglayan bir kavramdirlar. Ozdegerler λ icinde, ozvektorler y icinde bulunur.

Bu kavram hakkinda anlayis gelistirelim. Mesela elimizde bir v vektoru var, ve A matrisi ile carpiliyor. Sonuc yine bir vektor olacak, bu vektor Av vektoru.



Eger o vektor yukaridaki gibiyse, v bir ozvektor *degil* demektir. Niye? Cunku ozvektorler ozel vektorlerdir (her A icin) , oyle degerlere sahiptirler ki A ile carpilinca, cizgisel *yonleri* degismez (ama boylari degisebilir). Diyelim ki elimizde bir y var,

Ay alttaki gibi olabilir



$2y$ olabilir, ters yonde buyuyebilir, sifir haline de gelebilir, vs. Fakat muhakkak ayni cizgi uzerinde kalir, λ degeri de 2, sifir, vs gibi buyumenin, kuculmenin ne kadar oldugunu belirten degerler olacaktir. Fakat, tekrarlamak gerekirse, ozvektorler nadirdirler zaten tarif edildigi sekilde davranan bir vektorun az rastlanan bir sey olmasi normal olmalidir.

Bunun faydasi, degeri nedir? Ozvektor bize oyle bir yon saglar ki o yonde A bir sayi gibi davranir. A, y vektorunu "degistiren", onu transform eden bir fonksiyondur bir bakima, ve bu fonksiyon ne kadar cetrefil olursa olsun belli bir "ozel" yonde sadece sayi etkisi yapmaktadir. Mesela

$$\frac{du}{dt} = Au$$

diyelim ki u 1000 boyutunda bir vektor, A 1000 x 1000 boyutunda bir matris. Denklem cok buyuk, ama diyelim ki biz bu A icin oyle bir ozvektor ve ozdeger u biliyoruz ki (eger bu degerler problem icinde mantikli degerler de iseler) o zaman sunu da biliyoruz ki cozum o yonde baslarsa o yonde kalir.

O zaman elimizde bir skalar var demektir (cunku A yonde tek sayi etkisi yapiyor) yani ustteki diferansiyel denklem $u' = Au$ yerine $u' = \lambda u$ haline gelebilir.

Bu daha basit denklemin direk analitik cozumunu biliyoruz:

$$u = ce^{\lambda t}$$

λ ozdeger olarak belli bir yondeki buyume, kuculmeyi gosteriyorsa, ustteki formul icinde de benzer anlami tasir: Arti λ ustel deger uzerinden ona oranli bir buyumeyi, eksi olani o oranda bir kuculmeyi gosterir. Guzel. Kavramlar birbiriyle baglantili cikiyor, demek ki dogru yoldayiz.

Diger kullanimlar? Temel denklemi tekrar yazalim.

$$Ay = \lambda y$$

Soru su: A^2 icin oyle bir vektor ariyorum ki A ile iki kez carpinca yon degistirmiyor. Cevap, yine ozvektor y. Cunku y'yi A ile carpinca λy cikiyor, yon hala degismedi, o zaman bir daha carparsak, yon hala ayni kalir, bu sefer sonuc $\lambda^2 y$.

$$A^2 = \lambda^2 y$$

Ozvektorler diferansiyel denklemler icin, bir matrisin ustel degerlerini hesaplamak icin cok faydalidirlar. Bir matrisin pivotlari sabit konum (steady-state) problemini incelerken de elimizdeki onemli sayilardir onlar. Hareket halindeki bir maddeyi incelerken yardimci olurlar, salinimi (oscillate), buyuyen, kuculen seyleri incelemekte faydalidirlar.

Eger λ kompleks bir sayi olsaydi? O zaman λ'nin reel bolumune bakardik, < 0 ise, stabil kuculme (decay), buyuk ise stabil olmayan buyume (growth) olurdu. Eger e^{4it} gibi bir deger olsaydi, bu pur salinim olacakti, cunku acilimi $cos(4t) + isin(4t)$ formuludur.

Diger bir soru: k buyurken $A^k \to 0$ ise, yani A'yi surekli kendisi ile carparken sonuc hep kuculuyorsa, bu durumu λ'ya bakarak nasil anlayabilirim?

$A^k y$ ise $\lambda^k y$ demektir (ustte gorduk), o zaman $A^k y$'nin nasil davranacagini $\lambda^k y$'a bakarak anlayabilirim. $\lambda^k y$ ne zaman sifira gider? Cevap: $\lambda < 1$ oldugu zaman.

Kompleks λ'li Reel Matris

Diyelim ki elimizde bir vektoru 90 derece dondurebilen bir A matrisi var.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin reel ozdegerleri olamaz, cunku bu matrisin uygulanip yonu degismeyen hicbir "reel" vektor olamaz. Gozle gorulebilen her vektor 90 derece transform edilir. Iste bu gibi orneklerde ozdeger bulmak icin kompleks vektorler gerekir. Su vektoru deneyelim: $[1 \quad i]$.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Vektor ise yaradi. Simdi ana noktaya gelelim. Ozdegerleri nasil kullaniriz? Ve onlardan kac tane vardir? "Iyi" bir matris, ki bu tanima her simetrik ve matris dahildir, eger mesela buyuklugu 1000 ise, o zaman 1000 tane farkli ozvektoru olacaktir. Simetrik matrislerde de o ozvektorlerin hepsi reel olacaktir. Mesela:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2 x 2 boyutunda bu matriste 2 tane ozvektor bulmamiz lazim. Bu ufak bir matris, ozvektorleri tahmin yapa yapa bulmaya ugrasabiliriz. [1 0] bir

ozvektor mu? Carpimi yaparsak,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Olmadi. Sagdaki vektor [1 0]'in bir kati degil. Not: Lineer cebirde kafadan islem yapmanin yollarindan biri, [1 0] ile carparken 1 gorunce, soldaki matrisin "1. sol kolonunu oldugu gibi almak". Peki [1 1] denersem?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu oldu. Ikinci ozvektor ne olabilir? [1 -1] deneyelim.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Bu da oldu. O zaman $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, ozvektorler [1 1] ve [1 -1].

Bu ozvektorlere bana ne soyluyor? Onlara bakarak ana matris hakkinda ne anlayabilirim? Bakalim, [1 1] ve [1 -1] birbirine ortagonal / dik (orthagonal) vektorler.

Cebirsel olarak bu dikligi anlamak icin $y_1^T y_2$, ya da $y_1 \cdot y_2$ hesabini yapabilirdik, diklik var ise sonuc sifir cikardi. Ozvektorlerin dikligi baska bir sey daha soyler, simetrik matrislerin ozvektorleri birbirine diktir, o zaman sadece ozvektorlere bakarak ana matrisin simetrik oldugunu anlayabilirdik.

Soylemeye calistigimiz ozdeger ve ozvektorler matrisleri incelemenin, onlarin "icine bakmanin" yollarindan bir tanesidir.

Peki ustteki simetrik olmayan matrise donersek

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin ozvektorleri kompleks cikmisti, ki bu durum simetrik olmayan matrislerin bir ozelligidir. Simetrik matrisleri bu sebeple tercih ederiz, ozvektorleri reel, birbirine dik.

Ozdegerler uzerinde guzel iki tane faydali kontrol mekanizmasi: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ buldugumuz ornekte iki ozdeger toplami nedir? 4. Ana matrisin caprazindaki degerleri toplarsak (buna matrisin "izi" -trace- adi da verilir)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sonuc yine 4. Bu iki toplam her zaman esit cikmalidir. Bir numara: bir tanesi haric tum ozdegerleri bulduksak matrisi izini kullanarak sonuncu ozdegeri hizla bulabiliriz, cunku capraz toplamindan diger ozdeger toplamini cikartiriz, kalan sonuncu ozdeger olmalidir.

Bir kontrol daha. Ozdegerleri birbiriyle carparsam sonuc 3 cikar. Ana matrisin determinantini alirsam sonuc yine 3 cikar. Bu iki kontrol teknigini, ispatini gostermeden, burada vermis olalim.

Kullanima gelelim: Diyelim ki elimizde icinde 1000 tane denklem iceren bir lineer denklem sistemi var.

$$\frac{du}{dt} = Au$$

katsayilar sabit, baslangic noktasi $u(0)$. Ozdeger ve ozvektorler burada nasil yardimci olabilir? Once onlari bulmamiz gerekir, 1000 tane ozvektor var, onlari buluruz. Her i icin

$$Ay_i = \lambda_i y_i$$

yani elimizdeki ozvektorler $y_1, .., y_{1000}$, ozdegerler $\lambda_1, ..., \lambda_{1000}$.

Bu degerleri dif denklemi cozmek icin nasil kullanirim? 3 tane basamak takip ederim.

1. $u(0)$'i ozvektorlerin bir kombinasyonu olarak temsil et, yani $u(0) = c_1 y_1 + ... + c_{1000} y_{1000}$.

2. $e^{\lambda_1 t}$'yi c_1 ile carp, yani c_1'i onun buyumesi ile carp, genel olarak $e^{\lambda_i t}$'yi c_i ile carp.

3. Topla: $c_1 e^{\lambda_1 t} y_1 + .. + c_{1000} e^{\lambda_{1000} t} y_{1000}$.

Not: Bunun niye islediginin ispati icin Lineer Cebir Ders 23'e bakilabilir.

Not: Konuyla ilgili bir problem bu notlarin en altinda.

Tabii bunu islemesi icin $u(0)$'in ozvektorlere, ozdegerlere gore parcalanmasi gerekir, ayrica tum ozvektorlerin bulunabiliyor olmasi gerekir. Problemimiz bize simetrik bir matris sagliyorsa sorun olmaz, ama bazi problemlerde matris "defolu" olabilir, bazi ozvektorler birbirlerinin icine girerler (collapse) ve elde yeteri kadar ozvektor olmaz. Yani cozmeye calistigimiz probleme gore bu teknigi kullanabilir ya da kullanamayabiliriz.

Not: Ozvektorlerin birbirine yakin, hatta esit olma problemi ODE'lerdeki kritik amortisorlu (critically damped) kosulda koklerin birbirine esit cikmasiyla ayni durum (MIT OCW ODE Ders 9). Orada yeni bir cozum "yaratmak" icin e^{-at} ile t'yi carpmistik. Burada da ozdegerleri aslinda kokler olarak gorebiliriz, eger iki ozdeger esit ise, elimde sadece bir tane ozvektor olma riski de yuksek demektir. O zaman yeni bir cozum yaratmak icin ODE dunyasindakine benzer bir numara kullanirim, $te^{\lambda t}$ hesabini yapabilirim.

Ek Aciklamalar

$u(0)$'i A'nin ozvektor lineer kombinasyonu olarak temsil edilirse, sonucun $c_1 e^{\lambda_1 t} y_1 + .. + c_n e^{\lambda_n t} y_n$ seklinde olabilecegini nereden biliyoruz? Cunku $du/dt = Au$ ve $Au = \lambda u$ lineer denklemler. Bir sonraki adim icin $u(0)$ degistirildiginde, bu lineer bir sekilde, A uzerinden olacak, ve A'ya "girdi" olarak verilen vektorler eger ozdegerlerin kombinasyonu ise, bu kombinasyon cikisa da aynen, verildigi sekilde yansiyacak.

Bolum 1.5 Ornek 4 (Kitaptan)

Diyelim ki vektorel formdaki bir $u(t)$ denklemi ABD'de Missisipi nehrinin dogusu ve batisinda t anindaki nufusu temsil ediyor. Soyle:

$u(t+1) = Au(t)$

Bu vektorel $u(t)$'yi bilesenleriyle soyle aciklayalim

$$\begin{bmatrix} t+1 \text{ aninda doguda olanlar} \\ t+1 \text{ aninda batida olanlar} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \text{ aninda doguda olanlar} \\ t \text{ aninda batida olanlar} \end{bmatrix}$$

Buradaki A matrisi belli bir gozleme dayanarak modelleyicinin buldugu bir sey herhalde, problem onu bize veriyor. A bir "gecis fonksiyonu", t anindan $t+1$'e gecisi o yapiyor. Diyelim ki doguda 1 milyon insanla basladik, 1 sene sonra (A ile carpiyoruz) yeni rakamlar 800,000 ve 200,000 haline gelecektir.

A matrisi bir Markov matrisidir, Markov matrislerinin kolonlarinin ic toplamlari her zaman 1'e esittir. Ozdeger / ozvektor baglaminda Markov matrislerinin ilginc bir yani ozdegerlerinden birinin her zaman 1 olmasidir, yani $\lambda = 1$ muhakkak olacaktir. Iki boyutlu A matrisi durumunda bu cok ise yarar, cunku matris izine (trace) bakarak ve ondan 1 cikartarak ikinci ozdegeri hemen bulabiliriz. A'nin ozvektorleri de $\lambda = 1$ icin [600,000, 400,000], $\lambda = 0.5$ icin [400,000, -400,000] degerleridir.

Simdi ilginc bir numara: eger baslangic degeri [1,000,000 0]'i ozvektorlerin bir kombinasyonu olarak gosterirsek,

$u = [1,000,0000] = a_1 \cdot [600,000,400,000] + a_2 \cdot [400,000,-400,000]$

a_1 ve a_2 1 degerine esit.

Soldan A ile carpalim

$Au = A\ a_1 \cdot [600,000,400,000] + A\ a_2 \cdot [400,000,-400,000]$

$Au = a_1\ A \cdot [600,000,400,000] + a_2\ A \cdot [400,000,-400,000]$

$Au = a_1\ \lambda_1 \cdot [600,000,400,000] + a_2\ \lambda_2 \cdot [400,000,-400,000]$

λ_1 ve λ_2 nereden geldi? Ozvektorlerin tanimindan: $Ax = \lambda x$. Ustteki kombinasyonda kullandiklarimiz ozvektor olduguna gore, onlarin A ile carpilmis hali onlarin tekrar ozdegerle carpilmis halini verecektir.

Ayrica $\lambda_1 = 1$ olduguna gore, onu denklemde gostermeye gerek bile yoktur (Markov matrisi iceren problemlerin bir guzel yan etkisi oldu bu). a_1 ve a_2 zaten 1 degerine esitti, onlari da atabiliriz. Yani,

$Au = [600,000,400,000] + \lambda_2 \cdot [400,000,-400,000]$

Simdi gecis islemini birkac kere ust uste yapalim:

$A^2u = [600,000,400,000] + \lambda_2^2 \cdot [400,000,-400,000]$

$A^3u = [600,000,400,000] + \lambda_2^3 \cdot [400,000,-400,000]$

...

Boyle devam edecek. $\lambda_2 = 1/2$ olduguna gore, ve bu deger 1'den kucuk oldugu icin n buyudukce λ_2^n cok kucuk bir sayi haline gelir, ve sifira yaklasir. Yani ustteki denklemin sabit konum (steady-state) cozumu [600,000, 400,000] degeridir.

Ornek Problem

$$\frac{du}{dt} = Au$$

problemini cozdugumuzu farzedelim, ki $u(t)$ soyle tanimli

$$u(t) = \left[\begin{array}{c} y(t) \\ z(t) \end{array} \right]$$

Ayri ayri

$$dy/dt = 2y - z$$

$$dz/dt = -y + 2z$$

Matris formunda

$$\frac{d}{dt} \left[\begin{array}{c} y \\ z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} y \\ z \end{array} \right]$$

ki yukaridaki 2x2 matris A matrisi olacak. Lineer Cebir Ders 23'te goruldugu gibi bu problemin cozumu

$$u = Se^{\Lambda t} S^{-1} u(0)$$

Hesapsal Bilim ders kitabi sayfa 53'te bu problemin sadece

$$u = Se^{\Lambda t} v(0)$$

noktasina kadar gelinip birakildigi bir bolum var, bu bolumun sonucunu ustteki u formulune gore yineden turetelim. $v(0) = [C \;\; D]$ seklinde bir vektor tanimlayalim, bunlari baslangic degerlerinin ozvektorleri nasil kombine ettigini gosteriyor. A matrisinin ozdegerleri $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 3$, ona tekabul eden ozvektorler [1 1] ve [1 -1]. O zaman

$$u(t) = \left[\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} C \\ D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} y(t) \\ z(t) \end{array} \right]$$

Bu carpimi ayri ayri yapinca cozumun kitapta gosterildigi gibi

$$\left[\begin{array}{c} y(t) \\ z(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} Ce^t + De^{3t} \\ Ce^t - De^{3t} \end{array} \right]$$

olarak ciktigini gorecegiz.