

MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 14

Bagimsiz Olmayan Degiskenler (Non-independent Variables)

Ornek

Fizikteki $f(P, V, T)$ formulu, ki bu degiskenler

$$PV = nRT$$

sekinde ilintili. Daha genel olarak bir $f(x, y, z)$ formulu var, ve degiskenler x, y, z birbiriyle $g(x, y, z) = c$ uzerinden baglantili. Aslinda bir onceki dersteki ayni durum, sadece bu sefer min, maks degil, kısmi turevlere neler oldugunu inceleyecegiz.

Yine onceki dersteki gibi, belki g 'yi cebirsel olarak degistirip, f 'e sokup degisken yoketmek mumkun degil. Eger oyle yapabilsek, bir $z = z(x, y)$ olabilirdi, ve onun kısmi turevlerine bakabilirdik,

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$$

gibi. Peki ya z 'yi bulamiyorsak? Belki ustteki kısmi turevleri z 'yi bulmadan elde edebiliriz.

Ornek

$$x^2 + yz + z^3 = 8$$

$(2, 3, 1)$ noktasina bakalim (yerine koyunca hakikaten 8 ciktigini goruyoruz). Fakat bu degerlerde azicik degisiklik yapinca, z nasil degisir? Bu soruyu nasil cevaplarim?

Formulden z 'yi cekip cikarmak gerekir, kupsel (cubic) formullerde bunu yapmanın bir yolu var, fakat cok karmasik bir formül ortaya cikartiyor. Aradigimiz sonuca ulasmanın daha kolay bir yolu var.

g 'nin tam diferansiyeline, yani dg 'ye bakalim (ustteki formulu g kabul ediyoruz). Tam diferansiyel

$$2xdx + zdy + (y + 3z^2)dz = 0$$

Sag taraf sifir cunku ustteki g bir sabite esit, $g = 8$, sabitin degisimi sifir, yani $dg = 0$.

Tam diferansiyele $(2, 3, 1)$ degerini verelim

$$4dx + dy + 6dz = 0$$

Bu formül bize her degiskenin degisiminin digeri ile nasıl baglantili oldugunu gosteriyor. Mesela dx ve dy 'yi biliyorsak, dz 'yi, yani z 'nin degisimini hesaplayabiliriz. Yani $z = z(x, y)$ uzerinden

$$dz = -\frac{1}{6}(4dx + dy)$$

Bu formül bize kısmi turevleri de gostermiss oluyor aslında, cunku tam diferansiyel formülünde kısmi turevler vardır, üstteki formülde dx, dy 'nin yanında yer alan degerler onlardır. O zaman

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{6}$$

Bunu düşünmenin bir dige r yolu su. $\partial z / \partial x$ z 'nin x 'e göre degisimi ise, y sabit demektir, üstteki dz formülünde $dy = 0$ deriz, geri kalanlar

$$dz = -\frac{2}{3}dx$$

ki bu formül z 'nin x 'teki degisime göre nasıl degistigini gosteriyor.

Genel olarak

$$g(x, y, z) = c$$

ise, o zaman

$$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz$$

formulu sifira esitlenir, ve bir diferansiyel dige rinin formunda elde edilebilir.

$$dz = -\frac{g_x}{g_z}dx - \frac{g_y}{g_z}dy$$

O zaman $\frac{\partial z}{\partial x}$ 'i gormek istiyorsak, dx 'in katsayısına bakabiliriz, ya da $y = \text{sabit}$ yani $dy = 0$ deriz, ve geri kalanlar

$$dz = -\frac{g_x}{g_z}dx, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{g_x}{g_z}$$

Daha fazla ilerlemeden, simdiye kadar gordugumuz notasyonun bazi problemlerini inceleyelim.

$$f(x, y) = x + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

Degisken degisim (change of variables) yapalim

$$x = u$$

$$y = u + v$$

Pek cetrefilli bir degisim degil bu. O zaman

$$f = x + y = 2u + v$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2$$

Bu nasil oldu? $x = u$ dedigimize gore, x, u birbiriyle esitler, o zaman kısmi turevleri de ayni olmalidi.

Bu uyusmazligin niye ortaya ciktigini anlamak icin notasyonun ne demek istedigine yakindan bakmamiz lazim. $\partial f / \partial x$ ile x 'i degistiriyor, ama y 'yi sabit tutuyoruz. $\partial f / \partial u$ ile u 'yu degistiriyor, ama v 'yi sabit tutuyoruz.

Yani evet, x ile u 'yu degistirmek ayni sey olabilir, ama v 'yi sabit tutmak ile y 'yi sabit tutmak ayni sey degildir. Cunku mesela y 'yi sabit tutarsam ve u 'yu degistirirsem, v de degismelidir (ki biz bunu istemiyoruz) $y = u + v$ ifadesindeki toplamının sabit kalmasi icin. Ya da v sabit ise ve u 'yu degistiriyorsam, y degisecektir.

Yani hos, guzel kısmi turev notasyonumuz neyin degistigini acikca gostermesine ragmen, neyin sabit tutuldugunu gostermedigi icin yanilgilara yol acabiliyor. Bunu aklimizda tutmamiz lazim. Ornekteki kısmi turevler birbiriyle ayni degil cunku

$$\partial f / \partial x, u = x \text{'i degistir, ve } y \text{'yi sabit tut}$$

$$\partial f / \partial u, u = x \text{'i degistir, ve } v = y - x \text{'i sabit tut}$$

anlamina geliyor.

Daha acik bir notasyon soyle olabilir

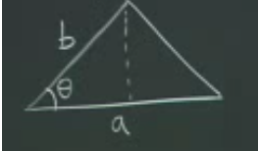
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = y \text{ sabit}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = v \text{ sabit}$$

Ornege donersek

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y}_1 \neq \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_v = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v}_2$$

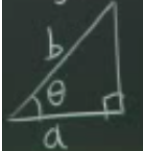
Ornek



$$A = \frac{1}{2}absin(\theta)$$

Alan, a, b, θ 'nin fonksiyonu.

Farz edin ki size a, b, θ arasında bir ilişki olduğunu söyledim.



Diyelim ki ucgen aslında bir dik ucgen, bunu cebirsel olarak söylemenin yolu da alttaki kısıtlama ifadesi

$$a = b\cos(\theta)$$

İncelemek istediğimiz alanın θ 'ya olan bağlantısı, yani, mesela A 'nin değişiminin θ 'nin değişimine oranı nedir? Bunu hesaplamamızın 3 yöntemi olabilir

1) a, b, θ 'yi bağımsız kabul et, o zaman

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_{a,b}$$

Tabii a, b sabitken θ degissin demek, ugenin dikliginin ihlali demektir, cunku hem kenarlar sabit, hem aci degissin diyoruz, ama o zaman dik aci degismek zorundadir. Her neyse, kısmi turevleri hesaplayalım.

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \frac{1}{2} ab \cos(\theta)$$

Simdiye kadar kisiltlama ifadelerimi kullanmadim.

2) a 'yi sabit tutalım, b degisebilsin, ki böylece dik aci yerinde kalabilsin.

$$b = b(a, \theta) = \frac{a}{\cos(\theta)}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_a$$

3) b 'yi sabit tutalım, $a = a(b, \theta)$ degissin, ki böylece dik aci yerinde kalabilsin.

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_b$$

Bunlardan bir tanesini hesaplayalım, mesela $\left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_a$.

Hesabi yapmanın uc degisik yolunu gorecegiz.

0. Metot: b 'yi yalnız bırak (cebirsel), ve diğer formüle sok

$$a = b \cos(\theta) \Rightarrow b = \frac{a}{\cos(\theta)} = a \sec(\theta)$$

$$A = \frac{1}{2} ab \sin(\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \tan(\theta)$$

O zaman

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \right)_a = \frac{1}{2} a^2 \sec^2(\theta)$$

Bu arada \sec , $1/\cos$ demektir, eğer ve onun turevini $1 + \tan^2$ olarak biliyorsanız, o da aynı kapiya çıkar.

Hoca bu metodu tavsiye etmiyor (onun için metod sayısı biraz espi yapar 'sıfır' vermiş) çünkü her zaman yalnız bırakma, başka formüle sokma mümkün olmayabilir.

1. Metod: Diferansiyelleri Kullan

Yapılacaklar şunlar

- a 'yi sabit tut, $da = 0$
- kısıtlama ifadesi $a = b \cos(\theta)$

Üstteki ifadenin diferansiyelini alalım

$$da = \cos(\theta)db - b \sin(\theta)d\theta$$

Şimdi elimizde $da, db, d\theta$ 'yi ilişkilendiren bir ifade var. a 'nin sabit olduğunu biliyoruz, o zaman $da = 0$

$$0 = \cos(\theta)db - b \sin(\theta)d\theta$$

db 'yi yalnız bırakabiliriz

$$\cos(\theta)db = b \sin(\theta)d\theta$$

$$db = b \sin(\theta)d\theta / \cos(\theta)$$

$$db = b \tan(\theta)d\theta$$

Boylece b 'nin θ 'ya göre değişim oranını bulduk. Bu ne işe yarar? Ana formülü hatırlayalım, ve onun da diferansiyelini alalım

$$A = \frac{1}{2} ab \sin(\theta)$$

$$dA = \frac{1}{2} b \sin(\theta)da + \frac{1}{2} a \sin(\theta)db + \frac{1}{2} ab \cos(\theta)d\theta$$

$da = 0$ ise, ilk terim yok olur.

$$dA = \frac{1}{2} a \sin(\theta)db + \frac{1}{2} ab \cos(\theta)d\theta$$

Geri kalanlarda, db var, ama biz θ 'ya göre değişimi istiyoruz, db 'yi orada görmek istemiyoruz. O zaman elimizdeki db formülünü buraya sokalım.

$$dA = \frac{1}{2} a \sin(\theta) (b \tan(\theta)d\theta) + \frac{1}{2} ab \cos(\theta)d\theta$$

$$dA = \frac{1}{2} ab (\sin(\theta)\tan(\theta) + \cos(\theta))d\theta$$

Trigonometriden

$$dA = \frac{1}{2} ab \underbrace{(\sin(\theta)\tan(\theta) + \cos(\theta))}_{\sec(\theta)}d\theta$$

Sonucu bulduk

$$\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a = \frac{1}{2} ab \sec(\theta)$$

Ozetlemek gerekirse, sunlari yaptik

- A 'yi $da, db, d\theta$ ile ifade et
- $a = \text{sabit}$, $da = 0$ demektir.
- Kisiltlama ifadesinin diferansiyelini al, db 'yi yanliz birak.
- dA 'ya sok

2. Metot: Zincirleme Kanununu Kullan

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right)_a &= A_\theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta}\right)_a + A_a \left(\frac{\partial a}{\partial \theta}\right)_a + A_b \left(\frac{\partial b}{\partial \theta}\right)_a \\ &= A_\theta \overset{1}{\cancel{\left(\frac{\partial \theta}{\partial \theta}\right)_a}} + A_a \overset{0}{\cancel{\left(\frac{\partial a}{\partial \theta}\right)_a}} + A_b \left(\frac{\partial b}{\partial \theta}\right)_a \end{aligned}$$

Sifir olan kısmi turev oyle oldu cunku a sabit dedik. Son terimdeki kısmi turev icin kisiltlama ifadesini kullanacagiz.