

L'Hospital (l'Hôpital) Kuralı

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

bazen hesaplanamaz, çünkü hem $f(a)$ hem $g(a)$ sıfıra esittir. Bu durum $0/0$ gibi aslında bir durum ortaya çıkarır, ki böyle bir şeyi hesaplamak mümkün değildir. $0/0$ 'ın diğer bir adı “hesaplanamayan form (indeterminate form)”. Fakat L'Hospital 1. Senaryo kuralına göre,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

esitliği kullanılabilir.

İspat

$f'(a)$ ve $g'(a)$ 'dan geriye doğru gidelim, ki bu tanımların kendisi de birer limit zaten.

$$\begin{aligned} \frac{f'(a)}{g'(a)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \quad (1) \end{aligned}$$

$x \rightarrow a$ iken $g(a)$ ve $f(a)$ 'nin sıfıra gittiğini biliyoruz, tüm bu işlere girmemizin sebebi oydu zaten, o zaman

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Bir diğer hesaplanamayan form ∞/∞ için de L'Hospital Kuralı aynen geçerli. O formun ispatı biraz daha cefakâr, ama kullanma bağlamında aynen işliyor.

Uyarı: Eğer $0/0$ ya da ∞/∞ durumu ortada yoksa L'Hospital Kuralını kullanmayın. İspat da zaten böyle bir durumun olduğu bilgisinden hareketle sonuca ulaşıyor.

∞/∞ Durumu

Bu ispat için

$L = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)/g'(x)$ kabul edelim ve öyle bir a seçelim ki

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \approx L, \quad x > a.$$

olsun.

Not: Hocanın notasyonuna göre eğer a, b birbirlerine ϵ kadar yakınlarsa $a \approx b$ kullanılır.

Simdi ispatin geri kalaninda su alttaki iki yaklasiksalligi ispat etmek bir yontemdir, ($x \gg 1$ olmak uzere)

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \approx L$$

Ortadaki ifade (1)'e benziyor. Simdi ilk yaklasiksallik icin

$$f(x) - f(a) = f(x)[1 - f(a)/f(x)]$$

yazariz. Bu basit bir cebirsel manipulasyon. Ayni seyi $g(x)$ 'li bolen icin de yapariz. Birada yazarsak

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x)[1 - f(a)/f(x)]}{g(x)[1 - g(a)/g(x)]}$$

Her iki taraftan $f(x)/g(x)$ iptal olabilir.

Sonra limit teorisini kullaniriz. Bu yaklasiksalligin varligi bariz, cunku, herhangi bir ϵ icin x_0 'i yeterince buyuk secebiliriz ki alttaki

$$1 - \epsilon < \frac{1 - f(a)/f(x)}{1 - g(a)/g(x)} < 1 + \epsilon$$

$x > x_0$ icin hep dogru olur. Unutmayalim, $f(x), g(x)$, $x \rightarrow \infty$ iken sonsuzluga gidiyorlar. Sabit bir $f(a), g(a)$ degerini sonsuza giden bir degerle bolunce ortaya sifir cikiyor, elde kalanlar yaklasiksal olarak $1/1$.

Ikinci yaklasiksallik icin, Cauchy Ortalama Deger Teorisi (Cauchy Mean-value Theorem) kullaniriz. $a < c < x$ seklinde oyle bir c vardir ki $(f(x) - f(a))g'(c) = (g(x) - g(a))f'(c)$ dogrudur. Yani

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ki bu ifade L 'e ϵ kadar yakindir.

Kaynaklar

[1] Thomas Calculus 11th Edition, sf. 292

[2] Arthur Mattuck, Introduction to Analysis, sf. 220