

Lojistik Regresyon (Logistic Regression)

Lojistik regresyon normal regresyonun $\theta^T x$ olarak kullandigi agirliklar (katsayilar) ile verinin carpimini alır ve ek bir filtre fonksiyonundan gecirerek onlari 0/1 degerleri baglaminda bir olasiliga esler. Yani elimizdeki veri pek cok boyutta veri noktaları ve o noktaların 0 ya da 1 olarak bir "etiketi" olacaktır. Mesela

```
from pandas import *
df = read_csv("testSet.txt", sep='\t', names=['x', 'y', 'labels'], header=None)
df['intercept']=1.0
data = df[['intercept', 'x', 'y']]
labels = df['labels']
print df[['x', 'y', 'labels']][:10]
```

	x	y	labels
0	-0.017612	14.053064	0
1	-1.395634	4.662541	1
2	-0.752157	6.538620	0
3	-1.322371	7.152853	0
4	0.423363	11.054677	0
5	0.406704	7.067335	1
6	0.667394	12.741452	0
7	-2.460150	6.866805	1
8	0.569411	9.548755	0
9	-0.026632	10.427743	0

Goruldugu gibi veride x, y boyutlari icin etiketler (labels) verilmiş. Lojistik regresyon bu veriyi kullanarak egitim sonrasi θ 'lari elde eder, bunlar katsayilarimizdir, artik bu katsayilari hic gormedigimiz yeni bir veri uzerinde 0/1 etiketlerinin tahminini yapmak icin kullanabiliriz.

Filtre fonksiyonu icin kullanılan bir fonksiyon sigmoid fonksiyonudur, $g(x)$ ismini verelim,

$$g(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

Bu nasıl bir fonksiyondur, kabaca davranisini nasıl tarif ederiz? Cebirsel olarak bakarsak, fonksiyon oyle bir durumda ki ne zaman bir x degeri gecerse, bu deger ne kadar buyuk olursa olsun, bolendeki deger her zaman bolunenden 1 daha fazla olacaktır bu da fonksiyonun sonucunun 1'den her zaman kucuk olmasini garantiler. Cok kucuk x degerleri icin bolum sonucu biraz daha buyuk olacaktır tabii, vs.

Daha temiz bir ifade icin bolen ve boluneni e^{-x} ile carpalım,

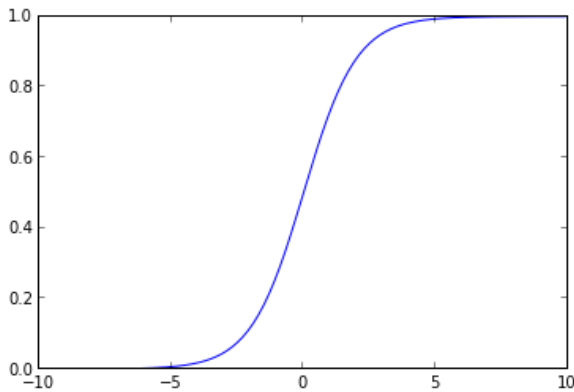
$$g(x) = \frac{e^x e^{-x}}{e^{-x} + e^x e^{-x}}$$

$$g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Sigmoid fonksiyonun ”-sonsuzluk ile +sonsuzluk arasindaki degerleri 0 ve 1 arasina esledigi / indirgedigi (map)” ifadesi de litaraturde mevcuttur.

```
def sigmoid(arr):
    return 1.0/(1+exp(-arr))

x = np.array(arange(-10.0, 10.0, 0.1))
plt.plot(x,sigmoid(x))
plt.savefig('logreg1.png')
```



Ustteki grafige bakinca katsayilarla carpim, toplam ardindan sonucun niye bu fonksiyona verildigini anlamak mumkun. Sigmoid'in 0 seviyesinden 1 seviyesine ziplayisi oldukca hizli ve x kordinati baglaminda (ve 0.5'ten kucuk y 'ye eslenen) sifir oncesi bolgesi, ayni sekilde sifir sonrasi (ve 0.5'ten buyuk y 'ye eslenen) bolgesi oldukca buyuk. Yani bu fonksiyonu secmekle veriye katsayilarla carpilip 0 ya da 1 bolgesi altina dusmesi icin oldukca genis bir sans veriyoruz. Boylece veriyi iki parcaya ayirmak icin sansimizi arttirmis oluyoruz.

Peki sigmoid fonksiyonu bir olasilik fonksiyonu (dagilimi) olarak kullanilabilir mi? Entegralini alalim, ve $-/+$ sonsuzluklar uzerinden alan hesabi yapalim, sonucun 1 cikmasi gerekli,

```
import sympy
x = sympy.Symbol('x')
print sympy.integrate('1/(1+exp(-x))')

x + log(1 + exp(-x))
```

Daha temizlemek icin

$$x + \ln(1 + e^{-x})$$

x ifadesi aynı zamanda suna esittir $x = \ln(e^x)$. Bu ifade bize kolaylık sağlayacak böylece,

$$\ln e^x + \ln(1 + e^{-x})$$

diyebiliriz. Doğal log'un (\ln) carpımları toplamlara dönüştürdüğünü biliyoruz, bunu tersinden uygulayalım,

$$\ln(e^x \cdot 1 + e^x e^{-x})$$

$$\ln(e^x + 1) = \ln(1 + e^x)$$

```
print log (1+exp(-inf))
print log(1+exp(inf))
```

0.0

inf

Demek ki fonksiyon bir olasılık dağılımı olamaz, çünkü eğri altındaki alan sonsuz büyüklüğünde. Aslında bu fonksiyonun kümülatif dağılım fonksiyonu (cumulative distribution function -CDF-) özellikleri vardır, yani kendisi değil ama türevi bir olasılık fonksiyonu olarak kullanılabilir (bu konumuz dışında). Her neyse, sigmoid'ın bir CDF gibi hareket ettiğini g 'nin 0 ile 1 arasında olmasından da anlıyoruz, sonuçta CDF alan demektir (yoğunluğun integrali) ve en üst değeri 1 demektir, ki bu CDF tanımına uygundur.

Şimdi elimizde olabilecek k tane değişken ve bu değişkenlerin bilinmeyen katsayıları için 0 ve 1'e eslenecek bir regresyon oluşturalım. Diyelim ki katsayılar $\theta_0, \dots, \theta_k$. Bu katsayıları değişkenler ile carpıp toplayarak $h(x)$ 'e verelim, (0/1) çıkıp çıkmayacağı katsayılarla bağlı olacak, verideki etiketler ile $h(x)$ sonucu arasında bir bağlantı kurabilirsek, bu bize katsayıları verebilir. Bu modele göre eğer θ 'yi ne kadar iyi seçersek, eldeki veriye etiketlerine o kadar yaklaşımla olacağız. Şimdi sigmoid'ı katsayılarla beraber yazalım,

$$h_{\theta}(x) = g(\theta^T x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^T x}}$$

"Veriye olabildiğince yaklaşmak için en iyi α 'yi bulmak" sözü bize maksimum olurluk (maximum likelihood) hesabını hatırlatmalı. Bu hesaba göre içinde bilinmeyen α 'yi barındıran formülün üzerinden tüm verinin sonuçlarının teker teker birbiri ile carpımı olabildiğince büyük olmalıdır. Bu ifadeyi maksimize edecek α veriye en uygun α olacaktır.

Şimdi her iki etiket için ve sigmoid'ı kullanarak olasılık hesaplarını yapalım,

$$P(y = 1|x; \theta) = h_{\theta}(x)$$

$$P(y = 0|x; \theta) = 1 - h_{\theta}(x)$$

Not: Olasilik degerleri (buyuk $P(\cdot)$ ile) ve CDF fonksiyonlari olurluk hesabinda kullanilabilir. $P(\cdot)$ ile CDF baglantisi var, $P(X < x)$ gibi kumulatif alansal hesaplarin CDF uzerinden gerceklestirilebildigini hatirlayalim.

Devam edelim, hepsi bir arada olacak sekilde yanyana koyarsak ve sonuca, y 'yi dogru tahmin edip etmedigimizin olcumunu de eklersek,

$$p(y|x; \theta) = (h_{\theta}(x))^y (1 - h_{\theta}(x))^{1-y}$$

Olurluk icin tum veri noktalarini teker teker bu fonksiyona gecip sonuclarini carpacagiz (ve verilerin birinden bagimsiz olarak uretildigini farzediyoruz), eger m tane veri noktası var ise

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^m (h_{\theta}(x^i))^{y^i} (1 - h_{\theta}(x^i))^{1-y^i}$$

Eger log'unu alirsak carpimlar toplama donusur, isimiz daha rahatlasir,

$$l(\theta) = \log L(\theta)$$

$$= \sum_{i=1}^m y^i \log((h_{\theta}(x^i))) + (1 - y^i) \log((1 - h_{\theta}(x^i)))$$

Iste bu ifadenin maksimize edilmesi gerekiyor.

Ama daha fazla ilerlemeden once bir esitlik ve bir turev gostermemiz gerekiyor. Once esitlik

$$1 - g(z) = g(-z)$$

Ispat

$$1 - \frac{1}{1 + e^{-z}} = \frac{1 + e^{-z} - 1}{1 + e^{-z}}$$

$$\frac{e^{-z}}{1 + e^{-z}} = \frac{1}{1 + e^z}$$

Hakikaten son esitligin sag tarafina bakarsak, $g(-z)$ 'yi elde ettigimizi goruyoruz.

□

Simdi tureve gelelim,

$$g'(z) = \frac{d}{dz} \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

Ispat

$$= \frac{1}{(1 + e^{-z})^2} (e^{-z})$$

e^{-z} turevinden bir eksi isareti geleceğini beklemis olabilirsiniz, fakat hatırlayacağımız üzere

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{1 + x} = \frac{-1}{(1 + x)^2}$$

Yani eksiler birbirini yoketti. Simdi iki ustteki denklemin sag tarafini acalim

$$= \frac{1}{1 + e^{-z}} \frac{e^{-z}}{1 + e^{-z}}$$

$$= \frac{1}{1 + e^{-z}} \frac{1}{1 + e^z}$$

Carpimda iki bolum var, bolumler $g(z)$ ve $g(-z)$ olarak temsil edilebilir, ya da $g(z)$ ve $1 - g(z)$,

$$= g(z)(1 - g(z))$$

□

Bu baglamda ilginc bir diger denklem log sansi (log odds) denklemdir. Eger ilk bastaki denklemi dusunursek,

$$p = P(y = 1|x; \theta) = g(z) = \frac{e^z}{1 + e^z}$$

Bu denklem 1 olma olasiligini hesapliyor. Temiz bir denklem log sansi olabilir ki bu denklem olma olasiligini olmama olasiligina bolerek log alir.

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

olarak gosterilir. Simdi biraz daha cambazlik, $1 - g(z) = g(-z)$ demistik, ve $g(-z)$ 'nin de ne oldugunu biliyoruz $\frac{1}{1+e^z}$, log sansini bu sekilde yazalim, $\frac{1}{1+e^z}$ ile bolelim daha dogrusu $1 + e^z$ ile carpalim ve log alalim,

$$\log\left(\frac{e^z}{1+e^z}1 + e^z\right) = \log(e^z) = z = \theta^T x$$

Artik olurluk denkleminde donebiliriz. Olurlugu nasıl maksimize ederiz? Gradyan cikisi (gradient ascent) kullanılabilir. Eger olurluk $l(\theta)$ 'nin en maksimal oldugu noktadaki θ 'yi bulmak istiyorsak (dikkat sadece olurlugun en maksimal noktasini aramiyoruz, o noktadaki θ 'yi ariyoruz), o zaman bir θ ile baslariz, ve adim adim θ 'yi maksimal olana dogru yaklastiririz. Formül

$$\theta_{yeni} = \theta_{eski} + \alpha \nabla_{\theta} l(\theta)$$

Ustteki formül niye isler? Cunku gradyan $\nabla_{\theta} l(\theta)$, yani $l(\theta)$ 'nin gradyeni her zaman fonksiyon artisinin en fazla oldugu yonu gosterir. Demek ki o yone adim atmak, yani $l(\theta)$ 'a verilen θ 'yi o yonde degistirmek (degisim tabii ki θ bazinda, θ 'nin degisimi), bizi fonksiyonun bir sonraki noktasina yaklastiracaktır. Sabit α bir tek sayi sadece, atilan adimin (hangi yonde olursa olsun) olcegini azaltip / arttirabilmek icin disari-dan eklenir. Adim yonu vektor, bu sabit bir tek sayi. Carpimlari vektoru azaltir ya da cogaltir [3].

Simdi $\nabla_{\theta} l(\theta)$ turetmemiz gerekiyor.

Eger tek bir $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_j}$ 'yi hesaplarsak ve bunu her j icin yaparsak, bu sonuclari bir vektörde ustuste koyunca $\nabla_{\theta} l(\theta)$ 'yi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_j} &= y \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} g(\theta^T x)}{g(\theta^T x)} - (1 - y) \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} g(\theta^T x)}{1 - g(\theta^T x)} \\ &= \left(y \frac{1}{g(\theta^T x)} - (1 - y) \frac{1}{1 - g(\theta^T x)} \right) \frac{\partial}{\partial \theta_j} g(\theta^T x) \end{aligned}$$

Simdi en sagdaki kismi acalim,

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} g(\theta^T x) = g'(\theta^T x) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \theta^T x = g'(\theta^T x) x_j$$

$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \theta^T x$ nasıl x_j haline geldi? Cunku tum θ vektorunun kismi turevini aliyoruz fakat o kismi turev sadece tek bir θ_j icin, o zaman vektördeki diger tum ogeler sifir olacaktır,

sadece θ_j 1 olacak, ona tekabül eden x ogesi, yani x_j ayakta kalabilecek, diğer x ogelerinin hepsi sıfırla carpılmış olacak.

Türevin kendisinden de kurtulabiliriz şimdi, daha önce gösterdiğimiz eşitliği devreye sokalım,

$$= g(\theta^T x)(1 - g(\theta^T x))x_j$$

Bu son formülü 3 üstteki formülün sağ tarafına geri koyarsak, ve basitleştirirsek,

$$(y(1 - g(\theta^T x)) - (1 - y)g(\theta^T x))x_j$$

Carpımı daha temiz görmek için sadece y, g harflerini kullanırsak,

$$(y(1 - g) - (1 - y)g)x_j = (y - yg - g + yg)x_j = (y - g)x_j$$

yani

$$= (y - g(\theta^T x))x_j$$

$$= (y - h_\theta(x))x_j$$

İşte $\nabla_\theta l(\theta)$ için ne kullanacağımızı bulduk. O zaman

$$\theta_{yeni} = \theta_{eski} + \alpha(y - h_\theta(x))x_j$$

Her i veri noktası için

$$\theta_{yeni} = \theta_{eski} + \alpha(y^i - h_\theta(x^i))x_j^i$$

Kodu isletelim,

```
def grad_ascent(data_mat, label_mat):
    m,n = data_mat.shape
    label_mat=label_mat.reshape((m,1))
    alpha = 0.001
    iter = 500
    theta = ones((n,1))
    for k in range(iter):
        h = sigmoid(dot(data_mat,theta))
        error = label_mat - h
        theta = theta + alpha * dot(data_mat.T,error)
```

```

    return theta

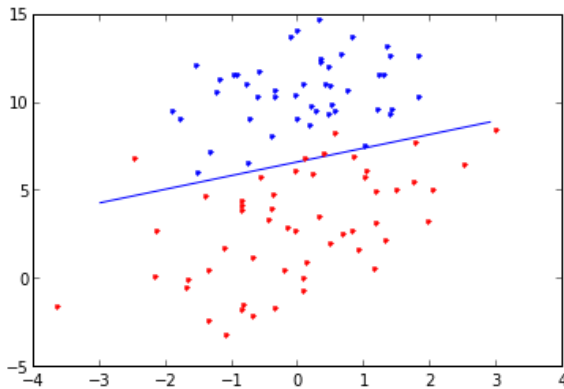
theta = np.array(grad_ascent(array(data),array(labels).T ))
print theta.T

[[ 4.12414349  0.48007329 -0.6168482  ]]

def plot_theta(theta):
    x = np.array(arange(-3.0, 3.0, 0.1))
    y = np.array((-theta[0]-theta[1]*x)/theta[2])
    plt.plot(x, y)
    plt.hold(True)
    class0 = data[labels==0]
    class1 = data[labels==1]
    plt.plot(class0['x'],class0['y'],'b.')
    plt.hold(True)
    plt.plot(class1['x'],class1['y'],'r.')
    plt.hold(True)

plot_theta(theta)
plt.savefig('logreg2.png')

```



Ustteki kod bir dongu icinde belli bir x noktasından baslayarak gradyan inisi yapti ve optimal θ degerlerini, yani regresyon agirliklarini (weights) hesapladi. Sonra bu agirliklari bir ayrac olarak ustte grafikledi. Ayracin oldukca iyi degerler buldugu belli oluyor.

Rasgele Gradyan Cikisi (Stochastic Gradient Ascent)

Acaba θ 'yi guncellerken daha az veri kullanmak mumkun mu? Yani yon hesabi icin surekli tum veriyi kullanmasak olmaz mi?

Olabilir. Guncellemeyi sadece tek bir veri noktasini kullanarak yapabiliriz. Yine gradyani degistirmis oluruz, sadece azar azar degisim olur, fakat belki de bu sekilde sonuca daha cabuk ulasmak mumkun olacaktir.

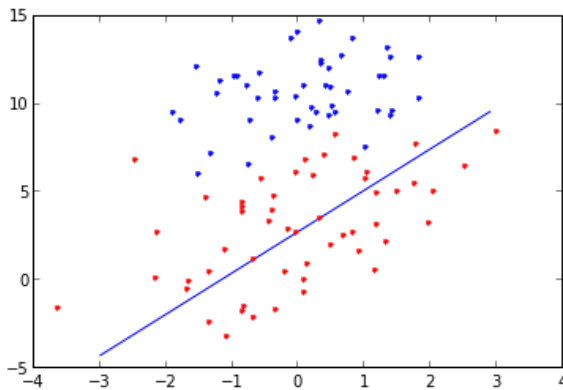
Kodlama acısından, θ guncellemesi icin buldugumuz formulu tek nokta bazinda da vermistik. O zaman o tek noktayi sirayla alip guncellersek, otomatik olarak yeni bir sekilde gradyan cikisi yapmis oluruz.

```
def stoc_grad_ascent0(data_mat, label_mat):
    m,n = data_mat.shape
    label_mat=label_mat.reshape((m,1))
    alpha = 0.01
    theta = ones((n,1))
    for i in range(m):
        h = sigmoid(sum(dot(data_mat[i],theta)))
        error = label_mat[i] - h
        theta = theta + alpha * data_mat[i].reshape((n,1)) * error
        theta = theta.reshape((n,1))
    return theta

theta = np.array(stoc_grad_ascent0(array(data),array(labels).T ))
print theta.T

[[ 1.01702007  0.85914348 -0.36579921]]

plot_theta(theta)
plt.savefig('logreg3.png')
```



Neredeyse isimiz tamamlandi. Ustteki grafik pek iyi bir ayrac gostermedi. Niye? Problem cok fazla salinim (oscillation) var, yani degerler cok fazla uc noktalar arasinda gidip geliyor. Ayrica veri noktalarini sirayla isliyoruz, veri tabii ki rasgele bir sekilde siralanmis olabilir, ama siralanmamissa, o zaman algoritmaya raslantisal noktalar vermek icin kod icinde zar atmamiz lazim. Metotun ismi "rasgele (stochastic)" gradyan cikisi, bu rasgelelik onemli. 2. problemi duzeltmek icin yapilacak belli, 1. problem icin α degeri her dongude belli oranda kucultulerek (yani α artik sabit degil) sonuca yaklasirken oradan buraya savrulmasini engellemis olacagiz. Yeni kod altta,

```

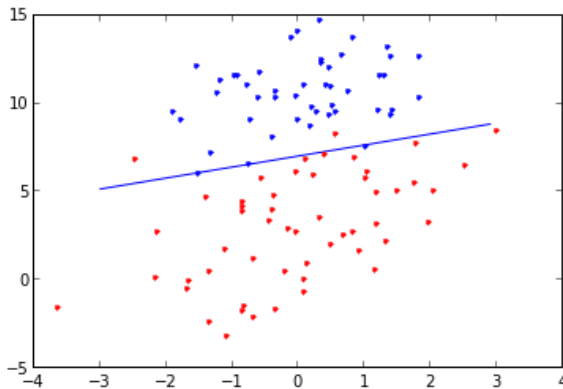
def stoc_grad_ascent1(data_mat, label_mat):
    m,n = data_mat.shape
    iter = 150
    label_mat=label_mat.reshape((m,1))
    alpha = 0.01
    theta = ones((n,1))
    for j in range(iter):
        data_index = range(m)
        for i in range(m):
            alpha = 4/(1.0+j+i)+0.0001
            rand_index = int(random.uniform(0,len(data_index)))
            h = sigmoid(sum(dot(data_mat[rand_index],theta)))
            error = label_mat[rand_index] - h
            theta = theta + alpha * data_mat[rand_index].reshape((n,1)) * error
            theta = theta.reshape((n,1))
    return theta

theta = np.array(stoc_grad_ascent1(array(data),array(labels).T ))
print theta.T

[[ 14.67440542   1.30317067  -2.08702677]]

plot_theta(theta)
plt.savefig('logreg4.png')

```



Sonuc cok iyi, ayrica daha az islemlerle bu noktaya eristik, yani daha az islem ve daha hizli bir sekilde sonuca ulasmis olduk.

Tahmin (Prediction)

Elde edilen agirliklari tahmin icin nasil kullaniriz? Bu agirliklari alip, yeni veri noktasi ile carpip sonuclari sigmoid'den gecirdigimiz zaman bu noktanin "1 etiketi olma olasiligini" hesaplamis olacagiz. Ornek (diyelim ki mevcut veri noktasi icinden bir veriyi, -mesela 15. nokta- sanki yeniymis gibi sectik)

```
pt = df.ix[15,['intercept','x','y']]
print sigmoid(dot(array(pt), theta)),
print 'label =',labels[15]
```

```
[ 0.99999653] label = 1
```

Oldukca yuksek bir olasilik cikti, ve hakikaten de o noktanin gercek degeri 1 imis.

Kaynaklar

[1] <http://cs229.stanford.edu/notes/cs229-notes1.pdf>

[2] Harrington, P. Machine Learning in Action

[3] Bu sekilde azar azar sonuca yaklasmaya ugrasmak tabii ki her fonksiyon icin gecerli degildir, cunku eger fonksiyonda "yerel maksimumlar" var ise, gradyan cikisi bu noktalarda takilip kalabilir (o yerel tepelerde de birinci turev sifirlanir, gradyanin kafasi karisir). Gradyan metotunun kullanmadan once fonksiyonumuzun tek (global) bir maksimumu olup olmadigini dusunmemiz gerekir. Fakat sanliyiz ki olurluk fonksiyonu tam da boyle bir fonksiyondur (sans degil tabii, bu ozelligi sebebiyle secildi). Fonksiyon icbukeydir (concave), yani tek bir tepe noktası vardır. Bir soru daha: olurlugun icbukey oldugunu nasil anladik? Fonksiyona bakarak pat diye bunu soylemek mumkun, degiskenlerde polinom baglaminda kupsel ve daha ustü seviyesinde ustellik yok, ayrıca log, exp icbukeyligi bozmuyor.