MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 9

Bu dersin konusu birden fazla degisken iceren fonksiyonlarin minimizasyonu ile ugrasirken yardimci olacak kismi turev (partial derivative) kavrami. Cok degiskenli bir fonksiyon $f(x,y)$'nin birden fazla turevi vardir. Mesela bunlardan bir tanesi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

Bu turev x'in degistirildigi ama y'nin sabit tutuldugu bir durumu gosterir.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

ise y'in degistirildigi ama x'nin sabit tutuldugu bir durumu gosterir.

Simdi her ikisinin birden degistirildigi durumda ne olacagini gosteren yaklasiksal (approximate) formulu gorelim. Degisim matematiksel olarak soyle

$$x \sim x + \Delta x$$

$$y \sim x + \Delta x$$

O zaman z icin

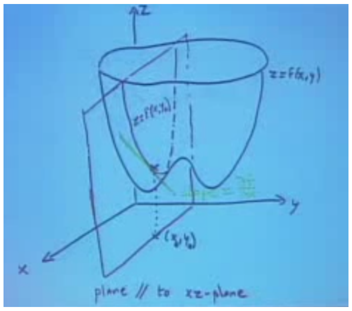
$$z = f(x,y)$$

yaklasiksal degisim soyle olur

$$\Delta z \approx f_x \Delta x + f_y \Delta f_y \tag{1}$$

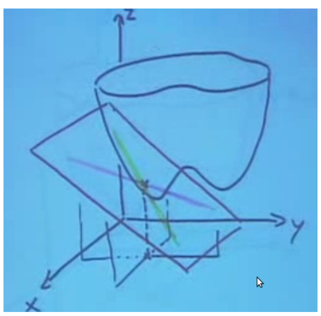
Tekrar vurgulamak gerekirse bu yaklasiksal bir formul, daha "dogru" bir temsil icin 2., 3. turevleri iceren daha yuksek dereden (higher order terms) terimlerin de olmasi gerekir, fakat bu terimler 1. derece lineer bir yaklasiksallik icin kullanilmaz.

Bu formulu nasil dogrulariz? Bunu yapmanin yollarindan biri teget duzlem yaklasiksallamasi (tangent plane approximation). Mesela $z = f(x,y)$ fonksiyonuna olan teget bir duzlemi dusunelim.



Hatirlarsak $\frac{\partial f}{\partial x}$ kismi turevi x'in degistigi ama y'nin sabit tutuldugu bir durumu tarif ediyordu. Yukaridaki grafige gore bu bir anlamda iki cukurlu kap gibi duran z fonksiyonun bir kesitine bakmak gibi (unutmayalim, fonksiyon sadece kabin disinda tanimli, ici bos). Bu kesit uzerine f'in bir yansimasi olusuyor, o yansima ustteki grafikte bir parabol seklinde. Bu parabolda x degistikce o noktanin parabol uzerindeki cizgizel tegeti de degisiyor (grafikteki yesil cizgi) ki bu cizgisel egim $\frac{\partial f}{\partial x}$'e esit.

Eger ayni seyi x'in sabit y'nin degistigi durum icin yapsaydim, benzer bir kesit elde edecektim.



Bu iki kesit uzerinden elde edilen ikinci teget cizgi birinci ile beraber kullanilinca bir duzlemi tanimlamak icin kullanilabilir (iki cizgi paralel bir duzlem tanimlamak icin yeterlidir), ki teget duzlem yaklasiksallamasi icin kullanilacak duzlem budur. Formulsel olarak bunu nasil yapacagimizi gosterelim.

f_x ve f_y iki teget cizgiyi tanimlamak icin kullaniliyorsa, bu formulleri bir araya koyarak duzlemi temsil edebilirim. Eger

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a$$

ise bu demektir ki birinci teget cizgi (yesil cizgi) L_1 soyledir:

$$L_1 = \begin{cases} z = z_0 + a(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

Bu cizgi icin y'yi sabit tutuyorum, z'deki degisimi z_0 ustune egim a'nin katlari kadar (x'in degisimi oraninda carparak) ekleyerek hesapliyorum.

Benzer sekilde

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$$

$$L_2 = \begin{cases} z = z_0 + b(y - y_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

Hem L_1 hem de L_2 $z = f(x, y)$'ye tegettir. Bu iki cizgi beraber bir duzlem olusturur. Bu formul

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0) \tag{2}$$

formuludur.

Formul 1, ustteki formulun yaklasiksal halidir. Eger teget duzlem uzerinde olsaydik, $\approx$ isareti $=$ isaretine donusecekti. Bu yaklasiksallik ufak Δx ve ufak Δy icin gecerli. Yani yaklasiksal formul, f'nin grafigi teget duzleme yakin diyor.

Maksimum Minimum Problemleri

Kismi turevlerin kullanim alanlarindan biri optimizasyon problemleridir. Mesela cok degiskenli bir fonksiyonun maksimumunu bulmak gibi. Eger fonksiyon tek degiskenli olsaydi, hemen turevini alip sonucu sifira esitleyebilirdik, ve buna gore bir cozum arardik. Cok degiskenli fonksiyonlarda kismi turevler kullanmak lazim.

Bu derste iki degiskenli duruma bakacagiz fakat ayni prensipler, 10, 15, milyon tane degisken icin ayni.

Lokal bir minimum icin hem $f_x = 0$ hem $f_y = 0$ olmalidir. Bu niye dogudur? Yine formul 1'e bakarsak, hem $f_x = 0$ hem $f_y = 0$ oldugu zaman Δz sifir olacaktir, yani birinci derecede dusunursek $f(x, y)$'de degisim yok demektir.

Teget duzlemlerin dilinden konusursak, minimum aninda teget duzlem tamamen yatay olacaktir.

Formul 2 baglaminda dusunursek, bu durum $a = 0$ ve $b = 0$ oldugu ana tekabul ediyor ve o anda duzlemi tanimlayan $z = z_0$ formuludur.

Tanim

Eger $f_x(x_0, y_0) = 0$ ve $f_y(x_0, y_0) = 0$ ise o zaman x_0, y_o f'in kritik noktasidir. Not: Birden fazla degisken icin tabii ki tum kismi turevlerin o noktada sifir olmasi gerekir.

Ornek

$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 2y$

Bakalim bunu minimize ya da maksimize edebilecek miyiz?

$f_x = 2x - 2y + 2 = 0$

$f_y = -2x + 6y - 2 = 0$

Ustteki iki denklemi ayni anda cozmeliyiz.

Bu tur durumlarda iki denklemi birbiriyle toplayip basitlestirmeye calismak iyi bir yontemdir. Fakat unutmayin, elimizde her zaman iki tane denklem olmali, iki denklemi ortadan kaldirip birdenbire tek denklem ile yola devam edemeyiz.

Toplami yaparsak

$4y = 0$

elde ederiz. Bunu alip birinci denkleme sokalim, sonuc

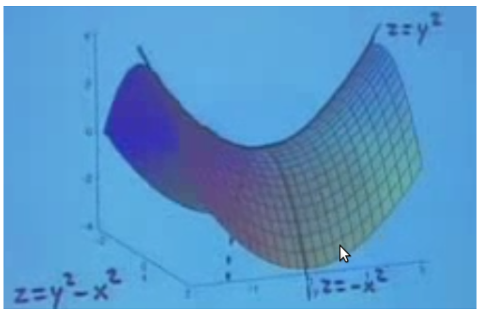
$2x + 2 = 0$

$x = -1$

Demek ki kritik nokta $(x, y) = (-1, 0)$.

Peki bu kritik noktanin minimum mu maksimum mu oldugunu nereden bilecegiz? Eger tek degiskenli bir fonksiyona bakiyor olsaydik, ikinci tureve bakabilirdik. Benzer bir seyi burada da yapabilirdik, ama sadece birinci turevden bile elimizde iki tane var, ikinci turevlerden cok daha fazlasi olacak. O duruma bakacagiz, simdilik daha az otomatik olarak isi nasil anlayacagimizla ilgilenelim.

Elimizde birden fazla minimum olabilir. Turev(lerin) sifir oldugu noktada bir duzluk vardir, bu bir lokal minimumdur. Yani o noktaya yakin oldugumuz surece (ki lokalligin tanimi bu) bu minimum gecerlidir. Baska bir noktada, turev(lerin) yine sifir oldugu ama daha asagi noktada bir minimum daha olabilirdi. Maksimumlar icin ayni durum gecerli.



Yanliz bir diger secenek daha var. Bu secenek kritik noktanin ne maksimum, ne minimum oldugu durumdur. Bu durumda kritik noktadan hangi "yone dogru" bakiyorsak, degisik bir cevap elde ederiz. Bu at egeri gibi gozuken grafigin orta noktasina, 0,0,0 noktasina bakalim, burada teget duzlem tam yatay. Bu noktaya eger noktasi (saddle point) deniyor. Eger $z = y^2$ yonune dogru bakarsak min durumdayiz, eger $z = -x^2$ yonune dogru bakarsak maks durumdayiz.

2. turevlerden bahsetmisik, ve bu derste kritik noktanin ne oldugunu daha az otomatik bulacagimizi soyledik (2. turevler bir dahaki derste).

Bu yontemde kareler kullanacagiz. Niye kareler? Cunku karesel ifadeler en az sifir olabilirler – bir deger ne olursa olsun, eksi bile olsa karesi alinirsa arti olur, ve bu tur ifadeler sadece sifirda "en az" olurlar.

O zaman $f(x, y)$'i karelerin toplami olarak tekrar temsil etmeye ugrasalim. $f(x, y)$'de zaten kareler var ama tum formulu bir seylerin karesi olarak gosterebilirsek, hedefimize erisebiliriz. Tek problem xy terimi, ama $x^2 - 2xy$.. diye giden bir baska formul biliyoruz, Kareyi Tamamlama ile onu kullanalim.

$$f(x,y) = (x-y)^2 + 2y^2 + 2x - 2y$$

Basitlesti ama biraz daha basitlesebilir. Acaba $(x-y)^2$ icindeki $(x-y)$ ile disaridaki $2x - 2y$ arasindaki bir baglanti kurabilir miyiz? Iceriye bir $+1$ eklersek bu olabilir, o zaman disaridaki $2x - 2y$ iptal olur. Icerideki 1'i dengelemek icin ise disari bir -1 ekleriz.

$$= ((x-y)+1)^2 + 2y^2 - 1$$

Iste, tum formul artik karelerden olusuyor. Bu formul eger

$$= \underbrace{((x-y)+1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2y^2}_{\geq 0} - 1$$

ise ancak ≥ -1 olabilir. Ve kritik nokta (-1,0)'da f'in degeri hakikaten -1'dir. Ustteki iki terimin niye ≥ 0 oldugundan bahsettik. Demek ki bu nokta bir minimum. Yani biraz cebirsel takla, ve ufak bir numarayla istedigimiz sonuca erismis olduk.