MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 13

Lagrange Carpanlari (Multipliers)

Amac yine $f(x, y, z)$ gibi birden fazla degisken iceren bir fonksiyonu maksimize etmek, degisik olan, x, y, z degiskenlerinin birbirinden bagimsiz ol**ma**masi. Bu degiskenlerin arasindaki iliski $g(x, y, z) = c$ gibi bir fonksiyon tarafindan gosteriliyor olabilir, c bir sabittir. Yani $f(x, y, z)$'i minimize ya da maksimize ediyoruz ve bunu sadece $g(x, y, z) = c$ sartina / sinirlama ifadesine (constraint) uyan x, y, z degerleri icin yapiyoruz.

Bunun icin hangi teknigi kullaniriz? Yollardan biri, eger sinirlama ifadesi basit ise, belki bir degiskeni cebirsel olarak cozmek (digerleri baglaminda ifade ederek), sonra geri f'e sokariz, boylece klasik bir min / maks problemi elde ederiz, ki o tur bir problemi cozmeyi artik biliyoruz.

Fakat bazen x, y, z degiskenleri icin analitik cozum mumkun olmaz, o zaman farkli teknikler kullanmamiz gerekir. Bu derste ogrenecegimiz teknikler bunlar olacak.

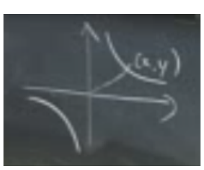
Uygulama baglaminda, Lagrange Carpanlari bizi niye ilgilendiriyor? Belki fizik, termodinamik dersinde gormussunuzdur, sicaklik, hacim ve basinc degerleri vardir, ve bu degerler birbirinden bagimsiz degildir. Termodinamikte $PV = nRT$ denklemi vardir, gerci burada analitik olarak basitlestirme yapabilirdik, ama bazi sartlarda tum degiskenleri oldugu gibi tutmayi isteyebiliriz.

Simdiye kadar min / maks problemleri icin gordugumuz kritik nokta bulma tekniklerinin burada ise yarayamacagini hemen belirtelim. O kritik noktalar $g(x, y, z) = c$ sinirlama ifadesini tatmin etmiyor olabilirler. Baska bir seye ihtiyacimiz var.

Ornek

Hiperbol $xy = 3$ uzerinde olan ve orijine en yakin noktayi bul.

Aslinda bu soruyu temel geometri kullanarak cozebiliriz, fakat burada Lagrange Carpanlari kullanarak cozecegiz, cunku iyi bir ornek.



Neyi minimize edelim? Mesela $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ olur mu? Olabilir, ama karekok ifadesinden kurtulursak daha iyi olur.

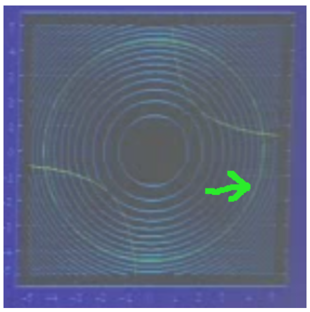
O zaman

$min\ f(x,y) = x^2 + y^2$

$ki,\ xy = 3$

Yani sinirlama ifadesini $g(x,y) = xy$ olarak sectik.

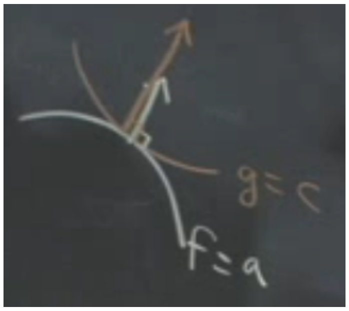
Grafige bakalim. Yuvarlaklar $f(x,y)$ konturlari, yesil okla gosterilen mesela $f(x,y) = 20$ konturu. Bu kontur ust sag kose ve sol alt kosede gosterilen hiperbolu kesiyor mu? Evet. Fakat $f(x,y) = 10$, vs. diyerek daha kucuk yuvarlaklar elde edebilir miyim? Evet. Fakat bir noktadan sonra bu halkalar hiperbolu kesmeyecektir.



Aradigimiz x, y degerleri hiperbole teget olan, olabilecek en kucuk yuvarlak.

Cozum icin tegetlik kavramindan faydalanabiliriz. Eger olabilecek en minimal f, her iki fonksiyonun kesit egrilerinin teget oldugu noktada ise, bu noktayi bulmaya ugrasabilirim.

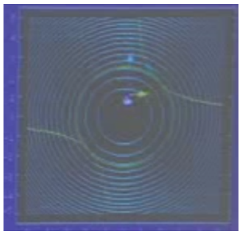
Iki kesit egrisi birbirine teget ise, onlarin teget duzlemi paraleldir, eger oyleyse, bu duzlemlerin normalleri birbirine paralel olmalidir.

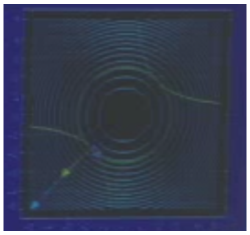


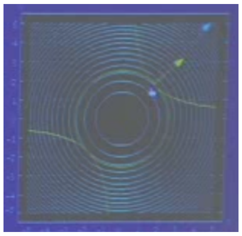
Bu normallerin ayni boyda olmasi gerekmez, yukaridaki gibi, ama paralel olmalari gerekir. Bu durumda

$\nabla f // \nabla g$

ifadesi dogru olmalidir, yani f'in gradyani g'nin gradyanina paraleldir. Bazi ornekler [hocanin kullandigi program mouse ile tiklanan yerde (mavi nokta) her iki fonksiyonun gradyanini hemen grafikliyebiliyor, alttaki resimler birkac ornek noktada yapilan tiklamalar].







Goruldugu gibi minimal noktalarin birinde (ustteki son resim) gradyanlar paralel.

Cebirsel olarak dusunursek: vektorler ne zaman birbirine paralel olur? Birbirlerinin kati olduklari zaman. Yani su sekilde bir ifadeyi yazabildigimiz zaman

$\nabla f = \lambda \nabla g$

ki λ bir sabit.

Gradyanlar ayni cizgide olup tam zit yonu gosteriyor olabilir, bu durumu λ'nin negatif olup olmamasi halledecektir.

Yani aradigimiz xy uzerinde sayisal deger λ uzerinden $\nabla f = \lambda \nabla g$ ifadesinin dogru oldugu bir nokta, ve λ degerini ariyoruz (unutmayalim, gradyanlar belli x, y degerleri uzerinde alinir). Yani 2 degisken iceren sinirlama ifadesi $g(x, y) = c$ iceren bir min / maks problemi yerine, bir denklem sistemi geciriyoruz. Bu sistem nedir? Ustteki gradyan formuludur, o da su sisteme donusur:

$f_x = \lambda g_x$

$f_y = \lambda g_y$

Oyle degil mi? Cunku ∇f ve ∇g birer vektordur,

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}, \quad \nabla g = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix}$$

O zaman iki ustteki denklem sistemi suradan ileri gelmektedir

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix}$$

Fakat hala eksik bir sey var. Elimizde x, y, λ bilinmeyenleri var, ama sadece iki tane formul var. Eksik olan $g(x, y) = c$, cunku x, y birbirinden bagimsiz degil ve g uzerinden baglantililar. Simdi oldu. 3 formul soyle:

$f_x = \lambda g_x$

$f_y = \lambda g_y$

$g(x, y) = c$

Ornegimiz

$f(x, y) = x^2 + y^2$

$g(x, y) = xy$

uzerinde uygularsak

$2x = \lambda y$

$2y = \lambda x$

$xy = 3$

Bu sistemi cozmemiz gerekiyor. Yanliz sunu soyleyelim, bu sistemi cozmenin genel (hep isleyen) bir yontemi yoktur. Cozum bazen cok basittir, bazen zordur, bazen sadece sayisal / numerik / hesapsal acidan cozulebilir (bilgisayar ile). Bu ornekte kolay.

$2x - \lambda y = 0$

$2y - \lambda x = 0$

$xy = 3$

Matris formuna koyarsak

$$\left[\begin{array}{cc} 2 & -\lambda \\ \lambda & -2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]$$

En basit cozum $x = 0, y = 0$ sinirlama ifadesi $xy = 3$'u cozmez. Diger cozum ne zaman ortaya cikar? Eger matrisin determinanti sifir ise.

$$\left|\begin{array}{cc} 2 & -\lambda \\ \lambda & -2 \end{array}\right| = -4 + \lambda^2 = 0$$

$<=> \lambda^2 = 4$

$<=> \lambda = \pm 2$

Elimizde iki durum var. λ ya 2, ya da -2.

1. $\lambda = 2$ durumunda

$x = y$

$x^2 = 3$

O zaman

$(x,y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ya da $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

2. $\lambda = -2$ durumunda

$x = -y$

$-x^2 = 3$

Bu durumda cozum yoktur (karesi alinip eksi ile carpilan hicbir sayi 3 sonucunu vermez).

Ustteki son iki resime bakinca, $\lambda = 2$'nin dogru oldugunu goruyoruz, cozum olan iki noktada bir gradyan otekinin hakikaten tam iki kati.

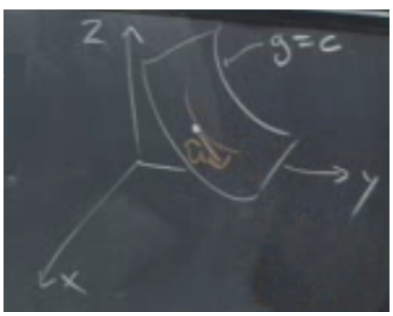
Bu metot niye isledi? Grafiklere baktik, tegetlik oldugunu gorduk, fakat bunun niye kesinlikle boyle olmasi gerektigini soylemedik.

Kisitli ifade gozonune alininca ele gececek bir min / maks noktasinda ve $g = c$ kesit egrisi boyunca, f'in degisim orani $= 0$ olmalidir.

Simdi ayni seyi yonsel turev kullanarak soyleyelim.

$g = c$'e teget olan her $\hat{u}$ icin $df/ds_{|\hat{u}} = 0$ olmali.

Yani su resme bakarsak



Kesit yuzeyi (ki orada $g = c$) uzerindeki nokta ve o yuzeye teget olan yon $\hat{u}$ yonunde f'in degisimi sifirdir.

$df/ds_{|\hat{u}}$ formulunun $\nabla f \cdot \hat{u}$ formulune esit oldugunu biliyoruz.

O zaman teget olan her $\hat{u}$, ∇f'e dik olmalidir, yani $\hat{u} \perp \nabla f$.

O zaman ∇f, g'nin kesit seviyelerine diktir.

g'nin kesit seviyelerine dik bir baska vektor daha biliyoruz, o da g'nin kendi gradyani, yani ∇g.

O zaman $\nabla f // \nabla g$ olmalidir cunku her iki gradyan da g'nin kesit seviyelerine ayni anda diktir.

Tekrar edelim. Sinirlanmis min, maks noktasinda g kesit seviyesi uzerinde ilerliyorsak, f'in (en azindan birinci derecedeki yaklasiksallamasindaki) degisimi sifirdir, yani $g = c$'ye teget yondeki herhangi bir f turevi sifir olmali. Min, maks olmak bu demek. O zaman $g = c$'ye teget olan herhangi bir $\hat{u}$, f'in gradyani ∇f'e dik olmalidir, ve bu da ∇f, g'nin kesit seviyesine dik demektir.

Yani resimde gordugumuz tekrar soylemis oluyoruz. Her iki kesit seviyesi kisitlanmis min / maks noktasinda birbirine teget olmali.

UYARI

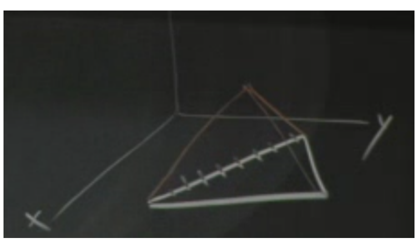
Bu metot bir cozumun min mi, maks mi oldugunu soylemez.

Kotu haber: 2. turev testini kullanamayiz.

Ne yapabiliriz? Elde edilen noktalari f'e verip sonuca teker teker bakariz, birbirleri ile karsilastiriz. Mesela ustteki ornekten elde ettigimiz degerler minimum'dur, maks bu problemde sonsuzluktadir.

Zor Ornek

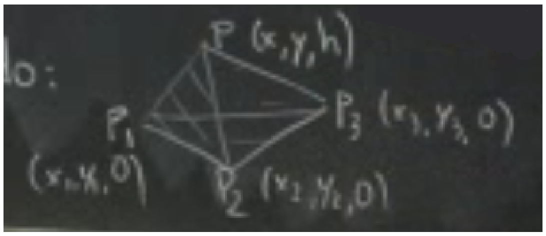
Diyelim ki bir piramit insa etmek istiyoruz, hacim ve ucgensel taban bize veriliyor. Amac, tum dis yuzey alanini minimize etmek.



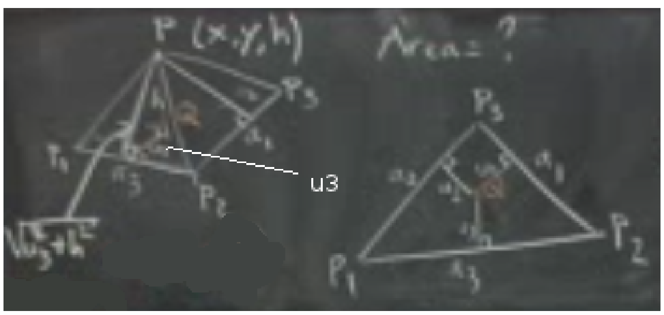
Cozum icin bulmamiz gereken piramidin en ust noktasi. Degisik yerlerde olabilecek, ve nerede olduguna gore hacimin, alanin degisebilecegi elimizdeki ayar noktasi orasi. Hacim formulu

Hacim $= \frac{1}{3}$ Baz alani $\times$ yukseklik

Hacmi ve baz alani sabitlediysek, o zaman formulde geri kalan yukseklik te sabitlenmis demektir. Minimize ederken onun uzerinde oynayamayiz. O zaman ust nokta sadece xy duzlemine paralel olarak saga, sola, ileri, geri, vs. seklinde yer degistirebilir, asagi, yukari cikamaz.



Eger kordinatlari ustteki gibi ortaya cikartsak, ele gecen tum ucgenlerin alan hesabini vektor capraz carpimi ile hesaplamayi biliyoruz, onlarin toplamini elde etmeye ugrasabilirdik, vs. Fakat ustteki yontem isleri daha fazla karistiriyor. Kordinatlari daha iyi temsil edecek bir yontem gerekiyor bize.



Temsili ustteki gibi yapalim, resimde sagda olan sekil piramidin kusbakisi goruntusu. Piramit tabaninda bir Q noktasi hayal edelim, P_1 ve P_2 arasindan Q'ye giden uzaklik u_3 [resimde iyi cikmadi, biz ekledik], yuksekligi zaten biliyoruz, h. O zaman piramit kenarinda ona tekabul eden yukseklik $\sqrt{u_3^2 + h^2}$.

Kenar alani $= \frac{1}{2}a_1\sqrt{u_1^2 + h^2} + \frac{1}{2}a_2\sqrt{u_2^2 + h^2} + \frac{1}{2}a_3\sqrt{u_3^2 + h^2}$

Bu 3 degisken iceren bir fonksiyon, $f(u_1, u_2, u_3)$.

Uc degiskeni birbiri ile nasil iliskilendiririz? Cunku buyuk bir ihtimalle bunlar bagimsiz degiskenler degiller.

Eger ust resimdeki sag sekle bakarsak, ve baz alanini uc parcaya bolersek, elde ettigimiz

$$\text{Baz alani } = \frac{1}{2}a_1u_1 + \frac{1}{2}a_2u_2 + \frac{1}{2}a_3u_3$$

formuludur. Bu formul kisitlama ifadem, yani bu problemnin g'si. Kenar alani formulu de f'im.

Lagrange

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{1}{2}a_1 \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + h^2}} = \lambda \frac{1}{2}a_1$$

$1/2a_1$'ler iptal olur

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + h^2}} = \lambda$$

Digerleri benzer sekilde

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + h^2}} = \lambda$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_3} = \frac{u_3}{\sqrt{u_3^2 + h^2}} = \lambda$$

Son uc formulun ucu de λ'ya esit, o zaman uc formul birbirine esit. Bu mantigi izlersek, $u_1 = u_2 = u_3$ olmasi gerektigi sonucuna da variriz.

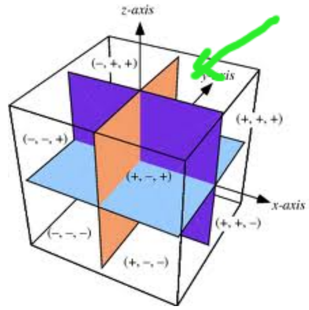
O zaman Q noktasi her kenardan esit uzaklikta, tam ortada (incenter) olmali.

Soru

Bir dikdortgensel kutu birinci oktan (octant) icine konuyor, ki kutunun Q kosesi tam orijinde, onun caprazsal olarak tam zittinda duran P noktasi ise $f(x, y, z) = c$ gibi bir yuzeye dokunuyor. Lagrange Carpanlari teknigini kullanarak hangi P noktasi icin bu kutunun en buyuk hacime sahip olacagini hesaplayin, ve hesabinizin bir maksimum nokta ortaya cikartip cikarmadigini nasil bildiginizi ortaya koyun.

Oktan kavrami alttaki sekilde gosteriliyor, Latin "octo" bilindigi gibi "sekiz" anlamina geliyor, ki alttaki 3D kordinat sistemi 8 parcaya bolunmus. 1.

oktan tum isaretlerin, yani x, y, z'nin hepsinin + oldugu bolge.



Cevap

a) $f(x, y, z) = x + 2y + 3z = 18$

$\nabla(xyz) = \lambda \cdot \nabla f(x, y, z)$

$yz = \lambda,\ xz = 2\lambda,\ xy = 3\lambda$

Bu formulleri ayni anda cozmek icin ustteki uc denklemi sirasiyla x, y, z ile carpariz boylece sol tarafi ayni olan uc tane denklem elde etmis oluruz.

$xyz = \lambda x$

$xyz = 2\lambda y$

$xyz = 3\lambda z$

Boylece uc denklemin sag tarafi artik birbirine esittir.

$x = 2y = 3z$

Daha onceden biliyoruz ki

$x + 2y + 3z = 18$

Birbirine esit uc seyin toplami 18 ise, o seylerin her birinin buyuklugu 6 demektir, yani

$x = 2y = 3z = 6$

Buradan x, y, z teker teker bulunabilir,

$x = 6, y = 3, z = 2$

Bu bir maksimumdur cunku 1. oktanda kalip olabilecegimiz en kucuk deger

x, y, z sifir oldugu, yani orijinde oldugu zamandir. Bu noktalar orjinden buyuk degerler.