

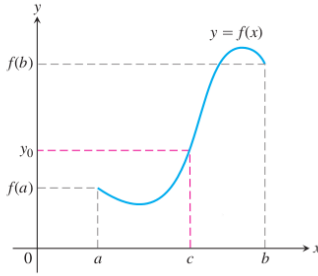
Calculus'un Temel Teoremi (The Fundamental Theorem of Calculus)

Ana teoriyi ispatlamadan önce iki diğer teoriden bahsetmemiz, ispatlamamız lazım. Bu teorilerden biri Gecis Değeri Teorisi (Intermediate Value Theorem) diğeri Tanımlı Entegraller İçin Ortalama Değer Teoremi (Mean Value Theorem for Definite Integrals). Gecis Değeri Teorisi basitçe şunu söyler

Teori

$[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon $y = f(x)$, $f(a)$ ve $f(b)$ arasındaki her değeri muhakkak alır. Bir diğer deyişle, eğer y_0 , $f(a)$ ve $f(b)$ arasındaki bir değer ise $[a, b]$ aralığındaki bir c için muhakkak $y_0 = f(c)$ olmalıdır.

Geometrik olarak bu teori y eksenini $f(a)$ ve $f(b)$ arasında kesen $y = y_0$ yatay çizgisinin $y = f(x)$ fonksiyonunu muhakkak, en az bir kez keşceğidir. Grafik aşağıda.



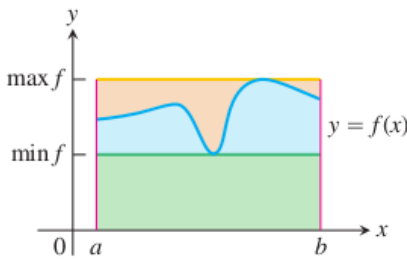
Sezgisel olarak bu anlamlı değil mi? Eğer sürekli bir fonksiyon var ise, $f(a)$ 'dan $f(b)$ 'ye giderken o aralıktaki her sayıya bir kez “ugramaya” mecburuz. Etraflarından dolasmamız mümkün değil, çünkü kesintili bir fonksiyon değil, kesintisiz / sürekli bir fonksiyonumuz var. Bu teoremin daha detaylı ispatı için [4]'e bakabilirsiniz.

Maks-Min Esitsizliği

Eğer $[a, b]$ aralığında f , maksimum değer $\max f$ 'e ve minimum değer $\min f$ 'e sahipse,

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max f \cdot (b - a)$$

demektir.



Bu kural diyor ki f 'in $[a, b]$ üzerindeki integrali hiçbir zaman f 'in minimum'u çarpi

$[a, b]$ araliginin uzunlugu'ndan kucuk olamaz, ve f 'in maksimumu carpi $[a, b]$ araliginin uzunlugu'ndan buyuk olamaz.

Ispat

Eger $(b - a)$ 'yi $\sum_{k=1}^n \Delta x_k$ olarak gorursek

$$\begin{aligned} \min f \cdot (b - a) &= \min f \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^n \min f \cdot \Delta x_k \end{aligned}$$

$[a, b]$ araligindaki herhangi bir deger c_k icin

$$\leq \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

Oyle degil mi? $\min f$ degeri en kucuk deger ise, $[a, b]$ araligindaki herhangi bir nokta c_k 'nin f degeri bu degere ya esit, ya da ondan buyuktur. Yani $\min f \leq f(c_k)$. Devam edersek

$$\leq \sum_{k=1}^n \max f \cdot \Delta x_k$$

Ustteki benzer mantigi takip ediyor, bu sefer $f(c_k) \leq \max f$. Son ifadedeki \max 'i disari alabiliriz.

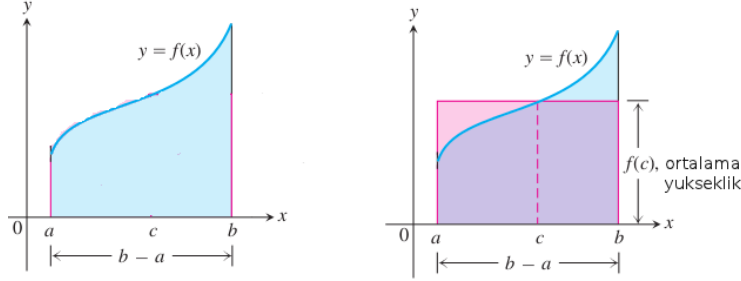
$$\begin{aligned} &= \max f \sum_{k=1}^n \Delta x_k \\ &= \max f (b - a) \end{aligned}$$

Ortalama Deger Teoremi

Eger f fonksiyonu $[a, b]$ arasinda surekli ise o zaman $[a, b]$ araliginda olan bir c noktasinda

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

esitligi dogru olmalidir. Yani alttaki resimde sol grafikteki mavi alanin $b - a$ ile bolunerek elde edilen ortalama degeri, $[a, b]$ araligindaki bir c uzerinden $f(c)$ 'ye muhakkak esittir. Ya da bir kenari $f(c)$, digeri $b - a$ olan bir diktortgenin alani (alt sagdaki resim), mavi alanin tamamina esit olacaktir.



Maks-Min Esitsizliginin iki tarafini $b - a$ 'ya bolerek

$$\min f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \max f$$

elde ederiz. Eger Gecis Degeri Teorisi dogruysa, $\min f$ ve $\max f$ arasindaki tum noktalar ziyaret edilmelidir. O zaman boyle bir $f(c)$ kesinlikle var demektir.

Calculus'un Temel Teoremi

Teori

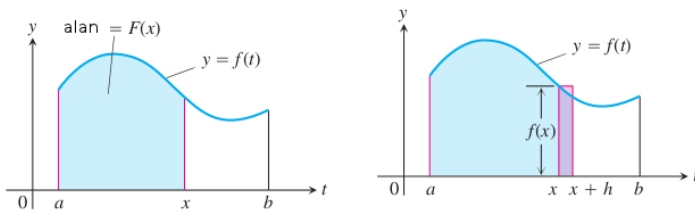
Eger f fonksiyonu $[a, b]$ arasinda surekli ise o zaman

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

fonksiyonu da $[a, b]$ arasinda sureklidir, ve bu fonksiyonun turevi $f(x)$ 'in kendisidir.

Yani

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$



Ispat

Turevin tanimini direk $F(x)$ üzerinde uygulayalım, $[a, b]$ içinde olan x ve $x + h$ aralığını alalım, ve

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h}$$

bolumunun limitinin, $h \rightarrow 0$ iken, $f(x)$ 'e gittigini gostermeye calisalim. $F(x + h)$ ve $F(x)$ fonksiyonlarini entegralleri üzerinden tanımlayalım. O zaman ustteki formulun bolum kısmi

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

Entegrallerin toplam kuralina gore ustteki formulun sag tarafi

$$\int_x^{x+h} f(t)dt$$

ifadesidir. O zaman bolumun tamamı

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Ortalama Deger Teoremine gore, ustteki esitligin sagindaki ifadenin, x ve $x + h$ aralığında f 'in aldığı degerlerden birine aynen esit oldugunu biliyoruz. Yani o aralıktaki bir c için

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)$$

kesinlikle dogru olmalı. Simdi, $h \rightarrow 0$ oldukca, $x + h$ mecburen x 'e yaklasmak zorunda kalacaktır, cunku c , x ile $x + h$ arasında sıkışıp kalmıştır. f fonksiyonu x noktasında surekli olduguna gore, o zaman $f(c)$, $f(x)$ 'e yaklasmalıdır.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

Simdi elimizdeki bu bilgiyle basa donersek,

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

$$= f(x)$$

Kaynaklar

- [1] Thomas Calculus 11. Baski, sf. 130
- [2] Thomas Calculus 11. Baski, sf. 347
- [3] Thomas Calculus 11. Baski, sf. 358
- [4] Thomas Calculus 11. Baski, sf. 257