

MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 9

Bu dersin konusu birden fazla degisken iceren fonksiyonlari minimizasyonu ile ugrasirken yardimci olacak kismi turev (partial derivative) kavrami. Çok degiskenli bir fonksiyon $f(x, y)$ 'nin birden fazla turevi vardir. Mesela bunlardan bir tanesi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$$

Bu turev x 'in degistirildigi ama y 'nin sabit tutuldugu bir durumu gosterir.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

ise y 'in degistirildigi ama x 'nin sabit tutuldugu bir durumu gosterir.

Simdi her ikisinin birden degistirildigi durumda ne olacagini gosteren yaklasiksal (approximate) formulu gorelim. Degisim matematiksel olarak soyle

$$x \sim x + \Delta x$$

$$y \sim y + \Delta y$$

O zaman z icin

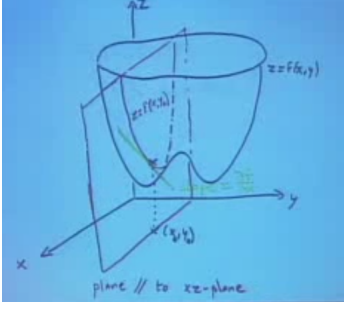
$$z = f(x, y)$$

yaklasiksal degisim soyle olur

$$\Delta z \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y \tag{1}$$

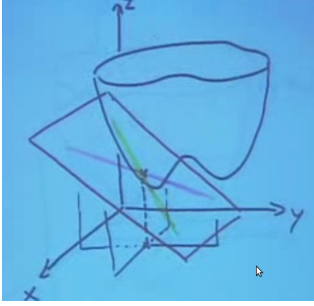
Tekrar vurgulamak gerekirse bu yaklasiksal bir formül, daha “dogru” bir temsil için 2., 3. turevleri iceren daha yuksek dereden (higher order terms) terimlerin de olması gerekir, fakat bu terimler 1. derece lineer bir yaklasiksallik için kullanılmaz.

Bu formulu nasıl dogrularız? Bunu yapmanın yollarından biri teget düzlem yaklasiksallaması (tangent plane approximation). Mesela $z = f(x, y)$ fonksiyonuna olan teget bir düzlemi düşünelim.



Hatırlarsak $\frac{\partial f}{\partial x}$ kısmi türevi x 'in değiştiği ama y 'nin sabit tutulduğu bir durumu tarif ediyordu. Yukarıdaki grafiğe göre bu bir anlamda iki çukurlu kap gibi duran z fonksiyonunun bir kesitine bakmak gibi (unutmayalım, fonksiyon sadece kabin dışında tanımlı, içi boş). Bu kesit f 'in bir yansımasını oluşturuyor, o yansıma üstteki grafikte bir parabol şeklinde. Bu parabolda x değiştikçe o noktanın parabol üzerindeki çizgisel tegeti de değişiyor (grafikteki yeşil çizgi) ki bu çizgisel eğim $\frac{\partial f}{\partial x}$ 'e eşit.

Eğer aynı şeyi x 'in sabit y 'nin sabit olduğu durum için yapsaydım, benzer bir kesit elde edecektim.



Bu iki kesit üzerinden elde edilen ikinci teget çizgi birinci ile beraber kullanılıncaya bir düzlemi tanımlamak için kullanılabilir (iki çizgi paralel bir düzlem tanımlamak için yeterlidir), ki teget düzlem yaklaşıksallaması için kullanılacak düzlem budur. Bunu nasıl yapacağımızı gösterelim.

f_x ve f_y iki teget çizgiyi tanımlamak için kullanılıyorsa, bu formülleri bir araya koyarak düzlemi temsil edebiliriz. Eğer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a$$

ise bu demektir ki birinci teget çizgi (yesil çizgi) L_1 şöyledir:

$$L_1 = \begin{cases} z = z_0 + a(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

Bu çizgi için y 'yi sabit tutuyorum, z 'deki değişimi z_0 üstüne eğim a 'nin katları kadar (x 'in değişimi oranında çarparak) ekleyerek hesaplıyorum.

Benzer şekilde

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$$

$$L_2 = \begin{cases} z = z_0 + b(y - y_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

Hem L_1 hem de L_2 $z = f(x, y)$ 'ye teğettir. Bu iki çizgi beraber bir düzlem oluşturur. Bu formül

$$z = z_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0) \quad (2)$$

formülüdür.

Formül 1, üstteki formülün yaklaşık halidir. Eğer teget düzlem üzerinde olsaydık, \approx işareti = işaretiye dönüşecekti. Bu yaklaşıksallık ufak Δx ve ufak Δy için geçerli. Yani yaklaşık formül, f 'nin grafiği teget düzleme yakın diyor.

Maksimum Minimum Problemleri

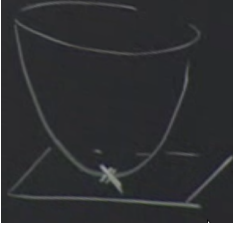
Kismi türevlerin kullanım alanlarından biri optimizasyon problemleridir. Mesela çok değişkenli bir fonksiyonun maksimumunu bulmak gibi. Eğer fonksiyon tek değişkenli olsaydı, hemen türevini alıp sonucu sifıra eşitleyebilirdik, ve buna göre bir çözüm arardık. Çok değişkenli fonksiyonlarda kısmi türevler kullanmak lazım.

Bu derste iki değişkenli duruma bakacağız fakat aynı prensipler, 10, 15, milyon tane değişken için aynı.

Lokal bir minimum için hem $f_x = 0$ hem $f_y = 0$ olmalıdır. Bu niye doğudur. Yine formül 1'e bakarsak, hem $f_x = 0$ hem $f_y = 0$ olduğu zaman Δz sıfır olacaktır, yani birinci derecede düşünürsek $f(x, y)$ 'de değişim yok demektir.

Teget düzlemlerin dilinden konuşursak, minimum anında teget düzlem tama-

men yatay olacaktır.



Formul 2 baglaminda dusunursek, bu durum $a = 0$ ve $b = 0$ oldugu ana tekabul ediyor ve o anda duzlemi tanımlayan $z = z_0$ formuludur.

Tanim

Eger $f_x(x_0, y_0) = 0$ ve $f_y(x_0, y_0) = 0$ ise o zaman x_0, y_0 f 'in kritik noktasidir. Not: Birden fazla degisken icin tabii ki tum kısmi turevlerin o noktada sifir olmasi gerekir.

Ornek

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 2y$$

Bakalim bunu minimize ya da maksimize edebilecek miyiz?

$$f_x = 2x - 2y + 2 = 0$$

$$f_y = -2x + 6y - 2 = 0$$

Ustteki iki denklemi ayni anda cozmeliyiz.

Bu tur durumlarda iki denklemi birbiriyle toplayip basitlestirmeye calismak iyi bir yontemdir. Fakat unutmayin, elimizde her zaman iki tane denklem olmalı, iki denklemi ortadan kaldırıp birdenbire tek denklem ile yola devam edemeyiz.

Toplami yaparsak

$$4y = 0$$

elde ederiz. Bunu alip birinci denkleme sokalım, sonuc

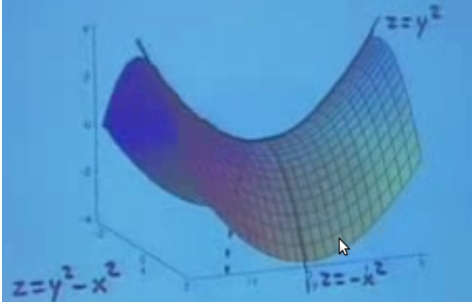
$$2x + 2 = 0$$

$$x = -1$$

Demek ki kritik nokta $(x, y) = (-1, 0)$.

Peki bu kritik noktanin minimum mu maksimum mu oldugunu nereden bilecegiz? Eger tek degiskenli bir fonksiyona bakiyor olsaydik, ikinci tureve bakabilirdik. Benzer bir seyi burada da yapabilirdik, ama sadece birinci turevden bile elimizde iki tane var, ikinci turevlerden cok daha fazlasi olacak. O duruma bakacagiz, simdilik daha az otomatik olarak isi nasil anlayacagimizla ilgilenelim.

Elimizde birden fazla minimum olabilir. Turev(lerin) sifir oldugu noktada bir duzluk vardir, bu bir lokal minimumdur. Yani o noktaya yakin oldugumuz surece (ki lokalligin tanimi bu) bu minimum gecerlidir. Baska bir noktada, turev(lerin) yine sifir oldugu ama daha asagi noktada bir minimum daha olabilirdi. Maksimumlar icin ayni durum gecerli.



Yanliz bir diger secenek daha var. Bu secenek kritik noktanin ne maksimum, ne minimum oldugu durumudur. Bu durumda kritik noktadan hangi “yone dogru” bakiyorsak, degisik bir cevap elde ederiz. Bu at egeri gibi gozuken grafigin orta noktasina, 0,0,0 noktasina bakalim, burada teget duzlem tam yatay. Bu noktaya eger noktasi (saddle point) deniyor.

2. turevlerden bahsetmisik, ve bu derste kritik noktanin ne oldugunu daha az otomatik bulacagimizi soyledik (2. turevler bir dahaki derste).

Bu yontemde kareler kullanacagiz. $f(x, y)$ 'nin kareler, ve onların toplami olduguna dikkat edelim. Eger tum formulu bir seyin karesi olarak gosterebilirsek, belki bir yerlere gelebiliriz. Tek problem xy terimi, ama $x^2 - 2x..$ diye giden bir formül biliyoruz. Kareyi Tamamlama teknigini kullanabiliriz.

$$f(x, y) = (x - y)^2 + 2y^2 + 2x - 2y$$

Basitlesti ama biraz daha basitlesebilir. Acaba $(x - y)^2$ icindeki $(x - y)$ ile

disaridaki $2x - 2y$ arasindaki bir baglanti kurabilir miyim? Iceriye bir $+1$ eklersek bu olabilir. O zamam disaridaki $2x - 2y$ iptal olur. Icerideki 1 'i dengelemek icin disari bir -1 ekleriz.

$$= ((x - y) + 1)^2 + 2y^2 - 1$$

Bu formul eger

$$= \underbrace{((x - y) + 1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2y^2}_{\geq 0} - 1$$

ise ancak ≥ -1 olabilir. Ve kritik nokta $(-1,0)$ [da f 'in degeri hakikaten -1 'dir. Niye ustteki iki terim ≥ 0 dedik? Cunku bu terimler karesel ifadeler, ve karesel ifadeler en az sifir olabilirler. Bir deger ne olursa olsun, eksi bile olsa karesi alinirsa artik olur, bu tur ifadeler sadece sifirda “en az” olurlar. Yani biraz cebirsel takla, ve ufak bir numarayla istedigimiz sonuca erismis olduk.