Toplamların Moment'leri

Olasılık matematiğinde "moment üreten işlevler" olarak adlandırılan, başlangıçta pek yararlı gibi gözükmesede bir takım matematiksel özellikleri olduğu için, ispatlarda oldukça işe yarayan bir kavram vardır.

Her rasgele değişkenin bir dağılımı olduğunu biliyoruz. Her rasgele değişkenin de ayrıca bir moment üreten fonksiyonu da vardır. Ayrıca, moment üreten fonksiyon ile rasgele değişken arasında bire-bir olarak bir ilişki mevcuttur. "Bu neye yarar?" diye sorulabilir; Cevap olarak, mesela cebirsel olarak türete türete bir moment'e geldiğimiz düşünelim, ve tekrar başka bir taraftan, başka bir formülden gene türete türete tekrar aynı moment işlevine geliyorsak, bu demektir ki, iki taraftan gelen rasgele değişkenler (ve tekabül eden dağılımları) birbirine eşittir. Bazı şartlarda moment üreten işlevler ile cebir yapmak, dağılım fonksiyonlarından daha rahat olmaktadır.

Her rasgele değişken için, moment üreten işlev şöyle bulunur.

X rasgele degiskenin moment ureten operasyonu

$M(t) = E(e^{tX})$ olarak gosterilir

Ayriksal operasyonlar icin

$$M(t) = \sum_x e^{tx} p(x)$$

Surekli islevler icin

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Kuram

Gelelim yazımızın esas konusu olan kuramımıza.

Eğer $X_1, X_2 ... X_n$ bağımsız rasgele değişken ise, ve her değişkenin $M_i(t)$ $i = 1, 2, 3, ...n$ olarak, öz olarak aynı olan birer moment üreten işlevi var ise, o zaman,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} aX_i$$

acilimi

$$M_y(t) = \prod_{i=1}^{n} M(a_i t)$$

olacaktir.

Ispat

$M_y(t) = E(e^{tY} = E(e^{t(a_1X_1 + a_2X_2 + .. + a_nX_n)}$

$= E[\exp(ta_1X_1 ta_2X_2 ... + ta_nX_n)]$

$= E[\exp(ta_1X_1) + \exp(ta_2X_2) + ... + \exp(ta_nX_n)]$

$= E[\exp(ta_1X_1)] + E[\exp(ta_2X_2)] + ... + E[\exp(ta_nX_n)]$

Daha once belirttigimiz gibi

$M_i(t) = E[\exp(tX_i)]$

olduguna gore ve t yerine ta_i koyuldugunu dusunelim

$$M_y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_y(a_it)$$

olacaktir.

Bunu $M_y(t) = (M_i(a_it))^n$ seklinde de gosterebiliriz.