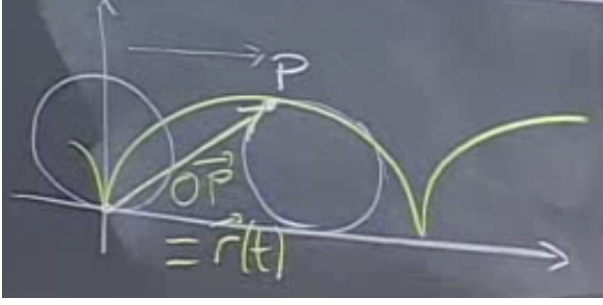


MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 6

Bir onceki derste cycloid konusunu isledik.



Hareket eden bir noktanin pozisyonu

$$(x(t), y(t), z(t))$$

Bu noktayi takip etmenin diger yollarindan biri onu pozisyonu vektoru olarak gormek, ki bu vektorun bilesenleri noktanin kordinatlari.

$$\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

Vektor orijin (baslangic) noktasindan gelinen noktayi isaret eden bir vektor (resimde \vec{OP}).

Cycloid probleminde tekerlek yaricapini 1 alalim ve birim hizda ilerliyor olalim, ki Boylece aci θ ve zaman ayni sey haline gelsin

$$\vec{r}(t) = \langle t - \sin(t), 1 - \cos(t) \rangle$$

Tamam. Simdi, noktanin pozisyonunu zaman acisindan bildigimize gore, onun degisimini inceleyebiliriz, mesela hizina, ivmesine bakabiliriz. Ilk once hiza bakabiliriz. Fakat, aslinda, hizdan daha iyisini hesaplayabiliriz. Hiz tek bir sayidir sadece, ama eger su icinde GPS olan satafatli spor arabalarindan birine sahip degilseniz, size hizinizin “hangi yonde” oldugunu soylemez. Sadece “gittiginiz yonde” (her ne yone gidiyorsaniz) ne kadar hizli oldugunuzu soyleyebilir.

O zaman biz hizimizi hesaplarken, hem yonu, hem hizi ayni anda goze alabiliriz. Bu demektir ki vektor kavrami tekrar isimize yarayacak. Hizi vektor olarak hesaplayabiliriz.

Bunu nasıl yaparız? Pozisyon vektörünün zamana göre türevini alabiliriz.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Bu tür bir türevi bu derste ilk kez görüyoruz, ilk kez bir vektörün türevini alıyoruz. Bu şekilde türev almak demek, o vektörün bileşenlerinin teker teker türevini almak demektir. Yani

$$= \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\rangle$$

Cycloid orneğine donersek

$$\vec{r}(t) = \langle t - \sin(t), 1 - \cos(t) \rangle$$

formulunun türevini alırsak ne olur?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \langle 1 - \cos(t), \sin(t) \rangle$$

İşte bu türev bize hangi yönde ve ne kadar hızlı gittiğimizi gösteriyor.

Bu arada bir vektörünün büyüklüğünün (magnitude) her zaman mesafesiz, uzaklıksal anlamı olmayabileceğini de görmüş oluyoruz. Hız kavramı bir orandır, katedilmiş bir mesafe, bir yer değildir, t anında bir yönde olan bir büyüklüktür. Fakat yine de bir büyüklüktür, bir yönü vardır, ve bu sebeple vektörler ile temsil edilebilir.

Problemimize dönelim. Önceki derste tekerlekten izlenen noktanın en alta gelip yükseldiği sıralarda hareketinin nasıl olduğunu irdelemiştik. Şimdi bu konuyu hız kavramını kullanarak incelemeye uğralım. Üstteki vektöre $t = 0$ koyarsam, ne olur? Sonuç $\langle 0, 0 \rangle$, yani $\vec{v} = 0$. Tabii ki nokta $t = 0$ öncesi hareket ediyor, sonra da ediyor, yani bir hızı var, sadece “o anda” hızı yok.

Peki hız vektör olarak daha fazla bilgi veriyor olmasına rağmen, ben yine de klasik anlamda hızı, yani o tek sayıyı elde etmek istiyorsam ne yaparım? Hız vektörünün büyüklüğünü hesaplarım, $|\vec{v}|$.

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(t)} \end{aligned}$$

Bu formüle bakarak hizin nerede en fazla, en az oldugunu hesaplayabiliriz. Eger $t = 0$ ise, sonuc sifir olur. $t = \pi$ ise elimizde $\sqrt{4} = 2$ vardır, bu an noktanin tekerlegin en ustunde oldugu andir, bu an ayni zamanda en hizli hareket ettigimiz de andir. Hatta bu hiz tekerlegin saga dogru yatay gidis hizinin iki katidir, tekerlegin saga dogru birim hizda ilerledigini soylemistik, fakat nokta bunun ustune bir de merkeze gore bir donme hareketi icinde, ve bu iki etki birbirine eklenerek 2 hizina sebebiyet veriyor.

O nokta tepe noktasindan asagi inmeye baslayinca tabii ki noktamiz donusun “geriye dogru” olan etkisiyle toplami hizinda dusme yasiyor.

Ivme

Bu konuyu islemeden once klasik olarak bilinen ivme kavrami ile burada kullanacagimiz ivme kavrami ile ciddi uyusmazliklar oldugunu belirtmeliyim. Klasik anlayista ivme mesela bir arabada giderken “hissettigimiz sey” bizi koltuga iten kuvvet, hizdaki degisim (hizin turevi) olarak bilinir, ve eger bir arabada saatte 40 km ile gidiyorsam, ivme yok denir. Fakat simdi bu arabanin bir virajdan dondugunu farzedelim, bu durumda bir kuvvet hissederiz, hala saatte 40 ile gidiyor olabilirim, ama bir ivme vardır. Burada aslinda yana dogru bir hizlanma / ivme sozkonusudur. O zaman yine vektor kavramini kullanmamiz lazim.

Ivme vektorunu soyle belirtelim:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Fizikteki ivme tanimi da budur, $F = ma$ derken kastedilen a iste bu \vec{a} 'dir. Bir vektordur.

Cycloid'e donelim.

$$\vec{v} = \langle 1 - \cos(t), \sin(t) \rangle$$

Turevi alalim

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \langle \sin(t), \cos(t) \rangle$$

$t = 0$ noktasinda ivme nedir? $\langle 0, 1 \rangle$.



Yani $t = 0$ anındaki ivme bir birim vektor, ve yonu tam yukariya dogru. Bu ilginç bir şey, o anda hız sıfır, fakat bir ivme mevcut.