MIT OCW 18.03, Ders 3

Birinci Derece Lineer ODE

ODE konusunda en onemli denklemler 1. derece lineer ODE'lerdir. Matematiksel pek cok modelde surekli ortaya cikarlar, ve analitik olarak cozulebilir haldedirler. Suna benzerler:

$a(x)y' + b(x)y = c(x)$

Niye lineer? Cunku ustteki formul y ve y' baglaminda lineer, $ay_1 + by_2 = c$'de y_1 ve y_2'nin lineer olmasi gibi lineer.

Eger $c = 0$ ise bu denkleme homojen denir.

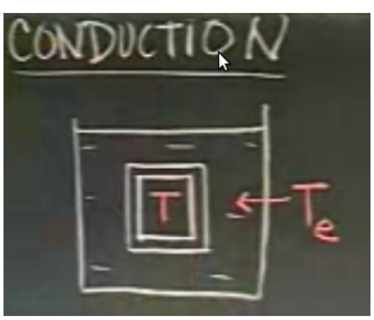
1. Formul yaygin form'dur, ama standart form degildir. Standart lineer form alttakine benzer. Ilk katsayi (coefficient) 1 degerinde olmalidir, yaygin formu standarta cevirmek icin tum denklem $a(x)$'e bolunebilir. b/a olunca harf degistirilir, p denir, digerine q denir.

$y' + p(x)y = q(x)$

1. derece lineer ODE'lerin ortaya ciktigi modeller isi konsantrasyon modelleri, karisim (mixing) modelleri, daha az onemliler radioaktif curume, faiz hesabi, bazi hareket modelleri, vs. Bugun kullanacagimiz model isi konsantrasyon modeli, ismini degistirerek aktarma (conduction) ve yayilma (diffusion) kelimelerini kullanacagiz.

Aktarma modeli ile baslayalim.

Diyelim ki elimizde icinde su olan bir kap var, ve bu kap icinde tam ortada (bir sekilde) asili duran bir kutu (kup) var. Bu kutunun duvarlari kismen izole edilmis. Icerideki kutunun sicakligi T ve dis bolmenin sicakligi T_e, t zaman. Bu durum icin nasil bir diferansiyel denklem kurariz?



Newton'un Soguma Kanununu kullaniyoruz ve sicakligin aktarilarak baska bir noktaya gectigini dusunuyoruz (sicaklik radyasyon uzerinden de seyahat edebilir), ve su modeli kuruyoruz.

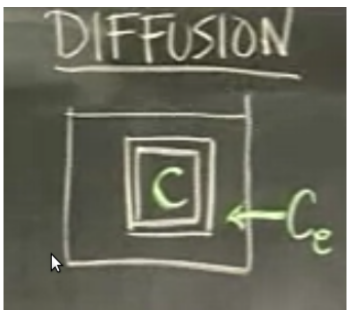
$$\frac{dT}{dt} = k(T_e - T)$$

$k > 0$ akiskanlik (conductivity), bir sabit.

$$T(0) = T_0$$

T'nin zamana gore bir fonksiyon oldugunu unutmayalim. Kisa olsun diye cogu zaman $T(t)$ ibaresi kullanilmiyor.

Yayilma (diffusion) modeli nasil olurdu?



Bu model formulsel olarak neredeyse ayni, diyelim ki bu sefer kup icinde tuz var, konsantrasyonu C, disaridaki tuz kontsantrasyonu C_e. Yayilma modelinde tuzluluk "yayiliyor", yuksek konstrasyondan alcak olana dogru gidiyor. Bu modelde tuzun yayilma hizi, konstantrasyonlar arasindaki farka baglidir.

$$\frac{dC}{dt} = k(C_e - C)$$

Isi aktarim formulu standart lineer formda degil, bu degisimi yapalim, ki en azindan lineer oldugunu gormus olalim.

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_e$$

Cozelim

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Bu formulu entegre edici faktor (integrating factor) $u(x)$ kullanarak cozecegiz.

$uy' + puy = qu$

Burada yapmak istedigimiz oyle bir u bulmak ki sag ve sol taraf onunla carpilinca sol taraf bir seyin turevi haline gelsin:

$(...)' = ..$

Boylece x'e gore iki tarafin entegralini alinca turev islemi kaybolur, daha temiz bir ifade geriye kalir.

Parantez icinde ulasmaya calisacagimiz ifade neye benzemeli? Hoca $(uy)'$ fikrini ortaya atti. Bunun niye mantikli bir secim oldugunu gormek zor degil, eger $(uy)'$ uzerinde turevin carpim kuralini kullanirsak, acilimi zaten

$uy' + u'y$

olacaktir, ki bu ifade $uy' + puy = qu$ formulunun sol tarafina yakindir. Tek bir farkla, u' yerine elimizde pu var. O zaman u oyle secilmeli ki $u' = pu$ olsun.

$u' = pu$

Degiskenleri ayir

$\dfrac{du}{u} = p$

Entegrali al

$\displaystyle\int \frac{du}{u} = \int p$

$\displaystyle ln(u) = \int p(x)dx$

Buradan u'nun ne olacagini kestirebiliriz. Unutmayalim, tum u'lara ihtiyacim yok, ustteki ifadeyi tatmin eden herhangi bir u olabilir. Ustteki formulun iki tarafina e bazina tabi tutarsak

$u = e^{\int p(x)dx}$

Iste entegre edici faktoru bulduk. Rasgele (arbitrary) sabite ihtiyac yok cunku tek u kullandik.

Metotu tekrar bastan gozen gecirelim. Elimizde su var:

$y' + py = q$

1. Eger formul standart lineer formda degilse o forma gecir, cunku entegre edici formulde p var, eger form dogru degilse dogru p gelmez, isler sarpa sarar.

2. Entegre edici faktoru

$e^{\int p(x) dx}$

bul.

3. ODE'nin iki tarafini bu faktor ile carp.

4. Entegre et

Ornek

$xy' - y = x^3$

Standart form

$y' - \frac{1}{x} y = x^2$

Entegre edici faktor

$e^{-ln(x)}$

Bunu daha basitlestirebiliriz,

$e^{-ln(x)} = (e^{ln(x)})^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

Standart formun iki tarafini bu faktor ile carpalim

$\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = x$

Eger her seyi dogru yaptiysak sol tarafi direk entegre edebiliriz. Parantezli forma koyalim, ve parantez icinin hakikaten ustteki sonucu verip vermedigine de dikkat edelim.

$(\frac{1}{x} y)' = x$

Entegrali alinca

$$\frac{1}{x}y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \frac{x^3}{2} + C$$

Sonucu bulduk.

Ornek

$$(1 + cos(x))y' - (sin(x))y = 2x$$

$$y' = \frac{sin(x)}{1 + cos(x)}y = \frac{2x}{1 + cos(x)}$$

Ent. edici faktor

$$-\int \frac{sin(x)}{1 + cos(x)}dx$$

Bu bayagi korkutucu bir entegral gibi gozukuyor. Fakat dikkatli bakarsak bolumun ust tarafi alt tarafinin turevi. Bu cok iyi, o zaman entegrasyon su sonucu verir:

$$ln(1 + cos(x))$$

Faktor ise

$$e^{ln(1+cos(x))} = 1 + cos(x)$$

Iki tarafi faktor ile carpalim

$$(1 + cos(x))y' - sin(x)y = 2x$$

Burada ilginc bir durum var, bu sonuc ornegin ta kendisi! Buradan anliyoruz ki ODE daha bastan beri parantez icinde gruplanabilir bir haldeymis. Yani

$$[(1 + cos(x))y]' = 2x$$

Iki tarafin entegralini alalim

$$(1 + cos(x))y = x^2$$

$$y = \frac{x^2 + C}{1 + cos(x)}$$

Diyelim ki problem bize bir baslangic sarti, $y(0) = 1$ verdi. O zaman

$$1 = \frac{c}{2}, c = 2$$

Bunu y formulune koyarsak cozumu tamamlamis oluruz.

k Tane Sabit Iceren Lineer ODE

Bu formda $p(x)$ bir sabit olacak, bu sabitli form oldukca onemli, banka hesaplari vs. gibi pek cok modelde karsimiza cikiyor.

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_e$$

Faktor? k'nin entegrali nedir? $\int kdt = kt$. O zaman

$$e^{kt}$$

Iki tarafi bununla carpalim.

$$(e^{kt}T)' = kT_e e^{kt}$$

Iki tarafin entegralini alalim

$$e^{kt}T = \int kT_e(t)e^{kt}dt + C$$

$$T = e^{-kt}\int kT_e(t)e^{kt}dt + Ce^{-kt}$$

Cogu insan, cogunlukla muhendislik literaturunde, ustteki cozumu tanimsiz (indefinite) entegral halinde birakmayi sevmez, cunku tanimsiz entegral .. tanimsizdir; baska bir deyisle tanimsiz bir entegral bir degil pek cok mumkun fonksiyonlari ayni anda temsil eder, ve bu tum mumkun fonksiyonlarin arasindaki fark sonsuz tane farkli olabilecek sabit sayidir (bu yuzden zaten baslangic sartini alarak somut bir C degeri bulmaya calisiriz).

Bu tur literaturde eger bir baslangic sarti var ise, mesela $T(0) = T_0$ gibi, bu kisiler tanimsiz entegrali su sekilde tanimli hale getirmeyi seviyorlar.

$$T = e^{-kt}\int_0^t kT_e(t_1)e^{kt_1}dt_1 + Ce^{-kt}$$

Yani alt sinir olarak sifir, ust sinir olarak t aliniyor. Yeni bir t_1 degiskeni koyulur, bu bir fuzuli (dummy) bir degiskendir, sadece yer tutmasi icin oraya konur. Bu neyi saglar? Zaman $t = 0$ oldugunda ne olduguna bakalim, o zaman toplamin sol tarafi tamamen yokoluyor, geriye sadece $C = T_0$ kaliyor, boylece hem C degerini T_0 olarak kullanabilmis oluruz, hem de tanimsiz entegrali tanimli hale getirmis oluruz.

Peki t sonsuza giderken, yani cok zaman gectikce, bu sisteme ne olur? $k > 0$ sartini unutmayalim, sonsuza gidilirken bu sefer toplamin sag tarafi sifira gider. Cunku eksi degerli bir ustel deger k hep arti kalacagina gore buyudukce e degerini sifira goturur. Bu sistemin istikrarli konum (steady state) cozumu sudur.

$$T = e^{-kt} \int_0^t kT_e(t_1)e^{kt_1}dt_1$$

Sifira giden kisim "gecici" bolum olarak adlandirilir.

Bu bize bir sey daha soyluyor. Sonsuza giderken sifira giden bolumde baslangic sarti vardi. Demek ki baslangic sartinin uzun zaman gectikcen sonra varilacak nokta konusunda hicbir onemi, etkisi yoktur. Nereden baslarsak baslayalim, bir sure sonra ayni noktaya variriz.