MIT OCW ODE 18.03 Ders 9

Sabit Katsayili (Coefficients) Lineer 2. Seviye ODE'ler

Standart formu su sekildedir

$y'' + Ay' + By = 0$

Sifira esit olmasi denklemin homojen oldugu anlamina gelir. A ve B sabittir. Bu denklemin en genel hali degildir, mesela A ya da B bagimsiz degiskenin (x, t, vs) bir fonksiyonu ise daha genel olabilir. Sag kisim 0 yerine bir fonksiyon ise o zaman denklem homojen olmayan (inhomogeneous) demektir. O tur denklemlerin fiziksel baglamda ayri bir anlami var tabii, o yuzden once homojen denklemler incelenmeye baslanir, sonra homojenlige olmayan duruma gecilir.

Genel cozumun soyle oldugunu farz edelim

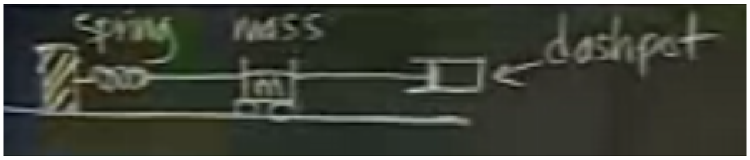
$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

Cozumde iki tane rasgele (arbitrary) sabit olmasinin sezgisel bir tarifi sudur: Denklem 2. derece, ve y'''den y'yi elde etmek icin iki kere entegre etmek gereklidir, ve o sirada entegrasyon sonucu sonuca ardi ardina iki tane rasgele sabit ekler, kabaca bir tarif boyledir. Niye ayri y_1 ve y_2? Mesela $c_1 = 0, c_2 = 1$ diyelim, o zaman y_2 bir cozum olmalidir, tersinden dusunursek y_1 ayni sekilde [bu konu hakkindaki ek bir ispat bu ders notlarinin altindaki ekler kisminda, ayrica iki cozumun altta islenecek karakteristik denklem ile alakasi var, oradan iki kok geliyor].

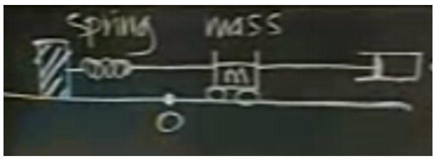
Bunu soylemekle problemin nihai cozumunu bulmayi (bir sekilde) iki tane cozum bulmaya indirgemis oluyoruz aslinda. Cunku iki cozum bulunca genel cozum y, o iki cozumun rasgele sabitlerle carpilip toplanmasindan mutesekkil oluyor. Baslangic degerleri ise c_1 ve c_2 degerleri uzerinden karsilanabilir, bu sabitler teoride rasgele olduklarina gore onlari uygun sekilde secerek baslangic sartlarini da tatmin edebiliriz.

Ornek

2. derece ODE icin klasik ornek bir yay (spring), kutle (mass) ve engelleyici (dashpot) sistemidir. Engelleyici denen bazi kapilarin ust, arka kisminda olan kapi sert kapanmasin diye onu yavaslatan mekanizmadir.



Eksen yatay oldugu icin ona x degiskenini atayalim, tabii bu yuzden ODE'deki bagimli degisken o olacak, yani ustteki y yerine x kullaniyoruz. Kafa karistirmasin diye vurguladik, cunku cogunlukla x bagimsiz degisken olarak kullanilir.



Devam edelim. Diyelim ki 0 ile isaretlenen yer bir denge noktasi. Yani bu noktada hem yayin, hem de engelleyicinin itme / cekme noktasi tatmin ediliyor durumda. Eger o noktadan daha sola gidersek, yay itmeye ugrasacak, saga gidersek cekmeye ugrasacak, tabii engelleyici de birseyler yapacak.

Denklem soyle:

$$\underbrace{mx''}_{Kuvvet} = -\underbrace{kx}_{Yay} - \underbrace{cx'}_{Engelleniyici}$$

mx'' sistemde ortadaki kutlenin uyguladigi kuvvettir, arti, eksi olmasi kuvvetin sag ya da sol yonunde oldugunu gosterir. Bu kuvvet Newton Kanunu'na gore ivme (ikinci turev, x'') ve kutlenin carpimidir. Unutmayalim, bagimsiz degisken t, o zaman x' hiz, x'' ivme.

Sistemdeki yay sadece kutleye "tepki" verir, kutle ne yapiyorsa tersini yapar. Eger kutle sola gelirse saga, saga gelirse sola dogru karsi kuvvet uygular, o yuzden ve esitligin saginda oldugu icin sistemde $-kx$ (ters isaret) ile belirtildi (eksiyi tekrar artiya cevirmek icin). Bu tepkinin alinan mesafe x ile orantili (bir sabitle carpilarak) olmasi Hooke Kanunu'ndan ileri geliyor.

Engelleyici ise yaya benziyor ama onun tepkisi hiz ile orantili, mesafe ile degil. Bu mekanizmaya sahip olan kapilari hatirlayin, cok hizli kapatmaya ugrasinca cok daha sert engelleme yaparlar. Bu tepki, yine ters isaretle $-cx'$ ama birinci tureve (hiz) icerecek sekilde temsil edilir.

Nihai denklem ise soyle

$mx'' + cx' + kx = 0$

$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$

ODE'yi cozmek icin 2 cozum bulmak gerekir.

2 cozumun birbirinden bagimsiz olmasi lazimdir, yani mesela y_1 bulunmussa, y_2 onun bir sabitle carpilmis hali olamaz. Cunku sabitlerle carpma isi denklemde zaten rasgele sabitlerin isi, iki cozum birbirinin kati ise o zaman genel cozumu yaratamayiz, cunku rasgele sabitlerin isi zaten yapilmis olur.

Cozum icin en basit, temel yontem tahmin etmektir. $y = e^{rt}$ cozumunu deneyelim deriz. Niye e^{rt}? Turevini, entegralini almak kolay. Yerine koyalim.

$r^2e^{rt} + Are^{rt} + Be^{rt} = 0$

Oyle bir r bulalim ki denklemin sol tarafi sifir olsun. e^{rt} hicbir zaman sifir olamayacagina gore sifirlik denklemin "geri kalaninda" demektir, e^{rt}'yi iptal edelim.

$r^2 + Ar + B = 0$

Bu bir karesel denklemdir! Cozumu lisede ogretilir. Bu denkleme ODE'nin (ya da yay / kutle sisteminin) karakteristik denklemi ismi de verilir.

1. Durum: kokler reel ve $r_1 \neq r_2$

Bu en basit, direk sonuc. O zaman nihai cozum

$y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$

Ornek

$y'' + 4y' + 3y = 0$

Karakteristik denklem

$r^2 + 4r + 3 = 0$

$(r + 3)(r + 1) = 0$

Genel cozum

$y = c_1e^{-3t} + c_2e^{-t}$

Baslangic sartlari

$y(0) = 1$

$y'(0) = 0$

Sartlar ne anlama geliyor? $t = 0$'da, baslangicta, kutle $x = 1$ noktasinda. Yani yay saga dogru gerilmis olacak. Ikinci sart sisteme baslangicta disaridan ek bir guc vermiyoruz demek, $x = 1$ noktasina getiriyoruz, ve birakiyoruz. Birakinca kutlenin sola, sonra saga, vs. gidip gelecegini tahmin edebiliriz.

Iki kosul var, cunku bulmamiz gereken iki sabit var.

Kosullarin ikincisi icin tureve ihtiyac var, turevi hesaplayalim

$y' = -3c_1 e^{-3t} + -c_2 e^{-t}$

$t = 0$ ise, y formulu (ilk kosul) $1 = c_1 + c_2$ olur. Ikinci kosul $0 = -3c_1 - c_2$.

Simdi elimizde beraber cozulecek (simultaneous) iki tane lineer denklem var. Bunlari cozmeyi de lisede ogrenmistik. Bu arada karesel denklemler, ve ustteki tur lineer denklemlerin cozumunun en onemli uygulama alani isledigimiz turden fiziksel problemler icindir. Lise cagi bizi bunlar icin hazirliyormus demek ki.

$c_1 = -1/2$

$c_2 = 3/2$

Cozum:

$$y = -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}$$

Peki bu cozum grafiksel olarak neye benzer? Iki ustel fonksiyonun kombinasyonunu elle cizmek pek kolay degildir, onun icin bilgisayari kullanmak daha iyi.

2. Durum: kokler kompleks

$r = a \pm bi$

Bu sekilde bir r cozume nasil etki eder? Cozum

$y = e^{(a+bi)t}$

seklinde olacaktir, fakat bu cozumun bizim icin hicbir anlami yok. Biz y'nin, x'in nasil davrandigini gormek istiyoruz. Su teori yardimimiza yetisiyor:

Teori: Eger $u+iv$ kompleks sayisi, $y''+Ay'+By=0$ reel ODE denkleminin kompleks cozumu ise o zaman u ve v reel cozum icin kullanilabilirler.

Ispat: Cozum olmak ne demek? Su denklemin dogru olmasi demek:

$$(u+iv)''+A(u+iv)'+B(u+iv)=0$$

Reel ve hayali kisimlarina ayiralim

$$\underbrace{u''+Au'+Bu}_{reel}+i\underbrace{(v''+Av'+Bv)}_{hayali}=0$$

Ustteki denklemin sol tarafinin sifira esit olmasinin tek yolu, hem reel, hem hayali bolumun sifira esit olmasidir. Onlarin sifira esit olmasi demek her iki denklemin de ana denklem olan $y''+Ay'+By=0$'a tipatip benzemeleri demektir. O zaman hem u, hem v ana ODE icin bir cozumdur.

Bu arada ispatta A ve B'nin reel olmasi zorunlulugunu dolayli olarak kullandik, cunku eger A ve B hayali olabilseydi, ustteki denklemdeki reel bolume reel diyemezdik, denklemin tamamini ustteki sekilde gruplayamazdik, ve hayali bir sayinin sifira esitlenebilmesi icin yuruttugumuz mantigi yurutemezdik. O zaman neresi reel neresi hayali olacakti?

Cozume donelim.

$$y=e^{(a+bi)t}$$

Ustel kompleks degerler ve cos, sin formuna gecisi hatirlayalim

$$e^{i\theta}=cos\ \theta+isin\ \theta$$

O zaman usttekini genisleterek devam edelim

$$y=e^{at}e^{ibt}$$

Sadece ikinci kisim cos, sin formuna cevirilebilir

$$e^{ibt}=cos(bt)+isin(bt)$$

Biraraya koyarsak

$$y=e^{at}(cos(bt)+isin(bt))$$

Reel bolum

$y = e^{at} cos(bt)$

Hayali bolum

$y = e^{at} sin(bt)$

O zaman cozum

$y = e^{at} \Big(c_1 \ cos(bt) + c_2 \ sin(bt) \Big)$

Bu fonksiyon neye benzer? Dikkat edelim, e^{at} yuksekligi (amplitude) kontrol ediyor, geri kalani iki sinusoidal salinimin kombinasyonu, farkli yukseligi ama ayni frekansi olan iki salinim. Bu yuzden onlarin toplami da bir sinusoidal salinim. Bu fonksiyon aslinda daha onceki bir derste bahsedilen bir trigonometrik esitligi kullanmak icin de uygun [hoca herhalde 8. dersteki esitlikten bahsediyor].

Simdi engelleyici / amortisor (damping) faktorunu degistirelim. Onceki ornekte amortisor zayifti, yayin etkisi daha fazlaydi, zaten o sebeple bir salinim gormustuk, bu kutleyi birakinca bir sure saga, sola sallanmasi demekti. Yeni denklem:

$y'' + 4y' + 5$

Karakteristik denklem

$r^2 + 4r + 5 = 0$

$r = -4 \pm \dfrac{\sqrt{-4}}{2} = -2 \pm i$

Cozum

$e^{(-2+i)t}$

Reel cozum

$e^{-2t} cos \ t \ , \ e^{-2t} sin \ t$

$y = e^{-2t}(c_1 cos \ t + c_2 sin \ t)$

Baslangic sartlari yine ayni olsun

$y(0) = 1$

$y'(0) = 0$

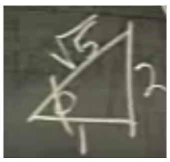
Hesabi yaptiktan sonra sonuc

$y = e^{-2t}(cos\ t + 2sin\ t)$

Trigonometrik esitligi kullanalim

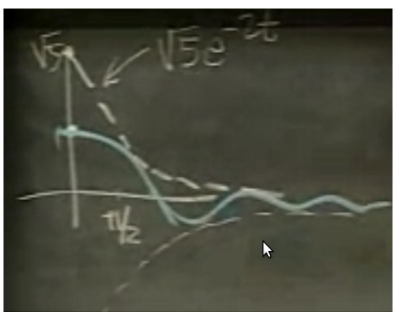
$= \sqrt{5}e^{-2t}cos(t - \phi)$

$\sqrt{5}$ nasil bulundu? Onceki dersten su ucgeni hatirlayalim



O zaman $\phi \approx 70^o \pm 5$

Cozumun grafigini cizersek



Bu yetersiz amortisorlu (underdamped) durumudur.

Simdi amortisorun ne az, ne de fazla oldugu duruma bakalim. Burada amortisor "tam yerinde", bu kosula kritik amortisorlu sart (critically damped) deniyor. Karakteristik denklemdeki kokler ayri ve reel degil, kompleks degil. Reel ama birbirine esit, diyelim ki $r = -a$.

$(r + a)^2 = 0$

$r^2 + 2ar + a^2 = 0$

ODE

$y'' + 2ay' + a^2y = 0$

Yani yay sabiti ve amortisor sabiti arasinda bir iliski var.

Fakat burada bir problem var. Cozumlerden biri e^{-at} evet, ama bu elimdeki tek cozum. 2. derece ODE icin iki cozum lazim.

Gerekli ikinci cozumu elde etmenin degisik yollari var. Bir tanesi soyle:

Eger $y'' + py' + qy = 0$ icin bir y_1 cozumu biliyorsak, $y = y_1 u$ seklinde ikinci bir cozum de muhakkak vardir. u'yu nasil hesaplayabilecegimizi gorelim.

Elimizde $y = e^{-at}$ var. $y'' + 2ay' + a^2 y = 0$ icin bir u bulacagiz, yani su formda bir cozum arayacagiz

$y = e^{-at}u$

Birinci turev

$y' = -ae^{-at}u + e^{-at}u'$

Bunun bir kere daha turevini alalim

$a^2 e^{-at}u - 2ae^{-at}u' + e^{-at}u''$

Ustteki uc denklemden en alttakini 1 ile carpariz (yani degismez), ortadakini $2a$ ile caprariz, bastakini a^2 ile carpariz. Bu carpimlari toplariz, esitligin sol tarafinda 0 elde ederiz. Esitligin sag tarafindaki neredeyse her terim toplanarak sifir hale gelir, sadece $e^{-at}u''$ geriye kalir. O zaman sunu soyleyebiliriz:

$e^{-at} = 0$

Demek ki

$u'' = 0$

Bu ne demektir?

$u = c_1 t + c_2$

Oyle degil mi? Ikinci turevi sifir olan sey nedir? Ustteki form'daki bir formuldur, c_1 ve c_2 rasgele iki sabittir. Birinci turevi alirken c_2 yokolacakti c_1 kalacakti, ikinciyi alirken c_1 yokolacakti.

Bu sonuc bana bir suru cozum bulma imkani saglar, ama sadece tek basina t'yi bile kullansam olur, cunku bana e^{-at}'den farkli sadece bir tane daha cozum lazim. O zaman ikinci cozum su olabilir:

$y_2 = e^{-at} \cdot t$

Kritik amortisor durumunun cozumu de budur.

$* * *$

Ekler

Teori

Eger $y = f_1(x)$ ve $y = f_2(x)$ su diferansiyel denklemin cozumu ise

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + .. + a_n y = 0$$

O zaman $y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ te ayni diferansiyel denklemin bir cozumudur, ki c_1 ve c_2 herhangi bir (arbitrary) sabit degerler olabilirler.

Ispat

Eger f_1 bir cozum ise, diferansiyel denklemde y yerine koyabilmemiz gerekir, f_2 ve $c_1 f_1 + c_2 f_2$, ayni sekilde. Hepsine bakalim.

$$\frac{d^n f_1}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} f_1}{dx^{n-1}} + .. + a_n f_1 = 0$$

$$\frac{d^n f_2}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} f_2}{dx^{n-1}} + .. + a_n f_2 = 0$$

$$\frac{d^n (c_1 f_1 + c_2 f_2)}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} (c_1 f_1 + c_2 f_2)}{dx^{n-1}} + .. + a_n (c_1 f_1 + c_2 f_2) = 0$$

Sonuncu formul icin c_1 ve c_2'leri disari cekip gruplamayi onlara gore yaparsak

$$c_1 \left[\frac{d^n f_1}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} f_1}{dx^{n-1}} + .. + a_n f_1 \right] + c_2 \left[\frac{d^n f_2}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} f_2}{dx^{n-1}} + .. + a_n f_2 \right]$$

Buyuk parantezler icindeki degerler diferansiyel denklemin f_1 ve f_2 kullanilarak acilmis hali degil mi? O zaman o degerler sifir. Yani

$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0$

Bu deger de tabii ki sifira esit.

$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$

ve bu sifir sonucu, ana diferansiyel denklemin sonucuyla ayni. O zaman ispat tamamlanmis demektir.

Kaynaklar

Differential Equations, Hari Kishnan, sf. 118