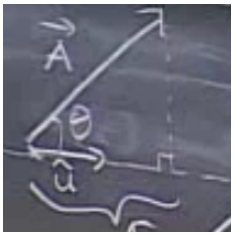
MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 2

Onceki derste iki uygulama gorduk. Ucuncu bir uygulama bir $\vec{A}$ vektorunun bir birim vektor $\vec{u}$ yonundeki bilesenlerini / parcalarinin (components) hesaplanmasidir.



Ustteki sekilde $\vec{A}$'nin $\vec{u}$ yonundeki "yansimasini" goruyoruz ve bu yansima $\vec{A}$'nin $\vec{u}$ yonundeki bilesenidir, buyuklugudur.

Aradaki açı θ ise ve ucgen dik ise, o zaman bu yansima

$$|\vec{A}|cos(\theta)$$

olarak hesaplanacaktir. Bu formulun ilk hali aslinda

$$|\vec{A}||\vec{u}|cos(\theta)$$

fakat $\vec{u}$ birim vektor olduguna gore, uzunlugu 1, o zaman bu buyukluk carpimdan atilabilir. Ustteki formul ayni zamanda bir noktasal carpim, $\vec{A} \cdot \vec{u}$.

Eger bir vektorun mesela $\hat{i}$ yonundeki yansimasini almak isteseydik,

$$\vec{A} \cdot \hat{i}$$

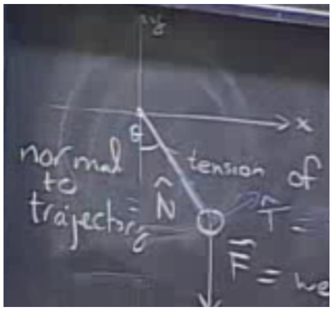
kullanirdik, bu da

$$\vec{A} \cdot < 1, 0, 0 >$$

olurdu. Bu carpim x yonunde 1 ile carpar diger tum eksenleri sifirlar, yani diger bir degisle $\vec{A}$'nin x yonundeki bilesenini hesaplamis oluruz. Bu arada $\hat{i}$ tabii ki bir birim vektor. Uzunlugu 1.

Uygulama

Fizikte, yuvarlak bir sekilde donebilen bir sarkac problemini dusunelim. Bu sistemi analiz etmek icin Newton Kanunu, mekanik, vs. kullanmaniz gerekir tabii ki, fakat vektorler geometrik olarak bu sistemi anlamak icin cok faydalidir.



Bu sarkacin ileri geri sallanmasinin sebebi ustte takip edilen yuvarlak yoldur. Analiz icin x, y yonundeki bilesenlere bakmak yerine belki de resimdeki iki birim vektor yonune bakmamiz lazim, ki bu vektorlerden biri takip edilen yola teget yonu gosteren $\vec{T}$, digeri yuvarlak tanjantina dik olan $\vec{N}$. O zaman agirligi temsil eden $\vec{F}$'in bu iki vektor yonundeki bilesenlerine bakabiliriz.

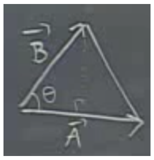
Resimde ipin gerginligi (tension of string) $\vec{N}$ yonunde, bu yon ip gerginligi yonu, $\vec{F}$'in $\vec{N}$ yonundeki bileseni gerginligi yaratan faktordur. $\vec{F}$'in tegetlik yani $\vec{T}$ yonundeki bileseni ise ileri geri hareketi saglayan faktordur.

Muhakkak sarkacin y ekseni ile olusturdugu bir açı θ uzerinden bir suru cos, sin terimleri iceren denklemler ortaya cikartabilirdiniz, bu ilginc olurdu, fakat eger daha kisa bir yolu takip etmek istiyorsak, noktasal carpim kullaniriz.

Vektorler baglaminda anlamamiz gereken bir diger kavram, alan kavrami. Diyelim ki elimizde bir pentagon sekli var. Bu seklin alanini vektorler kullanarak hesaplayabilir miydik?

Evet hesaplayabiliriz. Problemi basitlestirelim. Pentagonu ucgenlere ayiralim.

sonra bu alanlari toplayalim. Ucgen alanini nasil hesaplariz? Soyle bir ucgen dusunelim



Bu ucgenin alani

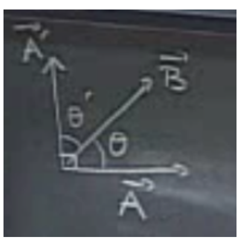
$\frac{1}{2}|\vec{A}||\vec{B}|sin(\theta)$

Bu formul *cos* iceren diger formulumuze benziyor. Bundan istifade edebiliriz belki. Once $cos(\theta)$'yi buluruz, sonra $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$ esitligini kullanarak $sin(\theta)$'yi buluruz.

Fakat bu gereginden fazla is yaratir. Daha kolay bir yontem var. Bu yontem icin determinantlar kullanmak lazim.

Devam edelim: Madem açılarin cos degerlerini bulmayi biliyoruz, belki oyle bir diger açı bulmaliyiz ki o açının cos degeri bizim aradigimiz açının sin degeri olsun, cunku alan icin sin gerekiyor, ama hesaplayabildigimiz cos.

Birbirini tamamlayici açılar (complemantary angles) kavramini biliyoruz herhalde.



Diyelim ki elimizde $\vec{A}$ var, onu 90^o cevirip ustteki hale getiriyoruz, yeni vektore $\vec{A'}$ diyelim. O vektor ile $\vec{B}$ arasindaki açıya da θ' diyelim.

$\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$

$cos(\theta') = sin(\theta)$

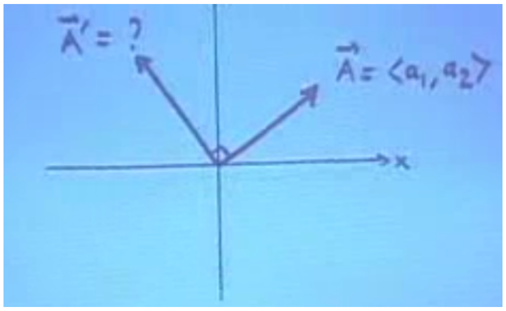
Bu demektir ki

$|\vec{A}||\vec{B}|sin\theta = |\vec{A'}||\vec{B}|cos\theta'$

$|\vec{A}|$ yerine $|\vec{A'}|$ koymakla hicbir sey degistirmiyorum cunku bu vektorlerin yonleri degisik olsa da buyuklukleri ayni. Devam edelim, ustteki formulde sag tarafi basitlestirirsek

$= \vec{A'} \cdot \vec{B}$

Bu temiz bir formul. Tek eksik, $\vec{A'}$'nin ne oldugunu hala hesaplamadik. Fakat bunu yapmak o kadar zor degil. Bunun icin $\vec{A}$'yi cevirebilmemiz lazim. Alttaki resme bakalim,

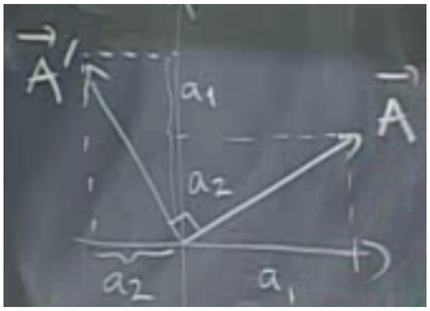


acaba $\vec{A'}$ ne olur? Secenekler [bu hoca boyle ufak sinavlari seviyor, faydali aslinda, bu sinavlara gelince siz de cevabini vermeye ugrasin].

1. $< a_2, a_1 >$
2. $< a_2, -a_1 >$
3. $< -a_2, a_1 >$
4. $< -a_1, a_2 >$
5. Hicbiri

Dogru cevap: 3.

Bu nasil oldu? Alttaki resme bakalim



$\vec{A}$'nin etrafinda bir dikdortgen hayal edelim, ve dikdortgeni icindeki vektor ile beraber alip sola dogru ceviriyoruz. O zaman uzun kenar artik yukari dogru bakiyor, yani a_1 yukari bakiyor, a_2 nin de yeri degisiyor, yani bu buyuklukler yer degistiriyorlar. Ayrica a_2 artik ters yone gittigi icin isareti degisiyor. Normalde

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

vardi, ustteki cizimden hareketle ise

$$\vec{A'} \cdot \vec{B} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

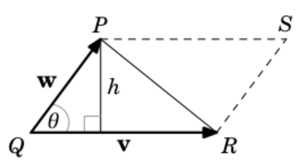
elde ediyoruz. Bu formul determinantlardan tanidik gelebilecek bir formul,

$$= det(\vec{A}, \vec{B})$$

$\vec{A}, \vec{B}$ ile bu vektorleri yanyana kolonlara koydugumuz su formu dusunuyoruz ve onun determinantini aliyoruz

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Bu hesabin sonucu kenarlari $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ olan bir paralelogramin alanidir. Tabii paralelogram icindeki ucgeni istiyorsak bu sonucu ikiye boleriz. Ucgen hesabinin icinde *sin* iceren formul oldugunu nereden biliyoruz? Sekle bakalim



Yukseklik $h = |w| sin\theta$'dir. Alan ise

$$Alan \;= \frac{1}{2}|v||w|sin\theta$$

Not: Alan pozitif bir seydir, fakat $a_1b_2 - a_2b_1$'in kesinlikle pozitif cikmasinin garantisi yoktur. Eksi degerli terimler buyuyup arti degerlileri asabilirler. O zaman ifadelerimizin tam dogru olmasi icin ustteki determinant hesabi -alan ya da +alan degerine esittir demek lazim.

Ilerleyelim

Uzayda (3 boyutta, kordinat sisteminde, vs.) yapabilecegimiz iki tur hesap var. Bunlar objelerin ya dis alan hesabi (surfaces) ya da objelerin hacim (volume) hesabi. Daha kolay olanla baslayalim, hacim hesabi.

Iddia ediyorum ki bu is icin uzay ortaminda kullanilabilecek bir tur determinant var. Elimizde uc vektor $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ var ve bu vektorlerin determinanti

$$det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

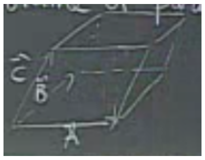
$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ustteki gibi 2 x 2 determinantlarin acilimi biliyoruz zaten. O acilimi ustteki formul icin yapinca elimize 6 tane terim gecmis olacak. Ustteki formulu, yani bir 3 x 3 determinantin 2 x 2 acilimini hatirlamanin kisa yolu nedir? Ustte kullandigimiz 1. satira gore acilim. 1. satirda sirayla gideriz, a_1'e bakariz, onun oldugu satiri ve kolonu (zihnimizde) sileriz ve geriye kalan 2 x 2 determinanti hemen hesaplariz. Boyle devam ederiz. Ayrica ikinci 2 x 2 determinantin onunde bir eksi isareti olduguna dikkat. Bunun niye oldugunun matematiksel sebebine burada girmeyecegiz.

Peki bu formul bize ne saglayacak? Su teoriyi saglayacak:

Teori

Geometriksel olarak $det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) \; = \; \pm$ paralelipipe'in hacmi. Paralelipipe nedir? Bu obje bir nevi paralelogramin 3 boyuttaki hali. Alttaki gibi



Capraz Carpim (Cross Product)

Tanim

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

seklindedir ve bu islemin sonucu bir vektordur. Bu noktasal carpimdan farkli, o sonuc bir tek sayiydi. Burada sonuc bir vektor.

Fakat bu determinant biraz garip. Icindeki elementler $\hat{i}$, $\hat{j}$ gibi birim vektorler. Bu tur determinantin ogeleri tek sayilar degil midir? Ama aslinda amac $\hat{i}$'yi oldugu gibi hesaba dahil etmek degil, bu bir notasyon sadece, boylece acilimi yaptigimizda

$$= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$'nin nereye gidecegini hatirlamak kolay oluyor.

Teoriler

1)

$|\vec{A} \times \vec{B}|$ bu vektorlerin olusturdugu paralelograminalanina esittir. Yani alan hesabi icin capraz carpimi yapariz, bir vektor elde ederiz, sonra bu vektorun uzunlugunu buluruz (tum ogelerinin karesini alip toplariz, karekok aliriz, vs). Burada arti, eksi ile ugrasmamiza gerek yok cunku bir vektorun buyuklugu hep pozitiftir.

Yani dersin ilk kismiyla baglamak gerekirse, aslinda $det(\vec{A}, \vec{B}) = |\vec{A} \times \vec{B}|$ demis oluyoruz. Kontrol edelim. Capraz carpim soyle

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Determinant formulunu hatirlayalim

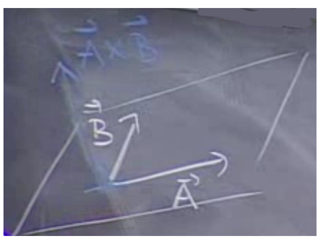
$= det(\vec{A}, \vec{B})$

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

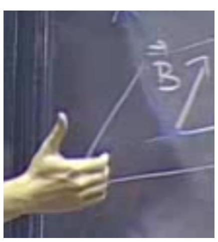
Bu formulde sadece a_1, a_2, b_1, b_2 var, o zaman capraz carpimi o hale getirmek icin $a_3 = 0, b_3 = 0$ kullanabiliriz, cunku iki vektoru her zaman alip xy duzlemi uzerine koyabiliriz [1,2]. Acilimi yaptimiz zaman determinant sonucu ile ayni seyi elde ettigimizi goruruz.

2)

Sadece buyukluk degil, $\vec{A} \times \vec{B}$ degerinin yonu de cok ilginc. $dir(\vec{A} \times \vec{B})$ paralelogramin uzerinde oldugu duzleme tam dik yonu gosteriyor. Yani $\vec{A} \times \vec{B}$ ikisinin ciktigi noktadan, bu iki vektore de dik olan 3. bir vektoru yaratir

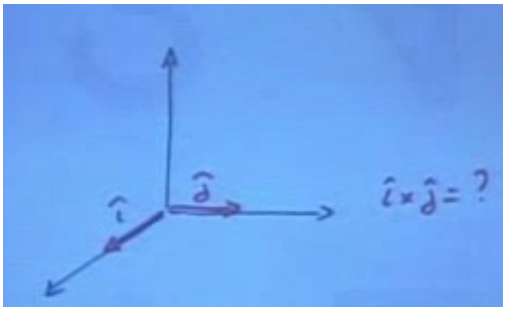


Peki $\vec{A} \times \vec{B}$ hesabinin hangi yonde bir vektor yaratacagini nereden bilecegiz? Sag el kuralini kullanarak.



Bu kurala gore el $\vec{A}$ yonunu gosterecek sekilde tutulur, parmaklar bukulerek $\vec{B}$ yonune cevirilir. Bu haldeyken basparmak kaldirilir, ve bu basparmak $\vec{A} \times \vec{B}$'nin yonunu gosterecektir.

Soru



Secenekler

1. $\hat{k}$
2. $-\hat{k}$
3. 1
4. 0
5. Bilmiyorum

Dogru cevap?

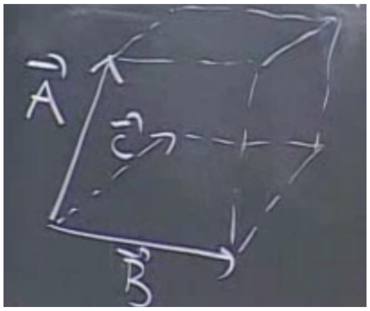
Cevap 1. Yani $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$

Kontrol edelim.

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{\imath} - 0\hat{\jmath} + 1\hat{k} = \hat{k}$$

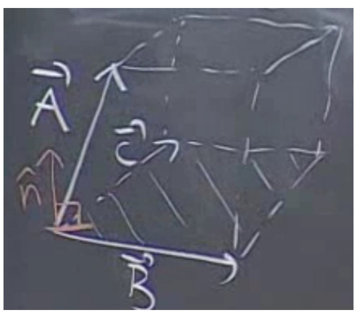
Hakikaten de sonuc sag el kuralini kullansak basparmagimizin gosterecegi yon olan $\hat{k}$'yi gosteriyor.

Simdi hacim hesabina geri donelim. Determinant kullanmadan nasil hacim hesabi yaparim?



Parallelipipe'nin hacminin taban alani carpi yuksekligi oldugunu biliyoruz herhalde. Alan nedir? Tabanin kenari olan $\vec{B}$, ve $\vec{C}$'yi kullaniriz, onlarin capraz carpimini aliriz, yani $\vec{B} \times \vec{C}$. Fakat capraz carpimin sonucunun bir baska vektor oldugunu soylemistik, o zaman o vektorun sadece buyuklugunu kullaniriz, $|\vec{B} \times \vec{C}|$.

Peki yuksekligi nasil hesaplariz? Yuksekligi en azindan yonsel olarak, bir birim vektor olarak bildigimizi varsayalim, ve bu birim vektor $\vec{n}$ olsun. O zaman $\vec{A} \cdot \vec{n}$ yuksekligi hesaplayabilirdik. Soyle.



Peki $\vec{n}$'i nasil hesaplariz? $\vec{B} \times \vec{C}$ yukseklik yonunde ucuncu bir vektor uretmez mi? Bu vektor $\vec{n}$ ile ayni yonde olmaz mi? O zaman $\vec{B} \times \vec{C}$'yi kullanirim. Ama bu carpim birimsel degildir, o zaman onu kendi buyuklugu ile bolerim, ve istedigim birim vektoru elde ederim.

$$\vec{n} = \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{|\vec{B} \times \vec{C}|}$$

O zaman

$$|\vec{B} \times \vec{C}| \vec{A} \cdot \vec{n}$$

$= |\vec{B} \times \vec{C}| \vec{A} \cdot \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{|\vec{B} \times \vec{C}|}$

$= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$

Isin ilginci $det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$'nin ustteki formulle ayni sonucu vermesidir.

Problem 1E-1

d)

Eksenler x, y, z uzerinde $x = a, y = b, z = c$ noktalarini kesin duzlemin $Ax + By + Cz = 1$ formundaki formulu.

Cevap

Duzlemin uzerindeki iki vektoru kullanrak onlara dik olan ucuncuyu bulma teknigini kullanalim, boylece duzleme dik olan normali de bulmus oluruz. Duzlem uzerindeki iki vektoru, duzlem uzerindeki uc noktayi kullanarak bulabiliriz. Cikis noktasi olarak x eksenini kullanalim, o noktanin kordinati $(a, 0, 0)$. Bu baslangic noktasindan $(0, 0, c)$'a ve $(0, b, 0)$ noktasina giden iki vektor bulunabilir. Vektorler cikartma islemi kullanilarak bulunur

$\vec{A} = (a, 0, 0) - (0, 0, c) =< a, 0, -c >$

$\vec{B} = (a, 0, 0) - (0, b, 0) =< a, -b, 0 >$

Capraz carpim

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & 0 & -c \\ a & -b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -c \\ -b & 0 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a & -c \\ a & 0 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & -b \end{vmatrix} \hat{k}$$

$= -cb\hat{i} + -ca\hat{j} - ab\hat{k}$

O zaman duzlem

$-cbX + -caY - abZ = d$

d'yi hesaplamak icin bilinen bir noktayi bu formule sokariz, mesela $(a,0,0)$,

$-cba = d$

O zaman duzlem

$-cbX + -caY - abZ = -cba$

ya da

$cbX + caY + abZ = cba$

Problem esitligin sag tarafinda 1 olsun diyor, iki tarafi cba'ya bolersek

$\frac{1}{a}X + \frac{1}{b}Y + \frac{1}{c}Z = 1$

Problem 1E-1

e)

$P = (1,0,1)$ ve $Q = (0,1,1)$ noktalarindan gecen $\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ vektorune paralel olan duzlem.

Cevap

Bir duzlemin normali, o duzleme paralel olan diger vektorlere diktir. Bunu nasil kullanabiliriz? Daha once duzlem uzerindeki iki vektore dik olan ucuncu vektoru bulduk. Burada duzleme paralel olan bir ikinci vektor var, fakat bu vektoru de ayni sekilde kullanabiliriz. Sonuc $x + y = 1$ cikacak.

Kaynaklar

[1] Anton, Rorres, Elementary Linear Algebra with Applications, 9th Edition

[2] Michael Corral, Vector Calculus, sf. 21