

MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 5

Bir cizginin formülünü iki düzlemin kesişimi olarak gördük, fakat bu şekilde bir tanım cogenlukla bir cizgiyi tanımlamak için en rahat / uygun yol değildir, çünkü elinizde bazı denklemler var, bunları çözmekle uğrasmak lazım, vs.

Soyle bir yöntem daha iyi olmaz mı? Cizgi üzerinde bir nokta hayal edelim, ve bu noktanın, her zaman adimında, cizgimizin olduğu yerlerden geçtiğini düşünelim. Bu tür denklemlere parametrik denklem ismi veriliyor.

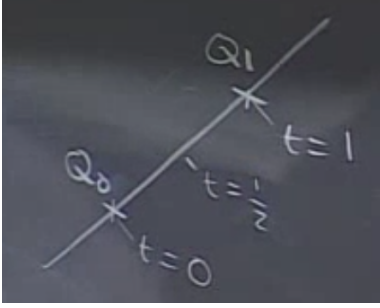
Örnek

Cizgi üzerinde iki nokta verelim.

$$Q_0 = (-1, 2, 2)$$

$$Q_1 = (1, 3, -1)$$

Güzel, bu iki nokta var ama ötekilerini nasıl tanımlarız? Bu iki noktalarının arasında, sonrasında, öncesinde olan tüm noktalar da cizgiye dahildir.



Zaman aralıklarını öyle düşünelim ki zaman indeksi sıfır ($t = 0$) noktasında, cizgi Q_0 üzerinde, tek birim adım atıldığında ($t = 1$) Q_1 üzerinde, gibi. O zaman yarım birim zamanda tam iki nokta ortasında.

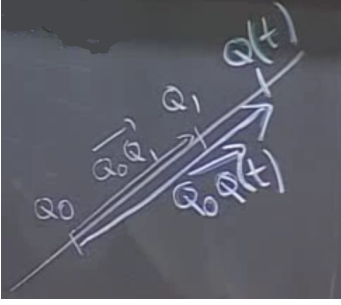
Boylece cizgiyi temsil etmenin yolu onu t bazında hareket eden noktanın geçtiği yerler olarak tanımlamak. Bu temsilin en basit hali eğer hareket sabit hızda olursa olur.

t anındaki pozisyon $Q(t)$ nedir?

Sorunun cevabını söyle vermeye başlayabiliriz: $Q_0\vec{Q}(t)$ vektörü $Q_0\vec{Q}_1$ bir-biriyle ortalıdır. Bu orantı neye esittir?

Bu oran t 'ye esittir. O zaman

$$Q_0 \vec{Q}(t) = t Q_0 \vec{Q}_1$$



O zaman iddia ediyorum ki bu formulu kullanarak ornegimizdeki hareket eden noktanin yer formulunu bulabilirim.

$$Q_0 \vec{Q}(t) = t \langle 2, 1, -3 \rangle$$

Simdi cizgi uzerinde hareket eden noktanin formulu $Q(t)$ 'yi su sekilde temsil edelim

$$Q(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$$

O zaman

$$x(t) + 1 = t^2$$

$$y(t) - 2 = t$$

$$z(t) - 2 = -3t$$

Usttekiler, alttaki su formun acilimindan ibaret aslinda

$$Q(t) = Q_0 + t Q_0 \vec{Q}_1$$

Ustteki uc formül bu derste gordugumuz ilk parametrik cizgi formulu. Formulun parcalari olan $x(t), y(t), z(t)$ sadece t 'nin fonksiyonudurlar, ve hep t ile bir katsayinin carpimi + bir sabit formundadirlar. t 'nin katsayilari cizgi uzerindeki vektor hakkında bilgi verir, ve sabitler ise $t = 0$ aninda nerede oldugumuzu gosteren baslangic degerleridirler.

Uygulama - Bir Duzlem ile Kesisme

Duzlem $x + 2y + 4z = 7$. Cizgi biraz onceki formül olsun. Kesisme var midir,

var ise nerededir?

Önce su soruyu soralım kendimize. $x + 2y + 4z = 7$ düzlemine göre, $Q_0 = (-1, 2, 2)$ ve $Q_1 = (1, 3, -1)$ noktaları düzlemin

1. Aynı tarafında
2. Farklı taraflarında
3. Bir tanesi düzlem üzerinde
4. Karar veremiyorum

Cevaplayın.

Q_0 ve Q_1 noktalarını düzlem formülünün sol tarafına sokarız. Q_0 için sonuç > 7 , düzlem üzerinde değil, Q_1 için sonuç < 7 , yine düzlem üzerinde değil. Peki noktalar düzlemin hangi tarafında? Ters tarafında, çünkü biri < 7 , diğeri > 7 sonuç verdi. Bir düzlem uzayı iki yarı-parçaya (halfspace) ayırır ve noktalar bu ayrı parçalardadırlar. Doğru cevap 2.

Uygulamamızda cevaplanmayan bir soru daha var. Kesişme noktası neresi? $Q(t)$ nedir? Soyle

$$\begin{aligned} x(t) + 2y(t) + 4z(t) \\ = (-1 + 2t) + 2(2 + t) + 4(2 - 3t) \end{aligned}$$

Basitleştirelim

$$= -8t + 11$$

Bu formülü 7 ile karşılaştıralım çünkü $Q(t)$ nin düzlem üzerinde olduğu an $-8t + 11 = 7$ olduğu andır. Cebirsel olarak t 'yi elde edebiliriz, sonuç $t = 1/2$. Bu değeri $Q(t)$ 'ye koyarsak

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Kesişim noktası eşitliğin sağındaki değerdir.

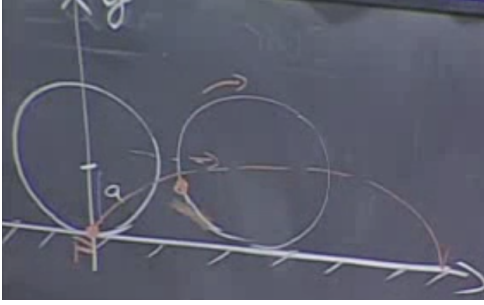
Yani eğer çizginin parametrik denklemini biliyorsak, onu düzlem formülüne sokarız, ve kesişimin hangi noktada olduğunu hemen hesaplayabiliriz.

Simdiye kadar gorduklerimizden parametrik denklemlerin cizgileri temsil etmek icin iyi bir yontem olduklari belli olmustur herhalde. Bunun otesinde parametrik denklemler uzaydaki herhangi bir egri (curve), herhangi bir gidisati, yolu (trajectory) temsil etme kabiliyetine de sahiptir.

Genel baglamda soylemek gerekirse, parametrik denklemleri uzayda icinde ya duzlem üzerindeki herhangi (arbitrary) bir hareketi temsil etmek icin kullanabiliriz.

Cycloid (Yuvarlanma Egrisi)

a yari capindaki bir tekerlek yerde (x-ekseninde) donerek ilerliyor, P bu tekerlegin dis ceperinde (rim) bir nokta, baslangic noktası 0 üzerinde. Ne olur? Daha detayli olarak sormak gerekirse P noktasinin hareketini t 'nin bir fonksiyonu $x(t), y(t)$ olarak hesaplayabilir miyiz?

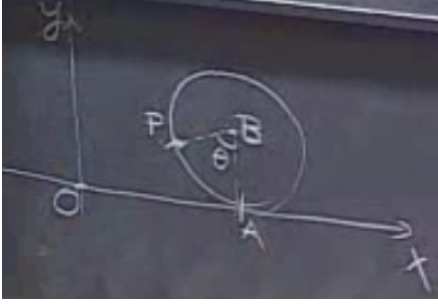


[x-ekseni biraz saga yatik cikmis ama bu video kamerasinin acisi yuzunden]. Bu ornegi bir bisikletin tekerligine takilmis bir isigin, bisiklet gece giderken ortaya cikartabilecegi goruntuyu dusunurek te hayal edebiliriz. Yani hem donus hareketi var, hem de yatay olarak duz bir gidis hareketi var.

Bu P noktasinin gidis yolunu hesaplamak icin tekerlegin ne kadar hizli dondugu onemli mi? Hayir degil. Yavas ta hizli da dondursek, P ayni noktalar-dan gececektir.

Bu problemde en onemli faktor zaman degil, mesafe, tekerlegin ne kadar mesafe katettigi. Ya da daha bile iyisi, mesafe ile donus birbirine baglan-tili olduguna gore, ve problemdeki en cetretil, girift olus donme (rotation) olduguna icin, belki de tekerlegin ne kadar dondugunu gosteren bir aci degeri, bu buyuklugu kullanirsak belki daha faydali olacak. Pek cok degisik temsil yontemi olabilir, fakat aciya gore parametrize edersek en temiz formulu elde etmek mumkun olur. O zaman $x(t), y(t)$ yerine $x(\theta), y(\theta)$ kullanalim.

Yani $x(\theta), y(\theta)$ ile tekerlegın ne kadar donmus olduğunu belirleyen θ aci uzerinden tanimli bir fonksiyon kullanalim.



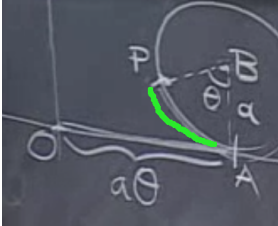
Tekerlegın nerede olduğu bilgisini ise \vec{OP} vektoru ile temsil edebilirim. Buradaki tek problem vektor \vec{OP} hakkında hic bir sey bilmiyorum. Ama belki daha basit vektorler hakkında bir seyler biliyorumdur. Mesela \vec{AB} basit gibi duruyor, ayni sekilde \vec{OA} fena degil, \vec{BP} ayni sekilde. Peki \vec{OP} 'yi bu daha basit vektorler uzerinden temsil edemez miyim? Edebilirim.

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BP}$$

O zaman bu basit vektorleri hesaplayabilirsem, daha zor olan \vec{OP} 'yi de hesaplarım.

$$\vec{OA} = \langle a\theta, 0 \rangle$$

Niye? Vektorun y bileseni sifir, bu bariz.



Peki niye $a\theta$? Eger kayma, bosta donme gibi seyler yok ise, bu tekerlegın dis cemberinin katettigi donus / geldiği nokta (ustte yesil ile isaretli), tekerlegın gittigi yer mesafesi ile aynidir. Bu yuzeylerden birinin kavisli, digerinin duz olmasi bu gerceği degistirmez. Yesil ile isaretli dis cember parcasinin $a\theta$ ile hesaplandigini basit matematikten biliyoruz (eger θ radyan biriminde ise tabii, zaten bu sebeple -isleri basitlestirdigi icin- matematikte hep radyan birimi kullanilir).

\vec{AB} daha kolay, x bileşeni sıfır, y yönüne yaricap kadar gitmiş.

$$\vec{AB} = \langle 0, a \rangle$$

En son vektor \vec{BP} biraz daha zor. Bu vektor hakkında neler biliyoruz? Büyüklüğünü yani $|\vec{BP}|$ 'yi biliyoruz ve dikey eksen ile θ kadar bir açı oluşturduğunu biliyoruz. Daha yakından bakarsak



$$\vec{BP} = \langle -a\sin(\theta), -a\cos(\theta) \rangle$$

Simdi ekleme asamasina geldik.

$$\vec{OP} = \langle a\theta - a\sin(\theta), a - a\cos(\theta) \rangle$$

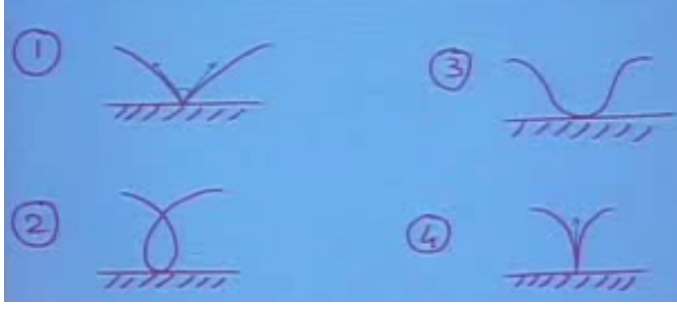
Ve nihayet cevabimizi bulduk. Cunku

$$\vec{OP} = \langle \underbrace{a\theta - a\sin(\theta)}_{x(\theta)}, \underbrace{a - a\cos(\theta)}_{y(\theta)} \rangle$$

Simdi gizemli bir noktayi inceleyelim. Tekerlegin donmesi sonucu takip edilen noktanin yere degip, tekrar yukari ciktiği anda, olusan takip cizgisi ne sekildedir? Bilgisayar grafigine bakalim;



Sekil sunlardan hangisidir?



Bu cevabi vermenin en iyi yolu, formullerimizi kullanmak.

Formulleri basitlestirmek icin eger $a = 1$ alirsak,

$$x(\theta) = \theta - \sin(\theta)$$

$$y(\theta) = 1 - \cos(\theta)$$

Simdi yaklasiksal olarak dusunmeye ugrasalim. Cok kucuk θ icin $\sin(\theta) \approx \theta$ ve $\cos(\theta) \approx 1$. Bunlari $x(\theta), y(\theta)$ icinde kullanirsak, biri 0, oteki 1 cika-cak, bunlar pek net sonuclar degiller. Demek ki bize daha iyi yaklasiksal (approximate) teknikler gerekiyor.

Tek Degiskenli Calculus dersinde Taylor Yaklasiksallamasi ogretilir.

Taylor Yaklasiksallamasi

Kucuk t degerleri icin

$$f(t) \approx f(0)$$

Bu kabaca bir yaklasiksallamadir tabii ki. Biraz daha iyisi icin, eger t kadar degisim olursa, bu degisimin su sekilde eklenebilecegini farzederiz.

$$f(t) \approx f(0) + tf'(0)$$

Biraz daha iyisi icin

$$f(t) \approx f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0)$$

Buna istedigimiz kadar devam edebiliriz

$$f(t) \approx f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0) + \frac{t^3}{6}f'''(0)$$

Bu teknigi simdi kullanalim

$$\sin(\theta) \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$$

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

O zaman

$$x(\theta) \approx \theta - (\theta - \frac{\theta^3}{6}) \approx \frac{\theta^3}{6}$$

$$y(\theta) \approx 1 - (1 - \frac{\theta^2}{2}) \approx \frac{\theta^2}{2}$$

Bu degerlerden hangisi θ kucuk iken daha buyuk? $y(\theta)$. Yani $|x| \ll |y|$. Daha net bir sayi icin bu iki buyuklugun oranina bakabiliriz, bu bize bir egim bilgisi verecektir.

$$\frac{y}{x} = \frac{\theta^3/6}{\theta^2/2} = \frac{3}{\theta} \rightarrow \infty, \quad \theta \rightarrow 0$$

Yani θ sifira yaklasirken egim neredeyse sonsuz, takip ettigimiz nokta saga, sola neredeyse hic hareket etmiyor, neredeyse tum hareket dikey sekilde. Demek ki ustte 4. sekil dogru cevap.

Problem 1E-5

$(1, 1, -1)$ noktasindan gecen cizgi $x + 2y - z = 3$ duzlemine diktir. Bu cizgi $2x - y + z = 1$ duzlemini hangi noktada keser?

Cevap

Kesisim hesabi icin cizginin parametrik denklemini bulmamiz lazim. Eger bu cizgi ilk duzleme dik ise, o duzlemin normali “yonunde” gitmektedir, o zaman elimizde bir yon var, bir de baslangic noktasi var. O noktadan, normal yonunde t adimi atmayi kodlayacagiz (birinci duzlem ile kesisme onemli degil).

$$x(t) = 1 + t$$

$$y(t) = 1 + 2t$$

$$z(t) = -1 - t$$

Simdi bu cizginin ikinci duzlemle kesistigi soylendigine gore, sunun dogru olmasi gerekir

$$2(1+t) - (1+2t) + (-1-t) = 1$$

Yani parametrik denklemin ogelerini teker teker ikinci duzlemin icine koymus oluyoruz. Ustteki denklemleri cozunce $t = -1$ cikacak. Bunu alip parametrik denkleme geri koyarsak, elde edilen nokta $(0, -1, 0)$ noktasidir [ders cevaplarinda 0,1,0 deniyor, bu yanlis].