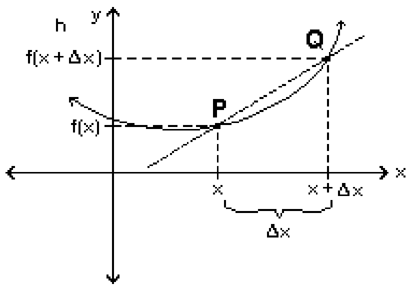
Türev İşlevi Nasıl Türetilir

Calculus, bir veya daha fazla dereceli denklemlerin, en yüksek noktasını bulmak, değişimi temsil etmek gibi birçok bilim ve mühendislik alanında kullanılır. Herhalde Calculus'in türev, tümlev alma gibi yöntemlerini şimdiye kadar çok gördük. Fakat genelde anlatılmayan, türev ve tümlev işlemlerinin nasıl yapıldığı, yani Calculus'in nasıl işlediği.

Örnek olarak, aşağıdaki grafiğe bakalım.



Gösterilen eğri, x^2 eğrisi. Bu eğrinin artış oranını bulmak için, artış oranını temsil eden işlevi bulabiliriz. Bu işleve türev alarak gideceğiz.

Bunu yapmanın bir yolu, y eksenindeki artışı x eksenindeki artış ile bölmek.

$f(x) = x^2$

$f(x)$'in turevini bulmak icin

$= \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$= \dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

$= \dfrac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$

x^2'ler iptal oldu

$= \dfrac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$

$= 2x + \Delta x$

Bu elimizdeki işlev, türevin son haline yaklaştı. En son haline getirmek için, şöyle düşünmemiz gerekiyor. Artış miktarını bulduk, ama x eksenindeki artış basamağı ne kadar büyük olmalı? Sonuna kadar küçültürsek, elimize hangi işlev geçer?

Calculus'u ilk bulan Leibniz adlı matematikçi, zamanına göre büyük bir ilerleme olan bu yeni metodu bir türlü meslektaşlarına tarif edemiyordu. "x^2'nin türevi nasıl 2x oluyor" gibi sorulara, artış miktarı kavramını anlatıyor, fakat $2x$ formülüne geldiğini bahsederken, "x'teki artış sonsuz küçüldüğü için $2x$'e yaklaşıyoruz" deyince, arkadaşları onu anlamıyordu. Zamanın matematikçileri bu 'sonsuz küçüklük' kavramını çok eleştirdiler. Leibniz sonunda, "sonsuz küçük sayıların olduğu delilik gibi gelebilir, fakat pratik hesaplamalar açısından yararlı bir alet olarak Calculus'un hala yararlı olabileceğini düşünüyorum" demişti. Yani Calculus'un matematiksel ispatı Leibniz zamanında yapılamadı. Keşifler tarihin de bu olağan bir durumdur. Türevler, zamanı için yeterince normal dışı bir buluştu, bunun üzerine hemen arkasından bir diğer sarsıcı buluşun yapılması, çoğu zaman mümkün olmamaktadır.

Bu yüzden türevlerin soyut matematiksel olarak ispatının yapılması, 1821'de limit kuramının keşfine kadar beklemiştir. Fakat bu keşiften önce bile, mühendisler ve bilim adamları Calculus yöntemlerini verimli bir şekilde kullanmaya başlamışlardı.

Sonsuz Küçüklük

Leipniz ve Calculus'un "öteki babası" sayılan Newton'un söylemeye çalıştıkları, türev işleminin bir durağan resim üzerinde yapılan hesap değil, ardışıl yaklaşıklama süreci altında bir sabit sonuca "yaklaşan" hareketli bir hedef olduğu idi. Matematiksel limit kuramı, bu tür bir tarifi gösterebildiği için sonunda Calculus'u ispatlamak mümkün oldu.

$g(x) = 2x + \Delta x$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) = 2x$

Bu formüle bakarak bir daha belirtmek gerekir ki, x değişimini 0'a eşitlemiyoruz. 0'a eşitleseydik, daha baştan bölünen olarak elimize sıfır geçeceği için cebirsel işlemde bu kadar ilerlememiz mümkün olmazdı. Yaptığımız, limit tarifini kullanarak, x sıfıra yaklaşırken türev $2x$'e yaklaşır demektir.

Bu tanım sonucu elde ettiğimiz yeni fonksiyon da, tüm diğer fonksiyonlar gibi, aynen limitlerin çalıştığı uzayda olduğu gibi sonsuz küçük aralıklarla çalışabilecek bir tanım olduğu için, bu türetilmiş yeni fonksiyonu da normal bir fonksiyon olarak kabul etmemiz mümkün olmaktadır.