Lojistik Regresyon (Logistic Regression)

Lojistik regresyon normal regresyonun $\theta^T x$ olarak kullandigi agirliklar (katsayilar) ile verinin carpimini alir ve ek bir filtre fonksiyonundan gecirerek onlari 0/1 degerleri baglaminda bir olasiliga esler. Yani elimizdeki veri pek cok boyutta veri noktalari ve o noktalarin 0 ya da 1 olarak bir "etiketi" olacaktir. Mesela

```
from pandas import *
df = read_csv("testSet.txt",sep='\t',names=['x','y','labels'],header=None)
df['intercept']=1.0
data = df[['intercept','x','y']]
labels = df['labels']
print df[['x','y','labels']][:10]
```

```
          x          y  labels
0 -0.017612  14.053064       0
1 -1.395634   4.662541       1
2 -0.752157   6.538620       0
3 -1.322371   7.152853       0
4  0.423363  11.054677       0
5  0.406704   7.067335       1
6  0.667394  12.741452       0
7 -2.460150   6.866805       1
8  0.569411   9.548755       0
9 -0.026632  10.427743       0
```

Goruldugu gibi veride x, y boyutlari icin etiketler (labels) verilmis. Lojistik regresyon bu veriyi kullanarak egitim sonrasi θ'lari elde eder, bunlar katsayilarimizdir, artik bu katsayilari hic gormedigimiz yeni bir veri uzerinde 0/1 etiketlerinin tahminini yapmak icin kullanabiliriz.

Filtre fonksiyonu icin kullanilan bir fonksiyon sigmoid fonksiyonudur, $g(x)$ ismini verelim,

$$g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

Bu nasil bir fonksiyondur, kabaca davranisini nasil tarif ederiz? Cebirsel olarak bakarsak, fonksiyon oyle bir durumda ki ne zaman bir x degeri gecersek, bu deger ne kadar buyuk olursa olsun, bolendeki deger her zaman bolunenden 1 daha fazla olacaktir bu da fonksiyonun sonucunun 1'den her zaman kucuk olmasini garantiler. Cok kucuk x degerleri icin bolum sonucu biraz daha buyuk olacaktir tabii, vs.

Daha temiz bir ifade icin bolen ve boluneni e^{-x} ile carpalim,

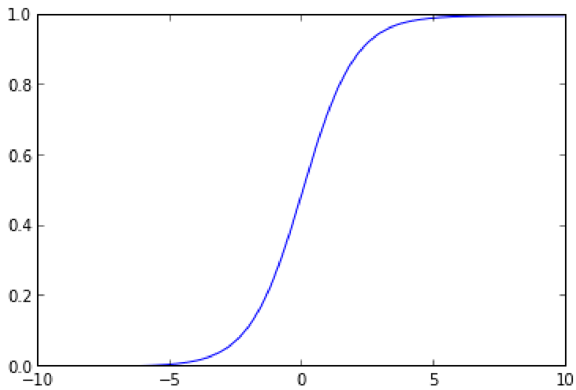
$$g(x) = \frac{e^x e^{-x}}{e^{-x}+e^x e^{-x}}$$

$$g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Sigmoid fonksiyonun "-sonsuzluk ile +sonsuzluk arasindaki degerleri 0 ve 1 arasina esledigi / indirgedigi (map)" ifadesi de litaraturde mevcuttur.

```
def sigmoid(arr):
    return 1.0/(1+exp(-arr))

x = np.array(arange(-10.0, 10.0, 0.1))
plt.plot(x,sigmoid(x))
plt.savefig('logreg1.png')
```



Ustteki grafige bakinca katsayilarla carpim, toplam ardindan sonucun niye bu fonksiyona verildigini anlamak mumkun. Sigmoid'in 0 seviyesinden 1 seviyesine ziplayisi oldukca hizli ve x kordinati baglaminda (ve 0.5'ten kucuk y'ye eslenen) sifir oncesi bolgesi, ayni sekilde sifir sonrasi (ve 0.5'ten buyuk y'ye eslenen) bolgesi oldukca buyuk. Yani bu fonksiyonu secmekle veriye katsayilarla carpilip 0 ya da 1 bolgesi altina dusmesi icin oldukca genis bir sans veriyoruz. Boylece veriyi iki parcaya ayirmak icin sansimizi arttirmis oluyoruz.

Peki sigmoid fonksiyonu bir olasilik fonksiyonu (dagilimi) olarak kullanilabilir mi? Entegralini alalim, ve -/+ sonsuzluklar uzerinden alan hesabi yapalim, sonucun 1 cikmasi gerekli,

```
import sympy
x = sympy.Symbol('x')
print sympy.integrate('1/(1+exp(-x))')
```

```
x + log(1 + exp(-x))
```

Daha temizlemek icin

$$x + \ln(1 + e^{-x})$$

x ifadesi ayni zamanda suna esittir $x = ln(e^x)$. Bu ifade bize kolaylik saglayacak boylece,

$$\ln e^x + \ln(1 + e^{-x})$$

diyebiliriz. Dogal log'un (ln) carpimlari toplamlara donusturdugunu biliyoruz, bunu tersinden uygulayalim,

$$\ln(e^x \cdot 1 + e^x e^{-x})$$

$$\ln(e^x + 1) = \ln(1 + e^x)$$

```
print log (1+exp(-inf))
print log(1+exp(inf))
```

```
0.0
inf
```

Demek ki fonksiyon bir olasilik dagilimi olamaz, cunku egri altindaki alan sonsuz buyuklugunde. Aslinda bu fonksiyonun kumulatif dagilim fonksiyonu (cumulative distribution function -CDF-) ozellikleri vardir, yani kendisi degil ama turevi bir olasilik fonksiyonu olarak kullanilabilir (bu konumuz disinda). Her neyse, sigmoid'in bir CDF gibi hareket ettigini g'nin 0 ile 1 arasinda olmasindan da anliyoruz, sonucta CDF alan demektir (yogunlugun entegrali) ve en ust degeri 1 demektir, ki bu CDF tanimina uygundur.

Simdi elimizde olabilecek k tane degisken ve bu degiskenlerin bilinmeyen katsayilari icin 0 ve 1'e eslenecek bir regresyon olusturalim. Diyelim ki katsayilar $\theta_0, .., \theta_k$. Bu katsayilari degiskenler ile carpip toplayarak $h(x)$'e verelim, (0/1) cikip cikmayacagi katsayilara bagli olacak, verideki etiketler ile $h(x)$ sonucu arasinda bir baglanti kurabilirsek, bu bize katsayilari verebilir. Bu modele gore eger θ'yi ne kadar iyi secersek, eldeki veriye etiketlerine o kadar yaklasmis olacagiz. Simdi sigmoid'i katsayilarla beraber yazalim,

$$h_\theta(x) = g(\theta^T x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^T x}}$$

"Veriye olabildigince yaklasmak icin en iyi α'yi bulmak" sozu bize maksimum olurluk (maximum likelihood) hesabini hatirlatmali. Bu hesaba gore icinde bilinmeyen α'yi barindiran formulun uzerinden tum verinin sonuclarinin teker teker birbiri ile carpimi olabildigince buyuk olmalidir. Bu ifadeyi maksimize edecek α veriye en uygun α olacaktir.

Simdi her iki etiket icin ve sigmoid'i kullanarak olasilik hesaplarini yapalim,

$$P(y=1|x;\theta) = h_\theta(x)$$

$$P(y=0|x;\theta) = 1 - h_\theta(x)$$

Not: Olasilik degerleri (buyuk $P(\cdot)$ ile) ve CDF fonksiyonlari olurluk hesabinda kullanilabilir. $P(\cdot)$ ile CDF baglantisi var, $P(X < x)$ gibi kumulatif alansal hesaplarin CDF uzerinden gerceklestirilebildigini hatirlayalim.

Devam edelim, hepsi bir arada olacak sekilde yanyana koyarsak ve sonuca, y'yi dogru tahmin edip etmedigimizin olcumunu de eklersek,

$$p(y|x;\theta) = (h_\theta(x))^y (1-h_\theta(x))^{1-y}$$

Olurluk icin tum veri noktalarini teker teker bu fonksiyona gecip sonuclarini carpacagiz (ve verilerin birinden bagimsiz olarak uretildigini farzediyoruz), eger m tane veri noktasi var ise

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{m} (h_\theta(x^i))^{y^i} (1-h_\theta(x^i))^{1-y^i}$$

Eger log'unu alirsak carpimlar toplama donusur, isimiz daha rahatlasir,

$$l(\theta) = \log L(\theta)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y^i \log((h_\theta(x^i))) + (1-y^i)\log((1-h_\theta(x^i)))$$

Iste bu ifadenin maksimize edilmesi gerekiyor.

Ama daha fazla ilerlemeden once bir esitlik ve bir turev gostermemiz gerekiyor. Once esitlik

$$1 - g(z) = g(-z)$$

Ispat

$$1 - \frac{1}{1+e^{-z}} = \frac{1+e^{-z}-1}{1+e^{-z}}$$

$$\frac{e^{-z}}{1+e^{-z}} = \frac{1}{1+e^{z}}$$

Hakikaten son esitligin sag tarafina bakarsak, $g(-z)$'yi elde ettigimizi goruyoruz.

$\square$

Simdi tureve gelelim,

$$g'(z) = \frac{d}{dz}\frac{1}{1+e^{-z}}$$

Ispat

$$= \frac{1}{(1+e^{-z})^2}(e^{-z})$$

e^{-z} turevinden bir eksi isareti gelecegini beklemis olabilirsiniz, fakat hatirlayacagimiz uzere

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1+x} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

Yani eksiler birbirini yoketti. Simdi iki ustteki denklemin sag tarafini acalim

$$= \frac{1}{1+e^{-z}}\frac{e^{-z}}{1+e^{-z}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-z}}\frac{1}{1+e^{z}}$$

Carpimda iki bolum var, bolumler $g(z)$ ve $g(-z)$ olarak temsil edilebilir, ya da $g(z)$ ve $1-g(z)$,

$$= g(z)(1-g(z))$$

$\square$

Bu baglamda ilginc bir diger denklem log sansi (log odds) denklemidir. Eger ilk bastaki denklemi dusunursek,

$$p = P(y=1|x;\theta) = g(z) = \frac{e^z}{1+e^z}$$

Bu denklem 1 olma olasiligini hesapliyor. Temiz bir denklem log sansi olabilir ki bu denklem olma olasiligini olmama olasiligina boler ve log alir.

$$ \log\left(\frac{p}{1-p}\right) $$

olarak gosterilir. Simdi biraz daha cambazlik, $1 - g(z) = g(-z)$ demistik, ve $g(-z)$'nin de ne oldugunu biliyoruz $\frac{1}{1+e^z}$, log sansini bu sekilde yazalim, $\frac{1}{1+e^z}$ ile bolelim daha dogrusu $1 + e^z$ ile carpalim ve log alalim,

$$ \log\left(\frac{e^z}{1+e^z}1+e^z\right) = \log(e^z) = z = \theta^T x $$

Artik olurluk denklemine donebiliriz. Olurlugu nasil maksimize ederiz? Gradyan cikisi (gradient ascent) kullanilabilir. Eger olurluk $l(\theta)$'nin en maksimal oldugu noktadaki θ'yi bulmak istiyorsak (dikkat sadece olurlugun en maksimal noktasini aramiyoruz, o noktadaki θ'yi ariyoruz), o zaman bir θ ile baslariz, ve adim adim θ'yi maksimal olana dogru yaklastiririz. Formul

$$ \theta_{yeni} = \theta_{eski} + \alpha \nabla_\theta l(\theta) $$

Ustteki formul niye isler? Cunku gradyan $\nabla_\theta l(\theta)$, yani $l(\theta)$'nin gradyani her zaman fonksiyon artisinin en fazla oldugu yonu gosterir. Demek ki o yone adim atmak, yani $l(\theta)$'a verilen θ'yi o yonde degistirmek (degisim tabii ki θ bazinda, θ'nin degisimi), bizi fonksiyonun bir sonraki noktasina yaklastiracaktir. Sabit α bir tek sayi sadece, atilan adimin (hangi yonde olursa olsun) olcegini azaltip / arttirabilmek icin disaridan eklenir. Adim yonu vektor, bu sabit bir tek sayi. Carpimlari vektoru azaltir ya da cogaltir [3].

Simdi $\nabla_\theta l(\theta)$ turetmemiz gerekiyor.

Eger tek bir $\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_j}$'yi hesaplarsak ve bunu her j icin yaparsak, bu sonuclari bir vektorde ustuste koyunca $\nabla_\theta l(\theta)$'yi elde ederiz.

$$ \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_j} = y \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} g(\theta^T x)}{g(\theta^T x)} - (1-y) \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} g(\theta^T x)}{1 - g(\theta^T x)} $$

$$ = (y \frac{1}{g(\theta^T x)} - (1-y) \frac{1}{1 - g(\theta^T x)}) \frac{\partial}{\partial \theta_j} g(\theta^T x) $$

Simdi en sagdaki kismi acalim,

$$ \frac{\partial}{\partial \theta_j} g(\theta^T x) = g'(\theta^T x) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \theta^T x = g'(\theta^T x) x_j $$

$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \theta^T x$ nasil x_j haline geldi? Cunku tum θ vektorunun kismi turevini aliyoruz fakat o kismi turev sadece tek bir θ_j icin, o zaman vektordeki diger tum ogeler sifir olacaktir, sadece θ_j 1 olacak, ona tekabul eden x ogesi, yani x_j ayakta kalabilecek, diger x ogelerinin hepsi sifirla carpilmis olacak.

Turevin kendisinden de kurtulabiliriz simdi, daha once gosterdigimiz esitligi devreye sokalim,

$$= g(\theta^T x)(1 - g(\theta^T x))x_j$$

Bu son formulu 3 ustteki formulun sag tarafina geri koyarsak, ve basitlestirirsek,

$$(y(1 - g(\theta^T x)) - (1 - y)g(\theta^T x))x_j$$

Carpimi daha temiz gormek icin sadece y, g harflerini kullanirsak,

$$(y(1 - g) - (1 - y)g)x_j = (y - yg - g + yg)x_j = (y - g)x_j$$

yani

$$= (y - g(\theta^T x))x_j$$

$$= (y - h_\theta(x))x_j$$

Iste $\nabla_\theta l(\theta)$ icin ne kullanacagimizi bulduk. O zaman

$$\theta_{yeni} = \theta_{eski} + \alpha(y - h_\theta(x))x_j$$

Her i veri noktasi icin

$$\theta_{yeni} = \theta_{eski} + \alpha(y^i - h_\theta(x^i))x_j^i$$

Kodu isletelim,

```
def grad_ascent(data_mat, label_mat):
    m,n = data_mat.shape
    label_mat=label_mat.reshape((m,1))
    alpha = 0.001
    iter = 500
    theta = ones((n,1))
    for k in range(iter):
        h = sigmoid(dot(data_mat,theta))
        error = label_mat - h
        theta = theta + alpha * dot(data_mat.T,error)
```

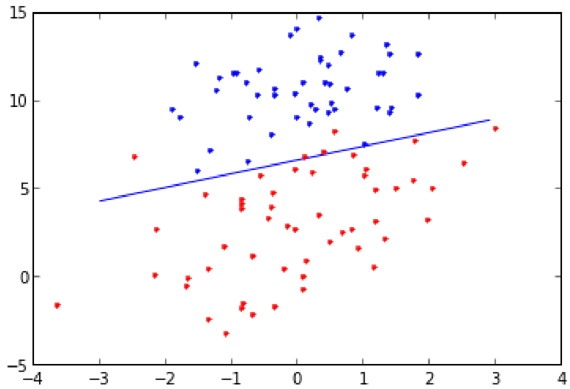
```
    return theta

theta = np.array(grad_ascent(array(data),array(labels).T ))
print theta.T
```

```
[[ 4.12414349  0.48007329 -0.6168482 ]]
```

```
def plot_theta(theta):
     x = np.array(arange(-3.0, 3.0, 0.1))
     y = np.array((-theta[0]-theta[1]*x)/theta[2])
     plt.plot(x, y)
     plt.hold(True)
     class0 = data[labels==0]
     class1 = data[labels==1]
     plt.plot(class0['x'],class0['y'],'b.')
     plt.hold(True)
     plt.plot(class1['x'],class1['y'],'r.')
     plt.hold(True)

plot_theta(theta)
plt.savefig('logreg2.png')
```



Ustteki kod bir dongu icinde belli bir x noktasindan baslayarak gradyan inisi yapti ve optimal θ degerlerini, yani regresyon agirliklarini (weights) hesapladi. Sonra bu agirliklari bir ayrac olarak ustte grafikledi. Ayracin oldukca iyi degerler buldugu belli oluyor.

Rasgele Gradyan Cikisi (Stochastic Gradient Ascent)

Acaba θ'yi guncellerken daha az veri kullanmak mumkun mu? Yani yon hesabi icin surekli tum veriyi kullanmasak olmaz mi?

Olabilir. Guncellemeyi sadece tek bir veri noktasi kullanarak yapabiliriz. Yine gradyani degistirmis oluruz, sadece azar azar degisim olur, fakat belki de bu sekilde sonuca daha cabuk ulasmak mumkun olacaktir.

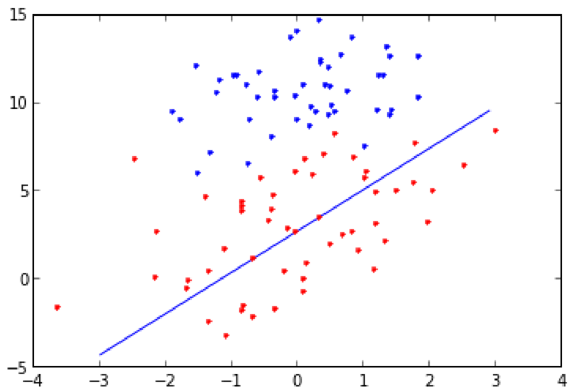
Kodlama acisindan, θ guncellemesi icin buldugumuz formulu tek nokta bazinda da vermistik. O zaman o tek noktayi sirayla alip guncellersek, otomatik olarak yeni bir sekilde gradyan cikisi yapmis oluruz.

```
def stoc_grad_ascent0(data_mat, label_mat):
    m,n = data_mat.shape
    label_mat=label_mat.reshape((m,1))
    alpha = 0.01
    theta = ones((n,1))
    for i in range(m):
        h = sigmoid(sum(dot(data_mat[i],theta)))
        error = label_mat[i] - h
        theta = theta + alpha * data_mat[i].reshape((n,1)) * error
        theta = theta.reshape((n,1))
    return theta

theta = np.array(stoc_grad_ascent0(array(data),array(labels).T ))
print theta.T
```

```
[[ 1.01702007  0.85914348 -0.36579921]]
```

```
plot_theta(theta)
plt.savefig('logreg3.png')
```



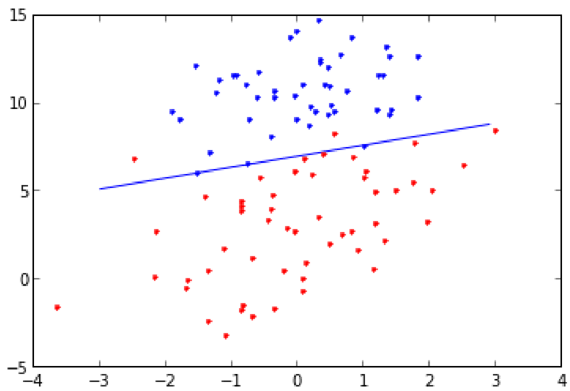
Neredeyse isimiz tamamlandi. Ustteki grafik pek iyi bir ayrac gostermedi. Niye? Problem cok fazla salinim (oscillation) var, yani degerler cok fazla uc noktalar arasinda gidip geliyor. Ayrica veri noktalarini sirayla isliyoruz, veri tabii ki rasgele bir sekilde siralanmis olabilir, ama siralanmamissa, o zaman algoritmaya raslantisal noktalari vermek icin kod icinde zar atmamiz lazim. Metotun ismi "rasgele (stochastic)" gradyan cikisi, bu rasgelelik onemli. 2. problemi duzeltmek icin yapilacak belli, 1. problem icin α degeri her dongude belli oranda kucultulerek (yani α artik sabit degil) sonuca yaklasirken oradan buraya savrulmasini engellemis olacagiz. Yeni kod altta,

```
def stoc_grad_ascent1(data_mat, label_mat):
    m,n = data_mat.shape
    iter = 150
    label_mat=label_mat.reshape((m,1))
    alpha = 0.01
    theta = ones((n,1))
    for j in range(iter):
        data_index = range(m)
        for i in range(m):
            alpha = 4/(1.0+j+i)+0.0001
            rand_index = int(random.uniform(0,len(data_index)))
            h = sigmoid(sum(dot(data_mat[rand_index],theta)))
            error = label_mat[rand_index] - h
            theta = theta + alpha * data_mat[rand_index].reshape((n,1)) * error
            theta = theta.reshape((n,1))
    return theta

theta = np.array(stoc_grad_ascent1(array(data),array(labels).T ))
print theta.T
```

```
[[ 14.67440542   1.30317067  -2.08702677]]
```

```
plot_theta(theta)
plt.savefig('logreg4.png')
```



Sonuc cok iyi, ayrica daha az islemle bu noktaya eristik, yani daha az islem ve daha hizli bir sekilde sonuca ulasmis olduk.

Tahmin (Prediction)

Elde edilen agirliklari tahmin icin nasil kullaniriz? Bu agirliklari alip, yeni veri noktasi ile carpip sonuclari sigmoid'den gecirdigimiz zaman bu noktanin "1 etiketi olma olasiligini" hesaplamis olacagiz. Ornek (diyelim ki mevcut veri noktasi icinden bir veriyi, -mesela 15. nokta- sanki yeniymis gibi sectik)

```
pt = df.ix[15,['intercept','x','y']]
print sigmoid(dot(array(pt), theta)),
print 'label =',labels[15]
```

```
[ 0.99999653] label = 1
```

Oldukca yuksek bir olasilik cikti, ve hakikaten de o noktanin gercek degeri 1 imis.

Kaynaklar

[1] http://cs229.stanford.edu/notes/cs229-notes1.pdf

[2] Harrington, P. Machine Learning in Action

[3] Bu sekilde azar azar sonuca yaklasmaya ugrasmak tabii ki her fonksiyon icin gecerli degildir, cunku eger fonksiyonda "yerel maksimumlar" var ise, gradyan cikisi bu noktalarda takilip kalabilir (o yerel tepelerde de birinci turev sifirlanir, gradyanin kafasi karisir). Gradyan metotunun kullanmadan once fonksiyonumuzun tek (global) bir maksimumu olup olmadigini dusunmemiz gerekir. Fakat sanliyiz ki olurluk fonksiyonu tam da boyle bir fonksiyondur (sans degil tabii, bu ozelligi sebebiyle secildi). Fonksiyon icbukeydir (concave), yani tek bir tepe noktasi vardir. Bir soru daha: olurlugun icbukey oldugunu nasil anladik? Fonksiyona bakarak pat diye bunu soylemek mumkun, degiskenlerde polinom baglaminda kupsel ve daha ustu seviyesinde ustellik yok, ayrica log, exp icbukeyligi bozmuyor.