MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 3

Capraz carpimlar hakkinda bilinmesi gereken bazi sasirtici gelebilecek kurallar var. Bunlardan bir tanesi $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$. Niye boyle? Bunu gormenin yollarindan bir tanesi geometrik olarak dusunmek. Sag el kuralini dusunursek, yonun niye farkli olabilecegini anlariz. Isaretler tam terstir, yani

$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

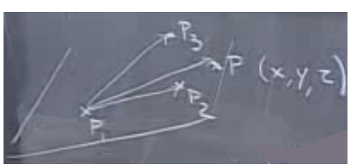
Determinant acilimini da dusunursek, ikinci terim eksi isareti tasir, ama carpim sirasi degisince eksi isaretinin yeri degisir.

Peki $\vec{A} \times \vec{A}$ nedir? Capraz carpim alan hesabinda onemli olduguna gore ve $\vec{A} \times \vec{A}$'in bir parallelogram yaratmayacagina gore (ya da sifir alanli bir parallelogram yaratacagina gore) cevap sifir, daha dogrusu sifir "vektoru" (o vektorun buyuklugu de tabii ki sifir).

Uygulamalar

Diyelim ki bize uzayda 3 nokta verildi, ve bu noktalari iceren bir duzlemin formulunu bulmamiz gerekiyor. 3 nokta 3 boyutlu uzayda bir duzlem yaratmak icin yeterli, bunu biliyoruz. Bunun icin bir dorduncu nokta P hayal edelim ki bu noktanin ogeler x, y, z olsun.

Simdi duzlemi tanimlayalim. Su sekilde 3 tane vektor yaratalim



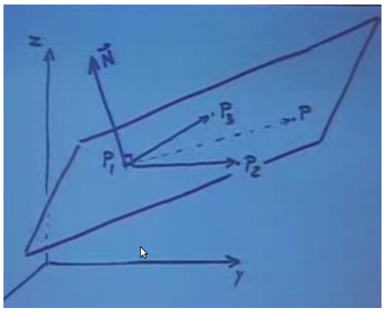
Bu vektorlerin ayni duzlem uzerinde olmasi, ayni zamanda bu vektorlerin tanimladigi parallelipipe'nin hacimsiz olmasi demektir. Yani birisi uzerinden bastirip onu dumduz etmistir sanki, sadece alani kalmistir.

Bunu formulsel olarak soylemenin yolu sudur:

$det(\vec{P_1P}, \vec{P_2P}, \vec{P_3P}) = 0$

Gercek uygulama baglaminda problem bize P_1, P_2, P_3 sayilarini vermis olacakti bu sayilari ustteki formule yerlestirirdik, tanimsiz olan sadece x, y, z kalirdi, ve bu x, y, z'ler ile beraber elde edilecek formul bu noktalarin tanimladigi alan olurdu.

Bu hesabi daha da hizli yapmanin bir yolu var. Alttaki resmi dusunelim.



Resme bakalim. Duzlem uzerindeki iki vektore dik bir $\vec{N}$'i nasil hesaplayacagimizi biliyoruz (carpraz carpim ile). Devam edelim, x, y, z degiskenlerini iceren ucuncu bir vektor $\vec{P_1 P}$'in ayni duzlemde olmasi demek, bu $\vec{N}$ vektorune dik olmasi demektir ($\vec{N}$ "normal vektor" olarak isimlendirilir). Bunu matematiksel olarak nasil ifade ederiz? Dikligin formulsel karsiligini biliyoruz, noktasal carpim sifir olmali.

$$\vec{P_1 P} \cdot \vec{N} = 0$$

$\vec{N}$ hesabi icin

$$\vec{N} = \vec{P_1 P_2} \times \vec{P_1 P_3}$$

Bu kadar.

Ek not, eger capraz carpimin sirasini degistirmis olsaydim, o zaman ustteki hesabin ters yonunde bir baska dik vektor elde ederdim, duzlem yine ayni olurdu, sadece baska bir normal vektor olurdu. Bu problem degil, herhangi bir duzlemin sonsuz sayida normal vektoru olabilir. Elde ettigimiz bir normal vektoru herhangi bir sabit ile carpinca yeni bir normal vektor elde etmis olurdum cunku.

$$\vec{P_1 P} \cdot \vec{N} = \vec{P_1 P} \cdot (\vec{P_1 P_2} \times \vec{P_1 P_3})$$

Esitligin sagindaki carpima uclu carpim (triple product) deniyor.

Son formulu takip edersek determinant sifirligi uzerinden tanimlanan diger formul ile ayni sonucu getirdigini gorurduk.