

## Cauchy Ortalama Deger Teorisi (Cauchy Mean-value Theorem)

Teori soyle

Eger  $f, g$  fonksiyonlari  $[a, b]$  araliginda surekli ise ve  $g'(x) \neq 0$  farz edildiği durumda  $[a, b]$  arasinda oyle bir  $c$  vardır ki,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ifadesi dogrudur.

Ispat

Simdi daha onceden gordugumuz Ortalama Deger Teorisi'ni (Cauchy olmayan) iki kere kullanacagiz. Teoriyi once  $g(a) \neq g(b)$  oldugunu gostermek icin kullanacagiz. Cunku eger bu dogru olsaydi, Ortalama Deger Teorisi

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

olurdu, ki bu  $[a, b]$  arasindaki bir  $c$  icin basta yaptigimiz faraziyemiz  $g'(x) \neq 0$  ile ters duserdi.

Ikinci kullanim:  $F(x)$  adinda,  $f, g$  fonksiyonlarini kullanan baska bir fonksiyon kurulayalim.

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

Bu fonksiyonun turevi,  $f, g$ 'nin turevi alinabildigi her yerde alinabilir olur. Ayrica  $F(b) = F(a) = 0$ .  $a, b$  degerlerini yerine koyarsak bunu gorebiliriz, mesela  $x = a$  icin

$$F(a) = \cancel{f(a)} - \overset{0}{f(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[\cancel{g(a)} - \overset{0}{g(a)}] \\ = 0 - 0 = 0$$

O zaman,  $F(b) = F(a) = 0$ 'dan bir sonuca daha erisiriz. Bir fonksiyon  $a, b$  uclarinda sifir ise, bu fonksiyon bir sekilde azalip, cogaliyor, ya da cogalip azaliyor demektir, yani kesinlikle bir yerde tepe yapıyor demektir. Tepe yapmanın Calculus'taki tercumesi  $[a, b]$  arasindaki bir  $c$  icin  $F'(c) = 0$  olmasidir. O zaman ustteki  $F(x)$ 'in turevini alirsak, ve  $x = c$  dersek,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g'(c)] = 0$$

dogru olmalidir. Turev alirken  $f(a)$  yokoldu cunku sabitti, buyuk bolum yerinde kaldi cunku tamami  $g(x)$  icin katsayi. Eger tekrar duzenlersek, negatif terimi sola alirsak, ve iki tarafı  $g'(c)$ 'ye bolerek,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ifadesini elde ederiz. Yani bastaki teoriyi elde etmis oluruz.

Ortalama Deger Teorisini ilk kez kullanmamizin sebebi, ustteki bolenin sifir olmasini istedigimiz icindi, cunku sifir la bolum tanimsizdir.

Kaynaklar

[1] Thomas Calculus, 11. Baski sf. 294