Paralel Matris Çarpımı, Ax, QR ve SVD

*Matris Çarpımı* adli yazi tek makinali ortamda matris carpiminin nasil yapilacagini, ve nasil gorulecebilegini anlatti. Satir bakis acisi, kolon bakis acisi islendi. Parallel (Hadoop), esle/indirge ortaminda matris carpimini nasil yapariz? Mesela $A^TA$'yi ele alalim. Bu carpim oldukca onemli cunku baska sonuclar icin de kullanilabiliyor. Mesela $A$ uzerinde QR ayristirmasi yapmak isterseniz (bkz. Lineer Cebir ders notlarimiz) bu carpim kullanilabiliyor.

Nasil? QR ayristirmasi kolonlarin hepsi bilindigi gibi birbirine dik (orthogonal) birim vektorler olan bir Q matrisi ve ust ucgensel (upper triangular) bir $R$ matrisi olusturur. Ayristirmanin $A^TA$ ile baglantisi nedir? Eger $A$ yerine onun ayristirmasini $QR$ koyarsak,

$$ C = A^TA = (QR)^T(QR) = R^TQ^TQR $$

Tum Q vektorleri birbirine dik, ve birim vektorler ise, $Q^TQ$ birim matrisi I olur. O zaman

$$ C = R^TQ^TQR = R^TR $$

Yani

$$ C = R^TR $$

Peki $A^TA$ hesaplayip (boylece $R^TR$'yi elde edince) onun icinden $R$'yi nasil cekip cikartiriz? Simdi Cholesky ayristirmasi kullanmanin zamani. Cholesky ayristirmasi (herhangi bir simetrik pozitif kesin C matrisi uzerinde)

$$ C = LL^T $$

olarak bilinir, yani bir matris alt ucgensel (lower triangular -ki L harfi oradan geliyor-) $L$ matrisine ve onun devrigi olan ust ucgensel $L^T$'nin carpimina ayristirilir. Elimizde $R^TR$ var, ve ona benzer $LL^T$ var, $R$ bilindigi gibi ust ucgensel, $L$ alt ucgensel, $L^T$ ve $R$ birbirine esit demek ki. Yani $A^TA$ uzerinde numerik hesap kutuphenimzin Cholesky cagrisi kullanmak bize $QR$'in $R$'sini verir.

Su anda akla su soru gelebilir: madem kutuphane cagrisi yaptik, niye $A$ uzerinde kutuphenimizin $QR$ cagrisini kullanmiyoruz?

Cevap Buyuk Veri argumaninda sakli. Bu ortamda ugrasilan verilerde A matrisi $m \times n$ boyutlarindadir, ve $m$ milyonlar, hatta milyarlarca satir olabilir. Simdilik $m >> n$ oldugunu farzedelim, yani $m$, $n$'den "cok, cok buyuk", yani "boyut kolonlarinin", ki $n$, sayisi binler ya da onbinlerde. Bu gayet tipik bir senaryo aslinda, olcum noktalari (boyutlar) var, ama cok fazla degil, diger yandan o olcumler icin milyonlarca veri noktasi toplanmis. Tipik bir asiri belirtilmis (overdetermined) sistem - ki en az kareler (least squares) gibi yaklasimlarin temel aldigi sistemler bunlardir, eldeki denklem sayisindan daha fazla olcum noktasi vardir. Bu arada en az karelerden bahsettik, QR'in kullanildigi alanlardan biri en az karelerin cozumudur.

Argumana devam ediyoruz, kutuphane `qr` cagrisini $A$ uzerinde yaparsak, $m \times n$ gibi devasa bir matris uzerinde islem yapmak gerekir. Ama $A^TA$ uzerinde islem (Cholesky) yaparsak, ki bu carpimin boyutu $n \times m \cdot m \times n = n \times n$, yani cok daha ufak bir matristir. $A^TA$'in islem bedeli cok ufak, birazdan anlatacagimiz yontem sayesinde bu bedel $O(m)$.

Paralel $A^TA$

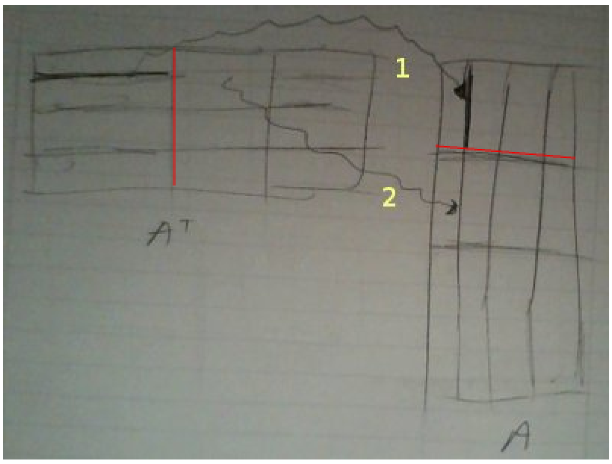
Paralel carpima gelelim. Oncelikle elimizdeki becerilere (capabilities) bakalim. Hadoop ortami bize asiri buyuk bir dosyayi otomatik olarak makinalara bolerek bir hesap yapilmasi gerektiginde o hesabin her makinada, elindeki veri parcasi uzerinde yaptirilmasini sagliyor.

$A^TA$ orneginde eldeki veri $A$, ve "cok olan" $A$'nin satirlari, yani $m \times n$ boyutlarinda matris var ve $m$ devasa boyutlarda (olabilir). Bir $A$ dosyasi tipik olarak soyle gozukecek:

```
!head -5 A_matrix

3 4 5 6
3 4 5 2
3 6 7 8
2 2 2 2
9 9 3 3
```

Esle/indirgeye gelelim: Eger carpima satir bakisini hatirlarsak,




Bu bakisa gore soldaki matriste satir boyunca giderken, sagdakinde ona tekabul eden kolon boyunca gidiyoruz, ve birbirine eslene her ogeyi carpiyoruz, ve carpimlari topluyoruz.

Simdi bu matrisin Hadoop'ta parca parca bize geldigini dusunursek (ki ustte hayali bir ilk parcayi kirmizi cizgi ile belirttik), bu parca icinde mesela ilk satiri kendisi ile carparken (1'inci ok) ayni blok icindeyiz. Bu onemli bir nokta, carparken bloklar arasi gecis yok.

Tabii ki nihai carpimdaki (1,1) hesabi icin $A^T$'deki birinci satirin *tamamen¡* $A$'daki birinci kolonla nokta carpiminin bitirilmis olmasi gerekir, ama simdi dusunelim, baska bir makinaya ikinci parca verilmis ise, makinada o birinci satirin geri kalani carpilip toplanacaktir (2. ok), ve eger tum parcalar, tum makinalarda bu sekilde islenirse, (1,1) hesabi icin o makinalardaki o tum carpimlari alip nihai bir noktada toplamak bize (1,1) icin nihai sonucu verecektir. Bu tipik bir esle/indirge hesabi olabilir, esle safhasinda eldeki parca $A_p$ uzerinde $A_p^T A_p$ yapilir, indirge safhasinda bu parcalar toplanir.

Esleme safhasindan yayinlanacak (emit) anahtar ve degerler, bizce, $A_p^T A_p$ icindeki her satirin satir no'su ve satir degeri olmali. Niye? (Ayni sabit bir anahtar degeriyle beraber $A_p^T A_p$'in tamamini da yayinlayabilirdik).

Hatirlayalim, nihai carpim $n \times n$ boyutunda, her parca $p$ olsa bile, $n \times p \cdot p \times n$ yine bize $n \times n$ veriyor. Yani her makina $n \times n$ boyutunda bir carpim sonucunu uretiyor. Evet $n$ nispeten kucuk bir sayi, fakat yine de onbinlerde olsa bile $10,000 \times 10,000$ mesela, buyuk bir sayi. Eger tum toplami tek bir indirgeyici makinaya yaptirirsak, pek cok $n \times n$ boyutunda matrisin toplami bu makinayi kasar. O sebeple indirgeme sonrasi matrisleri degil, o matrislerin her $n$ satirini satir no'su ile yayinliyoruz, boylece ayni satirlar ayni indirgeyiciye gidip orada toplaniyorlar, ama bircok indirgeyici var yani toplama islemi paralel hale gelmis oluyor. Tabii indirgeme sonrasi o sonuclar yayinlaniyor, ve satir no'ya gore dogal olarak siralanmis halde nihai sonuc cikiyor. Ama toplama islemi paralel. Kod alttaki gibi

```
from mrjob.job import MRJob
from mrjob.protocol import PickleProtocol
import numpy as np, sys

class MRAtA(MRJob):
    INTERNAL_PROTOCOL = PickleProtocol

    def __init__(self, *args, **kwargs):
        super(MRAtA, self).__init__(*args, **kwargs)
        self.buffer_size = 4
        self.n = 4
        self.data = []
        self.A_sum = np.zeros((self.n,self.n))

    def mapper(self, key, line):
        line_vals = map(np.float,line.split())
        self.data.append(line_vals)
        if len(self.data) == self.buffer_size:
            mult = np.dot(np.array(self.data).T,np.array(self.data))
            self.data = []
            for i, val in enumerate(mult):
```

```
                yield i, val

    def reducer(self, i, tokens):
        for val in tokens:
            self.A_sum[i,:] += np.array(val)
        yield i, str(self.A_sum[i,:])

    '''
    At the end of processing a file, we might have some left over
    rows in self.data that were not multiplied because we did not
    reach buffer size. That condition is handled here. Whatever is
    left over, is simply multiplied and emitted.
    '''
    def mapper_final(self):
        if len(self.data) > 0:
            mult = np.dot(np.array(self.data).T,np.array(self.data))
            for i, val in enumerate(mult):
                yield i, val


if __name__ == '__main__':
    MRAtA.run()
```

Fonksiyon `mapper_final` MRJob kurallarina gore bir makinadaki tum esleme bittikten sonra cagirilir, biz bu cengeli (hook), "artik parcalari carpip yayinlamak icin" kullandik, her parca $p$ buyuklugunde, ama $m/p$ tam sayi olmayabilir, yani islem sonunda bazi artik veriler kalmis olabilir, onlari `mapper_final` icinde carpiyoruz.

Bu arada kodun kendi icinde de bir "parcalama", "biriktirme ve isleme" yaptigina dikkat, yani 20,000 satir olabilir, iki tane esleyici var ise her esleyici bu verinin 10,000 satirini isler, ama ayrica isleyiciler daha ufak ufak (ustte 4) parcalarla carpim yapiyor.

```
! python AtA.py A_matrix
```

```
using configs in /home/burak/.mrjob.conf
creating tmp directory /tmp/AtA.burak.20131202.225802.256844
writing to /tmp/AtA.burak.20131202.225802.256844/step-0-mapper_part-00000
Counters from step 1:
  (no counters found)
writing to /tmp/AtA.burak.20131202.225802.256844/step-0-mapper-sorted
> sort /tmp/AtA.burak.20131202.225802.256844/step-0-mapper_part-00000
writing to /tmp/AtA.burak.20131202.225802.256844/step-0-reducer_part-00000
Counters from step 1:
  (no counters found)
Moving /tmp/AtA.burak.20131202.225802.256844/step-0-reducer_part-00000 -> /tmp/AtA.bu
Streaming final output from /tmp/AtA.burak.20131202.225802.256844/output
0 "[ 420.  463.  264.  265.]"
1 "[ 463.  538.  351.  358.]"
2 "[ 264.  351.  316.  321.]"
3 "[ 265.  358.  321.  350.]"
removing tmp directory /tmp/AtA.burak.20131202.225802.256844
```

Karsilastirmak icin ayni islemi tek bir script icinde yapalim,

```
A = np.loadtxt('A_matrix')
print np.dot(A.T,A)
```

```
[[ 420.   463.   264.   265.]
 [ 463.   538.   351.   358.]
 [ 264.   351.   316.   321.]
 [ 265.   358.   321.   350.]]
```

Tipatip ayni.

Simdi bu sonuc uzerinde Cholesky yapalim

```
import numpy.linalg as lin
print lin.cholesky(np.dot(A.T,A))
```

```
[[ 20.49390153   0.           0.           0.        ]
 [ 22.59208669   5.25334361   0.           0.        ]
 [ 12.88188096  11.41585875   4.44244436   0.        ]
 [ 12.93067597  12.53849977   2.54158031   4.37310096]]
```

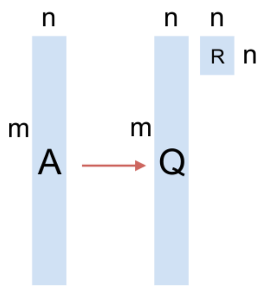
Bu bize L'yi verdi. Karsilastirmak icin $A$ uzerinde direk `qr` yapalim

```
q,r = lin.qr(A)
print r.T
```

```
[[-20.49390153   0.           0.           0.        ]
 [-22.59208669  -5.25334361   0.           0.        ]
 [-12.88188096 -11.41585875   4.44244436   0.        ]
 [-12.93067597 -12.53849977   2.54158031  -4.37310096]]
```

Bu matris Cholesky sonucunun eksi ile carpilmis hali, fakat bu nihai sonuc acisindan farketmiyor.

Q




Q hesabi icin biraz daha takla atmak lazim,

$$A = QR$$

$$AR^{-1} = QRR^{-1}$$

$$Q = AR^{-1}$$

Demek ki R'i elde ettikten sonra onu tersine cevirip (inverse) A ile carparsak, bu bize Q'yu verecek. Dert degil, R ufak bir matris, $n \times n$, ve tersini alma operasyonu pahali bir islem olsa da bu boyutlarda yavas olmaz. Daha sonra bu $R^{-1}$'i alip bu sefer baska bir esle/indirge ile carpim islemine tabi tutariz. R'yi direk alttaki script icine yazdik (B olarak) bir sonuc ortaminda bu verinin baska bir sekilde MRJob islemine verilmis olmasi lazim. Bir isleme zinciri var, zincirde once $A^T A$, Cholesky, oradan R alinip baska bir isleme (job) aktariliyor.

```
from mrjob.job import MRJob
from mrjob.protocol import PickleProtocol
import numpy as np, sys

class MRAB(MRJob):
    INTERNAL_PROTOCOL = PickleProtocol

    def __init__(self, *args, **kwargs):
        super(MRAB, self).__init__(*args, **kwargs)
        self.buffer_size = 4
        self.n = 4
        self.data = []
        # an example B
        self.B = np.array([[-20.49390153,   0.        ,   0.        ,   0.        ],
                           [-22.59208669,  -5.25334361,   0.        ,   0.        ],
                           [-12.88188096, -11.41585875,   4.44244436,   0.        ],
                           [-12.93067597, -12.53849977,   2.54158031,  -4.37310096]])


    def mapper(self, key, line):
        line_vals = map(np.float,line.split())
        self.data.append(line_vals)
        if len(self.data) == self.buffer_size:
            mult = np.dot(self.data,self.B.T)
            self.data = []
            yield (key, mult)

    def reducer(self, key, tokens):
        for x in tokens:
            yield (key, str(x))

if __name__ == '__main__':
    MRAB.run()
```

```
! python AB.py A_matrix
```

```
using configs in /home/burak/.mrjob.conf
creating tmp directory /tmp/AB.burak.20131202.230008.985111
writing to /tmp/AB.burak.20131202.230008.985111/step-0-mapper_part-00000
Counters from step 1:
  (no counters found)
writing to /tmp/AB.burak.20131202.230008.985111/step-0-mapper-sorted
> sort /tmp/AB.burak.20131202.230008.985111/step-0-mapper_part-00000
```

```
writing to /tmp/AB.burak.20131202.230008.985111/step-0-reducer_part-00000
Counters from step 1:
  (no counters found)
Moving /tmp/AB.burak.20131202.230008.985111/step-0-reducer_part-00000 -> /tmp/AB.burak
Streaming final output from /tmp/AB.burak.20131202.230008.985111/output
null "[[ -61.48170459  -88.78963451  -62.09685608  -84.98432736]\n [ -20.49390153  -27
null "[[ -61.48170459  -99.29632173  -76.04368486 -131.21677204]\n [ -40.98780306  -55
null "[[-184.44511377 -250.6088727  -205.35232431 -234.71714361]\n [ -61.48170459  -99
null "[[ -61.48170459  -88.78963451  -62.09685608 -102.4767312 ]\n [ -61.48170459  -88
removing tmp directory /tmp/AB.burak.20131202.230008.985111
```

Kontrol edelim,

```
B = np.array([[-20.49390153,   0.        ,   0.        ,   0.        ],
              [-22.59208669,  -5.25334361,   0.        ,   0.        ],
              [-12.88188096, -11.41585875,   4.44244436,   0.        ],
              [-12.93067597, -12.53849977,   2.54158031,  -4.37310096]])
print np.dot(A,B.T)
```

```
[[ -61.48170459  -88.78963451  -62.09685608 -102.4767312 ]
 [ -61.48170459  -88.78963451  -62.09685608  -84.98432736]
 [ -61.48170459  -99.29632173  -76.04368486 -131.21677204]
 [ -40.98780306  -55.6908606   -39.7105907   -54.60139278]
 [-184.44511377 -250.6088727  -205.35232431 -234.71714361]
 [ -61.48170459  -99.29632173  -76.04368486 -131.21677204]
 [ -40.98780306  -55.6908606   -39.7105907   -54.60139278]
 [-184.44511377 -250.6088727  -205.35232431 -234.71714361]
 [ -61.48170459  -99.29632173  -76.04368486 -131.21677204]
 [ -40.98780306  -55.6908606   -39.7105907   -54.60139278]
 [-184.44511377 -250.6088727  -205.35232431 -234.71714361]
 [ -61.48170459  -88.78963451  -62.09685608 -102.4767312 ]
 [ -61.48170459  -88.78963451  -62.09685608  -84.98432736]
 [ -20.49390153  -27.8454303   -19.85529535  -27.30069639]
 [ -40.98780306  -55.6908606   -39.7105907   -54.60139278]
 [-184.44511377 -250.6088727  -205.35232431 -234.71714361]
 [ -81.97560612 -116.63506481  -90.83704015 -126.11438629]]
```

Carpimlar ayni. Yanliz dikkat, satirlarin sirasi degisik olabilir, burada problem esle/indirge isleminin $A$'yi parcalama sonucu her carpim parcasinin degisik bir sirada ele geciyor olmasi. Eger siralamayi ayni $A$ gibi istiyorsak, bu sira no'sunu $A$ verisi icinde ilk satira koymak lazim ve esleyiciler oradan alip bu no'yu anahtar olarak yayinlamalilar. Bu eklemeyi okuyucuya birakiyorum!

Simdi QR hesabini bu sekilde yapip yapamayacagimizi kontrol edelim. Eger `qr` ile Q hesaplarsak,

```
q,r = lin.qr(A)
print q
```

```
[[-0.14638501 -0.13188879  0.36211188 -0.35057934]
 [-0.14638501 -0.13188879  0.36211188  0.56410341]
 [-0.14638501 -0.51259871 -0.16600517 -0.02328772]
 [-0.09759001  0.03897744  0.26737941 -0.1251395 ]
 [-0.43915503  0.1753985  -0.14740047  0.02394349]
 [-0.14638501 -0.51259871 -0.16600517 -0.02328772]
```

```
 [-0.09759001  0.03897744  0.26737941 -0.1251395 ]
 [-0.43915503  0.1753985  -0.14740047  0.02394349]
 [-0.14638501 -0.51259871 -0.16600517 -0.02328772]
 [-0.09759001  0.03897744  0.26737941 -0.1251395 ]
 [-0.43915503  0.1753985  -0.14740047  0.02394349]
 [-0.14638501 -0.13188879  0.36211188 -0.35057934]
 [-0.14638501 -0.13188879  0.36211188  0.56410341]
 [-0.048795    0.01948872  0.1336897  -0.06256975]
 [-0.09759001  0.03897744  0.26737941 -0.1251395 ]
 [-0.43915503  0.1753985  -0.14740047  0.02394349]
 [-0.19518001 -0.11240007  0.04559899 -0.21745867]]
```

R'in tersi ile $A$ carpilinca hakikaten Q elde ediliyor mu? Kontrol edelim.

```
print np.dot(A,lin.inv(B.T))
```

```
[[-0.14638501 -0.13188879  0.36211188 -0.35057934]
 [-0.14638501 -0.13188879  0.36211188  0.56410341]
 [-0.14638501 -0.51259871 -0.16600517 -0.02328772]
 [-0.09759001  0.03897744  0.26737941 -0.1251395 ]
 [-0.43915503  0.1753985  -0.14740047  0.02394349]
 [-0.14638501 -0.51259871 -0.16600517 -0.02328772]
 [-0.09759001  0.03897744  0.26737941 -0.1251395 ]
 [-0.43915503  0.1753985  -0.14740047  0.02394349]
 [-0.14638501 -0.51259871 -0.16600517 -0.02328772]
 [-0.09759001  0.03897744  0.26737941 -0.1251395 ]
 [-0.43915503  0.1753985  -0.14740047  0.02394349]
 [-0.14638501 -0.13188879  0.36211188 -0.35057934]
 [-0.14638501 -0.13188879  0.36211188  0.56410341]
 [-0.048795    0.01948872  0.1336897  -0.06256975]
 [-0.09759001  0.03897744  0.26737941 -0.1251395 ]
 [-0.43915503  0.1753985  -0.14740047  0.02394349]
 [-0.19518001 -0.11240007  0.04559899 -0.21745867]]
```

Sonuclar birebir ayni.

Ustteki teknikleri kullanarak artik devasa boyutlarda satiri olan bir $A$ matrisi uzerinde artik QR hesabi yapabilirsiniz.

SVD Peki QR sonuclarini kullanarak SVD sonuclarini alabilir miyiz? SVD bize ne verir?

$$A = U \Sigma V^T$$

$U$ ve $V^T$ ortogonal matrislerdir, $\Sigma$ sadece kosegeni boyunca degerleri olan bir matristir. Daha fazla detay icin *Lineer Cebir Ders 29*'a bakabilirsiniz. Simdi $A = QR$ yerine koyalim,

$$QR = U \Sigma V^T$$

$$R = Q^T U \Sigma V^T$$

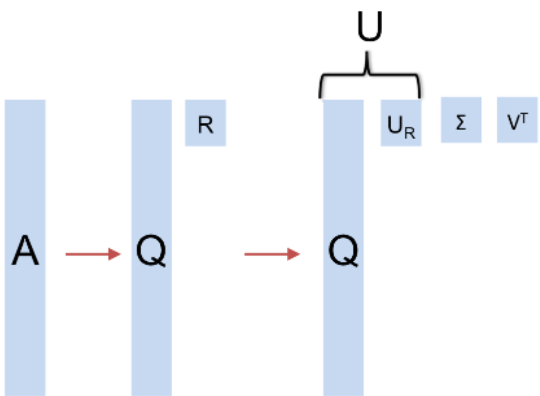
Bu son formuled $Q^T U$ formulu, iki ortogonal matrisin carpimidir. Lineer Cebir kurallarina gore iki ortogonal matrisin carpimi bir diger ortogonal matristir. Bu yeni ortogonal matrise $U_R$ adi verelim, o zaman

$$R = U_R \Sigma V^T$$

Bu son formul bize bir seyler soyluyor. $R$'nin SVD uzerinden ayristirilabilecegini soyluyor ve bu ayristirma sonrasi ele gecen $U_R$, $V^T$ ve $\Sigma$ kosegen matrisleridir! Bu cok onemli bir sonuc. Bu ayristirmanin sonucu $A$'nin ki ile birbirine cok benziyor, tek fark $U$ ile $U_R$. Bu iki matris arasindaki gecis soyle:

$$U_R = Q^T U$$

$$U = QU_R$$




Bu demektir ki eger $R$ uzerinde kutuphanemizin `svd` cagrisini kullanirsak (ki $R$ nispeten ufak oldugu icin bu ucuz olur) ele gecen $U_R$'i alip, $Q$ ile carparsak, $A$ ayristirmasinin $U$'sunu elde ederiz! $Q$ ile carpim esle/indirge uzerinden yapilabilir, fakat basit bir carpim islemi oldugu icin paralelize edilmesi kolaydir (ustteki mrjob script'inde yaptigimiz gibi).

Kaynaklar

[1] Benson, A., Tall-and-skinny Matrix Computations in MapReduce

[2] Constantine, P. G., Gleich, D. F. , Tall and Skinny QR factorizations in MapReduce architectures

[3] Dasgupta, S., Gupta, A., An Elementary Proof of a Theorem of Johnson and Lindenstrauss