

MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 13

Lagrange Carpanlari (Multipliers)

Amac $f(x, y, z)$ gibi birden fazla degisken iceren bir fonksiyonu maksimize etmek, degisik olan, x, y, z degiskenlerinin birbirinden bagimsiz olmamasi. Bu degiskenlerin arasindaki iliski $g(x, y, z) = c$ gibi bir fonksiyon tarafından gosteriliyor olabilir, c bir sabittir. Yani $f(x, y, z)$ 'i minimize ya da maksimize ediyoruz ve bunu sadece $g(x, y, z) = c$ sartina / sinirlama ifadesine (constraint) uyan x, y, z degerleri icin yapiyoruz.

Bunun icin hangi teknigi kullaniriz? Yollardan biri, eger sinirlama ifadesi basit ise, belki bir degiskeni cebirsel olarak cozebiliriz (digerleri baglaminda ifade ederek), sonra geri f 'e sokariz, Boylece klasik bir min / maks problemi elde ederiz, ki o tur bir problemi cozmeyi artik biliyoruz.

Fakat bazen x, y, z degiskenleri icin analitik cozum mumkun olmaz, o zaman farkli teknikler kullanmamiz gerekir. Bu derste ogrenecegimiz teknikler bunlar olacak.

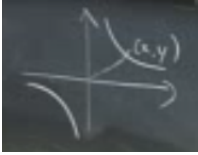
Uygulama baglaminda, Lagrange Carpanlari bize niye ilgilendiriyor? Belki fizik, termodinamik dersinde gormussunuzdur, sicaklik, hacim ve basinc degerleri vardir, ve bu degerler birbirinden bagimsiz degildir. Termodinamikte $PV = nRT$ denklemi vardir, gerci burada analitik olarak basitlestirme yapabiliriz, ama bazi sartlarda tum degiskenleri oldugu gibi tutmayi isteyebiliriz.

Simdiye kadar min / maks problemleri icin gordugumuz kritik nokta bulma tekniklerinin burada ise yarayamacagini hemen belirtelim. O kritik noktalar $g(x, y, z) = c$ sinirlama ifadesini tatmin etmiyor olabilirler. Baska bir seye ihtiyacimiz var.

Ornek

Hiperbol $xy = 3$ uzerinde olan ve orijine en yakin noktayi bul.

Aslinda bu soruyu temel geometri kullanarak cozebiliriz, fakat burada Lagrange Carpanlari kullanarak cozecegiz, cunku iyi bir ornek.



Neyi minimize edelim? Mesela $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ olur mu? Olabilir, ama karekok ifadesinden kurtulursak daha iyi olur.

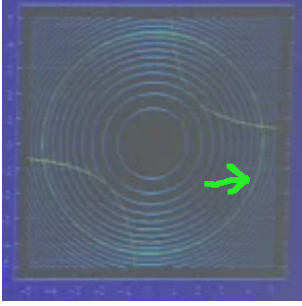
O zaman

$$\min f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\text{ki, } xy = 3$$

Yani sinirlama ifadesi $g(x, y) = xy$ olarak sectik.

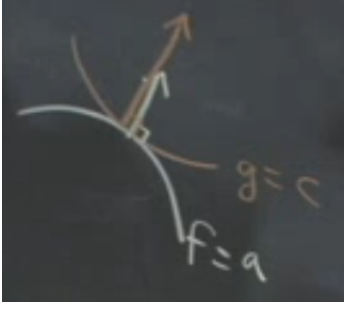
Grafiğe bakalım. Yuvarlaklar $f(x, y)$ konturları, yeşil okla gösterilen mesela $f(x, y) = 20$ konturu. Bu kontur üst sağ köşe ve sol alt köşede gösterilen hiperbolu kesiyor mu? Evet. Fakat $f(x, y) = 10$, vs. diyerek daha küçük yuvarlaklar elde edebilir miyim? Evet. Fakat bir noktadan sonra bu halkalar hiperbolu kesmeyecektir.



Aradığımız x, y değerleri hiperbole teğet olan, olabilecek en küçük yuvarlak.

Çözüm için teğetlik kavramından faydalanabiliriz. Eğer olabilecek en minimal f , her iki fonksiyonun kesit eğrilerinin teğet olduğu noktada ise, bu noktayı bulmaya uğrasabilirim.

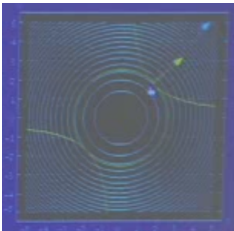
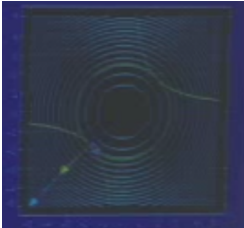
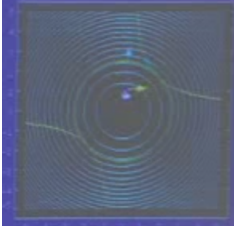
İki kesit eğrisi birbirine teğet ise, onların teğet düzlemi paraleldir, eğer öyleyse, bu düzlemlerin normaleri birbirine paralel olmalıdır.



Bu normallerin ayni boyda olmasi gerekmez, yukaridaki gibi, ama paralel olmalari gerekir. Bu durumda

$$\nabla f // \nabla g$$

ifadesi dogru olmalidir, yani f 'in gradyani g 'nin gradyanina paraleldir. Bazi ornekler



Goruldugu gibi minimal noktalarin birinde (ustteki son resim) gradyanlar paralel.

Cebirsel olarak dusunursek: vektorler ne zaman birbirine paralel olur? Birbirlerinin kati olduklari zaman. Yani su sekilde bir ifadeyi yazabildigimiz zaman

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

ki λ bir sabit.

Gradyanlar ayniyonu gostermiyor olabilir, bu durumu λ 'nin negatif olup olmamasi halledecektir.

Yani aradigimiz xy uzerinde sayisal deger λ uzerinden $\nabla f = \lambda \nabla g$ ifadesinin dogru oldugu bir nokta, ve λ degeri ariyoruz (unutmayalim, gradyanlar belli x, y degerleri uzerinden alinir). Yani 2 degisken iceren sinirlama ifadesi $g(x, y) = c$ iceren bir min / maks problemi yerine, bir denklem sistemi geciriyoruz. Bu sistem nedir? Yani ustteki gradyan formuludur, o da su sisteme donusur:

$$f_x = \lambda g_x$$

$$f_y = \lambda g_y$$

Oyle degil mi? Cunku ∇f ve ∇g birer vektordur,

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}, \quad \nabla g = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix}$$

O zaman iki ustteki denklem sistemi suradan ileri gelmektedir

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix}$$

Fakat hala eksik bir sey var. Elimizde x, y, λ bilinmeyenleri var, ama sadece iki tane formül var. Eksik olan $g(x, y) = c$, cunku x, y birbirinden bagimsiz degil ve g uzerinden baglantililar. Simdi oldu. 3 formül soyle:

$$f_x = \lambda g_x$$

$$f_y = \lambda g_y$$

$$g(x, y) = c$$

Ornegimiz

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$g(x, y) = xy$$

uzerinde uygularsak

$$2x = \lambda y$$

$$2y = \lambda x$$

$$xy = 3$$

Bu sistemi cozmemiz gerekiyor. Yanliz sunu soyleyelim, bu sistemi cozmenin genel (hep isleyen) bir yontemi yoktur. Cozum bazen cok basittir, bazen zordur, bazen sadece sayisal / numerik / hesapsal acidan cozulebilir (bilgisayar ile). Bu ornekte kolay.

$$2x - \lambda y = 0$$

$$2y = \lambda x = 0$$

$$xy = 3$$

Matris formuna koyarsak

$$\begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En basit cozum $x = 0, y = 0$ sinirlama ifadesi $xy = 3$ 'u cozmez. Diger cozum ne zaman ortaya cikar? Eger matrisin determinanti sifir ise.

$$\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -4 + \lambda^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

Elimizde iki durum var. λ ya 2, ya da -2.

1. $\lambda = 2$ durumunda

$$x = y$$

$$x^2 = 3$$

O zaman

$$(x, y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}) \text{ ya da } (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

2. $\lambda = -2$ durumunda

$$x = -y$$

$$-x^2 = 3$$

Bu durumda çözüm yoktur (karesi alınıp eksi ile carpılan hiçbir sayı 3 sonucunu vermez).

Ustteki son iki resime bakınca, $\lambda = 2$ 'nin doğru olduğunu görüyoruz, çözüm olan iki noktada bir gradyan otekinin hakikaten tam iki kati.

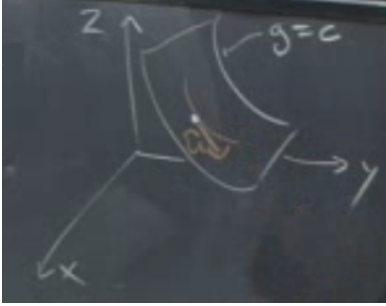
Bu metot niye isledi? Grafiklere baktik, tegetlik olduğunu gorduk, fakat bunun niye kesinlikle böyle olması gerektiğini söylemedik.

Kisitli ifade gozonune alininca ele gecek bir min / maks noktasında ve $g = c$ kesit egrisi boyunca, f 'in degisim orani = 0 olmalıdır.

Simdi ayni seyi yonsel turev kullanarak soyleyelim.

$g = c$ 'e teget olan her \hat{u} için $df/ds|_{\hat{u}} = 0$ olmalı.

Yani su resme bakarsak



Kesit yuzeyi (ki orada $g = c$) üzerindeki nokta ve o yuzeye teget olan yon \hat{u} yonunde f 'in degisimi sifirdir.

$df/ds|_{\hat{u}}$ formülünün $\nabla f \cdot \hat{u}$ formülüne esit olduğunu biliyoruz.

O zaman teget olan her \hat{u} , ∇f 'e dik olmalıdır, yani $\hat{u} \perp \nabla f$.

O zaman ∇f , g 'nin kesit seviyelerine diktir.

g 'nin kesit seviyelerine dik bir baska vektor daha biliyoruz, o da g 'nin kendi gradyani, yani ∇g .

O zaman $\nabla f // \nabla g$ olmalıdır cunku her iki gradyan da g 'nin kesit seviyelerine ayni anda diktir.

Tekrar edelim. Sinirlanmis min, maks noktasinda g kesit seviyesi uzerinde ilerliyorsak, f 'in (en azindan birinci derecedeki yaklasiksallamasindaki) degisimi sifirdir, yani $g = c$ 'ye teget yondeki herhangi bir f turevi sifir olmalidir. Min, maks olmak bu demek. O zaman $g = c$ 'ye teget olan herhangi bir \hat{u} , f 'in gradyani ∇f 'e dik olmalidir, ve bu da $\nabla f, g$ 'nin kesit seviyesine dik demektir.

Yani resimde gordugumuz tekrar soylemis oluyoruz. Her iki kesit seviyesi kisitlanmis min / maks noktasinda birbirine teget olmalidir.

UYARI

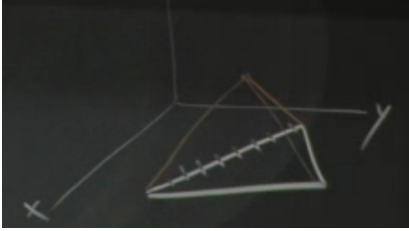
Bu metot bir cozumun min mi, maks mi oldugunu soylemez.

Kotu haber: 2. turev testini kullanamayiz.

Ne yapabiliriz? Elde edilen noktalar f 'e verip sonuca teker teker bakariz, birbirleri ile karsilastiriz. Mesela ustteki ornekten elde ettigimiz degerler minimum'dur, maks bu problemde sonsuzluktadir.

Zor Ornek

Diyelim ki bir piramit insa etmek istiyoruz, hacim ve ugensel taban bize veriliyor. Amac, tum dis yuzey alanini minimize etmek.

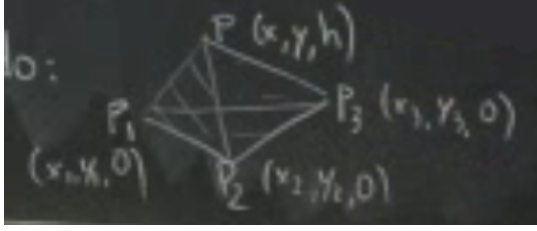


Cozum icin bulmamiz gereken piramidin en ust noktasi. Degisik yerlerde olabilecek, ve nerede olduguna gore hacimin, alanin degisebilecegi elimizdeki ayar noktasi orasi. Hacim formulu

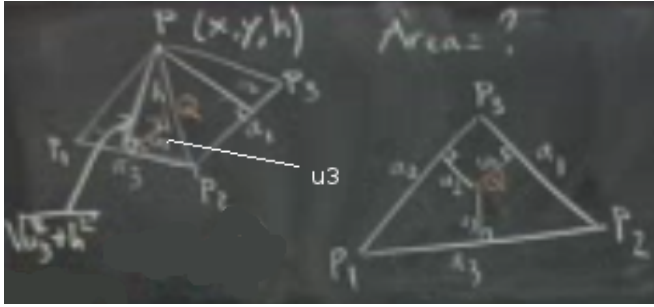
$$\text{Hacim} = \frac{1}{3} \text{Baz alanı} \times \text{yukseklık}$$

Hacmi ve baz alanı sabitlediysek, o zaman formilde geri kalan yukseklik te sabitlenmis demektir. Minimize ederken onun uzerinde oynayamayiz. O zaman ust nokta sadece xy duzlemine paralel olarak saga, sola, ileri, geri, vs.

sekinde yer degistirebilir, asagi, yukari cikamaz.



Eger kordinatlari ustteki gibi ortaya cikartsak, ele gecen tum ugenlerin alan hesabini vektor capraz carpimi ile hesaplamayi biliyoruz, onlari toplamini elde etmeye ugrasabilirdik, vs. Fakat ustteki yontem isleri daha fazla karistiriyor. Kordinatlari daha iyi temsil edecek bir yontem gerekiyor bize.



Temsili ustteki gibi yapalim, resimde sagda olan sekil piramidin kusbakisi goruntusu. Piramit tabaninda bir Q noktasini hayal edelim, P_1 ve P_2 arasindan Q 'ye giden uzaklik u_3 [resimde iyi cikmadi, biz ekledik], yuksekligi zaten biliyoruz, h . O zaman piramit kenarinda ona tekabul eden yukseklik $\sqrt{u_3^2 + h^2}$.

$$\text{Kenar alanı} = \frac{1}{2}a_1\sqrt{u_1^2 + h^2} + \frac{1}{2}a_2\sqrt{u_2^2 + h^2} + \frac{1}{2}a_3\sqrt{u_3^2 + h^2}$$

Bu 3 degisken iceren bir fonksiyon, $f(u_1, u_2, u_3)$.

Uc degiskeni birbiri ile nasil iliskilendiririz? Cunku buyuk bir ihtimalle bunlar bagimsiz degiskenler degiller.

Eger ust resimdeki sag sekile baktarsak, ve baz alanini uc parcaya bolsek, elde ettigimiz

$$\text{Baz alanı} = \frac{1}{2}a_1u_1 + \frac{1}{2}a_2u_2 + \frac{1}{2}a_3u_3$$

formuludur. Bu formul kisitlama ifadem, yani bu problemin g 'si. Kenar alani formulu de f 'im.

Lagrange

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{1}{2}a_1 \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + h^2}} = \lambda \frac{1}{2}a_1$$

$1/2a_1$ 'ler iptal olur

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + h^2}} = \lambda$$

Digerleri benzer sekilde

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + h^2}} = \lambda$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_3} = \frac{u_3}{\sqrt{u_3^2 + h^2}} = \lambda$$

Son uc formulun ucu de λ 'ya esit, o zaman uc formul birbirine esit. Bu mantigi izlersek, $u_1 = u_2 = u_3$ olmasi gerektigi sonucuna da variriz.

O zaman Q noktasi her kenardan esit uzaklikta, tam ortada (incenter) olmalı.