dy/dx bir kesir olarak gorulebilir mi?

Mesela Thomas Calculus 11th Baski, bolum 3.8 sf 225'te turev dy/dx'in bir kesir, bir oran olmadigi soylenir. Fakat bu sekilde gorulemez mi? Cunku $dy = f'(x)dx$ formulunde dx icin gercek sayilar verip sonucu (diferansiyeli) dy olarak hesaplayabiliyoruz. Eger bu formulu tekrar duzenlersek dy/dx for kesir olarak gorulebilirdi.. belki.

Fakat bu teorik olarak tamamiyle, her zaman islemiyor. Yani pratikte bazen bu sekilde gorebiliyoruz, fakat isin en temelinde durum boyle degil.

Tarihsel olarak, Calculus'u kesfeden matematikci Leibniz bu notasyonu ileri surdugunde dy/dx'i bir kesir olarak dusunmustu, bu degerin temsil ettigi buyukluk "x'deki sonsuz ufak (infinitesimal) degisimin y'de yarattigi sonsuz ufak degisime orani" olarak dusunuluyordu.

Fakat Calculus'un sonsuz ufakliklar mantigini reel sayilar cercevesinde kullanmak teorik olarak pek cok problemi beraberinde getiriyor. Bunlardan biri, sonsuz ufakligin reel sayilarin oldugu bir cercevede var olamamasidir! Reel sayilar onemli bir onsarti yerine getirirler, bu sartin ismi Arsimet Sarti'dir. Bu sarta gore, ne kadar kucuk olursa olsun herhangi bir pozitif tam sayi $\epsilon > 0$, ne kadar buyuk olursa olsun reel bir sayi $M > 0$ baglaminda, $n\epsilon > M$ sartini dogrulayacak bir dogal sayi n her zaman mevcuttur. Fakat sonsuz ufak bir ξ o kadar ufak olmalidir ki onu kendisine ne kadar eklersek ekleyelim, hicbir zaman 1'e erisemeyiz, ki bu durum Arsimet Sartina aykiri olur [..]

Bu problemlerden kurtulmak icin takip eden 200 sene icinde Calculus ta temelinden baslayarak sifirdan tekrar yazilmistir, ve simdi gorduklerimiz bu sifirdan insanin sonuclari (mesela limit kavrami bunun bir sonucu). Bu tekrar yazim sayesinde / yuzunden turevler artik bir oran degil, bir limit.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Bu "oranin limiti"ni "limitlerin orani" olarak yazamayacagimiz icin (cunku hem bolum, hem bolen sifira gidiyorlar), o zaman turev bir oran degildir.

Fakat Leibniz'in notasyonu o tur kullanimi ozendiriyor sanki, oraya dogru bir cekim yaratiyor, hatta bazen notasyonu o sekilde gormenin ise yaradigi bile oluyor, yani cogu zaman bu notasyon sanki *kesirmis gibi* davraniyor. Zincirleme Kanunu mesela

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Turevleri kesir olarak goruldugu bir durumda ustteki ifade hakikaten dogal duruyor. Ya da Tersi Fonksiyon (Inverse Function) teorisi

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

sonucu da eger turevleri kesir olarak dusunuldugu bir ortamda dogal gelecektir. Iste bu sebeple, yani notasyonun cok guzel ve ozendirdiginin cogunlukla dogru seyler olmasi sebebiyle artik bir limiti temsil eden notasyonu kullanmaya devam ediyoruz, her ne kadar artik gercekten bir kesiri temsil etmiyor olsa bile. Hatta su ilginc tarihi anektodu ekleyelim, bu notasyon o kadar iyidir, Newton'un notasyonu olan tek tirnak (y' gibi) isaretinden o kadar ileridir ki Ingiltere'deki matematik ve bilim kara Avrupa'sinin yuzyillarca gerisinde kalmistir, cunku Newton ve Leibniz arasinda Calculus'u kimin kesfettigi konusunda bir catisma yasandi (bugunku konsensus ikisinin de Calculus'u ayni anda kesfettigi uzerine), ve bu catisma ortaminda Ingiliz bilim cevresinin Avrupa'daki ilerlemeleri, Leibniz notasyonunu dislayip Newton'u takip etmeleri sonucunu getirdi.. ve bu sebeple pek cok alanda camura battilar / takilip kaldilar [..].

Sonuca gelirsek, dy/dx'i bir kesir gibi yaziyor, ve pek cok hesapta onu sanki bir kesirmis gibi kullaniyor, kullanabiliyor olsak bile, dy/dx bir kesir degildir, sadece filmde (bazen) o rolu oynar.