MIT OCW Hesapsal Bilim 18.085 Ders 4

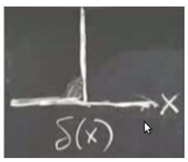
Delta fonksiyonlari

Bugun su turdeki diferansiyel denklemlere bakacagiz

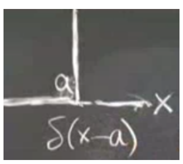
$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \delta(x-a)$$

$$u(0) = 0, \ u(1) = 0$$

Bu denklem a noktasinda bir noktasal yuku temsil ediyor, delta denklemi δ isareti ile gosteriliyor, delta kelimesi fizikte ve matematikte genelde "farklilik" anlaminda kullanilir. Fonksiyonel anlamda δ sifir oldugu yerde sonsuzluk degeri verir, geri kalan her yerde sifir degeri verir.



Eger 0 yerine baska bir noktada agirlik koymak istiyorsak, $x-a$ kullanabiliriz, boylece $\delta(..)$'ya a uzerinde sifir gider, ve o nokta sonsuz degeri dondurur.



Not: Noktasal yuk fiziksel olarak olasiligi az bir olay olabilir.

Delta fonksiyonlarinin bazi ozellikleri

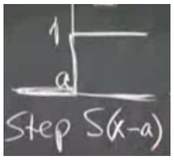
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

Yani delta fonksiyonunun tamaminin altinda kalan alan 1 degerine esittir. Daha genel olarak dusunelim. Delta fonksiyonunu baska bir fonksiyona "karsi" (onunla carparak) entegre edersem ne olur?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)g(x)dx = g(0)$$

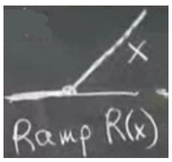
Bu esitligin ispati dokumanin altinda.

Grafiksel olarak delta fonksiyonunu entegre edince sunu elde ederiz

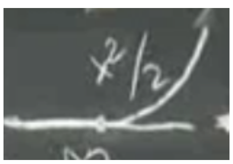


Bu fonksiyona adim (step) fonksiyonu, ya da Heaviside fonksiyonu adi veriliyor.

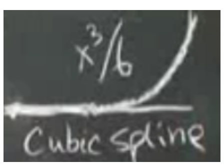
Bir kez daha entegre edince



Yokus (ramp) fonksiyonu elde ediyoruz. Bir kere daha entegre



Bir kere daha



Bu son fonksiyon kupsel spline fonksiyonudur, soyle ifade edilir:

$$C = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^3/6 & x \ge 0 \end{cases}$$

Simdi tersten dusunelim, bir spline C'nin uc kere turevini alsak, sifir noktasinda hangi deger geri gelir? $C'''(0) = 1$ degeridir, sifirdan once ise sifirdir. Bu ilginctir, kupsel spline son derece puruzsuz (smooth) bir fonksiyondur, fakat, tureve bakinca iyice anliyoruz ki, aslinda iki tane farkli fonksiyondur. Kupsel spline'larin bu ozelligi CAD programlarinda, cizimlerde cok ise yariyor.

Dort kere turevi alirsak yani C'''' nereye geliriz? δ fonksiyonuna doneriz. 4. turev diferansiyel denklemlerde kullanilir, 4. turevin bir yuke esitlinmesi cubuklarin (beam) bukulmesini modellerken kullanilir. Biyoloji, mekanik konularinda cogu denklem 2. seviyedendir, 4. seviye nadirdir.

Basa donersek: su denklemin genel cozumu nedir?

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \delta(x-a)$$

Ilk once ozel (particular) cozumu bulalim. Ikinci turevinin negatifi delta fonksiyonu olan fonksiyon nedir? Ustte ardi ardina entege ederken zaten bunu irdelemistik, isareti degistiriyoruz tabii cunku simdi negatiflik var, ama aradigimiz yokus fonksiyonu.

$$u(x) = -R(x-a)$$

Isimiz bitti mi? Hayir. Ikinci türevin sıfıra eşit oldugu iki cozum daha lazım, iki homojen cozum yani, bunlardan biri C digeri Dx. Cunku elimizde tatmin edilmesi gereken iki tane sınır sartı var.

$$u(x) = -R(x-a) + C + Dx$$

Sinir sartlarini yerine koyalim

$x = 0$ icin $0 = 0 + C + 0$. Rampa fonksiyonu a'dan yukselmeye baslayan, egimi $x - a$ olan, baslangicta sifir olan bir fonksiyondur.

$x = 1$ noktasinda rampanin fonksiyonunun degeri $1 - a$'dir.

Yerine koyalim: $C = 0$. Onu kullanarak devam edelim, ikinci sart icin:

$$u(x) = -R(x-a) + C + Dx$$

$$-(x-a) + C + Dx = 0$$

$C = 0$ ise

$$-(1-a) + D = 0$$

$D = 1 - a$

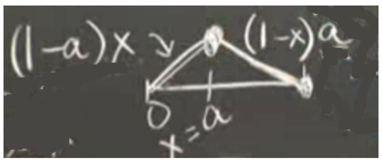
Tamami

$u(x) = -R(x-a) + (1-a)x$

a noktasi sonrasinda rampa fonksiyonu $x - a$ olduguna gore

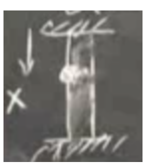
$-(x-a) + (1-a)x = -x + a + x - ax = a - ax = a(1-x)$

Grafik



$u(x)$'in kesintisiz (continuous) bir fonksiyon oldugunu soyleyebiliriz. $u'(x)$ 1 kadar asagi iner. Egimi (slope) grafiklersek nasil olur?

Problemi fiziksel sekilde gorsellemek gerekirse, iki ucu sabitlenmis elastic cubugu cizelim:



Cubugun uzerindeki noktayi oraya asilmis bir agirlik olarak dusunelim. $\delta(x-a)$ ile belirtmeye calistigimiz bu degil mi, bir noktaya konsantre bir agirlik uyguluyoruz. Bu agirligi uygulayinca ne olur? Nokta altinda sıkısma, ustunde ise esneme olur.

$u(x)$ tabii ki hep pozitiftir, yani cubugun tum noktalari asagi iner. Ama bazi noktalar uzerinde sıkısma, pozitif egim, digerleri uzerinde esneme (negatif egim) vardir.

Bir ucu serbest, digeri sabitlenmis problemi cozelim.

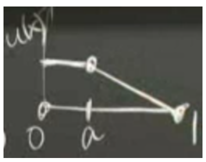
$u'' = \delta(x-a)$

$u'(0) = 0, \; u(1) = 0$

Sartlari kullaninca,

$u(x) = -R(x-a) + Cx + D$

$x = 0$ noktasinda rampa daha baslamadi, $Cx+D$ kalir, turevi C, esittir sifir. $C = 0$. $u(x)$ grafigi neye benzer?



Elastik cubuga ne olacak?

Gri olarak nitelenen yer a'nin altinda olan yer, ve ol bolum bir sıkışma yasadi. Onun ustundeki bolum de tamamen asagi dogru indi, ama tum noktalari ayni miktarda asagi indi, o bolgede x degistikce "degisim degismiyor", ki u' turevinin tanimi bu degil mi?

Soru: $u(x)$'in y eksenini kestigi noktadaki degeri nedir? Grafige bakalim, a sonrasi asagi dogru inen egim -1. a sonrasi $u(x) = 1-x$ ve inis x ekseninde 1 noktasina dogru. $u(x)$ y eksenini nerede kesiyor olabilir? Eger $u(x) = 1-a$ ise, ancak o zaman a noktasinda once ve sonra degerler ayni sonucu verir.

Problemi ayriksal olarak cozelim. $h = 1/6$ olsun, o zaman ayriksal u 5 elemana sahip olacak. Once sabit / sabit problemini cozelim.

$$KU = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

Esitligin sag tarafindaki vektor icinde ikinci hucrede 1 degeri var. O bizim daha once $\delta(x-a)$ ile belirttigimiz noktasal agirlik. K'nin ust sol kosesindeki degeri 2 olarak secmekle sabit / sabit sinir sartlarini koymus oluyoruz.

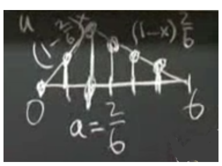
Problemin cebirsel cozumunu tekrar yazalim, ama bu sefer rampa fonksiyonu kullanmadan, parca parca yazalim, boylesi daha temiz olacak.

$$u(x) = \begin{cases} 1-a & x \le a \\ 1-x & x \ge a \end{cases}$$

Sonuc ayriksal olarak su sekilde cizilebilir:

Aslinda esitligin sag tarafinda delta (ve sabit) oldugu sartlarda "sansliyiz" cunku bu durumlarda ayriksal sonuc gercek sonucun tam ustunde cikiyor. Bu sansliligin sebebi, aslinda, ustteki deltadan basamaga, oradan rampaya, vs. gecmek icin kullandigimiz entegral yerine, ayriksalda toplama kullaninca anlasiliyor, o gecis sirasinda da toplamlar ve entegraller tam uyum halindeler, bu da dogal olarak diferansiyel denkleme yansiyor.

Neyse, sayilari da yerine koyarak elle bulunabilecek bir sonuca erisebiliriz.



Teori

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) g(x) dx = g(0)$$

Ispat

Parcali entegral yontemini uygularsak,

$$\int u \ dv = uv - \int v \ du$$

$$u = g(x), \ dv = \delta(x) dx$$

$$\int_{-A}^{A} g(x)\delta(x)dx = g(x)u(x)\Big]_{-A}^{A} - \int_{-A}^{A} u(x)\frac{dg(x)}{dx}dx$$

$-A$ ve A entegral sınırları sıfırı ortalayacak sekilde secilmis iki degerdir, A herhangi bir sayi olabilir. $u(x)$ $\delta(x)$ fonksiyonunun entegrali olduguna gore $x = 0$ oncesi sifir, sonrasi 1 olacak. O zaman birinci kısım

$$g(x)u(x)\Big]_{-A}^{A} = g(x)u(x)\Big]_{0}^{A} = g(A) \cdot 1 = g(A)$$

$x = 0$ oncesi onemli degil cunku orada $u(x) = 0$.

Ikinci kisim

$$\int_{0}^{A} 1 \cdot \frac{dg(x)}{dx}dx = g(A) - g(0)$$

Biraraya koyarsak

$$g(A) - (g(A) - g(0)) = g(A) - g(A) + g(0) = g(0)$$

Ispat boylece tamamlaniyor.

Soru 1.2.2

$u''(x) = \delta(x)$, $u(-2) = 0$ ve $u(3) = 0$ problemini coz. Parcalar $u = A(x+2)$ ve $u = B(x-3)$ $x = 0$ noktasinda birlesiyor. $U = (u(-1), u(0), u(1), u(2))$ vektorunun $KU = F = (0, 1, 0, 0)$ problemini cozdugunu goster.

Cozum

Yukarida cozumun hangi formda olacagi A ve B uzerinden verilmis, burada guzel bir numara var (alternatif cozumde bunu anlattik), fakat biz once derste daha gosterilen yontem uzerinden cozumu kendimiz bulalim.

Ozel (particular) cozum nedir?

$$u(x) = -R(x) + C + Dx$$

Bildigimiz gibi $R(x)$ rampa fonksiyonu soyle:

$$R(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & x \ge 0 \end{cases}$$

Simdi sınır sartlarini kullanarak $u(x)$ icinde yerine koyalim:

$$u(-2) = -R(x) + C - 2D = 0$$

$u(-2) = C - 2D = 0$

$x = -2$ yani sifirdan kucuk oldugu icin $-R(x) = 0$ oldu ve onu formulden attik.

$u(3) = -3 + 3D + C = 0$

Burada $x = 3$, o yuzden $-R(3) = -3$ kullanildi. Sonuc

$C = 2D$

$3 + 3D + 2D = 0$

$5D - 3 = 0$

$D = \dfrac{3}{5}$

O zaman

$C - 2(\dfrac{3}{5}) = 0$

$C = \dfrac{6}{5}$

Sifirdan oncesi ve sonrasi icin (degisik $R(x)$ durumlarina gore) fonksiyonu parcali bir sekilde yazarsak

$$u(x) = \begin{cases} \frac{6}{5} + \frac{3}{5}x & x \le 0 \\ -x + \frac{6}{5} + \frac{3}{5}x = \frac{6}{5} - \frac{2}{5}x & x \ge 0 \end{cases}$$

Birinci kismi sadelestirirsek

$\dfrac{6}{5} + \dfrac{3}{5}x = \dfrac{3}{5}(x+2)$

Ikinci kismi sadelestirirsek

$\dfrac{6}{5} - \dfrac{2}{5}x = -\dfrac{2}{5}(x-3)$

Problemin hazir verdigi forma, ve sonuca eristik.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as lin
```

```
import ktbc

K,T,B,C = ktbc.ktbc(4)

print lin.inv(K)

[[ 0.8  0.6  0.4  0.2]
 [ 0.6  1.2  0.8  0.4]
 [ 0.4  0.8  1.2  0.6]
 [ 0.2  0.4  0.6  0.8]]
```

Bir sonraki derste gorecegimiz gibi ustteki sonucun 2. kolonu aradigimiz sonuc (cunku delta agirligi 2. hucre uzerinde). Bu kolondaki degerleri teker teker $x = -1, 0, 1, 2$ degerlerini $u(x)$'i hesaplayarak kontrol edelim.

$6/5 + 3/5(-1) = 3/5 = 0.6$

$6/5 + 3/5(0) = 6/5 = 1.2$

$6/5 - 2/5(1) = 4/5 = 0.8$

$6/5 - 2/5(2) = 2/5 = 0.4$

Sonuclar birebir uyuyor.

Alternatif Cozum

Problemin cebirsel cozumu icin bir yontem daha var, hatta ders notlarindaki 1.2.2 cozumu bu yontemi kullaniyor.

$u(x)$'in formunun lineer olacagini bildigimizden, ve bu formul icinde bir rampa fonksiyonu olmasindan hareketle, cozumun iki lineer parca icerdigini ve bu parcalarin 0 noktasinda birlestigini farzedebiliriz. Soyle iki fonksiyon buluruz: $A(x+2)$ ve $B(x-3)$. Bu her iki fonksiyonun -2 ve +3 noktalarinda sifir olduguna dikkat, ki bu diferansiyel denklemin sinir sartlari ile uyumlu.

Simdi alttaki numaralara bakalim, tek bir integral, ve tek bir turev alarak cok daha basit cebirsel ifadelerle calisma imkani var. Iki tarafin entegrali:

$$-\int u''(x) = \int \delta(x)$$

$$-[u'(x)]_L^R = 1$$

R ve L sag (right) ve sol (left) ibareleri, delta fonksiyonunun yogunluk yarattigi noktanin sagindaki ve solundaki herhangi birer nokta icin kullaniliyor, delta fonksiyonunun entegralini alirken bu noktanin "uzerinden gecersek" sonuc her zaman 1 verecektir. O noktalarin tam olarak ne oldugu onemli degil, cunku $x = 0$ solunda ve solunda egim her noktada ayni.

$u'_R(x) - u'_L(x) = -1$

Ustteki turevleri formlara uygulariz

$B - A = -1$

Iki parca $x = 0$ noktasinda birlesiyor, o zaman

$A(0 + 2) = B(0 - 3)$

$A = -\frac{3}{2}B$

Birlestirince

$B - (-3/2B) = -1$

$B = -0.4$

$A = 0.6$

Soru 1.2.4

```
import numpy as np
import scipy.linalg as lin

DB = lin.toeplitz([1, -1, 0], [1, 0, 0])
print DB; print lin.inv(DB)

DF = lin.toeplitz([-1, 0, 0], [-1, 1, 0])

D_0 = (DF + DB) / 2
print D_0
```

```
[[ 1  0  0]
 [-1  1  0]
 [ 0 -1  1]]
```

```
[[ 1.   0.   0.]
 [ 1.   1.   0.]
 [ 1.   1.   1.]]
```

`D_0` matrisini soruda istendigi sekilde yarattik. Bu matrisin null uzayi, yani `D_0 u = 0` denklemindeki u sifir olmadigi icin, bu matris tersine cevirilemez demektir, yani matris tekil (singular) demektir.

Soru 1.2.10

27. denklemden bahsediliyor, bu yanlis. Sorunun istedigini kodlamak daha iyi: Δ_+ icin `DF` ve Δ_- yerine `DB` kullanip, carpimini alirsak,

```
import numpy as np
import scipy.linalg as lin

DB = lin.toeplitz([1, -1, 0], [1, 0, 0])
print "backward"
print DB

DF = lin.toeplitz([-1, 0, 0], [-1, 1, 0])
print "forward"
print DF

print "\n"

print np.dot(DF, DB)
```

Carpim

```
[[-2  1  0]
 [ 1 -2  1]
 [ 0  1 -1]]
```

Bu matriste $u = 0$ sinir sartinin hangi satir ile temsil edildigi soruluyor, yani $u(..) = 0$ sartinda '..' neresi? Bu sart icin sol taraftaki kolonun atildigini hayal edelim, geriye kalanlar ust 1. satiri [-2 1] uzerinden $u(0) = 0$ sartini zorlar. Dogru cevap 1. satir.

Peki $u'(..) = 0$ sarti hangi satirla, yani hangi '..' degeriyle zorlanir? En alt satir gibi duruyor, kontrol edelim,

$$\frac{u_4 - u_3}{h} = 0$$

o zaman

$$u_4 = u_3$$

Matrisin en son satirini cebirsel sekilde yazalim

$$\frac{u_4 - 2u_3 + u_2}{h}$$

$u_4 = u_3$ oldugu icin

$$= \frac{u_3 - 2u_3 + u_2}{h}$$

$$= \frac{-u_3 + u_2}{h}$$

Son ifade matrisin sonuncu satirini aynen tarif ediyor.

Soru 1.2.19

Cebirsel olarak bu denklemi cozmek icin onun sabit katsayili, 2. seviye (homojen olmayan -sifira esit degil-) denklem oldugunu gormek yeterli. Once ana denklemle baglantili homojen denklemi (sifira esitlenmis halini yani) cozeriz.

$$-u'' + u' = 0.$$

Bu denklemi cozmek icin karakteristik denklemini buluruz (bkz MIT OCW ODE Ders 9). Bu denklem $-r^2 + r = 0$ olacaktir, kokleri 0 ve 1, o zaman homojen denklemin cozum yelpazesini $e^{0x} = 1$ ve e^x tanimlar. Genel cozum demek ki

$$\mathbf{s} + A + Be^x$$

olur, ki A ve B rasgele sabitlerdir, ve $\mathbf{s}$, $-u'' + u' = 1$ denkleminin ozel (particular) bir cozumudur. $u(x) = x$'in bu ozel cozum oldugunu bulmak zor degildir, o zaman cozumun tamami

$$u(x) = x + A + Be^x$$

olacaktir.

$$u(0) = A + B = 0$$

$A = -B$

$u(1) = 1 + -B + Be^1 = 0$

$B = \dfrac{1}{1-e}$

$A = \dfrac{-1}{1-e}$

Denklemin tam cozumu

$u(x) = x - \dfrac{1}{1-e} + \dfrac{1}{1-e}e^x$

```
import numpy as np
import scipy.linalg as lin
import ktbc

K,T,B,C = ktbc.ktbc(4); print K

C = lin.toeplitz([0, -1, 0, 0], [0, 1, 0, 0]); print C

print "ortalanmis",  lin.solve((25*K + 2.5*C), [1.,1.,1.,1.])

F = lin.toeplitz([-1, 0, 0, 0], [-1, 1, 0, 0]); print F

print "ileri farklilik", lin.solve((25*K + 2.5*F), [1.,1.,1.,1.])

def ux(x): return x - 1/(1-np.e) + np.e**x/(1-np.e)

print ux(0.2), ux(0.4), ux(0.6), ux(0.8)
```

Sonuc (numerik cozum)

```
ortalanmis [ 0.07135546  0.11412325  0.12195055  0.0870728 ]

ileri farklilik [ 0.07956826  0.123533    0.12793827  0.08838856]
```

Bu cozumlerden ortalanmis olanin daha iyi oldugunu gorebiliriz.

Soru 1.2.21

$u(h) = u(0) + hu'(0) + \frac{1}{2}h^2u''(0) + ..$ acilimini ve “sifir egim kosulu” yani

$u'(0) = 0$ olarak belirtilen sinir sartini ve $-u'' = f(x)$ ifadesini kullanarak $u_0 - u_1 = \frac{1}{2}h^2 f(0)$ seklinde ust sinir sartini turet. $\frac{1}{2}$ faktoru $O(h)$ hatasindan kurtulmamiza yarayacak.

Oncelikle turetmemiz istenen seyin 2. Ders Problem 1.2 A'da kullanilan ifade ile ayni oldugunu gorelim. O problemde $u_0 - u_1 = \frac{1}{2}h^2 f(0)$ ifadesine farkli bir yonden erismistik, orada ortalama farklilik teknigini kullanmistik. Burada Taylor acilimini kullaniyoruz, ve ayni noktaya geliyoruz!

$u(0)$ noktasindayiz, ve ileri dogru h adimi atiyoruz, bu adimi Taylor acilimi ile nasil gosteririz?

$$u(h) = u(0) + h \cdot u'(0) + \frac{1}{2}h^2 u''(0) + ...$$

Degil mi? Simdi, elimizde diferansiyel denklemin tanimindan gelen bazi tanimlari kullanarak ustteki denklemi degistirelim. $-u''(x) = f(x)$ ise, $u''(0) = -f(0)$ demektir. Ayrica $u'(0) = 0$ ise $h \cdot u'(0)$ denklemden atilabilir. Noktadan sonrasini biz atiyoruz, yaklasiksal olarak temsil ettigimiz icin, o zaman

$$u(h) = u(0) - \frac{1}{2}h^2 f(0)$$

$$u_1 - u_0 = -\frac{1}{2}h^2 f(0)$$

$$u_0 - u_1 = \frac{1}{2}h^2 f(0)$$

Ve Cozulmus Problem 1.2 A'daki tanimin aynisina eristik.

Problem 1.4.5

$-u'' = \delta(x-a)$ denkleminin serbest-serbest sartlari, yani $u'(0) = 0$ ve $u'(1) = 0$ uzerinden cozumu *olamayacagini* goster, bu durumda C ve D sabitleri bulunamayacak.

Cozum

Tam cozum neydi?

$$u(x) = R(x-a) + Cx + D$$

Eldeki sartlar sadece $u'(x)$ icin olduguna gore ustteki denklemin turevini alalim, ve 0 ve 1 degerlerini yerine koyarak ele gecen sonuca bakalim.

$u'(0) = 0 + C = 0$

Rampa fonksiyonunun turevi basamak fonksiyonu, fakat o noktada daha basamak baslamamis (yani sifir seviyesinde). Aslinda soruda $a > 0$ bilgisini verseler iyi olurdu, her neyse, bu sebeple ilk terim 0. Cx'den geriye C kalir, D yokolur.

$C = 0$

Diger kosulla

$u'(1) = -1 + C + 0 = 0$

Bu noktada basamak baslamis, cunku a noktasi ilerisindeyiz, basamak fonksiyonu 1 degerinde, negatifi alindigi icin sonuc -1. Devam edersek:

$C = 1$

Bu bir absurtluk ortaya cikarti, C'nin hem 0 hem 1 olmasi mumkun degildir. Demek ki serbest-serbest probleminin cozumu yoktur.