Kesit Seviyeleri, Kenar Bazli Imaj Gruplamak

Bir dijital imaji renklere, objelere gore belli parcalara bolmek (segmentation) icin, matematiksel bir formul kullanmak iyi cozumlerden biridir. Bunu yapmanin bazi yollari var. Basitlestirerek bir ornek verelim: diyelim ki gruplama icin elimizdeki formul bir yuvarlak formulu $x^2 + y^2 - c = 0$, ki c bir sabit. Bu formulu x ve y kordinatlari uzerinde bastigimiz zaman radius'u $\sqrt{c}$ olan bir cember elde ederiz. Gruplama icin bu cemberi buyutup kucultebildigimizi farzedelim, cember imaj uzerindeki istedigimiz bolume en iyi uydugu anda gruplamayi basarili olarak kabul ediyoruz.

Fakat problem surada: eger imajda birden fazla grup var ise, o zaman birden fazla cember gerekecektir, bu sefer algoritmik olarak ustteki formulu ikinci, ucuncu kere yaratmamiz, ve o formullerin o gruplara uyumunu ayri ayri takip etmemiz gerekirdi. Ya da diyelim ki ozyineli (iterative) bir uydurma islemi takip ediyoruz, bu islem sirasinda belki iki cemberin birlesmesi gerekse, o zaman iki formulu silip, yerine yenisini olusturmakla ugrasmak gerekli olacakti. Bunlar hem matematiksel, hem kodlama acisindan kulfet olusturacaktir.

Kesit Seviyeleri kavramini kullanarak bu isi daha basitlestirebiliriz. Diyelim ki bolme gorevini yapan ϕ adli fonksiyonumuzu 2 boyutlu olmak yerine 3 boyutlu eksende tanimladik, ve, 2 boyutta bolme yapma gorevini onun bir kesitine verdik. Kesit derken, alttaki uc boyutlu fonksiyonu yatay olarak bir noktadan "kestigimizi" farz ediyoruz, ve o kesit uzerinde dusen ϕ degerlerine bakiyoruz.

Bakic acisimizi, tanimlamamizi degistirerek, bazi avantajlar elde etmeyi umuyoruz aslinda. Altta iki tane ϕ fonksiyonu ve onlarin altinda kesitlerini gorebiliriz.

Kesit Seviyeleri teknigini kullanarak elde ettigimiz avantaj nedir? Artik sadece **tek** bir ϕ fonksiyonu kullanarak 2 boyutlu imajimiz uzerinde birbirinden ayri gruplamalar yaratabiliyoruz. Bu gruplar birbiri ile birlesebilir, ayrilabilir, bu artik bizi ilgilendirmiyor. Biz sadece 3. boyuttaki ϕ fonksiyonunu degistirmekle ugrasacagiz, imaj uzerindeki gruplamalar ise o fonksiyonun 2. boyuta yansimasi (projection) uzerinden kendiliginden gerceklesecekler.

Matematiksel olarak ϕ fonksiyonunu nasil temsil ederiz? ϕ fonksiyonu x, y, boyutlarini alip bize bir ucuncu z boyutu dondurmeli, ayrica bu fonksiyonu imaji parcalarina ayirma islemini gerceklestirmek icin kademeli olarak degistirmeyi planladigimiza gore, o zaman bir t degiskeni de gerekiyor. Yani $\phi(x, y, t)$ fonksiyonu. Gruplama icin kullanilacak kesiti ise sifir kesiti olarak alalim, yani $\phi(x, y, t) = 0$. Dogal olarak

$$\frac{d}{dt}(\phi(x, y, t) = 0) = 0$$

Simdi x, ve y degiskenlerinin zaman gore degisimini formule bir sekilde dahil etmek lazim. Bunun icin sifir kesit seviyesi uzerinde bir parcacik hayal edilir, ve bu parcacigin gittigi yol $x(t)$, ve $y(t)$ olarak tanimlanir. O zaman

$$\frac{d}{dt}(\phi(x(t), y(t), t) = 0) = 0$$

Tam diferansiyel formulunden hareketle:

$$d(\phi(x(t), y(t), t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial t}dt = 0$$

$$\frac{d(\phi(x(t), y(t), t))}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

$$\frac{d(\phi(x(t), y(t), t))}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \phi_t = 0 \qquad (1) \quad \text{(eq1)}$$

Temsilen daha kisa bir isaret kullanmak gerekirse, $\bigtriangledown$ ile ϕ'nin gradyanini (gradient) alarak, elde edilecek vektorun nokta carpimini kullanabiliriz. O zaman formul eq1 1 daha kisa olarak:

$$\phi_t + \bigtriangledown\phi \cdot \vec{V} = 0$$

olarak temsil edilebilir, ki

$$\bigtriangledown\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

$$\vec{V} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

Iki vektorun nokta carpimi bilindigi gibi sirayla her iki vektorun sirasiyla uyan elemanlarinin birbirleri ile carpilmasi ve o carpimlarin toplanmasidir.

$\vec{V}$ vektoru neyi temsil eder? Formule gore bu vektor ϕ'nin uzerindeki degisimi etkiliyor, ve bu degisimler t'nin degisimine gore tanimlandigina gore bu degerler "hiz" olarak tanimlanabilir. Imaj baglaminda dusunursek mesela ϕ renklerin ayni oldugu yerlerde yuksek hizda, renklerin degistigi yerler dusuk hizda degisebilir seklinde bir kurgu yapilabilir, iste bu bolgelerde degisiminin hizini $\vec{V}$ ile gosterebiliriz.

$\vec{V}$ yerine kesit seviyelerine dik olan (normal) vektorler ile calismak isteseydik, $\vec{V}$'yi dik ve teget bilesenlerine ayirarak tekrar temsil edebilirdik: $\vec{V} = V_N\vec{N} + V_T\vec{T}$. Bu formulde $\vec{T}$ teget, $\vec{N}$ dik vektorler, N ve T skalar. Yerine koyalim:

$$\phi_t + \bigtriangledown\phi \cdot (V_N\vec{N} + V_T\vec{T}) = 0$$

ϕ'ye gore dik vektorun diger bir formulu $\vec{N} = \frac{\bigtriangledown\phi}{|\bigtriangledown\phi|}$ olduguna gore

$$\phi_t + (\bigtriangledown\phi \cdot V_N\frac{\bigtriangledown\phi}{|\bigtriangledown\phi|} + \bigtriangledown\phi \cdot V_T\vec{T}) = 0$$

Devam edelim: $\bigtriangledown\phi$ yuzeye dik olduguna gore, bu dik vektorun teget olan $\vec{T}$ ile noktasal carpimi sifir degerini verecektir, o carpim formulden atilabilir. Kalanlar:

$$\phi_t + (\bigtriangledown\phi \cdot V_N\frac{\bigtriangledown\phi}{|\bigtriangledown\phi|}) = 0$$

Daha da kisaltabiliriz: $\bigtriangledown\phi \cdot \bigtriangledown\phi = |\bigtriangledown\phi|^2$ oldugunu biliyoruz, gradyanin kendisi ile noktasal carpimi, o gradyan vektorunun uzunlugunun karesidir. Daha genel olarak, bir vektorun uzunlugu, o vektorun kendisi ile noktasal carpiminin karekokudur. Ayni sey. O zaman en son formulde bu carpimi gerceklestirip, uzunluk olarak yazalim:

$$\phi_t + V_N\frac{|\bigtriangledown\phi|^2}{|\bigtriangledown\phi|} = 0$$

$$\phi_t + V_N|\bigtriangledown\phi| = 0$$

Simdi bu formul hakkinda biraz anlayis gelistirelim. Eger elimizdeki bir ϕ seviye kesitinin seklen oldugu gibi kalmasini ama sadece kuculmesini isteseydik, ϕ'nin normalinin tersi yonunde bir buyume tanimlamamiz gerekirdi. Normal vektor disa dogru isaret ettigine gore ustteki formulde mesela $V_N = -1$ tanimlayabilirdik. O zaman

$$\phi_t + -1|\bigtriangledown\phi| = 0$$

$$\phi_t = |\bigtriangledown\phi|$$

Hesapsal olarak bunu nasil gerceklestiririz? 80 x 80 boyutunda bir matris icinde ϕ fonksiyonu ayriksal olarak tutalim. Yani 80 tane x, 80 tane ayri y degeri var, her x ve y degerlerin kombinasyonlarina tekabul eden ϕ degerleri bu matris icinde. Gradyanin ne oldugunu hatirlayalim. Gradyan

$$\bigtriangledown\phi = \Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\Big)$$

olarak tanimlidir, ve her (x_i, y_i) noktasindaki $\phi(x_i, y_i)$ degerine gore degisik bir vektor sonucunu getirecektir. Bilgisayar dunyasinda parcali turevler hesapsal "farkliliklara" donusurler, `phi` matrisindeki farkliliklari Python ile

```
gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
```

olarak hesaplayabiliriz. Ustte elimize gecen gradyan dizinlerindeki degerler ile $|\bigtriangledown\phi|$ buyuklugunu hesaplayabiliriz, ve bu sonucu ϕ uzerindeki degisim orani ϕ_t olarak kabul ederiz. O zaman ϕ_t ile zaman t degimi `dt` carptigimiz zaman ele gececek olan ϕ'nin degisimidir. Dongunun her basamaginda eski `phi` degerlerine bu farklari ekledigimiz zaman ϕ fonksiyonu istedigimiz gibi evrilecektir.

Alttaki kodda bizim baslangic ϕ'miz kenarlardan w uzakliginda ici bos bir kutu olacak. Sifir seviyesindeki kesit seviyesinin nasil iki boyutlu goruntudeki kirmizi cizgilere tekabul ettigini gorebiliriz.

Listing 1: active1.py

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import plot_phi
import time

# initial function phi - level set is a square 4 pixels
# away from borders on each side, in 3D it looks like an empty
# box
c0=4; w=4
nrow, ncol= (80,80)
phi=c0*np.ones((nrow,ncol))
phi[w+1:-w-1, w+1:-w-1]=-c0
plot_phi.plot_phi(phi)

dt=1.
```

```
iter=0

plt.ion()

while iter < 20:
    # gradient of phi
    gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
    # magnitude of gradient of phi
    absGradPhi=np.sqrt(gradPhiX**2+gradPhiY**2)
    dPhiBydT = 1 * absGradPhi
    # level set evolution equation
    phi = phi + ( dt * dPhiBydT )
    iter=iter+1
    time.sleep(0.6)
    plt.hold(False)
    CS = plt.contour(phi,0, colors='r')
    plt.draw()
    plt.hold(False)
    iter += 1
```

Ustteki kod isleyince sifir kesit seviyesinin (kirmizi cizgiler) olduklari gibi kuculduklerini gorecegiz.

Ortalama Egim (Mean Curvature) Kullanmak

Eger sabit hiz yerine sifir kesit seviyesinin herhangi bir noktada ne kadar "egri" olduguna gore ilerlemesini isletseydik ne olurdu? Diyelim ki cok egri bolgelerde cok hizli, az egik (duz, duze yakin) bolgelerde ilerleme az hiz istiyoruz. O zaman hangi sekille baslarsa baslasindalar ϕ kesiti sonucta bir cember sekline dogru evrilecektir. Ortalama egim (mean curvature) hesabi icin su denklem kullanilir:

$$\kappa = -div\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)$$

Bu formulun turetilmesini burada yapmayacagiz. Python kodu soyle:

Listing 2: active2.py

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```
import time

# initial function phi - level set is a square 4 pixels
# away from borders on each side, in 3D it looks like an empty
# box
c0=2; w=2
nrow, ncol= (30,30)
phi=c0*np.ones((nrow,ncol))
phi[w+1:-w-1, w+1:-w-1]=-c0

dt=1.

phiOld=np.zeros((nrow,ncol))

iter=0

plt.ion()

while iter < 50:
    # gradient of phi
    gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
    # magnitude of gradient of phi
    absGradPhi=np.sqrt(gradPhiX**2+gradPhiY**2)

    # normalized gradient of phi - eliminating singularities
    normGradPhiX=gradPhiX/(absGradPhi+(absGradPhi==0))
    normGradPhiY=gradPhiY/(absGradPhi+(absGradPhi==0))

    divYnormGradPhiX, divXnormGradPhiX=np.gradient(normGradPhiX)
    divYnormGradPhiY, divXnormGradPhiY=np.gradient(normGradPhiY)

    # curvature is the divergence of normalized gradient of phi
    K = divXnormGradPhiX + divYnormGradPhiY
    dPhiBydT = K * absGradPhi # makes everything circle

    # level set evolution equation
    phi = phi + ( dt * dPhiBydT )
    iter=iter+1
```

```
time.sleep(0.6)
plt.hold(False)
CS = plt.contour(phi,0, colors='r')
plt.draw()
plt.hold(False)
iter += 1
```

Imaj Gruplamak

Imaji bolumlere ayirmak icin (segmentation) birkac faktorun bilesimi kullaniliyor. Koseleri kullanan aktif kontr (edge based active contour) yonteminde ortalama egim ve imajin piksel degerlerinin farkliliklari (image gradient) ayni anda kullanilir. Yani kesit seviyesini ilerletirken hizi hem egime oranliyoruz, hem de imaj piksel renk degerleri arasindaki farka ters oranda hizlandiriyor, ya da yavaslatiyoruz. Boylece kesit seviyemiz renk farkliligi cok olmayan yani buyuk bir ihtimalle tek bir objeye ait bir bolgede hizla ilerliyor, buyuk renk farkinin oldugu buyuk bir ihtimalle bir kenar noktasina gelince ise yavasliyor. O sirada kesit seviyesinin geri kalan taraflari tabii ki baska hizlarda hareket ediyor olabilirler, zaten isin puf noktasi burada, sonunda resim bolgelere ayrilmis oluyor. Bu kodu da `active3.py` icinde bulabilir, `active4.py` icinde ise surekli degisim sonrasi sayisal bazi yan etkilerden dolayi ϕ'nin dejenere olmasi sonucu onu "tekrar bastan olusturan (reinitialization)" iceren bir kisim var. Fakat teknigin ozu her iki kod icinde de gorulebilir.

Bitirirken onemli gozlemi vurgulayalim. Problemi matematiksel olarak temsil ederken, hedefe dogru turetirken surekli (continous) alemde, surekli, kesintisiz fonksiyonlarla is yapiyoruz. Hesaplama ani gelince surekli fonksiyonlari ayriksal (discrete) hale ceviriyoruz, iste uygulamali matematigin hesapsal kismi burada devreye giriyor. Fakat diferansiyel denklemler, fonksiyonlar, turevler gibi surekli matematigin kavramlari cok onemli, bunlar olmasa problemi soyut bir sekilde temsil edemez, ve basitlestiremezdik. Temel matematigin kavramlarini kullanirken yuzyillarin matematiksel bilgisi devreye girebiliyor, matematigin en yogun sekilde kullanildigi fizikten bol bol teknik alinabilir. Yani soylemek istedigimiz problemi cozmek icin hemen kodlamaya baslamiyoruz, dusunsel eylemin onemli bir kismi matematiksel formullerle (belki kalem kagitla) yapiliyor.

Listing 3: active3.py

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.signal as signal
import scipy.ndimage as image
import time

def gauss_kern():
    """ Returns a normalized 2D gauss kernel array for convolutions """
    h1 = 15
    h2 = 15
    x, y = np.mgrid[0:h2, 0:h1]
    x = x-h2/2
    y = y-h1/2
    sigma = 1.5
    g = np.exp( -( x**2 + y**2 ) / (2*sigma**2) );
    return g / g.sum()

Img = plt.imread("twoObj.bmp")
Img = Img[::-1]
g = gauss_kern()
Img_smooth = signal.convolve(Img,g,mode='same')
Iy,Ix=np.gradient(Img_smooth)
absGradI=np.sqrt(Ix**2+Iy**2);
rows, cols = Img.shape

# initial function phi - level set is a square 4 pixels
# away from borders on each side, in 3D it looks like an empty
# box
c0=4
w=4
nrow, ncol=Img.shape
phi=c0*np.ones((nrow,ncol))
phi[w+1:-w-1, w+1:-w-1]=-c0

# edge-stopping function
g = 1 / (1+absGradI**2)

# gradient of edge-stopping function
```

```python
gy,gx = np.gradient(g)

# gradient descent step size
#dt=.4
dt=1.

# number of iterations after which we reinitialize the surface
num_reinit=10

phiOld=np.zeros((rows,cols))

# number of iterations after which we reinitialize the surface
iter=0

plt.ion()

while True:
    # gradient of phi
    gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
    # magnitude of gradient of phi
    absGradPhi=np.sqrt(gradPhiX**2+gradPhiY**2)
    # normalized gradient of phi - eliminating singularities
    normGradPhiX=gradPhiX/(absGradPhi+(absGradPhi==0))
    normGradPhiY=gradPhiY/(absGradPhi+(absGradPhi==0))

    divYnormGradPhiX, divXnormGradPhiX=np.gradient(normGradPhiX)
    divYnormGradPhiY, divXnormGradPhiY=np.gradient(normGradPhiY)

    # curvature is the divergence of normalized gradient of phi
    K = divXnormGradPhiX + divYnormGradPhiY
    tmp1 = g * K * absGradPhi
    tmp2 = g * absGradPhi
    tmp3 = gx * gradPhiX + gy*gradPhiY
    dPhiBydT =tmp1 + tmp2 + tmp3

    phiOld=phi
    # level set evolution equation
    phi = phi + ( dt * dPhiBydT )
```

```
    iter=iter+1
    if np.mod(iter,10)==0:
        time.sleep(0.6)
        plt.imshow(Img, cmap='gray')
        plt.hold(True)
        CS = plt.contour(phi,0, colors='r')
        plt.draw()
        plt.hold(False)
```

Listing 4: active4.py

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.signal as signal
import scipy.ndimage as image
import time
from scipy import ndimage

def bwdist(a):
    """
    this is an intermediary function, 'a' has only True, False vals,
    so we convert them into 0, 1 values -- in reverse. True is 0,
    False is 1, distance_transform_edt wants it that way.
    """
    b = np.ones(a.shape)
    b[a==True] = 0.
    return ndimage.distance_transform_edt(b)

def gauss_kern():
    """ Returns a normalized 2D gauss kernel array for convolutions """
    h1 = 15
    h2 = 15
    x, y = np.mgrid[0:h2, 0:h1]
    x = x-h2/2
    y = y-h1/2
    sigma = 1.5
    g = np.exp( -( x**2 + y**2 ) / (2*sigma**2) );
    return g / g.sum()
```

```
Img = plt.imread("twoObj.bmp")
Img = Img[::-1]
g = gauss_kern()
Img_smooth = signal.convolve(Img,g,mode='same')
Iy,Ix=np.gradient(Img_smooth)
absGradI=np.sqrt(Ix**2+Iy**2);
rows, cols = Img.shape

# initial function phi - level set is a square 4 pixels
# away from borders on each side, in 3D it looks like an empty
# box
c0=4
w=4
nrow, ncol=Img.shape
phi=c0*np.ones((nrow,ncol))
phi[w+1:-w-1, w+1:-w-1]=-c0

# edge-stopping function
g = 1 / (1+absGradI**2)

# gradient of edge-stopping function
gy,gx = np.gradient(g)

# gradient descent step size
#dt=.4
dt=1.

# number of iterations after which we reinitialize the surface
num_reinit=10

phiOld=np.zeros((rows,cols))

# number of iterations after which we reinitialize the surface
iter=0

plt.ion()
```

```python
#while np.sum(np.sum(np.abs(phi-phiOld))) != 0:
while True:
    # gradient of phi
    gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
    # magnitude of gradient of phi
    absGradPhi=np.sqrt(gradPhiX**2+gradPhiY**2)
    # normalized gradient of phi - eliminating singularities
    normGradPhiX=gradPhiX/(absGradPhi+(absGradPhi==0))
    normGradPhiY=gradPhiY/(absGradPhi+(absGradPhi==0))

    divYnormGradPhiX, divXnormGradPhiX=np.gradient(normGradPhiX)
    divYnormGradPhiY, divXnormGradPhiY=np.gradient(normGradPhiY)

    # curvature is the divergence of normalized gradient of phi
    K = divXnormGradPhiX + divYnormGradPhiY
    tmp1 = g * K * absGradPhi
    tmp2 = g * absGradPhi
    tmp3 = gx * gradPhiX + gy*gradPhiY
    dPhiBydT =tmp1 + tmp2 + tmp3
    #dPhiBydT = K * absGradPhi

    phiOld=phi
    # level set evolution equation
    phi = phi + ( dt * dPhiBydT )
    iter=iter+1
    if np.mod(iter,num_reinit)==0:
        # reinitialize the embedding function
        # after num_reinit iterations
        phi=np.sign(phi)
        phi = (phi > 0) * (bwdist(phi < 0)) - \
            (phi < 0) * (bwdist(phi > 0))

    if np.mod(iter,10)==0:
        time.sleep(0.6)
        plt.imshow(Img, cmap='gray')
        plt.hold(True)
        CS = plt.contour(phi,0, colors='r')
        plt.draw()
```

```
        plt.hold(False)
```

Listing 5: plot_phi.py

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np

def plot_phi(phi):
    fig = plt.figure()
    ax = Axes3D(fig)
    x = []
    y = []
    for (i,j),val in np.ndenumerate(phi):
        x.append(i)
        y.append(j)
    ax.plot(xs=x, ys=y, zs=phi.flatten(),
            zdir='z', label='ys=0, zdir=z')
    plt.show()
```

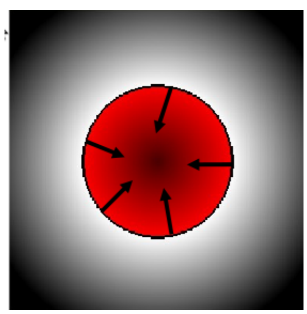


Figure 1:

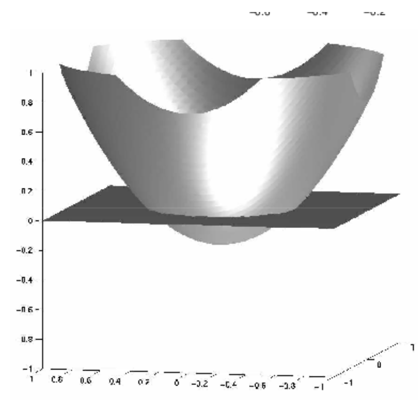


Figure 2: ϕ Fonksiyonu

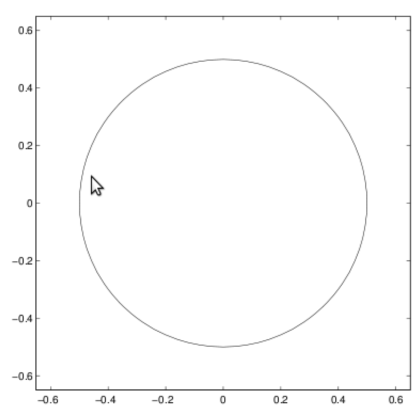


Figure 3: Kesit Seviyesi

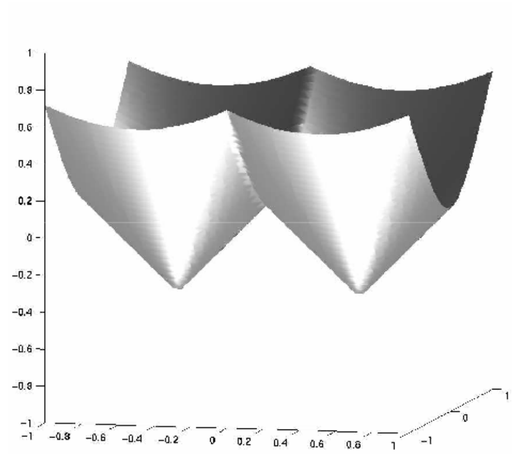


Figure 4: ϕ Fonksiyonu

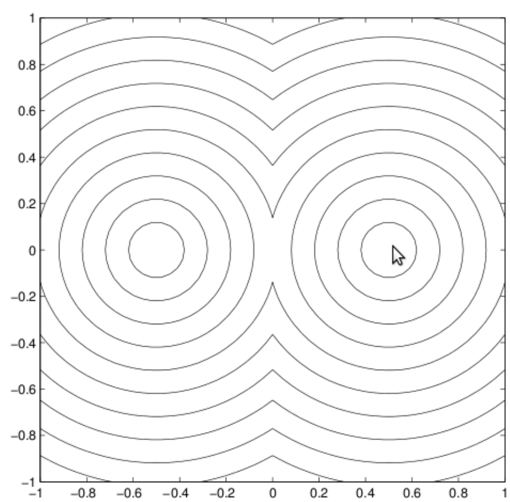


Figure 5: Birkac z Seviyesinden Kesitler

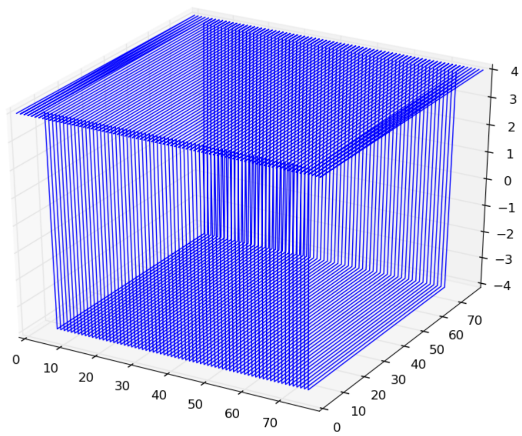


Figure 6: ϕ Baslangici

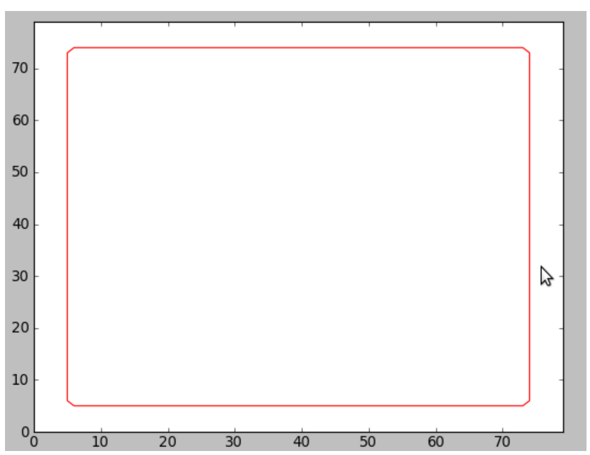
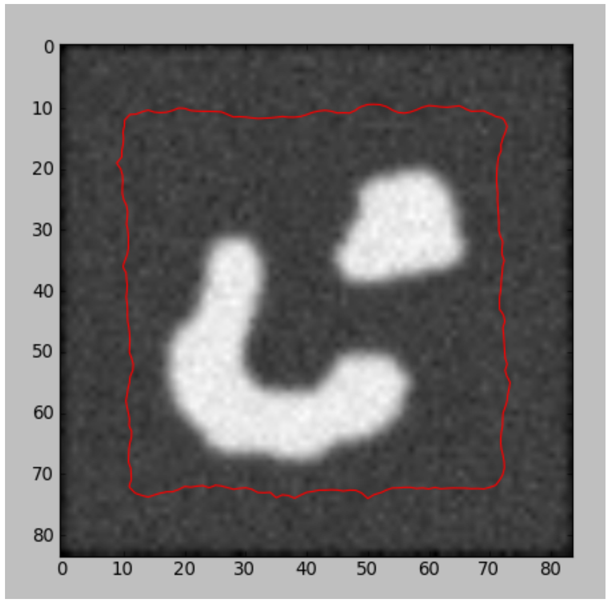
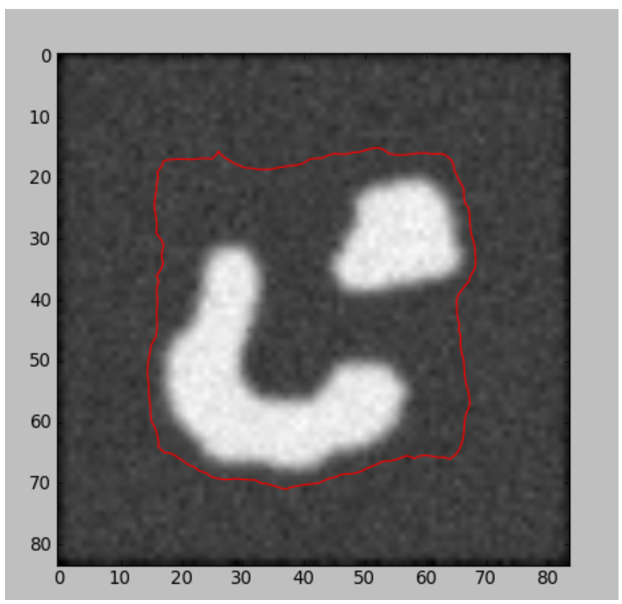
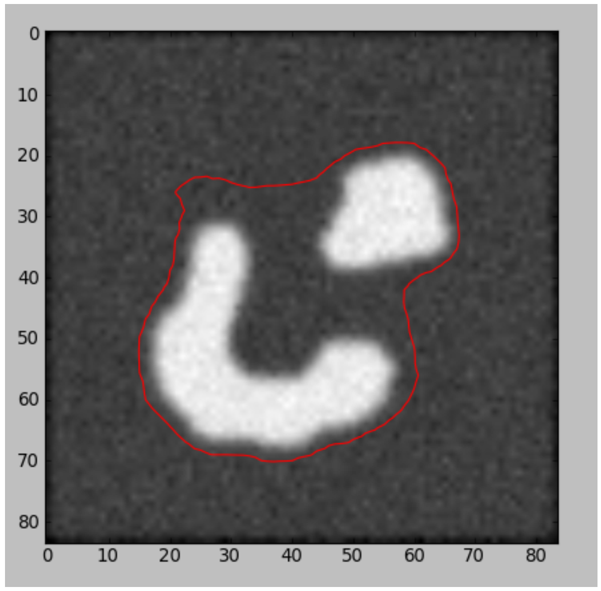
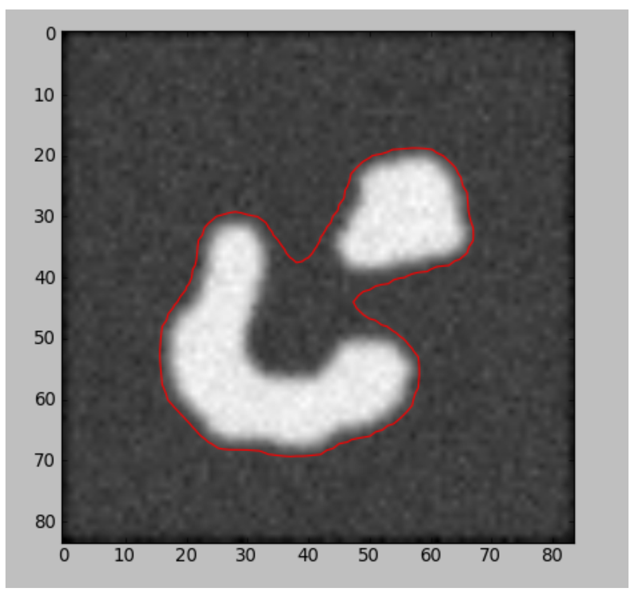


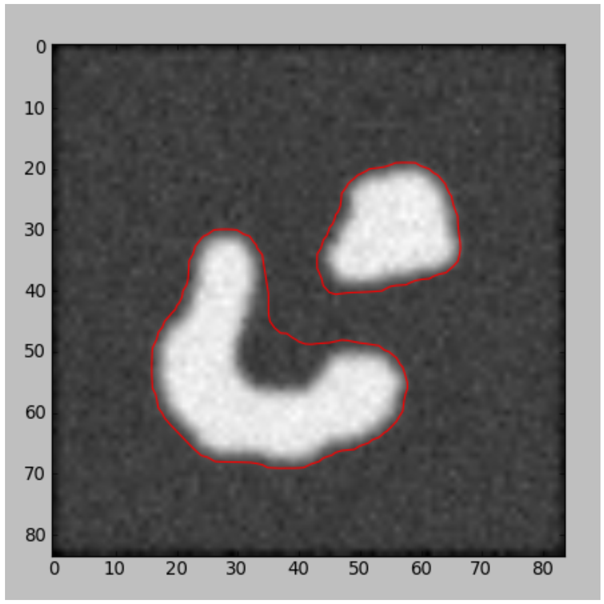
Figure 7: ϕ Baslangici 2 Boyutta

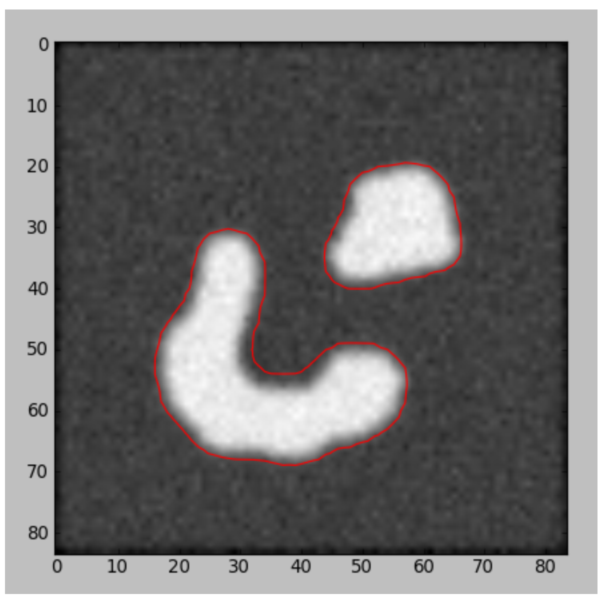

0
10
20
30
40
50
60
70
80
0 10 20 30 40 50 60 70 80


0
10
20
30
40
50
60
70
80
0 10 20 30 40 50 60 70 80


0
10
20
30
40
50
60
70
80
0
10
20
30
40
50
60
70
80


0
10
20
30
40
50
60
70
80
0
10
20
30
40
50
60
70
80


0
10
20
30
40
50
60
70
80
0 10 20 30 40 50 60 70 80


0
10
20
30
40
50
60
70
80
0 10 20 30 40 50 60 70 80