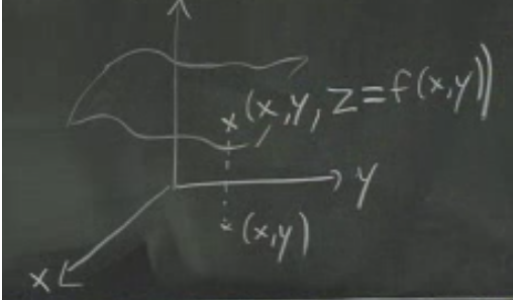


MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 8

İki degiskenli bir fonksiyonu grafiklemek (plot) için

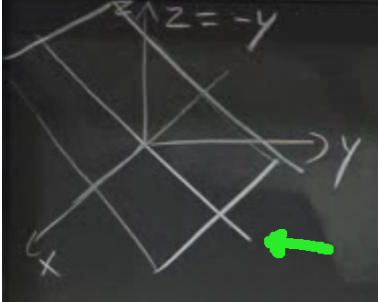


x, y degerlerine tekabül eden $f(x, y)$ 'yi, z eksenini uzerindeki yukseklik olarak kabul ederiz, ve oraya bir nokta koyariz. Tum x, y 'ler için bu yapilrsa bir yuzey ortaya cikar. Dikkat 3 boyutlu bir sekil gorulecektir, fakat ici dolu degildir, fonksiyon sadece yuzeydedir.

Ornek

$$f(x, y) = -y$$

2 degiskenli de olsa illa her iki degisken fonksiyonda kullanilmali diye bir sart yok. Bu formül bir düzlem tanımlar.



Hoca çizmek için önce yeşil okun gösterdiği çizgiden başladı, ki bu çizgi $z = -y$, -1 eğimi olan bir çizgi. x tanımlı olmadığina göre bu çizgi her x için geçerli olmalı, ve üstteki düzlem ortaya çıkıyor. x -ekseni bu düzlemin içinden geçiyor.

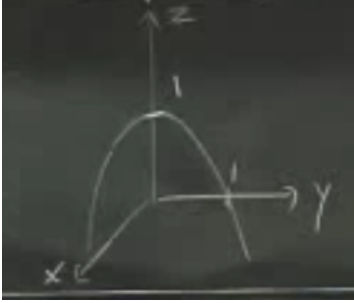
Ornek

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

Grafiği anlamak için yz düzleminde neler oluyor onu anlamaya uğrasalım. Sadece yz düzlemine bakmak demek, $x = 0$ kabul etmek demektir, o zaman geri kalanlar

$$z = 1 - y^2$$

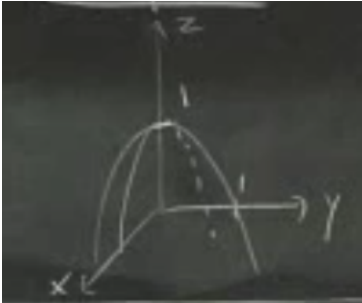
bir parabolü tanımlar.



Peki xz düzleminde neler olur?

$$z = 1 - x^2$$

yine aşağı doğru bir parabol.

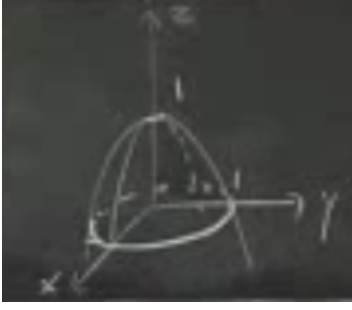


xy düzlemiyle nerede kesişim olur? $z = 0$ ise,

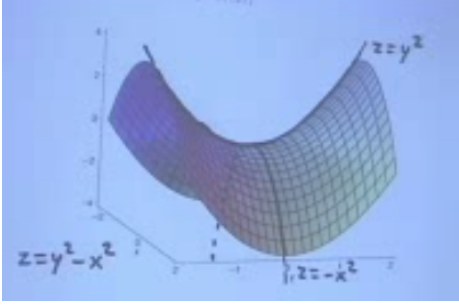
$$1 - x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Bu birim yarıçaplı olan bir dardir (unit circle).



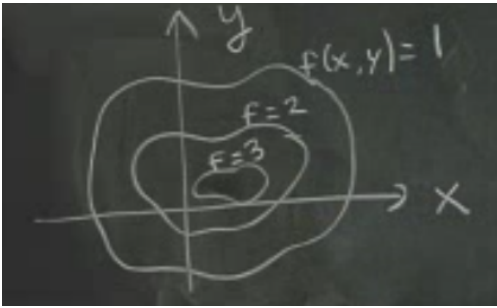
İlginc bir diğer fonksiyon



Bir at egerine (saddle) benziyor, yz düzleminde bakılınca yukarı giden bir parabol $z = y^2$, ama xz düzleminde aşağı dönük bir parabol, $z = -x^2$.

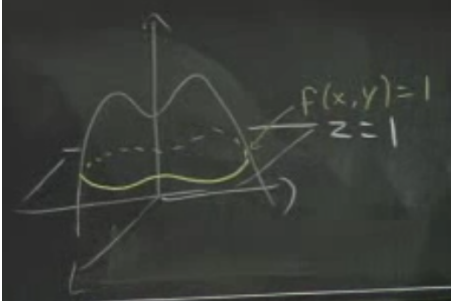
Kontur Grafikleri (Contour Plot)

2 değişkenli fonksiyonları çizmenin bir diğer yolu onun konturlarını çizmektir. Konturlar yeryüzünü resmetmek için kullanılan haritalara benzerler, 3 boyutlu şekillerin yassılaştırılarak, sadece üstten görünüşlerini gösteren grafikleme şekilleridirler.



Bir kontur grafiği üzerindeki çizgilerin her biri, bir yüksekliğe (elevation) tek-

abul eder. Mesela $f(x, y) = 1$ esitligi icin olan tum x, y noktaları ustte en distaki kapali egridir, $f = 2$, $f = 3$, vs ayni sekilde. 3 boyutlu “normal” bir grafikte yukseklik olarak (3. boyut) temsil edilen degerler yassilastirilarak onlarin ustten gorunusu resmedilir. Ayrica bir z “sabitlenerek” ona tekabul eden x, y grafiklenir (bu sabit degerler cogunlukla duzenli araliklarla olacak sekilde secilir, 1,2,3,4,vs gibi), 3 boyutlu bir resimde tum z degerleri grafiklenir. Farkliliklar bunlardir. Konturlar kullanarak 3 boyutlu bir fonksiyonu iki boyutta kismen temsil edebilmis oluruz. 3 boyutlu fonksiyon ve $z = 1$ anindaki bir kesit ornegi alttadir.



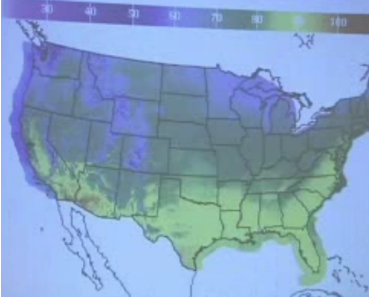
Bu teknige “seviye egrileri (level curve)” ismi de verilir. $z = 1$ seviyesinde kesit yapilınca o kesit uzerinde bir egri olusur, diger seviyelerde de kesitler yapilabilir, vs.

Bir topografik harita da aslında bir kontur grafigidir. Mesela alttaki harita ABD Jeolojik Olcumler (US Geological Survey) haritalarından biri



Mesela 500 yazan bir cizgi var, bu yuksekligi gosteriyor. Eger o yukseklikte kalmak istersek, hep o cizgi uzerinde yuruyebilirdik, ve hic yukari ya da asagi gitmemis olurduk. Eger cizgiler arasinda gidip gelirsek, o zaman yukseklik degisimi yapmis olurduk.

Tabii kontur grafiklerinin illa bir coğrafi yüksekliği temsil etmesi gerekmez. Mesela alttaki grafik ABD haritasında herhangi kaç derece sıcaklık olduğunu bölgesel olarak gösteriyor.

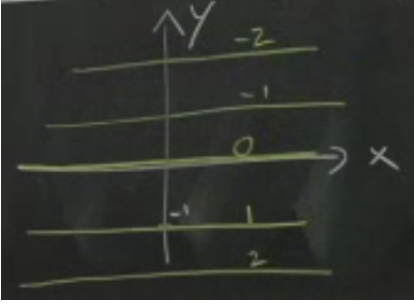


Renkler belli sıcaklıkları temsil ediyorlar, ve renkler arasında bazı sınırlar var. Bu grafik te bir kontur grafigidir.

Ornek

$$f(x, y) = -y$$

Konturlar neye benzer?



Konturlar degisik yükseklikleri temsil ediyor, ve ustteki resim için de bu gecerli. Bu grafin 3D hali içinde yesil ok olan en ustten 2. grafik. O grafikte bir düz yokus var, iste ustteki çizgiler, bu yokustaki yükseklik farkında tek-abul ediyorlar.

Ornek

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$$

Bu fonksiyon sıfır ise birim cember olur dedik, yani

$$x^2 + y^2 = 1$$

Eger $f = 1$ ise

$$x^2 + y^2 = 0$$

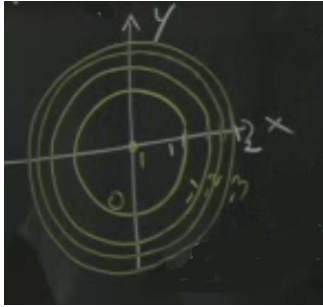
Eger $f = -1$ ise

$$x^2 + y^2 = 2$$

Eger $f = -2$ ise

$$x^2 + y^2 = 3$$

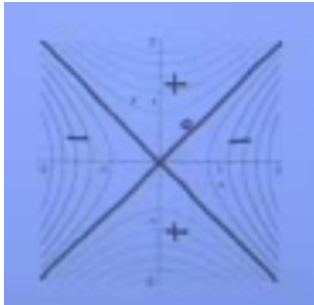
Grafik soyle



Seviye egrilerinin disa dogru nasil daha sıklaştığına dikkat cekmek isterim. Bu demektir ki disa dogru gittikce yukseklik artisi daha dik hale geliyor, cunku (yukari dogru) ayni birim mesafeyi almak icin gittikce daha az mesafe katetmek gerekiyor. Orta kisim neredeyse dumduz.

Ornek

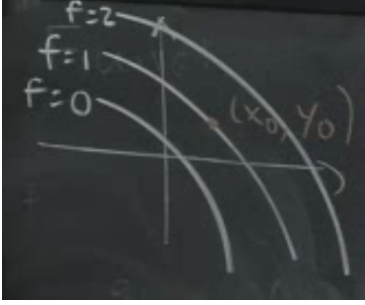
At egrisi grafiginin konturlari



Kontur grafikleri bize x, y degisirken neler oldugunu soyler. Mesela degerler azaliyor mu, cogaliyor mu? Bu tur bir sorunun cevabini kontur grafigi hizli

bir sekilde saglayabilir.

Mesela su grafige bakalim



Eger $x \uparrow$, $f(x, y) \uparrow$

Eger $x \downarrow$, $f(x, y) \downarrow$

Eger $y \uparrow$, $f(x, y) \uparrow$

Eger $y \downarrow$, $f(x, y) \downarrow$

Bu tur nicelik analiz kontur grafiklerinin cizgilerine bakarak hemen yapilabilir. Ama belki de ben daha detayli bir analiz istiyorum, mesela bir degiskeneki bir degisimin $f(x, y)$ 'daki degisimi ne kadar etkiledigini detayli sekilde gormek istiyorum.

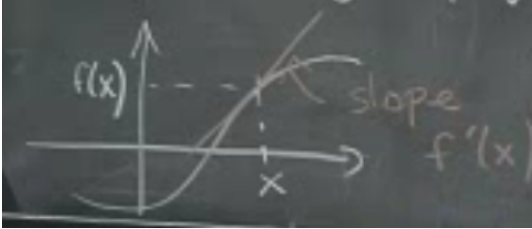
Degisim oranlarinin hesabi turevlerle yapilir.

Kismi Turevler (Partial Derivatives)

Tek degiskenli fonksiyonlar, mesela $f(x)$ gibi, o zaman $f(x)$ 'in turevi bir limit olarak tanimlidir

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Grafiksel olarak



x noktasındaki egim (slope) $f'(x)$ 'e esittir.

Yaklasiksallik Formulu

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Bu formule daha fazla terim eklese, ortaya Taylor Formulu cikardi.

Benzer seyleri 2 degiskenli fonksiyonlar icin nasil yapardik?

Buradaki problem iki degiskenin ikisinin birden degisebilecegi. Bu sebeple bize birden fazla turev sekli gerekiyor.

Notasyon

Parcali turev kivrik bir “d” sembolunu andirir

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Bu ibare “sadece x degisiyor, digerleri degismiyor” demek. O yuzden bu klasik bir turev degil, kısmi bir turev. Tamami

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Gordugumuz gibi y uzerinde hicbir degisiklik yapmiyorum. Sadece x 'i degistirip, bu degisimin fonksiyonun tamami uzerindeki oranini (rate of change) hesapliyorum. Ayni sekilde

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

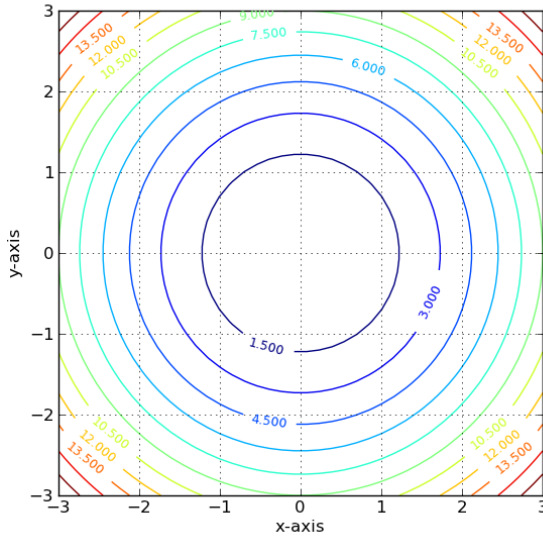
Geometriksel olarak


```

x=linspace(-3,3,40)
y=linspace(-3,3,40)
x,y=meshgrid(x,y)
z=sqrt(x**2+y**2)
z=x**2+y**2
#z=x**2+y**2
#z=1-x**2-y**2
cs=contour(x,y,z,15)
grid(True)
axis('scaled')
xlabel('x-axis')
ylabel('y-axis')
clabel(cs,inline=1,fontsize=9)
show()

```

$x^2 + y^2$ fonksiyonun grafiği alttadır.



Soru 2D-5

$T = x^2 + 2y^2 + 2z^2$ fonksiyonu her x, y, z noktasındaki sıcaklığı rapor ediyor.

a) Bu fonksiyonun isocaklık (isotherms) fonksiyonu hangi sekle benzer?

Cevap

Isosicaklık T fonksiyonun bir sabite esitlendiginde elde edilen fonksiyondur, o “sey” ne ise, o cisim yuzeyinde sicaklik hic degismeyecektir.

Bu cisim bir ellipsoid, bir ellipsoid bir yumurtaya benzeyen, bir elips’in alip bir nevi cevrilerek elde edilen bir sekildir. Peki seklin ellipsoid oldugunu nereden biliyoruz? Cunku ellipsoid formulu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sekinde, ve $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = c$ formulunu ustteki forma cevirmek mumkun. Iki tarafi c ’ye boleriz,

$$\frac{x^2}{c} + \frac{2y^2}{c} + \frac{2z^2}{c} = 1$$

Boylece $1/a^2 = 1/c$ olur, vs..

Peki bir ellipsoid’i nasil grafikleriz? Bu noktada sorunun istediginden daha ileri gidiyoruz.

Grafiklerken, mesela $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 10$ icin diyelim, ilk aklimize gelebilecek fikir formulu tekrar organize ederek z ’yi yanliz birakmak, ve x, y kombinasyonlarini bu fonksiyona gecerek sonuclari grafiklemek.

Buradaki problem z formulu ortaya bir karekok cikartacak, ve bu karekok sonucu hem eksi, hem arti olabilir. Daha iyi bir yontem, kutupsal forma gecmek, boylece hep arti olacak vektor buyuklugu ve acilar uzerinden bir cizim yapmak [1]. Su formule tekrar bakarsak

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}_w + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bunu

$$w^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

olarak gorelim, burada karelerinin toplami ’1’ olan bir sey var.

Bu “seyler” cos ve sin olabilirler, cunku cos ve sin karelerinin toplami 1 degerini verir.

Eger

$$w = \sin \phi$$

$$\frac{z}{c} = \cos \phi$$

dersek, karelerin toplamı üstteki gibi 1 olur.

Simdi w 'nin detayına inelim

$$w^2 = \sin^2 \phi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Esitliğin en sagına bakarsak, yine kareler toplamı görüyoruz. Ama bu sefer karelerin toplamı 1 değil, $\sin^2 \phi$ vermiş. Problem değil, karelerin içine bir $\sin \phi$ biz sokarsak, o zaman sonuçta istediğimiz bir ekstra $\sin^2 \phi$ kendiliğinden gelecek.

$$\frac{x}{a} = \sin \phi \cos \theta$$

$$\frac{y}{b} = \sin \phi \sin \theta$$

O zaman

$$x = a \sin \phi \sin \theta$$

$$y = b \sin \phi \cos \theta$$

$$z = c \cos \phi$$

O zaman grafiklemeyi ϕ, θ açılarının $0.. \pi$ arasındaki değerlerinin kombinasyonlarını kullanarak rahatca yapabiliriz. Alttaki kodda `linspace` ile bu ayrık sal değerleri bulunuyor, `outer` ile onların her türlü kombinasyonla carpımı alınıyor.

Not: w ile z/c 'nin aldığı cos, sin değerleri ters şekilde de olabilir, sonuç farketmiyor, yine ellipsoid grafikleniyor.

```
from __future__ import division
```

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```

fig = plt.figure(figsize=plt.figaspect(1)) # Square figure
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

# Katsayilar  $a_0/c x^2 + a_1/c y^2 + a_2/c z^2 = 1$ 
coefs = (1, 4, 10)

# Katsayilara tekabul eden caplar
rx, ry, rz = [1/np.sqrt(coef) for coef in coefs]

u = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)
v = np.linspace(0, np.pi, 100)

x = rx * np.outer(np.cos(u), np.sin(v))
y = ry * np.outer(np.sin(u), np.sin(v))
z = rz * np.outer(np.ones_like(u), np.cos(v))

ax.plot_surface(x, y, z, rstride=4, cstride=4, color='b')

max_radius = max(rx, ry, rz)
ax.set_xlim(-max_radius, max_radius)
ax.set_ylim(-max_radius, max_radius)
ax.set_zlim(-max_radius, max_radius)

plt.show()

```

[1] Thomas Calculus, 11. Baskı