

## L'Hospital (l'Hôpital) Kuralı

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

bazen hesaplanamaz, çünkü hem  $f(a)$  hem  $g(a)$  sifra esittir. Bu durum  $0/0$  gibi acaip bir durum ortaya çıkarır, ki böyle bir şeyi hesaplamak mümkün değildir.  $0/0$ 'ın diğer bir adı “hesaplanamayan form (indeterminate form)”. Fakat L'Hospital 1. Senaryo kuralına göre,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

esitliği kullanılabilir.

Ispat

$f'(a)$  ve  $g'(a)$ 'dan geriye doğru gidelim, ki bu tanımların kendisi de birer limit zaten.

$$\begin{aligned} \frac{f'(a)}{g'(a)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \quad (1) \end{aligned}$$

$x \rightarrow a$  iken  $g(a)$  ve  $f(a)$ 'nin sifra gittigini biliyoruz, tüm bu işlere girmemizin sebebi oydu zaten, o zaman

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Bir diğer hesaplanamayan form  $\infty/\infty$  için de L'Hospital Kuralı aynen geçerli. O formun ispatı biraz daha cetrefil, ama kullanma bağlamında aynen işliyor.

Uyarı: Eger  $0/0$  ya da  $\infty/\infty$  durumu ortada yoksa L'Hospital Kuralını kullanmayın. Ispat da zaten böyle bir durumun olduğu bilgisinden hareketle sonuca ulaşıyor.

$\infty/\infty$  Durumu

Bu ispat için

$L = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)/g'(x)$  kabul edelim ve öyle bir  $a$  seçelim ki

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \approx L, \quad x > a.$$

olsun.

Not: Hocanın notasyonuna göre eğer  $a, b$  birbirlerine  $\epsilon$  kadar yakınlarsa  $a \approx b$  kullanılır.

Şimdi ispatın geri kalanında şu alttaki iki yaklaşıksallığı ispat etmek bir yöntemdir, ( $x \gg 1$  olmak üzere)

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \approx L$$

Ortadaki ifade (1)'e benziyor. Şimdi ilk yaklaşıksallık için

$$f(x) - f(a) = f(x)[1 - f(a)/f(x)]$$

yazarız. Bu basit bir cebirsel manipülasyon. Aynı şeyi  $g(x)$ 'li bölün için de yaparız. Birada yazarsak

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x)[1 - f(a)/f(x)]}{g(x)[1 - g(a)/g(x)]}$$

Her iki taraftan  $f(x)/g(x)$  iptal olabilir.

Sonra limit teorisini kullanırız. Bu yaklaşıksallığın varlığı bariz, çünkü, herhangi bir  $\epsilon$  için  $x_0$ 'i yeterince büyük seçebiliriz ki alttaki

$$1 - \epsilon < \frac{1 - f(a)/f(x)}{1 - g(a)/g(x)} < 1 + \epsilon$$

$x > x_0$  için hep doğru olur. Unutmayalım,  $f(x), g(x), x \rightarrow \infty$  iken sonsuzluga gidiyorlar. Sabit bir  $f(a), g(a)$  değerini sonsuza giden bir değerle bölünce ortaya sıfır çıkıyor, elde kalanlar yaklaşıksal olarak 1/1.

İkinci yaklaşıksallık için, Cauchy Ortalama Değer Teoremi (Cauchy Mean-value Theorem) kullanırız.  $a < c < x$  şeklinde öyle bir  $c$  vardır ki  $(f(x) -$

$f(a))g'(c) = (g(x) - g(a))f'(c)$  doğrudur. Yani

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ki bu ifade  $L$ 'e  $\epsilon$  kadar yakındır.

Kaynaklar

[1] Thomas Calculus 11th Edition, sf. 292

[2] Arthur Mattuck, Introduction to Analysis, sf. 220