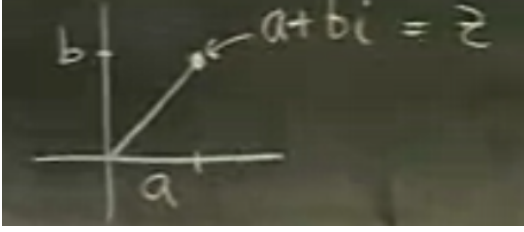


OCW MIT 18.03 Ders 6

Kompleks Degiskenler (Complex Variables)



Kompleks sayılar içinde i degerini iceren sayılardır, bu deger $\sqrt{-1}$ 'e esittir, bu da hayali bir sayıdır.

$z = a + bi$ sayisinin kompleks tamamlayicisi (complex conjugate) arti isaretini eksiye cevireerek elde edilir, $\bar{z} = a - bi$. Bu iki sayinin carpimi, $z\bar{z} = a^2 + b^2$ degeridir. Bu ozellik bir kompleks sayiyi gercek (real) sayiya cevirmek icin kullanan numaralardan biridir, ki bolme isleminde bu numara kullanilir.

Mesela

$$\frac{2 + i}{1 - 3i}$$

Bu bolumu gerceklestirmek icin bolumun ustunu ve altini bolenin kompleks tamamlayicisi ile carpariz, Boylece onu gercek sayi haline getiririz.

$$\frac{2 + i}{1 - 3i} \cdot \frac{1 + 3i}{1 + 3i}$$

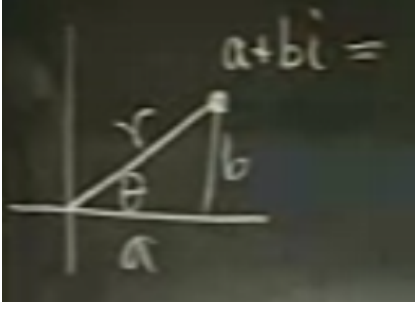
Not: Sagdaki carpan faktor hem bolen hem bolunende ayni degeri tasidigi icin aslinda 1 degerine sahip, yani bu degerle carpim yapmak aslinda sol taraftaki faktor uzerinde “buyukluk olarak” hicbir degisim yaratmiyor.

$$\frac{2 + i}{1 - 3i} \cdot \frac{1 + 3i}{1 + 3i} = \frac{-1 + 7i}{10}$$

$a + bi$ formunda yazarsak

$$\frac{-1}{10} + \frac{7}{10}i$$

Bu teknik cogunlukla lisede ogretilir. Bir diger kavram “kutupsal form (polar form)” kavramidir, bu lisede ogretilabiliyor bazen, fakat ogretilen sey bizim ihtiyaclarimizi acisinden yeterince gelismis degil.



Kutupsal form bir kompleks sayinin grafiksel gosterimi ile alakali. Eger x eksenini a ise, y eksenini b ise, o zaman bir r cizgisi ve θ acisi uzerinden kutupsal forma gecilebilir. Buradan hareketle kompleks sayi su sekilde de gosterilebilir.

$$a + bi = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$$

$$= r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Tarihten bir anektod: bu formu bulan Euler bu noktada “parantez icindekine $e^{i\theta}$ diyecegim” der. Niye? Pek cok bulgu, diger matematik bu yonu gosteriyor gibiydi. Bu matematikte onemli buluslardan biridir, ve her acidan gormemiz, anlamamiz iyi olur.

Bu esitlik nasil isliyor? Niye isliyor? Cunku bazi onemli ozelliklere sahip:

1. Ustel kanun (exponential law):

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

2. e^{at} , $dy/dt = ay$ diferansiyel denkleminin cozumudur. Bu ozgun (unique) cozum degildir, ama bir baslangic sarti ekleyerek onu ozgun hale getirebiliriz, mesela $y(0) = 1$ gibi.

3. e^x 'in turevi yine kendisidir.

Yani

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{d}{d\theta}e^{i\theta} = ie^{i\theta}$$

Simdi bu kavramlari kullanarak Euler formunu ispatlayalim.

Diyelim ki \sin , \cos içeren eşitliği alıp üstteki carpımın içine koyuyoruz.

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \\ \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)$$

Biraz karışık gibi duruyor fakat dikkat edersek, üstteki formülün gerçekte sayı kısmı $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ 'den ibaret (trigonometrik eşitliklerden biri). Kompleks kısmı ise $\sin(\theta_1 + \theta_2)$. O zaman elde ettiğimiz

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

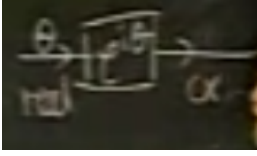
yani $e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ 'in açılımı!

$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$ 'den ise başladık, bir eşitliği kullanarak, basitleştirdik, ve üstel kanunun söylediği aynı sonuca erişmiş olduk. Demek ki \sin ve \cos içeren eşitlik doğru bir eşitlik.

Şimdi türevi kullanarak aynı şeyi ispatlamaya uğrasalım.

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$e^{i\theta}$ nedir? Bir üstel fonksiyondur. Bu fonksiyona girdi olarak verilen bir gerçekte sayıdır, dışarı çıkan ise bir kompleks sayıdır. Girdi θ 'dir, çıkan $e^{i\theta}$ 'dir.



θ yerine t kullanarak açıklamaya devam edelim. Kompleks sonuç üreten bir fonksiyonu “kompleks değerli bir fonksiyon” ismi verilir. t girdisi alan bir kompleks değerli fonksiyon şu genel formla temsil edilebilir.

$$u(t) + iv(t)$$

u yerine \cos , v yerine \sin olduğunu düşünebiliriz. Böyle bir fonksiyonun türevini nasıl alırız? Her terimin teker teker türevini alarak. Türev işlemi olarak $D(\cdot)$ kullanırsak,

$$D(u + iv) = Du + iDv$$

O zaman su turevi alalım (θ yerine t kullanıyoruz)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{it} &= \frac{d}{dt}(\cos(t) + i\sin(t)) \\ &= -\sin(t) + i\cos(t)\end{aligned}$$

i 'yi dışarı çekelim

$$i(\cos(t) + i\sin(t))$$

Bu neye esittir? ie^{it} değerine! Turevi aldık, \sin , \cos eşitliğine atladık, ve turevi onun üzerinden hesapladık. Daha sonra basitleştirdiğimizde sonucun e^{it} 'in bildiğimiz direk turevine aynen eşit olduğunu gördük! Bir ispat daha.

Baslangic degerlerini dusunelim: $e^{i \cdot 0}$ neye esittir?

Dikkat: Hemen $i \cdot 0 = 0$ ve e üzeri 0 esittir 1 cevabini vermeyelim. Bu dogru sonuctur ama tamamiyle dogru bir mantik zinciri degildir. Unutmayalim, $e^{i\theta}$ 'nin acilimi $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$, O zaman

$$e^{i \cdot 0} = \cos(0) + i\sin(0)$$

$$\sin(0) = 0 \text{ olduguna gore}$$

$$e^{i \cdot 0} = 1 + i \cdot 0$$

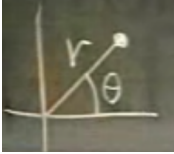
$$= 1 + 0$$

$$= 1$$

Simdi sonuc 1 diyebiliriz.

Kutupsal forma donersek,

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$$



Yani kutupsal form olarak $re^{i\theta}$.

Bu sayinin modulusu (modulus) r 'dir, argumani θ 'dir denir. Modulus icin $|\cdot|$ isareti, argumani icin $\arg(\cdot)$ kullanildigi da oluyor.

Kutupsal formun avantajı nedir? Kompleks sayıların carpılması sırasında çok işe yarar. Bu formda çalışıyorsak işlemler çok kolaylaşıyor ve sonuç çok temiz bir şekilde geliyor. Mesela

$$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Gordüğümüz gibi hemen modulları carpıyoruz, argümanları (açıları) topluyoruz. Buna bakarak sonucun geometrik içeriği son derece açık. Eğer

$$(a + bi)(c + di)$$

işlemini yapsaydık, karmaşık sonuçlar elde edecektik.

Ustel Form ve Calculus

Ustel formu kullanarak Calculus'taki bazı eşitlikleri hatırlamanın, türetmenin ne kadar kolay olduğuna bakalım şimdi. Mesela

$$\int e^{-x} \cos(x) dx$$

Bunu tabii ki parçalı integral kullanarak çözebilirdik. Fakat parçalı integrali iki kere kullanmamız gerekirdi, biraz giriftli bir işlem olurdu. Onun yerine kompleks sayıları hemen kullanalım.

Formüle bakalım ve formüldeki $\cos(x)$ 'i bir kompleks sayı olan e^{ix} 'in $\cos(\cdot)$ bölümü olarak görelim. O zaman $e^{-x} \cos(x)$ carpimini $e^{-x} \operatorname{Re}(e^{ix})$ olarak görebiliriz. Re tabiri bir kompleks sayının “reel bölümü” anlamına geliyor. Hatta e^{-x} zaten reel bir sayı olduğuna göre $\operatorname{Re}(e^{-x} e^{ix})$ sözünü de söyleyebiliriz. Entegral için iste bu mantığı yurutuyoruz.

$$e^{-x} e^{ix} = e^{-x+ix} = \operatorname{Re}(e^{(-1+i)x})$$

$$\int e^{-x} \cos(x) dx = \operatorname{Re} \left(\int e^{(-1+i)x} dx \right)$$

Bu işleme “integrali komplekslesirmek” adı veriliyor, onumuzde olan tamamen reel sayılı bir formülü çözmek yerine, onu sanki kompleks bir sayının reel kısmıymış gibi görerek çözüyoruz. Bunu niye yapıyoruz? Çünkü üstel (exponential) bir sayıyı entegre etmek çok kolay!

$$\int e^{(-1+i)x} dx = \frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}$$

Bu formülün reel kısmını istiyoruz, onu nasıl elde ederiz? İşte kompleks

sayilari bolebilme yetenegi simdi faydali olacak.

$$\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i} = \frac{1}{-1+i} e^{-x} (\cos(x) + i \sin(x))$$

Bolenin tamamlayicisi (conjugate) $-1 - i$, onunla bolen ve boluneni carpiyoruz.

$$(-1+i)(-1-i) = 1 - i^2 - i + i = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Demek ki ustteki formül

$$= \frac{-1-i}{2} e^{-x} (\cos(x) + i \sin(x))$$

Bu formülün reel bolumu? e^{-x} ve $1/2$ zaten reel carpimlar oldugu için onlari kenara alalım simdilik. Sadece su kismin reel bolumunu bulmalıyız.

$$= (-1-i)(\cos(x) + i \sin(x))$$

Carpimi yaparken i içeren terimleri atlarsak, geriye kalanlar

$$-\cos(x) + \sin(x)$$

Kenara aldığımız reel ifadeleri geriye getirirsek, integralin sonucu

$$\frac{e^{-x}}{2} (-\cos(x) + \sin(x))$$

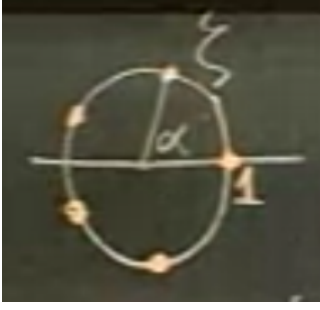
olacaktır.

Kompleks sistemine bu şekilde gelip gitmek ODE dünyasında önemli bir yetenek. Mesela e^x ve \cos yanyana görünce, hocanın aklına hemen kompleks sisteme gitmek geliyor.

Kompleks Kokleri Bulmak

Temel problem 1'in n 'inci koklerini bulmaktır, yani $\sqrt[n]{1}$. Reel dünyada sonuç kaç tanedir? Bazen bir tane, 1'in kendisi, bazen 2 tane: sonucun kaç tane olduğu n 'in çift mi tek mi sayı olduğuna göre değişir.

Kompleks dünyada sonuç n tanedir. Bu cevaplar nerededir? Geometrik olarak bunu görmek kolay. Birim çemberi çizip mesela 5 parçaya bölelim:



α acisi nedir? Radyan olarak

$$\alpha = \frac{2\pi}{5}$$

Geometrik olarak bariz bir sekilde bu noktalar aradigimiz 5 tane 5'inci kok. Diyelim ki koklerden birincisi ζ noktasinin 5 ustu nedir? Modulus yani r degeri 1, cember birim cember, bu normal, ζ 'yi yazalim:

$$\zeta = e^{i\frac{2\pi}{5}}$$

O zaman

$$\zeta^5 = (e^{i\frac{2\pi}{5}})^5 = e^{i\frac{2\pi}{5} \cdot 5} = e^{i2\pi} = 1$$

Bu cember üzerinde 2π 0'a tekabul ediyor, bir tur atip geri donduk.

Problemler 2, 6d

Bu problemde bir kompleks ustel sayinin grafiklenmesi isleniyor. Gormek icin MIT OCW ODE Mathlet sayfasindan erisilebilecek "Complex Exponential" programina gidilmesi soyleniyor. Bu program bir Applet, biz programi Python ile tekrar kodladik. Programin alt kisminde gorulen iki ayar ile degisik a ve b degerleri denenebiliyor. Sagdaki $e^{(a+bi)t}$ 'nin hesaplanabilmesi icin su acilimi kullandik:

$$e^{(a+bi)t} = e^{at} e^{bit}$$

$$= e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt))$$

$$= e^{at} \cos(bt) + e^{at} i \sin(bt)$$

Reel kısmi (x eksenini) hesaplarken $e^{at} \cos(bt)$, hayali kısmi (y eksenini) hesaplarken $e^{at} i \sin(bt)$ formülündeki i haricinde geri kalan terimleri hesaplıyoruz.

```

#
# MIT OCW ODE Mathlet Complex Exponentials replacement in
# Python
#
from pylab import *
from matplotlib.widgets import Slider

ax = subplot(121)
subplots_adjust(left=0.1, bottom=0.25)
l1, = plot(None, None, lw=2, color='red')
axis([-1, 1, -8, 8])
title ( '$(a+bi)t$ ', color='blue' )
grid()

ax = subplot(122)
subplots_adjust(left=0.1, bottom=0.25)
l2, = plot(None, None, lw=2, color='red')
axis([-3, 3, -3, 3])
title ( '$e^{\{ (a+bi)t \}}$', color='blue' )
grid()

axcolor = 'lightgoldenrodyellow'
axa = axes([0.15, 0.1, 0.65, 0.03], axisbg=axcolor)
axb = axes([0.15, 0.15, 0.65, 0.03], axisbg=axcolor)

slidera = Slider(axa, 'a', -1.0, 1.0, valinit=0)
sliderb = Slider(axb, 'b', -8.0, 8.0, valinit=0)

def update(val):
    a = slidera.val
    b = sliderb.val
    t = arange(-1.0, 1.0, 0.001)
    l1.set_xdata(t)
    l1.set_ydata((b/a)*t)

    t = arange(-3.0, 3.0, 0.001)
    l2.set_xdata(exp(a*t)*cos(b*t))
    l2.set_ydata(exp(a*t)*sin(b*t))

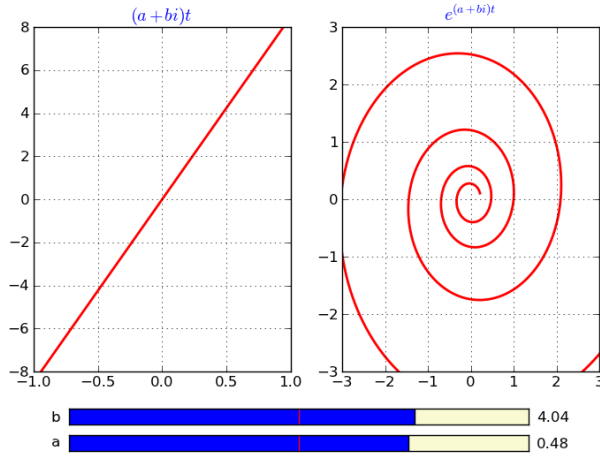
```


draw()

slidera.on_changed(update)

sliderb.on_changed(update)

show()



Problemler 2, 7b

$\dot{z} + 3z = e^{2it}$ denkleminin we^{2it} formunda cozumunu bul, ki bu formda w bir kompleks sayidir. Genel cozum nedir?

Bu problem ders notlarinda daha once verilen $y' + ky = q_e(t)$ formuna benzer. Entegre edici faktor kullanarak cozebiliriz.

Entegre edici faktor: $e^{\int 3dt} = e^{3t}$. Iki tarafi da bu faktor ile carpalim.

$$\dot{z}e^{3t} + 3e^{3t}z = e^{2it}e^{3t}$$

$$(ze^{3t})' = e^{(3+2i)t}$$

Iki tarafin entegralini alirsak

$$\int (ze^{3t})' = \int e^{(3+2i)t}$$

$$ze^{3t} = \frac{e^{(3+2i)t}}{(3+2i)} + c$$

Bolende olan kompleksligi yukari cikarmak icin kompleks tamamlayici ile carpma numarasini kullanalim.

$$= \frac{e^{(3+2i)t}(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} + c$$

$$= \frac{e^{(3+2i)t}(3-2i)}{13} + c$$

$$z = \frac{e^{(3+2i)t}e^{3t}(3-2i)}{13} + ce^{-3t}$$

$$z = \frac{(3-2i)}{13}e^{2it} + ce^{-3t}$$