MIT OCW 18.03, Ders 2

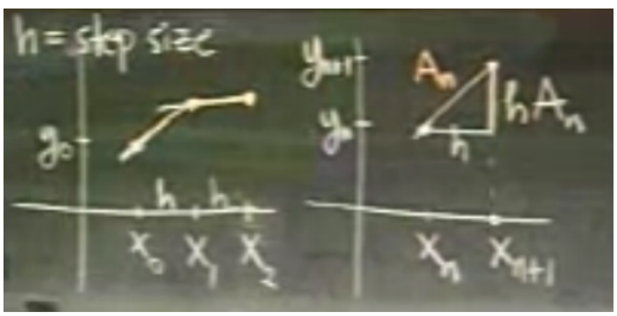
Gercek dunyada cogu ODE sayisal (numerical) yontemlerle cozulur. Bilgisayarinizda bir ODE'yi grafiklettirdiginiz zaman da aslinda arka planda bilgisayar o denklemi sayisal olarak cozmekte ve sonucu grafiklettirmektedir. Bir baslangic degerli (initial value) probleminin formunu yazalim:

$y' = f(x,y)$

$y_1(x_o) = y_o$

Problemde ilk satir ODE, ikinci satir bu ODE'nin baslangic degeri, $x_0$ ve $y_0$ sabit degerler.

Numerik olarak (mesela Euler yontemiyle) bu denklemi cozmek ne demektir? Alttaki cizime bakalim, $y_0$'dan degerinden basliyoruz, bu noktada $x_0, y_0$ noktasindaki egimi $y'$ ile hesapliyoruz, ve bu egim bize $y$'nin olacagi bir sonraki yeri soyluyor. Bu egim ile yukari ya da asagi cikiyoruz, ve bunu devam ettiriyoruz, ta ki bir sonuca gelinceye kadar.




Peki bahsedilen ODE baglaminda bir yere "gitmek" ne demektir? Takip ettigimiz, cevap olarak odaklandigimiz $y$ fonksiyonudur. Unutmayalim ki bu fonksiyonun tam hali $y(x)$, yani $y$, $x$'in bir fonksiyonu, $y$'nin turevi $y$'nin $x$'e gore turevi demek. Turev egim demektir, egim fonksiyonun o noktadaki kabaca, yaklasiksal bir yonudur. O yonu takip edersek o fonksiyonu asagi yukari takip ediyoruz demektir.

Grafikte $h$ basamak mesafesi, yani $x$ uzerinde yaptigimiz sabit ziplama mesafesi. Bu kordinatta hangi aralikla zipliyoruz? 0.1 mi, 1 mi, 5 mi? Bunun secimini biz yapiyoruz.

Euler Denklemleri bir adim icin soyle tanimlidir:

$x_{n+1} = x_n + h$

$y_{n+1} = y_n + hA_n$

$A_n = f(x_n, y_n)$

Bu basamaklar ozyineli (recursive) olarak tanimlanir, bir sonraki adim, bir onceki adimin degerlerini kullanir.

Ornek

$y' = x^2 - y^2$

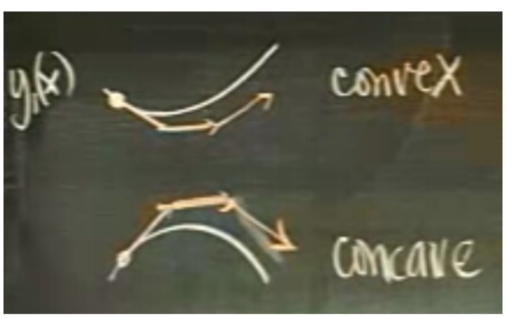
$y_1(0) = 1$

$h = 0.1$

Ustteki formul temel (elementary) fonksiyonlar kullanilarak cozulemez. O yuzden Euler'in yontemi gibi bir numerik cozum burada uygun olur.

| n | $x_n$ | $y_n$ | $A_n$ | $hA_n$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | -1 | -0.1 |
| 1 | .1 | .9 | -.80 | -0.08 |
| 2 | .2 | .82 | | |

$y$ icin eristigimiz sonuc .82 degeridir. Simdi sunu soralim: Bu cevap cok yukarida mi cok asagida bir cevap mi? Pur numerik sonuclarda karsilasilan bir problem budur, gercek cevabi analitik olarak bilmedigimiz icin ona ne kadar yaklasip yaklasmadigimiz. Cevabi geometrik olarak verelim. Eger cozum bir duz cizgi olsaydi, Euler metodu her bu cizgi uzerinde hep dogru cevabi veriyor olurdu.




Eger cozum disbukey (concave) olsaydi, ustteki gibi Euler metodu cok asagi dusecekti. Ilk adimda fazla asagi inecekti, ve sonra bu hatadan donemeyecek, hep esas fonksiyona uzak kalacakti. Icbukey olunca benzer sekilde, ama fazla yukarida kalacakti.

Peki elimizde bir analitik cevap olmadigina gore cevabin disbukey (convex) mi icbukey mi (concave) olup olmadigini nereye bakarak anlayacagiz? Calculus tekrar hizir gibi imdada yetisiyor. Ikinci turevi hatirlayalim: Eger $y'' > 0$ ise birinci turev surekli artiyor demektir, yani $y$ disbukeydir. Eger $y'' < 0$ ise tam tersi. Fakat hala bir problem var, analitik fonksiyon yok ise ikinci turevi nasil hesaplayacagiz? Cevap: Diferansiyel fonksiyonun kendisini kullanarak.

$y' = x^2 - y^2$'nin turevini alirsak,

$y'' = 2x - 2yy'$ sonucunu elde ederiz (turev alirken zincirleme kanununu kullandigimiza dikkat).

O zaman baslangic noktasi $(0, 1)$ de $y''$ nedir? $y'(0) = -1$, $y'' = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 2$. Demek ki cozum baslangicta disbukey, ve Euler cozumunu uzun sureli takip etmezsek cozumun cok altinda kalabiliriz.

Tabii ki cozum bir dis bir ic olarak surekli degisen, dalgali bir yapida olabilir, bu da mumkun. Burada asil gostermek istedigimiz diferansiyel denklemin kendisini kullanarak cozum hakkinda analitik hicbir sey bilmeden onun hakkinda nasil bilgi edinebilecegimizi gormektir.

Hata Analizi


Hata analizi Euler'in cozume ne kadar uzak kaldiginin hesabidir, yani $e$ sayisini hesaplamaktir. Bu degerin tam degeri (absolute value) kullanilir.

Daha iyi sonuclar icin daha kucuk $h$ basamaklari kullanilabilir, o zaman sonuca daha yakin kalabiliriz. O zaman $e$'nin $h$'ye bagli oldugunu soyleyebiliriz. Formulsel olarak bu ifade suna benzer:

$|e \sim c_1 h|$

Buna ifadeye gore Euler metotu birinci derece bir metottur denir, bu derecenin ODE'nin derecesiyle alakasi yok, $h$'nin ustteki formulde hangi ustel formde olduguyla alakali. Birincil derecede bir iliski mesela basamagi yarisina indirince hatayi yarisina indirirmek demektir.

Euler metodundan daha bir yontem bulmak demek, egimi daha iyi hesaplayan bir yontem bulmak demektir. Eger hatada rol oynayan en onemli faktor egim olduguna gore, daha az hata icin daha iyi egim hesaplamak mantikli olacaktir.


Daha iyi egim nasil hesaplanir? Diyelim ki tek bir ziplama yerine iki kere zipladik. Disbukey durumda birinci ziplamada cok asagi, ikincide biraz daha yukari gidiyor olurduk, o zaman bunlarin ortalamasini alirsak, daha iyi bir egim elde edebilirdik.

$x_{n+1} = x_n + h$

$\hat{y}_{n+1} = y_n + hA_n$

$B_n = f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})$

$y_{n+1} = y_n + h(\frac{A_n + B_n}{2})$

Niye sapkali $y$ yani $\hat{y}$ kullandik? Cunku ortalama hesaplamak icin aslinda n+1 noktasinda gecici bir deger hesapliyoruz, bu geciciligi gostermek icin $\hat{y}$ ifadesini kullandik.

Bu metot Heun, Gelistirilmis Euler (Improved), Degistirilmis (Modified) Euler, RK2 gibi isimlerle anilir. RK2 Runga-Kutta'nin kisaltmasi, '2' ibaresi bu yontemin ikinci dereceli bir metot olmasidir. Yani

$e \sim c_2 h^2$

Basamagi yarisina indirmek hatayi dortte birine indirmek demektir. O zaman niye bu metot her yerde kullanilmiyor? Cunku RK2 ile egim iki kere hesaplaniyor, Euler ile bir kere, yani numerik kod iki kat daha fazla calismak, yani daha yavaslamak zorundadir.

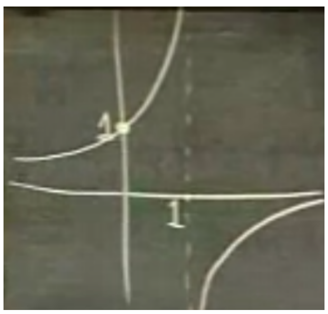
RK4 da var, bu dorduncu seviyede bir metot. Egim soyle hesaplanir:

$$\frac{A_n + 2B_n + 2C_n + D_n}{6}$$

Numerik Yontemlerde Bazi Tehlikeli Noktalar

1. Hoca odevde bizim kesfetmemizi istedi

2. Su basit denkleme bakalim: $y' = y^2$. Degiskenleri ayiralim ve analitik cevabi $y = \frac{1}{c}$. O zaman bu denklemi numerik olarak cozerken alttaki grafik takip ediliyor olacak.




Diyelim ki $y(0) = 1$'den basladik ve $y(2)$'i bulacagiz. Saga dogru yavas yavas gidiyoruz ama problem, bu fonksiyon $y(1)$ degerinde sonsuza gidiyor. Demek ki adim adim saga giden numerik cozum o noktayi hicbir zaman asamayacaktir, sonsuzlukta kaybolacaktir. Bu tehlikeli noktayi onceden tahmin edemez miydik? Hayir. Ustteki diferansiyel denklemin her cozumunun kendine has bir tekilsel (singularity) noktasi vardir ve bundan sadece kendisi haberdadir.