MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 15

Onceki derslerde gradyan kavramini gorduk. Bu vektorun bilesenleri, 3 degiskenli bir fonksiyon icin

$\nabla f =< f_x, f_y, f_z >$

idi, ki bu bilesenler f'in tum kismi turevlerini olusturuyordu. Gradyanlar kismi turevleri paketlemenin, sunmanin yontemlerinden biriydi sadece.

Gradyanlari yaklasiksallama formulleri icin de kullanabiliyorduk, mesela eger x, y, z'yi "birazcik" degistirince bunun f uzerindeki degisim etkisi Δf'i [kabaca, niye kabaca oldugu altta] hesaplamak istiyorsak bunun gradyan formundaki hali

$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z$

Daha kisa olarak

$= \nabla f \cdot \Delta \vec{r}$

oluyordu, yani gradyan vektorunun, pozisyon vektorunun degisimi ile olan noktasal carpimi. Kismi turevlerin tami tamina olctugu sey f'in bir degiskendeki degisime ne kadar hassas oldugudur, ve bu hassasligin ufak degisimler ile carpilip toplanmasi bize tum fonksiyondaki degisimi verir.

Ustteki yaklasiksallama "teget duzlem yaklasiksallamasi" olarak bilinir, bu arada, fonksiyonun yerine bir noktada teget duzlemi koyuyoruz, o noktada fonksiyon budur diyoruz, boylece fonksiyonun x, y, z degiskenlerine asagi yukari lineer olarak bagli oldugunu farz ediyoruz, o sebeple zaten degisimleri duz carpim sonrasi basit toplama maruz tutuyoruz.

Hatirlarsak, $f(x, y, z) = c$ yuzeyine teget olan duzlemi bulmak icin normal vektore bakariz, biliyoruz ki normal vektorlerden biri fonksiyonun gradyan vektorudur, cunku gradyanin kesit seviyelerine diktir, ve fonksiyonun daha yuksek degerlerine, en yuksek artis yonune isaret etmektedir.

Bu noktada kulturel bir not eklemek istiyorum. Bunu belki haftalar once belirtmeliydim, daha iyi olurdu. Kismi turevleri niye seviyoruz / kullaniyoruz? Onemli bir sebep onlarin fizik icin cok faydali olmalari, etrafimizdaki dunyayi anlamamiza yardimci olmalari. Bu dunyadaki pek cok olus kismi turevsel denklemler (partial differential equations -PDE-) ile tarif edilir, modellenir.

PDE'ler bilinmeyen bir fonksiyonun kismi turevlerini kullanarak onlar arasinda bir iliski, fonksiyon kurar.

Mesela Isi Denklemi (Heat Equation) bunlardan biridir.

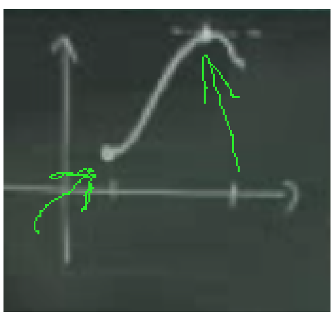
$$\frac{\partial f}{\partial t} = k(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2})$$

Bu denklemde cozmek, bulmak istedigimiz f fonksiyonudur, ve bu fonksiyon 4 degiskene baglidir: $f(x, y, z, t)$, ve temsil ettigi x, y, z pozisyonundaki bir noktanin t anindaki sicakligidir. PDE $\partial f / \partial t$ ise bu fonksiyonun zamana gore nasil degistigini tarif eder.

Bu konuya ileride tekrar donecegiz.

Simdi diger konulara gecelim. Kritik noktalardan bahsetmistik, bu noktalarda kismi turevler sifir degerlerindeydi. Ayrica eger noktalari (saddle points) vardi, ve ikinci turevleri kullanarak kritik noktanin min mi, maks mi, eger mi olduguna karar verebiliyorduk.

Fakat tum bunlarin min, maks bulmak icin yeterli olmadigini da gorduk, cunku min, maks sinir noktalarinda, fonksiyonun ta en uclarinda da olabiliyordu.



Ustteki grafikte gorulen sagdaki nokta kritik bir nokta, ve ikinci turevin bize lokal maks oldugunu soyleyecegi noktadir. Minimum ise soldaki noktadir, fonksiyonun sol sinirindadir, ve kritik nokta degildir. Birden fazla degisken icin de durum aynidir; bu durumlarda min, maks bulmak icin degiskenlerin olabilecekleri en az degere (mesela sifir) ya da en fazla (mesela sonsuzluk) cekmek gerekebilir. Yani zihnimizi acik tutup pek cok olasiligi gozden gecirmemiz, dusunmemiz gerekir.

Diferansiyeller

f'teki degisimi soyle gosterdik

$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$

Ilk bakista bu temsil, kismi turevleri paketlemenin bir baska yolundan ibaret gozukuyor. Bunu da yapiyor muhakkak, ama daha fazlasi da var. Yaklasiksal formullerin formunu hatirlamanin iyi bir yolu, her degiskendeki varyasyonu digerlerinkiyle ilintilendiriyoruz. Bir onemli fayda daha su, bu formulu ayni d_- ile bolerek, degisik sekillerdeki Zincirleme Kanunlarini ortaya cikarabiliriz.

Mesela diyelim ki x, y, z diger iki degisken u, v'ye bagli.

$x = x(u, v)$

$y = y(u, v)$

$z = z(u, v)$

Bu durumda f, aslinda u, v'nin bir fonksiyonu haline gelir. Ve bu noktada kendimize f fonksiyonu mesela "u'nun degisimine ne kadar hassas" gibi bir soru sorabiliriz. Bunun cevabini Zincirleme Kanununu u uzerinden kullanarak cevaplayabiliriz.

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

Ustteki turde bir islem bize degisken degisimi yaptigimiz zaman faydali olur. Mesela kutupsal kordinat sisteminden x, y kordinat sistemine gecis yapabiliriz, ve Zincirleme Kanunu uzerinden kutupsal formdaki degisimin x, y dunyasindaki yansimalarini hesaplayabiliriz.

Sonraki konumuz bagimsiz olmayan degiskenler, mesela x, y, z, degiskenleri $g(x, y, z) = c$ gibi bir fonksiyon uzerinden birbiriyle baglantili. Her seferinde bu tur problemlerde istedigimiz degiskeni yanliz birakip, baska bir yerlere koyamiyoruz, o zaman min, maks baglaminda Lagrange Carpanlari teknigini kullaniyoruz.

Bir diger gordugumuz teknik kisitlanmis kismi turevler teknigiydi. Diyelim ki yine elimizde $f(x, y, z)$ var ve $g(x, y, z) = c$ gibi bir baglanti var. Bu durumda f'in tek bir degisken degisip, digerleri sabit iken (yani tipik kismi turev islemi) nasil degisecegini bulabilir miyim?

Bulamayabilirim, cunku, belki kisitlama ibaresi g yuzunden geri kalan tum degiskenleri sabit tutamayacagim.

Ornek

Sunu bul

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_y$$

y sabit

z degisiyor

$x = x(y, z)$

Ustteki x ibaresini bu ornek icin biz tanimladik, herhangi baska bir kisitlama ibaresi g olabilirdi.

1) Diferansiyelleri Kullanarak

Genel ifade neydi?

$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$

Bunu ozel durumumuza nasil uygulariz? y sabit, o zaman $dy = 0$. Yani

$$df = f_x dx + f_z dz \quad (1)$$

Devam edelim, aslinda dx'den de kurtulmak istiyoruz, cunku o bagimli bir degisken, her seyi z formunda gormek istiyoruz. Bunun icin once dg'yi bulalim.

$dg = g_x dx + g_y dy + g_z dz = 0$

Niye sifira esit? Cunku g kisitlama ibaresi sabitti.

y degismiyorsa, o zaman ustteki dy de gidebilir. Kalanlar

$dg = g_x dx + g_z dz = 0$

$$dx = -\frac{g_z}{g_x} dz$$

Yani

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -\frac{g_z}{g_x}$$

O zaman iki ustteki formulu alip, 1. formulde dx yerine koyarsak

$$df = (-f_x \frac{g_z}{g_x} + f_z) dz$$

Ornek Test 2A Problem 2

Kesit seviyeleri veriliyor, bunlar uzerinde b) icin $h = 2000$, $\partial h / \partial x = 0$ ve $\partial h / \partial y < 0$ oldugu noktayi isaretle denmis. Hoca noktalar ile $h = 2200$ seviyesini isaretliyor.

Sonra yatay cizgilerle $\partial h / \partial x$'i isaretlemis, bu cizgiler boyunca y sabit, ve x degisiyor. Degisirken, kesit seviyeleri arasindan geciyoruz, once azaliyoruz, sonra cogaliyoruz, aradaki noktada (iki noktada, bir ustte, bir altta) $h = 2200$'e teget geciyoruz.

Soru bir de $\partial h / \partial y < 0$ olan noktayi istemis, bu son sart, elimizde iki noktadan yukarida olani, orasi Q olacak.

Istenen bir diger sey $\partial h / \partial y$ degerinin Q noktasinda yaklasiksal olarak degeri. Bunun icin Q'den bir sonraki kesit seviyesindeki bir noktaya Q' ziplariz. Ve bu iki nokta arasindaki olcumlere gore bir yaklasiksal hesap yapariz.

$\Delta y \approx 1000/3 = 300$

1000, 3 nereden geldi? Problemin altinda bir skala verilmis, bu skala 1000 birimlik buyuklugun ne oldugunu gostermis. Ciplak gozle bakinca, iki nokta arasindaki y farkinin kabaca bu skaladaki 1000 degerinin ucte birini oldugunu goruyoruz. 3 ile bolmek oradan geliyor.

$\Delta h = -100$

Bu yaklasik degil, dikkat, tami tamina -100. Cunku kesit seviyeleri arasindaki h degerlerini problem kesin olarak veriyor.

$$\frac{\Delta h}{\Delta y} = -\frac{100}{300}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

Yani

$$\frac{\partial h}{\partial y} \approx -\frac{1}{3}$$