Fourier Transformu ve DFT

Unlu matematikci Fourier sunu kesfetmisti; periyodik olan bir fonksiyon F(x) sinus ve cosinus terimlerinin toplami olarak temsil edilebilir.

$$F(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Bu fonksiyonda a ve b sayi degerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Onlari nasil buluruz?

a_k degerlerini bulmak icin iki tarafi $\cos kx$ ile carpip $\int_{-\pi}^{\pi}$ ile entegralini alirsak,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx \ dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos kx \ dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos kx \ dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \sin nx \cos kx \ dx$$

Esitligin sag tarafinda birinci terim $\cos(kx)$, $\sin(kx)$'e donusur. Fakat sinus fonksiyonu π ve $-\pi$ noktalarinda (ya da onlarin k ile carpilmis 2π, -2π, vs. gibi katlarinda) sifir degerine sahip oldugu icin, bu terim tamamen sifir olacaktir, formulden atilabilir.

Ikinci terimde $\cos(nx)\cos(kx)$'in ustteki gibi entegrali eger k ve n esit degilse, sifirdir. Sadece n ve k esit ise $a_k(\cos kx)^2$ degeri elde edilir. $(\cos kx)^2$'in ise ustteki sekilde entegrali π sonucunu verir. Yani ikinci terimde olan, o sonsuza kadar giden koca toplam icinde sadece tek bir terim sag kalabilir.

Ucuncu terimde $\sin nx \cos kx$ carpiminin entegrali her zaman sifir degerini dondurur. Bu terim de formulden atilir. Geri kalanlari tekrar duzenlersek,

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx \ dx$$

sonucunu elde ederiz. b_k icin benzer islemler, ama bu sefer $\sin kx$ ile carpilarak yapilirsa ve sonuc asagi yukari ayni.

$$b_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx \ dx$$

a_0 icin ise, $\cos kx$ ya da $\sin kx$ ile carpmaya gerek yok. Sadece iki tarafin entegralini almak yeterli, a_o'i istedigimiz icin $n = 0$ demektir, o zaman $\sin, \cos$ iceren hicbir terime ihtiyac yoktur.

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_o dx$$

$$= a_o x \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= a_0(\pi - (-\pi))$$

$$= 2\pi a_0$$

Yani

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$$

Kompleks Sayilari Kullanmak

a_o, a_n ve b_n yerine tek bir c_n turu sayi kullanmak istersek, kompleks sayi sistemine gecmek lazim. O zaman ilk $F(x)$ formulunu de donusturmemiz lazim.

Trigonometrik fonksiyonlarda bilinen iki esitlik soyledir:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Bu formulde i degeri hayali sayi olarak bilinen $\sqrt{-1}$ degeridir.

$F(x)$ formulunu ustteki trigonometrik esitliklere gore donusturelim.

$$F(x) = .. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$= .. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$= .. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{inx}}{2} + \frac{a_n e^{-inx}}{2} + \frac{b_n e^{inx}}{2i} - \frac{b_n e^{-inx}}{2i}$$

$$= .. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{inx}}{2} + \frac{a_n e^{-inx}}{2} - \frac{i\, b_n e^{inx}}{2} + \frac{b_n e^{-inx}}{2}$$

Benzer terimleri, yani e^{inx} ve e^{-inx} terimlerini beraber yazalim:

$$= .. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n i}{2} e^{inx} + \frac{a_n + b_n i}{2} e^{-inx}$$

Bolumde olan $2i$ icindeki i nasil yukari cikabildi? Bu durum, hayali sayilarin bir ozelligiyle alakali: $1/i = -i$. Boylece ikinci ve dorduncu terimdeki arti ve eksi isaretleri degismis oldu. Daha kisa yazmak icin

$$c_{-n} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - b_n}{2}$$

olarak temsil edersek

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Ustteki c_{-n} ve c_n kullanimi bize ek bir avantaj sagliyor: $-inx$ ibaresindeki eksi degeri de cekip cikartabiliyoruz, eksi deger i'den alinip n'ye veriliyor yani, ve eksilik toplamdaki alt sinir olarak tanimlaniyor. Nasil olsa final formulde i ve n carpildigi icin sonuc degismiyecek, ve tek bir terim kullanabilecegiz. Ek olarak a_0 ise c_o haline geldi.

Ustteki entegralli teknigin benzerini c_n icin de kullanabiliriz. Esitligin sag tarafindaki kisim ustteki formulde Σ toplaminin acilmis halini kullanalim, ve iki tarafi da e^{-ikx} ile carpalim, sonra $-\pi$ ve π arasinda entegralini alalim:

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} c_0 e^{-ikx} dx +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_1 e^{ix} e^{-ikx} dx + ... +$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{ikx} e^{-ikx} dx + ...$$

Toplamdaki tum terimleri gostermedik, onemli olan kisim zaten k'inci terim, yani e^{-ikx} ile carpilan e^{ikx} ifadesi. Bu carpim basit bir cebirsel islemle $e^{-ikx} e^{ikx} = e^{-ikx+ikx} = e^0 = 1$, yani bir degerine esit. Diger tum terimler eger entegrali hesaplarsak gorebilecegimiz gibi sifira esit. Bir degerinin$-\pi$ ve π arasinda entegrali 2π.

O zaman

$$2\pi c_k = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-ikx}dx$$

Sifira esitligin nasil oldugunu cebirsel olarak gosterelim. Entegrali alalim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-ikx}dx$$

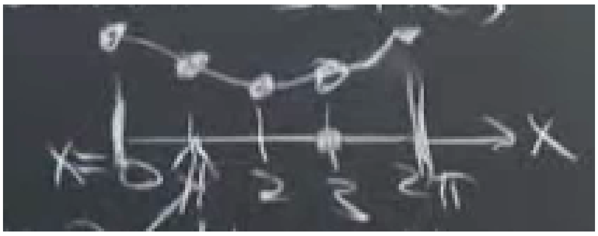
$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}dx$$

$$= \frac{e^{i(n-k)x}}{i(n-k)}\bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= e^{in\pi}e^{-ik\pi} - e^{-in\pi}e^{ik\pi} = 0$$

DFT

Ayriksal (discrete) olarak Fourier modellemesi yapmak istiyorsak, elimizde devamli (continuous) f(x) fonksiyonu olmayacak, bir f(x) fonksiyonun belli noktalarindaki degerleri (oldugunu farzettigimiz) verileri iceren bir *vektor* olacak. Bu vektorun N elemani var diyelim. Fonksiyon periyodik olduguna gore, x icin 2π'i N esit parcaya boleriz (tahtadan alinan resim altta). Bunu soylemekle fonksiyonun periyotunun N oldugunu farz etmis oluyoruz, bir anlamda diyoruz ki eger elimizde N tane daha nokta olsaydi, onlar elimizde olan degerlerle tipatip ayni olacakti. Ornegimizde N=4 olsun.



Ayrica $F(x)$ formulu biraz degisecek. Elimizde sonsuz tane nokta olmadigina gore

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n e^{inx}$$

olmasi lazim. Simdi, eger butun c_k degerlerini biliyor olsaydik, bu fonksiyon, x=0 noktasinda hangi degere sahip olurdu?

$$f(0) = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = Y_0$$

Sonraki x degerleri $2\pi/N, 4\pi/N, ..$ icin (cunku her parca $2\pi/N$, bir sonraki parca $2\pi/N + 2\pi/N$, bir kere topluyoruz, yani parcayi 2 ile carpiyoruz, sonra 3 ile, vs) asagidaki gibi devam edecegiz, ama ondan once bir w degiskeni tanimlayalim, bu degiskeni $w = e^{2\pi i/N}$ olarak alalim. Boylece w^2 dedigimizde ustel islemlerde carpim islemi toplama islemine donusecegi icin $e^{4i\pi/N}$ degeri elde edilebilir, w^3 ile $e^{6i\pi/N}$ elde edilir, vs. Bu degerler bize lazim olacak degerler, w sayesinde formuller daha temiz olacak. $F(2\pi/N)$ icindeki 3. terim ($n = 2$) nedir? $c_n e^{inx} = c_2 e^{2i2\pi/N} = c_2 e^{4i\pi/N} = c_2 w^2$. O zaman

$$f(2\pi/N) = c_o + wc_1 + w^2 c_2 + w^3 c_3 = Y_1$$

Devam edelim:

$$f(4\pi/N) = c_o + w^2 c_1 + w^4 c_2 + w^6 c_3 = Y_2$$

$$f(6\pi/N) = c_o + w^3 c_1 + w^6 c_2 + w^9 c_3 = Y_3$$

Elimizdeki dort toplam islemine bakinca, bu toplamlar ve carpimlarin aslinda lineer cebir uzerinden matrisler ile gosterilebildigini farkedebiliriz.

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Her matris icin bir degisken kullanirsak

$$Y = WC$$

F(x)'ten (yani Y'den) C'ye gitmek istersek, elimizde Y_n degerleri var, w degerleri zaten sabittir, W bu sabit degere gore olusturulur, o zaman, c_n sayilarini nasil buluruz?

$$Y = WC$$

$$W^{-1}Y = W^{-1}WC$$

$$W^{-1}Y = C$$

Yani W matrisinin tersini (inverse) alip, onu Y ile carpinca elimize C degerleri gececek.

Gunes Benekleri

Guneste periyodik olarak olan benekler, asagi yukari 11 senede bir ortaya cikarlar. Bu benekler uzun suredir gozlenmekte ve olculmektedir, siddetlerine gore, `sunspots.dat` adli dosyada bulabiliriz. Benek verisindeki periyodik olus, Fourier transformu ile analiz etmek icin uygun. Alttaki Python kodu w, W gibi kavramlari kullanarak, ustteki carpimlarla C vektorunu bulacak. Bu vektor icindeki sayilar Fourier analizindeki belli frekanslara, harmoniklere tekabul ediyor olacaklar.

Bu C degerlerinden bazilari digerlerinden daha guclu bir etkidir, mesela 11 senelik periyot, C icinde daha guclu olarak cikacaktir, cikmalidir.

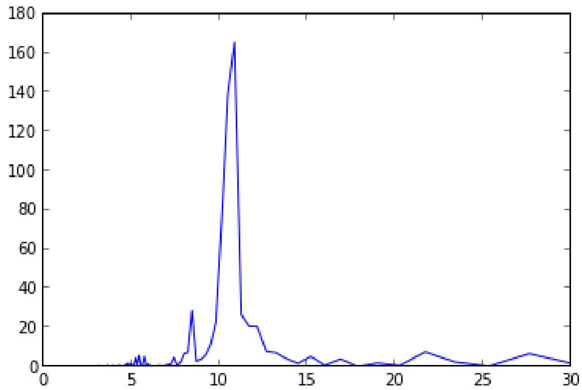
```
import scipy

tempdata = np.loadtxt("sunspots.dat")

year=tempdata[:,0]

Y=tempdata[:,1]

print len(Y), 'tane veri noktasi var'

N = len(Y)

w = np.exp((2*np.pi*1j)/N)

W = np.zeros((N,N), complex)
for i in range(N):
    for k in range(N):
        W[i,k] = w**(i*k)

C = np.dot(np.linalg.inv(W), Y)
```

```
305 tane veri noktasi var
```

En yuksek periyotu gormek istersek, alttaki kodu kullanabiliriz [6].

```
n=len(Y); print 'n=',n
power = np.abs(C[0:int(n/2)])**2
nyquist = 1./2
freq = np.array(map(float, np.array(arange(0,int(n/2))))) / (n/2)*nyquist
print 'len(freq)=',len(freq)
period=1./freq;
plt.plot(period,power)
plt.xlim(0,30)
plt.savefig('fourier_02.png')
```

```
n= 305
len(freq)= 152
```



Sonucun 11 sene civarinda oldugunu gorebiliyoruz.

FFT

Bitirmeden once FFT konusundan bahsedelim. **D**FT algoritmasi kodda goruldugu gibi bir W matrisi ortaya cikarir ve once tersini alma, sonra bu ters ile bir carpim islemi yaparak C sonucunu uretir. O notasyonunu kullanirsak DFT'nin karmasikligi $O(N^2)$'dir. Bu iyi bir hizdir.

FFT algoritmasi ustteki carpimin bazi ozelliklerini kullanarak DFT'yi daha da hizlandirir ve $O(\frac{1}{2}N\log_2 N)$ hizina getirir. FFT'den bu makalede bahsetmeyecegiz, aklimizda olsun, Scipy uzerinde fft cagrisi bu algoritmayi kullanir.

Eger scipy kullanilmak istenirse, bu kutuphanenin `fft` cagrisi cok basit:

```
C = scipy.fft(Y)
print C[:3]
```

```
[ 15318.00000000    +0.j          1153.09522938 +866.74784921j
    -72.35158374+1347.22954505j]
```

Kaynaklar

[1] Strang, G., OCW MIT Lecture #30, Computational Science and Engineering

[2] Strang, G., Computational Science and Engineering, sf. 340-370

[3] Chu, E., Discrete and Continuous Fourier Transforms

[4] Kammler, D., A First Course in Fourier Analysis

[5] Mattuck, A., OCW MIT Lecture #17-19, Differential Equations

[6] `www.mathworks.de/products/matlab/examples.html?file=/products/demos/shipping/matlab/sunspots.html`