Analitik PDE - Ders 1

Dersin kullanacagi ana kitap L. C. Evans'in Kismi Turevsel Denklemler (partial differential equations -PDE-) kitabi olacak. Bir sonraki ders icin okuma odevi soyle:

1. Sf. 1-13'teki ozet

2. Alt bolum 2.1 sf. 17-19

3. Bolum 3 sf. 91-115 arasini tamamen.

PDE'leri incelerken cogunlukla onlarin temsil ettigi fiziksel fenomenleri de inceleyecegiz. Mesela transportasyon (transport) denklemleri, ki

$$\partial_t u + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} u = 0$$

Ustteki ifadede gradyan operatoru var, bu bilindigi gibi

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}, \right)$$

$\vec{b}$ icinde sabitler olan bir vektor olabilir

$$\vec{b} = (b_1, ..., b_n)$$

Bu denklem 1. derece PDE'lerin ozel bir durumudur bu arada. 1. derece PDE'ler

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0$$

seklindedir. $D$ notasyonu Evans'in gradyan icin kullandigi notasyon, alissak iyi olur. Yani

$$Du = \nabla u$$

Ustteki gibi denklemlere bakacagiz, cozumlerini gorecegiz. Mesela ustteki denklem direk ODE yaklasimi ile cozulebiliyor. Bu hakikaten ilginc bir sey, yani ustteki gibi genis bir PDE kategorisi, $n$ tane degisken icerebilen turden denklemler ODE'lere indirgenerek cozulebiliyor. Bu yonteme "karakteristikler metotu (method of characteristics)" ismi veriliyor.

Bu arada

$$F(x, u(x), Du(x)) = 0$$

formu oldukca geneldir, cok genel gayri lineer, normal (ordinary) diferansiyel denklemin formudur. Bir ornek

$$|\nabla u|^2 = n^2(x)$$

denklemidir, ki bu denklem dalga denkleminde dalgalarin uc noktalarini (wavefront) incelerken ortaya cikar.

Lineer PDE

Lineer PDE'lerin ornekleri mesela isi denklemi (heat equation), ya da yayilma / difuzyon (diffusion) denklemi.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla u$$

Bir diger ornek dalga denklemi (wave equation)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = \nabla u$$

yayilmanin hizi $c$ sabiti olarak gosteriliyor.

Shrodinger denklemi ise soyle

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\nabla \psi$$

Isi denklemiyle alakali onemli bir nokta denge (equilibrium) noktasidir. Denklem uzun zaman zarfi baglaminda incelendiginde bir denge noktasina eristigi gorulecektir. Ki bu bizi Laplaca denklemine goturur.

$$\nabla u = 0$$

Ya da daha genel olarak

$$\nabla u = f$$

ise bu denkleme Poisson denklemi adi veriliyor.

Tum bu denklemler aslinda pek cok uygulama alaninda ortaya cikan, cok genis belli basli bazi kategorilerin prototipidirler. Mesela Isi denklemine parabolik (parabolic) kismi denklem kategorisi deniyor. Dalga denklemi hiperbolik (hyperbolic) kategorisi, Schrodinger ise dagilan (dispursive) PDE kategorisi olarak aniliyor. Laplaca, Poisson denklemlerine elliptik (elliptic) kategorisi ismi veriliyor.

Tum bu denklemleri incelerken onlari temsil ettikleri daha genis kategorinin ornekleri olarak gorecegiz.

Simdi PDE'lerin ortaya ciktigi cok basit bir ornegi gorelim.

Elimizde bir $\Omega$ bolgesi / alani oldugunu hayal edelim, ki $\Omega \in \Re^n$ olsun, yani alttaki resimde cizdigimiz $\Re^2$.

Yine diyelim ki bu $\Omega$ bolgesinin etrafinda bir tur siviyla kapli, ve bu sivi hareket ediyor. Bu hareketi sabit bir hiz vektor alani olarak gosteriyoruz.

$\Re^n$'deki bu sabit hiz alanini $\vec{V}$ olarak gosterelim. $\vec{V}$'nin vektor isaretini koyduk, ama ileride bunu yapmayabiliriz, ama anlatimin cercevesinden bir seyin vektor olup olmadigini anlamak kolay.

Yani bu siviyi olusturan parcacikler ayni (uniform) hizda hareket ediyorlar.

Sivinin $x$ noktasindaki $t$ anindaki yogunlugu $\rho(x,t)$ olarak gosterilsin. O zaman $t$ aninda $\Omega$ alanindaki kutleyi hesaplamak istiyorsam, o zaman yogunlugun hacim uzerinden entegralini alirim.

$$ Kutle \ = \int_\Omega \rho(x,t) dx $$

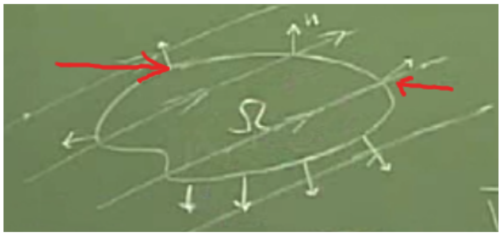
Birimleri kontrol edeli, $\rho(x,t)$ kutle / hacim (mesela $kg/cm^3$) birimine sahip, hacim uzerinden entegral alinca elimize kutle gecer.

Bu sivi belirlenen alan uzerinden surekli akiyor. O alan icindeki kutlenin degisim oranini merak ediyorum. Su hesabi yapmam lazim

$$ \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho(x,t) dx $$

Degisim orani $\Omega$ bolgesinin sinirlarindan ne geciyorsa o'dur.

Bolgenin dis sinirina dik olan birim normal vektorler dusunelim. Eger bu vektorlerden kirmizi okla gosterilen soldaki normale bakarsak, sivi akisi ona pek etki etmiyor, yani zarin o bolgesinde cikis fazla yok. Fakat sagda isaretli normal uzerinden oldukca fazla akis var.



Bu durumu da

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(x,t)dx = -\int_{\partial\Omega} \rho(x,t)\vec{v}\cdot\vec{n}\ dS$$

seklinde gosterebiliriz (esitligin sag tarafini simdi ekledik). $\partial\Omega$ bolgenin "siniri" anlaminda kullanildi, eger 2 boyutlu duzlemde isek $\partial\Omega$ siniri bir egridir, eger 3 boyutta isek sinir 2 boyutlu bir yuzey (surface), vs (genel kural olarak $n-1$ boyutlu bir yuzeydir).

$\vec{n}$ resimde cizilen birim normaller.

Bu denklemin tek soyledigi iceri giren ile cikanin birbirine (eksi isaret sonrasinda) birbirine esit oldugu. Iki tarafin kutle / zaman birimine sahip oldugunu kontrol edebiliriz.

Simdi Ileri Calculus'tan hatirlayabileceginiz bir kural

Gauss'un Teorisi

Elimdeki $F : \Re^n \to \Re^n$ uzerinde tanimli herhangi bir vektor alani icin, ki $x \mapsto F(x)$ olmak uzere ($\mapsto$ isareti eslenme (maps to) anlamina geliyor), ve elimde $\Omega \subset \Re^n$ bolgesi var ise, ve bu vektor alani puruzsuz (smooth) bir vektor alani ise (bu vektor bilesenlerinin turevi alinabilir fonksiyonlar oldugunu soyler), o zaman su da dogrudur. Vektor alaninin sapmasini (divergence) entegre ediyorum,

$$\int_\Omega \nabla\cdot F dx = \int_{\partial\Omega} F\cdot n\ dS$$