

## MIT OCW ODE - Ders 12

Bu derste homojen olmayan (inhomogeneous) denklemlere ciddi bir giriş yapacağız.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Simdiye kadar esitliğin sağ tarafı sıfır olmuştur, artık orada bir fonksiyon var. Not: Cogu uygulamada  $x$  yerine  $t$  sembolü vardır, zaman (time) için.

$f(x)$  için pek çok isim kullanılır. Giriş sinyali (input signal), sürücü terimi (driving term), güç terimi (forcing term), vs. Bunlardan hangisinin kullanıldığı hangi derste olduğunuza göre değişebilir, farklı mühendislik, bilim dalları farklı terimleri kullanabilirler, ama tüm bu terimler aynı şeyi kastediyorlar.

Çözüm  $y(x)$  ise cevap (response) olarak nitelenir, çıktı (output) kelimesi de kullanılır.

Simdiye kadar homojen koşulu incelememizin sebebi üstteki ODE'nin homojen denklemin çözümü bilinmeden çözülemeyeceği.. Yani  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  denklemin çözümü için önemli. Sıfıra eşit olan denkleme de farklı isimler veriliyor: Alakali homojen ODE, indirgenmiş (reduced) denklem gibi.

Yani homojen denklemin çözümü  $y = c_1y_1 + c_2y_2$  homojen olmayan denklem için gerekli, o sebeple ayrı bir şekilde bir sembolü de var. Bazen  $y_c$ , bazen  $y_h$ . Hic alt sembol (subscript) koymayanlar da var, bunlar işi oldukça karıştırıyorlar tabii.  $y_c$ 'ye verilen isim nedir? Bir ismi yok, cogu kitap ona “alakali homojen denklemin çözümü” gibi uzun bir etiket veriyor. Bu dersin kitabı ona “tamamlayıcı çözüm (complimentary solution)” ismi vermiş.

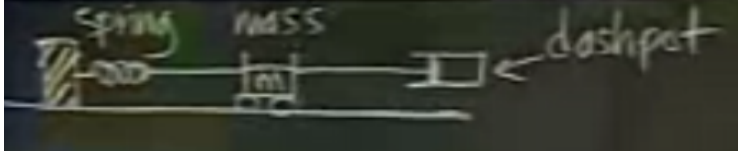
### Klasik Örnekler

#### Örnek 1

$$mx'' + bx' + kx = f(t)$$

Bu daha önceden hatırlayacağımız yay / kütle / engelleyici sistemi. Fakat bu sistemde daha önce sağ taraf sıfırdı. Şimdi sıfır yerine olan  $f(t)$  fiziksel sistemde neyi temsil ediyor?

Resmi hatırlayalım

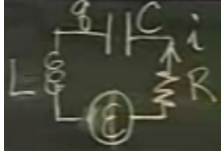


Ortada duran kutle ileri geri gidebiliyordu, eger denklemde  $f(t)$  varsa, biri o kutle uzerinde ek olarak direk bir guc uygulamis olur, mesela kutlenin bir metal oldugunu farzedelim, ve uzaktan birinin bir miknatis tutarak yay, engelleyici “haricinde” degisik bir yonden de bir guc uyguladigini hayal edelim.

$f(t) = 0$  oldugu zaman (yani denklemde olmadigi zaman), sistem pasiftir. Disaridan hicbir guc uygulanmamaktadır. Baslangic sartlari olarak bazi seyler yapabiliriz tabii, mesela kutleyi bir tarafa dogru cekip, birakmak gibi. Ama ondan sonra sistemde hersey kendiliginden olacak, sistem salinima girecek, ya da girmeyecek, vs. Eger  $f(t)$  varsa, bu sisteme guc uygulanmis sistem (forced system) denmesi bu yuzden.

## Ornek 2

Diferansiyel bir modeli mukemmel bir sekilde takip eden bir diger sistem, basit bir elektrik devresidir.



$L$  bobinin yarattigi olusturucu (inductance) terimidir. Bu devreyi temsil etmek icin iki diferansiyel denklem kullanilir, ama bu denklemlerden biri otekenden turetilebilir, ikisi de Kirchoff’un voltaj kanununa baglidir. Bu kanun der ki “devrenin tum noktalarinda alinan voltaj farkliliklari / dusuklukluklerini toplarsak, sonuc sifir olmalidir”.

$q$  kapasitans uzerindeki akim (charge),  $i$  devredeki akimdir.

Denklem soyle

$$Li' + Ri + \frac{q}{C} = \varepsilon(t)$$

Sagdaki  $\varepsilon$  belki bir pil, bir jeneratör uzerinden devreye eklenen enerji. Bu enerji sinussel bir dalga seklinde olabilir, ki o zaman alternatif akimdan (AC/DC) bahsediyor olurduk, ya da sabit olabilir, o zaman duz akimdan

(DC) bahsediyor olurduk.

Formul hala nihai formunda degil, oraya gelmek icin bir sey daha bilmemiz gerekiyor,  $q' = i$ , yani akimin kapasitoru terk edis hizi devrenin akima esittir, akim bu yuzden hareket eder. Tabii aslinda hareket eden bir sey yok, her elektron yanindakini ittirir, ama aslinda yerlerini terk etmezler, her neyse [hoca ben de bu isi tam anlamiyorum diyor], her neyse, bu noktada iki sey yapabiliriz. Ya tum denklemleri entegre ederiz ve her seyi  $q$  bazinda temsil ederiz, ya da denlemin turevini aliriz ve her seyi  $i$  bazinda temsil ederiz. Bir turev yontemini takip edecegiz:

$$Li'' + Ri' + \frac{i}{C} = \varepsilon(t)'$$

Eger sag tarafta duz akim olsaydi turev sonrasi  $\varepsilon(t)'$ 'nin sifir olacakti. Boylece elimize homojen bir denklem gecmis olurdu.

Eger duz akim bile koymamis olsaydik, yani devreye disaridan ek yapmasaydik, belki baslangic sarti olarak kapasitor icinde bir doluluk olabilirdi, ve bu akim yavasca devre uzerinden, az amartisorlu durumda mesela ileri geriye bir salinimla, akacak ve bitecekti. Ama genellikle uygulamalarda olan disaridan enerji verilmesi ve akimin ittirilmesi / surulmesi / idare edilmesi, ve buna gore akimin ne olacaginin hesaplanmasi.

Elimizdeki iki problemler iste bunlar. Ya pasif devre, ya da disaridan verilen enerji.

Simdi homojen bir denklemleri cozmek icin gereken kilit teoremi gorelim.

Teori

$$Ly = f(x)$$

Ustteki bir ODE ve  $L$  bir lineer operator. O zaman cozum su formdadir:

$$y_p + y_c$$

yani

$$y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$$

$y_p$  ozel (particular) cozum. Bu kelime bu dersin en kotu secilmis / kafa karistirici kelimelerinden biri. Ozel cozum derken sanki ozgun, tekil cagrisimi yapiliyor ama aslinda kastedilen herhangi bir cozum.

Teoriye donelim, eger  $L$ 'in lineer operator olusunu kullanirsak teorinin ispatı cok kolay. İki ifadeyi ispatlamamız gerekiyor.

1. Tum  $y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$  ifadeleri cozumdur. Bu ifadeyi nasıl ispatlarız? Ana denkleme koyarak.

$$L(y_p + c_1y_1 + c_2y_2)$$

Ustteki lineer operator olduguna gore

$$= L(y_p) + L(c_1y_1 + c_2y_2)$$

Biliyoruz ki

$$= \underbrace{L(y_p)}_{f(x)} + \underbrace{L(c_1y_1 + c_2y_2)}_0$$

$$= f(x)$$

Demek ki tum  $y_p + c_1y_1 + c_2y_2$ 'ler bir cozumdur.

Bu hikayenin bir yarisi tabii. Hikayenin ikinci yarisi bu cozumlerin “yegane” cozumler oldugunu gostermek. Simdi ortaya  $u(x)$  diye ufaklik cikartacagiz, bu arkadas cozum oldugunu zannedecek. Ve bizde ispatta gostermeliyiz ki bu kendini farkli zanneden  $u(x)$  bile  $y_p + c_1y_1 + c_2y_2$  ifadesinden baska bir sey olamaz.

Bunu nasıl yapacagiz. Cok kolay. Eger bir cozum ise

$$L(u) = f(x)$$

olmalıdır. Peki su bizim “ozel cozumu” kullanalim,  $L(y_p)$  nedir? Aynisi

$$L(y_p) = f(x)$$

Son iki denkleme birbirinden cikartirsak

$$L(u) - L(y_p) = 0$$

$$L(u - y_p) = 0$$

O zaman ustteki son ifade homojen denklemin bir cozumudur. O zaman su dogru olmalı

$$u - y_p = \tilde{c}_1y_1 + \tilde{c}_2y_2$$

Diger yandan onceden bildigimiz gibi

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$y - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Ya da

$$u = y_p + \tilde{c}_1 y_1 + \tilde{c}_2 y_2$$

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Son iki ifade birbirinin aynisi, o zaman  $u$  farkli bir cozum olamaz.

Eger katsayilar sabit ise, isin yarisini halletmisiz demek ki. Tamamlayici denklemleri biliyorsak, ki onu nasil bulacagimizi biliyoruz artik, ustel, kompleks ustel, sin, cos fonksiyonlar kullanarak, vs. Geriye ne kaliyor? Sadece ozel bir cozum bulmak kaliyor. Yani hangisi olursa olsun, esitligin sag tarafina uyan “bir” cozum buldugumuz anda, isimiz bitiyor.

Is bitiyor dedik ama, onumuzdeki iki haftayi bu ozel cozumu bulmakla gecirecegiz. Fourier Serilerini kullanan bir genel metot gorecegiz, cunku bu serileri islemek icin iyi bir bahane bu, fakat sunu da eklememiz lazim. Birkac standart fonksiyon icin operatorler kullanan genel bir yontem var, tum diger “standart olmayan” durumlar icin seriler kullaniliyor, ya da yaklasik-sallama (approximation) kullaniliyor. Eger bunlari hicbiri islemezse, en kotu durumda bilgisayara hesaplattiririz, ve sayisal cevabi ozel cozum olarak kullaniriz.

Simdi bu yaptiklarimizi 1. seviye denklemlerle irtibatlandirmak istiyorum. Ders 8’den hatirlayalim:

$$y' + ky = q(t)$$

Cozum icin entegre edici faktoru bulmustuk, carpmistik, vs. Cozum soyleydi

$$y = e^{-kt} \int q(t) e^{kt} dt + ce^{-kt}$$

Ustteki formül 2. seviye denklemleri cozmek icin gosterdigimiz paradigmaya nasil baglantili? Ustteki denklemlerde artinin sagindaki terim tamamlayici denklemin cozumu gibi durmuyor mu?

$$y = e^{-kt} \int q(t) e^{kt} dt + \underbrace{ce^{-kt}}_{y_c}$$

Bu mantikli cunku  $ce^{-kt}$  alttaki homojen denklemin cozumu degil mi?

$$y' + ky = 0$$

Bunu hemen ilk bakista goruyoruz (dersin bu seviyesinde artik bunu aninda soyleyebilmemiz lazim).

O zaman ustteki cozumde  $y_c$ 'den geri kalanlar da ozel cozum olurlar,

$$y = \underbrace{e^{-kt} \int q(t)e^{kt} dt}_{y_p} + \underbrace{ce^{-kt}}_{y_c}$$

Itiraz edenler olabilir, ama bu  $y_p$  icinde tanimsiz bir entegral var, ayrica hic sabit yok, vs. Eger entegralin tanimsizligi bizi rahatsiz ediyorsa, onu tanimli hale getirmenin numarasini gormustuk, alt sinir icin bir sifir koyariz, uste  $t$  koyariz, vs. Sabit konusuna gelince, entegre edince ortaya bir sabit cikmayacak mi?

Devam edelim. Ustteki cozum hakkında bir yorum daha yapmistik, hatirlarsak,  $k > 0$  ve  $k < 0$  sartlari oyle farkli iki sonuca yol aciyor, oyle farkli fiziksel anlamlara sebep oluyor ki, aslinda ustteki ayni forma bagli olmalarina ragmen, bu sartlarin tamamen farkli denklemler olarak gorulmeleri gerektiginden bahsetmistik.

$k > 0$ , ustteki cozumu  $y_c$ 'nin gecici (transient)  $y_p$ 'nin sabit konuma (steady-state) donustugu bir durum ortaya cikiyordu. Bu durumda baslangic sartlarinin tanimladigi  $c$ 'nin ne oldugu onemli olmuyordu, cunku  $c$ 'yi iceren kisim ne olursa olsun sifira gidiyordu.

$k < 0$  olunca isler degisiyor tabii, o zaman ust paragraftaki analiz ise yaramiyor.

Simdi yapmak istedigim ustteki anlatimin 2. ve daha ust seviye denklemlerdeki karsiligini bulmak. 2. seviyeyi anlamak yeterli aslinda, onu anlarsak, daha ust seviye denklemlerde yapilacaklar tipatip ayni.

$$y'' + Ay' + By = f(t)$$