Taylor Serisini Turetmek

Taylor serilerinin arkasindaki fikir, surekli ve sonsuz defa turevi alinabilen turden bir fonksiyon $f(x)$'i bir x_0 noktasinin (burada a sembolu de kullanilabilir) "cevresinde", yakin bolgesinde yaklasiksal olarak temsil edebilmektir.

Turetmek icin

Calculus'un Temel Teorisi der ki:

$$\int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t = f(x) - f(a)$$

Bu formulu tekrar duzenlersek, alttakini elde ederiz:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t$$

Bunun uzerinde Parcali Entegral yontemini uygulariz. Parcali Entegral teknigi genel olarak soyledir:

$$\int_a^b u\ dv = u\ v - \int_a^b v\ du$$

Simdi iki ustteki formulun entegral icindeki kismini parcali entegrale uyacak sekilde bolusturelim

$u = f'(t)$ ve $dv = dt$

O zaman acilim

$$f(a) + xf'(x) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\ \mathrm{d}t$$

Alttaki formulu kullanarak

$$\int_a^x xf''(t)\ \mathrm{d}t = xf'(x) - xf'(a)$$

iki ustteki formulu su hale getiririz

$$f(a) + \int_a^x xf''(t)\ \mathrm{d}t + xf'(a) - af'(a) - \int_a^x tf''(t)\ \mathrm{d}t$$

Bazi ortak terimleri disari cekersek

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\ \mathrm{d}t$$

Ayni teknigi bir daha uygulayinca

$$f\left(x\right) = f\left(a\right) + (x-a)f'\left(a\right) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''\left(a\right) + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2 f'''\left(t\right)\ \mathrm{d}t$$

Tum bunlari daha genel olarak kurallastirmamiz gerekirse, tumevarim (induction) teknigini kullanalim, varsayiyoruz ki Taylor'un Teorisi bir n icin gecerli ve

$$f(x) = f(x) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ...\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\ \mathrm{d}t$$

Sonuncu entegrali parcali entegral teknigi ile tekrar yazmamiz mumkundur. $(x-t)^n$'in anti-turevi (anti-derivative) $\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}$ ile verilir, o zaman

$$\int_a^x \frac{f^{(n+1)}\left(t\right)}{n!}\left(x-t\right)^n\ \mathrm{d}t$$

$$= -\left[\frac{f^{(n+1)}\left(t\right)}{(n+1)n!}\left(x-t\right)^{n+1}\right]_a^x + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}\left(t\right)}{(n+1)n!}\left(x-t\right)^{n+1}\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}\left(t\right)}{(n+1)!}\left(x-t\right)^{n+1}\ \mathrm{d}t$$

Son entegral hemen cozulebilir

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Alternatif Form

Hesapsal Bilim derslerinde bu serinin alternatif bir formu daha cok karsimiza cikabilir. f'i t yakininda ufak bir h adimi atildigini farzederek Taylor serileri uzerinden $f(t+h)$'i gelistirmek suretiyle temsil edebiliriz. Eger $x = t + h$ ve $a = t$ alirsak alttaki orijinal Taylor serisini

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x) + ...$$

su sekle donusturebiliriz

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{1}{2}h^2 f''(t) + ...$$

Bu tanimin, birinci turevin formuluyle olan alakasini gormek icin

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ifadesini hatirlamak yararli olabilir, yaklasiksal isareti $\approx$ kullanildi, cunku bu ifade sadece $h \to 0$ iken dogrudur (turevlerin limit olarak tanimindan hareketle). Biraz cebirsel manipulasyon yaparsak

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

$$f(x+h) \approx f'(x)h + f(x)$$

En son formulun Taylor serisi 1. derece acilimiyla ayni oldugu goruluyor.

Kaynak

http://www.proofwiki.org/wiki/Taylor's_Theorem