

Sınırlı Elementler Metodu (Finite Elements Method)

Bu metot differansiyel, kısmi differansiyel denklemleri (partial differential equations) yaklasiksal olarak modelleme ve cozmenin yontemleridir.

Formul: Baslangic denklemi

$$\frac{-d}{dx} \left( c(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x)$$

İki tarafı da  $v(x)$  ile carpiyoruz ve 0 to 1 sinirlariyla entegralini aliyoruz.

$$\int_0^1 \frac{-d}{dx} \left( c(x) \frac{du}{dx} \right) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

Parcali entegral (integration by parts) formulu soyledir:

$$\int y dz = yz - \int z dy$$

Ana formulun bolumlerini, parcali entegrale gore bolusturursek:

$$dz = \frac{-d}{dx} \left( c(x) \frac{du}{dx} \right) dx$$

$$z = -c(x) \frac{du}{dx}$$

$$y = v(x)$$

$$dy = \frac{dv}{dx} dx$$

Yukarida  $dz$  icinde  $dx$  ve  $\frac{1}{dx}$  birbirini iptal eder. Parcali entegral formulunun sag tarafina gore yerlerine koyarsak:

$$\int_0^1 v(x) dx \frac{-d}{dx} \left( c(x) \frac{du}{dx} \right) = -[v(x) c(x) \frac{du}{dx}]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 c(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

Ustteki parcali entegral aciliminda sol taraf entegrale sinir degerleri aldiginda, sag taraftaki  $yz$  sonucunun ayni sinir degerlerine tabi olduguna dikkat edelim.

Differansiyel denklemde sinir kosullari  $x = 1$  durumunda  $c(1)u'(1) = 0$ , ve  $x = 0$  durumunda  $v(0) = 0$  olarak biliniyor. O zaman ustteki denklemin sol tarafında

$x = 0$  ve  $x = 1$  kosullari icin tanimli bolum  $0 - 0 = 0$  olacaktir ve denklemden atilabilir. Geriye kalanlar

$$\int_0^1 c(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

Bu fonksiyonu Galerkin adli bir matematikci bulmus, "zayif form (weak form)" olarak adlandiriliyor.

Simdi diyelim ki  $n$  tane test fonksiyonu sectik  $\phi_1(x), \dots, \phi(n)$  ve bu fonksiyonlari  $U_j$  sayilari ile carpiminin toplamini, yani bir tur kombinasyonunu  $u(x)$  yerine kullanmaya karar verdik.

$$U(x) = U_1 \phi_1 + \dots + U_n \phi_n$$

O zaman

$$U'(x) = U_1 \phi_1' + \dots + U_n \phi_n'$$

$$= \sum_1^n U_j \frac{d\phi_j}{dx}$$

Simdi  $du/dx$  yerine  $U'(x)$  koyarsak

$$\int_0^1 c(x) \left( \sum_1^n U_j \frac{d\phi_j}{dx} \right) \frac{dV_i}{dx} dx = \int_0^1 f(x) V_i(x) dx$$

Dikkat edelim,  $v(x)$  yerine  $V_i(x)$  kullandik. Ustteki formül her  $i$  için yeni bir formül "uretecek". Niye  $V_i$ ? Zayif formdaki  $v(x)$  formülünü de zaten biz uydurmüstük, yani  $v(x)$  biz ne istersek o olur. O zaman bu fonksiyonu  $n$  tane formül üretmek için bir numara olarak kullaniliyoruz,  $n$  tane formül olunca matrisin  $n \times n$  elemanini doldurabileceğiz ve cozume erisebileceğiz. Ek not, cogunlukla  $V_i(x)$  için  $\phi_i$  formülleri kullaniliyor.

Ayrica formüldeki  $U_j$  kismini cekip cikartirsak ve bir vektor icine koyarsak, geri kalanlar bir  $K_{ij}$  matrisi icinde tutulabilir.

$$K_{ij} = \int_0^1 c(x) \frac{d\phi_j}{dx} \frac{dV_i}{dx} dx$$

Sag taraf ayni sekilde  $i$  tane formül üretir

$$F_i = \int_0^1 f(x) V_i(x) dx$$

Final formul matrix formunda basit bir sekilde temsil edilebilecektir.

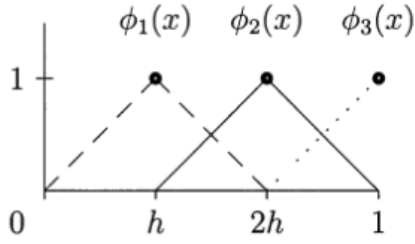
$$KU = F$$

Ornek

Ornek olarak  $-u'' = 1$  denklemini cozelim. Not: Differansiyel denklemlerde sonuc bulmak demek bir "fonksiyon" bulmak demektir. Normal cebirsel denklemlerde sonuc bulmak degiskenlerin "sayisal" degerini bulmak demektir. Birazdan bulacagimiz sonuc  $u(x)$  "fonksiyonu" olacak.

Eger denklem  $-u'' = 1$  ise o zaman bu formulu ana forma uygun hale getirmek icin  $c(x) = 1$  olarak almamiz gerekir.  $-u'' = 1$  denkleminde esitligin sag tarafi 1 olduguna gore  $f(x) = 1$  demektir.

Artik  $\phi$  fonksiyonlarini secme zamani geldi. Bu fonksiyonlari "toplami" hedefledigimiz fonksiyonu yaklasiksal (approximate) olarak temsil edecek. Ornek olarak secebilecegimiz bir fonksiyon "sapka fonksiyonu (hat function)" olarak bilinen ucgen fonksiyonlar olabilir. Altteki figurde bu fonksiyonlari goruyoruz.



Bu figurde x ekseninin  $h$  buyuklugundeki parcalara bolundugunu goruyoruz.

Entegralleri hesaplayalim

$$F_1 = \int_0^1 V_1(x) dx$$

Daha once  $V_1$  ve  $\phi_1$ 'i ayni kabul ettigimizi belirtmistik.

Yukaridaki integralin aslinda bir alan hesabi yaptigini goruyoruz. Sinirlar 0 ve 1 arasinda, ama  $2h$  otesinde zaten  $\phi_1$  fonksiyonu yok.  $\phi_1$ 'in alani nedir? Alan ucgenin alani: Taban carpi yukseklik bolu 2:  $2h$ , yuksekligi 1, o zaman alan  $(2h \times 1)/2 = 1/3$

Benzer mantikla bakarsak,  $F_2$  ile  $F_1$  ayni, yani  $1/3$ .  $F_3$  ise onlari yarisi, yani  $1/6$ .

$K_{ij}$  nasil hesaplanacak?  $c(x) = 1$  oldugu icin formulden cikarilabilir ve  $V_1$  ve  $\phi_1$ 'in ayni olduguna soyledik:

$$K_{ij} = \int_0^1 c(x) \frac{d\phi_j}{dx} \frac{dV_i}{dx} dx$$

$$K_{11} = \int_0^1 \left( \frac{dV_1}{dx} \right)^2 dx$$

$dV_1/dx$  nedir? Birinci sapka fonksiyonunun turevidir. Bu tureve bakarsak, 0 ve  $h$  arasında artı eğim (slope)  $1/h$ ,  $h$  ve  $2h$  arasında eksi eğim  $-1/h$  oluyor. Ama kare aldığımız için sonuç aynı,  $1/h^2$ . O zaman  $h = 1/3$  olduğuna göre  $1/(1/3)^2$ , yani  $dV_1/dx = 9$ .

$$K_{11} = \int_0^{2/3} 9dx = 9x \Big|_0^{2/3} = (9)(2/3) - 0 = 6$$

$K_{22}$  seklen aynı fonksiyon parçasını temel aldığı için aynı değere sahip: 6.  $K_{33}$  onların yarısı, esittir 3.

$K_{12}$  farklı eğimlerin çarpımı anlamına gelir, yani  $V_1'$  ile  $V_2'$  çarpımı olur. Bu iki fonksiyona bakalım, 0 ile  $h$  arasında  $V_2$  yok, eğim 0. İkisinin de sıfır olmadığı, çarpımda kullanılabilecek bir eğiminin olduğu tek aralık  $h$  ve  $2h$  arası. Burada  $V_1' = -3, V_2 = 3$ .

$$K_{12} = \int_{1/3}^{2/3} (3)(-3)dx = -9x \Big|_{1/3}^{2/3} = -6 - (-3) = -3$$

Aynı şekilde  $K_{23} = -3$ . Ama  $K_{13} = 0$  çünkü hiç çakışma yok.

Matrisi doldurursak,

$$KU = F$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Python kodu

```
K = [[6., -3., 0],
      [-3., 6., -3.],
      [0., -3., 3.]]

f = [1./3., 1./3., 1./6.]

print np.linalg.solve(K,f)

[ 0.27777778  0.44444444  0.5          ]

print 5./18., 4./9., 1./2.
```

0.277777777778 0.444444444444 0.5

Rapor edilen degerler bu denklemin bilinen cozumu  $u(x) = x - \frac{1}{2}x^2$  ile 0, h, 2h noktalarinda (mesh points) birebir uyum gosterdigini goruyoruz. Yani yaklasiksal olarak differansiyel denklemini cozmeyi basardik.

Kaynaklar

Strang, G., Computational Science and Engineering, 2007