

Büyük Sayılar Kanunu

Olasılık kuramında önemli matematiksel bir denklem, büyük sayılar kanunudur. Bu kanun, tahmini olarak bildiğimiz günlük bir gerçeğin matematiksel ispatıdır da denebilir.

Yazı-tura atarken yazı çıkma ihtimalinin 1/2 olduğunu biliyoruz. Herhalde çoğumuz da bu yazı-tura işleminin "bir çok kere" tekrarlandığı durumda, toplam sonucun aşağı yukarı "yarısının" yazı olacağını tahmin biliyoruz. Bu tahminin matematiksel olarak söylemi, büyük sayılar kanunudur. Yıllarca önce Öklid'in geometriyi ispat ederek yaptığı gibi, matematiğe eklediğimizi her yeni bilgi dağarcığını önce matematiksel olarak ispatlamamız gerekiyor.

Farzedelim ki her yazı-tura atışı bir deney olsun. Her ayrı deneyin sonucu X_1, X_2, \dots, X_n olarak rasgelen değişkenlerle tanımlanmış olsun. Bu değişkenler ya 1 ya da 0 değeri taşıyacak, Yazı=1, Tura=0 olmak üzere.

Buna göre, n tane deneyden sonra elimize gelmesi gereken yazı oranı şudur.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Büyük sayılar kanunu, n büyüdükçe X_n 'in 1/2'ye yaklaştığını ispatlar.

Başlayalım.

X_1, X_2, \dots, X_n bağımsız değişkenler olsun.

$$E(X_i) = \mu$$

$$Var(X_i) = \sigma$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

O zaman her $\epsilon > 0$ için ve $n \rightarrow \infty$, $p(|\bar{X}_n - \mu|) \rightarrow 0$.

Bu tanımlara göre, her rasgele değişkenin (deneyin) ortalaması aynı değerdir diyoruz. Bu zaten beklenir bir tanımdı, çünkü her rasgele değişkenin dağılımının aynı olduğunu kabul etmiştik. Her yazı tura aynı şartlar altında atılmazlar mı?

\bar{X}_n de bir rasgele değişkendir, çünkü Büyük sayılar kanununu, matematik-

sel olarak, \bar{X}_n değişkeninin ortalamasını tekil olarak her X_i dağılımının (aynı olan) ortalaması arasında birkü onun da formülü başka rasgelen değişkenlere dayanıyor.

İspat devam etmek için, şapkalı X_n dağılımının beklentisini bulmamız gerekiyor.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)$$

E dogrusal bir islec (linear operator) olduğu için dışarıdan içeri doğru nüfuz eder.

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} n\mu$$

$$= \mu$$

\bar{X}_n dağılımının standart sapmasını da bulalım.

Diğer bir olasılık kuramına göre

$$Y = a + bX$$

$$Var(Y) = b^2 Var(X)$$

olduğunu biliyoruz. O zaman,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$Var(\bar{X}_n) = Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i)$$

$$Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Artık Çebişev kuramını kullanmaya hazırız.

$n \rightarrow \infty,$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \rightarrow 0$$

Cebisev'den

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{Var(\bar{X}_n)}{\epsilon^2}$$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \rightarrow 0$$

$\sigma^2/n\epsilon^2$ 'in sifira gitmesi normal cunku n sonsuza gidiyor.

Peki $P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon)$ 'nin sifira gittigini gosterdik mi?

$\sigma^2/n\epsilon^2$ 'nin sifira gittigini gosterdik. $\sigma^2/n\epsilon^2$ de $P(|\bar{X}_n - \mu| > \epsilon)$ 'den buyuk olduguna gore, demek ki o da sifira iner.