

MIT OCW 18.03, Ders 4

Bu derste diferansiyel denklemlerde “degisken degistirme” teknigini gorecegiz. Onceki derslerde iki turlu ODE cozme yontemi gorduk. Birinde degiskenleri ayirabiliyorduk, digeri lineer denklemler idi. Isin ilginç tarafı o tur denklemler ve gosterilen cozumler her zaman isleyen yegane “genel” yaklasimlardir. Digerler ODE’ler? Diger tur denklemlerde degiskenin yerine bir baskasini gecirerek onu kesinlikle cozebildigimiz bir forma indirgemeye ugrasiriz.

Ilk gorecegimiz degistirme teknigi olckeleme (scaling) olacak.

Olckeleme, denklemin kullandigi kordinat sisteminde eksenleri (birini, ya da hepsini) uzatip, kisaltmak anlamina gelir.

Diyelim ki $y' = f(x, y)$ formulumuz var. Yeni kordinat soyle olsun

$$x_1 = \frac{x}{a}$$

$$y_1 = \frac{y}{a}$$

a, b sabit degerler. Boylece x, y kordinatlarini olckelemis olduk.

Niye kordinat sistemini degistirmek isteriz? 1. Belki olcumlerin birimini degistirmek istiyoruzdur (fizikte buna ihtiyac oluyor mesela). 2. Bazen degiskenleri boyutsuz yapmak istiyor olabiliriz -kg, cm birimler olmadan-, yani degistirdigimiz seyi hic bir birime sahip olmayacak hale getirmek, sadece pur sayi yapmak. Fizikte birimlerle bogusmanin dertleri malum. 3. Ya da ODE’deki sabit sayisini azaltmak ya da sabitleri basitlestirmek icin bu yapilabilir.

Bir ornek gorelim. Bu ornek cok yuksek derecelerde kullanim saglayan soguma kanunudur.

$$\frac{dT}{dt} = k(M^4 - T^4)$$

T: ic sicaklik

M: sabit

Tekrarlayalim, bu kanun cok buyuk sicaklik farklarinda kullanilir, cunku o seviyelerde Newton’un Soguma Kanunu islemiyor.

Ilk degisimi yapalim, bu bir olckeleme operasyonu olsun. T ve M ’nin arasinda

bir baglanti kuralim. Yeni degisken T_1 olsun ve soyle tanimlansin

$$T_1 = \frac{T}{M}$$

T degiskeni sicaklik belirttigi icin, celcius, fahrenheit gibi bir birime sahipti, M ayni sekilde. Ustteki bolumu yapinca sonuc birimsiz bir hale gelecektir. Peki denklemdeki degiskeni nasil degistirecegim?

Y yerine gecirecegimiz degisken T olduguna gore, o formda bir formül kullanirsak daha iyi olur. Yani

$$T = T_1 M$$

ODE bu formule gore tekrar duzenlenirse

$$M \frac{dT_1}{dt} = k M^4 (1 - T_1^4)$$

$$\frac{dT_1}{dt} = k_1 (1 - T_1^4)$$

$k M^3 = k_1$ dedik, yani yeni bir sabit yaratmis olduk, bu teknige “sabitleri toparlama (lumping)” adi veriliyor.

Ne degistirmis, iletirmis olduk? Denklemin sag tarafi birimsiz hale geldi (T_1 birimsiz). Sol tarafta tek birim zamanin tersi, yani $zaman^{-1}$, $1/zaman$. Birimler azaldi. Ayrica artik denklemde bir tane daha az sabit var, daha temiz duruyor.

iki tur yerine gecirme (substitution) yontemi vardir. Biri direk yontem, yeni bir degisken getirilir, bu degisken eskilerin bir tur kombinasyonudur, onceki ornekte $T_1 = T/M$. Oteki tersine cevirme (inverse), bu yontemde eski bir degisken eski ve yeni olanlari bir tur kombinasyonu olur, mesela $T = M T_1$.

Bu farklilik Calculus dersinde gormussunuzdur, hatirlatmak gerekirse, tipik olarak su integrali cozmek gerekince

$$\int x \sqrt{1 - x^2} dx$$

Yerine gecirmek icin $u = 1 - x^2$ kullanilir, boylece dx du gecisi yapilabilir, vs. Bu direk yontemin bir ornegi olurdu. Eger su olsaydi

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx$$

ki $x = \sin(u)$ kullanmak daha iyi olurdu. Bu da tersten yontemin bir ornegi.

Ornek

Direk Yerine Gecirme

$$y' = p(x)y + q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1$$

Bu denkleme Bernoulli Denklemi denir.

Denklemi y^n 'e bolelim.

$$\frac{y'}{y^n} = p(x)\frac{1}{y^{n-1}} + q(x)$$

Bunu bir lineer denkleme cevirebiliriz, nasil? Yerine gecirme icin v diye yeni bir degisken kurgulayalim:

$$v = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$$

Turevi alalim

$$v' = (1-n)\frac{1}{y^n}y'$$

Goruyoruz ki v' ustte belirtilen $\frac{y'}{y^n}$ ile ayni (bir sabit orani haric). O zaman denklemimizin yeni hali nedir?

$$\frac{v'}{1-n} = p(x)v + q(x)$$

ki bu denklem lineer bir denklemdir. Hala standart formda degil ama o degisimi hemen yapabiliriz.

Ornek

$$y' = \frac{y}{x} - y^2$$

Bernoulli Denklemi

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x}\frac{1}{y} - 1$$

$$v = \frac{1}{y}, v' = \frac{-1}{y^2}y'$$

$$-v' = \frac{v}{x} - 1$$

Standart form

$$v' + \frac{v}{x} = 1$$

Entegre edici faktor, $e^{\ln(x)} = x$

$$xv' + v = x$$

$$(xv)' = x$$

$$xv = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$v = \frac{1}{2}x + \frac{c}{x}$$

Isimiz bitti mi? Hayir. Sonucu y olarak almamız lazim.

$$v = \frac{1}{2}x + \frac{c}{x} = \frac{x^2 + 2c}{2x}$$

$v = 1/y$ olduguna gore

$$y = \frac{2x}{x^2 + 2c_1}$$

Tersine Cevirme Teknigi Ornegi

Homojen ODE

Homojen kelimesinin bir anlami ODE baglaminda esitligin saginda 0 oldugu durumdur, fakat simdi kullanılacak anlami degisik; buradaki anlami su formdaki bir denklem demek

$$y' = F(y/x)$$

Yani esitligin sag tarafinda ne zaman bir degisken gorursek, o degiskenin y/x “turunde” formunda oldugu turden bir denklem (turunde derken ne demek istedigimizi birazdan anlatacagiz). Bazen bu bolum form bariz olarak gozukmeyebilir, mesela

$$y' = \frac{x^2y}{x^3 + y^3}$$

Fakat bu denklem homojendir, eger bolumun ustunu ve altini x^3 'e bolursek

$$\frac{y/x}{1 + (y/x)^3}$$

Goruldugu gibi bu denklem homojen. Peki su denklem?

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Bu da homojen. Iki tarafı da x 'e bolelim, ve x 'i $\sqrt{\cdot}$ icine tasirken onu x^2 yapmayı unutmayalım. Boylece

$$y' = \sqrt{1 + (y/x)^2}$$

Simdi turunde kelimesine geelim: y/x durumunun bir diger ifade edilis tarzı sudur: Homojen ODE'ler buyutme, odaklanma (zoom) operasyonu sonrasi degismezler (invariant under zoom). Yani sanki kordinat sistemine zoom yaptigimizi, ufak bir noktayı buyuttugumuzu farzedelim, eksen degisimi soyle,

$$x = ax_1$$

$$y = ay_1$$

Bu degisim sonrasi homojen denklemde hicbir degisiklik olmaz.

Homojen ODE'leri nasıl cozeriz?

$$y' = F(y/x)$$

Degisken degistirme nasıl yaparız? Soyle $z = y/x$. Fakat direk degil tersten degistirme yontemini kullanırız, direk kullansaydik z' hesaplamak gerekecekti, fakat orada Bolum Kanunu vs. derken isler sarpa saracakti. Daha basit olan tersten olan yontemi kullanmaktır. $y = zx$. Niye boyle? Bu iyi bir kulaga kupe kuralidir: Aradigimiz sey nedir? y' dir. O zaman y' yi degistirmeye ugrasmaliyiz.

$$y = zx$$

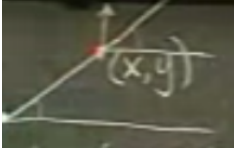
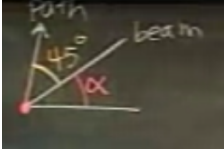
$$y' = z'x + z = F(z)$$

$$x - \frac{dz}{dx} = F(z) - z$$

Goruyoruz ki degiskenler ayrilmis durumda. Entegral alarak gerisini halled-

eriz. Tabii z 'yi bulduktan sonra yerine koyarak y 'ye erismeyi unutmayalım.

Problem



Denizde bir isik kulesi (lighthouse) var, ve kuledeki kisi isigi (beam) cevresinde istedigini yere yoneltebiliyor. Denizde bu isiga yakalanmamak isteyen bir tekne var. Kule tekneye isigi yoneltince, tekne ona 45 derece aciyla baska bir yere gitmeye calisiyor. Ardindan kule hemen onu tekrar izliyor. Bu boyle devam ediyor. Soru: Geminin takip edecegi yol (path) nedir? x, y teknenin yerini temsil etmektedir, α , isigin x eksenini ile olan acisidir.

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$$

$$y' = \tan(\alpha + 45) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(45)}{1 - \tan(\alpha)\tan(45)}$$

$$y' = \frac{y/x + 1}{1 - y/x} = \frac{y + x}{x - y}$$

Bolumun hem ustunu hem altini x ile carpiyoruz, form daha guzel gozukuyor. Ama ondan onceki formda, icinde y/x olan form, zaten denklemin homojen oldugunu belli ediyordu.

$$z = y/x$$

$$y' = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{z + 1}{1 - z}$$

Degiskenleri ayirmak istiyoruz, o zaman z 'leri gruplayip bir tarafa atalim.

$$x \frac{dz}{dx} = \frac{z + 1}{1 - z} - z = \frac{1 + z^2}{1 - z}$$

$$\frac{1-z}{1+z^2}dz = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{1+z^2} - \frac{z}{1+z^2}dz = \frac{dx}{x}$$

İki tarafın entegralini alalım

$$\tan^{-1}z - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln(x) + c$$

$$\tan^{-1}z = \ln(1+z^2)^{1/2} + \ln(x) + c$$

$$\tan^{-1}z = \ln\sqrt{1+z^2} + \ln(x) + c$$

$$\tan^{-1}(y/x) = \ln(\sqrt{1+(y/x)^2}) + \ln(x) + c$$

$$\tan^{-1}(y/x) = \ln(x\sqrt{1+(y/x)^2}) + c$$

$$\tan^{-1}(y/x) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + c$$

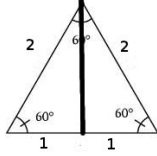
Ustteki form kutupsal (polar) koordinatların formuna benziyor. Hakikaten:

$$\theta = \ln(r) + C$$

$$r = C_1 e^\theta$$

Ekler

Not: Kolay Sin ve Cos Hesabı



45, 30, 60 gibi belli bazı açılar için cabuk sin ve cos hesabı şöyle yapılabilir. 30 için üstteki gibi eşit kenarlı üçgen düşünülür, bu üçgenin ortasından bir çizgi çekilir, ve üstte 30 derece, yani $\pi/6$, sağda 60 derece yani $\pi/3$ kalır. Çekilen çizginin boyu $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Buna göre $\sin(30)$ nedir? Karşı kenar hipotenüs = 1/2. $\cos(30)$ aynı üçgene göre $\sqrt{3}/2$ olur.

* * *

Altta kiler İngilizce ders notlarından aktarılıyor:

Bir “lineer ODE”, “standart forma” cevirilebilen bir denklemdir.

$$r(t)x' + p(t)x = q(t)$$

$r(t)$ ve $p(t)$ katsayidir (coefficient). Denklemin sol tarafi “sistemi” temsil etmektedir, sag tarafi ise, bir anlamda, bir girdi (input) sinyalinini temsil etmektedir. Bu denklemin cozumu olan $x(t)$ ise sistemin cevabidir, ya da cikti (output) sinyalidir.

Bu denklemin tamamini $r(t)$ 'ye bolerek indirgenmis standart formu elde ederiz.

$$x' + p(t)x = q(t)$$

Bu denklemin sag tarafindaki $q(t)$ eger sifir sinyali (null signal) ise, yani $q(t) = 0$ degerindeyse, bu denkleme homojen denir. Bunun sezgisel tercumesi sistemin izole bir halde evrildigi / degistigi / donustugu bir durumdur: banka orneginde hic para yatirilmadigi, ve cekilmedigi, RC (devre) orneginde ise devrede pil, enerji olmadigi, voltaj saglanmadigi bir duruma tekabul eder.

Homojen lineer denklem

$$x' + p(t)x = 0 \tag{1}$$

ayirilabilir (seperable) bir denklemdir. Once ayir:

$$dx/x = -p(t)dt$$

Entegre et

$$\ln|x| = - \int p(t)dt + c$$

Ustellestir (exponentiate)

$$|x| = e^c e^{- \int p(t)dt}$$

Tam (absolute) degeri elimine et ve kayip cozumu tekrar iceri sok

$$x = C e^{- \int p(t)dt}$$

Eger $p(t) = 2t$ olsaydi ustteki basamaklar soyle olacakti

$$x' + 2tx = 0$$

$$dx/x = -2tdt$$

$$\ln|x| = -t^2 + c$$

$$|x| = e^c e^{-t^2}$$

$$x = C e^{-t^2}$$

Dikkat edin, ornekte k 'nin belli bir anti-turevini kullandik, yani kt . Bu entegralin “gorulmeyen” sabiti ilerideki basamaklarda ortaya cikan C tarafindan halledildi.

Yani formül 1'in genel cozumu Cx_h formundadir, ki x_h sifir olmayan herhangi bir cozumdur.

$$x_h = e^{-\int p(t)dt}, \quad x = Cx_h$$

Ilerride genel durumun bir cebirsel numara ile cozulebildigini ve iki entegrasyon iceren bir dizi (sequence) ortaya cikardigini gorecegiz.

Ekler

Icinde tanimsiz C sabiti iceren cozum genel cozumdur, bu cozumler mumkun olan “tum cozum kumesini” temsil ederler bir bakima. O sebeple geneldirler. Ozel (particular) cozum baslangic sartlarini tatmin eden ve C icermeyen cozumlerrdir.

Bazen

$$x' + p(t)x = q(t)$$

formulunun tamamı, bir sekilde, ayni anda cozulur ve C iceren sonuc elde edilir. Bazen de ustteki formule bagli olan homojen formulu cozmek daha basit gelebiliyor, yani

$$x' + p(t)x = 0$$

cozuluyor, ve x_h elde ediliyor. Sonra bir sekilde, belki tahmin ederek, x_p bulunuyor. Sonra su kurala siginilarak

$$x = x_p + cx_h$$

genel cozum o sekilde elde edilebiliyor.

Entegral egrileri genel cozumun grafikleridir. Her turlu C olasiligi icin cizilmis egrilerdir onlar.

Ornek

$$\dot{x} + tx = (1 + t)e^t$$

Alakali homojen denklem

$$\dot{x} + tx = 0$$

Ayirilabilir bir denklem

$$\frac{dx}{dt} + tx = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -tx$$

$$\frac{dx}{x} = -tx$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -tx$$

$$\ln|x| = -t^2/2 + C$$

$$x_h = e^{-t^2/2}$$

C sabiti de var aslında ama homojen çözüm olduğu için sabiti dahil etmiyoruz, nasıl olsa $x = x_p + cx_h$ tanimından sabit dahil oluyor.

Simdi özel çözümü y_p 'yi nasıl buluruz? Burada kullanılan tekniklerden biri, vx_h , $v(t)$ yani t 'nin bir fonksiyonu, şeklinde çözümü homojen çözümünden “üretebileceğimiz”. Bu uğrastığımız türden lineer ODE’ler için hakikaten mümkün. x_p bir şekilde bulunuyor demistik, iste şekillerden biri bu.

Teorisi:

$x = vx_h$ formülünü

$$x' + p(t)x = q(t)$$

yani standart forma sokuyoruz,

$$\dot{v}x_h + v\dot{x}_h + pvx_h = q$$

İkinci ve üçüncü terim toplanınca sıfır olur. Degil mi? Çünkü x_h homojen

denkleminin cozumu, o denklem de

$$x' + p(t)x = 0$$

sekinde. O zaman

$$v\dot{x}_h + pvx_h = v(\dot{x}_h + px_h) = v \cdot 0 = 0$$

Geriye kalan

$$\dot{v}x_h = q$$

$$\dot{v} = x_h^{-1}q$$

Direk entegrasyon ile v 'yi buluruz, ozel cozumu temsil etmesi icin v_p diyelim

$$v_p = \int x_h^{-1}q dt$$

Yani

$$x_p = v_px_h = x_h \int x_h^{-1} q dt$$

Ornegimize donersek

$$x_h = e^{-t^2/2}$$

bulmustuk, o zaman

$$x_p = e^{-t^2/2} \int e^{t^2/2}(1+t)e^t dt$$

Entegrali ayri olarak

$$\int e^{t^2/2}(1+t)e^t dt = \frac{e^{t+t^2/2}}{(1+t)}(1+t) = e^{t+t^2/2}$$

$$x_p = e^{-t^2/2}e^{t+t^2/2}$$

$$x_p = e^t$$

Genel cozum

$$x = x_p + cx_h$$

$$x = e^t + ce^{-t^2/2}$$