

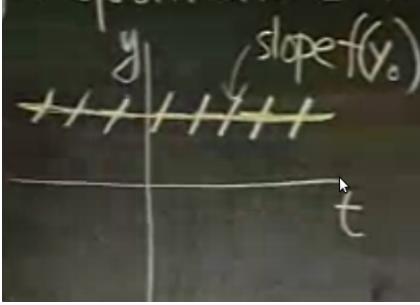
MIT OCW 18.03 Ders 5

Bu derste özel bir ODE turu göreceğiz, bu ODE’lerde sağ tarafında bağımsız değişken hiç yer almıyor. Bağımsız değişken $dy/dt = ..$ gibi bir formülde t değişkenidir, bahsettiğimiz türde sağ tarafta t içeren bir terim bulunmaz. Genel olarak

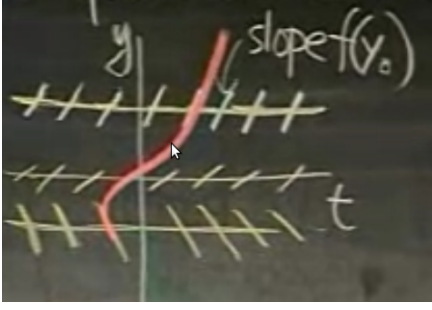
$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Tabii bu tür bir denklemde değişken ayırma yöntemi kullanmak (bazen, ilk bakışta) kolay. O zaman niye hemen çözmiyoruz? Cevap şu ki cozmamıza gerek kalmadan bu tür denklemler hakkında bazı bilgiler edinmek istiyoruz. Hızlı olduğu için, bir sürü kaliteli bilgi (insight) kazandırdığı için. Bazen değişken ayırma da işlemeyebilir, ya da denklem hakkında çok özel bir soru sormak istiyoruz ve bu soru için çözümle uğraşmak istemeyebiliriz.

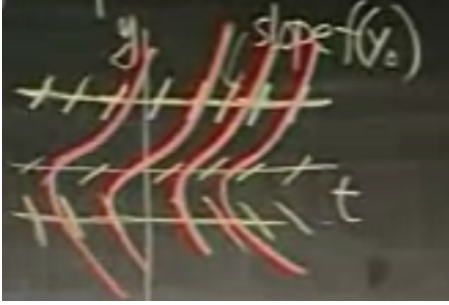
Grafiksel olarak düşünelim, öncelikle tüm isoclines (egimi aynı olan parçalar) çizimleri düz yataydır. Niye? $dy/dx = f(y)$ türü bir formül her x (ya da t) için aynı y ’yi vermek zorundadır, o zaman her y için (mesela y_0 diyelim) egim (slope), yani dy/dx her yerde aynıdır, yani doğru düzdür. O zaman bir $f(y_0)$ için çizim suna benzer.



Diğer y değerleriyle



Diger entegral egrileri



Bu formullerde entegral egrilerinin birisi digerlerinin yana itilmis haline benzer, yani entegral egileri tasima sirasinda degismez (invariant under translation) olma ozellige sahiptirler. Birini cizince hepsini gormus oluruz, digerleri paralel sekilde hemen yandadirilar.

Bilgi nasil elde ederiz? Kritik nokta (critical points) adli kavrami kullanmamiz lazim.

Kritik Noktalar

Bu noktalar diferansiyelin sifir oldugu y_0 noktasidir yani $f(y_0) = 0$.

Adimlar

1. Kritik noktayi bul
2. $f(y)$ 'yi grafikte, nerede negatif, nerede pozitif bul. Nerede sifir oldugunu biliyoruz zaten, onun ustunde ve altinda negative ve pozitif olmasi lazim. Bu niye onemli? Cunku formul unutmayalim ki $dy/dt = f(y)$. Eger $f(y) > 0$ ise o zaman $dy/dt > 0$ demektir yani $y(t)$ artacaktır.

Ornek

y = bankadaki para
 r = sürekli faiz oranı

$$\frac{dy}{dt} = ry$$

Diyelim ki bankada kötü niyetli bir kişi var, paranızı zimmetine geçiriyor.

w = zimmete geçirme oranı

O zaman

$$\frac{dy}{dt} = ry - w$$

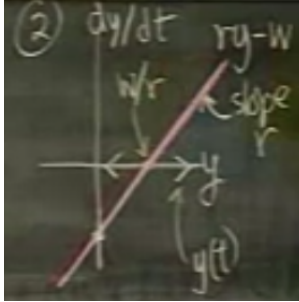
Formülü çözmek kolay, değişkenleri ayır, entegre et. Fakat biz çözmeden, çözümlerin, $y(t)$ 'lerin, nasıl davrandığına bakalım. ODE beklediğimiz, bu yazının konusu olan formda (otonom) çünkü sağ tarafta t değişkeni yok. Adımları takip edelim:

1) Kritik noktayı bulalım

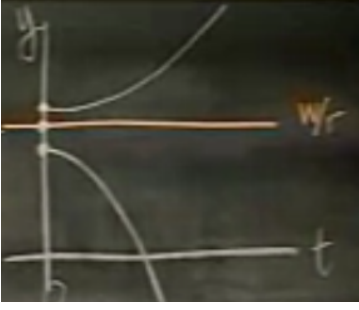
$$ry - w = 0$$

$$y = \frac{w}{r}$$

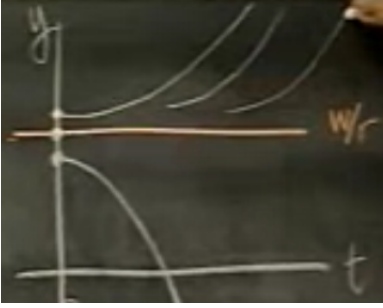
2) Grafikleyelim



Bu grafikte bizim için tek önemli şey, nerede $ry - w$ eksenini üzerinde, nerede onun altında olduğumuz. Çünkü o değerin üzerindeyse $f(y) > 0$, o zaman y artıyor, diğerinde $f(y) < 0$, o zaman y azalıyor. Ortadaki nokta ise w/r noktası.



O zaman y nasıl davranır? Başlangıç noktasına bağlı. Eğer başlangıç noktası w/r üzerinde ise, o zaman bir artmaya başlar mı üstel (exponential) olarak artmaya başlar.



w/r üzerindeki tüm başlangıç noktaları diğerlerinin tercümesi, taşınmış hali (translations), üstte belirttiğimiz gibi.

Lojistik Denklem

Bu denklem nüfus artışını hesaplamak için kullanılır.

Nüfus $y(t)$. Temel denklem

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

k büyüme hızı

k sabit ise büyümeye basit büyüme adı verilir. Lojistik büyüme biraz daha cıvıltırlı bir tür büyümedir. Bu model der ki sabit büyüme şekli fazla temeldir, hiçbir canlı sınırsız bir şekilde büyüyemez, kaynaklar buna müsaade etmez.

Lojistik denkleme göre artış oranı (rate) da zamanla değişir, nüfus arttıkça oran azalır. Bu azalışı modellemek için en basit form $k = a - by$ gibi

bir fonksiyondur. Önceki formülün içine koyarsak

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2$$

Bu nihai denklem Lojistik Denklemdir, ve nüfus artışı haricinde pek çok kullanım alanı vardır. Hastalık yayılması, dedikodu (rumor) aktarımı, büyümesi, vs. gibi.

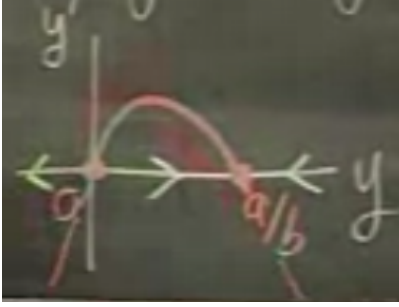
Denklemini çözmek için değişkenler ayrılır, ayrıca kısmi kesirler (partial fractions) adında bir teknik lazımdır. Biz çözümü yapmadan denklem hakkında bilgi edinmeye uğrasacağız.

Kritik noktalar:

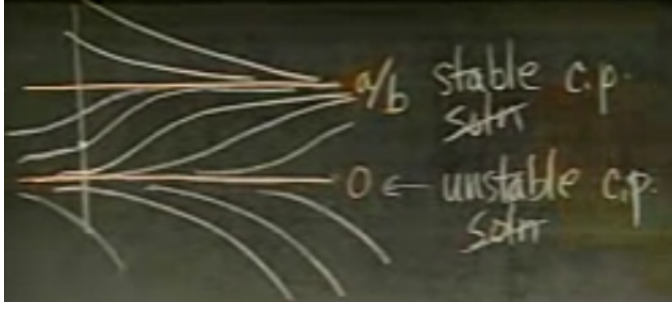
$$0 = ay - by^2$$

$$y(a - by) = 0$$

$$y = 0, y = a/b$$



İki kritik nokta bulduk. Şimdi eksenleri y' ve y olan bir grafik çizelim. Bu grafikte y' nin pozitif mi negatif mi olduğuna göre y nin azalıp azalmayacağını oklar ile göstereceğiz. Parabolün altında y' negatiftir, y buradalarda artar (ok sağa doğru), diğer yerlerde tam tersi.

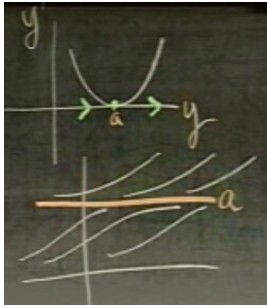


Simdi y ve t grafigi cizelim. Eger baslangic noktasi a/b altindaysa ve orada artis var ise, ayrıca entegral egrilerinin hicbir zaman birbirleriyle cakismayacagini soylemistik, o zaman bu artis a/b düz çizgisine gelip dayanacak ama onu gecmeden ona paralel saga doğru devam edecektir. Her artis birbirinin saga doğru tercumesidir, çizim bunu tam gösteremiyor ama asagi yukari o temsil edilmeye uğrasildi.

a/b üzerinde benzer ama tersi bir durum, baslangictan a/b 'ye azalis oluyor. a/b noktasina stabil kritik nokta (critical point, hoca c.p. yazdi) ismi veriliyor, 0 noktasi stabil olmayan kritik nokta. Hoca cozum (solution) kelimesinin uzerini cizdi, ama, tabii ki bu noktalarin ayni zamanda birer cozume de tekabul ettigini soyledi.

Stabiliteyi anlamak icin grafikte kritik noktalara bakilir, oklar eger o noktadan “kaciyorsa” o nokta stabil olmayan, o noktaya doğru “gidiyorsa” o nokta stabil nokta demektir.

Ucuncu bir secenek ise su. Eger y' ve y egrisi alttaki gibiyse ne olur?



Bu durumda baslangic y 'si a altinda ise a 'ya doğru gidilir, ustunde ise ondan kacilir. Yani stabilite a 'nin neresinde oldugunuza gore degisir. Bu tur noktalara bu sebeple “yari stabil (semi-stable)” adi veriliyor.

Simdi lojistik denklemin degisik bir turune geelim.

Hasatla Eksiltilen Lojistik Denklemi

Mesela somon baligi yetistirilen bir balik ciftligi dusunelim.

Hasat h : sabit sayida alinan balik

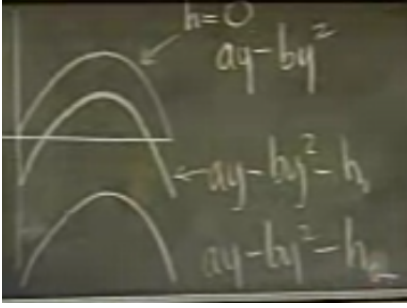
Yani nufusa oranla degil, belli sabit sayida somonun alinmasindan bahsediyoruz. Denklem

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 - h$$

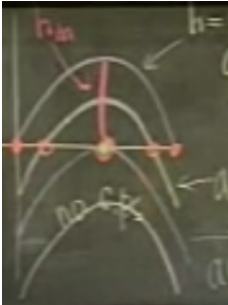
Dikkat, hy degil, sadece h .

Bunu cozmek icin ne yapardik? Yapilmamasi gereken onu sifira esitleyip karesel denklem ile bogusmak, koca bir formulu cozmeye ugrasmak, vs. Daha iyisi, hemen bir grafik cizelim.

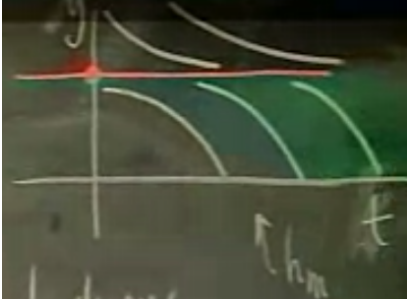
Eger $h = 0$ ise, grafik neye benzer? h 'yi arttirdikca grafik nasil degisir (asagi iner)?



Eger $h = 0$ egrisini yatay eksene degecek kadar, bir h_m degeri kadar asagi indirseydik,



h_m için y ve t grafiği suna benzer.



Yani kırmızı çizgi hem altında hem üstünde inis vardır. h_m noktasının model açısından şu anlamı vardır: h_m yapılabilecek en fazla hasat oranını gösterir, o orandan fazla yapılacak hasat zamanla somonları tüketecektir. Kırmızı çizgi üstünden başladığımız ve h_m oranından fazla (çok az fazla bile olabilir) bir oranla hasat yaptığımız takdirde, somonlar bitmez.