$e^{-x^2}$ Nasil Entegre Edilir?

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

ifadesi ozellikle olasilik matematiginde cokca gorulen bir ifadedir. Bu hesabi yapmak icin kutupsal kordinatlar kullanacagiz.

Simdi ustteki ifadeyle alakali su ifadeye bakalim.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

Iddia ediyorum ki bu son ifade (1)'in sadece karesi, yani (1)'in kendisiyle carpimi. Niye boyle? Cunku $e$ ifadelerini carpim olarak gosterirsek

$$\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2} dx}\, dy$$

cift entegral icinde isaretlenen blokta yer alan $e^{-y^2}$ $x$'ten bagimsiz, o zaman bloktaki entegralin disina alinabilir. Yani soyle olabilir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dxdy$$

Devam edelim: ustteki ic entegral (1) ifadesi degil mi? Evet. Simdi bir ilginc durum daha ortaya cikti,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx}\, dy$$

simdi de isaretlenen blok $y$ entegraline gore sabit, o da ikinci entegralin disina cikarilabilir! (1) yerine $I$ kullanirsak

$$I\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

Icinde $y$ iceren entegral nedir? O da $I$'dir! Niye, cunku bu ifade (1)'in icinde $y$ olan versiyonundan ibaret. O zaman

$$I \cdot I = I^2$$

Tum bu taklalari niye attik peki? Cunku cift entegralli ifadenin entegralini almak daha kolay, eger onu hesaplarsak, sonucun karekokunu aldigimiz anda $I$'yi bulmus olacagiz.

O zaman ifadeyi hesaplayalim,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

Basta soyledigimiz gibi kullanacagimiz numara kutupsal forma gecmek. Entegralin sinirlarina bakalim, tum $x$ ve tum $y$ ekseni uzerinden entegral aliyoruz. Kutupsal formda bu $r$'nin 0'dan sonsuza ve $\theta$'nin 0'dan $2\pi$'a gitmesi anlamina geliyor.

$r^2 = x^2 + y^2$

Peki $e^{-x^2-y^2}$ kutupsal formda nedir?

$e^{-x^2-y^2} = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$

Entegrali yazalim

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta dr$$

Niye entegral sirasinda $\theta$'yi once yazdim? Cunku entegral icindeki ifadede $\theta$'ya bagli hicbir terim yok, o zaman ic entegral bana sadece $2\pi$ verir. Geriye kalanlar

$$= 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr$$

Bu entegral cok daha kolay. Yerine koyma (subtitution) teknigi ile bu problemi cozebiliriz.

$u = -r^2$

$du = -2r\ dr$

$$= 2\pi \int_0^\infty e^u \frac{-1}{2} du$$

$$= -\pi \int_0^\infty e^u du$$

$$= -\pi e^u \bigg|_0^\infty = -\pi e^{-r^2} \bigg|_0^\infty$$

$= \pi$

Bu sonuc $I^2$. Eger $I$ degerini istiyorsak, karekok almaliyiz, yani aradigimiz sonuc $\sqrt{\pi}$.

Tek degiskenli bir problemi aldik ve cift degiskenli problem haline getirdik. Isleri kolaylastiran (2) denklemindeki $r$ degiskeni oldu, onun sayesinde yerine gecirme islemi cok kolaylasti, ve sonuca ulastik.

http://www.youtube.com/watch?v=fWOGfzC3IeY