

QP

İçinde eşitsizlikleri de barındıran ve karesel olan bir matematiksel sistemi çözmek için karesel programlama (quadratic programming) tekniklerini kullanabiliriz. Problemler şu şekilde verilir:

$\frac{1}{2}x^T Qx + p^T x$  fonksiyonunu minimize et

şu koşullara uymak şartıyla (subject to)

$Gx \leq h$  (eşitsizlik koşulu)

$Ax = b$  (eşitlik koşulu)

Küçük harfli gösterilen değişkenler vektördür, büyük harfler ise bir matrisi temsil ederler.  $x$  içinde diğer bilinmeyenler  $x_1, x_2, \dots$  olarak vardır, bulmak istediğimiz değerler buradadır.

Somut örnek olarak suna bakalım:

$2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2$  fonksiyonunu minimize et

koşullar:

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$  (eşitsizlik koşulları)

$x_1 + x_2 = 1$  (eşitlik koşulu)

Fakat bu formül şu anda matris formunda değil. Matris formuna geçmek için iki aşama var. Önce  $x$  değişkenlerinin birbiri ve kendileri ile çarpım durumlarını halledelim. Öyle bir  $Q$  matrisi bulmalıyız ki, aşağı boş olan  $Q$  matrisinin değerleri doldurularak, çarpım yapıldığında  $x$  değişkenlerinin tüm çarpım ilişkilerini bulsun. Çarpım ilişkileri nelerdir? Formülün  $2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$  kısmıdır.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$Q$  matrisinin 1, 2, .. gibi koordinatları  $x_1, x_2, \dots$ 'ye tekabül ediyor olacaklar. (1,1) koordinatları  $x_1$ 'in kendisi ile çarpımını,  $x_1^2$ 'i temsil eder, (1,2) ise  $x_1x_2$ 'yi temsil eder, vs. O zaman (1,1) için 2 sayısını veririz, çünkü  $x_1^2$ 'nin başında 2 değeri var. (2,2) için 1 değeri lazım çünkü  $x_2^2$ 'nin başında sayı yok (yani '1' değeri var).

(1,2) ve (2,1) ilginç çünkü ikisi de aslında  $x_1x_2$ 'i temsil ediyorlar çünkü  $x_1x_2 = x_2x_1$ . O zaman (1,2) ve (2,1) için 0.5 değeri verirsek,  $0.5x_1x_2 + 0.5x_2x_1$ 'i kısaltıp  $x_1x_2$  haline getirebiliriz. Sonuç

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol edelim:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 2x_1 + 0.5x_2 & 0.5x_1 + x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= 2x_1^2 + 0.5x_2x_1 + 0.5x_1x_2 + x_2^2 \\
&= 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2
\end{aligned}$$

$p$  vektörü ise, her terimin, tek basına ana formüle nasıl ekleneceğini kontrol ediyor. Elimizde  $x_1 + x_2$  olduğuna göre  $p = [1, 1]$  yeterli olacaktır, bakalım:  $[1, 1]^T [x_1, x_2] = x_1 + x_2$

Şimdi eşitsizlik koşulları. Bizden istenen  $x_1 \geq 0$  ve  $x_2 \geq 0$  şartlarını  $Gx \leq 0$  formunda temsil etmemiz. Burada önemli nokta matris formuna geçerken bir yandan da  $\geq$  işaretini tersine döndürmemiz, yani  $\leq$  yapmamız. Bu çok dert değil, değiskeni  $-1$  ile çarparsak işareti tersine döndürebiliriz çünkü  $x_1 \leq 0$  ile  $-x_1 \geq 0$  aynıdır. O zaman  $Gx$  şöyle olacak:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Eşitlik koşulları

Eşitlik koşulları için problemimizin istediklerini  $Ax = b$  formuna uydurmamız lazım.  $x_1 + x_2$ 'yi nasıl forma sokarız?  $A = [1, 1]$ ,  $b = 1$  ile

$$[1, 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

CVXOPT

Bu paket ile karesel denklemleri minimizasyon / maksimizasyon bağlamında çözmek mümkündür. Üstte bulduğumuz değerleri altta görebiliyoruz.  $Q$  eşitliğinde 2 ile çarpım var, bunun sebebi karesel denklem formunun başında  $\frac{1}{2}$  çarpımı olması, böylece bu iki çarpım birbirini dengeliyor.

```

from cvxopt import matrix
from cvxopt import solvers
Q = 2*matrix([ [2, .5], [.5, 1] ])
p = matrix([1.0, 1.0])
G = matrix([[-1.0, 0.0], [0.0, -1.0]])
h = matrix([0.0, 0.0])
A = matrix([1.0, 1.0], (1, 2))
b = matrix(1.0)
sol=solvers.qp(Q, p, G, h, A, b)
print sol['x']

```

Sonuc  $x_1$  için [ 2.50e-01] ve  $x_2$  için [ 7.50e-01] olmalı.

Bazi notlar: A matrisi yaratilirken (1,2) kullanimi goruluyor, bu matrisin boyutlarini tanımlamak için. Cvxopt paketi bu arada Numpy formati degil kendi matris, vektor objelerini kullaniyor, ama ikisi arasinda gidip gelmek mumkun.

#### References

<http://abel.ee.ucla.edu/cvxopt/examples/tutorial/qp.html>

<http://www.mblondel.org/journal/2010/09/19/support-vector-machines-in-python/>