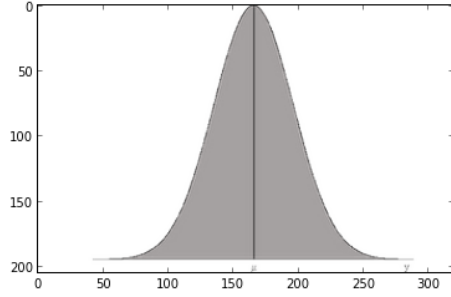


Giris

Bu notlar makine ogrenimi, veri madenciligi gibi konularda gerekli olasilik ve istatistik bilgisini paylamak icin hazirlaniyor. Notlarda olasilik ve istatistik ayni anda anlatilacak, ve uygulamalara agirlik verilecek.

Dağılımlar Hakkında

Doğadan yapılan çoğu ölçümlerin, sıklık grafiğini alınca sonucun aşağıda gibi çıkması ilginçtir.



Mesela, Türkiye'deki 2000 yetişkinin kilosunu ölçün. Grafiğini alın, kesinlikle yukarıdaki tepe şekli çıkacak. Ya da, 1000 kişinin boyunu ölçün, aynı tepe şekli. Keskin nişancının hedefe attığı kurşunların hedefe gelişini en iyi 12 en kötü 1 olmak üzere ölçün, sıklık grafiğini alın. Gene aynı tepe şekli!

Nasıl oluyor bu iş?

Açıklama için, normal dağılım eğrisinden bahsetmemiz gerekecek.

Not olarak düşelim: Sıklık grafiği, X sayısının ne kadar çıktığını sayıp, Y ekseninde bu sayıyı X'e tekabül ederek kolon olarak göstermeye denir. Mesela, 60 kilo değeri 13 kere çıktı ise, $X=60$, $Y=13$ gibi bir kolon çizilecektir.

Normal Dağılım Eğrisi

Normal dağılımın olasılık kavramı ile yakın bağları var. Bu konuda ünlü bir deney zar atma deneyidir. Mesela, elimizde tek bir zar olsun, ve bu zarı arka arkaya atalım. Sabrımız yeterse 1000 kere atalım. Sonuçta, sıklık grafiği eşit bir dağılım gösterecektir. (Zar tutmuyorsanız :))

Bunun sebeplerini anlamak zor değil. Her zar atış olayı birbirinden bağımsız, ve her sayının üstte gelme ihtimali birbirine eşit olduğu için ($1/6$), her sayıdan eşit miktarda gelecektir. Tabii bunun için deneyin birçok kere tekrarlanması gerekiyor.

Fakat, bir yerine 2 zar atalım. Hatta hatta, 4 zar atalım, ve bu sefer sıklık grafik hanesine yazmadan çıkan sayıları önce toplayalım. Bu çıkan toplamın sıklık grafiğini alalım.

İşte bu sıklık grafiği göreceğiz ki, önceden bahsettiğimiz tepe grafiğine yaklaşıyor. Ne kadar çok zar atarsanız, bu benzerlik o kadar daha fazla olacaktır.

Bunun sebebi de aslında basit: 1..6 arası sayıların tek bir zardan gelme olasılığı

aynı, evet. Fakat toplamlara gelince, mesela iki zarlı örnekte, 10 sayısının olasılığı 2 sayısından daha yüksek. Çünkü, 10 sayısını 5-5, 4-6 ya da 6-4 ile alabiliyoruz. 2 sayısı sadece 1-1 ile geliyor.

Buradan şu sonuç çıkabilir: Eğer doğada ölçtüğümüz bir kavramın oluşmasında birden fazla etken var ise, o ölçümlerin sıklığı her zaman tepe şekli ile olacaktır.

Fakat, daha da gizemli olan bir olay şudur; Sabit olan bir şeyi ölçtüğümüzde (yaptığımız hatalar sonucu) çıkan grafiğin bile tepe şekilli olması! Yani, doğru dürüst hata yapmak bile elimizde değil gibi gözüküyor... Bunun tabii ki olasılık açıklamaları olacaktır. İzlediğimiz matematikçilerden bu en son konuda net bir açıklama alamadık.

Simulasyon

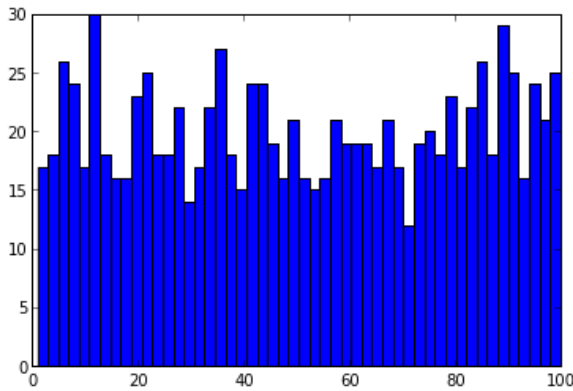
Eğer bu kavramları simulasyon ortamında göstermek istersek, Python ile bunu yapabiliriz.

İlk önce, Random.org sitesinden rasgele sayı üretip bilgiyarımıza kopyalacağız. Bahsettiğimiz site, kimsenin kullanmadığı radyo kanallarından atmosfer gürültüsü dinleyip, bu gürültüleri sayısal değere çevirerek rasgele sayı üretiyor.

Gerçek rasgele sayı üretmek pek kolay bir iş değil. Her ne kadar bilgisayarınızda rasgele sayı üreten birçok algoritma olsa bile, bu algoritmalar belli bir sayı üretiminden sonra kendini tekrar etmeye başlıyorlar. Gerçek rasgele sayılar için muhakkak dış bir kaynağa bağlanmak gerekiyor.

Gösterimiz için, rasgele sayıları üretip, bir dat dosyasına koyuyoruz. Python ile bu sayıları okuyup, ilk önce teker teker sayıların sıklık grafiğini, ondan sonra sayıları üçer üçer toplayıp, onların grafiğini alıp göstereceğiz. Aşağıda bu iki grafiği bulabilirsiniz.

```
A = loadtxt('rasgele.dat')
plt.hist(A, 50)
plt.savefig('dagilim_1.png')
```



```
A = loadtxt('rasgele.dat');
```

```

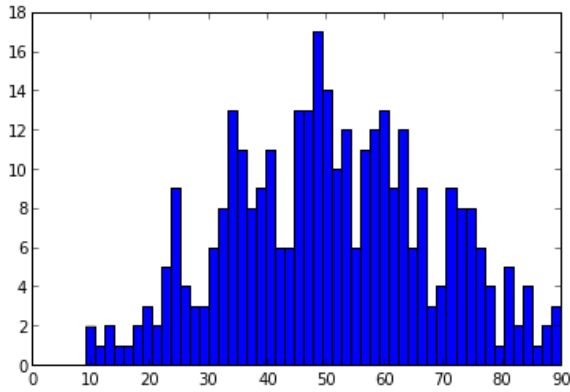
B = []

i = 1;

while (i < 998):
    toplam = 0
    s = A[i]
    toplam = toplam + s
    s = A[i+1]
    toplam = toplam + s
    s = A[i+2]
    toplam = toplam + s
    B.append(toplam/3)
    i = i + 3

plt.hist(B, 50);
plt.savefig('dagilim_2.png')

```



Olasilik

Orneklem Uzayi (Sample Space)

Orneklem uzayi Ω bir deneyin mumkun tum olasiliksal sonuclarin (outcome) kumesidir. Eger deneyimiz ardi ardina iki kere yazi (T) tura (H) atip sonucu kaydetmek ise, bu deneyin mumkun tum sonuclari soyledir

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

Sonuclar ve Olaylar (Outcomes and Events)

Ω icindeki her nokta bir sonuctur (outcome). Olaylar Ω 'nin herhangi bir alt kumesidir ve sonuclardan olusurlar. Mesela ustteki yazi-tura deneyinde “iki atisin icinden ilk atisin her zaman H gelmesi olayi” boyle bir alt kumedir, bu olaya A diyelim, $A = \{HH, HT\}$.

Ya da bir deneyin sonucu ω fiziksel bir olcüm , diyelin ki sicaklik olcumu. Sicaklik \pm , reel bir sayi olduguna gore, $\Omega = (-\infty, +\infty)$, ve sicaklik olcumunun 10'dan

buyuk ama 23'ten kucuk ya da esit olma "olayi" $A = (10, 23]$. Koseli parantez kullanildi cunku sinir degerini dahil ediyoruz.

Ornek

10 kere yazi-tura at. $A =$ "en az bir tura gelme" olayi olsun. T_j ise j 'inci yazi-tura atisinda yazi gelme olayi olsun. $P(A)$ nedir?

Bunun hesabi icin en kolayi, hic tura gelmeme, yani tamamen yazi gelme olasiligini, A^c 'yi hesaplamak, ve onu 1'den cikartmaktir. c sembolu "tamamlayici (complement)" kelimesinden geliyor.

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - P(\text{hepsi yazi})$$

$$= 1 - P(T_1)P(T_2)...P(T_{10})$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx .999$$

Rasgele Degiskenler (Random Variables)

Bir rasgele degisken X bir eslemedir, ki bu esleme $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ her sonuc ile bir reel sayi arasindaki eslemedir.

Olasilik derslerinde bir noktadan sonra artik ornekleme uzayindan bahsedilmez, ama bu kavramin arkalarda bir yerde her zaman devrede oldugunu hic aklimizdan cikartmayalim.

Ornek

10 kere yazi-tura attik diyelim. VE yine diyelim ki $X(\omega)$ rasgele degiskeni her ω siralamasinda (sequence) olan tura sayisi. Iste bir esleme. Mesela eger $\omega = \text{HHTHHTHHTT}$ ise $X(\omega) = 6$. Tura sayisi eslemesi ω sonucunu 6 sayisina esledi.

Ornek

$\Omega = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$, yani kume birim cember ve icindeki reel sayilar (unit disc). Diyelim ki bu kumeden rasgele secim yapıyoruz. Tipik bir sonuc $\omega = (x, y)$ 'dir. Tipik rasgele degiskenler ise $X(\omega) = x$, $Y(\omega) = y$, $Z(\omega) = x + y$ olabilir. Goruldugu gibi bir sonuc ile reel sayi arasinda esleme var. X rasgele degiskeni bir sonucu x 'e eslemis, yani (x, y) icinden sadece x 'i cekip cikartmis. Benzer sekilde Y, Z degiskenleri var.

Toplamsal Dagilim Fonksiyonu (Cumulative Distribution Function -CDF-)

Tanim

X rasgele degiskeninin CDF'i $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tanimi

$$F_X(x) = P(X \geq x)$$

Eger X ayriksal ise, yani sayilabilir bir kume $\{x_1, x_2, \dots\}$ icinden degerler aliyorsa olasilik fonksiyonu (probability function), ya da olasilik kutle fonksiyonu (probability mass function -PMF-)

$$f_X(x) = P(X = x)$$

Bazen f_X , ve F_X yerine sadece f ve F yazariz.

Tanim

Eger X surekli (continuous) ise, yani tum x 'ler icin $f_X(x) > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ olacak sekilde bir f_X mevcut ise, o zaman her $a \leq b$ icin

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Bu durumda f_X olasilik yogunluk fonksiyonudur (probability density function -PDF-).

$$F_X = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$$

Ayrica $F_X(x)$ 'in turevi alinabildigi her x noktasinda $f_X(x) = F'_X(x)$ demektir.

Dikkat! Eger X surekli ise o zaman $P(X = x) = 0$ degerindedir. $f(x)$ fonksiyonunu $P(X = x)$ olarak gormek hatalidir. Bu sadece ayriksal rasgele degiskenler icin isler. Surekli durumda olasilik hesabi icin belli iki nokta arasinda integral hesabi yapmamiz gereklidir. Ek olarak PDF 1'den buyuk olabilir, ama PMF olamaz. PDF'in 1'den buyuk olabilmesi integrali bozmaz mi? Unutmayalim, integral hesabi yapiyoruz, noktasal degerlerin 1 olmasi tum 1'lerin toplandigi anlamina gelmez. Bakiniz *Entegralleri Nasil Dusunelim* yazimiz.

Tanim

X rasgele degiskeninin CDF'i F olsun. Ters CDF (inverse cdf), ya da ceyrek fonksiyonu (quantile function)

$$F^{-1}(q) = \inf \left\{ x : F(x) \leq q \right\}$$

ki $q \in [0, 1]$. Eger F kesinlikle artan ve surekli bir fonksiyon ise $F^{-1}(q)$ tekil bir x sayisi ortaya cikarir, ki $F(x) = q$.

Eger inf kavramini bilmiyorsak simdilik onu minimum olarak dusunebiliriz.

$F^{-1}(1/4)$ birinci ceyrek

$F^{-1}(1/2)$ medyan (median, ya da ikinci ceyrek),

$F^{-1}(3/4)$ ucuncu ceyrek

olarak bilinir.

İki rasgele degisken X ve Y dagilimsal olarak birbirine esitligi, yani $X \stackrel{d}{=} Y$ eger $F_X(x) = F_Y(x)$, $\forall x$. Bu X, Y birbirine esit, birbirinin aynisi demek degildir. Bu degiskenler hakkındaki tum olasiliksal islemler, sonuclar ayni olacak demektir.

Uyari! “ X ’in dagilimi F ’tir” beyanini $X \sim F$ seklinde yazmak bir gelenek. Bu biraz kotu bir gelenek aslinda cunku \sim sembolu ayni zamanda yaklasiksallik kavramini belirtmek icin de kullaniliyor.

Bernoulli Dagilimi

X ’in bir yazi-tura atisini temsil ettigini dusunelim. O zaman $P(X = 1) = p$, ve $P(X = 0) = 1 - p$ olacaktır, ki $p \in [0, 1]$ olmak uzere. O zaman X ’in dagilimi Bernoulli deriz, ve $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ diye gosteririz. Olasilik fonksiyonu $f(x) = p^x(1 - p)^{(1-x)}$, $x \in \{0, 1\}$.

Yani x ya 0, ya da 1. Parametre p , 0 ile 1 arasindaki herhangi bir reel sayi.

Uyari!

X bir rasgele degisken; x bu degiskenin alabilecegi spesifik bir deger; p degeri ise bir **parametre**, yani sabit, onceden belirlenmis reel sayi. Tabii istatistiki problemlerde (olasilik problemlerinin tersi olarak dusunursek) cogunlukla o sabit parametre bilinmez, onun veriden hesaplanmasi, kestirilmesi gerekir. Her halukarda, cogu istatistiki modelde rasgele degiskenler vardır, ve onlardan ayri olarak parametreler vardır. Bu iki kavrami birbiriyle karistirmayalim.

Duz (Uniform) Dagilim

X duz, $\text{Uniform}(a, b)$ olarak dagilmis deriz, ve bu $X \sim \text{Uniform}(a, b)$ olarak yazilir eger

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \text{ icin} \\ 0 & \text{digerleri} \end{cases}$$

ise ve $a < b$ olacak sekilde. CDF hesabi olasilik egrisinin integralini temel alir, duz dagilim bir a, b arasinda $1/b - a$ yuksekliginde bir dikdortgen seklinde olacagi icin, bu dikdortgendeki herhangi bir x noktasinda CDF dagilimi, yani o x ’in baslayip sol tarafın alanının hesabi basit bir dikdortgensel alan hesabidir, yani $x - a$ ile $1/b - a$ ’nin carpimidir, o zaman

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a, b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Normal (Gaussian) Dagilim

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve PDF

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2 \right\}, x \in \mathbb{R}$$

ki $\mu \in \mathbb{R}$ ve $\sigma > 0$ olacak sekilde. Bazilari bu dagilimi

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x - \mu)\sigma^{-2}(x - \mu) \right\}$$

olarak gosterebiliyor, cunku bu sekilde (birazdan gorecegimiz) cok boyutlu Gaussian formulu ile alaka daha rahat gozukuyor.

Ilerride gorecegiz ki μ bu dagilimin “ortasi”, ve σ onun etrafa ne kadar “yay-ildigi” (spread). Normal dagilim olasilik ve istatistikte cok onemli bir rol oynar. Dogadaki pek cok olay yaklasiksal olarak Normal dagilima sahiptir. Sonra gorecegimiz uzere, mesela bir rasgele degiskenin degerlerinin toplami her zaman Normal dagilima yaklasir (Merkezi Limit Teorisi -Central Limit Theorem-).

Eger $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ ise X ’in standart Normal dagilim oldugunu soyleriz. Gele- nege gore standart Normal dagilim rasgele degiskeni Z ile gosterilmelidir, PDF ve CDF $\phi(z)$ ve $\Phi(z)$ olarak gosterilir.

$\Phi(z)$ ’nin kapali form (closed-form) tanimi yoktur. Bu, matematikte “analitik bir forma sahip degil” demektir, formulu bulunamamaktadır, bunun sebebi ise Normal PDF’in integralinin analitik olarak alinamiyor olusudur.

Bazi faydali puf noktaları

1. Eger $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise, o zaman $Z = (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$.
2. Eger $Z \sim N(0, 1)$ ise, o zaman $X = \mu + \sigma Z \sim N(\mu, \sigma^2)$
3. Eger $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \dots$ ve her X_i digerlerinden bagimsiz ise, o zaman

$$\sum_{i=1}^n X_i = N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

Tekrar $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ alirsak ve 1. kuraldan devam edersek / temel alirsak su da dogru olacaktır.

$$P(a < X < b) = ?$$

$$= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

İlk gecisi nasıl elde ettik? Bir olasılık ifadesi $P(\cdot)$ içinde eşitliğin iki tarafına aynı anda aynı toplama, çıkarma operasyonlarını yapabiliriz.

Son ifadenin anlamı sudur. Eğer standart Normal'in CDF'ini hesaplayabiliyorsak, istediğimiz Normal olasılık hesabını yapabiliriz demektir, çünkü artık X içeren bir hesabın Z 'ye nasıl tercüme edildiğini görüyoruz.

Tüm istatistik yazılımları $\Phi(z)$ ve $\Phi(z)^{-1}$ hesabı için gerekli rutinlere sahiptir. Tüm istatistik kitaplarında $\Phi(z)$ 'nin belli değerlerini taşıyan bir tablo vardır. Ders notlarımızın sonunda da benzer bir tabloyu bulabilirsiniz.

Örnek

$X \sim N(3, 5)$ ise $P(X > 1)$ nedir? Cevap:

$$P(X > 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P\left(Z < \frac{1 - 3}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \Phi(-0.8944) = .81$$

Soru tam $P(a < X < b)$, sadece b olduğu için yukarıdaki form ortaya çıktı.

Örnek

Şimdi öyle bir q bul ki $P(X < q) = .2$ olsun. Yani $\Phi^{-1}(.2)$ 'yi bul. Yine $X \sim N(3, 5)$.

Cevap

Demek ki tablodan .2 değerine tekabül eden esik değerini bulup, üstteki formül üzerinden geriye tercüme etmemiz gerekiyor. Normal tablosunda $\Phi(-0.8416) = .2$,

$$.2 = P(X < q) = P\left(Z < \frac{q - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{q - \mu}{\sigma}\right)$$

O zaman

$$-0.8416 = \frac{q - \mu}{\sigma} = \frac{q - 3}{\sqrt{5}}$$

$$q = 3 - 0.8416\sqrt{5} = 1.1181$$

t (Student's t) ve Cauchy Dağılımı

X , v derece bağımsızlıkta t dağılımına sahiptir, ki bu $X \sim t_v$ diye yazılır eğer

$$f(x) = \frac{\Gamma(v+1)/2}{\sqrt{v\pi}\Gamma(v/2)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-(v+1)/2}$$

t dagilimi Normal dagilima benzer ama daha kuyrugu daha kalindir. Aslinda Normal dagilimi t dagiliminin $v = \infty$ oldugu hale tekabul eder. Cauchy dagilimi da t'nin özel bir halidir, $v = 1$ halidir. Bu durumda yogunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Bu formül hakikaten bir yogunluk mudur? Kontrol icin entegralini alalim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Cogunlukla entegre edilen yerde "1 arti ya da eksi bir seyin karesi" turunde bir ifade gorulurse, yerine gecirme (substitution) islemi trigonometrik olarak yapilir.

$$x = \tan \theta, \theta = \arctan x$$

$$1+x^2 = 1+\tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$dx/d\theta = \sec^2 \theta$$

O zaman

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sec^2 \theta} \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \theta|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi} [\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 1$$

χ^2 Dagilimi

X'in p derece serbestlige sahip bir χ^2 dagilima sahip ise $X \sim \chi_p^2$ olarak gosterilir, yogunluk

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(p/2)2^{p/2}} x^{(p/2)-1} e^{-x/2}, x > 0$$

Eger Z_1, \dots, Z_p bagimsiz standart Normal rasgele degiskenler ise, $\sum_{i=1}^p Z_p \sim \chi_p^2$ esitligi dogrudur.

İki Degiskenli Dagilimler

Tanim

Surekli ortamda (X, Y) rasgele degiskenleri icin yogunluk fonksiyonu $f(x, y)$ tanimlanabilir eger i) $f(x, y) > 0, \forall (x, y)$ ise, ve ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$ ise ve her kume $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ icin $P((X, Y) \in A) = \int \int_A f(x, y) dx dy$. Hem ayriksal hem surekli durumda birlesik (joint) CDF $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ diye gosterilir.

Bu tanimda A kumesi olarak tanimlanan kavram uygulamalarda bir olaya (event) tekabul eder. Mesela

Ornek

(X, Y) 'in birim kare uzerinde duz (uniform) olsun. O zaman

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{eger } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \text{ ise} \\ 0 & \text{diger durumlarda} \end{cases}$$

$P(X < 1/2, Y < 1/2)$ 'yi bul.

Cevap

Burada verilen $A = \{X < 1/2, Y < 1/2\}$ bir altkumedir ve bir olaydir. Olaylari boyle tanimlamamis miydik? Orneklem uzayinin bir altkumesi olay degil midir? O zaman f 'i verilen altkume uzerinden entegre edersek, sonuca ulasmis oluruz.

Ornek

Eger dagilim kare olmayan bir bolge uzerinden tanimliysa hesaplar biraz daha zorlasabilir. (X, Y) yogunlugu

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2y & \text{eger } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{digerleri} \end{cases}$$

Niye c bilinmiyor? Belki problemin modellemesi sirasinda bu bilinmez olarak ortaya cikmistir. Olabilir. Bu degeri hesaplayabiliriz, cunku $f(x, y)$ yogunluk olmalı, ve yogunluk olmanin sarti $f(x, y)$ entegre edilince sonucun 1 olmasi.

Once bir ek bilgi uretelim, eger $x^2 \leq 1$ ise, o zaman $-1 \leq x \leq 1$ demektir. Bu lazim cunku entegrale sinir degeri olarak verilecek.

$$\begin{aligned} 1 &= \int \int f(x, y) dy dx = c \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 x^2 y dy dx \\ &= c \int_{-1}^1 x^2 \int_{x^2}^1 y dy dx = \int_{-1}^1 x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2} \right) dx = 1 \end{aligned}$$

$$= c \int_{-1}^1 x^2 \left(\frac{1-x^4}{2} \right) dx = 1$$

$$= \frac{c}{2} \int_{-1}^1 x^2 - x^6 dx = 1$$

Devam edersek $c = 21/4$ buluruz.

Simdi, diyelim ki bizden $P(X \geq Y)$ 'yi hesaplamamiz isteniyor. Bu hangi A bölgesine tekabül eder? Elimizdekiler

$$-1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y, y \leq 1$$

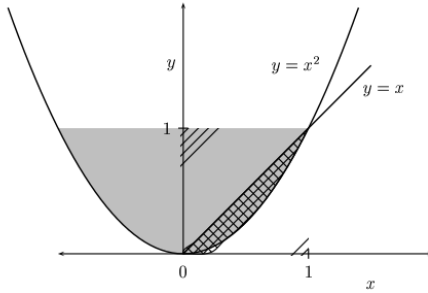
Simdi bunlara bir de $y \leq x$ eklememiz lazim. Yani ortadaki esitsizlige bir oge daha eklenir.

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$x^2 \leq y \leq x$$

$$y \leq 1$$

$x^2 \leq y$ 'yi hayal etmek icin $x^2 = y$ 'yi dusunelim, bu bir parabol olarak cizilebilir, ve parabolun ustunde kalanlar otomatik olarak $x^2 \leq y$ olur, bu temel irdelemelerden biri.



Ayni sekilde $y \leq x$ icin $y = x$ 'i dusunelim, ki bu 45 derece aciyla cizilmis duz bir çizgi. Cizginin altı $y \leq x$ olur. Bu iki bolgenin kesisimi yukaridaki resimdeki golgeli kisim.

Ek bir bolge sarti $0 \leq x \leq 1$. Bu sart resimde bariz goruluyor, ama cebirsel olarak bakarsak $y \geq x^2$ oldugunu biliyoruz, o zaman $y \geq 0$ cunku x^2 muhakkak bir pozitif sayi olmalı. Diger yandan $x \geq y$ verilmiş, tum bunlari yanyana koyarsak $x \geq 0$ sarti ortaya cikar.

Artık $P(X \geq Y)$ hesabi icin haziriz,

$$P(X \geq Y) = \frac{21}{4} \int_0^1 \int_{x^2}^x x^2 y dy dx = \frac{21}{4} \int_0^1 x^2 \left[\int_{x^2}^x y dy \right] dx$$

$$= \frac{21}{4} \int_0^1 x^2 \frac{x^2 - x^4}{2} dx = \frac{3}{20}$$

“Hafizasız” Dagilim, Ustel (Exponential) Dagilim

Ustel dagilimin hafizasız olduğu söylenir. Bunun ne anlama geldiğini anlatmaya uğrasalım. Diyelim ki rasgele değişken X bir aletin omrunu temsil ediyor, yani bir $p(x)$ fonksiyonuna bir zaman “sordugumuz” zaman bize dondurulan olasılık, o aletin x zamani kadar daha islemesinin olasılığı. Eğer $p(2) = 0.2$ ise, aletin 2 yıl daha yasamasının olasılığı 0.2.

Bu hafizasızlığı, olasılık matematigi ile nasıl temsil ederiz?

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s), \forall s, t \geq 0$$

Yani öyle bir dagilim var ki elimizde, $X > t$ bilgisi veriliyor, ama (kalan) zamani hala $P(X > s)$ olasılığı veriyor. Yani t kadar zaman gectigi bilgisi hiçbir şeyi degistirmiyor. Ne kadar zaman gecmis olursa olsun, direk s ile gidip ayni olasılık hesabini yapıyoruz.

Sartsal (conditional) formülünü uygularsak üstteki şöyle olur

$$\frac{P(X > s + t, X > t)}{P(X > t)} = P(X > s)$$

ya da

$$P(X > s + t, X > t) = P(X > s)P(X > t)$$

Bu son denklemin tatmin olması için X ne şekilde dagilmis olmalıdır? Üstteki denklem sadece X dagilim fonksiyonu ustel (exponential) olursa mümkündür, çünkü sadece o zaman

$$e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t}$$

gibi bir ilişki kurulabilir.

Örnek

Diyelim ki bir bankadaki bekleme zamani ortalama 10 dakika ve ustel olarak dagilmis. Bir musterinin i) bu bankada 15 dakika beklemesinin ihtimali nedir? ii) Bu musterinin 10 dakika bekledikten sonra toplam olarak 15 dakika (ya da daha fazla) beklemesinin olasılığı nedir?

Cevap

i) Eger X musterinin bankada beklediği zamani temsil ediyorsa

$$P(X > 15) = e^{-15 \cdot 1/10} = e^{-3/2} \approx 0.223$$

ii) Sorunun bu kısmi müşteri 10 dakika gecirdikten sonra 5 dakika daha gecirmesinin olasılığını soruyor. Fakat üstel dağılım “hafızasız” olduğu için kalan zamani alıp yine direk aynı fonksiyona geçiyoruz,

$$P(X > 5) = e^{-5 \cdot 1/10} = e^{-1/2} \approx 0.60$$

Bilesen (Marginal) Dağılımlar

Surekli rasgele degiskenler için bilesen yogunluk

$$f_X(x) = \int f(x, y) dy$$

ve

$$f_Y(y) = \int f(x, y) dx$$

Üstteki integraller gerçek bir dağılım fonksiyonu $f(x, y)$ verilince alt ve üst limit te tanımlamak zorundadır. Çünkü bilesen yogunluk için bir veya daha fazla degiskeni “integrallerle dışarı atmak (integrate out)” ettigimiz söylenir, eğer ayrık-sal (discrete) ortamda olsaydık bu atılan degiskenin tüm degerlerini goze alarak toplama yapan bir formül yazardık. Surekli ortamda integral kullanıyoruz, ama tüm degerlerin üzerinden yine bir sekilde gecmemiz gerekiyor. İste alt ve üst limitler bunu gerçekleştiriyor. Bu alt ve üst limitler, atılan degiskenin “tüm degerlerine” bakması gerektiği için $-\infty, +\infty$ olmalıdır. Eger problem içinde degiskenin belli degerler arasında olduğu belirtilmiş ise (mesela alttaki örnekte $x > 0$) o zaman entegral limitleri alt ve üst sinirini buna göre degistirebilir.

Örnek

$f_{X,Y}(x, y) = e^{-(x+y)}$, olsun ki $x, y \geq 0$. O zaman $f_X(x)$

$$f_X(x) = e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-y} dy = e^{-x} \cdot 1 = e^{-x}$$

Örnek

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{eger } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y) dx = \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dx = \frac{1}{2} + y \quad (1)$$

Tanim

İki rasgele degisken A, B bagimsizdir eger tum A, B degerleri icin

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

esitligi dogru ise. Bu durumda $X \perp Y$ yazilir.

Teori

X, Y 'nin birlesik PDF'i $f_{X,Y}$ olsun. O zaman ve sadece $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ ise $X \perp Y$ dogrudur.

Ornek

Diyelim ki X, Y bagimsiz, ve ikisinin de ayni yogunlugu var.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{eger } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{digerleri} \end{cases}$$

$P(X + Y < 1)$ 'i hesaplayin.

Cevap

Bagimsizligi kullanarak birlesik dagilimi hesaplayabiliriz

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 4xy & \text{eger } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{digerleri} \end{cases}$$

Simdi bu birlesik yogunluk uzerinden istedigimiz bolgeyi hesaplariz, bolgeyi tanımlayan $X + Y \leq 1$ ifadesi.

$$P(X + Y \leq 1) = \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dy dx$$

Entegralin limiti ustteki hali sembolik, hesap icin bu yeterli degil, eger $x + y \leq 1$ ise, $y \leq 1 - x$ demektir, ve bolge $y = 1 - x$ cizgisinin alti olarak kabul edilebilir. x, y zaten sifirdan buyuk olmalı, yani sola dogru yatık cizginin alti ve y, x eksenlerinin ustu kismini olusturan bir ucgen,

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} 4yx \, dy dx = 4 \int_0^1 x \left[\int_0^{1-x} y \, dy \right] dx$$

Numaraya dikkat, hangi degisken uzerinden integral aldigimiza bakarak, onun haricindekileri sabit kabul ederek bu “sabitleri” integral disina atiyoruz, boylece isimizi kolaylastiriyoruz. Hesabi tamamlarsak,

$$4 \int_0^1 x \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{1}{6}$$

Kosullu Dagilimlar (Conditional Distributions)

Surekli rasgele degiskenler icin kosullu olasilik yogunluk fonksiyonlari

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Devam edelim, eger kosullu yogunluk uzerinden olay hesabi yapmak istersek, ve $f_Y(y) > 0$ oldugunu farzederek,

$$P(X \in A|Y = y) = \int_A f_{X|Y}(x|y) dx$$

Ornek

(1) sonucunu aldigimiz ornege donelim,

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{eger } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{diger} \end{cases}$$

$P(X < 1/4|Y = 1/3)$ nedir?

Cevap

Ustteki olasilik hesabi icin $f_{X|Y}$ fonksiyonuna ihtiyacimiz var. (1)’de gordugumu uzere,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} + y$$

Ana formulumuz neydi?

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \frac{x+y}{\frac{1}{2} + y}$$

$$P(X < 1/4|Y = 1/3) = \int_0^{1/4} \frac{x + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} dx = \frac{\frac{1}{32} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{14}{32}$$

Cok Degiskenli (Multivariate) Dagilimler ve IID Orneklemler (Samples)

$X = (X_1, \dots, X_n)$ olsun, ki (X_1, \dots, X_n) 'lerin herbiri bir rasgele degisken, o zaman X 'e rasgele vektor (random vector) ismi verilir. $f(x_1, \dots, x_n)$ 'in PDF'i temsil ettigini dusunelim. Bu PDF'i baz alarak aynen iki degiskenli (bivariate) orneklerde oldugu gibi, benzer tekniklerle bilesenleri, kosullu dagilimleri, vs. hesaplamak mumkundur.

Cok Degiskenli Normal

Tek degiskenli Normal dagilimin iki parametresi vardi, μ, σ . Cok degiskenli formda μ bir vektor, σ yerine ise Σ matrisi var. Once rasgele degiskeni tanımlayalım,

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_k \end{bmatrix}$$

ki $Z_1, \dots, Z_k \sim N(0, 1)$. Z 'nin yogunlugu

$$\begin{aligned} f(z) &= \prod_{i=1}^k f(z_i) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k z_j^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^T z \right\} \end{aligned}$$

Bu durumda Z 'nin *standart* cok degiskenli Normal dagilima sahip oldugu soyleneir, ve $Z \sim N(0, I)$ olarak gosterilir. Buradaki 0 degeri icinde k tane sifir olan bir vektor olarak, I ise $k \times k$ birim (identity) matrisi olarak anlasilmalidir.

Daha genel olarak bir vektor X 'in cok degiskenli Normal dagilimina sahip oldugunu soyleriz, ve bunu $X \sim N(\mu, \Sigma)$ olarak gosteririz, eger dagilimin yogunlugu

$$f(x; \mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \det(\Sigma)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) \right\}$$

Σ pozitif kesin (positive definite) bir matristir. Hatirlayalım, bir matris pozitif kesindir eger tum sifir olmayan x vektorleri icin $x^T \Sigma x > 0$ ise.

Not: Karekok kavrami tekil sayılardan matrislere de aktarilabilir. Bir matris B 'nin A 'nin karekoku oldugu soyleneir, eger $B \cdot B = A$ ise.

Devam edersek, eger Σ pozitif kesin ise bir $\Sigma^{1/2}$ matrisini oldugu gosterilebilir, ki bu matrise Σ 'nin karekoku ismi verilir, ve bu karekokun su ozellikleri vardir, (i) $\Sigma^{1/2}$ simetriktir, (ii) $\Sigma = \Sigma^{1/2} \Sigma^{1/2} = I$ ve $\Sigma^{-1/2} = (\Sigma^{1/2})^{-1}$.

Hatirlama Numarasi

Normal Dağılımın formülünü bazen hatırlayamayabiliriz. Peki daha basit bir formülden başlayarak onu türetebilir miyiz? Bu mümkün. Daha önce e^{-x^2} Nasıl Entegre Edilir? yazısında

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

olduğunu görmüştük. Dikkat edersek bu integral bir formülün olasılıksal dağılım olup olmadığını kontrol etmek için kullandığımız integrale benziyor. Eğer integral 1 çıkarsa onun olasılıksal dağılım olduğunu biliyoruz. Üstteki sonuç $\sqrt{\pi}$, fakat iki tarafı $\sqrt{\pi}$ 'ye bölersek, sağ taraf 1 olur ve böylece solda bir dağılım elde ederiz. Yani

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx = 1$$

formülünde integralin sağındaki kısım bir dağılımdır. Bu formülü dönüştürerek Gaussian'a erisebiliriz. Üstteki formülün orta noktası (mean) sıfır, varyansı (variance), yani $\sigma^2 = 1/2$ (bunu da ezberlemek lazım ama o kadar dert değil). O zaman $\sigma = 1/\sqrt{2}$.

İlk amacımız $\sigma = 1$ 'e erismek olsun (çünkü oradan herhangi bir σ 'ya atlayabiliriz), bunun için x 'i $\sqrt{2}$ 'ye bölmek lazım, tabii aynı anda onun etkisini sıfırlamak için normalize eden sabiti dengelemek amacıyla $\sqrt{2}$ 'ye bölmek lazım,

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} dx$$

$\sigma = 1$ 'e erisince oradan herhangi bir σ için, σ değişkenine bölelim, yine hem e üstüne hem sabite bu eki yapalım,

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$$

Şimdi herhangi bir ortalama μ için bu değişkeni formüle sokalım, bunun için μ 'yu x 'den çıkarmak yeterli

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2} dx$$

e üstündeki kare alma işlemini acarsak,

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Boylece integral icindeki kisim tek boyutlu Gaussian formuna erismis oluyor.

Rasgele Degiskenler, Yogunluklar

Simdi konularin uzerinden bir daha gecelim; rasgele degisken, X, Y gibi buyuk harflerle gosterilen buyuklukler “bir zar atis sonucu icleri doldurulan” degiskenlerdir. Bu zar atisi her zaman X ’in, Y ’nin bagli oldugu dagilima gore olacaktir. Eger $X \sim N(10, 2)$ ise, bir formül, hesabin icinde X gordugumuz zaman cogunlukla o noktaya 10’a yakin degerler olacagini biliriz. Tabii ki “kesin” her zaman ne olacagini bilmeyiz, zaten bir modelde noktasal deger (tipik cebirsel degiskenler) yerine rasgele degisken kullanmanin sebeplerinden biri budur.

Rasgele degiskenler matematiksel formuller icinde kullanilabilir dogal olarak, mesela $Z = X + Y =$ gibi. O zaman elde edilen yeni degisken de bir rasgele degisken olur.

Kaynaklar

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Confidence_interval

[2] Janert, P., Data Analysis with Open Source Tools

[3] Introduction to Probability Models, Sheldon Ross, 8th Edition, sf. 273