MIT OCW ODE Ders 10

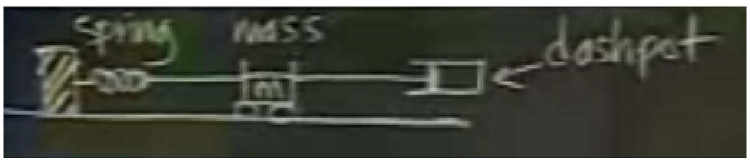
Bu dersin konusu salınımlar (oscillations), ki bu kavram gunluk hayatta surekli karşılaşılan ve onemli bir kavramdir. Bizim onceden gordugumuz salınımlar karakteristik denklem $r^2 + br + k = 0$'in kompleks kokleri ile alakaliydi. Kompleks kokler

$r = a \pm bi$

formundadirlar.

[onceki derste a ve b reel kisimlari kullanmak yerine niye a ve $-b$ kullanmanin gereksiz oldugu hakkindaki bolum atlandi].

Su resme donelim.



Formuller

$mx'' + cx' + kx = 0$

$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$

En alttaki standart form. Bu formulu degisik bir sekilde yazalim - hem eklektik [farkli seylerin birlesimi], hem degisiklik olsun diye, boylece x bazli kullanima fazla bagli olmayiz, her turlu kullanimla is yapabiliriz. Soyle bir form kullanalim:

$y'' + 2py' + \omega_0^2 y = 0$

Niye 2 ve niye ω_0'in karesini kullandigimizi ileride anlayacagiz (bu sekilde kullanim bazi ilgili formullerin daha temiz olmasini sagliyor).

Biz bu derste salinimlarla ilgilendigimiz icin ustteki formulun kompleks kokleri oldugu kosullarla ilgileniyoruz, eger kokler reel olsaydi o zaman sistem fazla amortisorlu (overdamped) olurdu, bu durumla ilgilenmiyoruz. Genel olarak ta amortisorsuz durum daha cok ilgi ceken bir durumdur.

Karakteristik denklem nedir?

$r^2 + 2pr + \omega_0^2$

p bir sabit, cogunlukla denklemde o pozisyondaki bir p degiskenini $p(t)$ seklinde kullaniyordum, ama burada p sabit.

Denklemin kokleri nedir? Simdi p'nin onune bir 2 koymanin faydalarini goruyoruz herhalde, karesel cozum denklemi:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Birinci kisim, $a = 1$ olduguna gore $-b/2$, o zaman $-2p/2 = -p$. 2 sayesinde temiz bir sonuc oldu. $\sqrt{b^2 - 4ac}/2$ icin bolumun ustu $\sqrt{4p^2 - 4\omega_0^2}$, karekok icindeki 4'ler disari 2 olarak cikabilirler, cikinca da bolen 2 ile iptal olabilirler. Geriye $\sqrt{p^2 - \omega_0^2}$ kalir. Sonucun tamami

$$-p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$$

Yani bir karesel denklemde matematikciler ikinci terime ne zaman bir 2 yerlestirirlerse, bunu yapmalarinin sebebi karesel cozum formulunu kullanmak istemeleri ve ekstra 2 sayilarinin formulu karistirmasini engellemek istemeleridir.

Eger $p = 0$, yani $c/m = 0$, yani ortada engelleyici yok. Bu amortisorsuz (undamped) durum. O zaman o terim yokolunca geri kalan denklem

$$y'' + \omega_0^2 y = 0$$

Bu basit harmonik hareket (simple harmonic motion) denklemidir, ki ogrenciler bu denklemi zaten ustteki gibi gormeye alisiktir. Niye? Cunku o zaman ω_0 terimi salinimin dairesel frekansini temsil eden terimdir. O formdaki bir denkleme bakarak aninda frekansin ne oldugunu cikartabilmis oluruz.

Genel cozumler o zaman $r = \pm i\omega_0$ seklinde olurlar, kompleks acilimi kullanirsak

$$y = c_1 cos(\omega_0 t) + c_2 i sin(\omega_0 t)$$

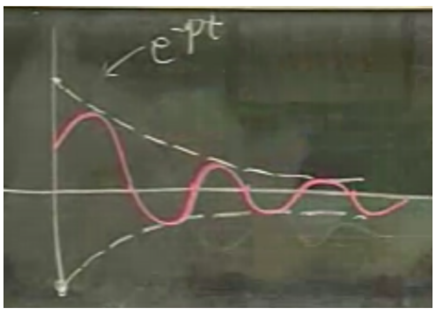
ya da

$$y = A cos(\omega_0 t - \phi)$$

Tum bunlar k/n yerine niye ω_0'in karesini kullandigimizi ispatlamistir herhalde. Simdi sorumuz amortisorlu kosulun neye benzeyecegi. Bu durum probleme biraz daha yakindan bakmayi ve daha fazla dusunmeyi gerektiriyor.

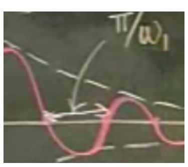
Amortisorlu kosulu dusunelim. Bu sistemde ne zaman salinim elde ederim? $\sqrt{p^2 - \omega_0^2}$'in ici negatif oldugu zaman, yani $p^2 - \omega_0^2 < 0$. Ayrica p ve ω_0'in pozitif olmasi mecbur olduguna gore (cunku oyle tanimladik) gore o zaman $p < \omega_0$ olmalidir.

Bu kosulu konusma ile belirtmek gerekirse, "amortisor terimi dairesel frekanstan kucuk oldugu zaman". Tabii amortisorun yarisi demek istiyoruz aslinda cunku p'yi 2 ile carptik, bir de orijinal formulde m ile bolum var, bunu da hesaba katmali. Yani, belki amortisor yerine p demek daha dogru olur.



Onceki dersten hatirlarsak, cozumun grafigi usttekine benzer. Ozel (particular) cozum kirmizi cizgidir, y eksenini kestigi nokta baslangic sarti tarafindan tanimlanir, altinda kaldigi e^{-pt} egrisi onun bir nevi yuksekligidir (amplitude).

Bu noktada sorulabilecek ilk ilginc sorulardan biri, cozumun t eksenini kestigi her noktanin arasindaki bosluk nedir?



Bu mesafe, yani periyotun buyuklugunu π/ω_1 olarak belirtelim, π cunku hemen yanindaki parcayi da dahil etseydik o nokta bir salinimin tamamlandigi noktadir, orada 2π kullanilacakti. Genel baglamda bu fonksiyon aslinda yari-periyodik diye nitelenen fonksiyonlardan, tam periyodik degil cunku fonksiyonun yuksekligi surekli azaliyor ama periyodik "olmaya ugrasiyor", en azindan bir seyi periyodik olarak yapiyor, t eksenini periyodik olarak kesiyor. ω_1 frekans, ama ona aslinda "yari (pseudo) frekans" demek lazim, aynen fonksiyonun "yari-periyodik" olmasi gibi.

Sezgisel olarak dusunelim: Eger amortisor c artarsa, yari-frekans ω_1'e ne olur? Duser. Simdi formulsel olarak dusunelim. ω_1 nedir? Ana denklemin cozumune bakalim

$$r = -p \pm \sqrt{-(\omega_0^2 - p^2)} = -p \pm \sqrt{-\omega_1^2}$$

$(\omega_0^2 - p^2)$ parentezi disina bir eksi isareti koydum, cunku o terimin negatif bir sayi oldugunu vurgulamak istedim, $\omega_0^2 - p^2$ ifadesinin karesi elimizdeki yeni frekans olacak.

Burada yeni frekans ω_1 olacaktir, cozumu yazalim, ve ω_1'in karesinin karekoku yine kendisidir, ama onundeki eksinin karekok disina cikarken bir i ortaya cikartacagini hesaba alarak

$$e^{-pt}(c_1 cos \omega_1 t + c_2 sin \omega_1 t)$$

ya da

$$e^{-pt} A cos(\omega_1 t - \phi) \tag{1}$$

ve boylece ω_1'in yari-frekans oldugunu goruyoruz. Niye? Cozumun t eksenini kestigi ilk yeri t_1 olarak dusunelim. O zaman t_2 nedir? $t_2 = t_1 + 2\pi/w_1$. Degil mi? t eksenini kesmek demek $cos(\omega_1 t - \phi)$ ibaresinin sifir olmasi, bir cos teriminin sifir olmasi ise $\pi/2$'nin katlarinda oldugumuzu gosterir.

$$\omega_1 t - \phi = \pi/2$$

Bir dahaki kesisme

$$\omega_2 (t_1 + \frac{2\pi}{\omega_1}) - \phi = \pi/2 + 2\pi$$

Simdi formul 1'de neyin neye bagli oldugunu gormek istiyorum. Elimizdekiler sunlar: p, ϕ, A, ω_1.

p: sadece ODE'ye bagli ($c/2m$)

ϕ: Baslangic kosullarina bagli

A: Baslangic kosullarina bagli

ω_1: sadece ODE'ye bagli. ω_1'i iceren formul neydi? $\omega_0^2 - p^2 = \omega_1^2$. Bu

Pitagor'un Teoremi ile alakali, sekil altta. ω_1 amortisor, o zaman yaya, yani yay sabitine bagli.