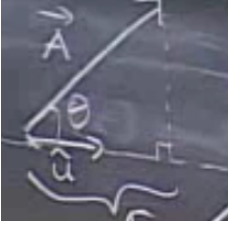


MIT OCW Çok Degiskenli Calculus - Ders 2

Önceki derste iki uygulama gördük. Üçüncü bir uygulama bir \vec{A} vektörünün bir birim vektör \vec{u} yönündeki bileşenlerini / parçalarının (components) hesaplanmasıdır.



Üstteki şekilde \vec{A} 'nin \vec{u} yönündeki “yansımasını” görüyoruz ve bu yansımaya \vec{A} 'nin \vec{u} yönündeki bileşenidir, büyüklüğüdür.

Aradaki açı θ ise ve üçgen dik ise, o zaman bu yansımaya

$$|\vec{A}|\cos(\theta)$$

olarak hesaplanacaktır. Bu formülün ilk hali aslında

$$|\vec{A}||\vec{u}|\cos(\theta)$$

fakat \vec{u} birim vektör olduğuna göre, uzunluğu 1, o zaman bu büyüklük carpımdan atılabilir. Üstteki formül aynı zamanda bir noktasal carpım, $\vec{A} \cdot \vec{u}$.

Eğer bir vektörün mesela \hat{i} yönündeki yansımasını almak isteseydik,

$$\vec{A} \cdot \hat{i}$$

kullanırdık, bu da

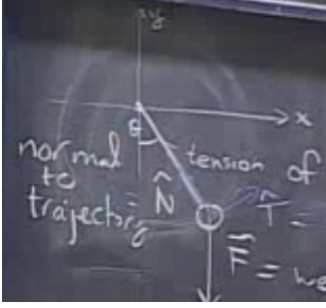
$$\vec{A} \cdot \langle 1, 0, 0 \rangle$$

olurdu. Bu carpım x yönünde 1 ile carpar diğer tüm eksenleri sıfırlar, yani diğer bir deyişle \vec{A} 'nin x yönündeki bileşenini hesaplamış oluruz. Bu arada \hat{i} tabii ki bir birim vektör. Uzunluğu 1.

Uygulama

Fizikte, yuvarlak bir şekilde dönebilen bir sarkaç problemini düşünelim. Bu sistemi analiz etmek için Newton Kanunu, mekanik, vs. kullanmanız gerekir tabii ki, fakat vektörler geometrik olarak bu sistemi anlamak için çok fayda-

lidir.



Bu sarkacın ileri geri sallanmasının sebebi üstte takip edilen yuvarlak yoldur. Analiz için x, y yonundeki bileşenlere bakmak yerine belki de resimdeki iki birim vektor yonune bakmamız lazım, ki bu vektorlerden biri takip edilen yola teget yonu gosteren \vec{T} , diğeri yuvarlak tanjantına dik olan \vec{N} . O zaman ağırlığı temsil eden \vec{F} 'in bu iki vektor yonundeki bileşenlerine bakabiliriz.

Resimde ipin gerginliği (tension of string) \vec{N} yonunde, bu yon ip gerginliği yonu, \vec{F} 'in \vec{N} yonundeki bileşeni gerginliği yaratan faktordur. \vec{F} 'in tegetlik yani \vec{T} yonundeki bileşeni ise ileri geri hareketi saglayan faktordur.

Muhakkak sarkacın y eksenini ile oluşturdugu bir açı θ üzerinden bir suru \cos , \sin terimleri iceren denklemler ortaya cikartabilirdiniz, bu ilginç olurdu, fakat eğer daha kısa bir yolu takip etmek istiyorsak, noktasal carpim kullanırız.

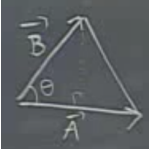
Vektorler bağlamında anlamamız gereken bir diğeri kavram, alan kavramı. Diyelim ki elimizde bir pentagon şekli var. Bu şeklin alanını vektorler kullanarak hesaplayabilir miydik?



Evet hesaplayabiliriz. Problemi basitleştirelim. Pentagonu üçgenlere ayıralım.



sonra bu alanlari toplayalim. Ucgen alanini nasil hesaplariz? Soyle bir ucgen dusumelim



Bu ucgenin alanı

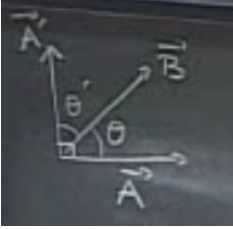
$$\frac{1}{2}|\vec{A}||\vec{B}|\sin(\theta)$$

Bu formül \cos içeren diğer formülümüze benziyor. Bundan istifade edebiliriz belki. Önce $\cos(\theta)$ 'yi buluruz, sonra $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ eşitliğini kullanarak $\sin(\theta)$ 'yi buluruz.

Fakat bu gereğinden fazla iş yaratır. Daha kolay bir yöntem var. Bu yöntem için determinantlar kullanmak lazım.

Devam edelim: Madem açıların \cos değerlerini bulmayı biliyoruz, belki öyle bir diğer açı bulmalıyız ki o açının \cos değeri bizim aradığımız açının \sin değeri olsun, çünkü alan için \sin gerekiyor, ama hesaplayabildiğimiz \cos .

Birbirini tamamlayıcı açılar (complementary angles) kavramını biliyoruz herhalde.



Diyelim ki elimizde \vec{A} var, onu 90° çevirip üstteki hale getiriyoruz, yeni vektöre $\vec{A'}$ diyelim. O vektör ile \vec{B} arasındaki açıya da θ' diyelim.

$$\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\cos(\theta') = \sin(\theta)$$

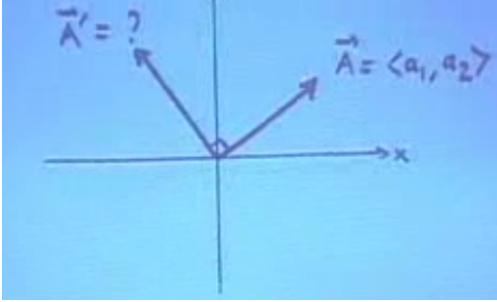
Bu demektir ki

$$|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta = |\vec{A'}||\vec{B}|\cos\theta'$$

$|\vec{A}|$ yerine $|\vec{A}'|$ koymakla hiçbir sey degistirmiyorum cunku bu vektorlerin yonleri degisik olsa da buyuklukleri ayni. Devam edelim, ustteki formulde sag tarafi basitlestirirsek

$$= \vec{A}' \cdot \vec{B}$$

Bu temiz bir formul. Tek eksik, \vec{A}' 'nin ne oldugunu hala hesaplamadik. Fakat bunu yapmak o kadar zor degil. Bunun icin \vec{A}' 'yi cevirebilmemiz lazim. Alttaki resme bakalim,

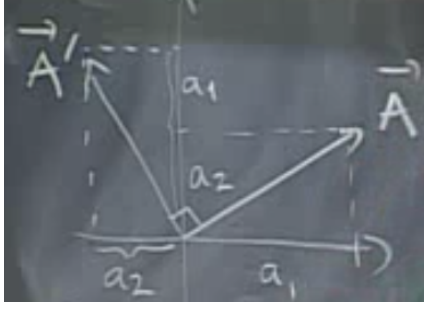


acaba \vec{A}' ne olur? Secenekler [bu hoca boyle ufak sinavlari seviyor, faydali aslinda, bu sinavlara gelince siz de cevabini vermeye ugrasin].

1. $\langle a_2, a_1 \rangle$
2. $\langle a_2, -a_1 \rangle$
3. $\langle -a_2, a_1 \rangle$
4. $\langle -a_1, a_2 \rangle$
5. Hicbiri

Dogru cevap: 3.

Bu nasil oldu? Alttaki resme bakalim



\vec{A} 'nin etrafında bir dikdörtgen hayal edelim, ve dikdörtgeni içindeki vektör ile beraber alıp sola doğru çeviriyoruz. O zaman uzun kenar artık yukarı doğru bakıyor, yani a_1 yukarı bakıyor, a_2 nin de yeri değişiyor, yani bu büyüklükler yer değiştiriyorlar. Ayrıca a_2 artık ters yöne gittiği için işareti değişiyor.

O zaman şu formüle dönersek

$$= \vec{A}' \cdot \vec{B}$$

şöyle olur

$$a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Bu formül determinantlardan tanıdık gelebilecek bir formül,

$$= \det(\vec{A}, \vec{B})$$

Aslında \vec{A}, \vec{B} ile bu vektörleri yanyana kolonlara koyduğumuz şu formü düşünürüz ve onun determinantını alıyoruz

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Ve bu determinant hesabının sonucu kenarları \vec{A} ve \vec{B} olan bir paralelogramın alanıdır. Tabii paralelogram içindeki üçgeni istiyorsak bu sonucu ikiye böleriz.

Not: Alan pozitif bir şeydir, fakat $a_1 b_2 - a_2 b_1$ 'in kesinlikle pozitif çıkmasının garantisi yoktur. Eksi değerli terimler büyüyüp artı değerlileri asabilirler. O zaman ifadelerimizin tam doğru olması için üstteki determinant hesabı -alan ya da +alan değerine esittir demek lazım.

İlerleyelim

Uzayda (3 boyutta, kordinat sisteminde, vs.) yapabileceğimiz iki tur hesap var. Bunlar objelerin ya dis alan hesabi (surfaces) ya da objelerin hacim (volume) hesabi. Daha kolay olanla baslayalım, hacim hesabi.

Iddia ediyorum ki bu is icin uzay ortaminda kullanilabilecek bir tur determinant var. Elimizde uc vektor $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ var ve bu vektorlerin determinanti

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

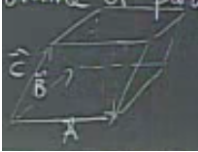
$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Ustteki gibi 2 x 2 determinantların acilimi biliyoruz zaten. O acilimi ustteki formül için yapınca elimize 6 tane terim gecmiş olacak. Ustteki formülü, yani bir 3 x 3 determinantın 2 x 2 acilimini hatırlamanın kısa yolu nedir? Ustte kullandığımız 1. satıra göre acilim. 1. satırda sirayla gideriz, a_1 'e bakarız, onun olduğu satırı ve kolonu (zihninizde) sileriz ve geriye kalan 2 x 2 determinanti hemen hesaplarız. Boyle devam ederiz. Ayrıca ikinci 2 x 2 determinantın onunde bir eksi isareti olduğuna dikkat. Bunun niye olduğunun matematiksel sebebine burada girmeyeceğiz.

Peki bu formül bize ne sağlayacak? Su teoriyi sağlayacak:

Teori

Geometrik olarak $\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \pm$ paralelipipe'in hacmi. Paralelipipe nedir? Bu obje bir nevi paralelogramın 3 boyuttaki hali. Alttaki gibi



Capraz Carpim (Cross Product)

Tanim

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

seklindedir ve bu islemin sonucu bir vektordur. Bu noktasal carpimdan farkli, o sonuc bir tek sayiydi. Burada sonuc bir vektor.

Fakat bu determinant biraz garip. Icindeki elementler \hat{i}, \hat{j} gibi birim vektorler. Bu tur determinantin ogeleri tek sayilar degil midir? Ama aslinda amac \hat{i} 'yi oldugu gibi hesaba dahil etmek degil, bu bir notasyon sadece, Boylece acilimi yaptigimizda

$$= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ 'nin nereye gidecegini hatirlamak kolay oluyor.

Teoriler

1)

$|\vec{A} \times \vec{B}|$ bu vektorlerin olusturdugu paralelograminalanina esittir. Yani alan hesabi icin capraz carpimi yapariz, bir vektor elde ederiz, sonra bu vektorun uzunlugunu buluruz (tum ogelerinin karesini alip toplariz, karekok aliriz, vs). Burada arti, eksi ile ugrasmamiza gerek yok cunku bir vektorun buyuklugu hep pozitiftir.

Yani dersin ilk kisimiyla baglamak gerekirse, aslinda $\det(\vec{A}, \vec{B}) = |\vec{A} \times \vec{B}|$ demis oluyoruz. Kontrol edelim. Capraz carpim soyle

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Determinant formülünü hatirlayalim

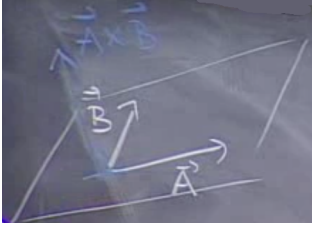
$$= \det(\vec{A}, \vec{B})$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

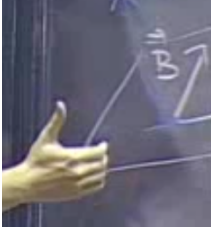
Bu formülde sadece a_1, a_2, b_1, b_2 var, o zaman capraz carpimi o hale getirmek icin $a_3 = 0, b_3 = 0$ kullanabiliriz, cunku iki vektoru her zaman alip xy düzlemi üzerine koyabiliriz [1]. Acilimi yaptimiz zaman determinant sonucu ile ayni seyi elde ettigimizi goruruz.

2)

Sadece buyukluk degil, $\vec{A} \times \vec{B}$ degerinin yonu de cok ilginc. $dir(\vec{A} \times \vec{B})$ paralelogramin uzerinde oldugu duzleme tam dik yonu gosteriyor. Yani $\vec{A} \times \vec{B}$ ikisinin ciktimi noktadan, bu iki vektore de dik olan 3. bir vektore yaratir

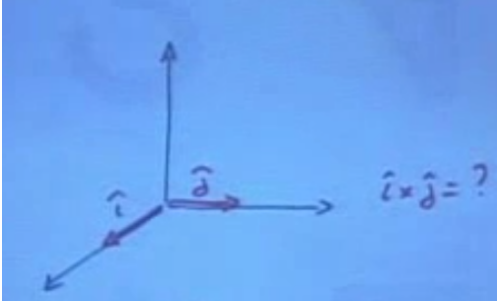


Peki $\vec{A} \times \vec{B}$ hesabinin hangi yonde bir vektor yaratacagini nereden bilecegiz? Sag el kuralini kullanarak.



Bu kurala gore el \vec{A} yonunu gosterecek sekilde tutulur, parmaklar bukulerek \vec{B} yonune cevirilir. Bu haldeyken basparmak kaldırılır, ve bu basparmak $\vec{A} \times \vec{B}$ 'nin yonunu gosterecektir.

Soru



Secenekler

1. \hat{k}
2. $-\hat{k}$

3. 1

4. 0

5. Bilmiyorum

Dogru cevap?

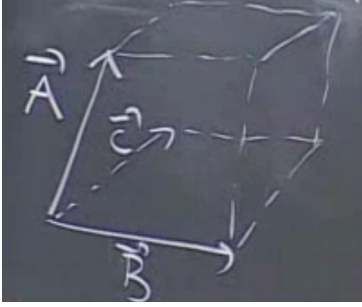
Cevap 1. Yani $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

Kontrol edelim.

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{i} - 0\hat{j} + 1\hat{k} = \hat{k}$$

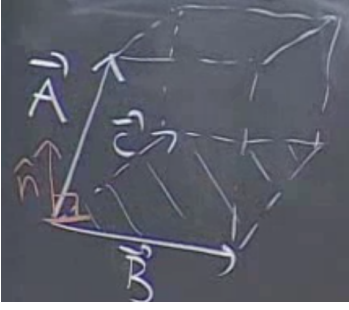
Hakikaten de sonuc sag el kuralini kullansak basparmagimizin gosterecegi yon olan \hat{k} 'yi gosteriyor.

Simdi hacim hesabina geri donelim. Determinant kullanmadan nasil hacim hesabi yaparim?



Parallelepiped'in hacminin taban alanı carpi yuksekligi oldugunu biliyoruz herhalde. Alan nedir? Tabanın kenari olan \vec{B} , ve \vec{C} 'yi kullaniriz, onların capraz carpimini aliriz, yani $\vec{B} \times \vec{C}$. Fakat capraz carpimin sonucunun bir baska vektor oldugunu soylemistik, o zaman o vektorun sadece buyuklugunu kullaniriz, $|\vec{B} \times \vec{C}|$.

Peki yuksekligi nasil hesaplariz? Yuksekligi en azindan yonsel olarak, bir birim vektor olarak bildigimizi varsayalim, ve bu birim vektor \vec{n} olsun. O zaman $\vec{A} \cdot \vec{n}$ yuksekligi hesaplayabilirdik. Soyle.



Peki \vec{n} 'i nasıl hesaplarız? $\vec{B} \times \vec{C}$ yükseklik yönünde üçüncü bir vektör üretmez mi? Bu vektör \vec{n} ile aynı yönde olmaz mı? O zaman $\vec{B} \times \vec{C}$ 'yi kullanırım. Ama bu çarpım birimsel değildir, o zaman onu kendi büyüklüğü ile bölerim, ve istediğim birim vektörü elde ederim.

$$\vec{n} = \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{|\vec{B} \times \vec{C}|}$$

O zaman

$$\begin{aligned} & |\vec{B} \times \vec{C}| \vec{A} \cdot \vec{n} \\ &= |\vec{B} \times \vec{C}| \vec{A} \cdot \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{|\vec{B} \times \vec{C}|} \\ &= \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \end{aligned}$$

İşin ilginç $\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ 'nin üstteki formülle aynı sonucu vermesidir.

Problem 1E-1

d)

Eksenler x, y, z üzerinde $x = a, y = b, z = c$ noktalarını kesin düzlemin $Ax + By + Cz = 1$ formundaki formülü.

Cevap

Düzlemin üzerindeki iki vektörü kullanarak onlara dik olan üçüncüyü bulma tekniğini kullanalım, böylece düzleme dik olan normali de bulmuş oluruz. Düzlem üzerindeki iki vektörü, düzlem üzerindeki üç noktayı kullanarak bulabiliriz. Çıkış noktası olarak x eksenini kullanalım, o noktanın koordinatı $(a, 0, 0)$. Bu başlangıç noktasından $(0, 0, c)$ 'a ve $(0, b, 0)$ noktasına giden iki

vektor bulunabilir. Vektorler cikartma islemi kullanilarak bulunur

$$\vec{A} = (a, 0, 0) - (0, 0, c) = \langle a, 0, -c \rangle$$

$$\vec{B} = (a, 0, 0) - (0, b, 0) = \langle a, -b, 0 \rangle$$

Capraz carpim

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & 0 & -c \\ a & -b & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -c \\ -b & 0 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a & -c \\ a & 0 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & -b \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= -cb\hat{i} + -ca\hat{j} - ab\hat{k}\end{aligned}$$

O zaman duzlem

$$-cbX + -caY - abZ = d$$

d 'yi hesaplamak icin bilinen bir noktayi bu formule sokariz, mesela $(a, 0, 0)$,

$$-cba = d$$

O zaman duzlem

$$-cbX + -caY - abZ = -cba$$

ya da

$$cbX + caY + abZ = cba$$

Problem esitligin sag tarafinda 1 olsun diyor, iki tarafi cba 'ya bolerse

$$\frac{1}{a}X + \frac{1}{b}Y + \frac{1}{c}Z = 1$$

Problem 1E-1

e)

$P = (1, 0, 1)$ ve $Q = (0, 1, 1)$ noktalarindan gecen $\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ vektorune paralel olan duzlem.

Cevap

Bir düzlemin normalı, o düzleme paralel olan diğer vektörlere diktir. Bunu nasıl kullanabiliriz? Daha önce düzlem üzerindeki iki vektöre dik olan üçüncü vektörü bulduk. Burada düzleme paralel olan bir ikinci vektör var, fakat bu vektörü de aynı şekilde kullanabiliriz. Sonuç $x + y = 1$ çıkacak.

Kaynaklar

[1] Anton, Rorres, Elementary Linear Algebra with Applications, 9th Edition