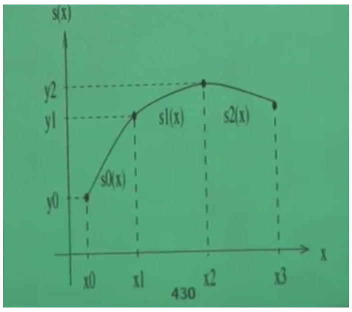
Spline Egrileri

Diyelim ki elimizde 4 y_i noktasi var, ve bu noktalardan gecen yaklasiksal bir egri olusturmak istiyoruz. Spline yontemi her iki nokta arasini farkli bir kupsel (ucuncu derece) polinom ile temsil etmektir. Dikkat: farkli polinomlari toplamiyoruz, her aralikta baska bir polinom fonksiyonu devreye giriyor. Peki niye kupsel? Cunku kupsel bir egri yeterince kavis saglayabilir ve ayni zamanda cok fazla inisli cikisli degildir.



Her $i = 0, .., n-1$ icin

$$p(x) = s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad (1)$$

kullanalim. Noktalar x_i olarak gosteriliyor, ve her noktada aktif olan bir p_i spline olacak, o noktadan bir sonrakine kadar egriyi bu s_i tanimlayacak. Peki her spline bir kubik polinom ise niye bu kubik polinomu en basit sekliyle

$$p(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$$

olarak tanimlamadik? Cunku iki ustteki form ile calismak daha rahat. Mesela, eger x icin x_i degrini verirsek, ki bu x_1 ya da x_2 olabilirdi, o zaman parantez icinde $x_i - x_i$ sayesinde tum terimler sifir oluyor, geriye sadece a_i kaliyor.

Parcalarin biraraya gelmesini nasil saglayacagiz? Bunun icin birkac sart gerekli. Once en basit olani, bir onceki parca ile bir sonraki parcanin orta nokta uzerinde ayni degere sahip olmasi. $i = 1, .., n+1$ icin

$$p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1})$$

Tabii ki en basit gereklilik, her x_i'ye tekabul eden spline fonksiyonun elimizdeki y_i degerini vermesi,

$$p_i(x_i) = y_i$$

Son parca bir istisna olusturuyor, o hem son nokta, hem de ondan bir onceki nokta icin gecerli olmali

$$p_{n-1}(x_n) = y_n$$

Teknigin isleyisini gelirsek, (1)'deki formulu ustteki gordugumuz her $p_i(x)$'in yerine geciriyoruz. Bunu yapinca elimize bir lineer sistem gececek, $4n$ tane denklem ve $4n$ tane bilinmez degiskenin oldugu bir denklem sistemi olacak bu, ve boyle bir sistemin cozumu vardir.

Simdi indisleri degistirelim, ve $i = 1, .., n+1$ olarak tasarlayalim. Tum denklemleri yazarsak,

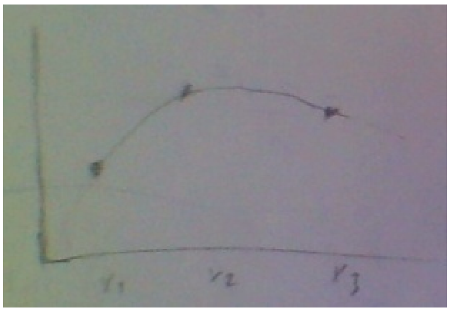
$p_1(x) = s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$

$p_2(x) = s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_1(x - x_2)^3$

$\vdots$

$p_3(x) = s_3(x) = a_3 + b_3(x - x_3) + c_3(x - x_2)^2 + d_3(x - x_2)^3$

Uc noktali soyle bir grafik dusunelim,



Ustte bahsettigimiz gibi, $p_1(x_1) = a_1 = y_1$ olacak, ve tum indisler icin bu gecerli. Ayrica x_2 noktasinda bir onceki parca ve sonraki parca ayni degere sahip olmali demistik, yani mesela p_1'in sonunda (ustteki ilk parca) x_2 noktasi vardir, ve ayni noktada p_2 baslayacaktir, o noktada

$p_1(x_2) = a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3$

ve bu denklem $p_2(x_2) = a_2 = y_2$'ye esit. Ayrica daha once gorduk, $a_1 = y_1$ ise, o zaman

$y_2 = p_1(x_2) = a_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3$

haline gelir. Kisaca

$y_2 = y_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3$

Hepsini birarada yaziyoruz, tek basina olan y'yi sag tarafa aliyoruz

$y_1 + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3 = y_2$

$y_2 + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 + d_2 h_2^3 = y_3$

$\vdots$

$y_n + b_n h_n + c_n h_n^2 + d_n h_n^3 = y_n$

ki $h_1 \equiv x_2 - x_1$, $h_2 \equiv x_3 - x_2$ olarak tanimlandi. Yani bir tur kisaltma olarak h harfini kullaniyoruz.

http://spartan.ac.brocku.ca/ jvrbik/MATH2P20/notes.pdf

http://www.youtube.com/watch?v=3rHBCglD1LQ http://www.youtube.com/watch?v=nA0YpqraP9A