Filtrelemek

Filtreler dis dunyadaki bir aksiyon hakkinda elde edilen gurultulu sinyalleri, tersine cevirerek arka plandaki aksiyon hakkinda hesaplama yapabilmemizi saglar. Mesela Kalman Filtreleri (KF) icin gizlenmis konum bir robotun nerede oldugu, bir senetin fiyati gibi bir sey olabilir, gizli konum bilgisi $x_t$ degiskeninde o konum hakkindaki gurultulu olcum $y_t$ icindedir. Hem gizli konumlar arasindaki gecis, hem de olcumun gurultusu lineer bir fonksiyon uzerindendir.

$$x_{t+1} = Ax_t + v$$

$$y_t = Hx_t + w$$

$v$ ve $w$'in dagilimi Gaussian'dir ve kovaryans sirasiyla $Q$ ve $R$ icindedir.

Zaman faktorunu de dahil etmek gerekirse;

$$\hat{x}_t^t = E[x_t|y_0, .., y_t]$$

$$P_t^t = E[(x_t - \hat{x}_{t|t})(x_t - \hat{x}_{t|t})'|y_0, ..., y_t]$$

Filtremenin amaci $x_{t+1}$ ve $P_{t+1}$ hesabini yeni bir olcum $y_{t+1}$ uzerinden yapmak olacak. "Gizli" $x_t$ derken bunu kastediyorduk, bu deger bize verilmiyor, sadece xt ve $x_{t+1}$ arasindaki gecisin nasil oldugunu biliyoruz, gurultunun nasil eklendigini biliyoruz, ama bunlarin bilsek bile elde bir suru bilinmeyen var. Filtrelemenin matematiksel numaralari sayesinde bunu hesaplayabiliyor olacagiz. Yani yapmamiz gereken "oku tersine cevirmek", yani $x_t$'nin $y_t$ uzerindeki sartsal bagliligini (conditional dependence) ortaya cikartmak, bunu $y_t$'nin $x_t$'ye olan sartsal bagimliligini tersine cevirerek yapmak. Ana denklemin iki tarafinin da beklentisini (expectation) alalim:

$$E\ x_{t+1} = \hat{x}_{t+1} = A\mu_t = A\hat{x}_t$$

Simdi iki tarafin kovaryansini alalim ve $P_t$'yi $cov\ x(t)$ olarak belirtelim:

$$P_{t+1} = AP_tA' + Q$$

Bu gecis "zaman guncellemesi" olarak adlandirilir. Normal dagilimlari $t$ anindan $t+1$ anina gecirmemizi saglar. $y$ iceren formullerde benzer bir durum var.

$$\hat{x}_{t+1}^t = Ax_t^t$$

$$P_{t+1}^t = AP_t^t A' + Q$$

$$y_{t+1} = Cx_{t+1} + w_t$$

$$E[y_{t+1}|y_0, .., y_t] = E[Cx_{t+1} + w_t|y_0, .., y_t]$$

$$\hat{y}_{t+1}^t = C\hat{x}_{t+1}$$