MIT OCW Hesapsal Bilim Ders 7

Bugün pozitif kesinlik (positive definite) günü. Simdiye kadar lineer cebirin temellerini isledik, bundan sonra uygulamalara daha agirlik verecegiz, tabii ki matrisler yapacagimiz her seyin temelinde olmaya devam edecekler. Konuya su acilardan yaklasacagiz:

* Testler

* Anlam

* Uygulamalar

Ilk once testler. Pozitif kesinlik kelimesi soyleyince matrisin simetrik oldugunu anlamak gerekiyor, yani matrisin reel ozdegerleri var, ve pek cok diger ozelligi de var muhakkak, mesela ozvektorlerinin birbirine dik olmasi gibi. Bu derste daha fazla ozellik gorecegiz, ve bu ekstralar ozellikler uygulamalarda hakikaten muthis faydalar sagliyorlar.

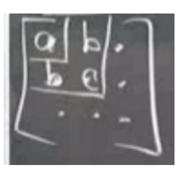
Daha once soyledigimiz gibi pozitif kesinlik lineer cebirin tamamini bir araya getirir. Testleri sunlardir:

1. Tum pivotlar > 0

2. Tum usts sol determinantlar (upper left determinants) > 0

3. Tum ozdegerler > 0

"Ust sol" ile neyi kastediyorum? 3x3 bir matriste (alttaki resim) kareye alinilmis bolumlerden. Bunlardan birincisi sadece a degerini veriyor. Ikinci ust sol determinant $ac - b^2$ (iki tane b var cunku matris simetrik, unutmayalim) degerini veriyor, vs. Bu iki degerin de sifirdan buyuk olmasi gerekiyor. Tabii ki ana determinantin da > 0 olmasi gerekiyor. Dogal olarak $ac > b^2$, caprazdaki carpim, capraz disindaki degerlerin carpimini "pozitiflikte gecmeli", baska turlu cikarma islemi pozitif sonuc vermezdi.



Anlama gelelim. Pozitif kesinlik kavrami, bir egrinin [eliyle konveks bir parabol hareketi yapiyor, onun alt noktasini kastederek] minimumunu bulmak ile yakindan alakali, ya da “enerjiyi azaltma” problemleriyle alakali. Bu fiziksel anlami bu ozelligin uygulamalarda niye bu kadar faydali olmasinin da bir sebebi aslinda. x'in bir fonksiyonunu hayal edelim:

$$f(x) = x^T K x$$

ve diyelim ki K

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

bu derste x'in kendisi ile carpimini ilk kez kullaniyoruz bu arada. Bu form dogal olarak karesel bir sonuc ortaya cikartacak. Biraraya koyarsak

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Sonuc hangi boyutlarda cikar?

$$f(x) = \underbrace{\overset{T}{x}}_{1xn} \underbrace{K}_{nxn} \underbrace{x}_{nx1}$$

Zinciri takip edersek, 1x1 boyutlarinda. Temel lineer cebirden hatirlarsak, NxM ve MxK carpimi NxK boyutlarinda bir matris cikartir. Elde edecegimiz 1x1 ise, bu tek bir sayidir. Tek sayinin bilesenleri nedir? Carpimi cebirsel olarak takip edersek

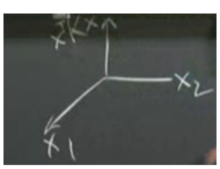
$$= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

Iste “enerji” formulu bu, bu forma niye enerji dedigimiz ileriki derslerde uygulamalara girince daha da iyi belli olacak. Formun cok onemli bir anlami var.

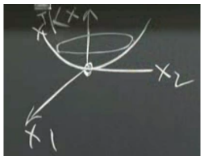
Bu noktada ustte belirttigim testlere bir 4. kalem ekleyebilirim, hatta onemini belirtmek icin basina yildiz bile koymak dusunulebilir!

4. $x = 0$ haricindeki tum x'ler icin $x^T K x > 0$.

Bu son formulu aciklamak icin bir grafik cizelim.



Degisen her x_1 ve x_2'ya gore hesaplanan, cizilen $x^T K x$'in grafigi yani. Bu grafik neye benzerdi acaba? Sifirdan baslarsam hep yukari gider degil mi? Bir kapa benzerdi, ve resmi asagi yukari soyle olurdu.



K yerine diger bazi pozitif kesin matrisleri dusunelim. Mesela birim matris hangi $f(x)$'e sebep olur? $x_1^2 + x_2^2$, ki bu formulde mukemmel bir kap seklini ortaya cikartir. Ya su matris olsaydi?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Sonuc $x_1^2 + 4x_1x_2 + 9x_2^2$ olurdu, o zaman sekil ust kesitinde daha eliptik bir sekilde olurdu. Ustteki matriste 2 degerinden yukari cikabiliriz, ama pozitif kesinlik istiyorsak bu $9 \cdot 1$'i gecmeyecek kadar olmali.

Ilginc bir durum pozitif kesinligin tan sınırındaki durumdur. Matematikte bu tür sınır sartları anlamak butunu kavramakta faydali oluyor. Mesela ustteki ornekte 2 yerine 3 olsaydi o zaman

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Bu matrise bakalim, ikinci kolon birincisinin "katı" oldugu icin hemen bu matrisin tekil oldugunu anliyoruz. O zaman ozdegerlerinden biri kesinlikle 0 olmali. Matrisi izi ozdeger toplamini verdigine gore ikinci ozdeger 10. Formulu neye benzer? $x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2$. Bu tur matrislere pozitif yari-kesin (semi-definite) deniyor. Ozdegerleri ≥ 0, determinantlari ≥ 0, ve sebep oldukları $f(x) \geq 0$, yani enerjileri ≥ 0.

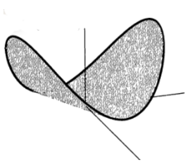
Mantik yurutmeye devam edelim. Pozitif yari kesinlik tekil bir matrisin oldugu anlamina geliyorsa, o zaman bazi x degerleri icin $f(x)$ sifir olacak demektir. Ustteki ornekte bu hangi deger? [3 -1]'i deneyelim, ve carpimi yapalim

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hakikaten de $x_1 = 3$ ve $x_2 = -1$ kullaninca $x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2$ formulunun sifir sonucunu verdigini goruruz. Sekil asagi yukari soyle:

Hoca bu sekli cizmek icin x_1 uzerinde 3 birim ileri, x_2 uzerinde 1 birim geri gitti, ve o noktadan gecen bir cizgi uzerinde degisim, yukari asagi gidis yok. Bu cizgi tabii ki 3 ve -1'in katlari alinarak elde edilebilecek noktalardan olusuyor, ve bu noktalar ustteki matrisin "sifirlik uzayinda (nullspace)". Pozitif kesin matrislerden gelen grafikler, kiyasla, boyle degildi. O grafiklerde kap uzerindeki her noktadaki gidis yonu yukari isaret ediyordu.

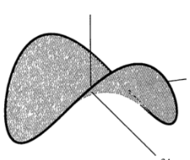
Daha iyi cizilmis bir sekil soyle:



Simdi de pozitif yari-kesin bile olmayan bir matrisi dusunelim. Bu matriste capraz disi (off-diagonal) degerler cok daha buyuk ve "kazaniyorlar". Ornek

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 10x_1x_2 + 9x_2^2$$

Bu formulu belli bazi x degerleriyle negatif yapmak mumkun. Hangi degerler mesela? Diyelim ki $x_1 = -1$ ve $x_2 = 1/2$. Bu formul bazi noktalarda asagi, bazilarinda yukari gidebiliyor. Bu durumu ortaya cikartan matrislere "tanimsiz (indefinite)" ismi veriliyor. Grafigi alttaki gibi, atlarin uzerine koyulan bir eger gibi.



Bunlar onemli noktalar. Simdi biraz ileri atlayalim. Elimizde bazi secenekler var. Mesela tipik olarak $Ku = f$ durumunda bir formul cozuyorduk ve tek bir cozum buluyorduk. Bir diger secenek te bir fonksiyonu, bir enerjiyi minimize etmek. Uygulamalar icin secenekler bunlar.

Pozitif kesin matrisler alttaki ifadeden gelirler. Bu kavram test olarak ta anlamli, o yuzden testlere bir 5. kalem ekleyecegiz.

5. $K = A^T A$.

Bu ifade pozitif kesin. Niye? $x^T K x = x^T A^T A x$'ye bakalim.

$x^T A^T A x$

Bu ifade aslinda su degil mi?

$= (Ax)^T (Ax)$

Ve bu ifadenin de $(Ax)^T(Ax) \geq 0$ oldugunu biliyoruz, cunku Ax'in devrigi tekrar kendisi ile carpiliyor. Ifadenin sifira esit olmasi ancak $Ax = 0$ ise mumkundur. Mantik zincirine devam edersek, $Ax = 0$'yi cozen bir x varsa (A'nin sifir uzayi bos degilse), yani $Ax = 0$'e sebep olacak sifir vektoru haricinde bir x mevcutsa, o zaman $(Ax)^T(Ax)$ pozitif yari-kesin demektir, cunku o zaman $Ax = 0$ olabilecektir.

$Ax = 0$ uygulamalarda nasil ortaya cikar? Mesela bir yay sisteminde eger yer degisimi var ama yay esnemesi yoksa (Ax yay esnemesini olcer), bu durum ortaya cikabilir. Peki bu nasil mumkun olabilir, yay esnemeden, daralmadan nasil hareket olabilir? Eger yay sistemini "tamami" kaldirilip baska yere goturulurse . Bu sistem serbest-serbest sistemi ile mumkun, yani iki ucum bir yere bagli olmadigi bir yay sisteminde, sistem [1 1 1] vektoru ile bir yere tasiniyor. Bu durumda matris tekil demektir, cunku pozitif yari-kesindir. Yani tipik matrislerimizden

K, T pozitif kesin.

B, C pozitif yari-kesin.

Mantiga devam: Sadece ve sadece A matrisinin bagimsiz kolonlari var ise, o zaman Ax pozitif kesindir.

Simdi pozitif-kesin matrislerin tersini (inverse) dusunelim. Tersini alinca ele gecen matris te pozitif kesin midir? Bunu kararlastirmak icin elimizde bir suru test var. Pivot ve determinantlara girmek biraz isleri karistirir, ama ozdegerlere ne olur, kendimize bunu soralim. Bu ozdegerlerin ne olacagini hemen biliyoruz, mesela elimizde 3,4,5 gibi ozdegerler olsa (hepsi pozitif tabii ki), matrisin tersini alinca elde edecegimiz ozdegerler 1/3,1/4,1/5 gibi degerler olacaktir, ki bu degerler de pozitiften. 1'den kucuk olabilirler ama 0'dan buyukturler. En basit kontrol edilebilecek test buydu. Pozitif kesinlik icin butun testlerin dogru olmasi gerekir.

Peki elimizde iki pozitif kesin matris K_1 ve K_2 varsa

$$K_1 + K_2$$

pozitif kesin midir? Bu toplamin ozdegerlerine bakmak zor olur. Fakat 4. testi kullanabiliriz. K_1 ve K_2'yi x ile carpalim.

$$x^T K_1 x + x^T K_2 x$$

Formuldeki her terim sifirdan buyuktur, cunku bu pozitif kesinligin tanimi. O zaman toplam da sifirdan buyuk olacaktir. Bu sonuca eristikten sonra, simdi cebirsel olarak basitlestiririz:

$$x^T (K_1 + K_2) x$$

Ve iki pozitif kesin matrisin toplamina erismis oluruz. Demek ki iki pozitif kesin matrisin toplami da pozitif kesindir.

Peki toplam soyle olsaydi?

$$\underbrace{K_1}_{A^TA} + \underbrace{K_2}_{B^TB}$$

A ve B'yi tek bir matris icine koydugumuzu varsayalim, ki bu matrislere "blok matrisleri" deniyor:

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Blok matrisinin devrigi nedir?

$$C^T = \begin{bmatrix} A^T & B^T \end{bmatrix}$$

Blok matrisleri nasil carparim?

$$C^T C = A^T A + B^T B$$

Bu $K_1 + K_2$'ya esittir.