Matrislerin, Vektörlerin Türevleri

Gradyan

m boyutlu vektor x'i alan ve geriye tek sayi sonucu donduren bir f fonksiyonunun x'e gore turevini nasil aliriz? Yani $x \in \mathbb{R}^m$ ve

$$x = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{array}\right]$$

Bu durumda x'in her ogesine gore kismi turevler (partial derivatives) alinir, ve tek boyutlu / tekil sayi boyutundaki sonuclar m boyutlu bir sonuc vektorune teker teker yerlestirilir,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{array}\right]$$

Bu sonuc tanidik gelmis olabilir, cunku ustteki ifade gradyan olarak ta biliniyor,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \nabla f = grad\ f(x)$$

Elde edilen vektor surpriz degil cunku tek, skalar bir deger veren bir fonksiyonun x icindeki *her ogensinin* nasil degistigine gore bunun fonksiyon uzerindeki etkilerini merak ediyorduk, ustteki vektor oge bazinda bize aynen bunu gosteriyor. Yani tek skalar sonuc m tane sonuca ayriliyor, cunku tek sonucun m tane secenege gore degimini gormek istedik. Not olarak belirtelim, gradyan vektoru matematiksel bir rahatlik olarak matematikcilerin kullandigi bir kisayol, bir ziplama noktasi, yani matematiksel olarak turetilerek ulasilan "kurallardan" biri degil.

Tek Parametreye Gore Matris Turevi

Eger bir A matrisinin tum ogeleri bir θ parametresine bagli ise, o matrisin θ'ya gore turevi icin tum elemanlarinin teker teker θ'ya gore turevleri alinir,

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta} & \frac{\partial a_{12}}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial a_{1n}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial a_{21}}{\partial \theta} & \frac{\partial a_{22}}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial a_{2n}}{\partial \theta} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}}{\partial \theta} & \frac{\partial a_{m2}}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial a_{mn}}{\partial \theta} \end{array}\right]$$

Vektor Turevleri

Eger bir $x \in \mathbb{R}^m$ vektorunden bagimsiz bir A matrisi o x ile carpiliyor ise, bunlarin x'e gore turevi nedir?

$$\frac{\partial}{\partial x^T}[Ax] = A$$

Ustteki sonuc aslinda tek sayili / boyutlu ortamda $2x$ gibi bir ifadenin x'e gore turevini alinca 2 elde etmeye esdeger. Ispat icin soyle dusunelim, eger $a_i \in \mathbb{R}^n$ ise (ki devrigi alininca bu vektor yatay hale gelir, yani altta bu yatay vektorleri ust uste istifliyoruz),

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$$

Bu durumda Ax ne olur? *Matris Carpimi* yazisindaki satir bakis acisi dusunulurse, A'in bir satirinin her ogesi x'in tum satirlarini (burada x vektor oldugu icin her satir tek bir sayidan ibaret) kombine ederek o sonuc satirini olusturmaktadir, o zaman

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T x_1 \\ \vdots \\ a_m^T x_m \end{bmatrix}$$