

MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 13

Lagrange Carpanlari (Multipliers)

Amac $f(x, y, z)$ gibi birden fazla degisken iceren bir fonksiyonu maksimize etmek, degisik olan, x, y, z degiskenlerinin birbirinden bagimsiz olmamasi. Bu degiskenlerin arasindaki iliski $g(x, y, z) = c$ gibi bir fonksiyon tarafından gosteriliyor olabilir, c bir sabittir. Yani $f(x, y, z)$ 'i minimize ya da maksimize ediyoruz ve bunu sadece $g(x, y, z) = c$ sartina / sinirlama ifadesine (constraint) uyan x, y, z degerleri icin yapiyoruz.

Bunun icin hangi teknigi kullaniriz? Yollardan biri, eger sinirlama ifadesi basit ise, belki bir degiskeni cebirsel olarak cozebiliriz (digerleri baglaminda ifade ederek), sonra geri f 'e sokariz, Boylece klasik bir min / maks problemi elde ederiz, ki o tur bir problemi cozmeyi artik biliyoruz.

Fakat bazen x, y, z degiskenleri icin analitik cozum mumkun olmaz, o zaman farkli teknikler kullanmamiz gerekir. Bu derste ogrenecegimiz teknikler bunlar olacak.

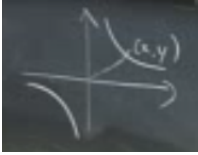
Uygulama baglaminda, Lagrange Carpanlari bize niye ilgilendiriyor? Belki fizik, termodinamik dersinde gormussunuzdur, sicaklik, hacim ve basinc degerleri vardir, ve bu degerler birbirinden bagimsiz degildir. Termodinamikte $pv = nrt$ denklemi vardir, gerci burada analitik olarak basitlestirme yapabiliriz, ama bazi sartlarda tum degiskenleri oldugu gibi tutmayi isteyebiliriz.

Simdiye kadar min / maks problemleri icin gordugumuz kritik nokta bulma tekniklerinin burada ise yarayamacagini hemen belirtelim. O kritik noktalar $g(x, y, z) = c$ sinirlama ifadesini tatmin etmiyor olabilirler. Baska bir seye ihtiyacimiz var.

Ornek

Hiperbol $xy = 3$ uzerinde olan ve orijine en yakin noktayi bul.

Aslinda bu soruyu temel geometri kullanarak cozebiliriz, fakat burada Lagrange Carpanlari kullanarak cozecegiz, cunku iyi bir ornek.



Neyi minimize edelim? Mesela $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ olur mu? Olabilir, ama karekok ifadesinden kurtulursak daha iyi olur.

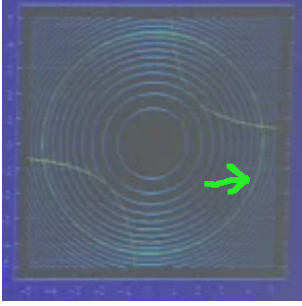
O zaman

$$\min f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\text{ki, } xy = 3$$

Yani sinirlama ifadesi $g(x, y) = xy$ olarak sectik.

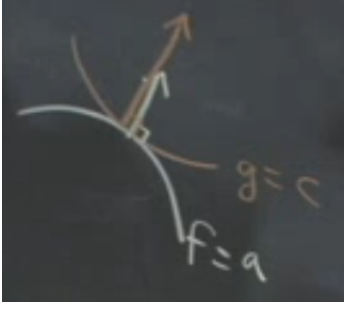
Grafiğe bakalım. Yuvarlaklar $f(x, y)$ konturları, yeşil okla gösterilen mesela $f(x, y) = 20$ konturu. Bu kontur üst sağ köşe ve sol alt köşede gösterilen hiperbolu kesiyor mu? Evet. Fakat $f(x, y) = 10$, vs. diyerek daha küçük yuvarlaklar elde edebilir miyim? Evet. Fakat bir noktadan sonra bu halkalar hiperbolu kesmeyecektir.



Aradığımız x, y değerleri hiperbole teğet olan, olabilecek en küçük yuvarlak.

Çözüm için teğetlik kavramından faydalanabiliriz. Eğer olabilecek en minimal f , her iki fonksiyonun kesit eğrilerinin teğet olduğu noktada ise, bu noktayı bulmaya uğrasabilirim.

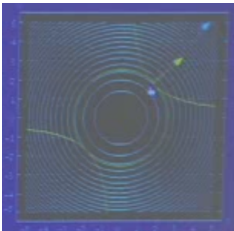
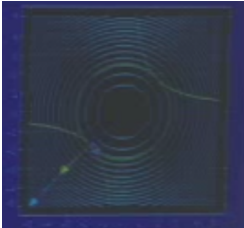
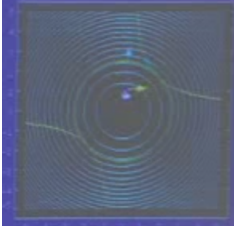
İki kesit eğrisi birbirine teğet ise, onların teğet düzlemi paraleldir, eğer öyleyse, bu düzlemlerin normaleri birbirine paralel olmalıdır.



Bu normallerin ayni boyda olmasi gerekmez, yukaridaki gibi, ama paralel olmalari gerekir. Bu durumda

$$\nabla f // \nabla g$$

ifadesi dogru olmalidir, yani f 'in gradyani g 'nin gradyanina paraleldir. Bazi ornekler



Goruldugu gibi minimal noktalarin birinde (ustteki son resim) gradyanlar paralel.

Cebirsel olarak dusunursek: vektorler ne zaman birbirine paralel olur? Birbirlerinin kati olduklari zaman. Yani su sekilde bir ifadeyi yazabildigimiz zaman

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

ki λ bir sabit.

Gradyanlar ayniyonu gostermiyor olabilir, bu durumu λ 'nin negatif olup olmamasi halledecektir.

Yani aradigimiz xy uzerinde sayisal deger λ uzerinden $\nabla f = \lambda \nabla g$ ifadesinin dogru oldugu bir nokta, ve λ degeri ariyoruz (unutmayalim, gradyanlar belli x, y degerleri uzerinden alinir). Yani 2 degisken iceren sinirlama ifadesi $g(x, y) = c$ iceren bir min / maks problemi yerine, bir denklem sistemi geciriyoruz. Bu sistem nedir? Yani ustteki gradyan formuludur, o da su sisteme donusur:

$$f_x = \lambda g_x$$

$$f_y = \lambda g_y$$

Oyle degil mi? Cunku ∇f ve ∇g birer vektordur,

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}, \quad \nabla g = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix}$$

O zaman iki ustteki denklem sistemi suradan ileri gelmektedir

$$\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix}$$

Fakat hala eksik bir sey var. Elimizde x, y, λ bilinmeyenleri var, ama sadece iki tane formül var. Eksik olan $g(x, y) = c$, cunku x, y birbirinden bagimsiz degil ve g uzerinden baglantililar. Simdi oldu. 3 formül soyle:

$$f_x = \lambda g_x$$

$$f_y = \lambda g_y$$

$$g(x, y) = c$$

Ornegimiz

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$g(x, y) = xy$$

uzerinde uygularsak

$$2x = \lambda y$$

$$2y = \lambda x$$

$$xy = 3$$

Bu sistemi cozmemiz gerekiyor. Yanliz sunu soyleyelim, bu sistemi cozmenin genel (hep isleyen) bir yontemi yoktur. Cozum bazen cok basittir, bazen zordur, bazen sadece sayisal / numerik / hesapsal acidan cozulebilir (bilgisayar ile). Bu ornekte kolay.

$$2x - \lambda y = 0$$

$$2y = \lambda x = 0$$

$$xy = 3$$

Matris formuna koyarsak

$$\begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En basit cozum $x = 0, y = 0$ sinirlama ifadesi $xy = 3$ 'u cozmez. Diger cozum ne zaman ortaya cikar? Eger matrisin determinanti sifir ise.

$$\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -4 + \lambda^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \pm 2$$

Elimizde iki durum var. λ ya 2, ya da -2.

1. $\lambda = 2$ durumunda

$$x = y$$

$$x^2 = 3$$

O zaman

$$(x, y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3}) \text{ ya da } (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

2. $\lambda = -2$ durumunda

$$x = -y$$

$$-x^2 = 3$$

Bu durumda çözüm yoktur (karesi alınıp eksi ile carpılan hiçbir sayı 3 sonucunu vermez).

Ustteki son iki resime bakınca, $\lambda = 2$ 'nin doğru olduğunu görüyoruz, çözüm olan iki noktada bir gradyan otekinin hakikaten tam iki kati.

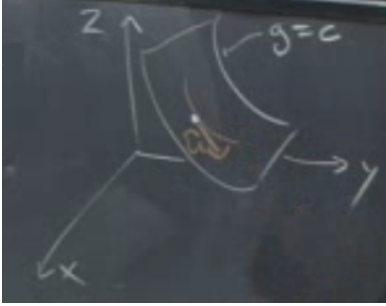
Bu metot niye isledi? Grafiklere baktik, tegetlik olduğunu gorduk, fakat bunun niye kesinlikle böyle olması gerektiğini söylemedik.

Kisitli ifade gozonune alininca ele gecek bir min / maks noktasında ve $g = c$ kesit egrisi boyunca, f 'in degisim oranı $= 0$ olmalıdır.

Simdi ayni seyi yonsel turev kullanarak soyleyelim.

$g = c$ 'e teget olan her \hat{u} için $df/ds|_{\hat{u}} = 0$ olmalı.

Yani su resme bakarsak



Kesit yuzeyi (ki orada $g = c$) üzerindeki nokta ve o yuzeye teget olan yon \hat{u} yonunde f 'in degisimi sifirdir.

$df/ds|_{\hat{u}}$ formülünün $\nabla f \cdot \hat{u}$ formülüne esit olduğunu biliyoruz.

O zaman teget olan her \hat{u} , ∇f 'e dik olmalıdır, yani $\hat{u} \perp \nabla f$.

O zaman ∇f , g 'nin kesit seviyelerine diktir.

g 'nin kesit seviyelerine dik bir baska vektor daha biliyoruz, o da g 'nin kendi gradyani, yani ∇g .

O zaman $\nabla f // \nabla g$ olmalıdır cunku her iki gradyan da g 'nin kesit seviyelerine ayni anda diktir.

Tekrar edelim. Sinirlanmis min, maks noktasinda g kesit seviyesi uzerinde ilerliyorsak, f 'in (en azindan birinci derecedeki yaklasiksallamasindaki) degisimi sifirdir, yani $g = c$ 'ye teget yondeki herhangi bir f turevi sifir olmalidir. Min, maks olmak bu demek. O zaman $g = c$ 'ye teget olan herhangi bir \hat{u} , f 'in gradyani ∇f 'e dik olmalidir, ve bu da $\nabla f, g$ 'nin kesit seviyesine dik demektir.

Yani resimde gordugumuz tekrar soylemis oluyoruz. Her iki kesit seviyesi kisitlanmis min / maks noktasinda birbirine teget olmalidir.