Cok Degiskenli Calculus - Ders 12

Zincirleme Kanunu hatirlayalim

$$\frac{dw}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_y \frac{dy}{dt} + w_z \frac{dz}{dt}$$

Bu formul, kismi turevler uzerinden, w'daki degisimin x, y, z'deki degisime ne kadar "hassas" ne kadar "bagli" oldugnu gosteriyor.

Simdi usttekini daha azaltilmis, ozetli (compact, concise) bir formda soyle yazacagim.

$$= \nabla w \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Gradyan vektoru tum kismi turevlerin bir araya konmus halidir.

$$\nabla w = < w_x, w_y, w_z >$$

Tabii ki bunu soyleyince ustteki gradyan'in x, y, z'ye bagli oldugunu da soyluyoruz, mesela w'nun belli bir nokta x, y, z'da gradyanini alabilirsiniz, o zaman her degisik x, y, z noktasinda farkli bir vektor elde edersiniz, ki bu vektorlerin tamamina ileride "vektor alani (vector field)" ismini verecegiz. Devam edelim,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = < \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} >$$

Yani hiz vektoru (velocity vector) $d\vec{r}/dt$ yukaridaki gibi tanimlidir.

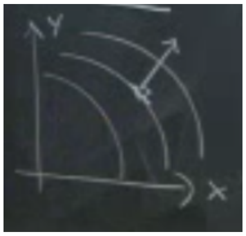
Bugunku amacimiz gradyan vektorunu anlamak, ve nerelerde kullanabilecegimizi incelemek. Gradyanlari yaklasiksal formullerde kullanmak mumkundur, vs. Ustte gordugumuz onun notasyonu.

Gradyanlarin belki de en "havali" ozellikleri sudur.

Teori

Iddia ediyorum ki ∇w vektoru, $w =$ bir sabit ile elde edilecek kesit yuzeyine (level surface) her zaman diktir.

Eger fonksiyonumun bir kontur grafigini cizersem



gosterilen noktada hesaplanacak gradyan vektoru o noktadaki kontura diktir.

Ornek 1

Lineer bir w kullanalim.

$w = a_1 x + a_2 y + a_3 z$

Gradyan nedir? Kismi turevleri alalim:

$\nabla w =< a_1, a_2, a_3 >$

Konturlari nasil elde ederim? $a_1 x + a_2 y + a_3 z = c$ ki c bir sabittir, bu formulu tatmin eden tum x, y, z degerleri bir duzlem olustururlar.

Bu duzlemin normalinin nasil alinacagini biliyoruz, katsayilara bakariz, $< a_1, a_2, a_3 >$. Bu vektorun gradyanla ayni ciktigina dikkat, ki normal vektor de duzleme diktir zaten. Ayni cikmalari mantikli.

Aslinda bu ornek gradyanin dikligini bir anlamda ispatliyor, cunku duzlem olmasa bile herhangi bir fonksiyonun birinci yaklasiksalligi bir duzlem yaratir, o duzlemin normali, gradyani esitligi bizi yine gradyanin dikligine goturur. Ama bu yeterince ikna edici olmadiysa baska bir ornege bakabiliriz.

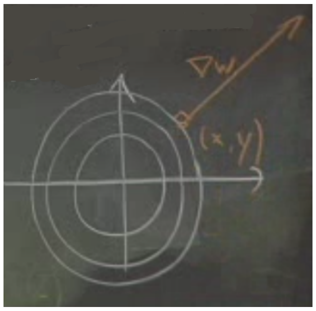
Ornek 2

$w = x^2 + y^2$

Bu fonksiyonun kesit seviyeleri, degisik yaricaplara sahip dairelerdir, $x^2 + y^2 = c$ formulundeki degisik c degerleri bu daireleri tanimlar.

Gradyan vektoru

$\nabla w =< 2x, 2y >$



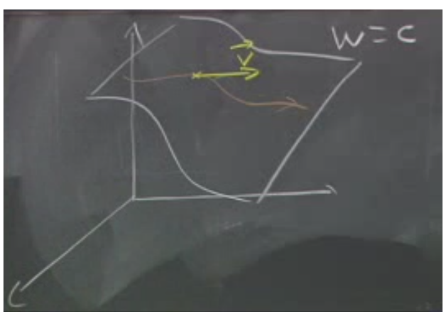
Secilen x, y noktasinda ∇w gosterilmis. Bu vektorun x ve y eksenlerinde boyunun, basladigi noktaya gore olan x, y degerlerinin yaklasik iki kati olduguna dikkat, ki bu da $< 2x, 2y >$ vektoru ile uyumlu.

Simdi gradyanin niye kesit egrilerine hep dik oldugunu ispatlayalim.

Ispat

Once kesit egrileri "uzerinde" hareket eden bir nokta hayal edecegiz. Bu nokta fonksiyonun sabit oldugu yerlerden geciyor demektir, cunku kontur uzerinde fonksiyon degeri hep aynidir.

Egri $\vec{r} = \vec{r}(t)$ hep $w = c$ uzerinde olacak. Resme bakalim, hayali bir kesit yuzeyi uzerinde bir egri olacak (kirmizi renkli) bu egrinin uzerinde giden noktanin bir hizi olacak.



Iddia o ki,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

vektoru, kesit $w = c$'ye muhakkak teget olmali, cunku hiz egriye teget, ve egri kesit icinde. Bu arada w aslinda $w(\vec{r}(t))$, w'ye girdi olarak verilenler x, y, z ama $\vec{r}(t)$'nin ogeleri de ayni x, y, z parametreleri.

Bu sayede Zincirleme Kanununu kullanarak

$$\frac{dw(\vec{r})}{dt} = \nabla w \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

esitligini kurabiliriz. Esitligin sag tarafi nasil oldu? Bu ifade w'nin her kismi turevinin alip, ona tekabul eden $\vec{r}(t)$ ogesinin turevi ile carpip sonuclarin toplanmasi demek. Sonuc Zincirleme Kanunu'ndaki goruntu olacaktir. Ayrica

$$= \nabla w \cdot \vec{v} = 0$$

Sifira esitligin sebebi $w = c$ olmasi, diferansiyeli alirken sag tarafin diferansiyelini aldik, orasi sabit oldugu icin sonuc sifir oldu.

Simdi ters yonden bakalim: iki vektorun noktasal carpimi ne zaman sifir sonucu verir? Eger vektorler birbirine dik ise. Demek ki $\nabla w \perp \vec{v}$.

Hatta iddia ediyorum ki bu diklik $w = c$ uzerindeki her hareket (motion) icin gecerlidir. Yani $\vec{v}$, kesit yuzeyine teget olan herhangi bir vektor olabilir, ustteki diklik hep dogru olacaktir.