Sınırlı Elementler Metodu (Finite Elements Method)

Bu metot differansiyel, kismi differansiyel denklemleri (partial differential equations) yaklasiksal olarak modelleme ve cozmenin yontemleridir.

Formul: Baslangic denklemi

$$\frac{-d}{dx}\left(c(x)\ \frac{du}{dx}\right) = f(x)$$

Iki tarafi da $v(x)$ ile carpiyoruz ve 0 to 1 sinirlariyla entegralini aliyoruz.

$$\int_0^1 \frac{-d}{dx}\left(c(x)\ \frac{du}{dx}\right)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Parcali entegral (integration by parts) formulu soyledir:

$$\int y\ dz = yz \int z\ dy$$

Ana formulun bolumlerini, parcali entegrale gore bolustururrsek:

$$dz = \frac{-d}{dx}\left(c(x)\ \frac{du}{dx}\right)dx$$

$$z = -c(x)\ \frac{du}{dx}$$

$$y = v(x)$$

$$dy = \frac{dv}{dx}dx$$

Yukarida dz icinde dx ve $\frac{1}{dx}$ birbirini iptal eder. Parcali entegral formulunun sag tarafina gore yerlerine koyarsak:

$$\int_0^1 v(x)dx\frac{-d}{dx}\left(c(x)\ \frac{du}{dx}\right) = -\left[v(x)c(x)\frac{du}{dx}\right]_{x=0}^{x=1} \int_0^1 c(x)\ \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx$$

Ustteki parcali entegral aciliminda sol taraf entegrale sinir degerleri aldiginda, sag taraftaki yz sonucunun ayni sinir degerlerine tabi olduguna dikkat edelim.

Differansiyel denklemde sinir kosullari $x = 1$ durumunda $c(1)u'(1) = 0$, ve $x = 0$ durumunda $v(0) = 0$ olarak biliniyor. O zaman ustteki denklemin sol tarafinda $x = 0$ ve $x = 1$ kosullari icin tanimli bolum $0 - 0 = 0$ olacaktir ve denklemden atilabilir. Geriye kalanlar

$$\int_0^1 c(x)\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Bu fonksiyonu Galerkin adli bir matematikci bulmus, "zayif form (weak form)" olarak adlandiriliyor.

Simdi diyelim ki n tane test fonksiyonu sectik $\phi_1(x), .., \phi(n)$ ve bu fonksiyonlarin U_j sayilari ile carpiminin toplamini, yani bir tur kombinasyonunu $u(x)$ yerine kullanmaya karar verdik.

$$U(x) = U_1\phi_1 + ... + U_n\phi_n$$

O zaman

$U'(x) = U_1\phi_1' + ... + U_n\phi_n'$

$= \sum_1^n U_j \frac{d\phi_j}{dx}$

Simdi du/dx yerine $U'(x)$ koyarsak

$$\int_0^1 c(x) \bigg(\sum_1^n U_j \frac{d\phi_j}{dx} \bigg) \frac{dV_i}{dx} dx = \int_0^1 f(x)V_i(x)dx$$

Dikkat edelim, $v(x)$ yerine $V_i(x)$ kullandik. Ustteki formul her i icin yeni bir formul "uretecek". Niye V_i? Zayif formdaki $v(x)$ formulunu de zaten biz uydurmustuk, yani $v(x)$ biz ne istersek o olur. O zaman bu fonksiyonu n tane formul uretmek icin bir numara olarak kullaniliyoruz, n tane formul olunca matrisin n x n elemanini doldurabilecegiz ve cozume erisebilecegiz. Ek not, cogunlukla $V_i(x)$ icin ϕ_i formulleri kullaniliyor.

Ayrica formuldeki U_j kismini cekip cikartirsak ve bir vektor icine koyarsak, geri kalanlar bir K_{ij} matrisi icinde tutulabilir.

$$K_{ij} = \int_0^1 c(x) \frac{d\phi_j}{dx} \frac{dV_i}{dx} dx$$

Sag taraf ayni sekilde i tane formul uretir

$$F_i = \int_0^1 f(x)V_i(x)dx$$

Final formul matrix formunda basit bir sekilde temsil edilebilecektir.

$KU = F$

Ornek

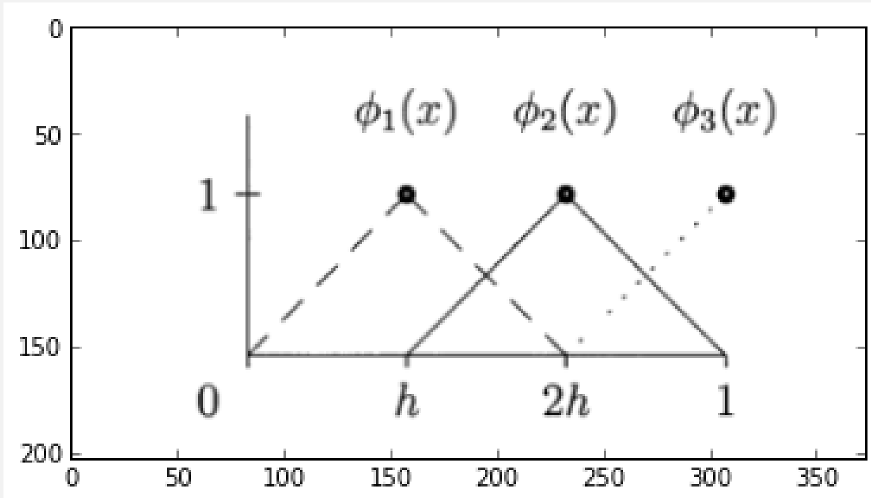
Ornek olarak $-u'' = 1$ denklemini cozelim. Not: Differansiyel denklemlerde sonuc bulmak demek bir "fonksiyon" bulmak demektir. Normal cebirsel denklemlerde sonuc bulmak degiskenlerin "sayisal" degerini bulmak demektir. Birazdan bulacagimiz sonuc $u(x)$ "fonksiyonu" olacak.

Eger denklem $-u'' = 1$ ise o zaman bu formulu ana forma uygun hale getirmek icin $c(x) = 1$ olarak almamiz gerekir. $-u'' = 1$ denkleminde esitligin sag tarafi 1 olduguna gore $f(x) = 1$ demektir.

Artik ϕ fonksiyonlarini secme zamani geldi. Bu fonksiyonlarin "toplami" hedefledigimiz fonksiyonu yaklasiksal (approximate) olarak temsil edecek. Ornek olarak secebilecegimiz bir fonksiyon "sapka fonksiyonu (hat function)" olarak bilinen ucgen fonksiyonlar olabilir. Alttaki figurde bu fonksiyonlari goruyoruz.

```
im=imread("fem_hat.png"); imshow(im)
```

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0xb04834c>
```



Bu figurde x ekseninin h buyuklugundeki parcalara bolundugunu goruyoruz.

Entegralleri hesaplayalim

$$F_1 = \int_0^1 V_1(x)dx$$

Daha once V_1 ve ϕ_1'i ayni kabul ettigimizi belirtmistik.

Yukaridaki entegralin aslinda bir alan hesabi yaptigini goruyoruz. Sinirlar 0 ve 1 arasinda, ama $2h$ otesinde zaten ϕ_1 fonksiyonu yok. ϕ_1'in alani nedir? Alan ucgenin alani: Taban carpi yukseklik bolu 2: $2h$, yuksekligi 1, o zaman alan $(2h \times 1)/2 = 1/3$

Benzer mantikla bakarsak, F_2 ile F_1 ayni, yani 1/3. F_3 ise onlarin yarisi, yani 1/6.

K_{ij} nasil hesaplanacak? $c(x) = 1$ oldugu icin formulden cikarilabilir ve V_1 ve ϕ_1'in ayni olduguna soyledik:

$$K_{ij} = \int_0^1 c(x) \frac{d\phi_j}{dx} \frac{dV_i}{dx} dx$$

$$K_{11} = \int_0^1 \left(\frac{dV_1}{dx} \right)^2 dx$$

dV_1/dx nedir? Birinci sapka fonksiyonunun turevidir. Bu tureve bakarsak, 0 ve h arasinda arti egim (slope) $1/h$, h ve $2h$ arasinda eksi egim $-1/h$ oluyor. Ama kare aldigimiz icin sonuc ayni, $1/h^2$. O zaman h $= 1/3$ olduguna gore $1/(1/3)^2$, yani $dV_1/dx = 9$.

$$K_{11} = \int_0^{2/3} 9dx = 9x \bigg|_0^{2/3} = (9)(2/3) - 0 = 6$$

K_{22} seklen ayni fonksiyon parcasini temel aldigi icin ayni degere sahip: 6. K_{33} onlarin yarisi, esittir 3.

K_{12} farkli egimlerin carpimi anlamina gelir, yani V_1' ile V_2' carpimi olur. Bu iki fonksiyona bakalim, 0 ile h arasinda V_2 yok, egim 0. Ikisinin de sifir olmadigi, carpimda kullanilabilecek bir egiminin oldugu tek aralik h ve 2h arasi. Burada $V_1' = -3, V_2 = 3$.

$$K_{12} = \int_{1/3}^{2/3} (3)(-3)dx = -9x \bigg|_{1/3}^{2/3} = -6 - (-3) = -3$$

Ayni sekilde $K_{23} = -3$. Ama $K_{13} = 0$ cunku hic cakisma yok.

Matrisi doldurursak,

$KU = F$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Python kodu

```
import numpy as np
K = [[6., -3., 0],
     [-3., 6., -3.],
     [0., -3., 3.]]

f = [1./3., 1./3., 1./6.]

print np.linalg.solve(K,f)
```

```
[ 0.27777778  0.44444444  0.5       ]
```

```
print 5./18., 4./9., 1./2.
```

```
0.277777777778 0.444444444444 0.5
```

Rapor edilen degerler bu denklemin bilinen cozumu $u(x) = x - \frac{1}{2}x^2$ ile 0, h, 2h noktalarinda (mesh points) birebir uyum gosterdigini goruyoruz. Yani yaklasiksal olarak differansiyel denklemi cozmeyi basardik.

Kaynaklar

Strang, G., Computational Science and Engineering, 2007