

## Ozdeğerler ve Ozvektorler ile İmaj Bolmek, Gruplamak

Sentetik görüş (machine vision) dalında, karşımıza çıkan en temel problemlerden biri, pikselleri guruplayarak bir nesneyi tanımlamaktır. Bildiğimiz gibi, robot gözden gelen sayısal bilgiler ışığında, 3-boyutlu dünya bilgisayar için 2 boyutlu bir dünyaya dönüşür. Bu dünyada, pikseller arasındaki bağlantı kaybolmuştur. Yani, elimizdeki veriye tarafsız bir şekilde bakarsak, iki pikselin hangi nesneye ait olduğunu belirten 'gizli' bir kodlama bulmamız imkansızdır. İmgecikler arasında yapmamız gereken bu bağlantıyı, algoritmalar kullanarak sonradan yapmaya mecbur kalıyoruz. Yani, insan gözünün aynen yaptığı gibi.

İşte burada, guruplama (clustering) yöntemleri denen bir dizi algoritma ve 'düşünce şekli' yardımımıza yetişiyor. Çok temel bir konu olduğu için, guruplama hakkında bir çok araştırmacı harıl harıl yeni yaklaşımlar bulmak ile meşguller. Fakat daha hala tek bir kuram diyebileceğimiz 'hep işleyen' bir yaklaşım bulunabilmiş değil. Her değişik ortam için, değişik guruplama yöntemleri kullanılıyor.

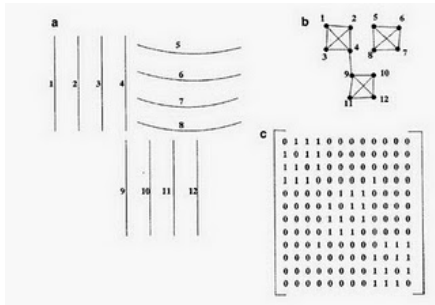
Her yöntemin başarı miktarı ötekine göre farklı. Burada özetleyeceğim yöntem, doğrusal cebir ve çizge spektrum (spectrum) analizi yaparak guruplamayı başarıyor. Bu kelimelerin anlamlarını aşağıda belirtelim.

Doğrusal cebir, matematik derslerinden hatırlayabileceğimiz gibi, üstü olmayan bilinmezli denklemleri çözmenin aritmetiği demektir. Yani doğrusal cebir denklemlerindeki bilinmeyenler,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  gibi değerlerdir.  $x^2$ ,  $y^2$  gibi bilinmezlerle bu dalda uğraşılmaz.

Doğrusal cebir oldukça iyi araştırılmış ve kuramları yerine oturmuş bir matematik dalıdır. Her ne kadar üniversitelerde analiz (calculus) dersi kadar önem verilmesede, bilgisayarların daha güçlenmesi ile doğrusal cebir daha da çok ragbet görür oldu. Doğrusal cebirin bizim için ilginç olan tarafı, son zamanlarda çizge kuramı (graph theory) ile kurulan bağlantılarıdır. Yani, doğrusal cebirden bildiğimiz matris kavramının, çizgeleri çözmek için kullanılabilmesinin keşfedilmesi.

Bir sayısal görüntü ile çizge arasındaki bağlantı nedir diye merak edebilirsiniz... Daha sonra, çizge ile matris arasındaki bağlantı nedir diye merak edilebilir... Bu iki bağlantıyı teker teker özetleyeceğiz.

Daha rahat göz önüne getirebilmek için, aşağıdaki resme bakabiliriz.



Bu resimde gördüğümüz (b) şeklinde görünen çizge, (a) şeklinde gösterilen 'ekrاندaki' nesnelerin birbirine olan alakasına göre çizilmiş bir çizgedir. Yani, (a) da

görülen ner nesneyi (b) çizgesi üzerinde bir düğüm noktası olarak belirtirsek, o zaman iki nesnenin birbiri ile, herhangi bir ilişkisi durumunda, iki düğüm arasında bir bağlantı kurarız. Bu işlemden sonra elimize gecen çizgeye bitişiklik çizgesi diyoruz.

Bir çizge düğümler ve bunların arasındaki bağlantılardan ibârettir.

Cebire gelelim. Aynen doğrusal cebir de olduğu gibi, çizge üzerinde kurulmuş bir kuram ve yöntem de var. Bu iki konu uzun süre ayrı yollarda geliştiler ve râfine edildiler. Fakat yakın zamanda matematikçiler çizge problemlerini çözmek için doğrusal cebir kullanmaya başladılar. Meselâ bahsettiğimiz bitişiklik çizgesini 'bitişiklik matrisine' çevirirsek, doğrusal cebirin yöntemlerini kullanarak, çizge hakkında bazı sonuçlara varmamız mümkün oluyor. Bu çok ilginç ve harika bir bağlantı, ve bir takım yapıcı yan etkileri var.

Bitişiklik matrisine örnek olarak (c) şekline bakabilirsiniz.

Bu matrisi yaratırken, her çizge üzerindeki her düğüme bir sayı verdiğimizizi unutmayalım; o zaman bu kodlamaya göre düğüm 1 ve düğüm 3 arasında bir ilişki var ise, matrise bakıp X eksen = 1, ve Y eksen = 3 üzerine tekâbül eden matris değerinin 1 olarak tanımlıyoruz.

Arasında ilişki olmayan düğümler, matris üzerinde 0 değeri taşıyorlar.

İşte bu matris üzerinde özdeğer, özvektör yöntemleri kullanarak çizge hakkında sonuçlara varmak mümkün oluyor.

0 ve 1 değerleri yerine yakınlığı piksel değerleri arasındaki farka bağlı olarak ta hesaplayabiliriz.

## Gruplamak

Bir imajı nasıl gruplara ayırabiliriz? Ekran piksellerini, çizge (graph) düğümleri olarak gösterebiliriz, sonra bu çizgeyi yakınsallık (affinity) matrisine çevirebiliriz. Bu matris üzerinde öyle işlemler yapalım ki, elimize  $Wx$  denen bir vektör geçsin; bu vektörün  $1..N$  üyeleri,  $1..N$  piksellerinin  $x$  gurubuna üyelik katsayısı olsun. Katılım değerleri en fazla olan vektör (gurup), ekran üzerindeki en büyük nesne demektir!

Matematiksel olarak şöyle bir formül kuralım, sadece temsil etmeye uğraşıyoruz, yani bir gurup ve içinde olan pikseller arasında bağlantı kurmak istiyoruz. Piksel ve herhangi bir gurup arasındaki ilişkiyi formül ile kağıt üzerine dökmeyi amaçlıyoruz. Matematik, sayılar arasında alâka kurma sanatıdır. Elimizde şimdilik bir algoritma olmasa bile, temsili olarak bir alâka kurmak mümkün.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Bu formüle göre,  $W_{ij}$ , çizge üzerinde gösterilen  $i$  ve  $j$  düğümü arasındaki bağlantı ağırlığı olacak.  $x$  vektörünün içindeki her değer, çizgedeki düğümlerin bu  $x$  gurubuna dâhil olma katsayısı olacak. Formülün sol tarafına göre, bu tanımları her  $i$  ve  $j$  değeri için yaparak sonuçlarını toplamış oluyoruz.

Dikkat, toplam sonucu tek bir sayı, yani bir skalar. Nelerin birbiri ile carpildiği optimizasyon için çok önemli,  $i$  ve  $j$  arasındaki ağırlığı,  $i$ 'nin üyelik ağırlığı ve  $j$ 'nin üyelik ağırlığı ile carpiyoruz, bunları tüm diğer kombinasyonlar için yapıyoruz, ama bu carpimleri topluyoruz. Carpım daha fazla büyütür, ve maksimizasyon için bu büyüklük daha on planda olacaktır.

Ve bu toplamanın 'en büyük' olduğu yer, görüntü üzerindeki en büyük nesnenin olduğu yerdir! Yani elimizde bir matematiksel maksimizasyon problemi var.

Caprimi tekrar kontrol edelim

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Diyelim ki  $i = 2$ ,  $j = 1$ . O zaman  $a_2$ ,  $b_{21}$  ve  $c_1$ 'in birbiriyle carpılması gerekir. Hakikaten caprimi elle kontrol edersek bunun olduğunu göreceğiz. İçinde  $a_1 \cdot b_{21}$  caprimini içeren terim, sonra  $c_1$  ile caprılacaktır.

Formülün yazarı, maksimizasyon işlemine atlamadan önce, bir matematiksel sınır daha koymaya mecbur olmuş. Maksimizasyon problemlerinde, her sayıyı muazzam büyüklüklere getirerek formül sonucunu sürekli büyütme mümkün olabilirdi. Buna bir sınır getirmek için, sağ tarafta,  $A$ 'nin yanına çarpan olarak  $x$  vektörünün norm'u (yani uzunluğu) 1 olsun demiş. Altta, bu tanımın açılmış halini görüyorsunuz. (Not:  $X$  vektörünün norm'u =  $X$ 'in devriği çarpı  $X$ ). Lagrange formülü şöyle gösterilebilir:

$$w^T A w - \lambda(w^T w - 1)$$

$$w^T A w - \lambda(w^T w - 1) = 0$$

$$\frac{d}{dw} w^T A w - \lambda(w^T w - 1) = 0$$

$$2Aw - 2\lambda w = 0$$

$$2Aw = 2\lambda w$$

$$Aw = \lambda w$$

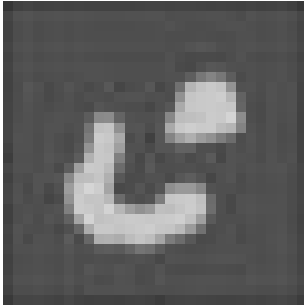
Ustteki son formül özdeğer (eigenvalue), özvektörler (eigenvector) formülüdür. Rayleigh-Ritz kuramına göre, yukarıdaki formülün enbüyütülmüş  $x$  vektörü,  $A$  matrisinin en büyük özdeğerine tekabül eden özvektör olacaktır! Düğümler birbirine ne kadar iyi bağlıysa, bir gurubun içsel bağlantısı ve 'gurupluğu' o kadar iyi oluyor.

Bu son formül aşağıda

$$\lambda_{n-k} = \max_{x \perp x_{\lambda_n}, \dots, x_{\lambda_{n-k+1}}} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

Ornek

Altındaki imaji gruplarına ayirmaya calisalim.



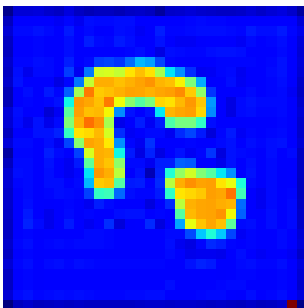
```
Img = plt.imread("two0bj.jpg")
n = Img.shape[0]
Img2 = Img.flatten(order='C')
nn = Img2.shape[0]

A = np.zeros((nn,nn))

for i in range(nn):
    for j in range(nn):
        A[i,j]=np.exp(-((Img2[i]-Img2[j])**2))

V,D = np.linalg.eig(A)
V = np.real(V)
a = np.real(D[0])

threshold = 0 # filter
a = np.reshape(a, (n,n))
Img[a<threshold] = 255
imsave('eigseg1.png',Img)
```



Kodda `imread` ile imaji okuduk, elimize 30x30 boyutunda bir matris gecti. Bu matrisi once “düzleştirerek” bir vektor haline getirdik, ki bu vektorun elemanlari yeni bir yakınlilik matrisinin kenarlari olacakti. Sonra bu yeni elemanlari her birini bir digeri ile karsilastirarak yakınliligini hesapladik, bunu piksel degerinin ne kadar yakınlilik olduguna bakarak karar verdik, `exp` bunun icin kullanildi. Ayrica yakınlilik ve uzaklik kavramini tersine cevrildi, `exp` icinde eksi olmasi bundan, birbirine ”benzer” yani degerleri birbirine yakınlilik olan piksellerin farklari az olacaktir, fakat biz bu azligi maksimizasyon problemi icin bir fazlaliga cevirme istiyoruz.

Bu noktada A matrisinin ozdegerlerini hesaplattik, ve geriye C, D geri geldi. Numpy ozdegerleri ve ona tekabul eden ozvektorleri buyukluk sirasina dizerek geri getirir, bu sayede sifirini (ilk) D’ye bakarak en buyuk ozdegere tekabul eden ozvektoru alabildik. Bu vektorun degerleri ise uyelig en yuksek olan grubu iceriyordu. Ciplak gozle bakınca bu degerlerin uyelik icin pozitif, digeri icin negatif degerler oldugunu anladik, bu yuzden esik (threshold) degerini sifir olarak tanımladik. Esigin altinda kalan degerleri grup disi olarak kabul ettik ve o degerlerin kordinatina 255 piksel degerini atadik, ki ustteki resimde mavi renkli gozuken pikseller bu degerleri temsil ediyor.

Not: Ustteki kodlama performans olarak biraz yavas olabilir, alternatif olarak sadece birbirine yakınlilik pikseller arasi ilinti hesaplanarak ortaya cikacak seyrek (sparse) matris uzerinde seyrek ozvektor hesabi daha hizli sonuc verebilir.

#### Kaynaklar

Sarkar ve Boyer makalesi ”Değişimlerin Sayısal Ölçümünü Özellik Organizasyonu Kullanarak Yapmak: Özdeğerler ve Özvektörler”. (Quantitative Measures of Change Based on Feature Organization: EigenValues and EigenVectors)

Forsyth ve Ponce kitabı ”Bilgisayar Görüşü, Yeni Yaklaşım (Computer Vision, A Modern Approach)