Egim (Curvature)

Kesit seviyeleri tekniginde bir egri normal formda degil, dolayli (implicit) bir fonksiyon ile $F(x,y) = 0$ olarak gosterilir. Bu fonksiyonun tam diferansiyelini alirsak,

$$dF = F_x dx + F_y dy = 0$$

$$dy = \frac{-F_x}{F_y} dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y} = f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Burada bir faraziye daha var, o da aslinda ilk verilen formulde olmasa bile $y = f(x)$ olarak kabul etmemiz, yani $F(x,y)$ nasil bir formul olursa olsun, y'nin x'leri icerecek sekilde tekrar duzenlenebilecegini farz etmemiz, boylece $F(x, f(x))$ olabilecegini soylemis oluyoruz.

Simdi y''in turevini bir daha alalim. Yukaridaki y' formulunde en sag taraf bir bolme islemi icerdigi icin burada Calculus'un Bolumler Kuralini (Quotient Rule) uygulamamiz lazim (detaylar icin Bolum Kurali yazisina bakiniz). Bu kural soyle gosterilir:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\frac{vdu}{dx} - \frac{udv}{dx}}{v^2}$$

Bolumler Kurali icin u ve v tanimlari nedir?

$$u = -F_x(x, f(x))$$

$$v = F_y(x, f(x))$$

O zaman

$$v\frac{du}{dx} = F_y \frac{dF_x}{dx} \quad (1)$$

$$u\frac{dv}{dx} = -F_x\frac{dF_y}{dx} \quad (2)$$

Bunlardan mesela dF_x/dx uzerinde Zincirleme Kanunu (Chain Rule) uygulamak lazim (bu kural tam integral kuralinin bir sonucu).

$$\frac{dF_x(x,f(x))}{dx} = \frac{\partial F_x}{\partial x}(x,f(x)) + \frac{\partial F_x}{\partial y}\frac{df}{dx}$$

$$= F_{xx}(x,f(x)) + F_{xy}(x,f(x))f'(x) \quad (3)$$

$$\frac{dF_y(x,f(x))}{dx} = F_{xy}(x,f(x)) + F_{yy}(x,f(x))f'(x) \quad (4)$$

Zincirleme Kanunu niye ustteki sekilde acildi? Tam Diferansiyeli bir daha hatirlayalim:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

O zaman formuller (1) (2) (3) ve (4) bir araya konulursa,

$$y'' = -\frac{F_yF_{xx} - F_yF_{xy}\frac{F_x}{F_y} - F_xF_{xy} + F_xF_{yy}\frac{F_x}{F_y}}{F_y^2}$$

$$y'' = -\frac{F_yF_{xx} - F_{xy}F_x - F_xF_{xy} + \frac{F_x^2F_{yy}}{F_y}}{F_y^2}$$

Ustteki bolumun hem bolen, hem bolunen terimlerini F_y ile carparsak, ve sadelestirirsek

$$y'' = -\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy}F_xF_y + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}$$

Simdi Wolfram sitesinde turetimi gosterilen egim (curvature) formulune bakalim [2]. Not: Eger

$$\kappa = \frac{x'y'' - y'x''}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$$

formulunun alttaki formule nasil donustugu tam anlasilir degilse, hatirlayalim ki, $y = f(x)$, ve $x' = 1$, ve $x'' = 0$.

Bu formulun Courant [1] sf. 231'de benzer bir formunu goruyoruz [3].

$$\kappa = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

Bu formuldeki f'' yani y'' icin ustte buldugumuz sonucu, f' yani y' icin bu yazinin basindaki formulu koyarsak,

$$\kappa = \frac{-\frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy}F_xF_y + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

Bolen kismi nedir?

$$(1 + f'^2)^{3/2} = \left(1 + \left(\frac{-F_x}{F_y}\right)^2\right)^{3/2}$$

$$= \left(1 + \frac{F_x^2}{F_y^2}\right)^{3/2}$$

$$= \left(\frac{F_y^2 + F_x^2}{F_y^2}\right)^{3/2}$$

$$= (F_y^2 + F_x^2)^{3/2}(F_y^{-2})^{3/2}$$

$$= (F_y^2 + F_x^2)^{3/2} F_y^{-6/2}$$

$$= (F_y^2 + F_x^2)^{3/2} F_y^{-3}$$

Yerine koyarsak,

$$\kappa = \frac{-\dfrac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy}F_xF_y + F_x^2 F_{yy}}{F_y^3}}{(F_y^2 + F_x^2)^{3/2} F_y^{-3}}$$

F_y^{-3} ve F_y^3 birbirlerini iptal ederler ve sonuc:

$$\kappa = \frac{F_y^2 F_{xx} - 2F_{xy}F_xF_y + F_x^2 F_{yy}}{(F_y^2 + F_x^2)^{3/2}} \quad (5) \tag{1}$$

Ustteki unlu egim (curvature) formuludur.

Bu egim formulunun diger bir sekli soyledir (F yerine ϕ kullanirsak)

$$\kappa = \triangledown \cdot \frac{\triangledown \phi}{| \triangledown \phi|}$$

Bunun okunus sekli "birim normal gradyanin uzaklasim olcusu (divergence of the unit normal gradient)" seklindedir. Acaba bu formul, (5). formul ile uyumlu mu?

$$\kappa = \nabla \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

$$= \nabla \cdot \frac{(\phi_x, \phi_y)}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}$$

$$= \left(\partial_x \frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right) + \left(\partial_y \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right)$$

$$= \frac{\phi_{xx}}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} - \frac{\phi_x(\phi_x\phi_{xx} + \phi_y\phi_{xy})}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} + \frac{\phi_{yy}}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} - \frac{\phi_y(\phi_x\phi_{xy} + \phi_y\phi_{yy})}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\phi_{xx}(\phi_x^2 + \phi_y^2) - \phi_x(\phi_x\phi_{xx} + \phi_y\phi_{xy}) + \phi_{yy}(\phi_x^2 + \phi_y^2) - \phi_y(\phi_x\phi_{xy} + \phi_y\phi_{yy})}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}}$$

Bu formul bizim (5). formul ile tipatip ayni.

Ustteki islemlerde uzaklasim olcusu (divergence) operatoru $\nabla\cdot$ ile gradyan operatoru ∇ arasindaki farki belirtelim: $\nabla\cdot$ operatoru $F(x, y)$ uzerinde kismi turevlerin toplamini verir, yani bir skalar tek sayi dondurur. Gradyan ise her bir elemani bir kismi tureve tekabul eden bir *vektor* geri getirir.

Python Numpy kodlamasi baglaminda, daha once *Kesit Seviyeleri* yazisinda ayriksal olarak bir `phi` degiskeni icindeki bir fonksiyon uzerinde egimselligi (curvature) soyle hesaplamistik:

```
gradPhiY, gradPhiX = np.gradient(phi)
absGradPhi=np.sqrt(gradPhiX**2+gradPhiY**2)

normGradPhiX=gradPhiX/(absGradPhi+(absGradPhi==0))
normGradPhiY=gradPhiY/(absGradPhi+(absGradPhi==0))

divYnormGradPhiX, divXnormGradPhiX=np.gradient(normGradPhiX)
divYnormGradPhiY, divXnormGradPhiY=np.gradient(normGradPhiY)

K = divXnormGradPhiX + divYnormGradPhiY
```

Bu satirlarin $\nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ ifadesiyle birebir uyum gosterdigini herhalde gorebiliyoruz. Satir 1, $\nabla\phi$ ifadesidir. Satirlar 2-4 $\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ islemini gerceklestiriyor, gradyani onun uzunluguna (magnitude) bolerek onu birim vektoru haline getiriyor. Satirlar 6-7 tekrar sonucun gradyanini bir daha aliyor, ama bu sefer hesapsal kismi turevleri birbiriyle topluyor, boylece uzaklasim olcusu (divergence) hesaplanmis oluyor. Tum bu islemlerin sonucu egimsellik κ oluyor.

Dikkat edilirse Python kodundaki K yani κ, N x N boyutlu bir matristir, bu mantikli cunku κ hesabi icin kullandigimiz F_x, F_y gibi turevler aslinda $F_x(x,y)$, $F_y(x,y)$ formullerine sahipler, yani her x,y kombinasyonu icin farkli bir sonuc dondurebilirler. Bu sebeple K yani κ ϕ fonksiyonunun her x,y noktasi icin tanimlidir.

Bazen literaturde $\nabla \cdot$ yerine $div(..)$ kullanildigini gorebilirsiniz, bu operatorlerin ikisi de aynidir.

–

Kaynaklar

[1] Courant, Introduction to Calculus and Analysis Volume 2, sf. 223-232

[2] Wolfram - http://mathworld.wolfram.com/Curvature.html

[3] Bu arada o karmasik formul yerine yaklasiksal olarak hesaplama sirasinda sadece f'' kullanmak ta mumkun [4]

[4] Strang, G. Computational Science and Engineering, sf. Introduction bolumu