

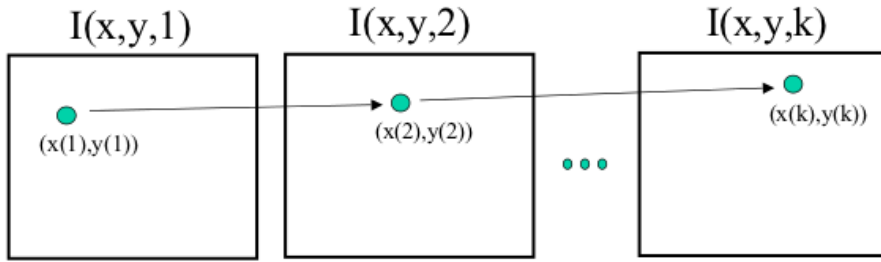
## Piksel Takibi, Optik Akis, Lucas Kanade Algoritması

Hareket halindeki bir kameranın aldığı görüntülerdeki herhangi bir pikseli nasıl takip ederiz?

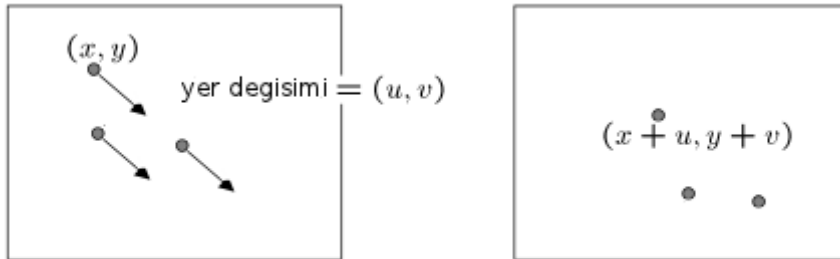
Matematiksel olarak temsil etmek gerekirse, zamana göre değişen 2 boyutlu görüntüyü bir fonksiyon olarak düşünelim, ki bu fonksiyonun değerleri ayrışsal olarak, imajın ta kendisi. Bir  $I(x(t), y(t), t)$  fonksiyonu piksel değerlerini veriyor. Bu fonksiyonda  $x, y$  ekran koordinatlarına tekabül ediyor,  $t$  ise zaman, 1, 2, .. gibi değerleri indeks değerleri var, mesela  $I(100, 200, 1)$ , bize 1. video karesindeki  $x = 100, y = 200$  koordinatlarındaki piksel değerini verecek.

$x, y$  değişkenleri parametrize edildi, bir noktayı takip etmek istiyoruz çünkü, ve  $t$ 'ye göre bu takip edilen noktanın  $x, y$  koordinatları belli bir hızla değişiyor.

Su faraziye yapılarak takip problemimizi kolaylaştırabiliriz. Diyelim ki takip edilen bir nokta, görüldüğü her karede aynı piksel rengindedir. Bu çok sıradışı bir faraziye değil, resim karelerinden bir araba geçiyor mesela, ve bu arabanın üzerindeki piksellerin renkleri, en azından iki kare arasında değişmiyor. Isık seviyesi, gölgede olma, vs. gibi durumlarda biraz değişebilir, fakat basitleştirme amacıyla bu faraziye geçerlidir.



Bir diğer faraziye, kameralar hareket ettiklerinde alınan iki görüntü arasındaki tüm piksellerin yer değişimi genellikle aynı yönde olmasıdır. Bu değişim yönünü  $\langle u, v \rangle$  vektörü olarak görebiliriz, ve bu değişkenler iki görüntü arasındaki değişimde tüm pikseller için aynı olacaktır. Bu da normal, kamerayı alıp mesela sağa doğru hareket ettiriyoruz, ve görüntüdeki tüm pikseller sola doğru gidiyorlar.



Tüm bunları modelimizde nasıl kullanırız?

Takip edilen nokta her karede aynı renkte ise, şu ifade doğru demektir

$$I(x(t), y(t), t) = \text{sabit}$$

Eger bu fonksiyonun zamana gore turevini alirsak

$$\frac{d I(x(t), y(t), t)}{dt} = 0$$

sonucu gelir. Esitligin sagi sifir, cunku bir sabitin turevini aldik. Sol tarafa Zincirleme Kanununu uygularsak,

$$\frac{\partial I}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial I}{\partial t} = 0$$

Bu formilde  $dx/dt$  ve  $dy/dt$ , hareket halindeki (zaman gecerken) noktanin sonsuz kucuklukteki yer degimi. Ayriksal baglamda arka arkaya iki kare icindeki yer degisimi. O zaman,

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} = u, v$$

Alttakiler ise mesafesel (spatial) gradyanlardir, bunlarin nasil hesaplanacagini cok iyi biliyoruz!

$$\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}$$

Alttaki ise resim karelerinin zamana gore turevidir.

$$\frac{\partial I}{\partial t}$$

Daha derli toplu olarak gosterme gerekirse ana formül nihai olarak soyle

$$I_x u + I_y v + I_t = 0$$

ya da

$$\nabla I \cdot \langle u, v \rangle = -I_t$$

Simdi  $u, v$ 'nin hesaplanmasina geelim. Ustteki formulu bir veri noktası için yazmak yeterli degil. Ama bu formulu hem takip ettigimiz, hem de onun etrafındaki pikseller için yazarsak (onların yer degisimi de aynı degil mi?), ve bu sistemi cozersek, sonuca varabiliriz.

İki tane bilinmeyenimiz var, ama böylece pek çok formül elde ediyoruz. Veriler gürültülü olduğu için, aslında bilinmeyenden ”daha fazla” formül elde etmek iyi, bu tür denklem sistemlerine ”çok eşitliğe sahip (overdetermined)” denir, ve böyle tür sistemler En Az Kareler (Least Squares) ile çözülür. Tüm bunları biraraya koyunca su ortaya çıkar.

$$\begin{bmatrix} I_x(p_1) & I_y(p_1) \\ I_x(p_2) & I_y(p_1) \\ \vdots & \vdots \\ I_x(p_k) & I_y(p_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_t(p_1) \\ I_t(p_2) \\ \vdots \\ I_t(p_k) \end{bmatrix}$$

Gradyanların belli noktalarda hesaplandığını unutmayalım, o sebeple  $p_1, p_2$  gibi piksel noktalarını bu fonksiyonlara geçiriyoruz.

Bu sistemi

$$A d = b$$

olarak gösterebiliriz, ki  $d = \langle u, v \rangle$ . Sol tarafı  $A^T$  ile çarpalım

$$A^T A d = A^T b$$

Eğer  $A^T A$ ’nin matris tersini iki tarafla çarparsak,  $d$  yalnız kalır, ve sonuç elde edilir.

Bu denklemi Python Numpy’da `pinv` kullanarak çözeriz.

Test için üç tane resim kullandık, bu resimlerden `flow1-bw-0.png` başlangıç resmi, bu resmin ortasındaki objeleri GIMP kullanarak elle kopyaladık, bir üst sağ capraza doğru, bir alt sol capraza doğru, ve iki yeni resim elde ettik (`upright.png`, `dleft.png`). Takip edilen nokta gri dörtgenin alt sol köşesinde. Lucas Kanade algoritması bu noktayı takip ederek, yeşil ile işaretledi.

```
import scipy.signal as si
from PIL import Image

def gauss_kern():
    h1 = 15
    h2 = 15
    x, y = np.mgrid[0:h2, 0:h1]
    x = x-h2/2
    y = y-h1/2
    sigma = 1.5
    g = np.exp( -( x**2 + y**2 ) / (2*sigma**2) );
    return g / g.sum()
```

```

def deriv(im1, im2):
    g = gauss_kern()
    Img_smooth = si.convolve(im1,g,mode='same')
    fx,fy=np.gradient(Img_smooth)
    ft = si.convolve2d(im1, 0.25 * np.ones((2,2))) + \
        si.convolve2d(im2, -0.25 * np.ones((2,2)))

    fx = fx[0:fx.shape[0]-1, 0:fx.shape[1]-1]
    fy = fy[0:fy.shape[0]-1, 0:fy.shape[1]-1];
    ft = ft[0:ft.shape[0]-1, 0:ft.shape[1]-1];
    return fx, fy, ft

import warnings
warnings.simplefilter("ignore", np.ComplexWarning)

im1 = np.asarray(Image.open('flow1-bw-0.png'))
im2 = np.asarray(Image.open("upright.png"))
fx, fy, ft = deriv(im1, im2)
print fx[:5]

[[ 34.37477011  45.94010835  51.877951    ...,  53.83264716  51.877951
   45.94010835]
 [ 26.01168277  34.76327322  39.25648957 ...,  40.73562489  39.25648957
   34.76327322]
 [ 11.72919465  15.67546405  17.70154632 ...,  18.36851839  17.70154632
   15.67546405]
 [  3.51803959   4.70167857   5.30937909 ...,   5.50942984   5.30937909
   4.70167857]
 [  0.6961225    0.93033183   1.05057892 ...,   1.09016341   1.05057892
   0.93033183]]

import scipy.signal as si
from PIL import Image
import numpy.linalg as lin

def lk(im1, im2, i, j, window_size) :
    fx, fy, ft = deriv(im1, im2)
    halfWindow = np.floor(window_size/2)
    curFx = fx[i-halfWindow-1:i+halfWindow,
               j-halfWindow-1:j+halfWindow]
    curFy = fy[i-halfWindow-1:i+halfWindow,
               j-halfWindow-1:j+halfWindow]
    curFt = ft[i-halfWindow-1:i+halfWindow,
               j-halfWindow-1:j+halfWindow]
    curFx = curFx.T
    curFy = curFy.T

```

```

curFt = curFt.T

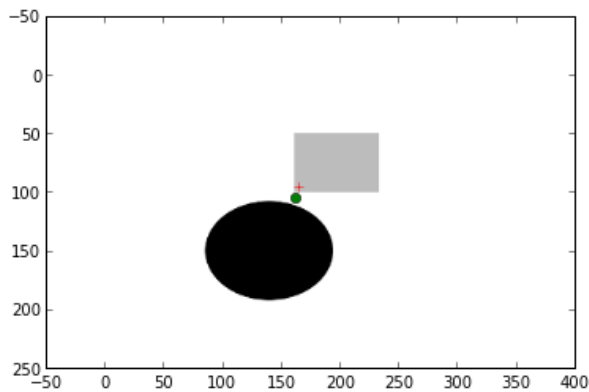
curFx = curFx.flatten(order='F')
curFy = curFy.flatten(order='F')
curFt = -curFt.flatten(order='F')

A = np.vstack((curFx, curFy)).T
U = np.dot(np.dot(lin.pinv(np.dot(A.T,A)),A.T),curFt)
return U[0], U[1]

def test(image1,image2,output):
    x=165
    y=95
    win=50
    im1 = np.asarray(Image.open(image1))
    im2 = np.asarray(Image.open(image2))
    u, v = lk(im1, im2, x, y, win)
    plt.imshow(im1, cmap='gray')
    plt.hold(True)
    plt.plot(x,y,'+r');
    # 3 ile carptik cunku vektor degisimi iyi hesaplandi ama
    # grafikleme icin cok ufakti, ikinci yesil nokta iyi gozuksun
    # diye onu biraz buyuttuk
    plt.plot(x+u*3,y+v*3,'og')
    plt.savefig(output)

test('flow1-bw-0.png', 'dleft.png', 'lk_1.png')

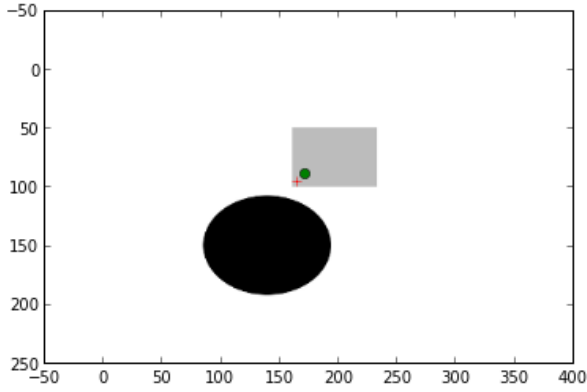
```



```

test('flow1-bw-0.png', 'upright.png', 'lk_2.png')

```



Bu matematiksel modele alternatif bir bakis soyle olabilir. Iki imaj karesi icinde birincisine  $I(x, y)$  ikincisine  $H(x, y)$  diyelim, burada  $t$  uzerinden parametrizasyon olmasin;  $x, y$  pikselinin  $H$  icinde  $u, v$  kadar yer degisiminden sonra, bu noktalarin  $I$ 'de geldiği yerdeki grilik degerinin ayni oldugunu (yine) farzediyoruz. Sonra  $I(x + u, y + v)$ 'nin birinci dereceden Taylor Acilimini yapıyoruz,

$$I(x + u, y + v) = I(x, y) + \frac{\partial I}{\partial x}u + \frac{\partial I}{\partial y}v + \dots$$

ya da

$$I(x + u, y + v) \approx I(x, y) + \frac{\partial I}{\partial x}u + \frac{\partial I}{\partial y}v$$

Grilik ayniligini ise soyle belirtebiliriz

$$I(x + u, y + v) - H(x, y) = 0$$

Taylor acilini ustteki formülde  $I$  yerine gecirelim

$$I(x, y) + \frac{\partial I}{\partial x}u + \frac{\partial I}{\partial y}v - H(x, y) = 0$$

$H$ 'in yerini degistirelim

$$I(x, y) - H(x, y) + I_x u + I_y v = 0$$

Su ifade  $I(x, y) - H(x, y)$  nedir? Bunlar iki imajın, sonrası ve öncesi arasındaki fark değil midir? O zaman bu hesabi imajın zamana göre alınmış türevi olarak görebiliriz, yani  $I_t = I(x, y) - H(x, y)$ . Yerine koyalım

$$I_t + I_x u + I_y v = 0$$

$$I_x u + I_y v = -I_t$$

Boylece ayni denkleme erismis olduk. Bu aslinda normal, birinci dereceden Taylor acilimi ile tam diferansiyel denklemi (ve Zincirleme Kanununu) birbiriyle cok yakindan alakasi var.

#### Ufak Piksel Degisimleri

Konu hakkında bir nokta daha su; Lucas-Kanade yontemi 1. derece Taylor acilimi kulladigi icin ufak piksel degisimleri icin gecerlidir, cunku Taylor acilimi yerel bir noktaya cok yakin bolgelerde bir fonksiyona yakin sonuclar verir. Bu da aklimizda bulunsun.

#### Kaynaklar

R. Collins Ders Notlari, [www.cse.psu.edu/~rcollins/CSE486](http://www.cse.psu.edu/~rcollins/CSE486)

Khurram Hassan-Shafique, CAP 5415 Lecture Notes, Spring 2003

<http://web.yonsei.ac.kr/jksuhr/articles/Kanade-Lucas-Tomasi%20Tracker.pdf>