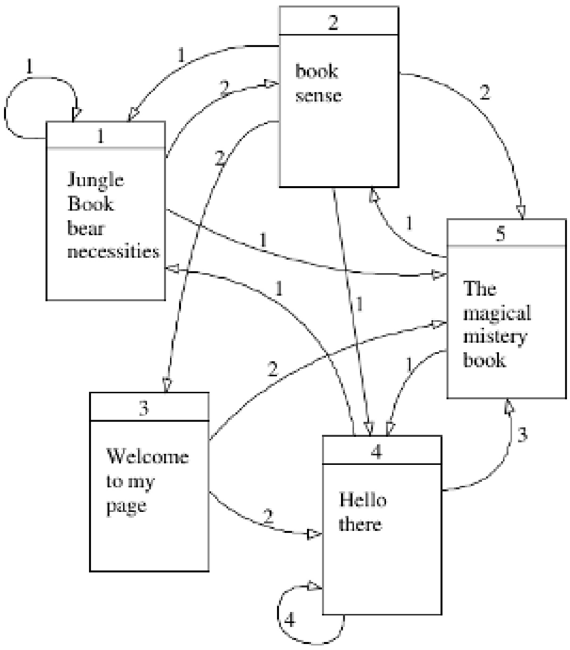
Google Nasil Isler?

Google arama motoruna bir kelime yazdigimizda geri gelen sonuclar nasil kararlastirilir? Ilk akla gelen yontem tabii ki Web'deki tum sayfalarin (milyarlarca sayfa) sayfalar uzerindeki kelimelerin o sayfa ile iliskilendirilmesi ve arama yapilinca kelimeye gore sayfa geri getirilmesi. Mesela alttaki ornekte "book (kitap)" yazinca geriye 1., 2. ve 5. sayfalar geri gelecek. Fakat hangi sirada? Bu sayfalardan hangisi digerlerinden daha onemli?



Google'in arama motorlarina getirdigi en buyuk yeniliklerden biri PageRank algoritmasidir. Bu algoritmanin temelinde daha fazla referans edilen sayfalar daha ustte cikmasi yatar. Hatta o referans eden sayfalarin kendilerine daha fazla referans var ise bu etki ta en sondaki sayfaya kadar yansitilir, hatta bu zincir bastan sona her seviyede hesaplanabilir. Peki bu nasil gerceklestirilir?

PageRank Web sayfalarini bir Markov Zincir olarak gorur. Markov Zincirleri seri halindeki $X_n, n = 0, 1, 2, ..$ rasgele degiskenini modeller ve bu degiskenler belli sayidaki konumlarin birinde olabilirler. Mesela konumlari bir dogal sayi ile ilintilendirirsek $X_n = i$ olabilir ki $i = \{0, 1, ..\}$ diye kabul edelim.

Markov Zincirlerinde (MZ) i konumundan j konumuna gecis olasiligini, P_{ij}, biliriz ve bu $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ olarak acilabilir. Acilimdan gorulecegi uzere bir MZ sonraki adima gecis olasiligi icin sadece bir onceki adima bakar. Bu tur once/sonra yapisindaki iki boyutlu hal, cok rahat bir sekilde matrisina cevirilebilir / gosterilebilir. Onceki konum satirlar, sonraki konum kolonlar olarak betimlenir mesela.

Ornek

Bir sonraki gunde yagmur yagmayacagini bir MZ olarak tasarlayalim. Bir sonraki gunde yagmur yagmayacagini sadece bugun etkiliyor olsun. Eger bugun yagmur yagiyorsa yarin yagmur yagmasi 0.7, eger bugun yagmiyor ise yarin yagmasi 0.4. MZ soyle

$$P = \left[\begin{array}{cc} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{array}\right]$$

Gecis olasiliklarindan bahsettigimize gore ve elimizde sinirli / belli sayida konum var ise, bir MZ'nin her satirindaki olasiliklarin toplami tabii ki 1'e esit olmalidir.

MZ'lerin ilginc bir ozelligi n adim sonra i,j gecisinin P^n hesabiyla yapilabilmesidir. Yani P'yi n defa kendisiyle carpip i,j kordinatina bakarsak n adim sonrasini rahatca gorebiliriz. Bunun ispatini burada vermeyecegiz.

Mesela ustteki ornekte, eger bugun yagmur yagiyorsa 4 gun sonra yagmur yagma olasiligi nedir?

```
import numpy.linalg as lin
P = np.array([[0.7,0.3],[0.4,0.6]])
P4 = lin.matrix_power(P,4)
print P4
```

```
[[ 0.5749  0.4251]
 [ 0.5668  0.4332]]
```

Aradigimiz gecis icin kordinat 0,0'a bakiyoruz ve sonuc 0.5749. Numpy `matrix_power` bir matrisi istedigimiz kadar kendisiyle carpmamizi sagliyor.

Duragan Dagilim (Stationary Distribution)

Eger yagmur ornegindeki matrisi carpmaya devam edersek, mesela 8 kere kendisiyle carpsak sonuc ne olurdu?

```
import numpy.linalg as lin
P = np.array([[0.7,0.3],[0.4,0.6]])
P8 = lin.matrix_power(P,8)
print P8
```

```
[[ 0.57145669  0.42854331]
 [ 0.57139108  0.42860892]]
```

Dikkat edilirse, her satir bir deger yaklasmaya basladi. Bu deger MZ'nin duragan dagilimidir, belli kosullara uyan her MZ'nin boyle bir duragan dagilimi vardir. Bu kosullar MZ'nin periyodik olmayan (aperiodic) ve tekrar eden (recurrent) olmasidir. Bu sartlar cok "ozel" sartlar degildir aslinda, daha cok "normal" bir MZ'yi tarif ediyor diyebiliriz. Tum konumlari tekrar eden yapmak kolaydir, MZ tek bagli (singly connected) hale getirilir, yani her konumdan her diger konuma bir gecis olur, ve periyodik olmamasi icin ise MZ'ye olmadigi zamanlarda bir konumdan kendisine gecis saglanir (az bir gurultu uzerinden).

Nihayetinde duraganlik su denkleme sebebiyet verir,

$$\pi = \pi P$$

Burada duragan dagilim π'dir. Bu denklem tanidik geliyor mu? Devrigini alarak soyle gosterelim, belki daha iyi taninir,

$$P^T \pi^T = \pi^T$$

Bir sey daha ekleyelim,

$$P^T \pi^T = 1 \cdot \pi^T$$

Bu ozdeger/vektor formuna benzemiyor mu? Evet! Bu form

$$Ax = \lambda x$$

MZ denklemi sunu soyluyor, 1 degerindeki ozdegere ait ozvektor bir MZ'nin duragan dagilimidir! Bu arada, MZ gecis matrisi P'nin en buyuk ozdegerinin her zaman 1 oldugunu biliyoruz. Bu durumda en buyuk ozdegere ait ozvektoru hesaplamak yeterli olacaktir. Bunu yapmayi zaten *Lineer Cebir Ders 21*'de ogrenmistik, ust metot (power method) sayesinde bu hesap kolayca yapilabiliyor.

Simdi en basktaki Web sayfalarina ait gecisleri yazalim,

```
P = [[1./4, 2./4, 0, 0, 1./4],
     [1./6, 0, 2./6, 1./6, 2./6],
     [0, 0, 0, 2./4, 2./4],
     [1./8, 0, 0, 4./8, 3./8],
     [0, 1./2, 0, 1./2, 0]]

P = np.array(P)
print P
```

```
[[ 0.25         0.5          0.           0.           0.25       ]
 [ 0.16666667   0.           0.33333333   0.16666667   0.33333333]
 [ 0.           0.           0.           0.5          0.5        ]
 [ 0.125        0.           0.           0.5          0.375      ]
 [ 0.           0.5          0.           0.5          0.         ]]
```

Simdi ust metotu kullanarak duragan dagilimi hesaplayalim. Herhangi bir baslangic vektorunu P ile 20 kere carpmak yeterli olur.

```
import numpy.linalg as lin
x=np.array([.5, .3, .1, .1, 0]) # herhangi bir vektor
for i in range(20):
    x = np.dot(x,P)
print 'pi = ', x
```

```
pi =  [ 0.10526316  0.18421053  0.06140351  0.38596491  0.2631579 ]
```

Not: Aslinda cebirsel olarak P'yi 20 kere kendisiyle carpmak ve sonucu baslangic vektoru ile bir kere carpmak ta dusunulebilirdi. Fakat 20 kere vektor / matris carpimlari yapmak, 20 kere matris / matris carpimi yapmaktan daha verimli olacaktir. Buyuk Veri ortami icin de bu soylenebilir.

Eger kutuphane cagrisi kullanmak gerekirse,

```
import numpy.linalg as lin
evals,evec = lin.eig(P.T)
pi =  evec[:,0] / np.sum(evec[:,0])
print np.abs(pi)
```

```
[ 0.10526316  0.18421053  0.06140351  0.38596491  0.26315789]
```

Sonuc gosteriyor ki "book" yazdigizda Google bize 5. sayfayi en basta olacak sekilde sonuc dondurmeli, cunku onun duragan dagilimi 1,2,5 sayfalarinin arasinda en yuksek.

Duragan Dagilima Bakis

MZ ve duragan dagilimin PageRank'le alakasini bir daha dusunelim. MZ ile n adim sonrasini hesaplayabiliyoruz, duragan dagilim ise sonsuz adim sonrasini ifade ediyor. Ve bu dagilim, bir anlamda, sonsuz yapilan adimlar sirasinda *en fazla hangi konumlarda* zaman gecirilecegini gosteriyor. Konum yerine sayfa dersek duragan dagilimin niye en onemli sayfalari belirlemek icin onemli oldugunu anlariz.

Kullanici herhangi bir sayfada iken hangi diger sayfalara gidecegi o sayfa uzerinde baglantilar uzerinden anlasilir, PageRank bu baglantinin mevcudiyetine bakar sadece, o mevcudiyet uzerinden bir gecis olasiligi hesaplar, ve bu olasiliga gore (raslantisal sekilde) baglantinin takip edilecegi dusunulur. Bu arada cogunlukla sayfalar arasindaki baglantilarin agirligi 1 olacaktir, fakat ornek amacli 2,3 gibi sayilar da kullaniliyor.

Rasgele Sayfa Gecisi

Simdi π^T yerine p, P yerine N kullanalim, PageRank ozyineli algoritmasi

$$p = N^T p$$

olarak gosterilebilir. Google veri temsili uzerinde bazi ekler yapmaktadir, mesela kullanicinin hicbir baglanti takip etmeyip tarayiciya direk URL girerek baska bir sayfaya ziplamasi (teleporting) bir sekilde temsil edilmelidir. Ayrica hic disa baglanti vermeyen sayfalar (olu noktalar) hesaba katilmalidir.

Bu her iki durum icin formul su sekilde ikiye ayirilir,

$$p = (1-d)N^T p + dN_f^T p$$

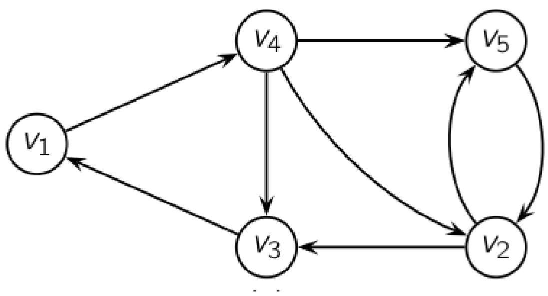
$$= ((1-d)N^T + dN_f^T)p$$

$$= M^T p$$

ki,

$$M = (1-d)N^T + dN_f^T$$

olacaktir. N_f bir normalize edilmis "ziplama" matrisidir, yani her sayfadan her diger sayfaya bir baglanti "varmis gibi" yapar, mesela 5x5 boyutunda tum ogeleri 0.20 olacaktir. d bir agirlik sabitidir, Google'in bunu 0.85 olarak tanimladigi duyulmustur, ve gercek baglanti matrisi ve rasgele ziplama matrisi arasinda bir agirlik tanimlar, her ikisinde de birazcik alarak (daha cok ana N'den tabii) niahi matrisi olusturur. Ornek olarak su grafige bakalim,




```
N = [[0, 0, 0, 1., 0],
     [0, 0, 1./2, 0, 1./2],
     [1, 0, 0, 0, 0],
     [0, 1./3, 1./3, 0, 1./3],
     [0, 1, 0, 0, 0]]

N = np.array(N)

Nf = 0.20 * np.ones((5,5))
d = 0.9
M = d*N + (1-d)*Nf
x=np.array([.5, .3, .1, .1, 0]) # herhangi bir vektor
for i in range(20):
    x = np.dot(x,M)
print 'result = ', x
```

```
result =  [ 0.18887406  0.24587067  0.18763576  0.18998375  0.18763576]
```

Sonuca gore v_2 en yuksek PageRank degerine sahip.

[1] Murphy, K., CS340: Machine Learning Lecture Notes, www.ugrad.cs.ubc.ca/~cs340

[2] Ross, S., Introduction to Probability Models, 8th Edition

[3] Zaki, Maira, Fundamentals of Data Mining Algorithms