MIT OCW ODE - Ders 13

Bugunku dersimizin hedefi ozel cozumler bulmak. Formu yazalim

$$y'' + Ay' + By = f(x)$$

Ve genel cozum $y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$ formunda olacak.

Gercek su ki esitligin sag tarafina yazilabilecek her fonksiyon o kadar ilginc degil. Ilginc olanlardan bir tanesi ustel (exponential) fonksiyonlar, yani e^{ax} formundaki fonksiyonlar, ki cogunlukla $a < 0$ kullanilir. Diger bazi ilginc olanlar

$$sin \omega x$$

$$cos \omega x$$

gibi salinim ornekleri, ki bunlar da elektriksel devrem baglaminda alternatif AC/DC akimi temsil ediyorlar.

Ya da "gittikce yokolan salinim" ilginc, Burada

$$e^{ax} sin \omega x$$

$$e^{ax} cos \omega x$$

gibi ornekler var. Ama aslinda ustteki tum ilginc fonksiyonlar genel tek bir forma baglanabilir, bu form icin ustel sayinin kompleks olmasina izin vermek gerekiyor. Form soyle

$$e^{(a+i\omega)x}$$

$\omega = 0$ ise o zaman e^{ax} elde ederim. $a = 0$ ise $sin \omega x$, $cos \omega x$ elde ederim. Ikisi de sifir degilse o zaman gittikce yokolan salimi elde ederim.

Bundan sonra habire $a + i\omega$ yazmamak icin onun yerine α kullanacagiz, α'yi gorunce onun bir kompleks sayi oldugunu anlayin. Yani esitligin sag tarafi $e^{\alpha x}$

olacak.

Birazdan gorecegimiz uzere, bu tur bir girdi kullanmak aslinda kolaylikla cozum sagliyor. Yerine gecirme (substitution) kuralini kullanarak cozume erismek cok kolay.

$y'' + Ay' + By = f(x)$

Polinom operator kullanirsak

$(D^2 + AD + B)y = f(x)$

Parantez icindekine $p(D)$ diyelim. Ve su formulu ortaya atalim.

$p(D)e^{\alpha x} = p(\alpha)e^{\alpha x}$

Ispat

$(D^2 + AD + B)e^{\alpha x}$

$= D^2 e^{\alpha x} + ADe^{\alpha x} + Be^{\alpha x}$

$= \alpha^2 e^{\alpha x} + A\alpha e^{\alpha x} + Be^{\alpha x}$

$= e^{\alpha x}(\alpha^2 + A\alpha + B)$

Parentez icinin $p(\alpha)$ oldugunu goruyoruz.

$= e^{\alpha x} p(\alpha)$

Simdi bunlari yeni bir teori icin kullanalim

Ustel Girdi Teorisi

ODE

$y'' + Ay' + By = e^{\alpha x}$

yani

$p(D)y = e^{\alpha x}$

icin ozel cozum sudur

$$y_p = \frac{e^{\alpha x}}{p(\alpha)}$$

Bu teori bu dersin en onemli teorilerinden biri. Bu dersteki pek cok kavrami yanyana getiriyor.

Ispat

Ispatlamak icin cozum y_p'yi yerine gecirelim ve alttaki ifadenin dogru olup olmayacagina bakalim.

$$p(D)y_p = e^{\alpha x}$$

$$p(D)\frac{e^{\alpha x}}{p(\alpha)} = \frac{p(\alpha)e^{\alpha x}}{p(\alpha)}$$

$$= e^{\alpha x}$$

Peki ya $p(\alpha) = 0$ olsaydi? Bu problemde olmadigini farzediyoruz.