

## Dalga Denklemini Turetmek

PDE'lerin ortaya cikabilecegi durumlardan biri, ayriksal parcaciklardan olusan bir sistemin limite gittigi andir. Bu tur sartlarda ODE'lerden olusan bir sistem limite giderken bir PDE ortaya cikartabiliyor. Sureklilik Mekanigin-den (Continuum Mechanics) bir ornek verecegiz yani.

Sistem ayriksal baslayacak, sureklilik limitine gidecek. Mesela sivilar mekaniginde (fluid mechanics) Euler denklemi, Navier-Stokes denklemleri sivi sisteminin (su gibi mesela) sureklilik limitidirler. Bu denklemler sivi icindeki ufak par-caciklari tarif etmezler, sistemin butunune bakarlar.

Hepimiz Newton Kanunu biliyoruz (ki bu kanun bu derste ihtiyacimiz olan yegane fizik bilgisi)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

Formul ne diyor? Kutle carpi ivme esittir kuvvet. Gayet basit.

Diyelim ki elimizde  $N$  tane tane parcacik var,  $i = 1, \dots, N$ , ve bu parcacik-lar birbirleriyle etkilesim halindeler, aralarinda bir tur cekim var belki, ya da baska bir kuvvet. O zaman her parcacik icin ayri ayri hareket kanunu isleyecek. Ve  $i$ 'inci parcacik üzerinde bir kuvvet var, ve bu kuvvet sistemdeki tum diger degiskenlerle bir sekilde bagimli.  $x$  tabii ki pozisyon degiskeni. O zaman

$$m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = F_i(\vec{x})$$

Dikkat edersek,  $F$  fonksiyonuna giren parametre tum parcaciklar, yani o parcacigin hissettigi kuvvet bir sekilde tum diger parcaciklarla alakali.

## Baslangic Sarti

$i$ 'inci parcacigin baslangic konumu

$$x_i(0) = \hat{x}_i$$

Tipik olarak baslangic hizi da verilir

$$\frac{dx_i}{dt}(0) = \hat{v}_i$$

Ustteki bir baslangic deger problemi (initial value problem). Biz bu derste

PDE bazında sınır değerli problemlerle uğraşacağız.

Bu tür başlangıç değer problemleri iyi huyludur, çünkü, mesela bu örnekte 2. derece bir diferansiyel denklem var elimizde, ve bağımlı değişken  $x$  var, ve bize verilen koşulu anlamak için alttaki resme bakalım



Bize verilenler,  $t = 0$  anında  $x_i$  noktasının olduğu yere ek olarak (soldaki nokta), bir de o noktadaki eğim bilgisi. Bu tür bilgi verilince, parçacığın hangi yöne gitmeye meyilli olacağını da görmüş oluyoruz. Sanki bir top ateslenmiş, ve topun ates ettiği anda nerede olduğuna ek olarak topun namusunun gösterdiği yer de bize söyleniyor.

Bu iyi huylu bir problem. Sınır değerli denklemler çok daha karmaşık olabiliyor. Bu arada “sınır koşullu” kelimesindeki “sınır” çoğunlukla bir fiziksel şeye tekabül eder, mesela bir ip vardır, ve ipin “sonunda” yani sınırlarında değerlerin ne olması gerektiği sabitlenir.

Devam edelim. Kurmak istediğimiz model bir tür “gitar teli” modeli.

$y_i = i$ 'inci parçacığın yüksekliği olsun.



Tel üzerinde bir sürü parçacık var, tel iki ucundan sabitlenmiş durumda. Bu problemde yatay hareketle ilgilenmiyoruz, sadece yukarı / aşağı hareketle ilgileniyoruz. Bir tanım daha:

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

Basitleştirme amacıyla bu tanımı yaptık. Tüm parçacıkların arasındaki mesafeyi sabit, ve aynı olarak aldık. Benzer şekilde

$$m_i \equiv m$$

Yani tüm parçacıklar aynı kütleye sahip.

Şimdi Newton Kanununu parçacıklara uygulayalım [1].

$$m \frac{d^2 Y_i}{dt^2} = \tau \left( \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \right) - \tau \left( \frac{Y_i - Y_{i-1}}{\Delta x} \right)$$

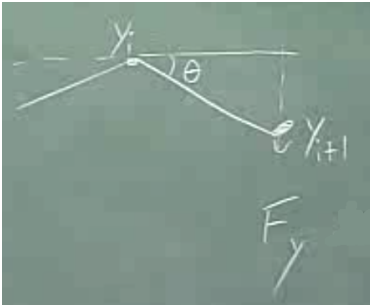
Bununla ne demis olduk?  $i$ 'inci parçacığın hissettiği çekimin, o parçacığın sağında ve solunda bağlı olduğu diğer parçacıkla baginin ipteki eğimi ile orantılı olduğunu söylemiş olduk.

$\tau$  her tel için farklı olacak bir gerginlik sabiti, ama belli bir telde, her parçacık için aynı.



Üstteki formül aslında yerel türevin “ucuz” bir yaklaşıksallaması.

Gerginlikle kurulan alaka akla yatkın olmalı, düşünersek ipteki parçacık ne kadar yuksekte olursa üzerinde o kadar güç hissedirdi, yanındaki parçacıklar(lar) tarafından aşağı çekilirdi, ne kadar altta ise o kadar az güç hissedirdi. Tabii “diğer parçacıklara göre” yukarıda ya da aşağıda olmanın ölçüsü de iki parçacık arasındaki ipin eğimi.



Diger bir acidan yaklasirsak

$$F_y \equiv \tau \sin \theta$$

da diyebilirdik. Sadece sin kullandik cunku daha once belirttigimiz gibi, sadece dikey hareketlere bakiyoruz, yatay hareketlerle ilgilenmiyoruz (o yuzden cos yok).

Bir yaklasiksallama yapabiliriz simdi, eger  $\theta \ll 1$  ise, yani aci 1 sayisindan cok kucuk ise,  $\sin \theta \approx \tan \theta$  sayilabilir, bu sonuc Taylor Serileri ile alakali ve  $\tan$  fonksiyonu,  $\sin/\cos$  oldugu icin ve sifira yakin degerlerde bolen  $\theta$ 'nin sifira yakindigindan cos uzerinden hep 1'e yakin olacagi icin,  $\tan$  bir nevi  $\sin$  sayilabilir. Peki bu problemde  $\tan \theta$  nasil hesaplanır?

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \end{aligned}$$

Yani yine ayni yere gelmis olduk.

Bu model bir “en yakin komsu” modelidir, her parcacik yakinindaki parcaciktan etkileniyor.

Ana formulu su sekilde tekrar organize ederek yazalim

$$\frac{d^2 Y_i}{dt^2} = \tau \frac{\Delta x}{m} \left[ \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{\Delta x^2} \right]$$

Koseli parantez icindeki ifade Calculus'ta 2. turevin ayriksal formdaki yaklasiksallamasi degil mi?

Ayriksal modelimiz boyle. Simdi sureklilik limitine gecmek istiyorsak, mesela sonsuz sayida parcacik oldugu bir duruma gecmek isteyebiliriz,  $\lim_{N \rightarrow \infty}$ , elimizde sonlu / belli miktarda bir tel var, bu durumda sonsuz sayida parcacik demek bu parcaciklari arasindaki mesafenin sifira gitmesi demektir, o zaman  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ .

Formul icin bunun anlami nedir?  $\Delta x$  ve  $m$  arasindaki oran sonlu (finite) bir sayiya yaklasacak demektir, ki bu sayiya yogunluk diyebiliriz. Oran niye sifira gitmiyor? Sureklilik sistemlerin kullanilan bir numara bu,

$$\rho = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m}{\Delta x}$$

$\Delta x$ 'in asagi indigini dusunuyoruz, ama olabilecek cok ufak bir hacim hayal ederek mesela molekul boyutundan daha fazla asagi inmeyecegini soyluyoruz,  $m$  ayni sekilde kuculuyor, ve oran bize bir yogunluk hesabi veriyor.

Taylor Serileri hakkında hizli bir ders

$$Y_{i+1} = Y(x_i + \Delta x)$$

Eger  $\Delta x$  cok kucuk ise

$$= \underbrace{Y(x_i)}_{Y_i} + \Delta x \frac{dY}{dx}|_{x_i} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{d^2Y}{dx^2}|_{x_i} + O(\Delta x^3)$$

Daha kısa bir sekilde yazalim

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta x Y'_i + \frac{\Delta x^2}{2} Y''_i + \dots$$

Ayni seyi  $Y_{i-1}$  icin yapabiliriz

$$Y_{i-1} = Y_i - \Delta x Y'_i + \frac{\Delta x^2}{2} Y''_i + \dots$$

Not: Esitligin sagindaki eksi, arti isaretlerinin nereden geldigini merak ediyorsak, Hesapsal Bilim 1 Ders 2 notlarinda  $u(x - h)$  acilimina bakabiliriz.

Son iki formulu toplarsak

$$Y_{i+1} + Y_{i-1} = 2Y_i + \Delta x^2 Y''_i + O(\Delta x^4)$$

O zaman 2. turevin  $x_i$ 'daki yaklasiksallamasi

$$Y''_i = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

O zaman ana formilde

$$\frac{d^2Y_i}{dt^2} = \tau \frac{\Delta x}{m} \left[ \underbrace{\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{\Delta x^2}}_{\rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \right]$$

Yani  $\Delta x \rightarrow 0$  iken koseli parantez ici  $\partial^2 y / \partial x^2$ 'e gider. Niye kısmi tureve gider? Cunku ayriksal degisimi sadece  $x$  uzerinde yaptik, fakat  $Y$  icinde ayni zamanda  $t$  de var. Notasyon olarak ODE dili kullanmamiz kafa karistirmasin, goruntu basit olsun diye bunu yaptik. Ama degisimin  $x$  te olmasi sebebiyle

turev kısmi turev oldu.

O zaman bu sistemin süreklilik limiti,  $\Delta x \rightarrow 0$  iken

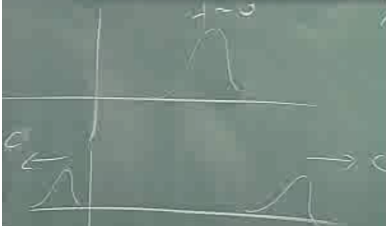
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

olacaktır. Bu denklem fizikte iyi bilinen dalga denklemdir. İnsanlar cogunlukla

$$c^2 = \frac{\tau}{\rho}$$

sekinde yazarlar ve  $c$  boylece “dalga hizi” olarak kullanılabilir.

Eger teli bir noktasinda titrettigimiz dusunursek, ve telin sonlu degil sonsuz oldugunu dusunelim, o zaman “hareket eden dalgalar (traveling waves)” fenomenini goruruz. Altteki resimde  $t = 0$  aninda bir tepe noktasi var (tele vurduk), ve ikinci resimde iki tane tepe noktasi saga ve sola esit sekilde hareket ediyorlar.



PDE’ler ayriksal sistemlerin, ODE’lerin, süreklilik limitinde dogal olarak ortaya cikarlar. Bu tur yaklasiksallamalari ben arastirmalarimda surekli kullaniyorum [hoca uygulamali matematikci], akiskanlik mekaniginde mesela, bir sivinin, molekulun kisimlarini aliyoruz, ve kisimlar birbirleri ile etkilesimde oluyorlar. Ya da mesela yogunluk degiskenini, kutleyi bir surekli fonksiyon haline getiririz, ve parcacik hizi yerine sivinin tamamının hizina bakariz. Yani bu cok kullanılan bir teknik. Cogunlukla ayriksal bir ag yapisi icin analitik bir denklem bulmak cok zordur, o sebeple süreklilik yaklasiksallamasi kullanilir zaten. Belki ustteki problem icin alternatif cok kotu olmayabilirdi, mesela burada ODE’leri matris formunda yazarak ta cozume gidebilirdik, bu cok zor olmazdi, fakat cogu zaman bunu yapmak hakikaten zor olabiliyor.

Niye sistemi analitik olarak gormek istiyoruz? Cunku o zaman formulasyonu istedigimiz gibi manipule ederek, analitik sekilde istedigimiz yoldan ilerleye-

biliyoruz.

\* \* \*

Bir PDE kategorisinden bahsedelim, bu tur PDE'ler en cok kullandigim PDE'lerden, lineer 1. derece denklemler. Ve bu arada “karakteristikler” kavramindan bahsedecegiz.

1. Derece, Lineer PDE, 2 Bagimsiz Degisken

$$u = u(x, y)$$

PDE

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y)$$

Operator olarak

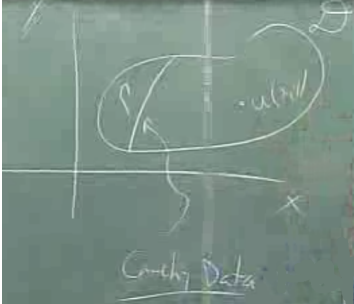
$$\mathcal{L}u = f$$

$$\mathcal{L} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}$$

Karakteristik kavramindan birazdan istifade edecegiz, ama simdi bu tur denklemleri kaba kuvvet kullanarak, “degisken degistirme (change of variables)” yontemi ile nasil cozulebilecegini gosterelim.

Tanim

Cauchy Problemi:  $u(\vec{x})$  tanimi gerektirir. Bu tur problemler 1. derece, 2 degisken, vs. gibi tanimlarla sinirli degil aslinda, cok daha genel bir tanim onlar, bu tur problemlerde bir “Cauchy Verisi (Cauchy Data)”nden bahsedilir.



Ustteki resimde bu veri  $D$ alani (domain) icindeki  $\Gamma$  ile isaretli cizgidir, ki

$u$ 'nun bu çizgi üzerindeki değeri diyelim ki

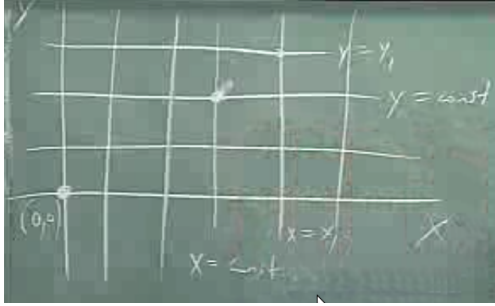
$$u|_{\Gamma} = \alpha(x, y)$$

ki  $\alpha(x, y)$  herhangi bir sonuç.

Mesela  $\Gamma$  çizgisi  $x = \sin(y)$  ile tanımlı eğri, ve  $u$  onun üzerinde  $u = y^2$  olmalı.

Bu tür bir koşula Cauch Verisi ismi veriliyor, bizim örneğimizde bu bir tür sınır koşulunu andırıyor.

Bir kordinat sistemi nedir?

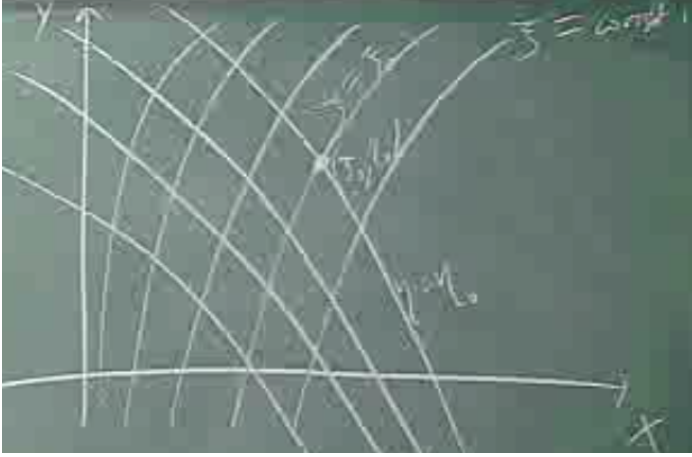


Diyelim ki öyle bir fonksiyon kümesi var ki, onlar üzerinden PDE'lerimizi değişik bir kordinat sisteminde temsil etmemiz mümkün olacak.

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y) \end{aligned}$$

$\xi$  ve  $\eta$ 'yi kesit eğrileri (level curves) üzerinden incelemek mümkündür. Bu fonksiyonları belli sabitlere eşitleyip, durumlarına bakabiliriz, sonra sabitleri değiştiririz, bir daha bakarız, vs.





Ustteki resimde mesela, saga yatik tum egriler, her biri degisik bir sabite (Ingilizce const diye yazilmis) esit olacak sekildeki  $\xi$  egrileri olabilir. Sola yatik  $\eta$  çizgileri de olabilir. Ortadaki nokta iki onceki resimdeki bir noktanin bu yeni kordinata eslenmis bir nokta mesela.

Gerekliklerimiz

Esleme, transformasyon bire bir (one-to-one) olmalı. İlk kordinat sistemindeki her nokta, diger kordinat sistemindeki tek bir noktaya esleniyor olmalı.

Jacobian'ı yokolmayan (non-vanishing) olmalı.

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \neq 0$$

Ustteki ifade Calculus'un Dolayli Fonksiyon Teorisi (Implicit Function Theorem of Calculus) ile alakali. Bu teorinin yerel baglamda niye birebir esleme yarattigini merak ediyorsaniz Calculus kaynaklarina danisabilirsiniz.

Amac: Sunu

$$au_x + bu_y + cu = f$$

transform et ve suna cevir

$$W_\xi + h(\xi, \eta)W = R(\xi, \eta)$$

$$W(\xi, \eta) \equiv u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

Birebir transformasyon istemistik, o zaman esleme geriye çevirilebilir (invertible) de olmalı, yani istersek  $x, y$  degiskenlerini  $\xi, \eta$  cercevesinde temsil edebiliyor olmamız lazım.

Dikkat:  $W_\eta$  yoktur, bu sayede iki ustteki formül 1. derece ODE haline gelir, entegre edici faktor kullanip entegre edip Cauchy Verisini uygulayarak bu problemi cozebilirsiniz. Analitik olarak biraz karmasikliga sebep verebilir, ama bu en azindan mumkun bir stratejidir.

Simdi sira transformasyonu bulmaya geldi.  $x, y$  degiskenlerini  $\xi, \eta$  cercevesinde temsil edelim. Zincirleme Kanununu kullanalim.

$$\frac{\partial}{\partial x}u \equiv \frac{\partial}{\partial x}W(\xi(x, y), \eta(x, y)) = W_\xi \eta_x + W_\eta \eta_x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u = W_\xi \eta_y + W_\eta \eta_y$$

Bunu orijinal denkleme sokalim

$$a(\xi, \eta) \left[ W_\xi \eta_x + W_\eta \eta_x \right] + b(\xi, \eta) \left[ W_\xi \eta_y + W_\eta \eta_y \right] + c(\xi, \eta)W = f(\xi, \eta)$$

Tekrar duzenleyelim

$$= \left[ a\xi_x + b\xi_y \right] W_\xi + \left[ a\eta_x + b\eta_y \right] W_\eta + cW = f$$

Soyle sec

1.

$$a\eta_x + b\eta_y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\eta_x}{\eta_y} = -\frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

2.

$$\xi = x$$

Boylece

$$h = \frac{c}{a}$$

$$R = \frac{f}{a}$$

elde edilir.

Unutmayalım Jacobian sartini tatmin etmemiz lazim.

Farz edelim

$$\eta_y \neq 0$$

Bu ise yarar

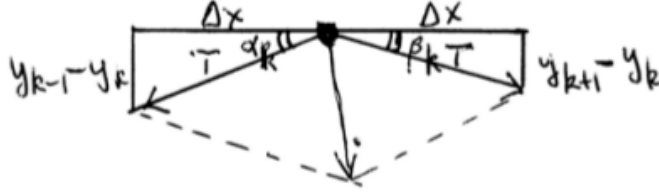
$$J = \xi_x \eta_y - \cancel{\xi_y} \overset{0}{\eta_x}$$

$$J = \eta_y \neq 0$$

Bir dahaki derste  $\eta$ 'yi nasıl hesaplayacağımızı göreceğiz.

—

[1] Diğer bir açıdan bakarsak, mesela matematikçi David Mumford türetirken ( $i$  yerine  $k$  kullanmış)



$$\tau \left( \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x} \right) + \tau \left( \frac{Y_{i-1} - Y_i}{\Delta x} \right)$$

kullanmış. Yani bir parçacığın üzerindeki kuvvet sağındaki ve solundaki kuvvetlerin “toplamı” olarak görülüyor, bu formül de aynı kapağa cikiyor.