PDE - Ders 2

Denklem soyle idi

$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)$

Bu denklem homojen degil, cunku denklemin sol tarafi $f \neq 0$, homojenlik icin nihai test tabii ki $u = 0$ koyunca $0 = 0$ cikip cikmayacagi.

Cozum icin kullandigimiz fikir neydi? Kordinat sistemini transform etmek, ki

$$\Big(x,y\Big) \to \Big(\xi(x,y), \eta(x,y)\Big)$$

olsun. Bu degisimi yaparken oyle bir degisim ariyoruz ki boylece transform edilmis PDE'miz cozulmesi kolay bir hale gelsin.

Amac

Denklemi sadece tek bir bagimsiz degiskene gore turevi icerecek sekilde yazmak

$$w_\xi + h(\xi,\eta)w = R(\xi,\eta)$$

$$w \equiv u\Big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\Big)$$

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$$

Turev Transformasyonu

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\partial_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial x}\partial_\eta$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\partial_\xi + \frac{\partial \eta}{\partial y}\partial_\eta$$

Bunu yapinca PDE su hale gelecek

$$a\Big[a\xi_x + b\xi_y\Big]w_\xi + a\Big[a\eta_x + b\eta_y\Big]w_\eta + cw = f$$

Simdi η kordinatini oyle bir sekilde secmek istiyoruz ki ustteki sag koseli parantez icindeki terimler yokolsun. Boylece PDE'yi ξ bir ODE'ye indirgemis oluruz. Bunu elde edince entegrasyon kolaylca yapilabilir.

$a\eta_x + b\eta_y = 0$

$=> \dfrac{\eta_x}{\eta_y} = -\dfrac{b(x,y)}{a(x,y)}$

Yani ikinci kordinat sistemi her ne ise, onun ortaya cikardigi kismi turevlerinin birbirine orani katsayi fonksiyonlarinin oraninin negativine esit.