MIT OCW ODE - Ders 11

Bu ders oldukca teorik olacak ama icindeki fikirler bu derste ogretilen en onemli fikirlerin arasinda. Su denklemi hatirlarsak

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Bu denklemin cozum yontemi iki tane bagimsiz y_1 ve y_2 bulmaktan geciyordu. Bagimsizligin tanimi mesela y_2'nin y_1'in "katı" olmaması, yani bir cozumu tamsayi bir sabitle carpinca digerini elde edememeliyiz. Yani $y_2 \neq cy_1$, ve $y_1 \neq c'y_2$, ve $y_1 = 0$ ise y_2 sifir olmamali.

Usttekileri belirtmemizin sebebi neydi? Ki boylece ODE'nin tum cozumlerinin y_1 ve y_2'nin bir lineer kombinasyonu oldugunu soyleyebilmek, yani

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

Bu derste cevaplandiracagimiz soru şu: Niye?

Soru 1: Niye $c_1y_1 + c_2y_2$'in hepsi bir cozumdur?

Bu soruyu bu dersteki ogrenciler cevaplayabilir herhalde, fakat temiz, oz, zarif (elegant) bir sekilde cevaplayabilmek onemli olan ve aslinda bu dersin de konusu. Bu cevabi oz, temiz bir sekilde veremezsek, daha ileride daha cetrefil isleri halledemeyiz.

1. soru lineer kombinasyonlarin niye cozum olduklarini cevaplayacak, fakat "tüm" cozumlerin onlar oldugunu daha zor olan 2. sorunun cevabi belirleyecek.

Soru 2: Niye tüm cozumler bunlardır?

Birinci sorunun cevabi ust uste eklenebilmek (superposition) prensibi sayesinde cevaplanacak, ki bu prensip lineer kombinasyon argumaniyla ayni sey. Ek bir not bu prensibin ODE hangi dereceden olursa olsun (yani 2 oldugu gibi, 3, 4, vs. bile olabilir, form degismedigi surece derece artabilir) prensibin gecerli olmasidir.

Bu ispati yapmanin temiz yontemlerinden biri, azicik yol disina cikip (detour), lineer operatorlerden bahsetmektir. Bu operatorleri dersimizin geri kalaninda surekli kullanacagiz, onlari iyice tanimamiz iyi olur.

Amacim ust uste eklenebilme prensibinin ispati, oraya gelirken, degisik yerlere girip cikacagiz. Ana formu tekrar yazalim.

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Simdi bu formu turev alma operatorunu kullanarak tekrar yazacagim. Operator D, bir kere turev al demektir, D^2 iki kere turev al demektir. O zaman

$D^2y + pDy + qy = 0$

y'yi disari cekelim

$(D^2 + pD + q)y = 0$

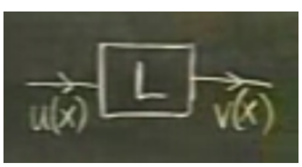
Burada dikkat: insanlar yukaridaki ibareyi "parantez icinde bir seyler *çarpı* y" diye okumaya meyilli oluyor, bu dogru degil. Boyle bir ima var gibi ama gercekte olan bu degil, cunku D operatoru y "uzerinde" islem yapan bir operator. Aslinda usttekini yaparken amacim suydu, parantez icindeki her seyi baslina basina tek bir operator haline cevirmek, ki bu operatore L adi verelim

$\underbrace{(D^2 + pD + q)}_{L} y = 0$

O zaman geriye

$Ly = 0$

kalir. Formel olarak L'nin tanimi usttekidir, onu zihnimizde bir kutu olarak ta canlandirabiliriz, kutuya bir fonksiyon giriyor, disari baska bir fonksiyon cikiyor.



Daha da detaylandirmak gerekirse, sayilar icin fonksiyonlar neyse, fonksiyonlar icin operatorler o'dur. Bir fonksiyona sayi girer, disari sayi cikar, bir operatore ise fonksiyon girer, bu fonksiyon degisime ugrayip disari baska fonksiyon olarak cikar. Turev alma operatoru en basit orneklerden biridir, mesela x^2 fonksiyonu turev operatoru D'ye girerse, disariya yeni bir fonksiyon $2x$ cikar.

ODE'ye donersek, ustteki ODE'yi cozmek demek L kutusundan sifir ciktigini dusunmek ve bunun olmasi icin kutuya ne girdigini bulmaya calismak. Bir ODE'yi cozmek, o zaman, bir tersine cevirme (inverse) problemidir. Tabii ters yonde gitmek ileri yonde gitmekten daha zordur.

Bu operatorun lineer oldugunu hatirlayalim. Bu, operator fonksiyonlarla is gordugu zaman belli ozellikler gosterir.

$L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$

$L(cu) = cL(u)$

ki c bir sabit, u, u_1 ve u_2 fonksiyonlardir.

Ustteki iki ifade lineerligin iki kuralidir. Bu kurallar normal fonksiyonlar icin de gecerlidir bu arada.

Ornek? D operatoru lineer bir operatordur. Cunku, mesela

$(u_1 + u_2)' = u_1' + u_2'$

$(cu)' = cu'$

Bu Calculus dersinden bildigimiz bir sey. Yani en temel Calculus'tan beri bildigimiz ustteki kurallar aslinda D operatorunun lineer bir operator oldugunun da gostergesidir.

Not: Ya peki carpma? O da bir sekilde duruma dahil mi? Onun da kullanildigi bazi durumlar var ama lineerlik baglaminda konumuzun disinda.

Neyse, tum bu kurallari ust uste eklenebilme prensibini ispatlayabilmek icin ortaya koyduk, simdi ispatin kendisine gelelim.

Teori

ODE'miz soyle:

$Ly = 0$

Eger y_1 ve y_2 cozum ise alttaki de bir cozumdur.

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

Ispat

L operatorunu ustteki kombinasyona uygulayalim:

$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = L(c_1 y_1) + L(c_2 y_2)$

$= c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2)$

Simdi yapmaya calistigim bunu sifir oldugunu gostermek. Eger y_1 bir cozum ise o zaman $Ly = 0$'dan hareketle $L(y_1)$'in sifir olmasi gerekir. Ayni sekilde $L(y_2) = 0$.

$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$

Ispat tamamlandi. Bu argumani ODE'nin orijinal formunu kullanarak ta yapabilirdik tabii, ama o zaman degiskenleri yerine koyup, cebirsel gruplama yapacak, bir suru islem icine girecektik. Bu bize sonucu verecekti, ama ispatin niye boyle sonuc verdigini acik bir sekilde soylemeyecekti. Ispat basarili oldu cunku L bir lineer operatordu.

Simdi daha zor olan ikinci soruya gelelim. Bu soruyu cevaplayacagiz, ama bir yan yola girerek, cevabi "baslangic deger problemini cozme" açısından anlamaya ugrasacagiz, baslangic degerlerini formule uydurarak (fitting) bir yere gelmeye cabalayacagiz.

Teori

Tum lineer kombinasyonlari bir kume olarak dusunelim,

$\left\{ c_1 y_1 + c_2 y_2 \right\}$

Bana hangi baslangic degerini verirsen verin, bu kume icinde ona uygun bir c_1 ve c_2 bulabilirim.

Ispat

Bu ispati yaparken simdiye kadar ODE cozerken odevlerde gelistirdigimiz baslangic degerlerini kullanip sabitleri hesaplama becerisinden faydalanacagiz, ama sayilar yerine semboller kullanacagiz. Diyelim ki

$y(x_0) = a$

$y(x_0) = b$

Yerine koyarsak

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$

$x = x_0$'i yerine koyalim

$y = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = a$

$y' = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = b$

Odev problemlerinde y_1 ve y_2 somut fonksiyonlar oluyordu, e^x gibi mesela. Burada sadece onun yerine sembolik degerler kullaniyorum.

Simdi ustteki iki denkleme bakalim. Bu bir beraber cozulecek (simultaneous) lineer denklem sistemi degil midir? Cozulecek, bulunacak degiskenler hangileri? c_1 ve c_2. Buna tam aliskin degiliz, genellikle cozulecek degiskenler terimlerin onunde degil arkasinda olur, ustelik c_1 ve c_2 simdiye kadar hep "sabit" olarak etiketledigimiz seyler, ama biraz daha dusunursek ve geri kalan arap saci gibi terimlere dikkatlice bakarsak lineer sistemi gorebiliriz. Bu sistemde degiskenler c_1 ve c_2.

Peki simdi su soruyu soralim. Ustteki sistemin ne zaman bir cozumu vardir? Sistem her zaman cozulemeyebilir. Cevap: Eger katsayi matrisinin tersi alinabiliyor ise (invertible), yani matrisin determinanti sifir haricinde bir deger olmali.

$$\left. \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \right|_{x_0} \neq 0$$

Determinant isareti $|$'nin alt kosesindeki x_0, matris icindeki tum fonksiyonlarin x_0 verilerek elde edilen sonuclarini kullanmamiz gerektigini soyluyor.

Ustteki determinant onemli bir determinant, ve bir ismi var: Wronskian. Sembolik kullanimi ise soyle: $W(y_1, y_2)$. Hepsini bir arada belirtirsek,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Wronskian'i ona gecilen iki fonksiyonu biliyorsak hesaplayabiliriz, ama W, y_1 ve y_2'nin fonksiyonu degil. Wronskian x'in bir fonksiyonu aslinda.

Wronskian'in sifir olmama durumunu nasil ispatlariz? Diyelim ki y_2 ve y_1 bir-

birine bagimli (dependent), yani $y_2 = cy_1$. Bunun boyle olmadigini biliyoruz cunku ODE'nin farkli cozumleri var. Ama oldugunu dusunelim, ve ustteki determinanta bakalim, $y_2 = cy_1$ olmasi ne demektir? $y_2' = cy_1'$ sartinin da gecerli olmasi demektir. Ve bu sart gerceklesirse, o zaman Wronskian, her x degeri icin, her zaman, kesinlikle sifir olacaktir, cunku artik iki kolon tamamen birbirinin kati haline gelmistir.

Odev sorularinda ogrencinin ispatlamasini istedigimiz teori bu.

Teori

Eger y_1 ve y_2 ODE'mizin cozumu ise, o zaman sadece iki secenekten biri dogru olabilir. Ya her x degeri icin $W(y_1, y_2) = 0$ (aslinda her x degeri icin sozu fazlalik, cunku Wronskian tanimi zaten o ifadeyi kapsiyor, ama bu bir giris dersi oldugu icin tekrarliyoruz), ya da Wronskian hicbir zaman sifir degil.

Simdi, bir parantez daha aciyoruz. Bu ikinci parantez de kapaninca, ustteki "2. sorunun" cevabini vermek icin elimizde tum gerekli araclar olacak.

Yukarida ODE cozumunun tum cozumlerinin surada oldugunu belirtmistik

$$\left\{ c_1 y_1 + c_2 y_2 \right\}$$

Onemli nokta su ki, y_1 ve y_2 oyle "ozel", "kutsal" cozumler degiller. Sunu da soyleyebilirdik ve ustteki ifade ile ayni sey olurdu

$$\left\{ c_1' u_1 + c_2' u_2 \right\}$$

ki u_1 ve u_2 herhangi baska bir lineer olarak bagimsiz cozumler.

Bunu niye soyledik? y_1 ve y_2 genelde denklemi cozdugumuz zaman elde ettigimiz kolay cozumlerdir, mesela e^x, e^2x, $cos(x)$, vs. turunde. Cozumu bu tur ogeleri kullanarak yazmak bir yontem tabii, fakat tek yontem degil. Bazi ODE'ler icin "normalize edilmis cozumler" bulmak daha iyi.

Normalize edilmis cozumler belli bazi ozel baslangic sartlarini tatmin eden cozumlerdir. Eger Y_1 ve Y_2'yi normalize edilmis cozumler olarak kabul edersek, bu sartlar

$$Y_1(0) = 1, \ Y_2(0) = 0$$

$Y_1'(0) = 0, \ Y_2'(0) = 1$

Ornek

$y'' + y = 0$

Standart cozumler $y_1 = cos(x)$, $y_2 = sin(x)$. y_1'in 0'daki degeri nedir? 1. y_1''in sifirdaki degeri nedir? 0. Demek ki y_1 normalize edilmis, yani Y_1. y_2 ayni sekilde Y_2 olur.

Not: Normalize cozumleri cogunlukla bir bakista bu kadar kolay goremiyoruz tabii ki.

Ornek

$y'' - y = 0$

Karakteristik denklemler 1, ve -1, o zaman cozum $y_1 = e^x$ ve $y_2 = e^{-x}$. Genel cozum

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

Buradan normalize cozumleri, mesela Y_1, nasil buluruz? Baslangic sartlarini yerine getirerek. Bu arada y'

$y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$

Sartlari koyalim. $y_1(0)$

$c_1 + c_2 = 1$

$y_1'(0)$

$c_1 - c_2 = 0$

Bu bir denklem sistemi yaratti, o zaman $c_1 = c_2 = 1/2$. O zaman

$$Y_1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Y_2'yi benzer sekilde buluruz, hesaplari yaptiktan sonra sonuc

$$Y_2 = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

cikacaktir. Yani ornek ODE'miz icin bu iki cozum normalize edilmis cozumlerdir. Bu cozumler asil cozumlerden "daha iyi", cunku baslangic sartlari daha "guzel". Cozume ve turevini sifir noktasinda hesaplayinca bunu goruyoruz, sonuc ya 0 ya da 1 geliyor. Temiz. Bu arada bu ornekte elde ettigimiz Y_1, $cosh(x)$ (hiperbolik kosinus) ve Y_2, $sinh(x)$ (hiperbolik sinus) olarak bilinir.

Muhendisler normalize cozumler cok severler, cunku eger Y_1 ve Y_2 sifirda normalize edilmisse, o zaman baslangic deger problemi, yani bizim klasik ODE'miz arti

$y(0) = y_0$

$y'(0) = y'_0$

denkleminin cozumu soyledir

$y = y_0 Y_1 + y'_0 Y_2$

Diger bir deyisle, eger bir denklemin normalize cozumlerini bulmussak / biliyorsak, genel cozum icin baslangic sartlarini *oldugu gibi* alip genel cozumu yaratmak icin kullanabiliriz.

Ustteki y'nin dogru olup olmadini kontrol edebilirsiniz. Mesela $y(0)$ nedir? O noktada $Y_1(0) = 1$, $Y_2(0) = 0$ olduguna gore $y(0) = y_0$ elde ederiz, ki bu ustteki baslangic sartlari ile uyar. Geri kalanini siz kontrol edebilirsiniz.

Boylece ikinci parantezi kapattik. Artik "buyuk teori" icin gereken her sey var.

Mevcudiyet ve Ozgunluk Teorisi (Existence and Uniqueness Theorem)

Standart ODE

$y'' + py' + qy = 0$

oyle ki p ve q her x icin surekli fonksiyonlar ("iyi" fonksiyonlar yani, katsayilar hicbir noktada patlamiyor).

O zaman, bu teoriye gore, verilen baslangic sartlari

$y(0) = A$

$y'(0) = B$

uyumlu bir cozumu, ve sadece bir tane cozum vardir.

Bir cozum olmasi teorinin "mevcudiyet" tarafi, o cozumun tek mumkun cozum olmasi teorinin ozgunluk tarafi.

Iddia ediyorum ki

$$\Big\{ c_1 Y_1 + c_2 Y_2 \Big\}$$

kumesi tum cozumleri iceriyor.

Ispat

Verilen herhangi (arbitrary) bir cozum $u(x)$, ki

$$u(0) = u_0$$

$$u'(0) = u_0'$$

alinip su sekilde kullanilinca

$$u_0 Y_1 + u_0' Y_2$$

bu ifade baslangic sartlariyla uyumlu olur.