

Cok Degiskenli Calculus - Ders 12

Zincirleme Kanunu hatirlayalim

$$\frac{dw}{dt} = w_x \frac{dx}{dt} + w_y \frac{dy}{dt} + w_z \frac{dz}{dt}$$

Bu formül, kısmi türevler üzerinden, w 'daki değişimin x, y, z 'deki değişime ne kadar “hassas” ne kadar “bağlı” olduğunu gösteriyor.

Şimdi üsttekini daha azaltılmış, özetli (compact, concise) bir formda söyle yazacağım.

$$= \nabla w \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Gradyan vektörü tüm kısmi türevlerin bir araya konmuş halidir.

$$\nabla w = \langle w_x, w_y, w_z \rangle$$

Tabii ki bunu söyleyince üstteki gradyan'ın x, y, z 'ye bağlı olduğunu da söylüyoruz, mesela w 'nın belli bir nokta x, y, z 'da gradyanını alabilirsiniz, o zaman her değişik x, y, z noktasında farklı bir vektör elde edersiniz, ki bu vektörlerin tamamına ileride “vektör alanı (vector field)” ismini vereceğiz. Devam edelim,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \langle \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \rangle$$

Yani hız vektörü (velocity vector) $d\vec{r}/dt$ yukarıdaki gibi tanımlidir.

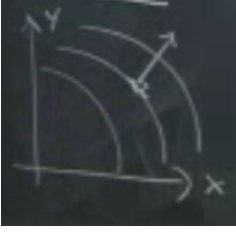
Bugünkü amacımız gradyan vektörünü anlamak, ve nerelerde kullanabileceğimizi incelemek. Gradyanları yaklaşıksal formüllerde kullanmak mümkündür, vs. Üstte gördüğümüz onun notasyonu.

Gradyanların belki de en “havalı” özellikleri şudur.

Teori

İddia ediyorum ki ∇w vektörü, $w =$ bir sabit ile elde edilecek kesit yüzeyine (level surface) her zaman diktir.

Eğer fonksiyonumun bir kontur grafini çizsem



gosterilen noktada hesaplanacak gradyan vektörü o noktadaki kontura diktir.

Ornek 1

Lineer bir w kullanalım.

$$w = a_1x + a_2y + a_3z$$

Gradyan nedir? Kismi turevleri alalım:

$$\nabla w = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$$

Konturlari nasil elde ederim? $a_1x + a_2y + a_3z = c$ ki c bir sabittir, bu formulu tatmin eden tüm x, y, z degerleri bir düzlem olustururlar.

Bu düzlemin normalinin nasil alinacagini biliyoruz, katsayılara bakariz, $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$. Bu vektörün gradyanla aynı çıktığına dikkat, ki normal vektör de düzleme diktir zaten. Aynı çıkmaları mantikli.

Aslında bu örnek gradyanın dikliğini bir anlamda ispatlıyor, çünkü düzlem olmasa bile herhangi bir fonksiyonun birinci yaklaşıksallığı bir düzlem yaratır, o düzlemin normali, gradyanı eşitliği bizi yine gradyanın dikliğine götürür. Ama bu yeterince ikna edici olmadıysa başka bir örneğe bakabiliriz.

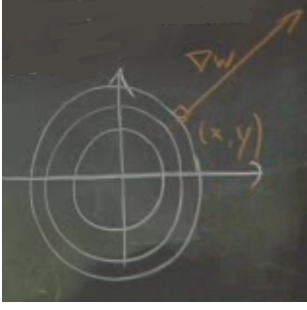
Ornek 2

$$w = x^2 + y^2$$

Bu fonksiyonun kesit seviyeleri, değişik yarıçaplara sahip dairelerdir, $x^2 + y^2 = c$ formundeki değişik c degerleri bu daireleri tanımlar.

Gradyan vektörü

$$\nabla w = \langle 2x, 2y \rangle$$



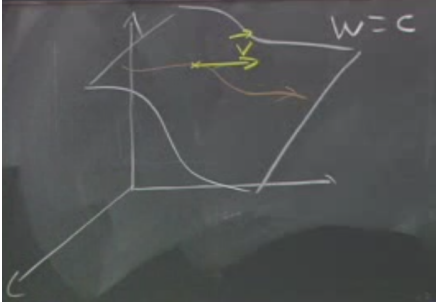
Secilen x, y noktasında ∇w gosterilmis. Bu vektorun x ve y eksenlerinde boyunun, basladigi noktaya gore olan x, y degerlerinin yaklasik iki kati olduguna dikkat, ki bu da $\langle 2x, 2y \rangle$ vektoru ile uyumlu.

Simdi gradyanin niye kesit egrilerine hep dik oldugunu ispatlayalim.

Ispat

Once kesit egrileri “uzerinde” hareket eden bir nokta hayal edecegiz. Bu nokta fonksiyonun sabit oldugu yerlerden geciyor demektir, cunku kontur uzerinde fonksiyon degeri hep aynidir.

Egri $\vec{r} = \vec{r}(t)$ hep $w = c$ uzerinde olacak. Resme bakalim, hayali bir kesit yuzeyi uzerinde bir egri olacak (kirmizi renkli) bu egrinin uzerinde giden noktanin bir hizi olacak.



Iddia o ki,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

vektoru, kesit $w = c$ 'ye muhakkak teget olmal, cunku hiz egriye teget, ve egri kesit icinde. Bu arada w aslinda $w(\vec{r}(t))$, w 'ye girdi olarak verilenler x, y, z ama $\vec{r}(t)$ 'nin ogeleri de ayni x, y, z parametreleri.

Bu sayede Zincirleme Kanununu kullanarak

$$\frac{dw(\vec{r})}{dt} = \nabla w \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

esitligini kurabiliriz. Esitligin sag tarafi nasil oldu? Bu ifade w 'nin her kısmi turevinin alip, ona tekabül eden $\vec{r}(t)$ ogesinin turevi ile carpip sonuclarin toplanmasi demek. Sonuc Zincirleme Kanunu'ndaki goruntu olacaktir. Ayrica

$$= \nabla w \cdot \vec{v} = 0$$

Sifira esitligin sebebi $w = c$ olmasi, diferansiyeli alirken sag tarafın diferansiyelini aldik, orasi sabit oldugu icin sonuc sifir oldu.

Simdi ters yonden bakalim: iki vektorun noktasal carpimi ne zaman sifir sonucu verir? Eger vektorler birbirine dik ise. Demek ki $\nabla w \perp \vec{v}$.

Hatta iddia ediyorum ki bu diklik $w = c$ üzerindeki her hareket (motion) için geçerlidir. Yani \vec{v} , kesit yuzeyine teget olan herhangi bir vektor olabilir, ustteki diklik hep dogru olacaktir.

