

Taylor Serisi

Formul

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$$

Bu formüle nasıl ulaşırım? Su şekildeki bir seri olsun

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Usttekinin turevini alalım. Tabii ki sabit a_0 yokolacak, x 'in onundeki katsayı kalacak, vs. Sonuç

$$f' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

Birkac kez daha

$$f'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \dots$$

$$f''' = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + \dots$$

Eğer son formüle sıfır verirsem, 3. terimi cimbizla çekip alabilirim

$$f'''(0) = 3 \cdot 2a_3$$

Çünkü geri kalan her şey sıfır olup yokoldu, geriye sabitler kaldı. O zaman a_3 'ü elde etmek istiyorsam,

$$\frac{f'''(0)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = a_3$$

Bir kalıp ortaya çıkmıştır herhalde, genel olarak

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$$

Bu katsayılar Taylor formülünde x_n onune gelecek katsayılardır.

O zaman

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f'' \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Daha genel olarak 0 yerine a alırsak, a yakınındaki fonksiyonun açılımını

temsil edebiliriz

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f'' \frac{(x - a)^2}{2!} + \dots$$

Alternatif Turetim

Taylor serilerinin arkasındaki fikir, sürekli ve sonsuz defa turevi alınabilen turden bir fonksiyon $f(x)$ 'i bir x_0 noktasinin (burada a sembolu de kullanilabilir) “cevresinde”, yakin bolgesinde yaklasiksal olarak temsil edebilmektir.

Turetmek icin

Calculus'un Temel Teorisi der ki:

$$\int_a^x f'(t) \, dt = f(x) - f(a)$$

Bu formulu tekrar duzenlersek, alttakini elde ederiz:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \, dt$$

Bunun uzerinde Parcali Entegral yontemini uygulariz. Parcali Entegral teknigi genel olarak soyledir:

$$\int_a^b u \, dv = u \, v - \int_a^b v \, du$$

Simdi iki ustteki formulun entegral icindeki kismini parcali entegrale uyacak sekilde bolusturelim

$$u = f'(t) \text{ ve } dv = dt$$

O zaman acilim

$$f(a) + xf'(x) - af'(a) - \int_a^x tf''(t) \, dt$$

Alttaki formulu kullanarak

$$\int_a^x xf''(t) \, dt = xf'(x) - xf'(a)$$

iki ustteki formulu su hale getiririz

$$f(a) + \int_a^x xf''(t) \, dt + xf'(a) - af'(a) - \int_a^x tf''(t) \, dt$$

Bazi ortak terimleri disari cekersek

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t) dt$$

Ayni teknigi bir daha uygulayinca

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2f''(a) + \frac{1}{2} \int_a^x (x-t)^2f'''(t) dt$$

Tum bunlari daha genel olarak kurallastirmamiz gerekirse, tumevarim (induction) teknigini kullanalim, varsayiyoruz ki Taylor'un Teorisi bir n icin gecerli ve

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Sonuncu integrali parcali integral teknigi ile tekrar yazmamiz mumkundur. $(x-t)^n$ 'in anti-turevi (anti-derivative) $\frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}$ ile verilir, o zaman

$$\begin{aligned} & \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt \\ &= - \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)n!} (x-t)^{n+1} \right]_a^x + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)n!} (x-t)^{n+1} dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} dt \end{aligned}$$

Son integral hemen cozulebilir

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Alternatif Form

Hesapsal Bilim derslerinde bu serinin alternatif bir formu daha cok karsimiza cikabilir. f 'i t yakininda ufak bir h adimi atildigini farzederek Taylor serileri uzerinden $f(t+h)$ 'i gelistirmek suretiyle temsil edebiliriz. Eger $x = t+h$ ve $a = t$ alirsak alttaki orijinal Taylor serisini

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2f''(a) + \dots$$

donusturebiliriz. Baslayalim,

$$x = t+h \Rightarrow h = x-t$$

$$t = a$$

Once $a = t$ gecisini yapalım

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)(x-t) + f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} + \dots$$

Simdi $h = x - t$ gecisi

$$f(t+h) = f(t) + f'(t)h + f''(t)\frac{(h)^2}{2!} + \dots$$

Boylece

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{1}{2}h^2f''(t) + \dots$$

Bu tanimin, birinci turevin formuluyla olan alakasini gormek icin

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ifadesini hatirlamak yararli olabilir, yaklasiksal isareti \approx kullanildi, cunku bu ifade sadece $h \rightarrow 0$ iken dogrudur (turevlerin limit olarak tanimindan hareketle). Biraz cebirsel manipulasyon yaparsak

$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

$$f(x+h) \approx f'(x)h + f(x)$$

En son formulun Taylor serisi 1. derece acilimiyla ayni oldugu goruluyor.

Kaynak

MIT OCW 18.01 Ders 38

http://www.proofwiki.org/wiki/Taylor's_Theorem