Cauchy Ortalama Deger Teorisi (Cauchy Mean-value Theorem)

Teori soyle

Eger f, g fonksiyonlari $[a, b]$ araliginda surekli ise ve $g'(x) \neq 0$ farz edildigi durumda $[a, b]$ arasinda oyle bir c vardir ki,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ifadesi dogrudur.

Ispat

Simdi daha onceden gordugumuz Ortalama Deger Teorisi'ni (Cauchy olmayan) iki kere kullanacagiz. Teoriyi once $g(a) \neq g(b)$ oldugunu gostermek icin kullanacagiz. Cunku eger bu dogru olsaydi, Ortalama Deger Teorisi

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

olurdu, ki bu $[a, b]$ arasindaki bi4 c icin basta yaptigimiz faraziyemiz $g'(x) \neq 0$ ile ters duserdi.

Ikinci kullanim: $F(x)$ adinda, f, g fonksiyonlarini kullanan baska bir fonksiyon kurgulayalim.

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

Bu fonksiyonun turevi, f, g'nin turevi alinabildigi her yerde alinabilir olur. Ayrica $F(b) = F(a) = 0$. a, b degerlerini yerine koyarsak bunu gorebiliriz, mesela $x = a$ icin

$$F(a) = \cancelto{0}{f(a) - f(a)} - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[\cancelto{0}{g(a) - g(a)}]$$

$$= 0 - 0 = 0$$

O zaman, $F(b) = F(a) = 0$'dan bir sonuca daha erisiriz. Bir fonksiyon a, b uclarinda sifir ise, bu fonksiyon bir sekilde azalip, cogaliyor, ya da cogalip azaliyor demektir, yani kesinlikle bir yerde tepe yapiyor demektir. Tepe yapmanin Calculus'taki tercumesi $[a, b]$ arasindaki bir c icin $F'(c) = 0$ olmasidir. O zaman ustteki $F(x)$'in turevini alirsak, ve $x = c$ dersek,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g'(c)] = 0$$

dogru olmalidir. Turev alirken $f(a)$ yokoldu cunku sabitti, buyuk bolum yerinde kaldi cunku tamami $g(x)$ icin katsayi. Eger tekrar duzenlersek, negatif terimi sola alirsak, ve iki tarafi $g'(c)$'ye bolersek,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

ifadesini elde ederiz. Yani bastaki teoriyi elde etmis oluruz.

Ortalama Deger Teorisini ilk kez kullanmamizin sebebi, ustteki bolenin sifir olmamasini istedigimiz icindi, cunku sifirla bolum tanimsizdir.

Kaynaklar

[1] Thomas Calculus, 11. Baski sf. 294