Çebişev Eşitsizliği

Olasılık matematiğinde, büyük sayılar kuramı adında anılan ve olasılık matematiğinin belkemiğini oluşturan kuramı ispatlamak için, diğer bir kuram olan Çebişev eşitsizliğini de anlamamız gerekiyor. Çebişev eşitsizliği bir rasgele değişken, onun ortalaması (beklentisi) ve herhangi bir sabit sayı arasındaki üçlü arasında bir 'eşitsizlik' bağlantısı kurar, ve bu bağlantı diğer olasılık işlemlerimizde ispat verisi olarak işimize yarar.

Teori: Herhangi bir t değeri için,

$$P(|X - \mu| > t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

İspata başlayalım. Entegral ile olasılık hesabı yapmak için bize bir x uzayı lazım.

$$R = x : |x - \mu| > t$$

Yani R uzayı, x ile ortalamasının farkının, t'den büyük olduğu bütün sayıların kümesidir.

O zaman,

$$P(|X - \mu| > t) = \int_R f(x)dx$$

Dikkat edelim $P(..)$ içindeki formül, küme tanımı ile aynı. O yüzden $P()$ hesabı ortada daha olmayan, ama varolduğu kesin bir dağılım fonksiyonu tanımlamış da oluyor. Buna $f(x)$ deriz. $P()$'in, $f(x)$ fonksiyonunun R üzerinden entegral olduğunu olasılığa giriş dersinden bilmemiz lazım.

Eger $x \in R$ dersek o zaman

$$\frac{|x - \mu|^2}{t^2} \geq 1$$

t'nin denkleme bu şekilde nereden geldiği şaşkınlık yaratabilir. Daha önce tanımlanan şu ibareye dikkat edelim, $x : |x - u| > t$ diye belirtmiştik. Bu ifadeyi değiştirerek, yukarıdaki denkleme gelebiliriz.

Devam edersek, elimizdeki 1'den büyük bir değer var. Bu değeri kullanarak, aşağıdaki tanımı yapmamız doğru olacaktır.

$$\int_R f(x)dx \leq \int_R \frac{(x-\mu)^2}{t^2} f(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{t^2} f(x)dx$$

Ortadaki entegral niye birinci entegralden büyük? Çünkü ortadaki entegraldeki $F(x)dx$ ibaresinden önce gelen kısmın, her zaman 1'den büyük olacağını belirttiğimize göre, ikinci entegralin birinciden büyük olması normaldir.

Evet...Üçüncü entegral ispata oldukça yaklaştı aslında. Standart sapma işaretini hala ortada göremiyoruz, fakat son entegraldeki ibare standart sapma değerini zaten içeriyor. Önce daha önceki olasılık natematiği bilgimize dayanarak, standart sapmanın tanımını yazıyoruz. Dikkat edelim, bu ibare şu anki ispatımız dahilinden değil, haricinden önceki bilgimize dayanarak geldi. Standart sapmanın tanımı şöyledir.

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

O zaman

$$\frac{\sigma^2}{t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{t^2} f(x)dx$$

yani

$$\int_R f(x)dx \leq \frac{\sigma^2}{t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{t^2} f(x)dx$$

ki $\int_R f(x)dx$ zaten $P(|X-\mu| > t)$ olarak tanimlanmisti.