MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 13

Lagrange Carpanlari (Multipliers)

Amac $f(x, y, z)$ gibi birden fazla degisken iceren bir fonksiyonu maksimize etmek, degisik olan, x, y, z degiskenlerinin birbirinden bagimsiz ol**ma**masi. Bu degiskenlerin arasindaki iliski $g(x, y, z) = c$ gibi bir fonksiyon tarafindan gosteriliyor olabilir, c bir sabittir. Yani $f(x, y, z)$'i minimize ya da maksimize ediyoruz ve bunu sadece $g(x, y, z) = c$ sartina / sinirlama ifadesine (constraint) uyan x, y, z degerleri icin yapiyoruz.

Bunun icin hangi teknigi kullaniriz? Yollardan biri, eger sinirlama ifadesi basit ise, belki bir degiskeni cebirsel olarak cozebiliriz (digerleri baglaminda ifade ederek), sonra geri f'e sokariz, boylece klasik bir min / maks problemi elde ederiz, ki o tur bir problemi cozmeyi artik biliyoruz.

Fakat bazen x, y, z degiskenleri icin analitik cozum mumkun olmaz, o zaman farkli teknikler kullanmamiz gerekir. Bu derste ogrenecegimiz teknikler bunlar olacak.

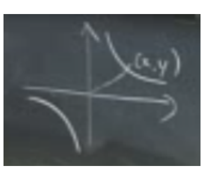
Uygulama baglaminda, Lagrange Carpanlari bize niye ilgilendiriyor? Belki fizik, termodinamik dersinde gormussunuzdur, sicaklik, hacim ve basinc degerleri vardir, ve bu degerler birbirinden bagimsiz degildir. Termodinamikte $pv = nrt$ denklemi vardir, gerci burada analitik olarak basitlestirme yapabilirdik, ama bazi sartlarda tum degiskenleri oldugu gibi tutmayi isteyebiliriz.

Simdiye kadar min / maks problemleri icin gordugumuz kritik nokta bulma tekniklerinin burada ise yarayamacagini hemen belirtelim. O kritik noktalar $g(x, y, z) = c$ sinirlama ifadesini tatmin etmiyor olabilirler. Baska bir seye ihtiyacimiz var.

Ornek

Hiperbol $xy = 3$ uzerinde olan ve orijine en yakin noktayi bul.

Aslinda bu soruyu temel geometri kullanarak cozebiliriz, fakat burada Lagrange Carpanlari kullanarak cozecegiz, cunku iyi bir ornek.



Neyi minimize edelim? Mesela $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ olur mu? Olabilir, ama karekok ifadesinden kurtulursak daha iyi olur.

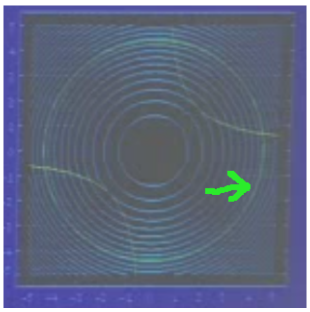
O zaman

$min\ f(x,y) = x^2 + y^2$

$ki,\ xy = 3$

Yani sinirlama ifadesi $g(x,y) = xy$ olarak sectik.

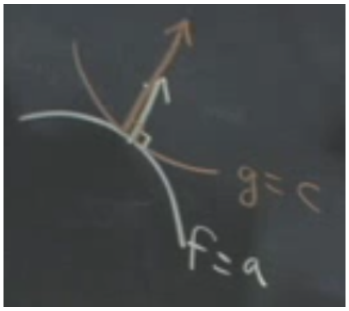
Grafige bakalim. Yuvarlaklar $f(x,y)$ konturlari, yesil okla gosterilen mesela $f(x,y) = 20$ konturu. Bu kontur ust sag kose ve sol alt kosede gosterilen hiperbolu kesiyor mu? Evet. Fakat $f(x,y) = 10$, vs. diyerek daha kucuk yuvarlaklar elde edebilir miyim? Evet. Fakat bir noktadan sonra bu halkalar hiperbolu kesmeyecektir.



Aradigimiz x,y degerleri hiperbole teget olan, olabilecek en kucuk yuvarlak.

Cozum icin tegetlik kavramindan faydalanabiliriz. Eger olabilecek en minimal f, her iki fonksiyonun kesit egrilerinin teget oldugu noktada ise, bu noktayi bulmaya ugrasabilirim.

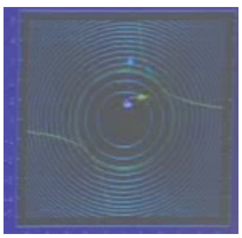
Iki kesit egrisi birbirine teget ise, onlarin teget duzlemi paraleldir, eger oyleyse, bu duzlemlerin normalleri birbirine paralel olmalidir.

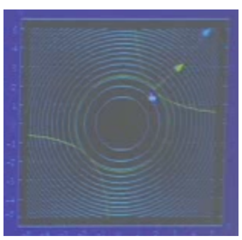


Bu normallerin ayni boyda olmasi gerekmez, yukaridaki gibi, ama paralel olmalari gerekir. Bu durumda

$\nabla f // \nabla g$

ifadesi dogru olmaladir, yani f'in gradyani g'nin gradyanina paraleldir. Bazi ornekler





Goruldugu gibi minimal noktalarin birinde (ustteki 2. resim) gradyanlar ayni yone isaret ediyor.