

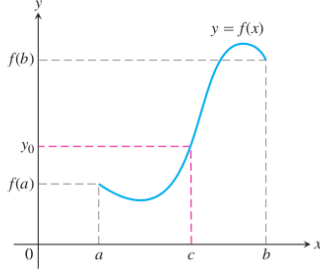
## Calculus'un Temel Teoremi (The Fundamental Theorem of Calculus)

Ana teoriyi ispatlamadan önce iki diğer teoriden bahsetmemiz, ispatlamamız lazım. Bu teorilerden biri Geçis Degeri Teorisi (Intermediate Value Theorem) diğeri Tanımlı Entegraller İçin Ortalama Deger Teoremi (Mean Value Theorem for Definite Integrals). Geçis Degeri Teorisi basitçe şunu söyler

### Teori

$[a, b]$  aralığında sürekli bir fonksiyon  $y = f(x)$ ,  $f(a)$  ve  $f(b)$  arasındaki her değeri muhakkak alır. Bir diğer deyişle, eğer  $y_0$ ,  $f(a)$  ve  $f(b)$  arasındaki bir değer ise  $[a, b]$  aralığındaki bir  $c$  için muhakkak  $y_0 = f(c)$  olmalıdır.

Geometrik olarak bu teori  $y$  eksenini  $f(a)$  ve  $f(b)$  arasında kesen  $y = y_0$  yatay çizgisinin  $y = f(x)$  fonksiyonunu muhakkak, en az bir kez keseceğidir. Grafik altta.



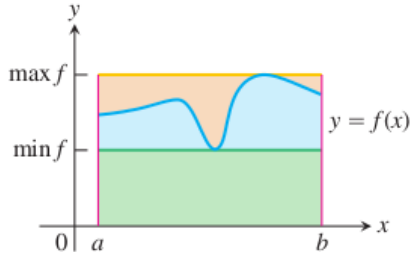
Sezgisel olarak bu anlamlı değil mi? Eğer sürekli bir fonksiyon var ise,  $f(a)$ 'dan  $f(b)$ 'ye giderken o aralıktaki her sayıya bir kez “ugramaya” mecburuz. Etraflarından dolasmamız mümkün değil, çünkü kesintili bir fonksiyon değil, kesintisiz / sürekli bir fonksiyonumuz var. Bu teoremin daha detaylı ispatı için daha ileri matematiksel kitaplara bakabilirsiniz.

### Maks-Min Esitsizliği

Eğer  $[a, b]$  aralığında  $f$ , maksimum değer  $\max f$ 'e ve minimum değer  $\min f$ 'e sahipse,

$$\min f \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \max f \cdot (b - a)$$

demektir.



Bu kural diyor ki  $f$ 'in  $[a, b]$  üzerindeki integrali hiçbir zaman  $f$ 'in minimum'u carpi  $[a, b]$  aralığının uzunluğu'ndan küçük olamaz, ve  $f$ 'in maksimumu carpi  $[a, b]$  aralığının uzunluğu'ndan büyük olamaz.

Ispat

Eğer  $(b - a)$ 'yi  $\sum_{k=1}^n \Delta x_k$  olarak gorursek

$$\min f \cdot (b - a) = \min f \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \min f \cdot \Delta x_k$$

$[a, b]$  aralığındaki herhangi bir deger  $c_k$  için

$$\leq \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

Oyle degil mi?  $\min f$  degeri en küçük deger ise,  $[a, b]$  aralığındaki herhangi bir nokta  $c_k$ 'nin  $f$  degeri bu degere ya esit, ya da ondan buyuktur. Yani  $\min f \leq f(c_k)$ . Devam edersek

$$\leq \sum_{k=1}^n \max f \cdot \Delta x_k$$

Ustteki benzer mantigi takip ediyor, bu sefer  $f(c_k) \leq \max f$ . Son ifadedeki  $\max$ 'i disari alabiliriz.

$$= \max f \sum_{k=1}^n \Delta x_k$$

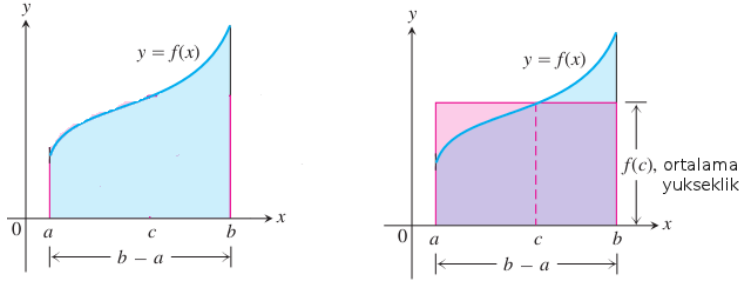
$$= \max f (b - a)$$

### Ortalama Deger Teoremi

Eger  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  arasinda surekli ise o zaman  $[a, b]$  araliginda olan bir  $c$  noktasinda

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

esitligi dogru olmalidir. Yani alttaki resimde sol grafikteki mavi alanin  $b-a$  ile bolunerek elde edilen ortalama degeri,  $[a, b]$  araligindaki bir  $c$  uzerinden  $f(c)$ 'ye muhakkak esittir. Ya da bir kenari  $f(c)$ , digeri  $b-a$  olan bir diktortgenin alani (alt sagdaki resim), mavi alanin tamamina esit olacaktir.



Maks-Min Esitsizliginin iki tarafini  $b-a$ 'ya bolerek

$$\min f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \max f$$

elde ederiz. Eger Gecis Degeri Teorisi dogruysa,  $\min f$  ve  $\max f$  arasindaki tum noktalar ziyaret edilmelidir. O zaman boyle bir  $f(c)$  kesinlikle var demektir.

### Calculus'un Temel Teoremi

#### Teori

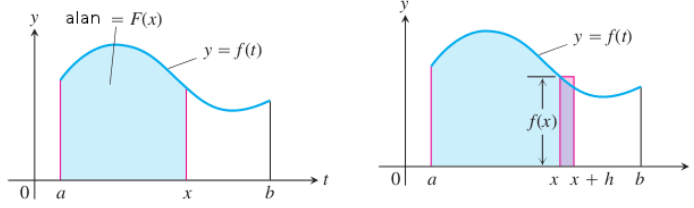
Eger  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  arasinda surekli ise o zaman

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

funksiyonu da  $[a, b]$  arasinda sureklidir, ve bu fonksiyonun turevi  $f(x)$ 'in kendisidir.

Yani

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$



İspat

Turevin tanımını direk  $F(x)$  üzerinde uygulayalım,  $[a, b]$  içinde olan  $x$  ve  $x+h$  aralığını alalım, ve

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

bolumunun limitinin,  $h \rightarrow 0$  iken,  $f(x)$ 'e gittigini gostermeye calisalim.  $F(x+h)$  ve  $F(x)$  fonksiyonlarini entegralleri uzerinden tanimlayalim. O zaman ustteki formulun bolum kismi

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

Entegrallerin toplam kuralina gore ustteki formulun sag tarafı

$$\int_x^{x+h} f(t)dt$$

ifadesidir. O zaman bolumun tamamı

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Ortalama Deger Teoremine gore, ustteki esitligin sagindaki ifadenin,  $x$  ve  $x+h$  araliginda  $f$ 'in aldigi degerlerden birine aynen esit oldugunu biliyoruz. Yani o aralıktaki bir  $c$  icin

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)$$

kesinlikle dogru olmalı. Simdi,  $h \rightarrow 0$  oldukca,  $x+h$  mecburen  $x$ 'e yaklasmak zorunda kalacaktır, cunku  $c$ ,  $x$  ile  $x+h$  arasında sıkışıp kalmistir.  $f$  fonksiy-

onu  $x$  noktasında sürekli olduğuna göre, o zaman  $f(c)$ ,  $f(x)$ 'e yaklaşılmalıdır.

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

Şimdi elimizdeki bu bilgiyle başa dönersek,

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

$$= f(x)$$

Kaynaklar

Thomas Calculus 11. Baskı, sf. 130

Thomas Calculus 11. Baskı, sf. 347

Thomas Calculus 11. Baskı, sf. 358