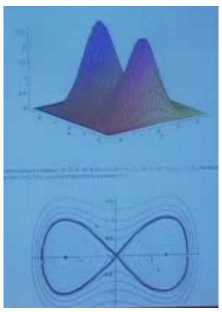
MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 10

Bugunku konumuz kritik noktalarin minima mi, maksima mi, yoksa eger noktasi mi oldugunu anlama teknikleri. Kritik noktalar kismi turevlerin hepsinin sifir oldugu noktadir, mesela 2 degiskenli fonksiyon icin $f_x = 0$, $f_y = 0$ olmalidir.

3 degisik kritik nokta cesidi gorduk, lokal minima, lokal maksima, ve eger (saddle) noktalari.

Bir fonksiyonun birden fazla kritik noktasi olabilir. Mesela soyle bir fonksiyon



Soru: Bir kritik noktaya bakarken, hangi kategoriye ait oldugunu nasil anlayacagiz? Bir diger soru, global (lokal olmayan) minimum ve maksimum noktalarini nasil buluruz? Ustteki resimdeki fonksiyonda iki lokal maksimum var. Her ikisini de deneyebiliriz, hangisi daha yuksek ise onu aliriz. Diger yandan, bu fonksiyonun minimumu herhangi bir "noktada" degil, maksimumdan uzakta, fonksiyonun en dis yerlerinde, sonsuzlukta.

Yani global minimum ve maksimum illa bir noktada olmayabilir, sonsuzlukta olabilir, o zaman bu kosulu test etmeliyiz, fonksiyonumuzun sonsuzluga giderken nasil davrandigini anlamaliyiz.

Birinci soruyu cevaplayalim

Ikinci Turev Testi

$w = ax^2 + bxy + cy^2$

Bu fonksiyonun kritik noktasi orijinde. Eger turevleri alirsak, ve sifira esitlersek, sonuc $x, y = 0$ cikar. Ayni sekilde eger w'nin lineer yaklasiksallamasini yapsaydik esitlik sagindaki butun terimlerin x, y kucuk iken x, y'den kucuk oldugunu goruruz, o zaman grafigin tegeti $w = 0$ noktasindadir. Eger orijinden ufak bir adim atarsak, o adimlarin fonksiyon uzerindeki etkisi kare alma operasyonu yuzunden daha kuculur ($0.001^2 = 0.00001$ mesela). Herhangi bir noktadaki egim fonksiyon / degiskenlerdeki artis olduguna gore, orijine yakin olan egim yukari dogru neredeyse yok gibidir.

Ornek

$w = x^2 + 2xy + 3y^2$

Ustteki formulu su sekilde donusturursek

$w = (x + y)^2 + 2y^2$

Ustte iki karenin toplami var, karelerin ikisi de negatif olamaz, o zaman minimum'un orijin olmasi gerekir (negatiflesmeden olabilecek en kucuk deger oradadir).

Birazdan gorecegiz ki ustteki kare tamamlama (completing the square) yontemini a, b, c katsayilarini iceren genel durum icin de kullanabiliriz.

Once $a \neq 0$ farz etmem lazim, yoksa teknigin geri kalani mumkun olmaz.

$$w = a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy\right) + cy^2$$

Eger bir kare denklemin orta teriminde $b/a\ xy$ (ustteki gibi) elde etmek istiyorsam, kare icinde x ve $b/2a\ y$ terimlerini kullanirim, cunku bu iki terimin birbirleri ile carpilip iki kere toplanmalari $b/a\ xy$ sonucunu verir. O zaman

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + ...$$

Hala isimiz bitmedi, kare icine koyulan y yuzunden ortaya cikan y^2 bazli terimi dengelemek gerekiyor,

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)y^2$$

$$w = \frac{1}{4a}\left[4a^2\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \left(4ac - b^2\right)y^2\right]$$