1 Rasgele İzdüşümü (Random Projection) ile SVD

Bir matrisin rasgele izdusumunu almak, yani onu rasgele bir sayilardan olusan bir matris ile sagdan carpmak bize ne kazandirir? Elde edilen yeni matrisin ozellikleri nedir?

Suradaki [1] arastirmaya gore bu yeni matristeki satirlar (veri noktalarimiz yani) arasindaki mesafeler fazla degismemektedir. Burada "fazla" olarak niteledigimiz [1]'de daha detayli olarak isleniyor. Yapay Ogrenim baglaminda rasgele izdusumun bize kazandirdigi en onemli fayda ana matris A uzerinde boyut kucultme yapabilmemizdir. Diyelim ki $m \times n$ boyutundaki A'yi $n \times k$ boyutunda bir rasgele matris Ω ile carptigimiz zaman elde ettigimiz $m \times k$ boyutunda yeni bir matris. Eger n milyarlar boyutunda ise, bizim tanimladigimiz bir k uzerinden matris boyutunu (kolonlari) 100 ya da 1000'e indirebilmis oluyoruz.

Literaturde hedeflenenin $||A - \tilde{A}|| < \epsilon$

yani A'dan onun yaklasiksal benzeri cikartilinca bu farkin normunun cok ufak ϵ olmasinin amaclandigi gorulecektir. $\tilde{A}$'yi elde etmek icin su mantigi uygulayalim

$A = QR$

$Q^T A = R$

$QQ^T A = QR$

$QQ^T A = A$

Simdi eger Q yaklasiksal olarak bulunmus, ve daha dusuk boyutta ise, otomatik olarak ustteki A da yaklasiksal olacaktir.

Bunun icin bir rasgele matris yaratilir, bu matrisin her ogesinin bir 0 merkezli 1 standart sapmali Gaussian'dan orneklenebilir, sonra bu matris A ile carpilir

$Y = A\Omega$

Ortaya cikan Y'nin A'nin "menzilini (range)" yaklasiksal olarak temsil ettigi de soylenir, bu mantiklidir, cunku bir matrisin menzilinin ne oldugunu dusunursek, onun tum kolonlarinin her turlu carpilip toplanmasinin olusturdugu uzay bu menzildir. Simdi kolonsal carpim gorusunu kullanirsak, A'yi bir baska rasgele matris ile sagdan carpmak, evet, yaklasiksal olarak onun kolonlarini degisik kombinasyonlarda, birbirleriyle toplamak anlamina gelecektir, ortaya cikan yeni matris te A'nin menzilini kismen temsil edebilir. Simdi bu menzilden "geriye giderek" onun bazini ortaya cikarabiliriz. Unutmayalim, yeni matris A'nin boyutu azaldi, artik elimizde $m \times k$ boyutunda bir matris var.

$Y = QR$

ile Q matrisini elde ederiz. Bu guzel bir sonuc. Simdi ustteki $QQ^T A = A$ ifadesine geri donelim,

$\tilde{A} = QQ^T A$

Eger

$Q^T A = B$

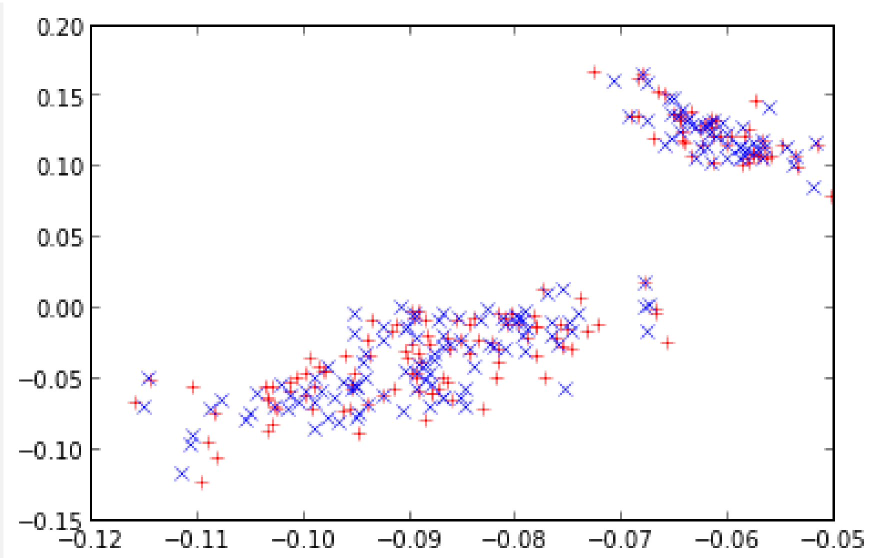
dersek,

$\tilde{A} \approx QB$

seklinde yeni bir ayristirma elde ederiz. Ayrica bu A'ya yaklasiksal olarak ulasmanin baska bir yoludur da. Elimide B ve Q var ise (ki var, cunku B rasgele izdusumden geldi, Q bunun uzerinde QR ayristirmasi sonrasi elde edildi), bu iki matrisin carpimi bize yaklasiksal A'yi verecektir. Bu yaklasiksal $\tilde{A}$ uzerinde SVD gerceklestirmek te mumkundur. Yeni matrisin boyutlari $k \times n$ olacaktir.

Test olarak IRIS veri seti uzerinde

```
import numpy.random as rand
import numpy.linalg as lin
import pandas as pd

df = pd.read_csv("iris.csv",sep=',')

A = np.array(df)[:,0:4]

n = 4; k = 3

Omega = rand.randn(n,k)

# Rasgele SVD

Y = np.dot(A, Omega)

Q, R = lin.qr(Y)

B = np.dot(Q.T, A)

Uhat, Sigma, V = lin.svd(B)

U = np.dot(Q, Uhat)

plt.plot(U[:,0],U[:,1],'r+')

plt.hold(True)

# Direk A uzerinde SVD

U, Sigma, V = lin.svd(A);

plt.plot(U[:,0],U[:,1],'bx')

plt.show()
```



Rasgele izdusum sonrasi SVD noktalari kirmizi, direk SVD noktalari mavi ile gosterildi. 4 boyutu 3 boyuta izdusum yaptik, ve ardindan ek bazi operasyonlar sonrasi SVD aldik. Sonuc goruldugu gibi oldukca birbirine yakin.

Kaynaklar

[1] Halko, N., Randomized methods for computing low-rank approximations of matrices

[2] Gupta, A., Dasgupta, S., An Elementary Proof of a Theorem of Johnson and Lindenstrauss