

# 1 Rasgele İzdüşümü (Random Projection) ile QR, SVD

Bir matrisin rasgele izdusumunu almak, yani onu rasgele bir sayılardan olusan bir matris ile sagdan carpmak bize ne kazandırır? Elde edilen yeni matrisin ozellikleri nedir?

Suradaki [1] arastirmaya gore bu yeni matristeki satirlar (veri noktalarimiz yani) arasindaki mesafeler fazla degismemektedir. Burada “fazla” olarak niteledigimiz [1]’de daha detayli olarak isleniyor. Yapay Ogrenim baglaminda rasgele izdusumun bize kazandirdigi en onemli fayda ana matris  $A$  uzerinde boyut kucultme yapabilmemizdir. Diyelim ki  $m \times n$  boyutundaki  $A$ ’yi  $n \times k$  boyutunda bir rasgele matris  $\Omega$  ile carptigimiz zaman elde ettigimiz  $m \times k$  boyutunda yeni bir matris. Eger  $n$  milyarlar boyutunda ise, bizim tanimladigimiz bir  $k$  uzerinden matris boyutunu (kolonlari) 100 ya da 1000’e indirebilmiş oluyoruz.

Literaturde hedeflenenin  $\|A - \tilde{A}\| < \epsilon$

yani  $A$ ’dan onun yaklasiksal benzeri cikartilınca bu farkın normunun çok ufak  $\epsilon$  olmasının amaçlandığı gorulecektir.  $\tilde{A}$ ’yi elde etmek için su mantığı uygulayalım

$$A = QR$$

$$Q^T A = R$$

$$QQ^T A = QR$$

$$QQ^T A = A$$

Simdi eger  $Q$  yaklasiksal olarak bulunmuş, ve daha dusuk boyutta ise, otomatik olarak ustteki  $A$  da yaklasiksal olacaktır.

Bunun için bir rasgele matris yaratilir, bu matrisin her ogesinin bir 0 merkezli 1 standart sapmalı Gaussian’dan orneklenebilir, sonra bu matris  $A$  ile carpilir

$$Y = A\Omega$$

Ortaya cikan  $Y$ ’nin  $A$ ’nin “menzilin (range)” yaklasiksal olarak temsil ettigi de soyleneir, bu mantıklıdır, cunku bir matrisin menzilin ne oldugunu düşünürsek, onun tüm kolonlarının her türlü carpilip toplanmasının olusturdugu uzay bu menzildir. Simdi kolonsal carpım gorusunu kullanırsak,  $A$ ’yi bir baska rasgele matris ile sagdan carpmak, evet, yaklasiksal olarak onun kolonlarını degisik kombinasyonlarda, birbirleriyle toplamak anlamına gelecektir, ortaya cikan yeni matris te  $A$ ’nin menzilin kısmen temsil edebilir. Simdi bu menzilden “geriye giderek” onun bazini ortaya cikarabiliriz. Unutmayalım, yeni matris  $A$ ’nin boyutu azaldi, artık elimizde  $m \times k$  boyutunda bir matris var.

$$Y = QR$$

ile  $Q$  matrisini elde ederiz. Bu guzel bir sonuc. Simdi ustteki  $QQ^T A = A$  ifadesine geri donelim,

$$\tilde{A} = QQ^T A$$

Eger

$$Q^T A = B$$

dersek,

$$\tilde{A} \approx QB$$

sekinde yeni bir ayristirma elde ederiz. Ayrica bu  $A$ 'ya yaklasiksal olarak ulasmanin baska bir yoludur da. Elimide  $B$  ve  $Q$  var ise (ki var, cunku  $B$  rasgele izdusumden geldi,  $Q$  bunun uzerinde  $QR$  ayristirmasi sonrasi elde edildi), bu iki matrisin carpimi bize yaklasiksal  $A$ 'yi verecektir. Bu yaklasiksal  $\tilde{A}$  uzerinde SVD gerceklestirmek te mumkundur. Yeni matrisin boyutlari  $k \times n$  olacaktir.

Test olarak IRIS veri seti uzerinde

```
import numpy.random as rand
import numpy.linalg as lin
import pandas as pd

df = pd.read_csv("iris.csv", sep=',')

A = np.array(df)[: , 0:4]

n = 4; k = 3

Omega = rand.randn(n,k)

# Rasgele SVD

Y = np.dot(A, Omega)

Q, R = lin.qr(Y)

B = np.dot(Q.T, A)

Uhat, Sigma, V = lin.svd(B)

U = np.dot(Q, Uhat)

plt.plot(U[:,0], U[:,1], 'r+')

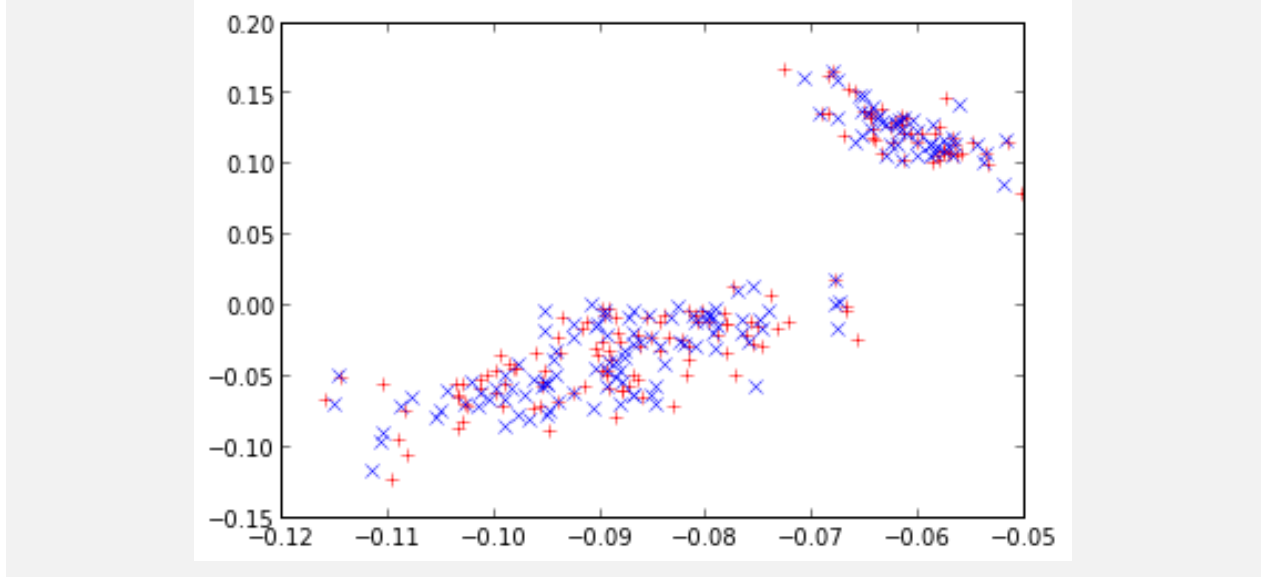
plt.hold(True)

# Direk A uzerinde SVD

U, Sigma, V = lin.svd(A);

plt.plot(U[:,0], U[:,1], 'bx')

plt.show()
```



Rasgele izdusum sonrası SVD noktaları kırmızı, direk SVD noktaları mavi ile gösterildi. 4 boyutu 3 boyuta izdusum yaptık, ve ardından ek bazı operasyonlar sonrası SVD aldık. Sonuç görüldüğü gibi oldukça birbirine yakın.

Kaynaklar

- [1] Halko, N., Randomized methods for computing low-rank approximations of matrices
- [2] Gupta, A., Dasgupta, S., An Elementary Proof of a Theorem of Johnson and Lindenstrauss