MIT OCW Cok Degiskenli Calculus - Ders 5

Bir cizginin formulunu iki duzlemin kesisimi olarak gorduk, fakat bu sekilde bir tanim cogunlukla bir cizgiyi tanimlamak icin en rahat / uygun yol degildir, cunku elinizde bazi denklemler var, bunlari cozmekle ugrasmak lazim, vs.

Soyle bir yontem daha iyi olmaz mi? Cizgi uzerinde bir nokta hayal edelim, ve bu noktanin, her zaman adiminda, cizgimizin oldugu yerlerden gectigini dusunelim. Bu tur denklemlere parametrik denklem ismi veriliyor.

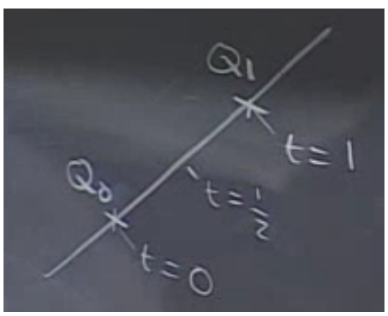
Ornek

Cizgi uzerinde iki nokta verelim.

$Q_0 = (-1, 2, 2)$

$Q_1 = (1, 3, -1)$

Guzel, bu iki nokta var ama otekilerini nasil tanimlariz? Bu iki noktatinin arasinda, sonrasinda, oncesinde olan tum noktalar da cizgiye dahildir.



Zaman araliklarini oyle dusunelim ki zaman indeksi sifir ($t = 0$) noktasinda, cizgi Q_0 uzerinde, tek birim adim atildiginda ($t = 1$) Q_1 uzerinde, gibi. O zaman yarim birim zamanda tam iki nokta ortasinda.

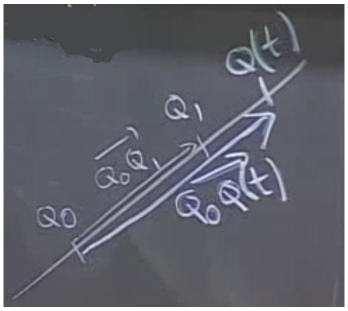
Boylece cizgiyi temsil etmenin yolu onu t bazinda hareket eden noktanin gectigi yerler olarak tanimlamak. Bu temsilin en basit hali eger hareket sabit hizda olursa olur.

t anindaki pozisyon $Q(t)$ nedir?

Sorunun cevabini soyle vermeye baslayabiliriz: $Q_0\vec{Q}(t)$ vektoru $Q_0\vec{Q}_1$ birbiriyle ortalidir. Bu oranti neye esittir?

Bu oran t'ye esittir. O zaman

$Q_0\vec{Q}(t) = t\ Q_0\vec{Q}_1$



O zaman iddia ediyorum ki bu formulu kullanarak ornegimizdeki hareket eden noktanin yer formulunu bulabilirim.

$Q_0\vec{Q}(t) = t\ \ < 2, 1, -3 >$

Simdi cizgi uzerinde hareket eden noktanin formulu $Q(t)$'yi su sekilde temsil edelim

$Q(t) =< x(t), y(t), z(t) >$

O zaman

$x(t) + 1 = t\ 2$

$y(t) - 2 = t$

$z(t) - 2 = -3t$

Usttekiler, alttaki su formun acilimindan ibaret aslinda

$Q(t) = Q_0 + t\ Q_0\vec{Q}_1$

Ustteki uc formul bu derste gordugumuz ilk parametrik cizgi formulu. Formulun parcalari olan $x(t), y(t), z(t)$ sadece t'nin fonksiyonudurlar, ve hep t ile bir katsayinin carpimi + bir sabit formundadirlar. t'nin katsayilari cizgi uzerindeki vektor hakkinda bilgi verir, ve sabitler ise $t = 0$ aninda nerede oldugumuzu gosteren baslangic degerleridirler.

Uygulama - Bir Duzlem ile Kesisme

Duzlem $x + 2y + 4z = 7$. Cizgi biraz onceki formul olsun. Kesisme var midir, var ise neresidir?

Once su soruyu soralim kendimize. $x + 2y + 4z = 7$ duzlemine gore, $Q_0 = (-1, 2, 2)$ ve $Q_1 = (1, 3, -1)$ noktalari duzlemin

1. Ayni tarafinda
2. Farkli taraflarinda
3. Bir tanesi duzlem uzerinde
4. Karar veremiyorum

Cevaplayin.

Q_0 ve Q_1 noktalarini duzlem formulunun sol tarafina sokariz. Q_0 icin sonuc > 7, duzlem uzerinde degil, Q_1 icin sonuc < 7, yine duzlem uzerinde degil. Peki noktalar duzlemin hangi tarafinda? Ters tarafinda, cunku biri < 7, oteki > 7 sonuc verdi. Bir duzlem uzayi iki yari-parcaya (halfspace) ayirir ve noktalar bu ayri parcalardadirlar. Dogru cevap 2.

Uygulamamizda cevaplanmayan bir soru daha var. Kesisme noktasi neresi? $Q(t)$ nedir? Soyle

$x(t) + 2y(t) + 4z(t)$

$= (-1 + 2t) + 2(2 + t) + 4(2 - 3t)$

Basitlestirelim

$= -8t + 11$

Bu formulu 7 ile karsilastiralim cunku $Q(t)$ nin duzlem uzerinde oldugu an $-8t + 11 = 7$ oldugu andir. Cebirsel olarak t'yi elde edebiliriz, sonuc $t = 1/2$.