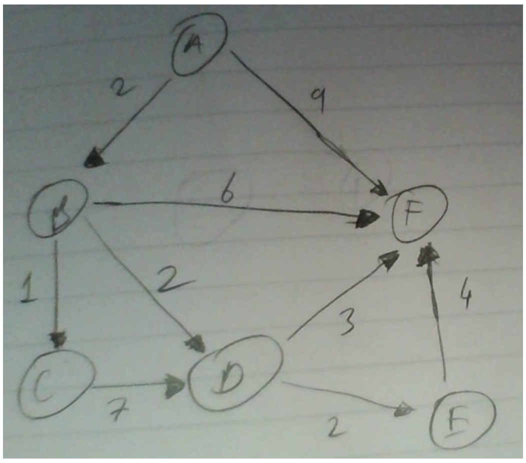
Dinamik Programlama

Dinamik programlamanin (DP) temelinde ardi ardina verilen kararlarin hesaplanmasi fikri yatar; her anda, her verilen karar baska karar seceneklerini ortaya cikarabilir, ve seceneklerin arasindan bir tanesi secilmelidir. Amac en iyi karar zincirini bulmaktir. Bu amac ve metot kismen "acgozlu algoritmalar (greedy algorithms)" olarak bilinen algoritmalarin yaptigina benzer fakat acgozlu algoritmalar, mesela en kisa yolu bulmaya ugrasirken, gezilen dugumlerde sadece "o an icin" en iyi secimi yapar, fakat nihai sonuc goze alindigi zaman bu anlik secimler en iyi sonucu vermeyebilir; Mesela alttaki grafige bakarsak,




diyelim ki `a` noktasindan `f` noktasina en kisa yoldan ulasmaya calisiyoruz - acgozlu algoritma `a,b,c,d` uzerinden gidis yapardi cunku her an, sadece o an icin en iyi olani secerdi. Fakat nihai sonuca bakarsak secilen yolun en kisa yol olmadigini goruruz. En iyi yol `a,b,d` uzerinden giden yoldur.

Not: Ustteki cizit / ag yapisi (graph), yonlu ve çevrimsiz (directed, acyclic graph -DAG-) diye bilinen bir yapidir. Tipik kisa yol problemleri bu yapilar uzerinde calisirlar.

DP problemleri ozellikle bir problemi alt problemlere bolebildigimiz zaman faydalidirlar, ve bu alt problemler tekrar tekrar hesaplaniyorlarsa da bu daha iyidir, cunku DP o alt problemleri onbellekleyerek tekrar hesaplanmadan geri getirilmelerini saglayabilir.

Mesela ustteki en kisa yol problemini DP ile cozelim.

Once bazi teorik, mantiksal konular: tumevarimsal olarak dusunelim. Diyelim ki ustteki DAG'de $a, f$ arasindaki en kisa yolu kesinlikle "biliyoruz". Ve yine diyelim ki bu yol uzerinde / bir ara nokta $x$ noktasi var. O zaman, $a, x$, ve $x, f$ arasindaki yollar da tanim itibariyle en kisadir. Ispatlayalim: eger mesela $x, f$ arasindaki en kisa yol bildigimizden *baska* olsaydi, o zaman eldekini atip o yolu kullaniyor olurduk (en kisa oldugunu kesin biliyoruz ya), ve bu sefer o alternatif en kisa olurdu. Fakat ilk basta en kisa yolu bildigimiz faraziyesi ile basladik. Bir celiski elde ettik, demek ki ara noktanin kisaligi dogrudur □

Bu ispattan hareketle kisa yolu tek numerik bir deger olarak hesaplamaya ugrasabiliriz.

Oyle bir fonksiyon $d(v)$ olsun ki herhangi bir $v$ nodu icin o nod'dan bitis noktasina olan en kisa uzakligi kesin biliyor olsun (dikkat, bu hesabin nasil olacagini dusunmuyoruz simdilik, sadece olabilecegini, olmus oldugunu farz ediyoruz). Cogu tumevarimsal tasarimda oldugu gibi hesabin kendisinin ozyinelilik (recursive) cagri zincirinin mekanigi icinde halolmasini amacliyoruz. Dogru olan bir ifadeyi dusunuyoruz oncelikle, ve hesabin kendisini surekli bir sonraki noktaya erteliyoruz.

Devam edelim: $u, v$ arasindaki parca mesafeler $w(u, v)$'dir. Simdi, eger bir ara nokta $u$'ya gelmissek -yine tumevarimsal olarak dusunmeye devam ediyoruz- bu noktanin her komsusu $w$ icin $d(w)$'yi "bildigimize" gore, en kisa yol icin tek yapmamiz gereken her secim aninda en minimal $w(u, v) + d(v)$'yi $u$'nun uzakligi olarak almaktir.

Veri yapisi olarak DAG'i alttaki gibi gosterelim,

```
DAG = {
    'a': {'b':2, 'f': 9},
    'b': {'d':2, 'c':1, 'f': 6},
    'c': {'d':7},
    'd': {'e':2, 'f': 3},
    'e': {'f':4},
    'f': {}
}
```

Boylece $w(u, v)$ basit bir Python sozluk (dictionary) erisimi haline geliyor, mesela `a,b` arasi parca mesafe icin

```
print DAG['a']['b']
```

```
2
```

En kisa yolu bulacak program

```
from functools import wraps

def memo(func):
    cache = {}
    @wraps(func)
    def wrap(*args):
        if args not in cache:
            print 'onbellekte yok -', args[0]
            cache[args] = func(*args)
        else: print 'onbellekte var -', args[0]
        return cache[args]
    return wrap
```

```
def rec_dag_sp(W, s, t):
    @memo
    def d(u):
        print 'Dugum:' + u[0]
        if u == t:  print 'Son nokta t, geri donus'; return 0
        dist = min(W[u][v]+d(v) for v in W[u])
        print 'Geri donus,',u,'uzerindeyiz, mesafe=',dist
        return dist
    return d(s)

dist = rec_dag_sp(DAG, 'a', 'f')
print 'toplam mesafe=', dist
```

```
onbellekte yok - a
Dugum:a
onbellekte yok - b
Dugum:b
onbellekte yok - c
Dugum:c
onbellekte yok - d
Dugum:d
onbellekte yok - e
Dugum:e
onbellekte yok - f
Dugum:f
Son nokta t, geri donus
Geri donus, e uzerindeyiz, mesafe= 4
onbellekte var - f
Geri donus, d uzerindeyiz, mesafe= 3
Geri donus, c uzerindeyiz, mesafe= 10
onbellekte var - d
onbellekte var - f
Geri donus, b uzerindeyiz, mesafe= 5
onbellekte var - f
Geri donus, a uzerindeyiz, mesafe= 7
toplam mesafe= 7
```

Simdi cagri mekaniginin hakikaten nasil isledigini gorelim.

Baslangic $u$, oradan, minimum secerken, surekli $d()$ cagrisi yapiyoruz, yani $d()$ kendini cagiriyor. Cagrinin geri donmesinin tek yolu son noktaya erismek. Bu ne demektir? Programimiz daha hesap yapmadan "derinligine bir dalis" yapiyor. Son noktalara gelene kadar ozyineli cagrilari ardi ardina uyguluyor, esas hesaplari geri donus sirasinda yapiyor. Bu nasil ise yariyor? Ayrica onbelleklemenin hakikaten isleyip islemedigini nasil bilecegiz? Ya da onbellekteki bir degerin hep en iyisi oldugunu nereden bilecegim?

Not: Bu yaklasimda, hemen belirtelim, onbellek degerini, bir kez set edildi mi, hic degistirmeye gerek yok.

Nokta `d`'ye bakalim. Bu noktanin mesafesi (yani son nokta `f`'ye uzakligi) kararlastirilirken algoritma `d`'nin her komsusuna bakacaktir, bunu `for v in W[u])` ile yapacaktir. Her komsu icin `f`'ye gelene kadar o yol derinligine takip edilecektir. Mesela ustteki ciktida goruyoruz ki `d` sonrasi iki komsu `e,f` icin once `d-f` ve `d-e-f` gidisi yapilmistir (amac hep o son noktaya ulasmak, unutmayalim). 'Komsulara bakma ve aralarindan en azi secme" mantigi tum bu yollar denenene kadar bekleyecektir, ancak hepsi bittikten sonra iclerinden bir minimum sececektir.

Iste simdi niye her dugumdeki minimum hesabinin en iyisi oldugunu anliyoruz, cunku o noktadan nihai noktaya varis icin tum alternatifler deneniyor. O derine dalisin sonuclari arasindan bir tanesi seciliyor. Onbellekteki deger bu sebeple bir kez set ediliyor, ve hic degismiyor. Tabii ki onbellekteki deger tekrar tekrar kullanilabiliyor, mesela `c` icin bir `d` uzakligi gerektiginde bu onbellekten servis edilecektir.

Ve her dugumdaki minimum hesabi en iyiyse, bu hesaplari kullanan baslangica yakin noktalarin hesabi da dogal olarak en iyisi (kisasi) olacaktir. Basta tumevarimsal olarak belirttigimizin tekrar ifade edilmesidir bu.

Kisa Yolu Bulmak

Mesafe hesabi boyle. Peki yolun kendisini nasil biliriz? Bunun icin

```
parent = {}

def rec_dag_sp2(W, s, t):
    @memo
    def d(u):
        if u == t: return 0
        distances = [W[u][v]+d(v) for v in W[u]]
        min_dist = min(distances)
        parent[u] = list(W[u])[np.argmin(distances)]
        print 'Geri donus,',u,'uzerindeyiz, mesafe=',min_dist
        return min_dist
    return d(s)

print rec_dag_sp2(DAG, 'a', 'f')

print parent
```

```
onbellekte yok - a
onbellekte yok - b
onbellekte yok - c
onbellekte yok - d
onbellekte yok - e
onbellekte yok - f
Geri donus, e uzerindeyiz, mesafe= 4
```

```
onbellekte var - f
Geri donus, d uzerindeyiz, mesafe= 3
Geri donus, c uzerindeyiz, mesafe= 10
onbellekte var - d
onbellekte var - f
Geri donus, b uzerindeyiz, mesafe= 5
onbellekte var - f
Geri donus, a uzerindeyiz, mesafe= 7
7
{'a': 'b', 'c': 'd', 'b': 'd', 'e': 'f', 'd': 'f'}
```