

Processamento digital de imagens

Agostinho Brito

2020

- Usado para estimar movimento de pixels entre quadros de uma sequência.
- Aplicações
 - Rastreio de objetos
 - Estabilização de vídeo
 - Compressão de imagens
 - Recuperação de formas a partir do movimento
- Algumas assunções são realizadas:
 - As intensidades de cor de um pixel ou grupo de pixels não mudam drasticamente entre dois quadros da sequência.
 - A vizinhança do pixel tem movimento similar.

- Considere um pixel de intensidade $I(x, y, t)$ que se move de Δx , Δy e Δt entre dois quadros consecutivos.
- Assumindo um movimento pequeno, percebe-se constância de brilho no pixel, de sorte que

$$I(x, y, t) = I(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t)$$

- Por expansão em série de Taylor, pode-se concluir que

$$I(x + \Delta x, y + \Delta y, t + \Delta t) = I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial I}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial I}{\partial t} \Delta t + \text{OrdemSuperior}$$

- Para os pequenos deslocamentos considerados e descartando-se os termos de ordem superior, produz-se a equação

$$\frac{\partial I}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial I}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial I}{\partial t} \Delta t = 0$$

- Dividindo-se a equação por Δt chega-se a

$$\frac{\partial I}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial I}{\partial t} \frac{\Delta t}{\Delta t} = 0$$

- Reescrevendo a equação anterior, chega-se a

$$I_x V_x + I_y V_y = -I_t$$

V_x e V_y representam o vetor que provocou o deslocamento do ponto entre os dois quadros.

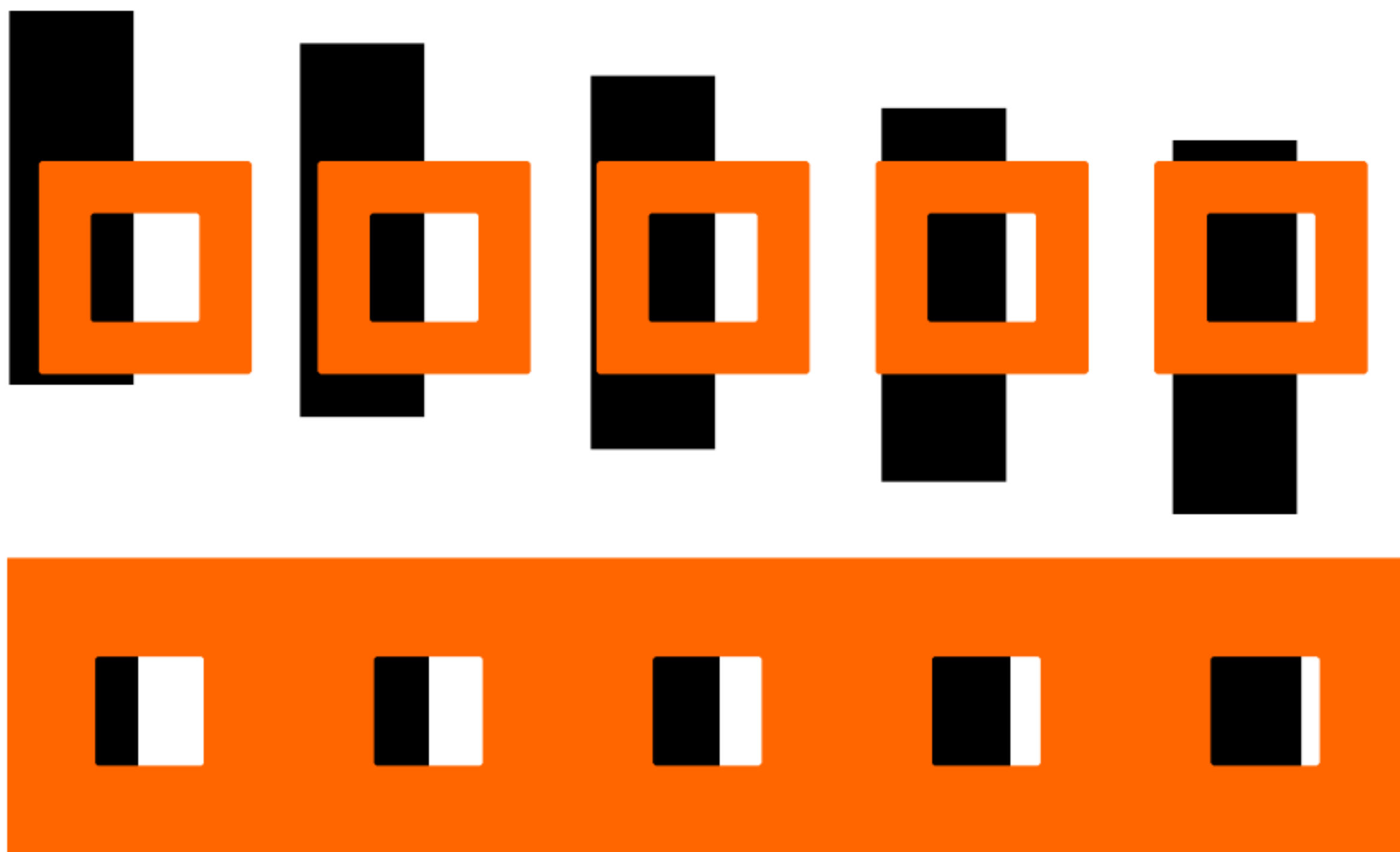
$I_x = \frac{\partial I}{\partial x}$ e $I_y = \frac{\partial I}{\partial y}$ representam a taxa de variação espacial do pixel nas direções x e y , respectivamente.

I_t representa a mudança de cor percebida na posição do pixel ao longo da sequência.

- Nesta equação, I_x , I_y e I_t pode ser determinados. Entretanto, as V_x e V_y permanecem incógnitas, de sorte que a equação não pode ser resolvida.
- As técnicas de fluxo óptico visam inserir restrições adicionais de modo a permitir que tal equação seja resolvida.
- A solução normalmente existe quando se é possível contornar o problema da abertura.

Fluxo óptico - problema da abertura

- O problema da abertura é a situação que ocorre quando o observador avalia o movimento de um objeto por uma janela de pequena abertura.
- A abertura impossibilita que o observador identifique com precisão a direção do movimento.
- Na ilustração abaixo, apenas o movimento horizontal é percebido pela câmera.



- Seleção de pontos para rastreamento, evitando o problema da abertura.
- Fluxo óptico esparsos.
- Fluxo óptico denso.

- Técnicas de fluxo óptico esparsos operam para um subconjunto de pontos de uma imagem selecionados para rastreamento.
- Necessitam de inicialização para escolha dos pontos de rastreamento.
- A escolha dos pontos deve minimizar o problema da abertura.

- Propõe uma técnica para detecção de cantos (esquinas).
- Cálculo da matriz Hessiana determinada para um ponto da imagem.

$$H(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \end{bmatrix}_p$$

- Cálculo da matriz Hessiana pela matriz da autocorrelação das imagens das derivadas segundas em uma pequena janela

$$H(p) \simeq \begin{bmatrix} \sum_{-K \leq i, j \leq K} I_x^2(x+i, y+j) & \sum_{-K \leq i, j \leq K} I_x(x+i, y+j)I_y(x+i, y+j) \\ \sum_{-K \leq i, j \leq K} I_x(x+i, y+j)I_y(x+i, y+j) & \sum_{-K \leq i, j \leq K} I_y^2(x+i, y+j) \end{bmatrix}$$

- A matriz de autocorrelação possui autovalores elevados naqueles pontos com arestas detectáveis por derivadas segundas em pelo menos duas direções.
- Harris propôs que se tomar o determinante dessa matriz e subtrair do traço, pode-se comparar essa diferença com um limiar pré-determinado.
- Shi e Tomasi propõem que tomando o menor dos dois autovalores e comparando com um limiar pré-estabelecido é suficiente para determinar se o ponto é rastreável (ponto de esquina).

- Proposto em 1981(!!!) para realizar cálculo de fluxo óptico denso.
- Suas propriedades permitem o uso em fluxo óptico esparsos.
- Pode ser aplicado em um subconjunto de pontos da imagem. Cada ponto define um retalho (patch) para ser rastreado.
- Usado para avaliar a movimentação de pontos em uma pequena janela ao redor do ponto de interesse.
- Assunções realizadas para funcionamento:

Constância de brilho

Os pixels não sofrem mudança de cor entre os quadros da cena

Pequenos movimentos

O retalho de superfície rastreada não sofre deslocamentos abruptos no tempo.

Coerência espacial

Os pontos do retalho possuem movimento similar de entre os quadros.

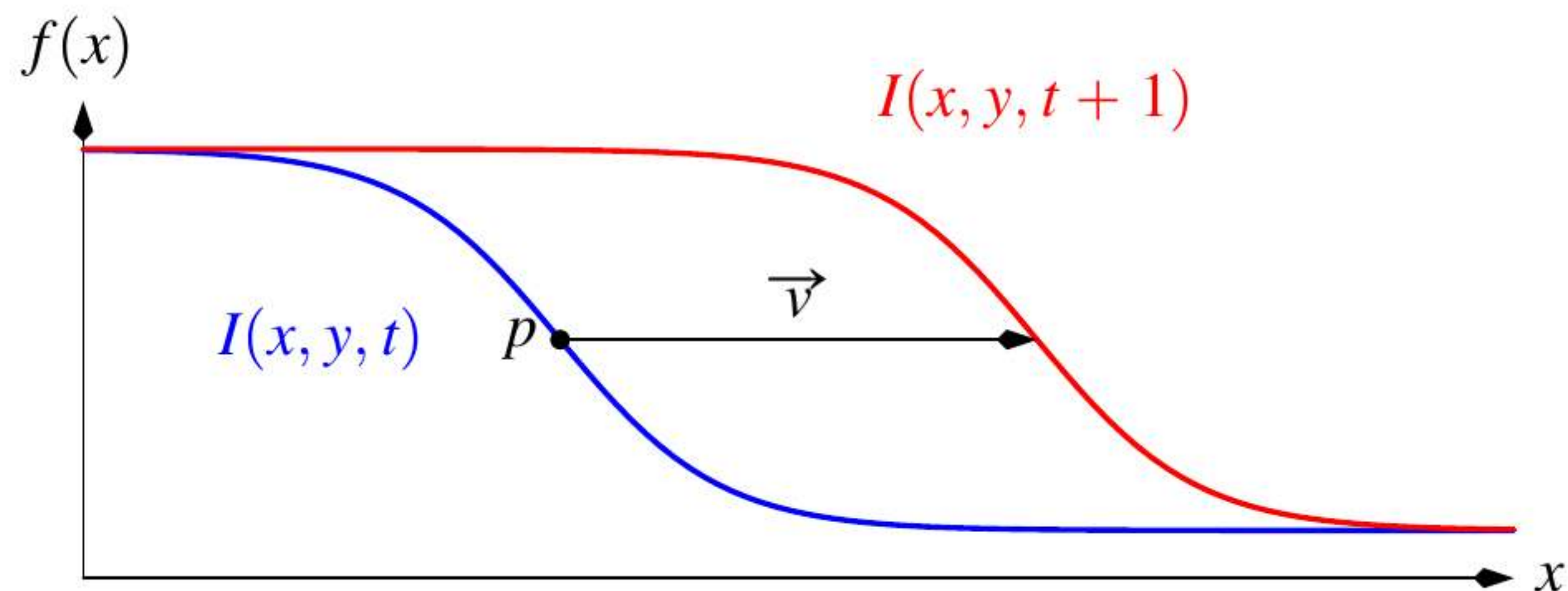
- A equação de fluxo óptico $I_x V_x + I_y V_y = -I_t$ pode ser reescrita como

$$\nabla I \cdot \vec{v} = -I_t$$

onde $\nabla I = \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$.

- Análise do fluxo óptico em uma dimensão.
- Aproximações sucessivas pelo método de Newton.
- Muitas incógnitas para uma só equação.

Fluxo óptico esparsu - método de Lucas-Kanade

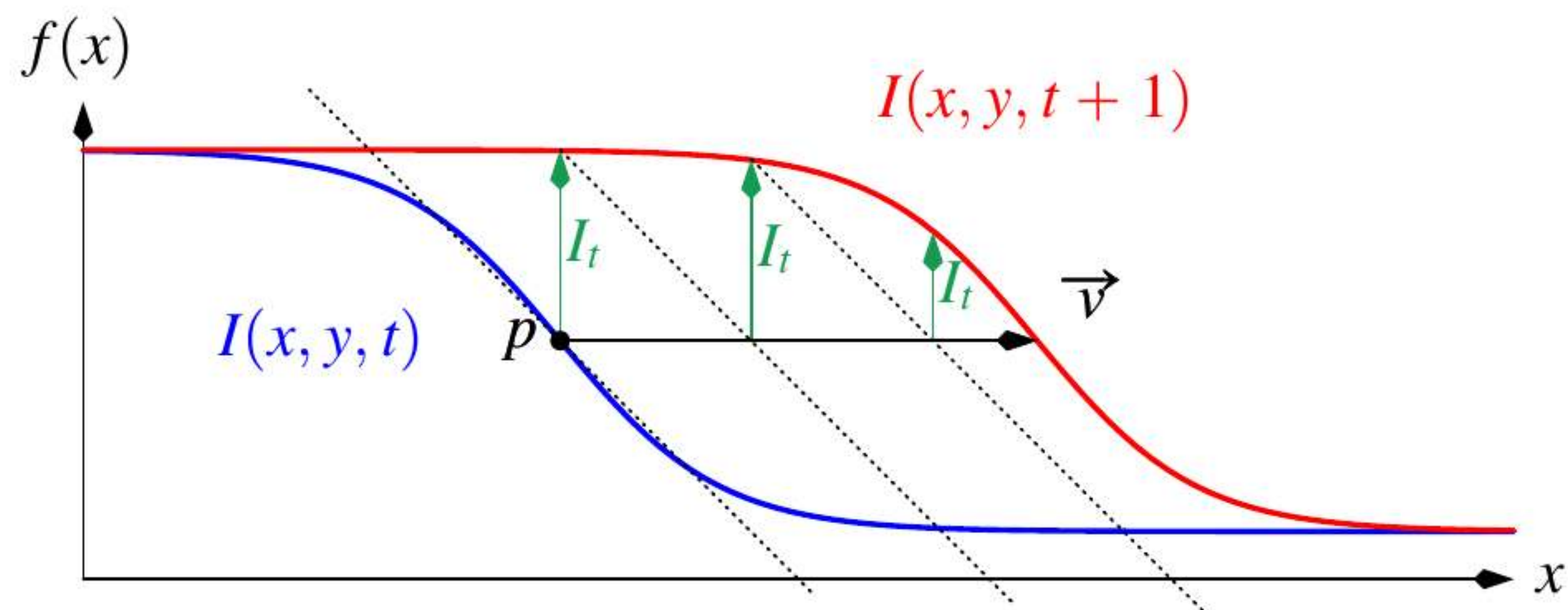


$$I_x = \left. \frac{\partial I}{\partial x} \right|_t \quad I_t = \left. \frac{\partial I}{\partial t} \right|_{x=p} \quad v \simeq -\frac{I_t}{I_x}$$

$$\vec{v}_{i+1} \leftarrow \vec{v}_i - \frac{I_t}{I_x}$$

I_x : derivada espacial no ponto p (gradiente).

I_t : derivada temporal (diferença de brilho em cada posição)



- Uma possível solução para resolver o problema das incógnitas é resolver a equação de movimento para uma vizinhança em torno do ponto.
- Exemplo: janela 5×5 .

$$\begin{bmatrix} I_x(p_1) & I_y(p_1) \\ I_x(p_2) & I_y(p_2) \\ \dots & \\ I_x(p_{25}) & I_y(p_{25}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_t(p_1) \\ I_t(p_2) \\ \dots \\ I_t(p_{25}) \end{bmatrix}$$

- A solução de sistemas como esse ($A\vec{x} = \vec{b}$) pode ser obtida utilizando o método dos mínimos quadrados (encontrando $\min(\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2)$)
- Pelo método dos mínimos quadrados,

$$(A^T A)\vec{x} = A^T \vec{b}$$

- A solução para essa equação será

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$$

- Para a solução de $\vec{x} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}$ existir, a matrix $(A^T A)$ deve ser inversível.
- A inversão é possível se todas as linhas da matriz A são linearmente independentes (*full rank*). Isso ocorre se ela tiver dois autovalores de valores elevados.
- Tal característica somente é obtida em regiões da imagem que possuem bordas ocorrendo em duas direções simultâneas.
- A situação onde a inversão da matriz não pode ser obtida leva ao problema da abertura.

- Para a maioria das câmeras de custo acessível, movimentos coerentes de um retalho não são comuns.
- O uso de pirâmides de imagens minimiza esse problema. Toma-se a imagem original e obtém-se uma versão escalada de menor tamanho possível para rastrear os pontos.
- Realiza-se a correspondência e refina-se em uma versão da imagem em escala maior até que o tamanho da imagem original seja atingido.

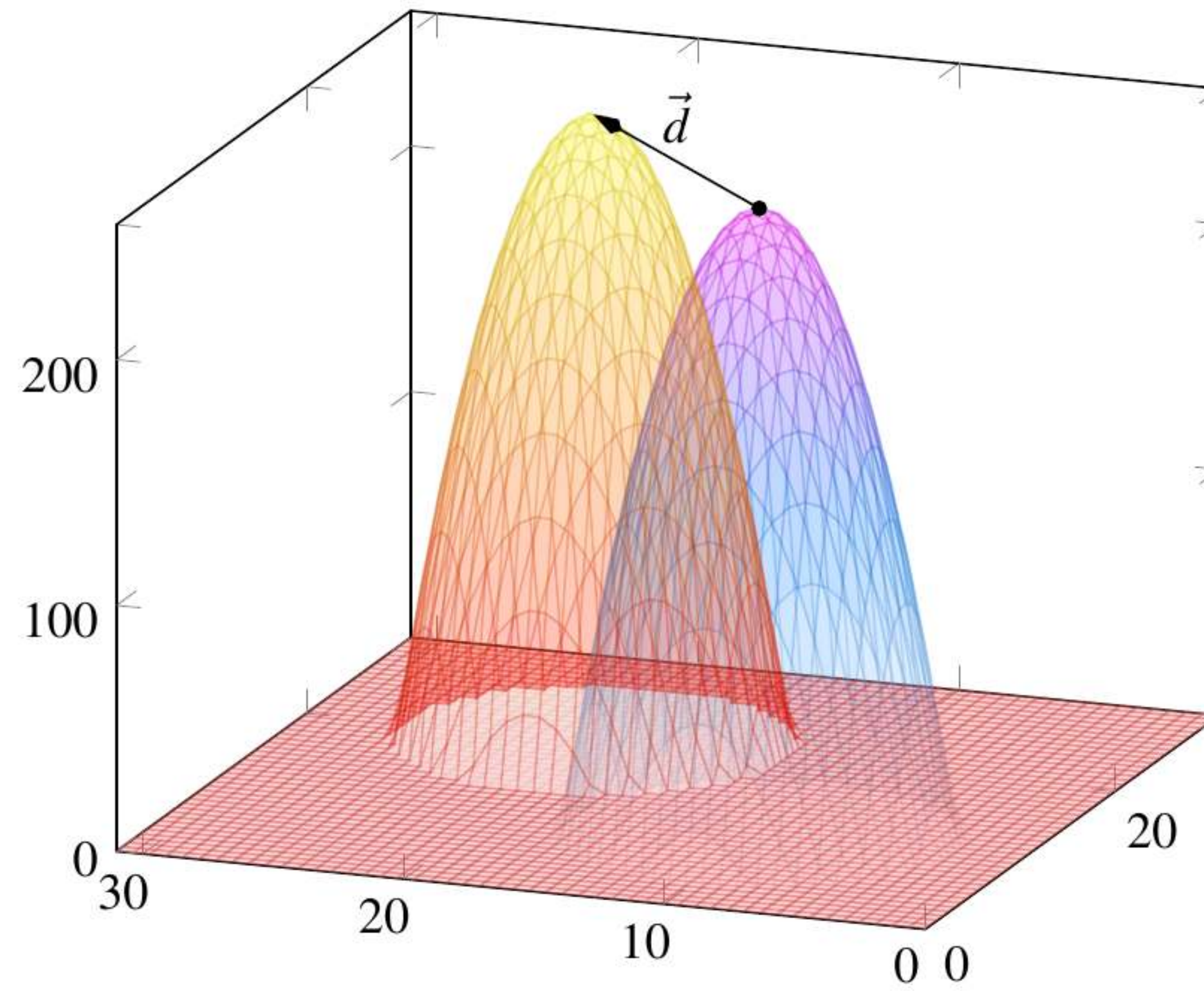
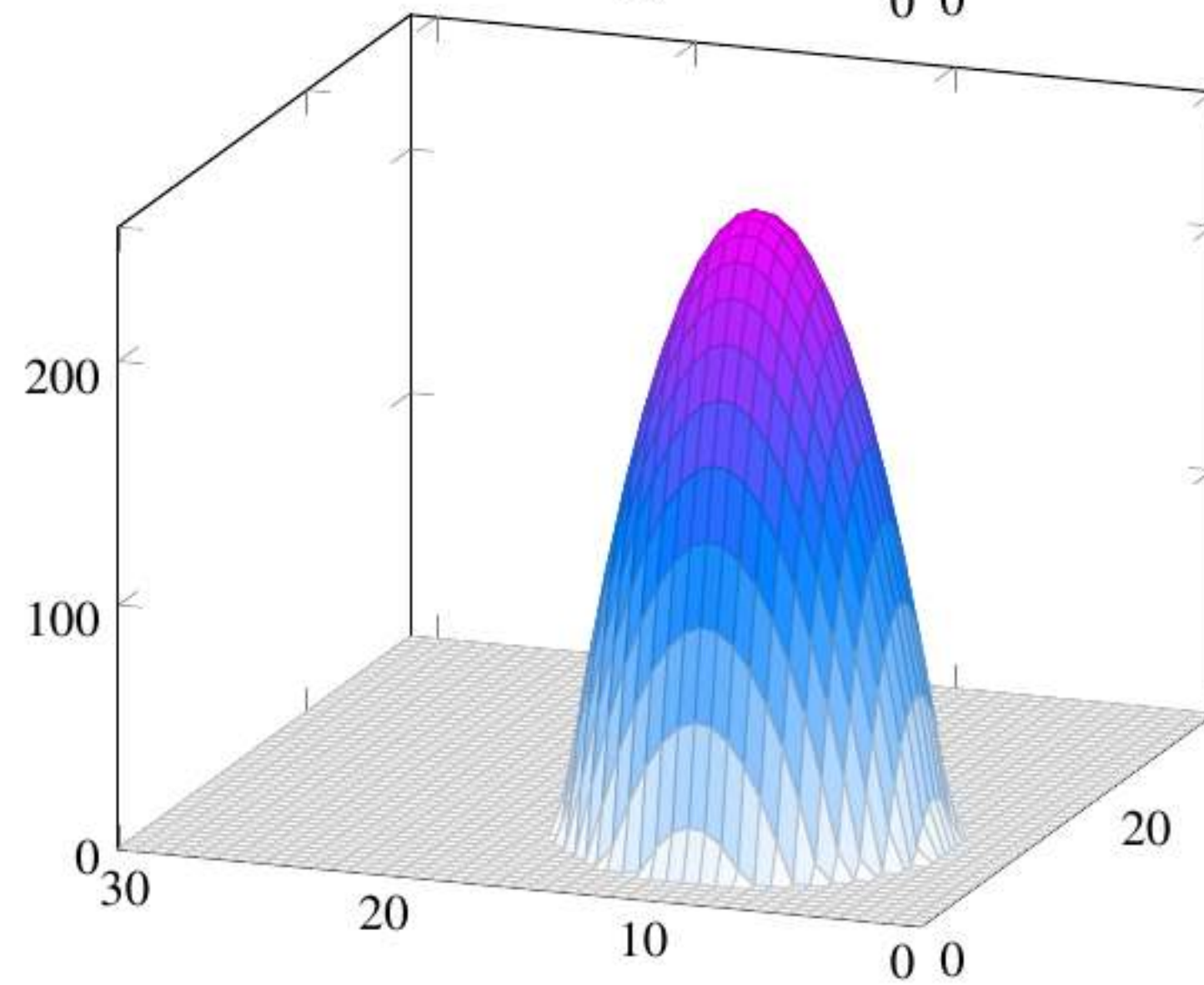
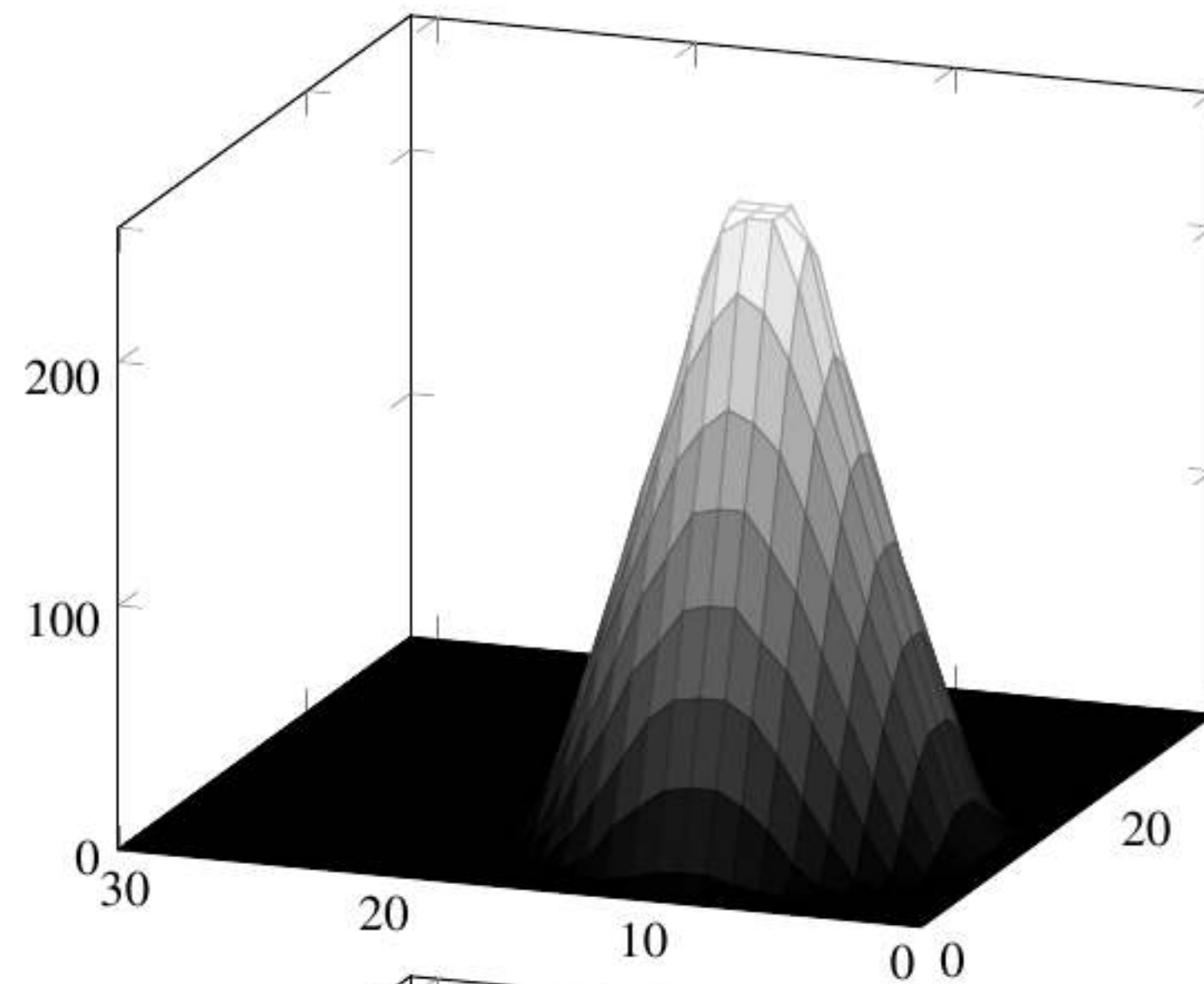
- Computado sobre toda a imagem, pixel a pixel.
- Processo lento...

- Método de Farneback
- Aproxima a vizinhança de um pixel por um polinômio quadrático.

$$f(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} \mathbf{x}^T + c$$

onde \mathbf{A} é uma matriz simétrica, \mathbf{b} é um vetor e c é um escalar, todos estimados por mínimos quadrados em uma vizinhança.

Método de Farneback



- Estimativa do deslocamento

$$f_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_1 \mathbf{x}^T + c_1$$

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x} - \mathbf{d}) = (\mathbf{x} - \mathbf{d})^T \mathbf{A}_1 (\mathbf{x} - \mathbf{d}) + \mathbf{b}_1 (\mathbf{x} - \mathbf{d})^T + c_1 \\ &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_1) \mathbf{x} + (\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{A}_1 \mathbf{d})^T \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{d} - \mathbf{b}_1^T \mathbf{d} + c_1 \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{b}_2 \mathbf{x}^T + c_2 \end{aligned}$$

- Cálculo dos coeficientes

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1$$

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{A}_1 \mathbf{d}$$

$$c_2 = \mathbf{d}^T \mathbf{A}_1 \mathbf{d} - \mathbf{b}_1^T \mathbf{d} + c_1$$

- Conclusão

$$\mathbf{d} = -\frac{1}{2} \mathbf{A}_1^{-1} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)$$

- Na prática, normalmente não é possível verificar as igualdades entre as matrizes \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 .
- Usa-se então as aproximações

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{A}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})}{2} \quad \Delta \mathbf{b}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{b}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_1(\mathbf{x}))$$

para montar a equação de cálculo do deslocamento

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \Delta \mathbf{b}(\mathbf{x})$$

- A estimativa de $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ é calculada minimizando um funcional que avalia a vizinhança I de um ponto

$$\sum_{\Delta \mathbf{x} \in I} w(\Delta \mathbf{x}) \|\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})\mathbf{d}(\mathbf{x}) - \Delta \mathbf{b}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})\|^2$$

- O mínimo é obtido por

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \left(\sum w \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right)^{-1} \sum w \mathbf{A}^T \Delta \mathbf{b}$$