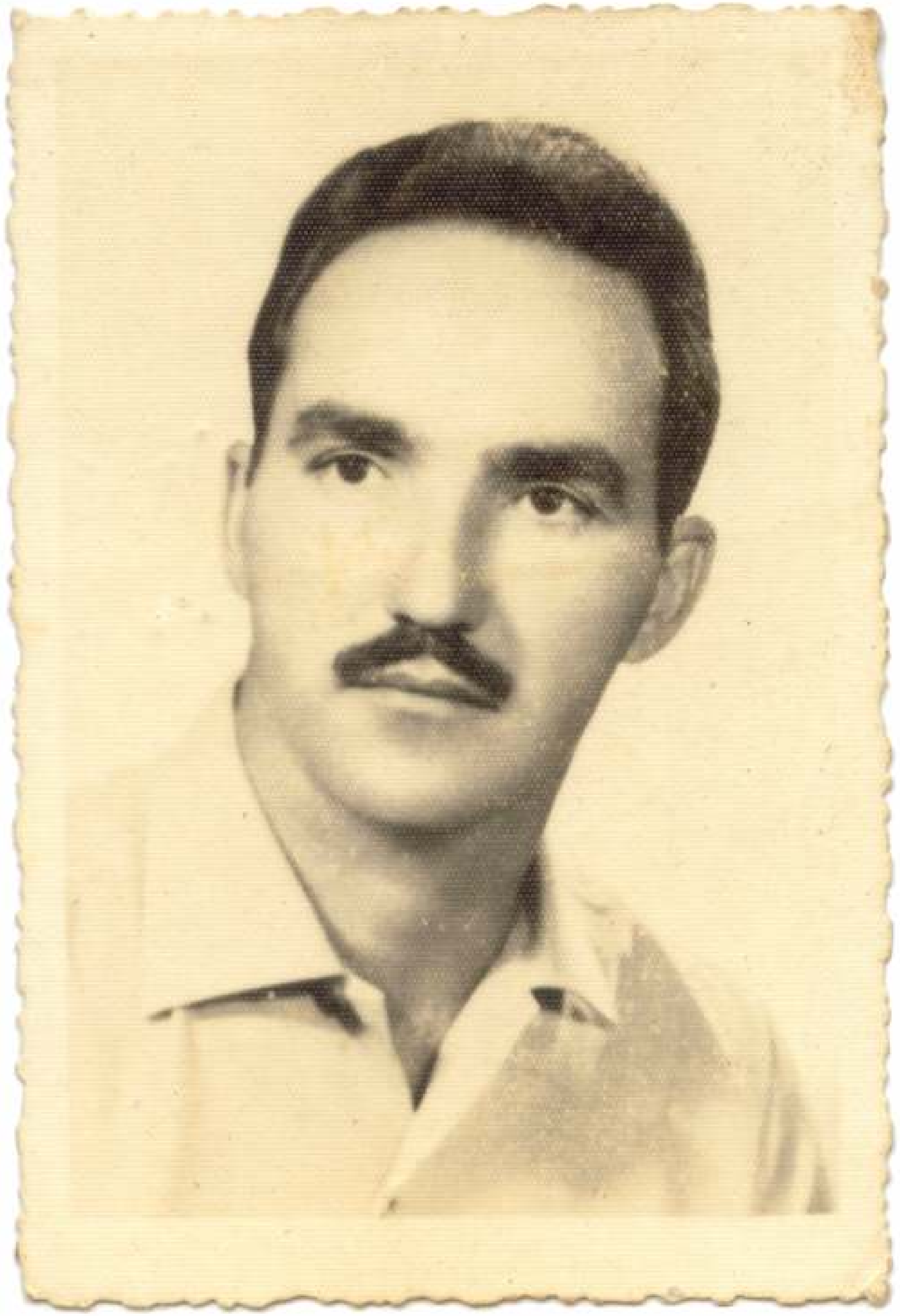
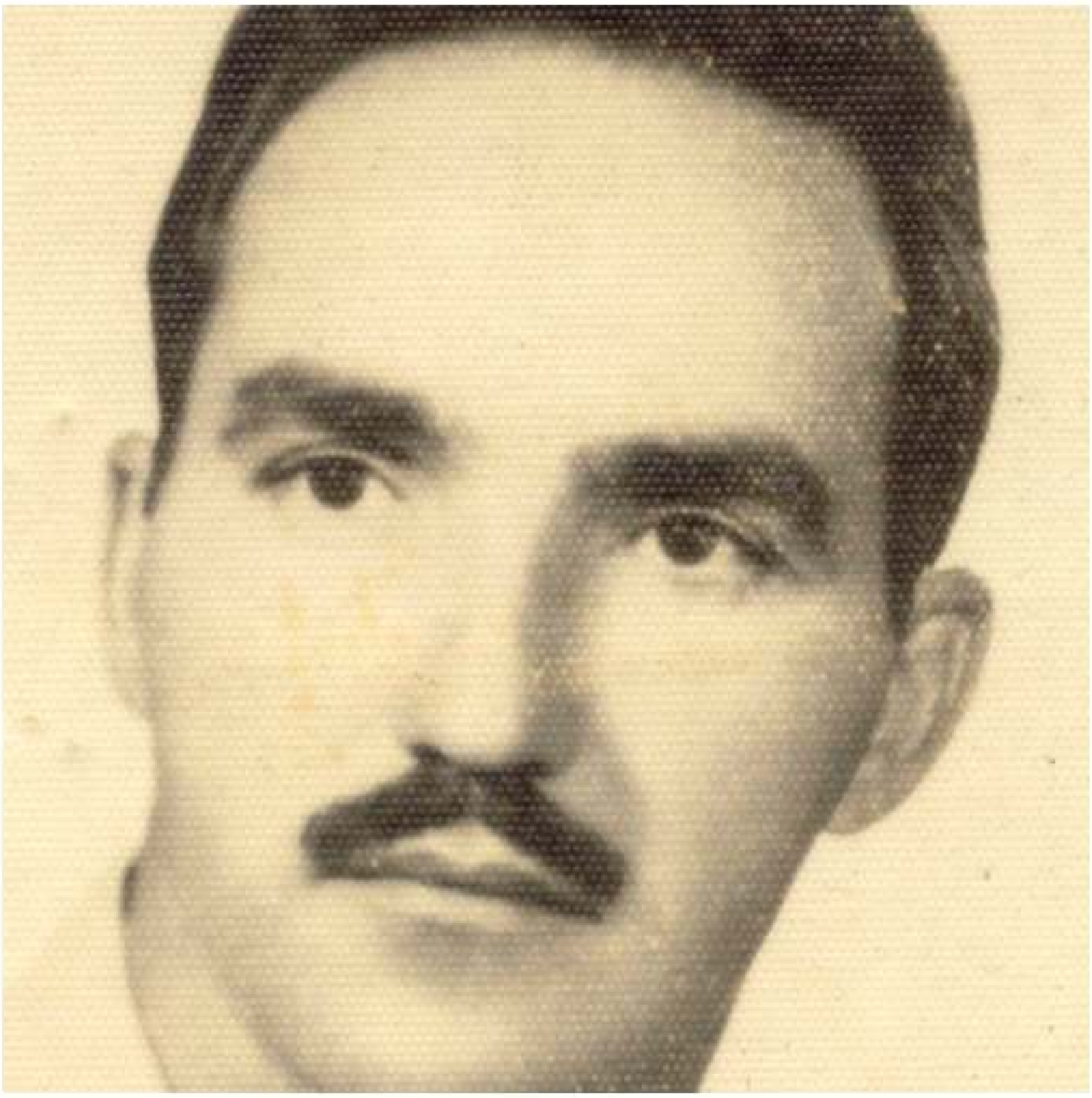
Filtragem de Imagens no Domínio da Frequência

Agostinho Brito

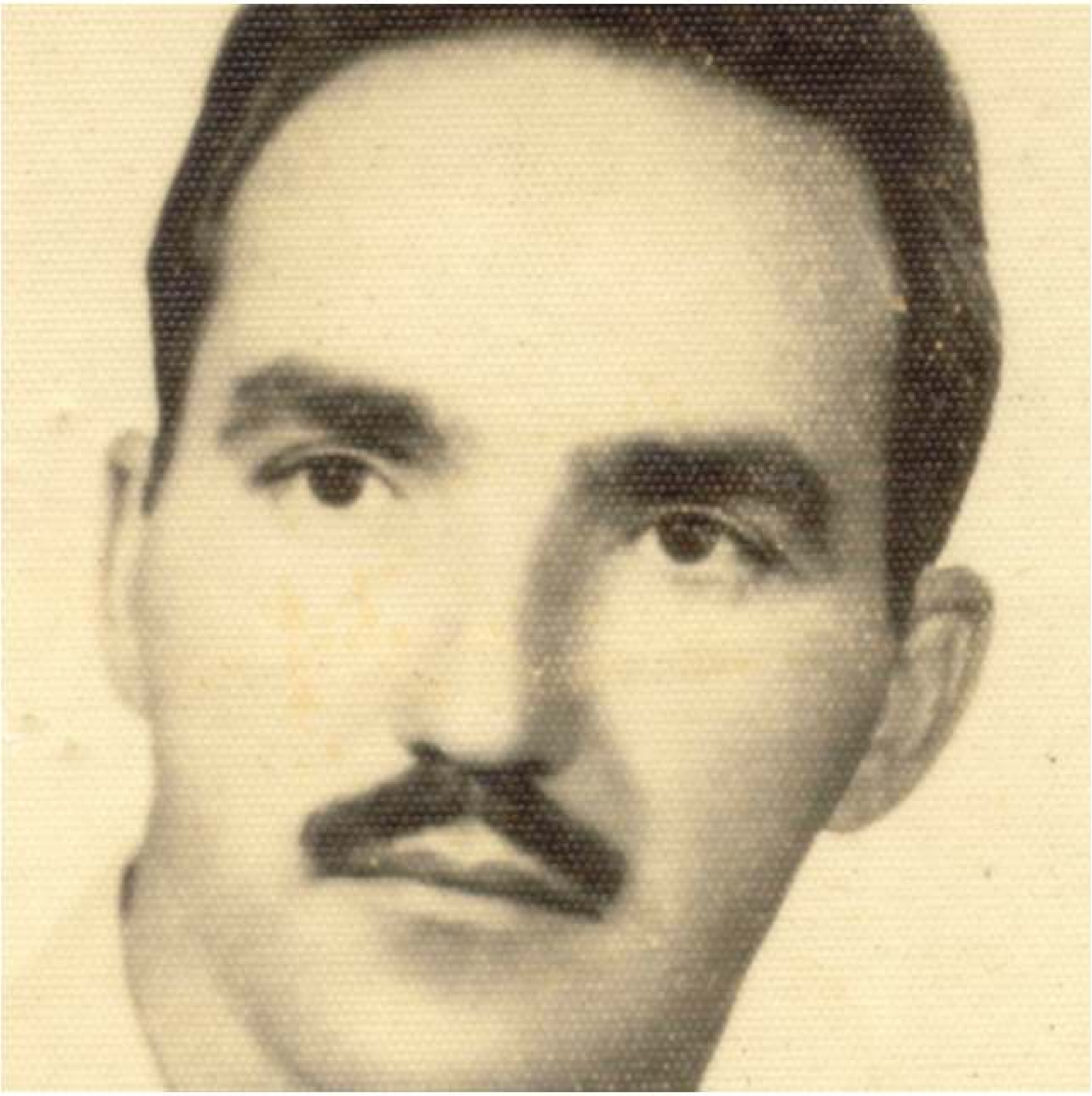
2020

A transformada de Fourier





Mágica!



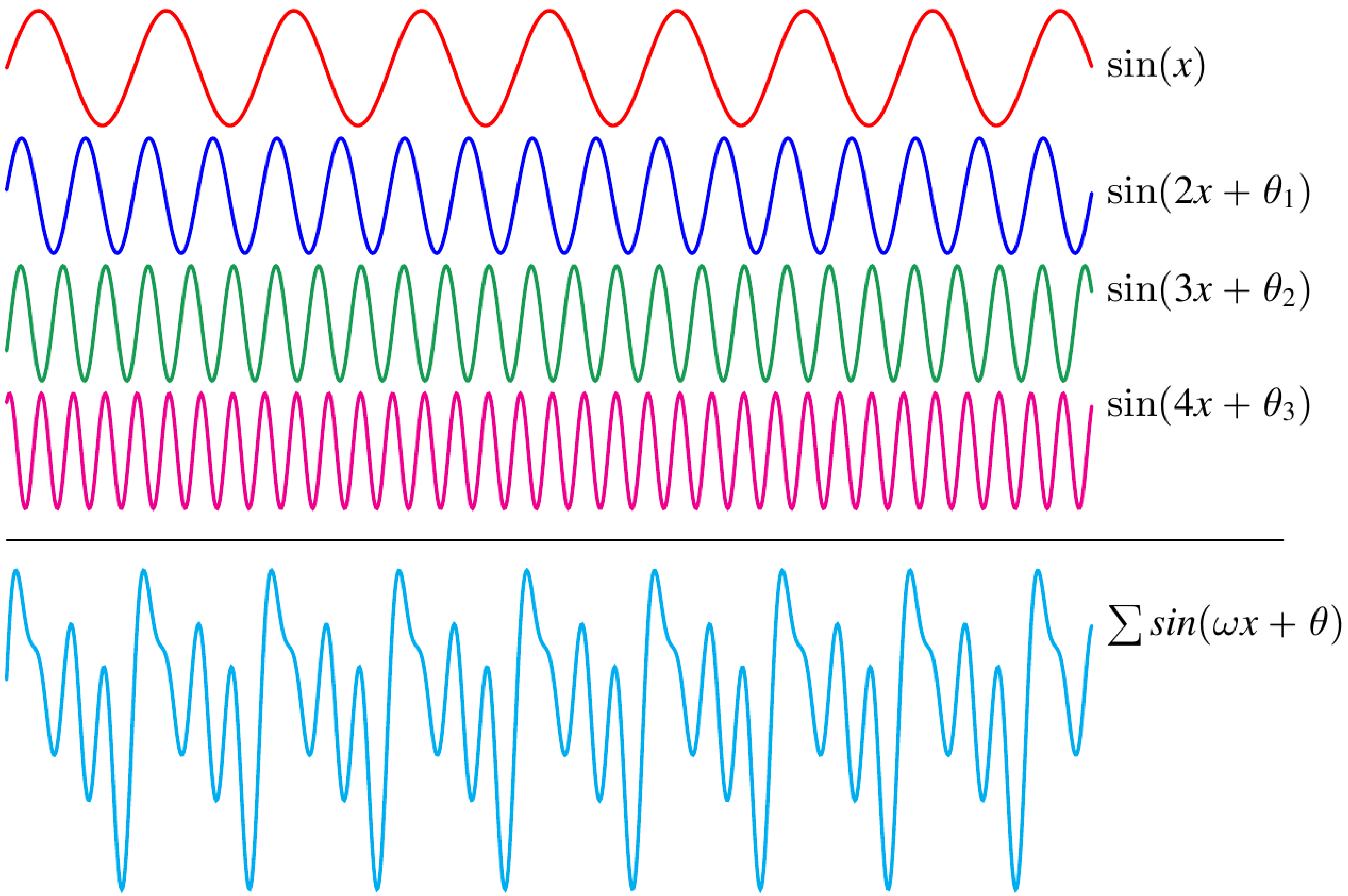
Filtragem de imagens no domínio da frequência

- Existem tipos de degradações cujo tratamento no domínio espacial se torna impossível, ou muito difícil de ser realizado.
- Tais degradações podem ser mais facilmente tratadas se a imagem for representada de forma diferente, ou em um domínio diferente.
- Solução: utilizar transformadas que modificam a representação da imagem, possibilitando que as características da degradação sejam evidenciadas e estudadas adequadamente.

Filtragem de imagens no domínio da frequência

- A série de Fourier permite que um sinal periódico seja decomposto em uma soma de senos ou cossenos de frequências diferentes, ponderados por coeficientes diferentes.
- A transformada de Fourier permite decompor sinais que não são periódicos (imagens, por exemplo).
- Em ambos os casos, os coeficientes obtidos com ambas as transformações permitem recompor o sinal sem perda de informação.
- O tratamento de sinais com a transformada de Fourier é dito como feito no **domínio da frequência**.

Exemplo de decomposição no domínio da frequência



A Transformada de Fourier

- Seja $f(x)$ uma função contínua de uma variável real x. A transformada de Fourier, $F(u)$, de $f(x)$ é dada por

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}\,dx$$

- A função $f(x)$ pode ser obtida pela transformada inversa de Fourier

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux}\,du$$

A Transformada de Fourier

- Muitas vezes é conveniente representar $F(u)$ na forma polar,

$$F(u) = |F(u)|e^{-j\phi(u)}$$

- Magnitude (ou espectro) da transformada

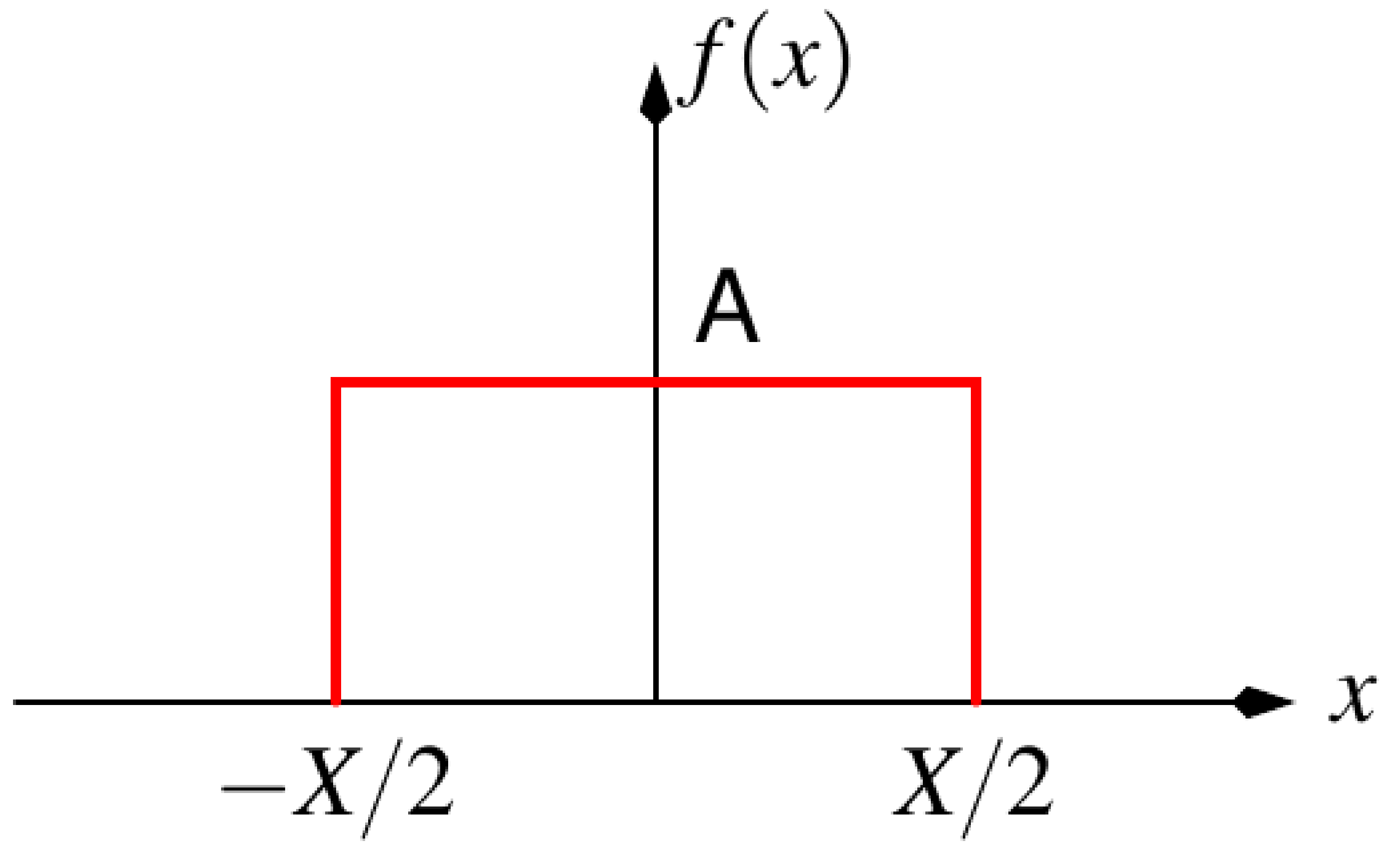
$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2}$$

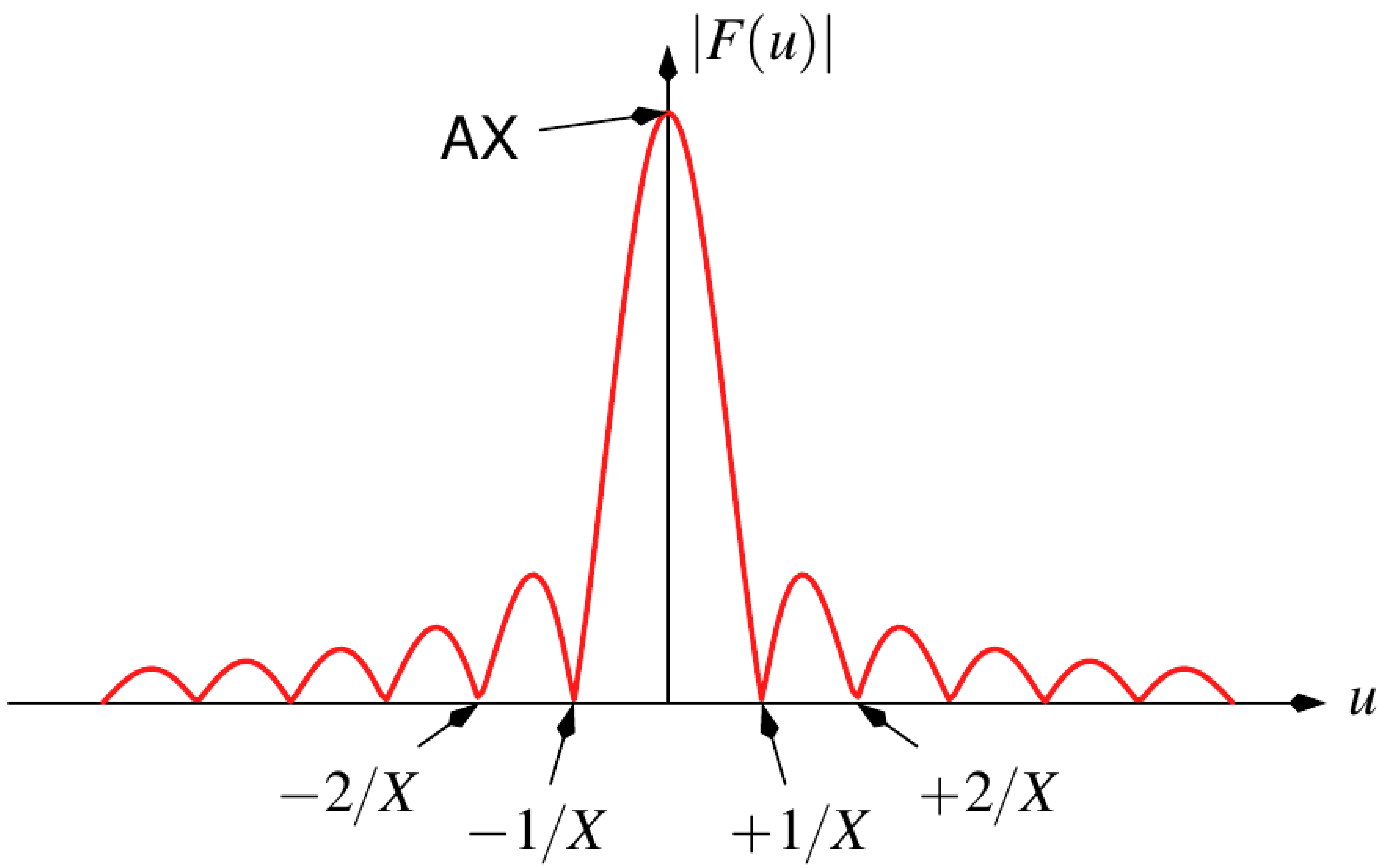
- Fase da transformada

$$\phi(u) = \arctan\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right]$$

Exemplo de transformação contínua 1-D: função retangular

$$
\begin{aligned}
F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux}\, dx \\
&= \int_{-X/2}^{X/2} A e^{-j2\pi ux}\, dx \\
&= \frac{A}{\pi u} \sin(\pi u X) e^{-j\pi u X} \\
|F(u)| &= AX \left| \frac{\sin(\pi u X)}{\pi u X} \right|
\end{aligned}
$$





- Para o caso bidimensional, o par transformado fica

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}\,dx\,dy \\
f(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}\,du\,dv
\end{aligned}
$$

- O valor da exponencial é obtido pela fórmula de Euler:

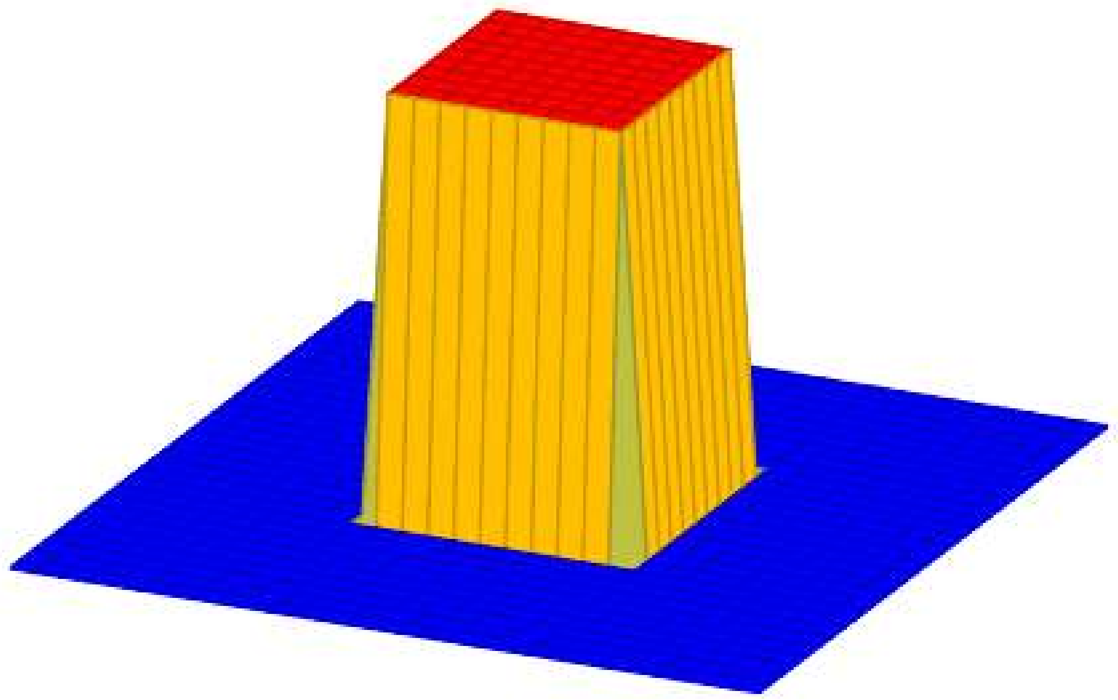
$$
e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta
$$

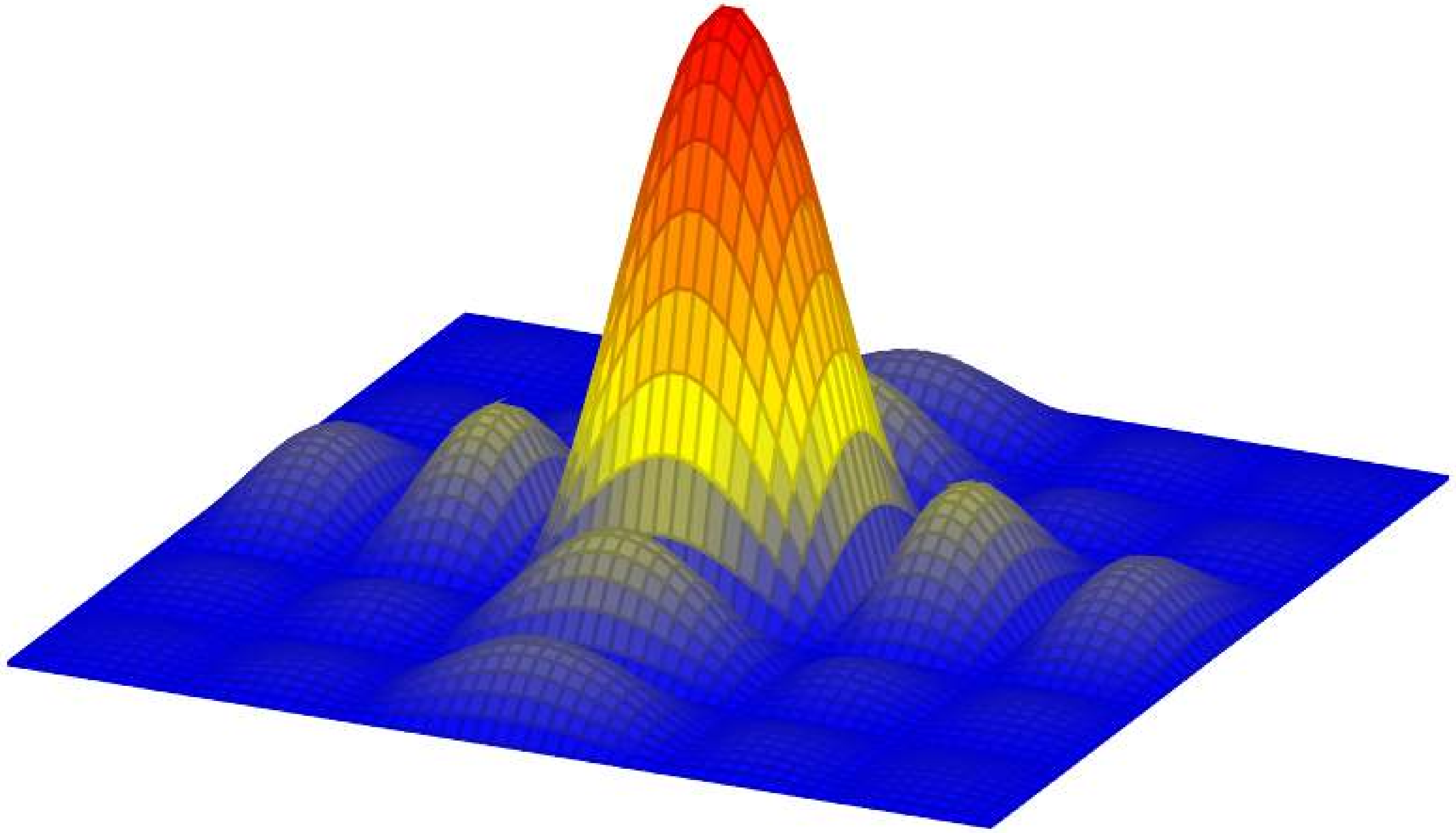
- A representação polar é dada por

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= |F(u,v)|e^{-j\phi(u,v)} \\
|F(u,v)| &= [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{1/2} \\
\phi(u,v) &= \arctan\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]
\end{aligned}
$$

Exemplo de transformação contínua 2-D: função retangular

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}\,dx\,dy \\
&= \int_{0}^{Y}\int_{0}^{X} Ae^{-j2\pi(ux+vy)}\,dx\,dy \\
&= A\frac{\sin(\pi uX)}{\pi u}\frac{\sin(\pi vY)}{\pi v}e^{-j\pi(uX+vY)} \\
|F(u,v)| &= AXY\left|\frac{\sin(\pi uX)}{\pi uX}\right|\left|\frac{\sin(\pi vY)}{\pi vY}\right|
\end{aligned}
$$





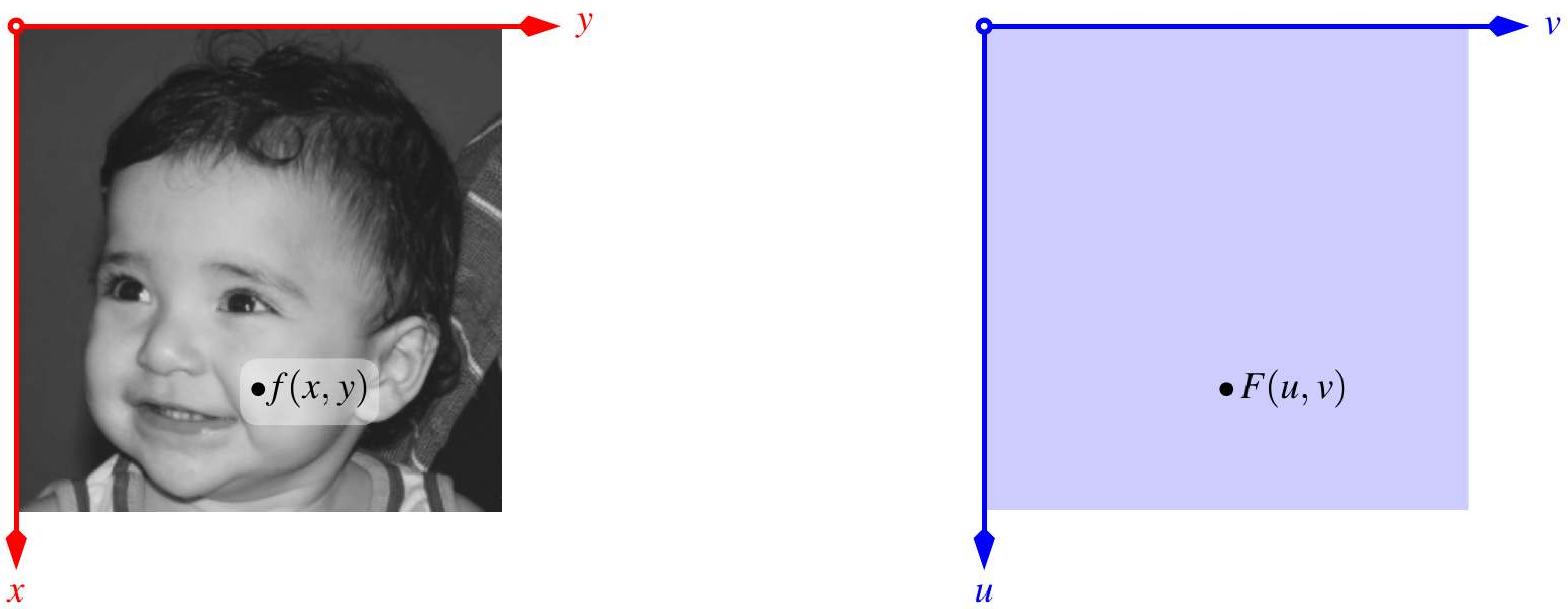
A Transformada bidimensional

- Para uma variável discreta $f(x, y)$, $x = 0, 1, 2, \ldots, M-1$ e $y = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, o par transformado é dado pelas equações:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \quad \text{e} \quad f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

- A notação $f(0, 0), f(0, 1), \ldots, f(M-1, N-1)$ sinaliza que as amostras são espaçadas igualmente (ao invés de posições inteiras no espaço).

A Transformada bidimensional



A Transformada bidimensional

- Sendo (x_0, y_0) o ponto onde foi realizada a primeira amostragem, os pontos seguintes são amostrados em intervalos fixos $(\Delta x, \Delta y)$, da forma $f(x_0, y_0), f(x_0 + x\Delta x, y_0 + y\Delta y), \ldots$, ou seja,

$$f(x, y) \triangleq f(x_0 + x\Delta x, y_0 + y\Delta y)$$

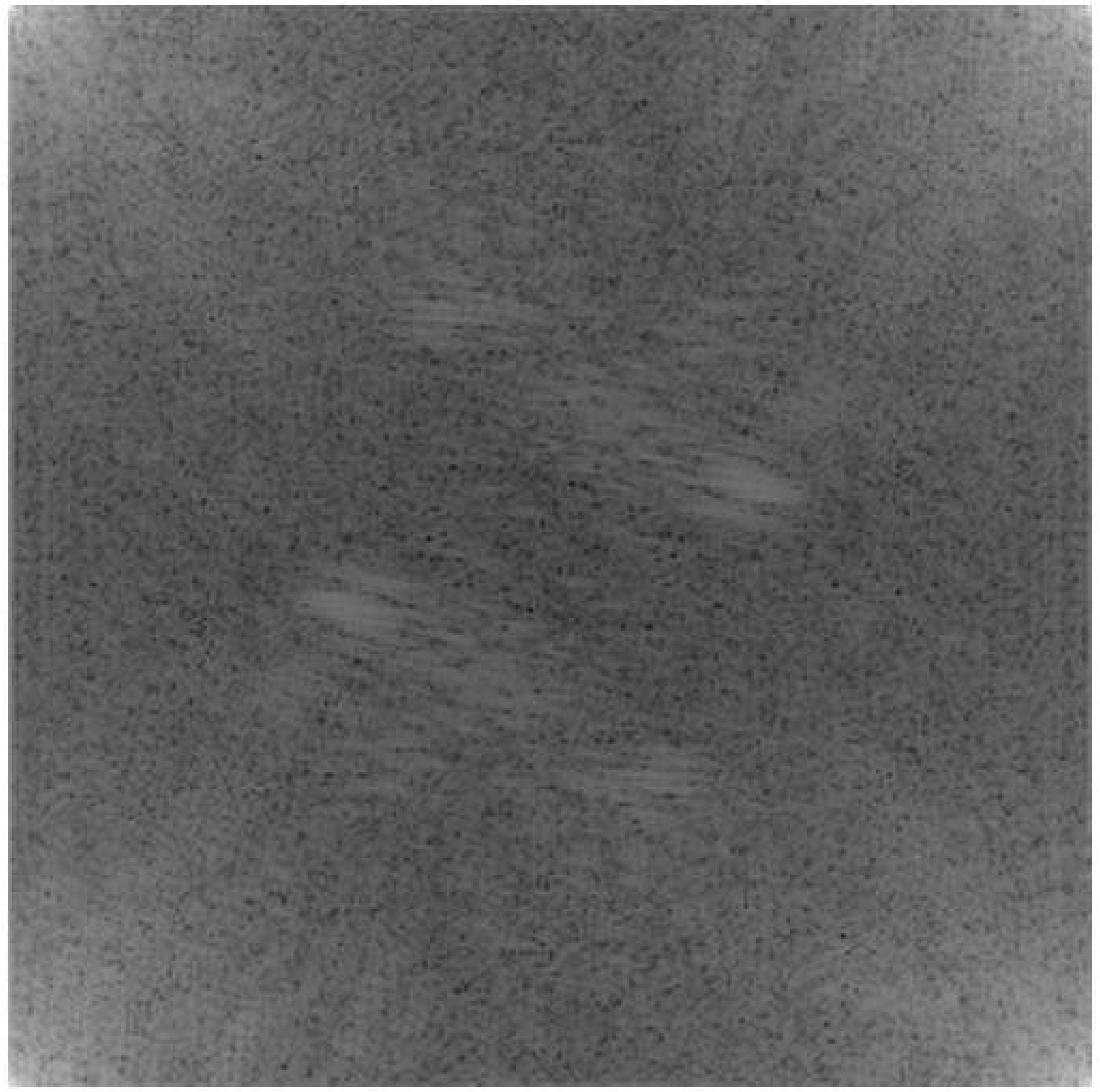
- A mesma interpretação vale para $F(u, v)$, isto é,

$$F(u, v) \triangleq F(u\Delta u, v\Delta v)$$

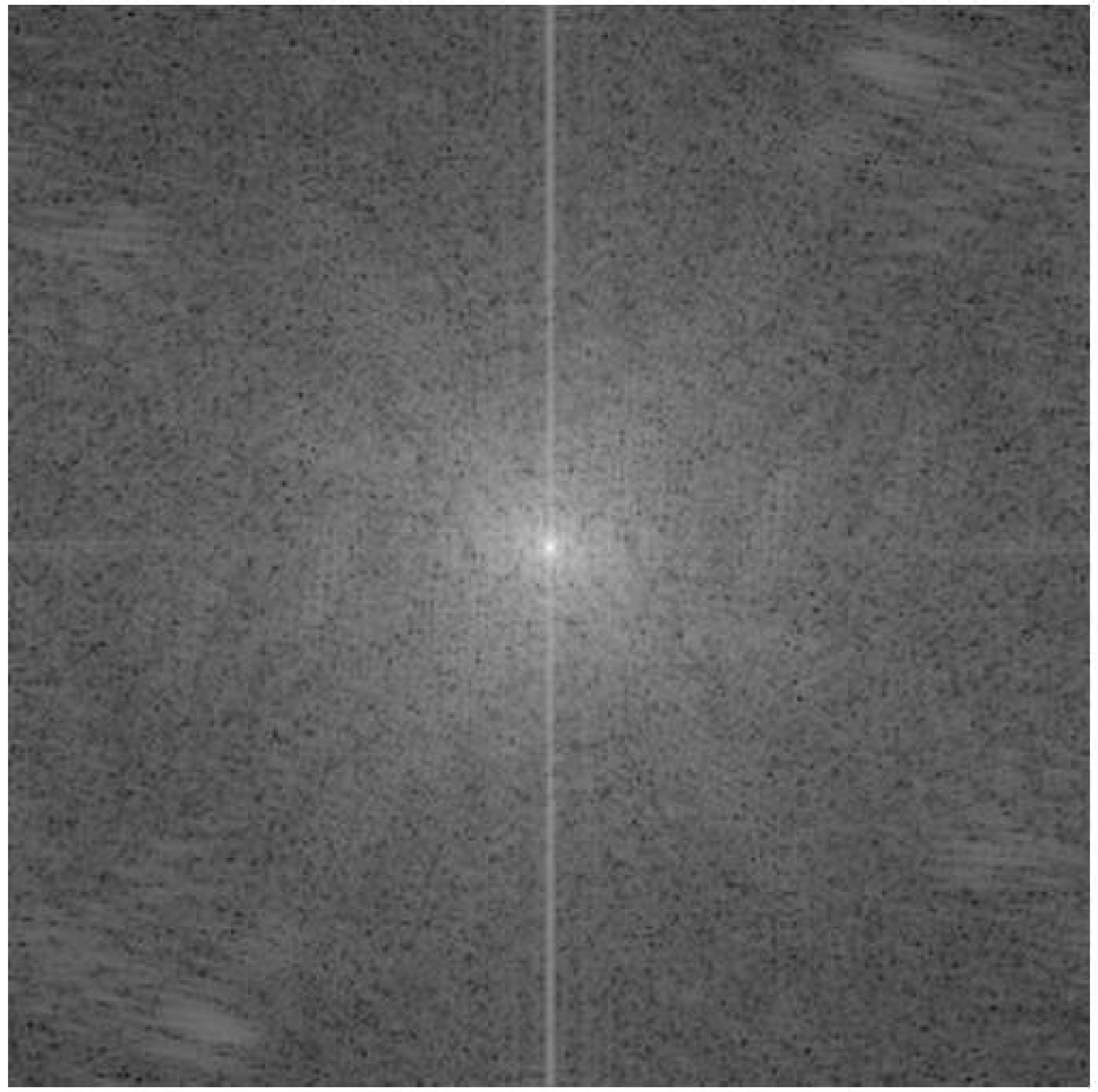
- A relação entre as amostras no domínio espacial e da frequência é dada por

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \quad e \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

Apresentação do espectro de Fourier



$|F(u,v)|$



$|F(u-M/2, v-N/2)|$

$\mathcal{F}\{f(x,y)(-1)^{x+y}\} = F(u-M/2, v-N/2)$

A centralização do espectro é adequada para filtragem, pois facilita o projeto de filtros no domínio da frequência.

Obrigado

Propriedades da transformada de Fourier

- Separabilidade

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{0}^{M-1} e^{-j2\pi\frac{ux}{M}} \sum_{0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi\frac{vy}{N}}$$

$$f(x,y) = \sum_{0}^{M-1} e^{j2\pi\frac{ux}{M}} \sum_{0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi\frac{vy}{N}}$$

- Translação

$$
\begin{aligned}
f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{u_0x}{M}+\frac{v_0y}{N})} &\Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)\\
f(x-x_0, y-y_0) &\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M}+\frac{vy_0}{N})}
\end{aligned}
$$

Para $u_0 = M/2$ e $v_0 = N/2$,

$$
e^{-j\frac{2\pi}{N}(u_0x+v_0y)} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}
$$

Propriedades da transformada de Fourier

- Periodicidade

$$F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v) = F(u+M,v+N)$$

- A propósito...

$$\begin{aligned} F(u,v) &= F(u+kM, v+pN) \\ f(x,y) &= f(x+kM, y+pN) \end{aligned}$$

- A ideia da periodicidade é importante, pois tanto a transformação direta quanto a inversa geram funções periódicas.
- Dá-se ao tipo especial de convolução que cria essa propriedade o nome de **convolução circular**.

$$f(x,y) * h(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) h(x-m, y-n)$$

- Rotação

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad u = w\cos\phi \quad v = w\sin\phi$$

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(w, \phi + \theta_0)$$

Propriedades da transformada de Fourier

- Simetria do conjugado

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= F^*(-u,-v) \\
|F(u,v)| &= |F(-u,-v)|
\end{aligned}
$$

- Distributividade e escalamento

$$\mathcal{F}\{f_1(x,y)+f_2(x,y)\}=\mathcal{F}\{f_1(x,y)\}+\mathcal{F}\{f_2(x,y)\}$$

$$\mathcal{F}\{f_1(x,y)f_2(x,y)\}\neq\mathcal{F}\{f_1(x,y)\}\mathcal{F}\{f_2(x,y)\}$$

$$af(x,y)\Leftrightarrow aF(u,v)$$

$$f(ax,by)\Leftrightarrow\frac{1}{|ab|}F(u/a,v/b)$$

Obrigado

Filtragem no domínio da frequência

Correspondência entre os domínios espacial e da frequência

- A principal relação entre os dois domínios é estabelecida pelo teorema da convolução.
- É possível mostrar, da equação acima, as seguinte equivalência entre os domínios

$$
\begin{aligned}
f(x,y) * g(x,y) &\Leftrightarrow F(u,v)G(u,v) \\
f(x,y)g(x,y) &\Leftrightarrow F(u,v) * G(u,v)
\end{aligned}
$$

- Em teoria, o mesmo procedimento de filtragem pode ser realizado em ambos os domínios.
- Na prática, a escolha do domínio adequado para trabalhar pode facilitar a análise do problema e acelerar o cômputo de resultados.

Correspondência entre os domínios espacial e da frequência

- A convolução discreta entre duas funções $f(x,y)$, de tamanho $A \times B$ e $g(x,y)$, de tamanho $C \times D$, deve ser realizada assumindo serem ambos os arrays periódicos e de períodos iguais M e N para as direções x e y, respectivamente.
- Tal assunção evita que ocorra superposição das funções durante o processo de convolução.
- Deve-se portanto, escolher M e N tais que:

$$M \geqslant A + C - 1$$
$$N \geqslant B + D - 1$$

Correspondência entre os domínios espacial e da frequência

- Para realizar a convolução digital, criam-se novas funções extendidas $f_e(x,y)$ e $g_e(x,y)$ da seguinte maneira:

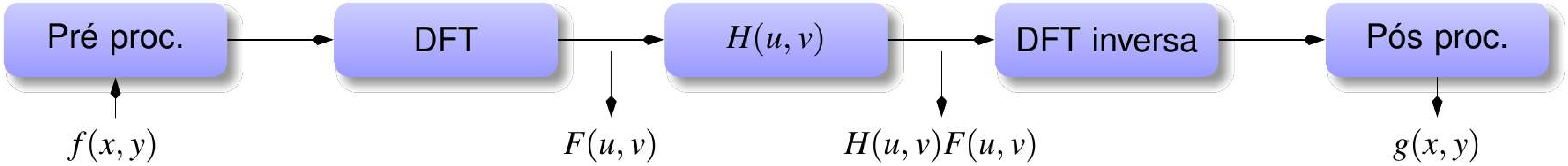
$$f_e(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & 0 \leqslant x \leqslant A-1 \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant B-1 \\ 0 & A \leqslant x \leqslant M-1 \quad \text{e} \quad B \leqslant y \leqslant N-1 \end{cases}$$

$$g_e(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & 0 \leqslant x \leqslant C-1 \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant D-1 \\ 0 & C \leqslant x \leqslant M-1 \quad \text{e} \quad D \leqslant y \leqslant N-1 \end{cases}$$

- O processo de preenchimento com zeros acima é normalmente chamado de *zero padding*.
- A convolução de $f_e(x,y)$ com $g_e(x,y)$ é definida como

$$f_e(x,y) * g_e(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m,n) g_e(x-m, y-n)$$

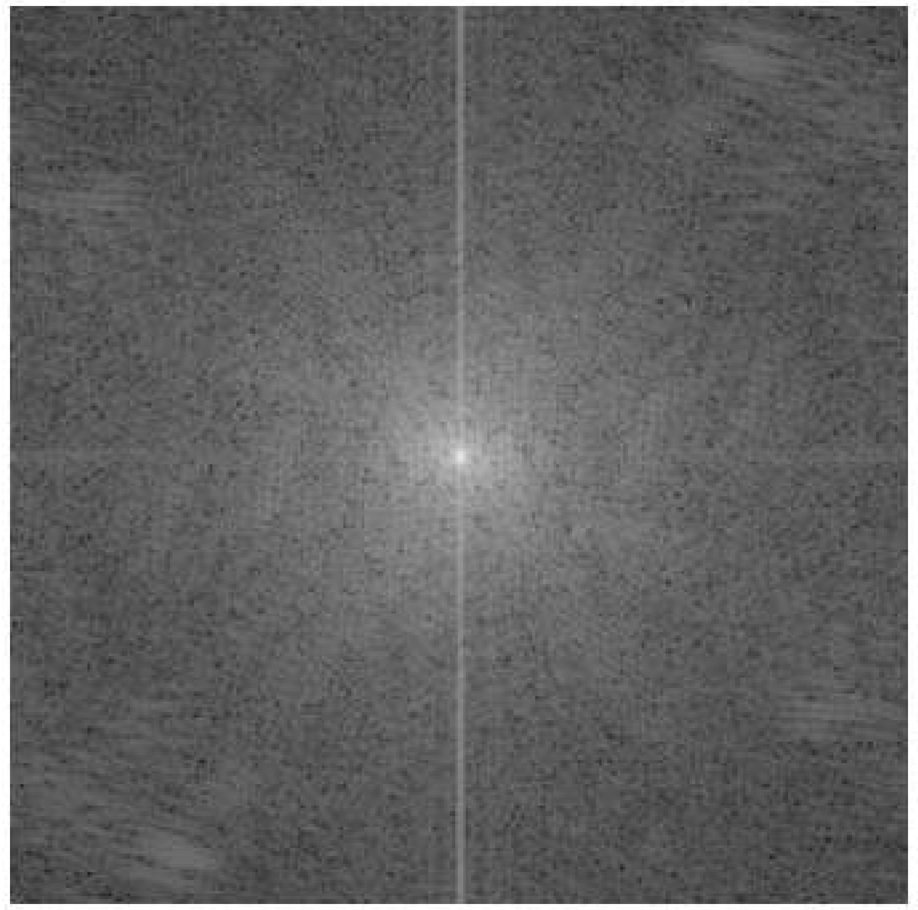
Passos para a filtragem no domínio da frequência



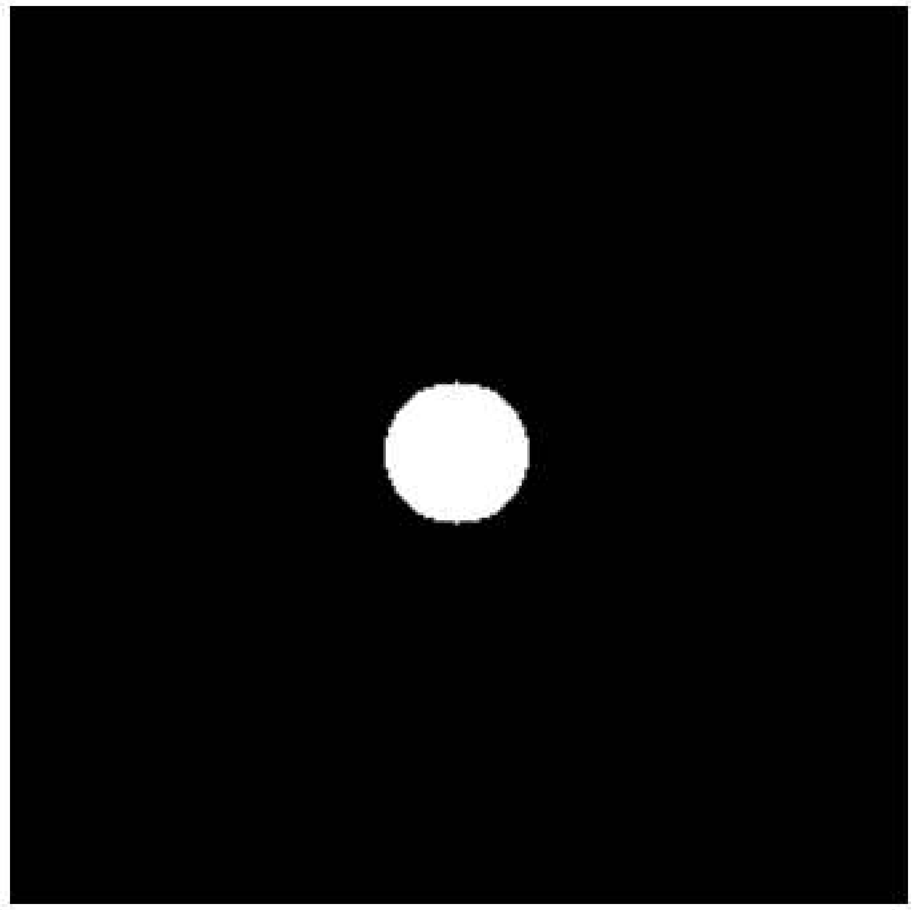
- Multiplicar imagem por $(-1)^{x+y}$ para deslocar o espectro.
- Calcular $F(u,v)$.
- Multiplicar $F(u,v)$ pelo filtro $H(u,v)$, obtendo $G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$.
- Calcular transformada inversa de $G(u,v)$ e extrair parte real.
- Multiplicar parte real por $(-1)^{x+y}$.

Exemplo de filtragem

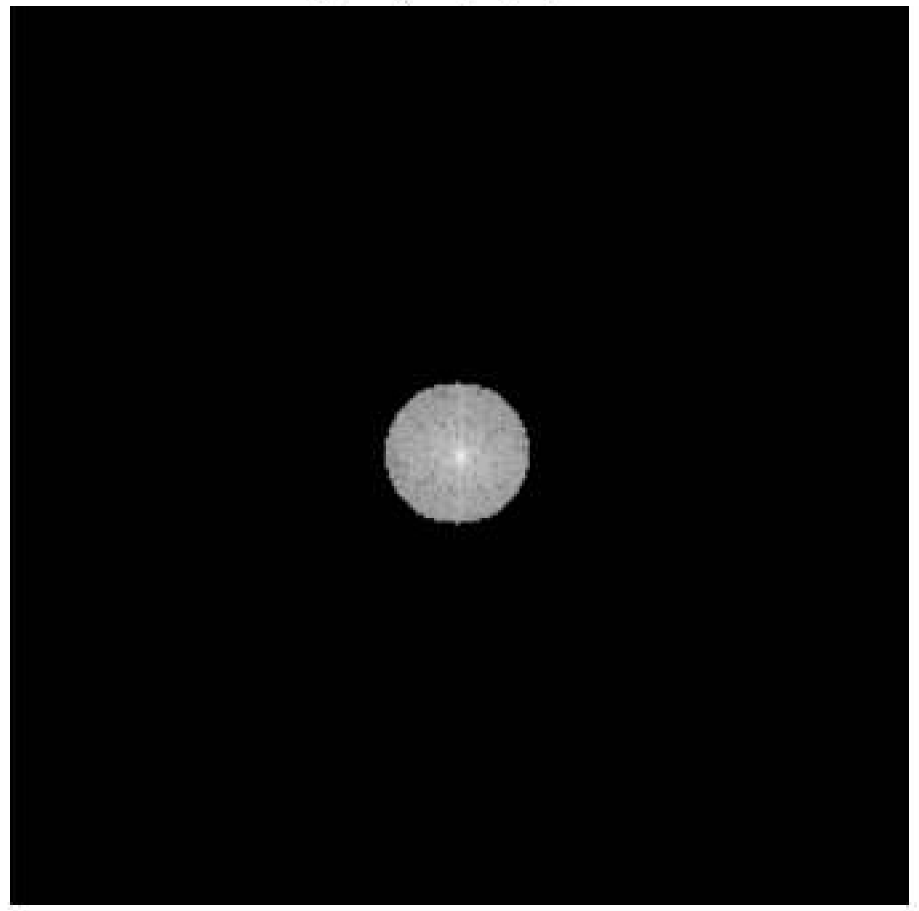
$f(x, y)$



$F(u, v)$



$H(u, v)$



$H(u, v)F(u, v)$

$g(x, y)$

$f(x, y) - g(x, y)$

Especificados pela distância ao centro e uma frequência de corte D_0

$$D(u,v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

Passa baixas

- Ideal

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u,v) \leqslant D_0 \\ 0 & \text{se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- Butterworth de ordem n

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$

- Gaussiano

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/D_0^2}$$

Passa altas

- Ideal

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{se } D(u,v) < D_0 \\ 1 & \text{se } D(u,v) \geqslant D_0 \end{cases}$$

- Butterworth de ordem n

$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u,v)]^{2n}}$$

- Gaussiano

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/D_0^2}$$

Exemplos de filtragem passa-baixas e passa-altas


ideal


gauss


butterworth


ideal


gauss


butterworth

Laplaciano no domínio da frequência

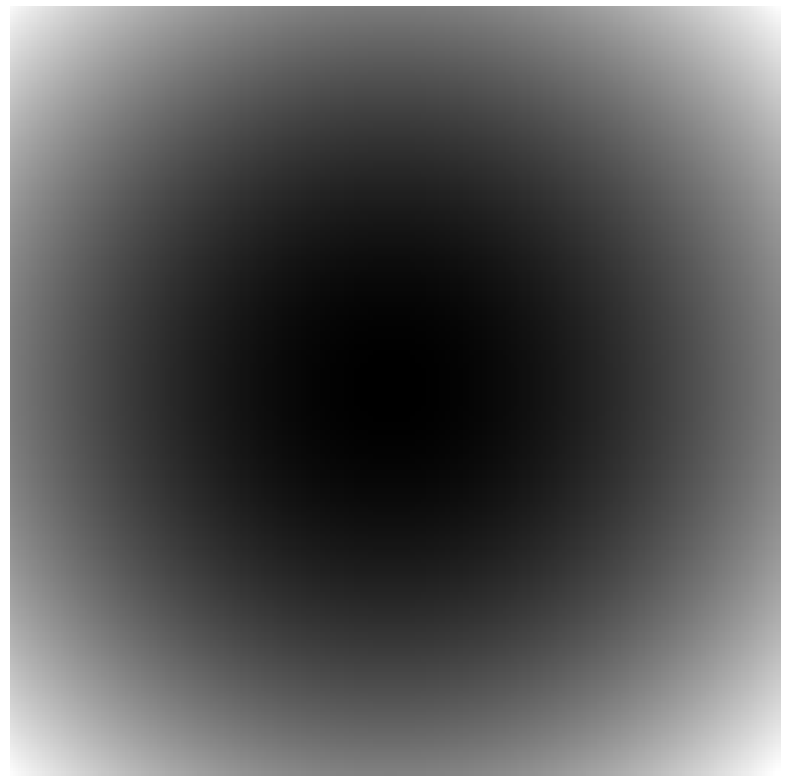
- É possível mostrar que

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right\} = (ju)^n F(u)$$

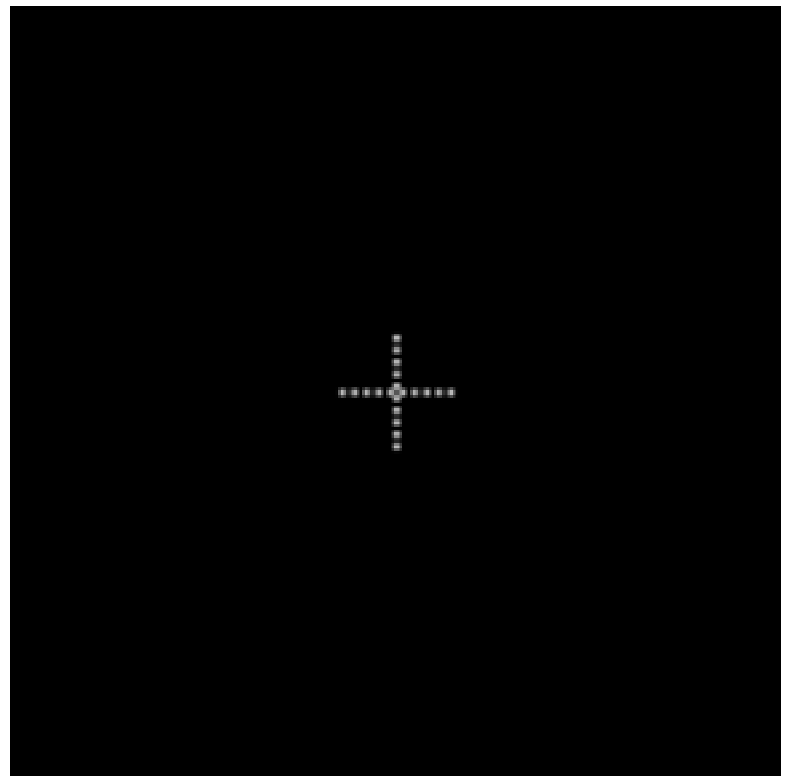
- Logo, para duas dimensões,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n} + \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}\right] &= (ju)^2 F(u,v) + (jv)^2 F(u,v)\\ &= -(u^2+v^2)F(u,v)\end{aligned}$$

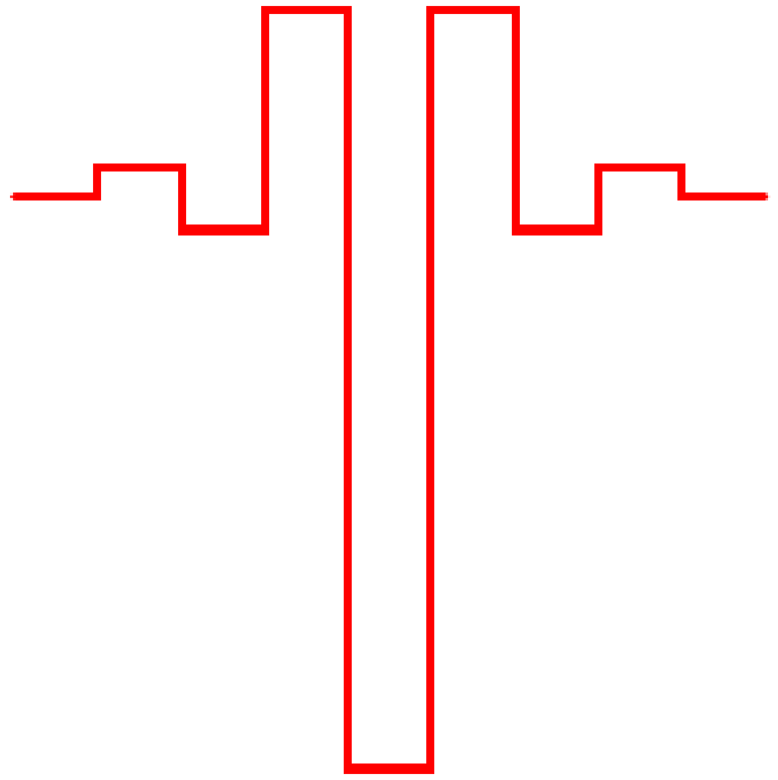
- Com isso, o filtro laplaciano no domínio da frequência é implementado utilizando o filtro $H(u,v) = -(u^2+v^2)$.



$H(u,v)$



$h(x,y)$



perfil

- Baseia-se nos princípios de iluminância e reflectância para realizar a filtragem.

$$f(x,y) = i(x,y)r(x,y)$$

- Iluminação $i(x,y)$: apresenta variações espaciais lentas (frequências baixas);
- Reflectância $r(x,y)$: apresenta variações espaciais rápidas (frequências altas);

$$\mathcal{F}\{f(x,y)\} \neq \mathcal{F}\{i(x,y)\}\mathcal{F}\{r(x,y)\}$$

- Definindo $z(x,y) = \ln f(x) = \ln i(x,y) + \ln r(x,y)$, pode-se tomar a transformada de Fourier de $z(x,y)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{z(x,y)\} &= \mathcal{F}\{\ln i(x,y)\} + \mathcal{F}\{\ln r(x,y)\} \\ Z(u,v) &= F_i(u,v) + F_r(u,v) \end{aligned}$$

- Aplicando-se o filtro de frequência, obtém-se uma imagem filtrada

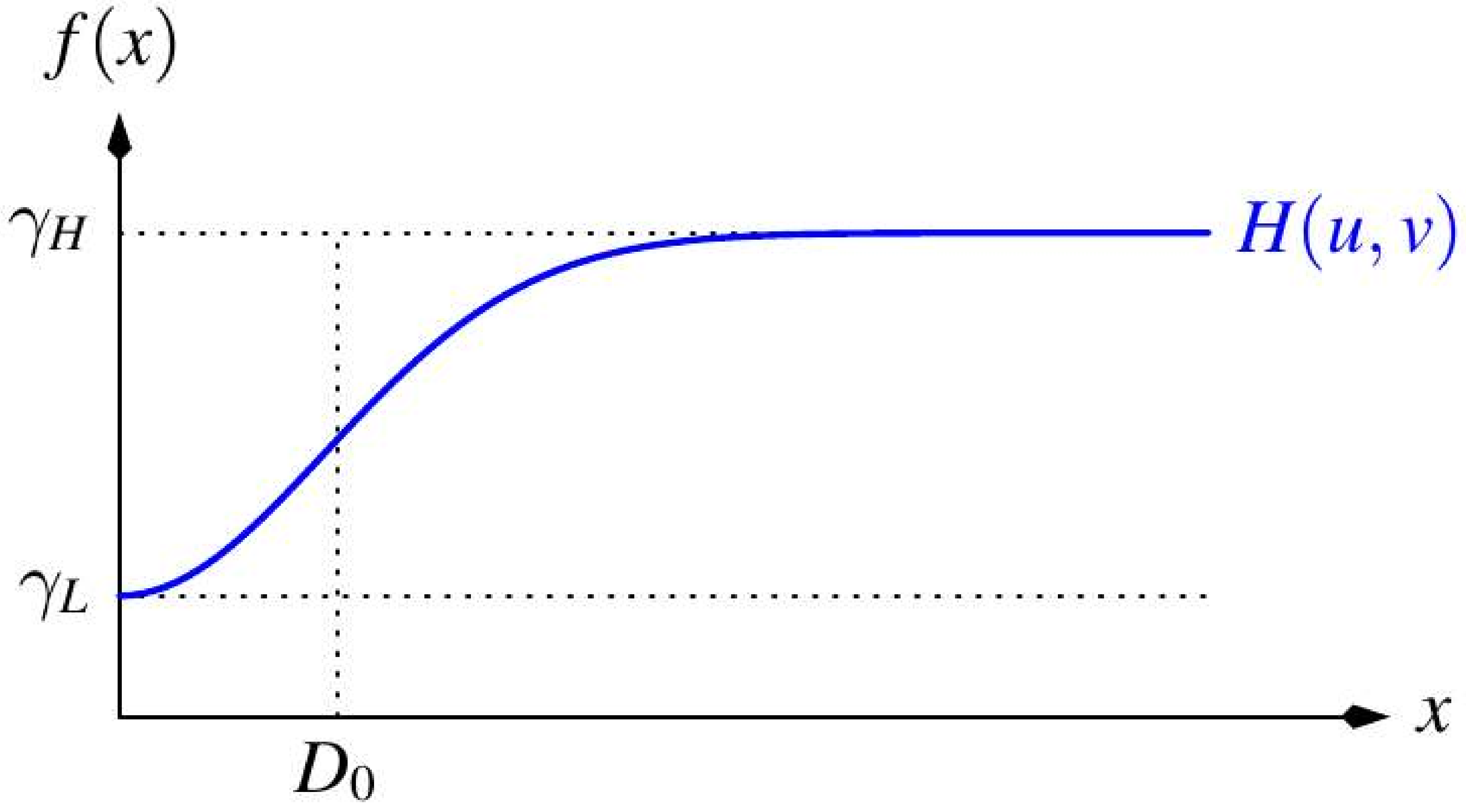
$$\begin{aligned} S(u,v) &= H(u,v)Z(u,v) \\ s(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}\{S_i(u,v)\} + \mathcal{F}^{-1}\{S_r(u,v)\} \\ s(x,y) &= i'(x,y) + r'(x,y) \end{aligned}$$

- A imagem filtrada, g(x,y), é dada por:

$$g(x,y) = e^{s(x,y)} = i_0(x,y)r_0(x,y)$$

- $H(u,v)$: versão modificada do filtro Gaussiano. Deve atenuar as frequências baixas e manter as frequências altas.

$$H(u,v) = (\gamma_H - \gamma_L)(1 - e^{-c(D^2(u,v)/D_0^2)}) + \gamma_L$$



A transformada rápida de Fourier (FFT)

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j\frac{2\pi ux}{N}}$$

- N operações de multiplicação
- N frequências $\rightarrow NO(N) \rightarrow O(N^2)$ operações.
- A FFT reduz para $O(N\log_2 N)$ operações em 1D.
- Em 2D, a FFT uma imagem de dimensões $M \times N$ leva $O(MN\log_2 MN)$ operações. Quando comparado com a DFT, que leva $O(MN(M+N))$ operações, o ganho continua $O(MN\log_2 MN)$.
- Para $M = N = 2^n$, o ganho fica $O(2^n/n)$ operações. Para $n = 15$, o cômputo da FFT seria realizado 2200 vezes mais rápido que a DFT na mesma máquina.
- Limitação da FFT: imagens devem ser quadradas e com lados iguais a potências de 2, ou seja, $M = N = 2^n$.

Padding

- Quando as imagens possuem tamanho diferente de potências de 2, pode-se realizar a transformada de Fourier aumentando-se a imagem para tamanho igual à menor potência de 2 necessária para armazenar a imagem.
- Uma das soluções é a realização de *zero padding*. Completa-se o restante com $\mathbf{0}$, realiza-se a filtragem, e recorta-se a imagem filtrada.

220×130

256×256

filtrada

recortada

Obrigado