

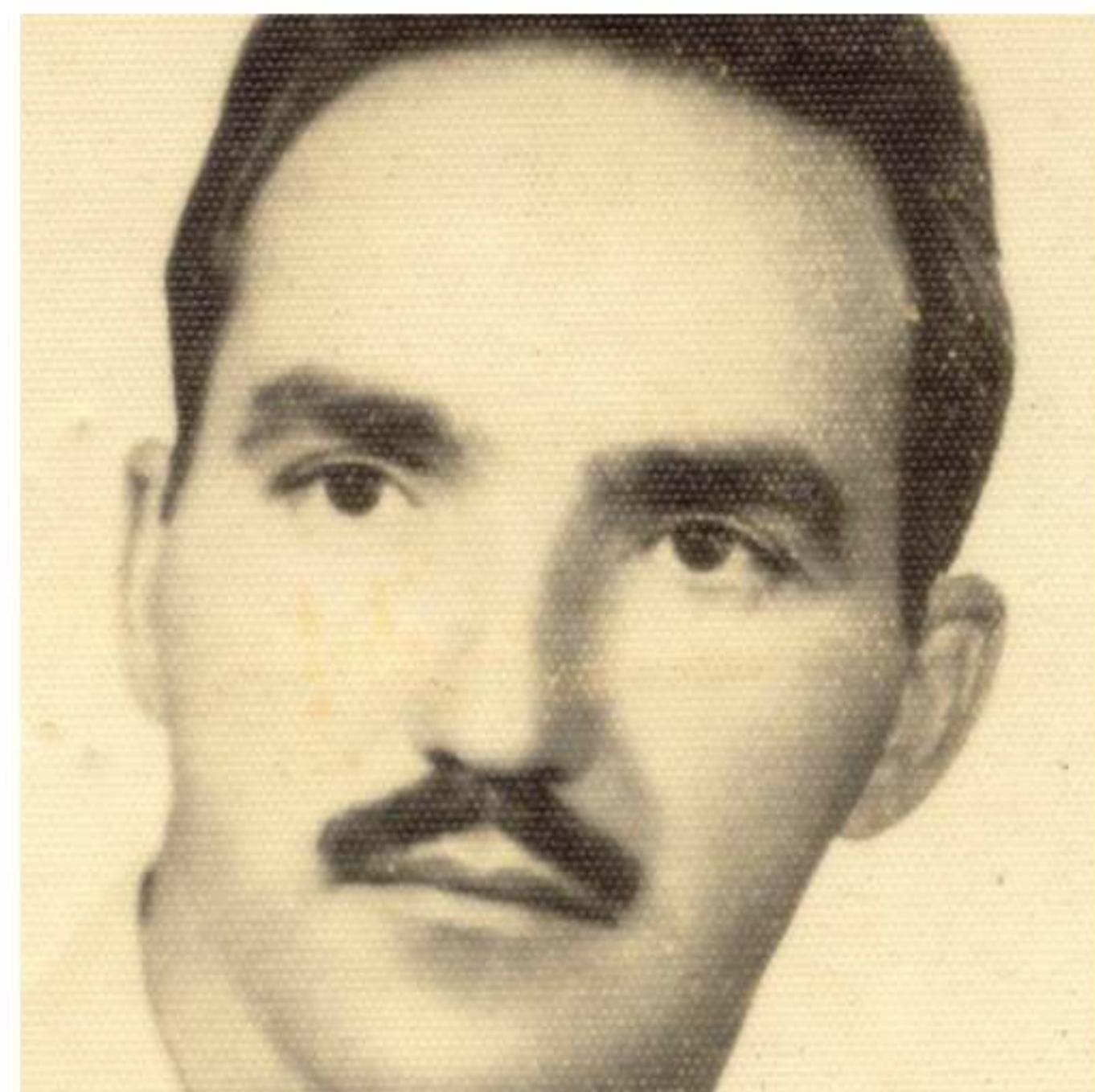
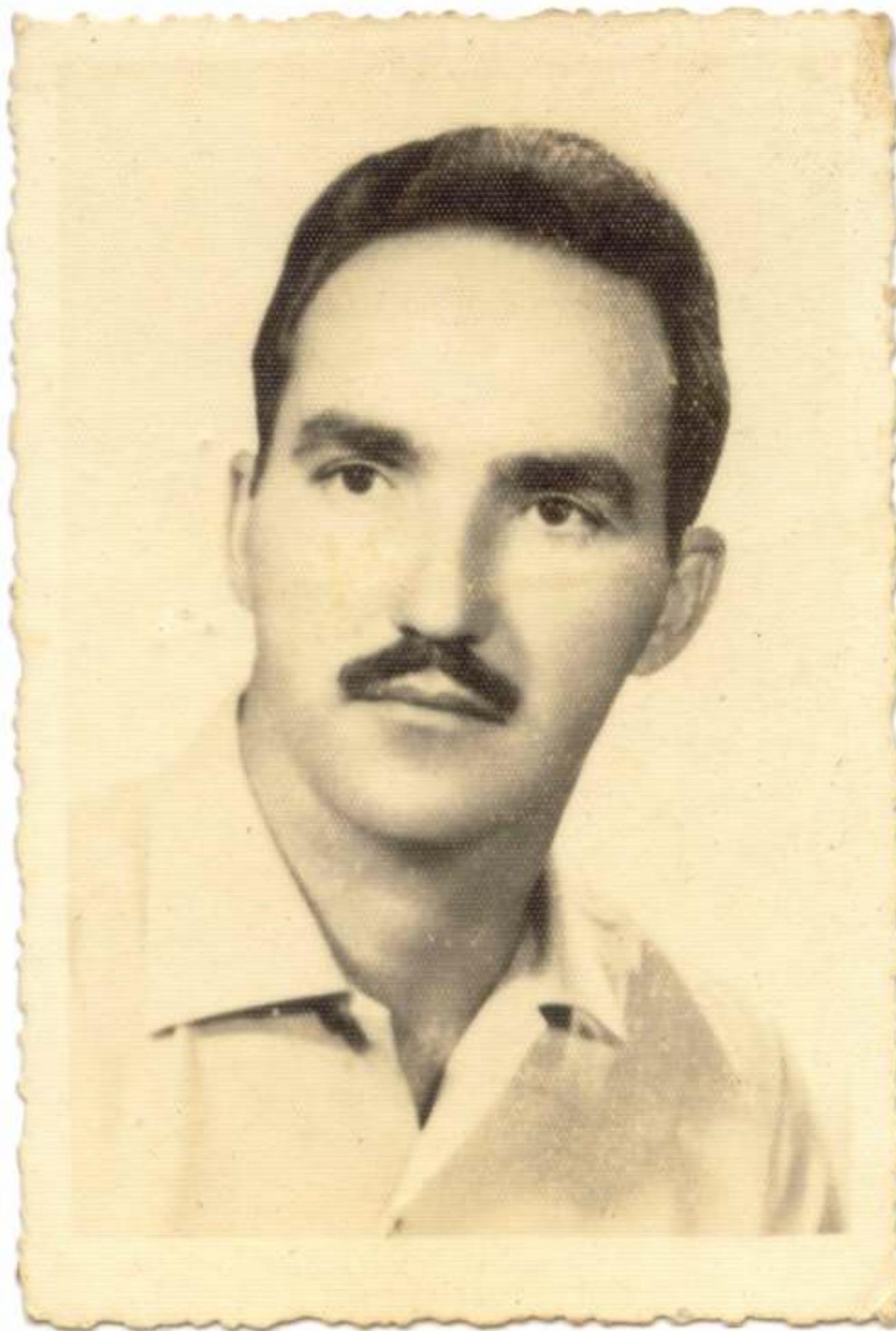
Filtragem de Imagens no Domínio da Frequência

Agostinho Brito

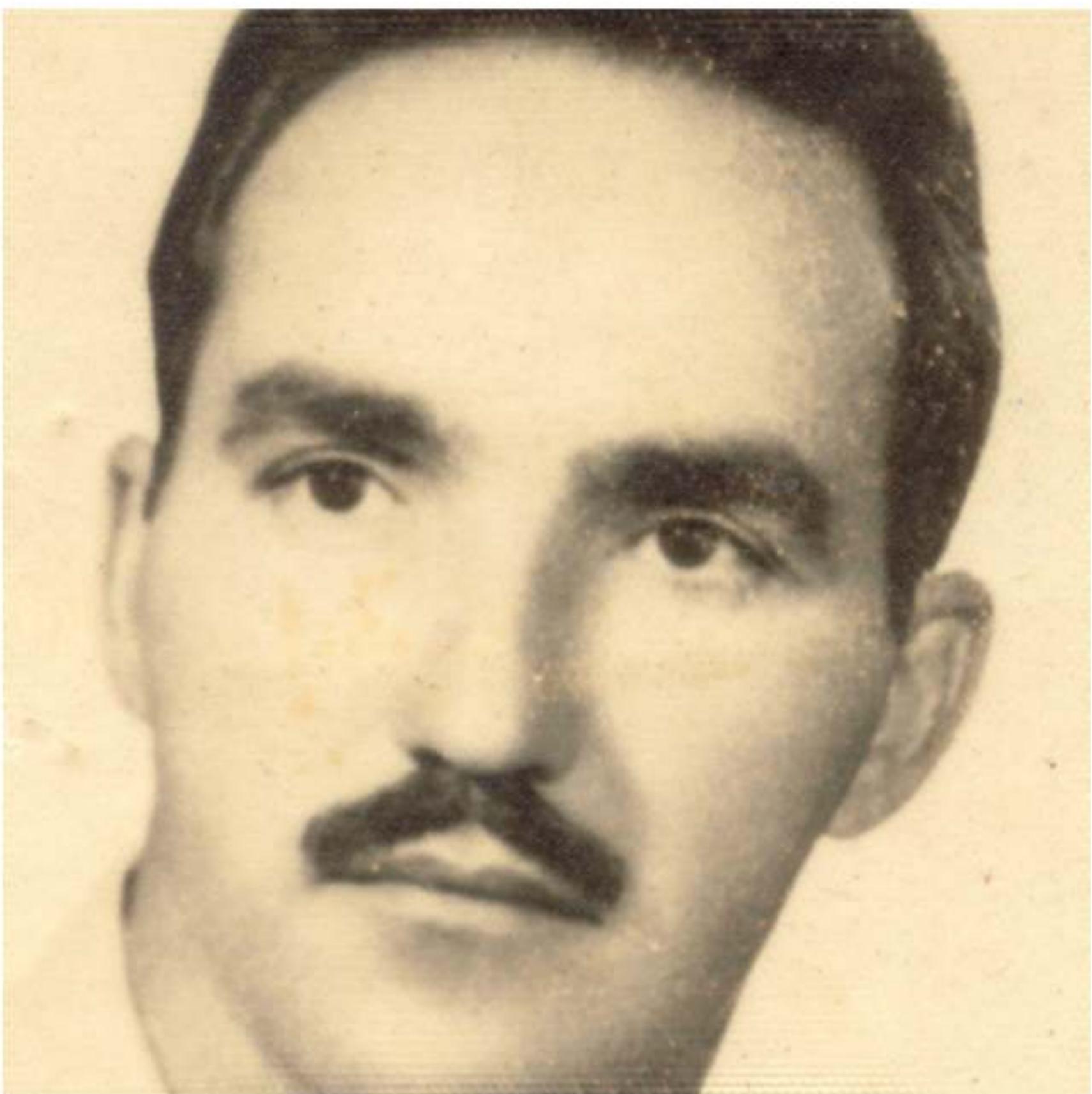
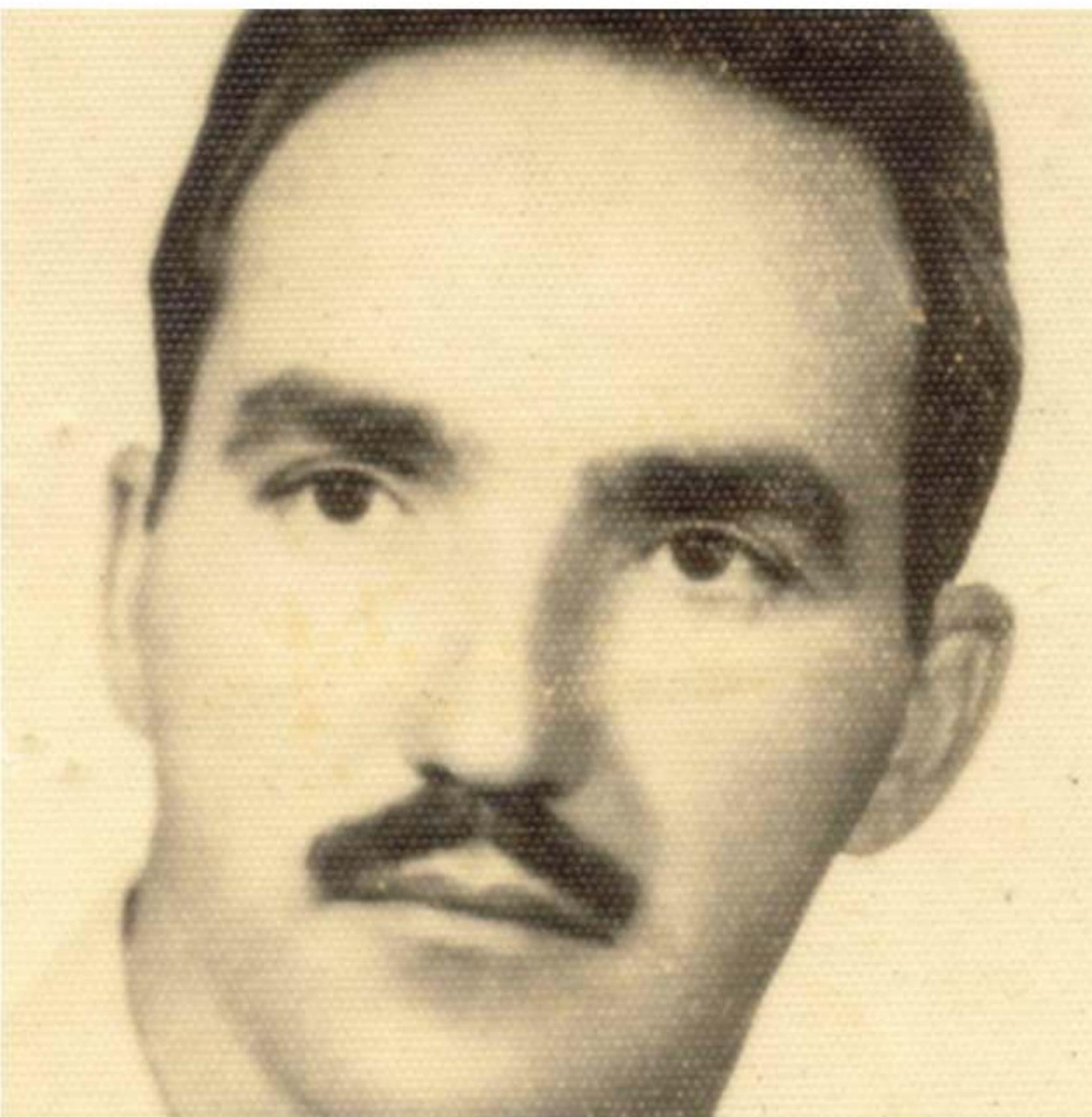
2022

A transformada de Fourier

Motivação



Mágica!



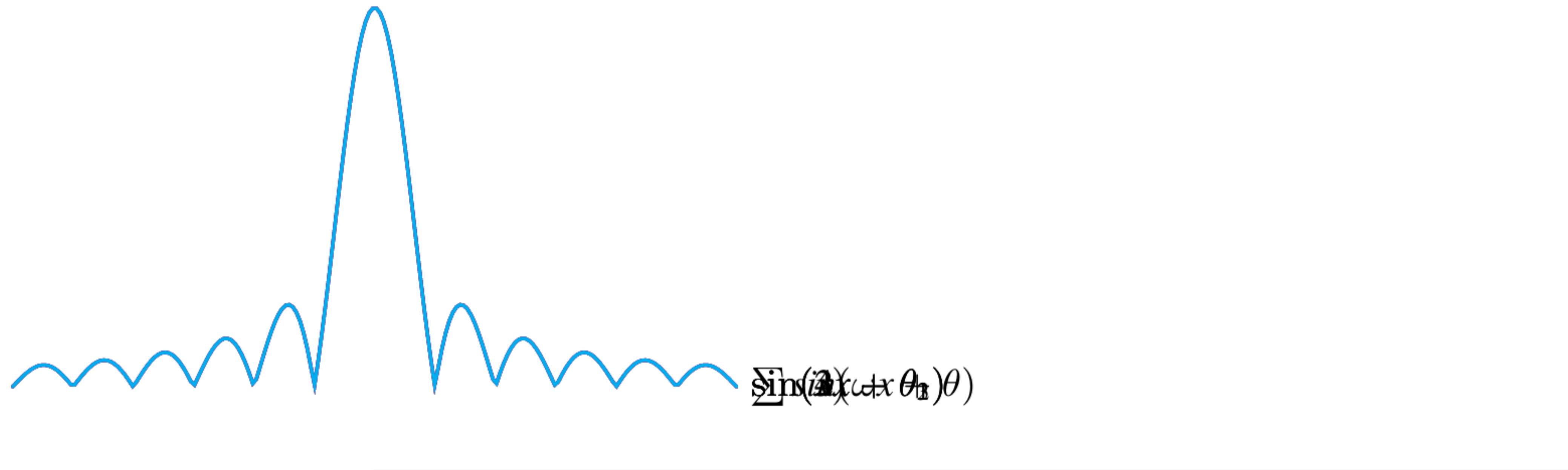
Filtragem de imagens no domínio da frequência

- Existem tipos de degradações cujo tratamento no domínio espacial se torna impossível, ou muito difícil de ser realizado.
- Tais degradações podem ser mais facilmente tratadas se a imagem for representada de forma diferente, ou em um domínio diferente.
- Solução: utilizar transformadas que modificam a representação da imagem, possibilitando que as características da degradação sejam evidenciadas e estudadas adequadamente.

Filtragem de imagens no domínio da frequência

- A série de Fourier permite que um sinal periódico seja decomposto em uma soma de senos ou cossenos de frequências diferentes, ponderados por coeficientes diferentes.
- A transformada de Fourier permite decompor sinais que não são periódicos (imagens, por exemplo).
- Em ambos os casos, os coeficientes obtidos com ambas as transformações permitem recompor o sinal sem perda de informação.
- O tratamento de sinais com a transformada de Fourier é dito como feito no **domínio da frequência**.

Exemplo de decomposição no domínio da frequência



A Transformada de Fourier

- Seja $f(x)$ uma função contínua de uma variável real x . A transformada de Fourier, $F(u)$, de $f(x)$ é dada por

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx$$

- A função $f(x)$ pode ser obtida pela transformada inversa de Fourier

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{j2\pi ux} du$$

- Muitas vezes é conveniente representar $F(u)$ na forma polar,

$$F(u) = |F(u)|e^{-j\phi(u)}$$

- Espectro de magnitude da transformada

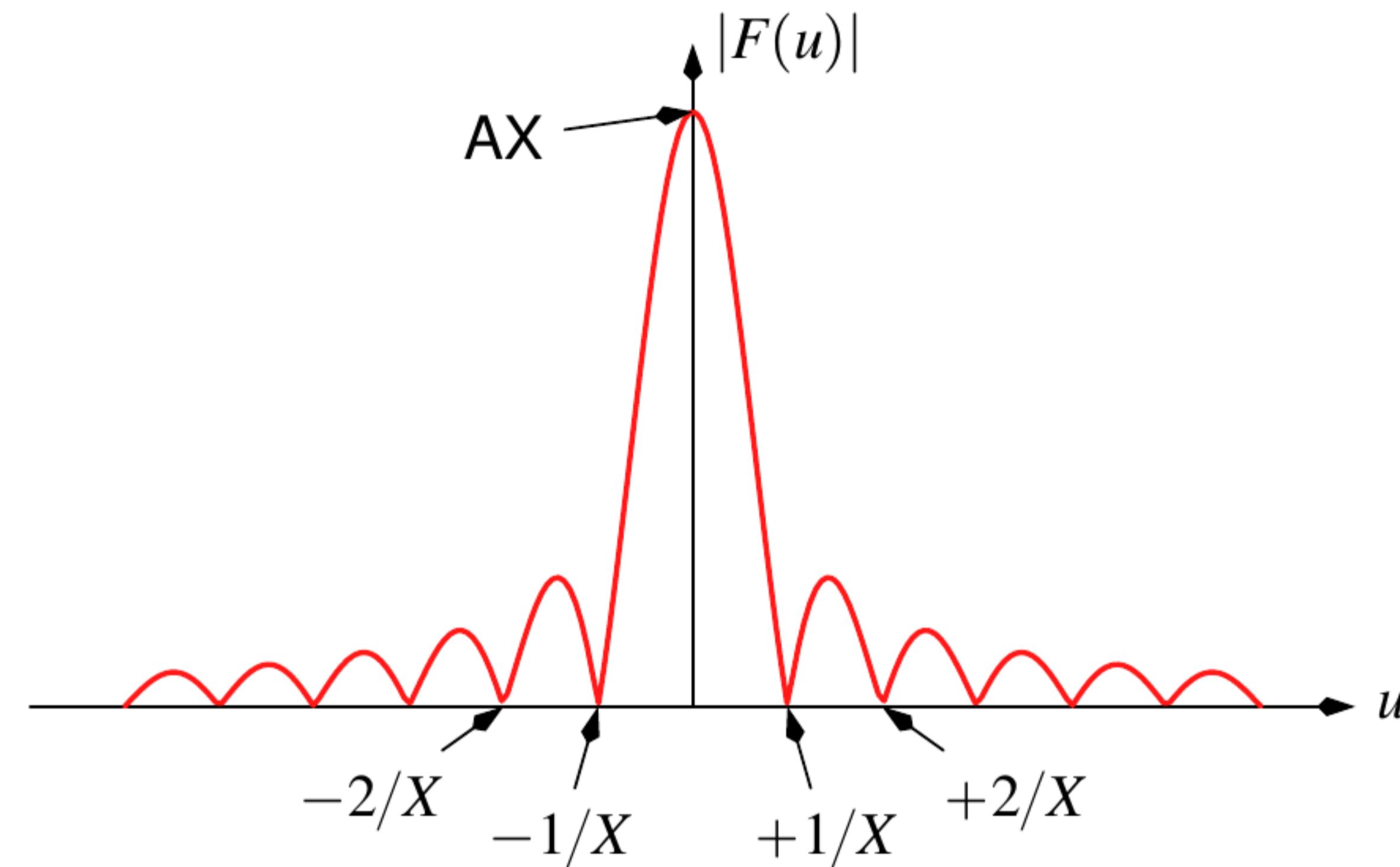
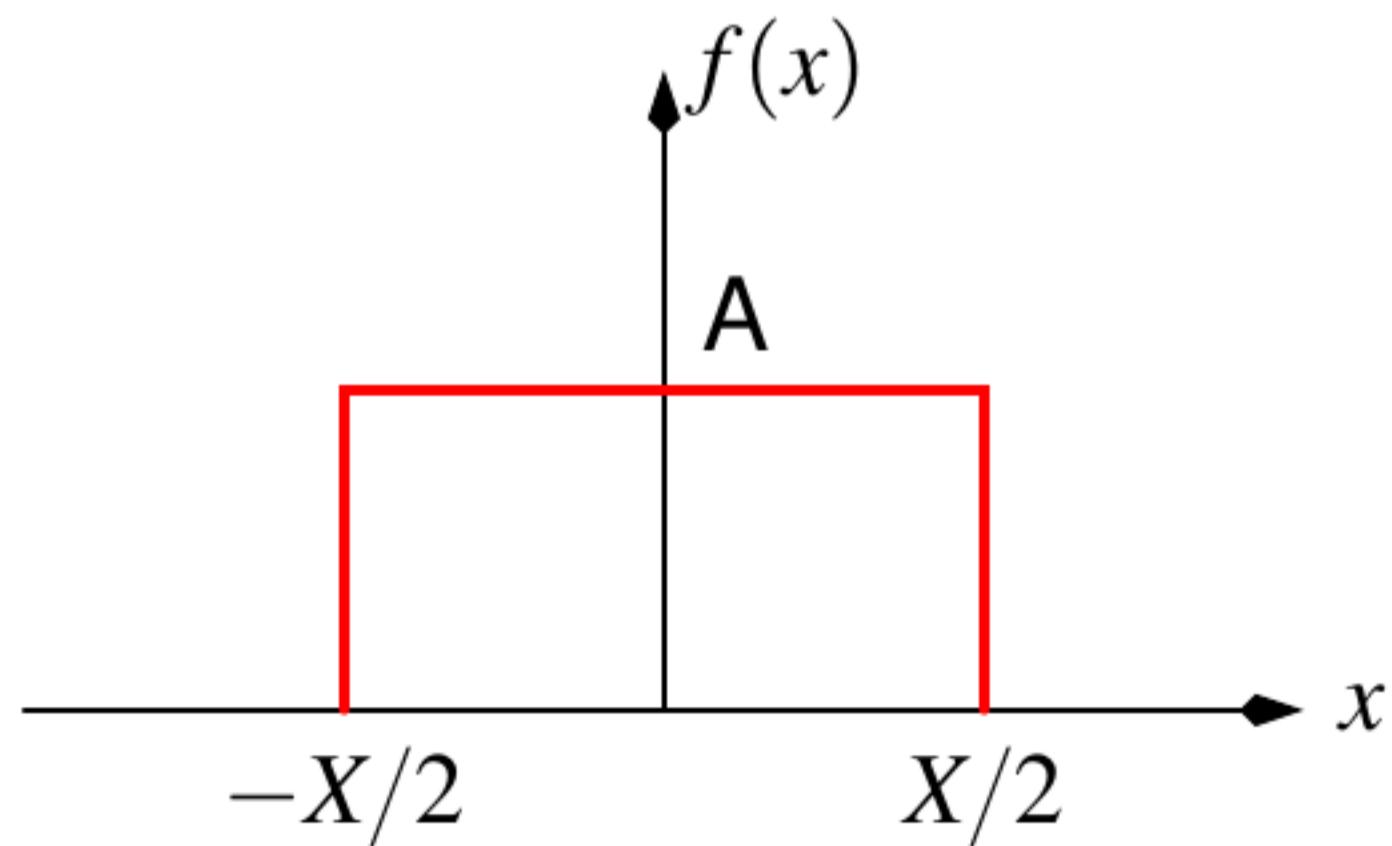
$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2}$$

- Espectro de fase da transformada

$$\phi(u) = \arctan \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$$

Exemplo de transformação contínua 1-D: função retangular

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux} dx \\ &= \int_{-X/2}^{X/2} Ae^{-j2\pi ux} dx \\ &= \frac{A}{\pi u} \sin(\pi u X) e^{-j\pi u X} \\ |F(u)| &= AX \left| \frac{\sin(\pi u X)}{\pi u X} \right| \end{aligned}$$



Filtragem de imagens no domínio da frequência

- Para o caso bidimensional, o par transformado fica

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$
$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

- O valor da exponencial é obtido pela fórmula de Euler:

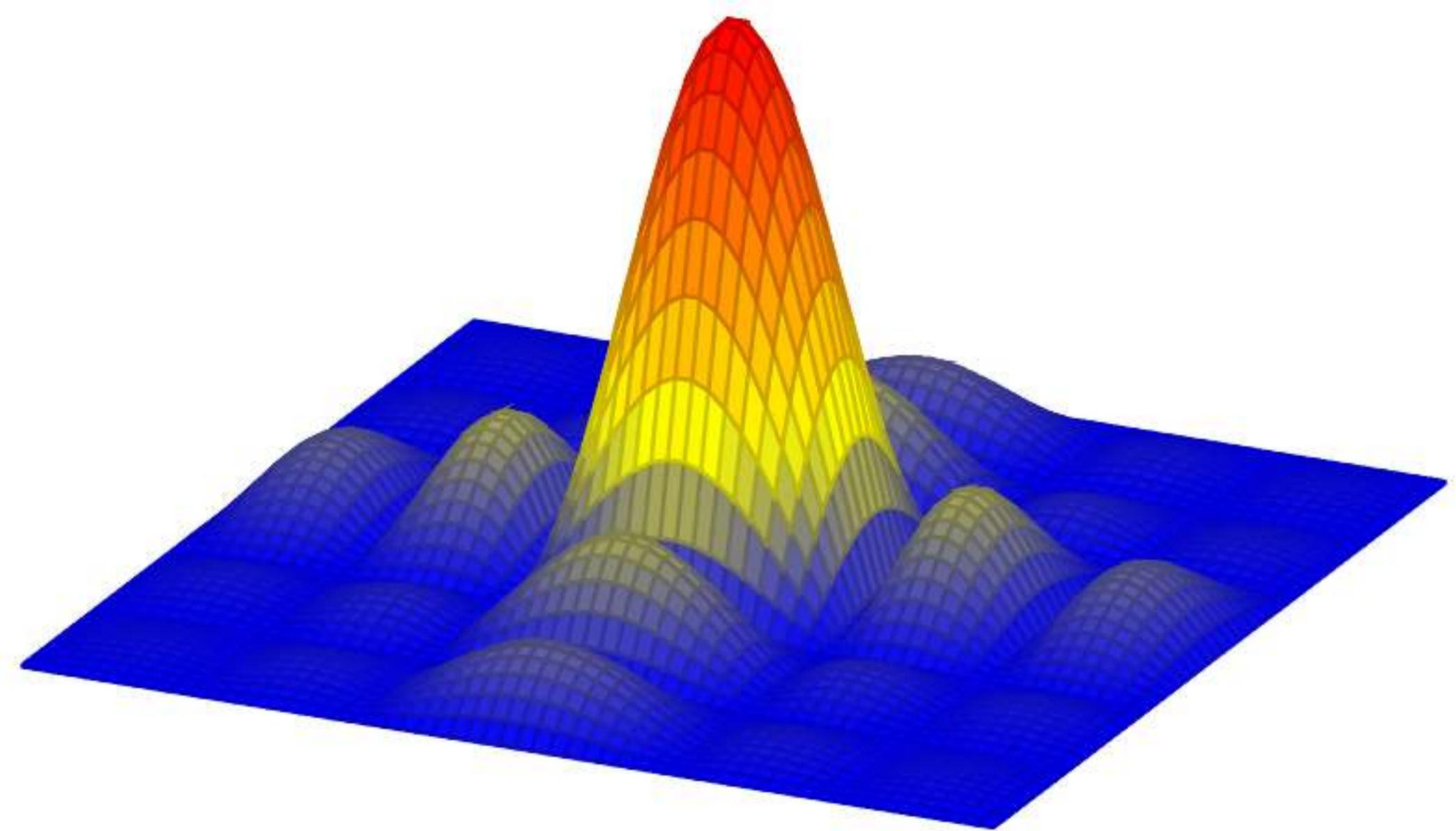
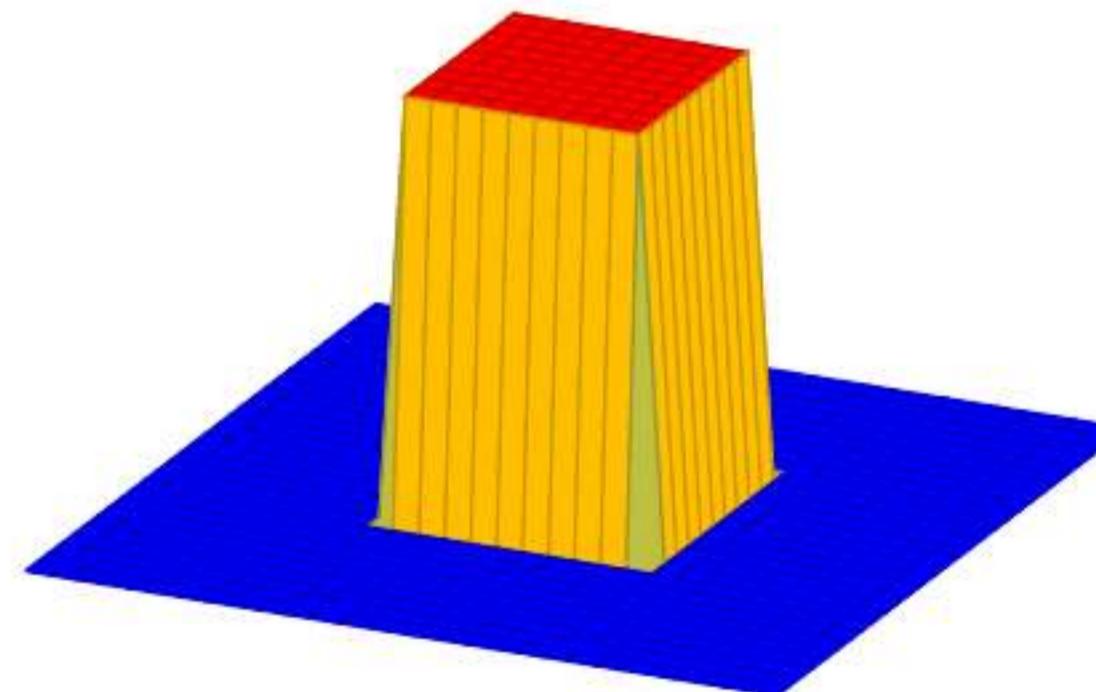
$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

- A representação polar é dada por

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{-j\phi(u, v)}$$
$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$
$$\phi(u, v) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

Exemplo de transformação contínua 2-D: função retangular

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= \int_0^Y \int_0^X A e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= A \frac{\sin(\pi u X)}{\pi u} \frac{\sin(\pi v Y)}{\pi v} e^{-j\pi(uX+vY)} \\ |F(u, v)| &= AXY \left| \frac{\sin(\pi u X)}{\pi u X} \right| \left| \frac{\sin(\pi v Y)}{\pi v Y} \right| \end{aligned}$$



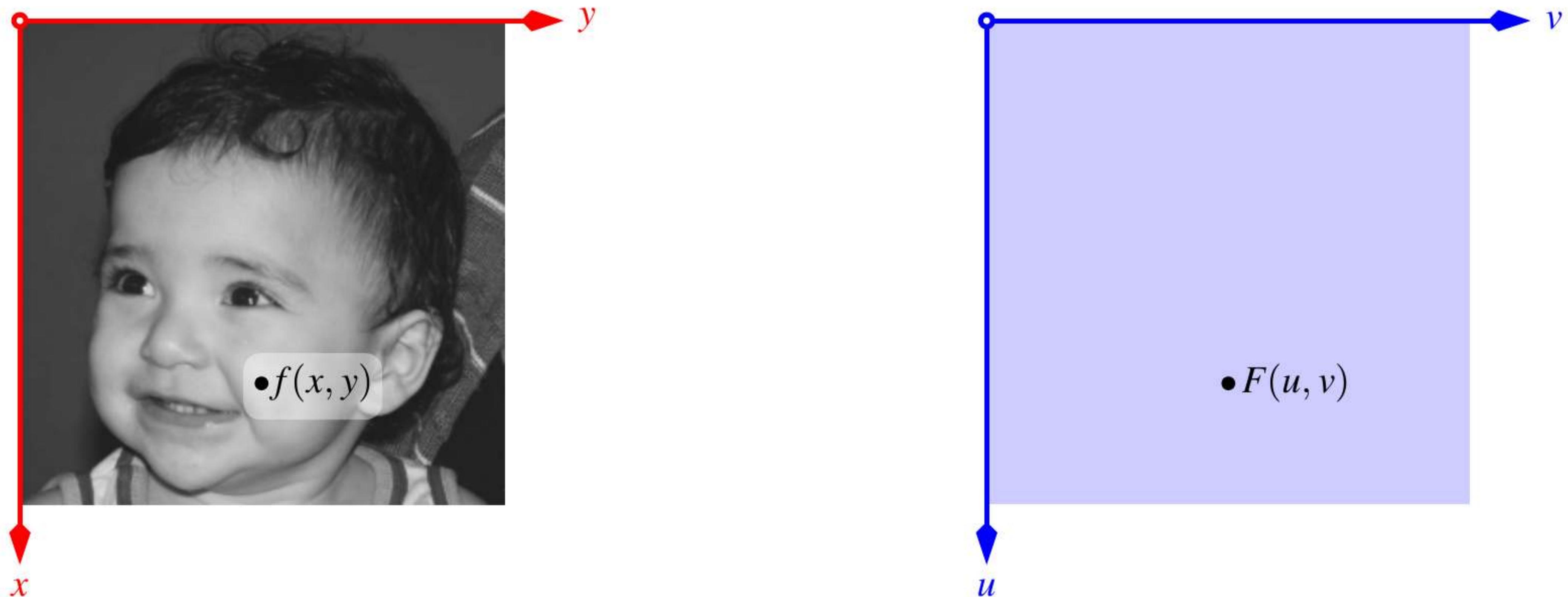
A Transformada bidimensional

- Para uma variável discreta $f(x, y)$, $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ e $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, o par transformado é dado pelas equações:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})} \quad \text{e} \quad f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

- A notação $f(0, 0), f(0, 1), \dots, f(M - 1, N - 1)$ sinaliza que as amostras são espaçadas igualmente (ao invés de posições inteiras no espaço).

A Transformada bidimensional



A Transformada bidimensional

- Sendo (x_0, y_0) o ponto onde foi realizada a primeira amostragem, os pontos seguintes são amostrados em intervalos fixos $(\Delta x, \Delta y)$, da forma $f(x_0, y_0), f(x_0 + x\Delta x, y_0 + y\Delta y), \dots$, ou seja,

$$f(x, y) \triangleq f(x_0 + x\Delta x, y_0 + y\Delta y)$$

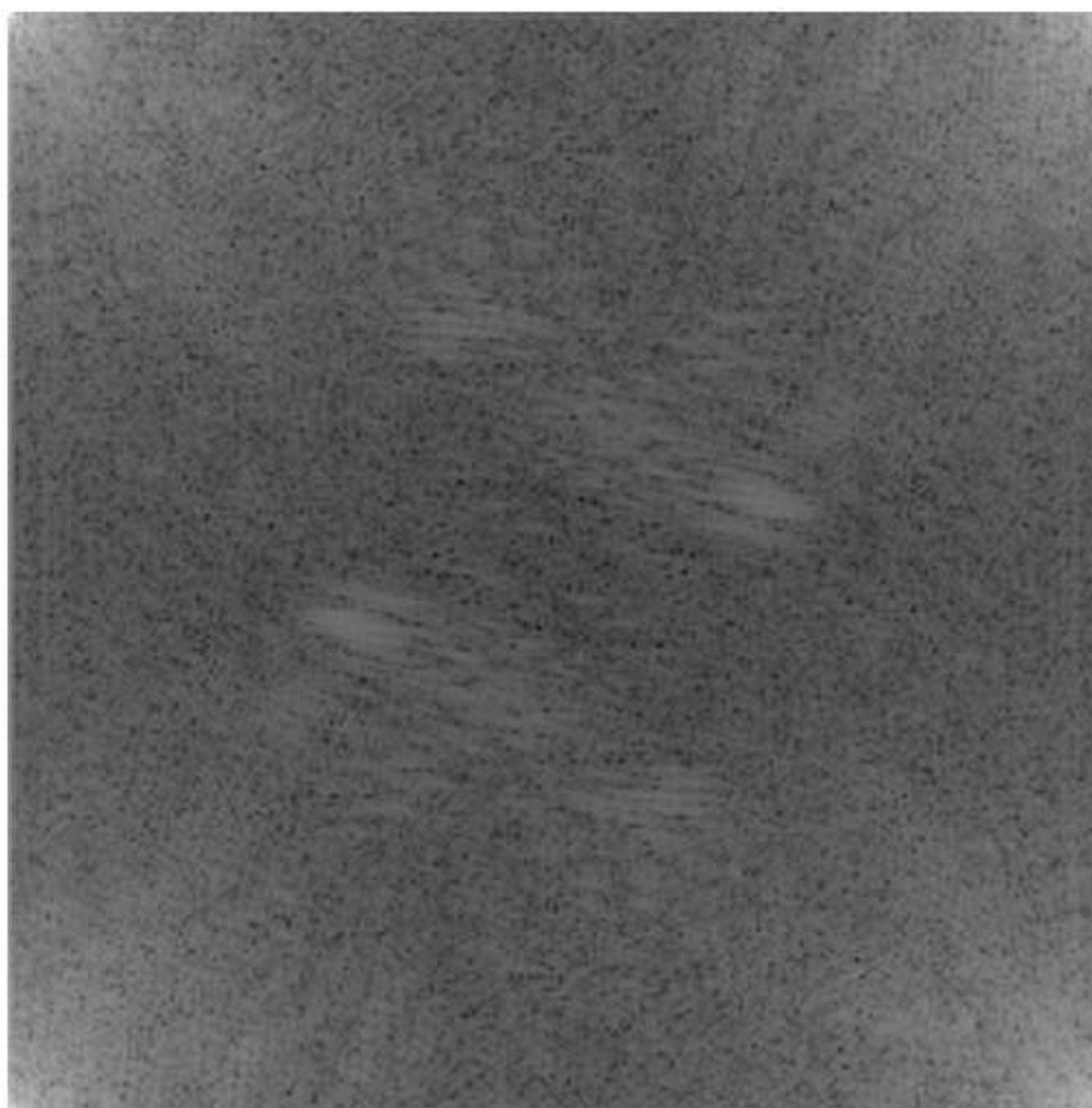
- A mesma interpretação vale para $F(u, v)$, isto é,

$$F(u, v) \triangleq F(u\Delta u, v\Delta v)$$

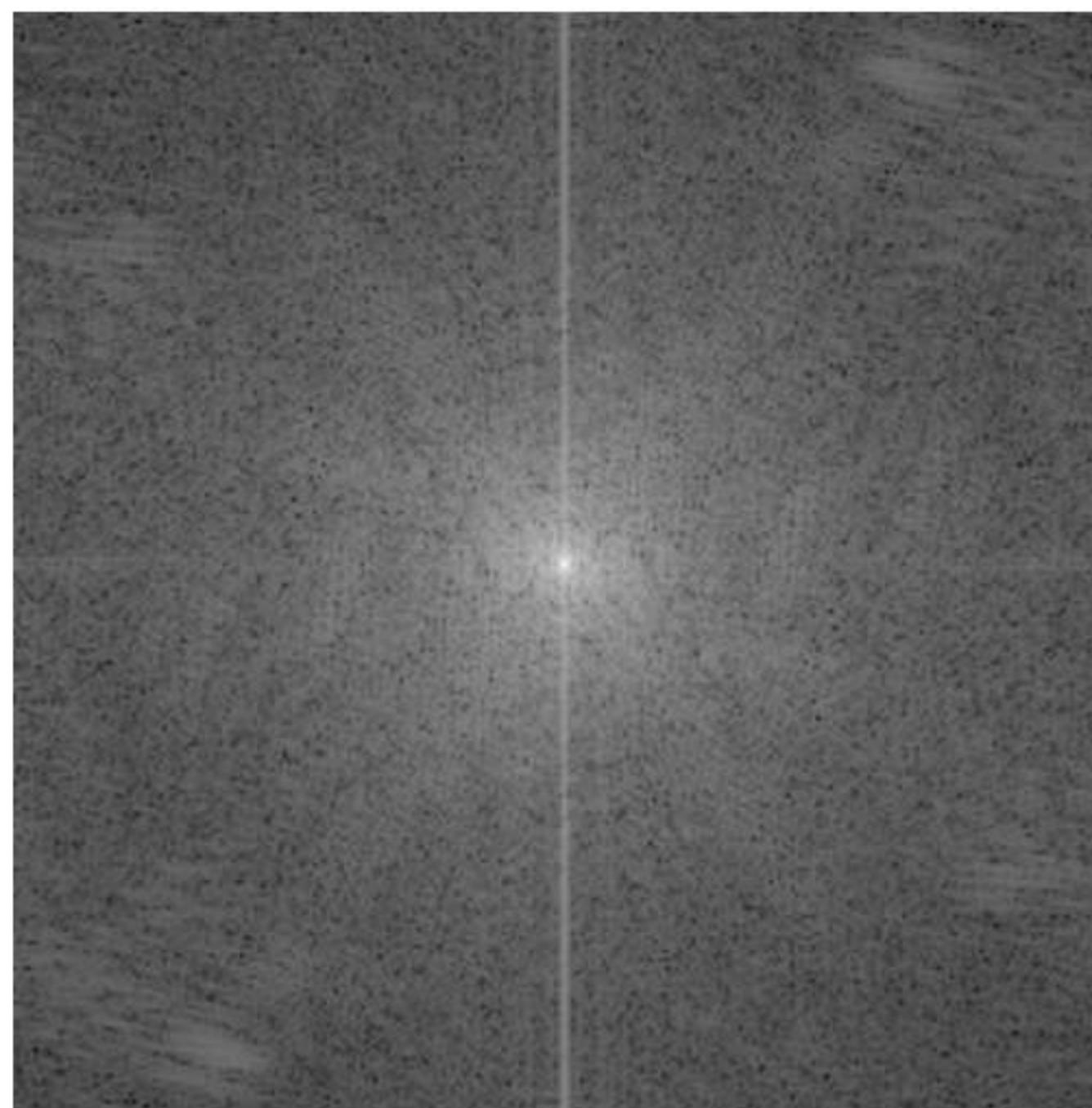
- A relação entre as amostras no domínio espacial e da frequência é dada por

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \quad e \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

Apresentação do espectro de magnitude da Transformada



$|F(u, v)|$



$|F(u - M/2, v - N/2)|$

$$\mathcal{F}\{f(x, y)(-1)^{x+y}\} = F(u - M/2, v - N/2)$$

A centralização do espectro de magnitude é adequada para filtragem, pois facilita o projeto de filtros no domínio da frequência.

Na prática, é feita a troca de quadrantes na diagonal.



Obrigado

Propriedades da transformada de Fourier

- Separabilidade

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{0}^{M-1} e^{-j2\pi \frac{ux}{M}} \sum_{0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \frac{vy}{N}}$$
$$f(x, y) = \sum_{0}^{M-1} e^{j2\pi \frac{ux}{M}} \sum_{0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \frac{vy}{N}}$$

- Translação

$$f(x, y)e^{-j2\pi(\frac{u_0x}{M} + \frac{v_0y}{N})} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})}$$

Para $u_0 = M/2$ e $v_0 = N/2$,

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}(u_0x + v_0y)} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}$$

Propriedades da transformada de Fourier

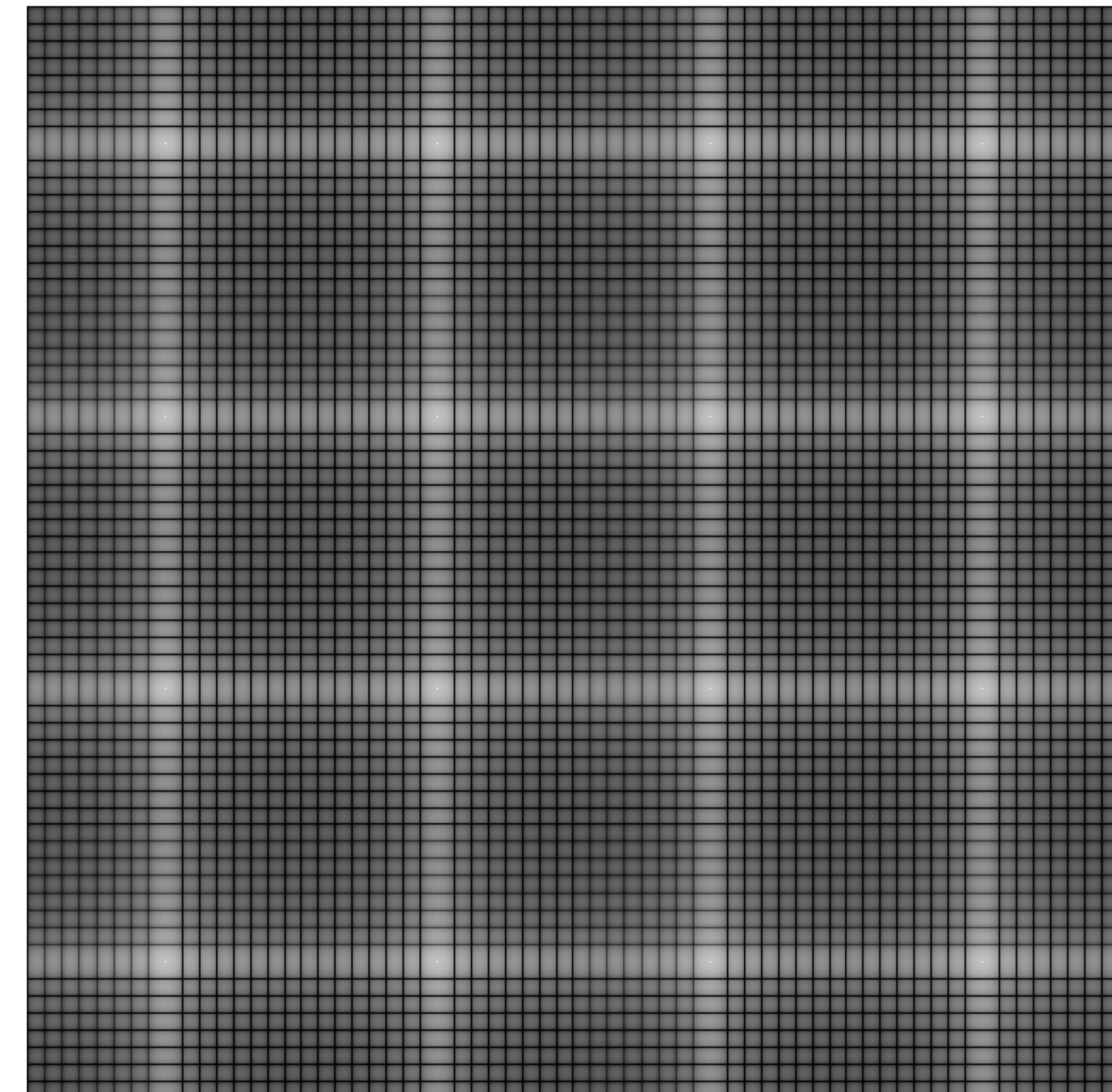
- Periodicidade

$$\begin{aligned} F(u, v) &= F(u + M, v) \\ &= F(u, v + N) \\ &= F(u + M, v) \\ &= F(u + M, v + N) \end{aligned}$$

- A propósito...

$$\begin{aligned} F(u, v) &= F(u + kM, v + pN) \\ f(x, y) &= f(x + kM, y + pN) \end{aligned}$$

- A ideia da periodicidade é importante, pois tanto a transformação direta quanto a inversa geram funções periódicas.

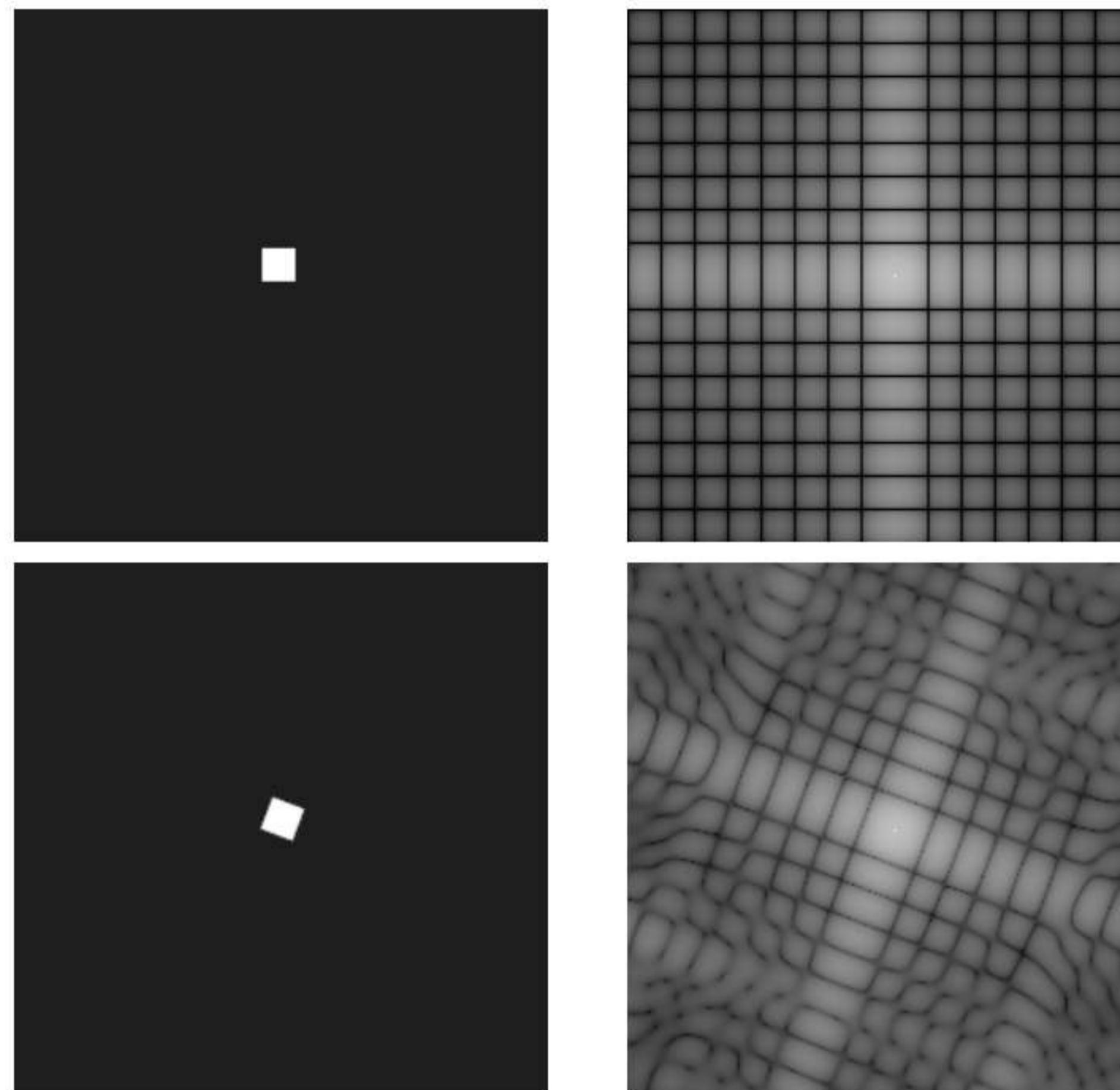


Propriedades da transformada de Fourier

- Rotação

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = w \cos \phi \quad v = w \sin \phi$$

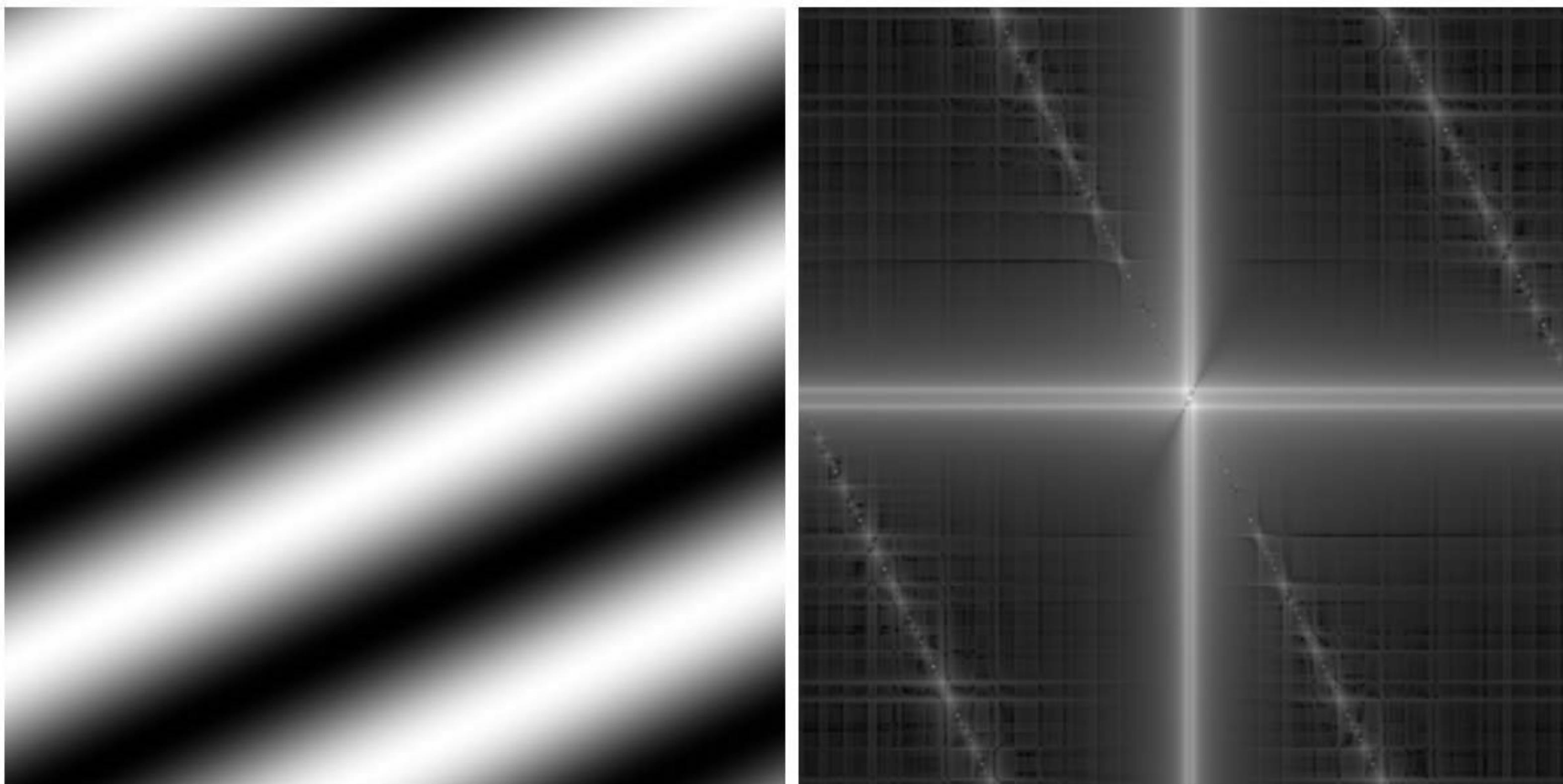
$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(w, \phi + \theta_0)$$



Propriedades da transformada de Fourier

- Simetria do conjugado

$$\begin{aligned} F(u, v) &= F^*(-u, -v) \\ |F(u, v)| &= |F(-u, -v)| \end{aligned}$$



Propriedades da transformada de Fourier

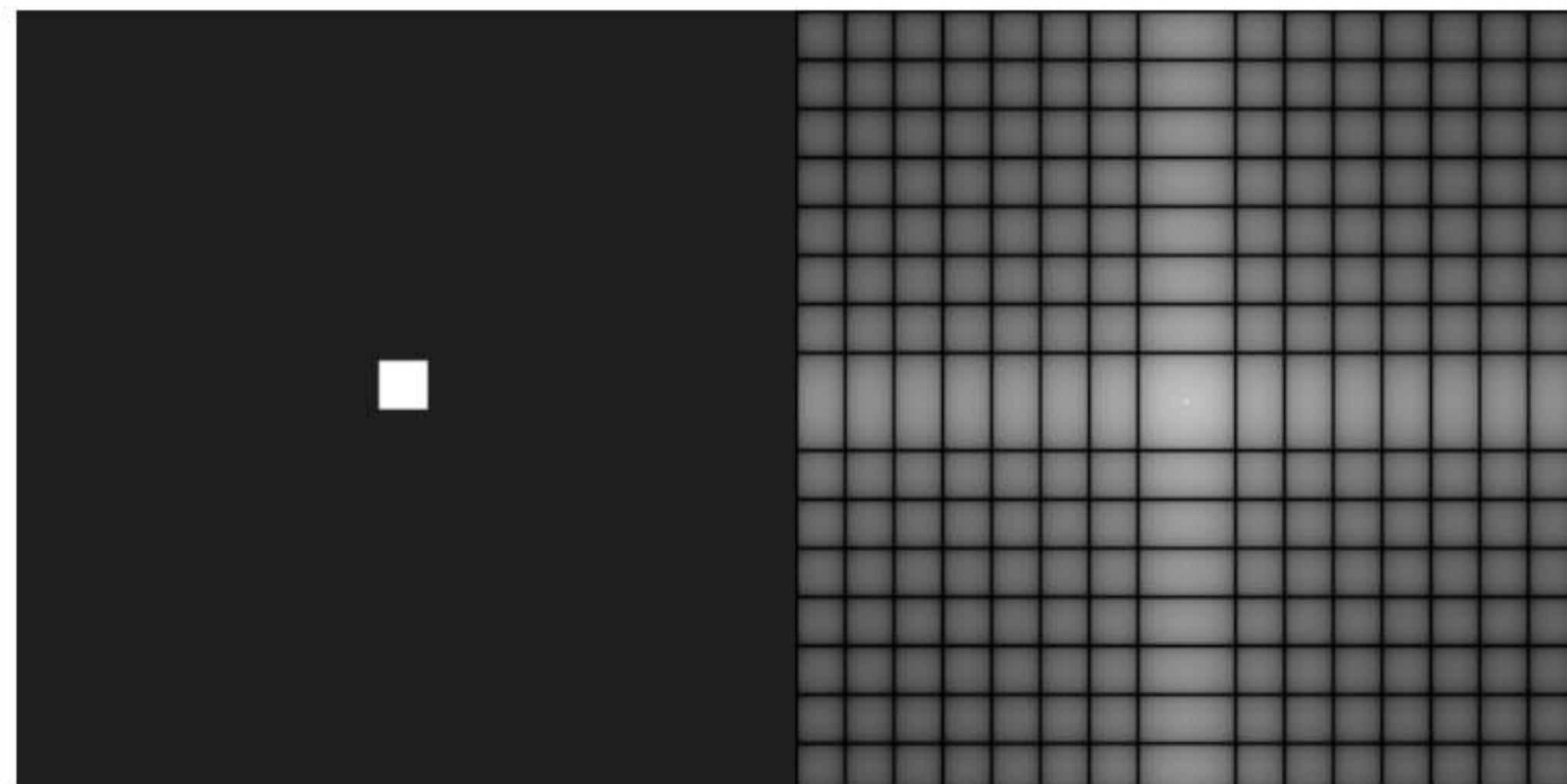
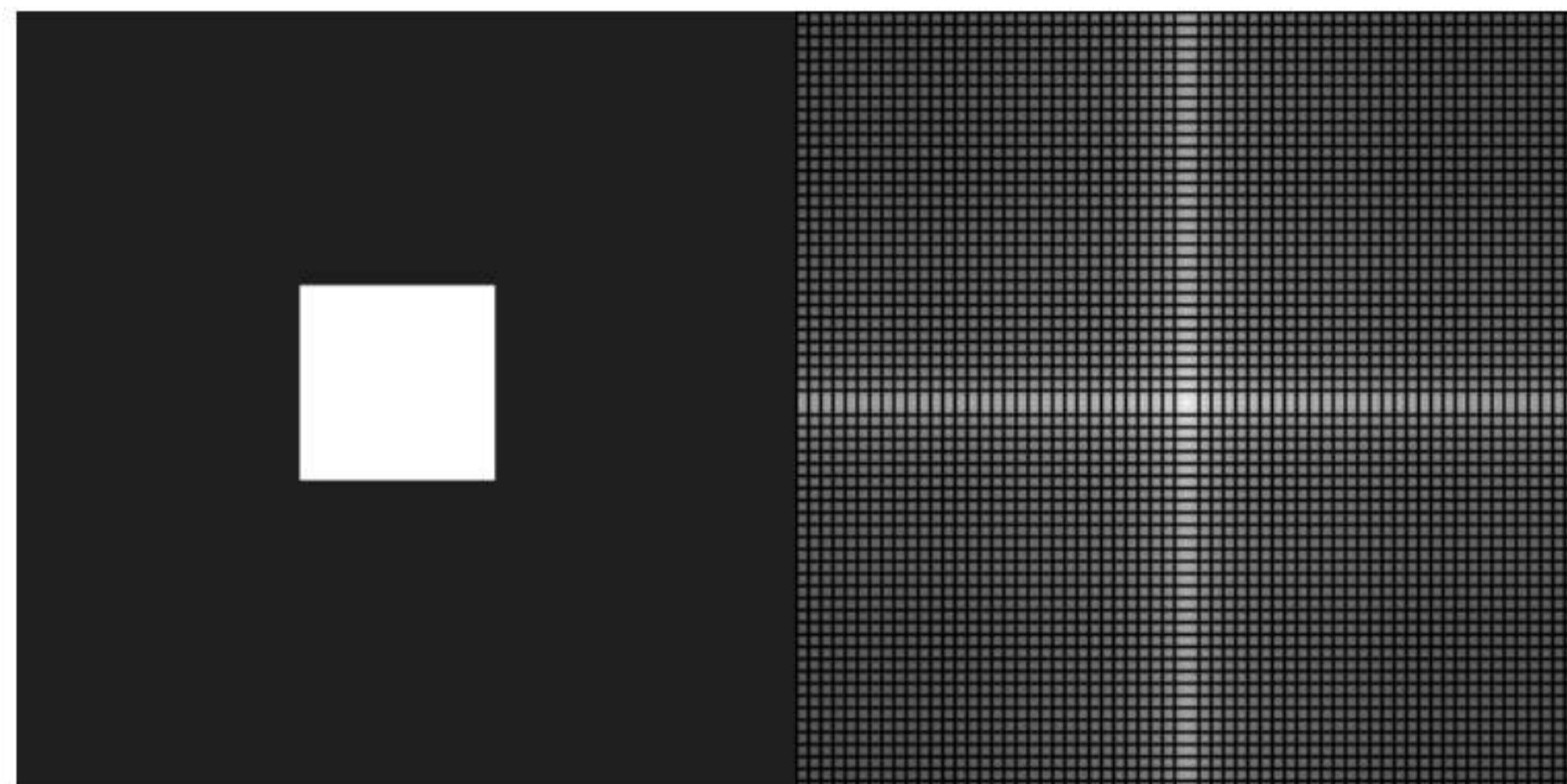
- Distributividade e escalamento

$$\mathcal{F}\{f_1(x, y) + f_2(x, y)\} = \mathcal{F}\{f_1(x, y)\} + \mathcal{F}\{f_2(x, y)\}$$

$$\mathcal{F}\{f_1(x, y)f_2(x, y)\} \neq \mathcal{F}\{f_1(x, y)\}\mathcal{F}\{f_2(x, y)\}$$

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|}F(u/a, v/b)$$

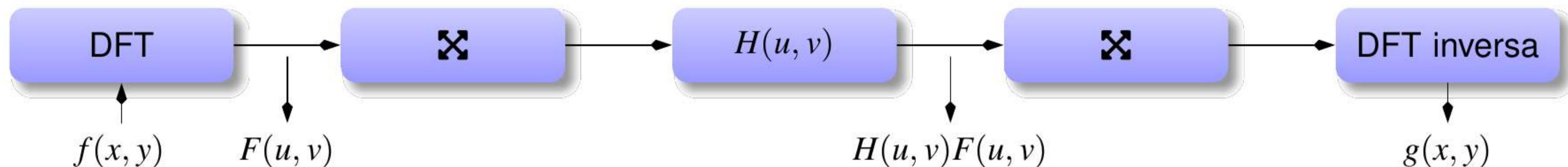




Obrigado

Filtragem no domínio da frequência

Passos para a filtragem no domínio da frequência

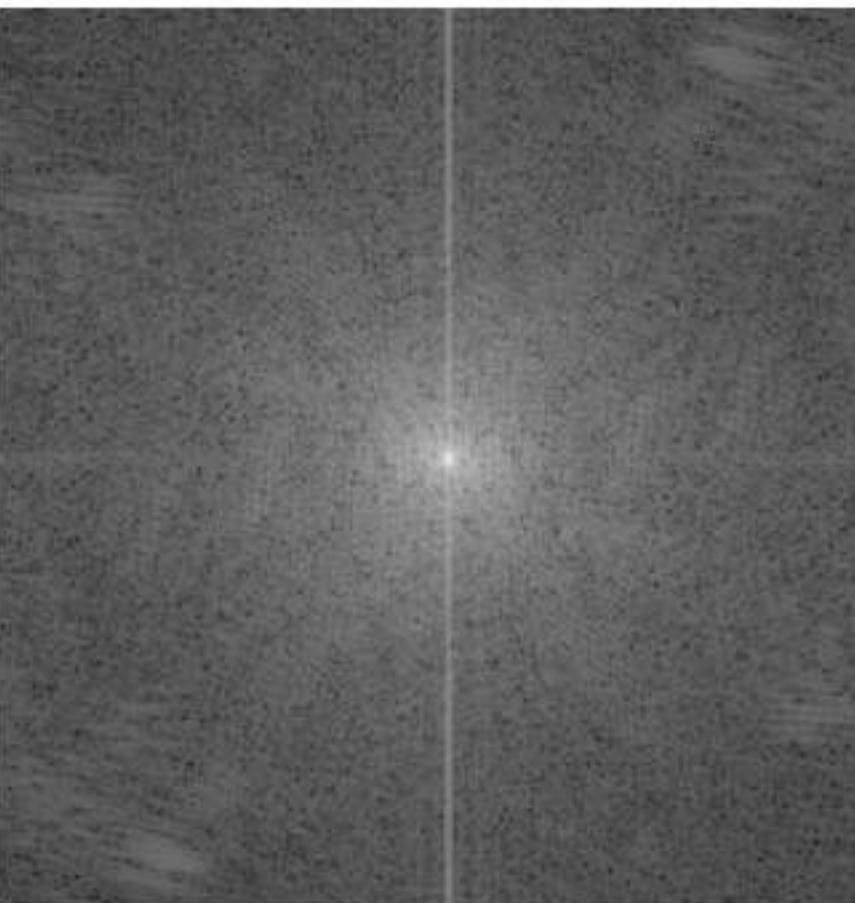


- Calcular $F(u, v)$.
- Trocar os quadrantes da imagem para deslocar a origem da transformada para o centro da imagem.
- Multiplicar $F(u, v)$ pelo filtro $H(u, v)$, obtendo $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$.
- Trocar novamente os quadrantes para deslocar a origem da transformada para o canto superior esquerdo.
- Calcular transformada inversa de $G(u, v)$ e extrair parte real.

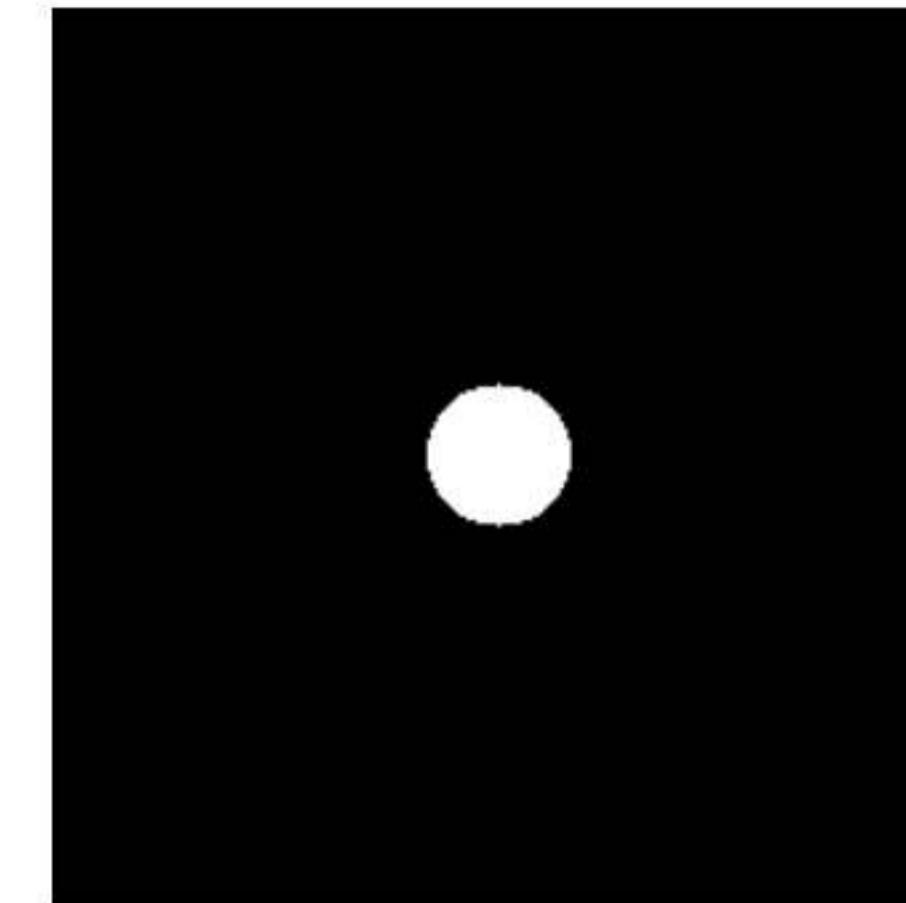
Exemplo de filtragem



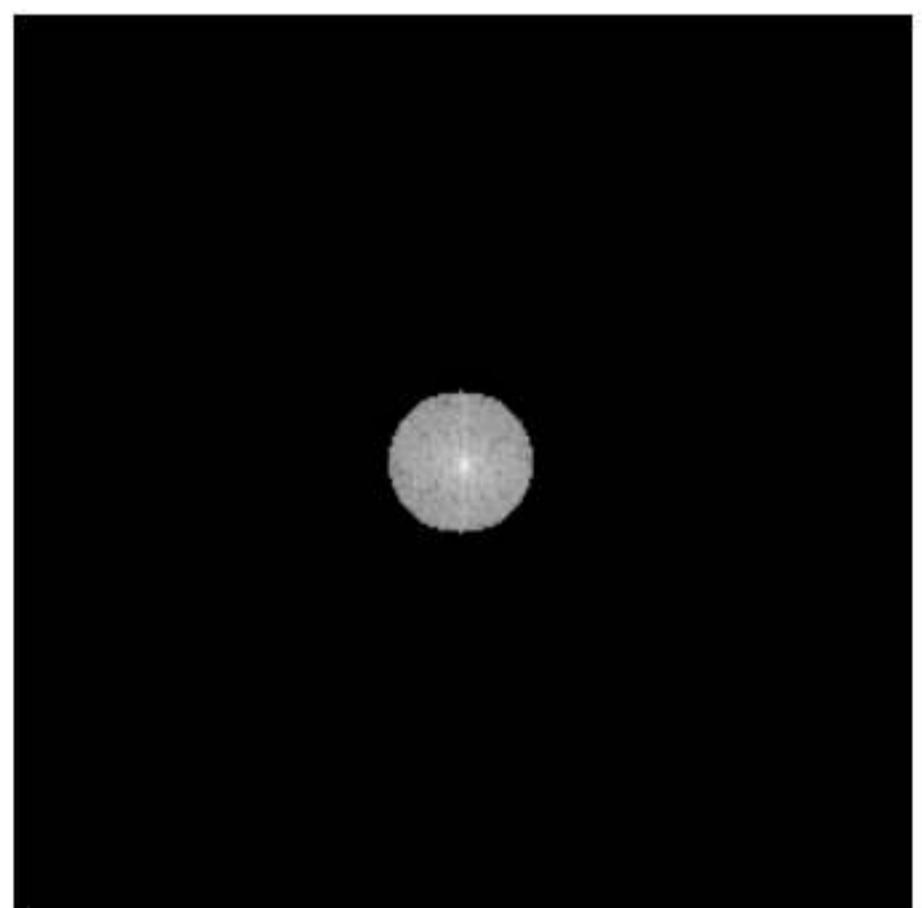
$f(x, y)$



$|F(u, v)|$



$H(u, v)$



$|H(u, v)F(u, v)|$



$g(x, y)$



$f(x, y) - g(x, y)$

Principais filtros de frequência

Especificados pela distância ao centro e uma frequência de corte D_0

$$D(u, v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$$

Passa baixas

- Ideal

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

- Butterworth de ordem n

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v)/D_0]^{2n}}$$

- Gaussiano

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/D_0^2}$$

Passa altas

- Ideal

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{se } D(u, v) < D_0 \\ 1 & \text{se } D(u, v) \geq D_0 \end{cases}$$

- Butterworth de ordem n

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0/D(u, v)]^{2n}}$$

- Gaussiano

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v)/D_0^2}$$

Exemplos de filtragem passa-baixas e passa-altas



ideal



gauss



butterworth



ideal



gauss



butterworth

Laplaciano no domínio da frequência

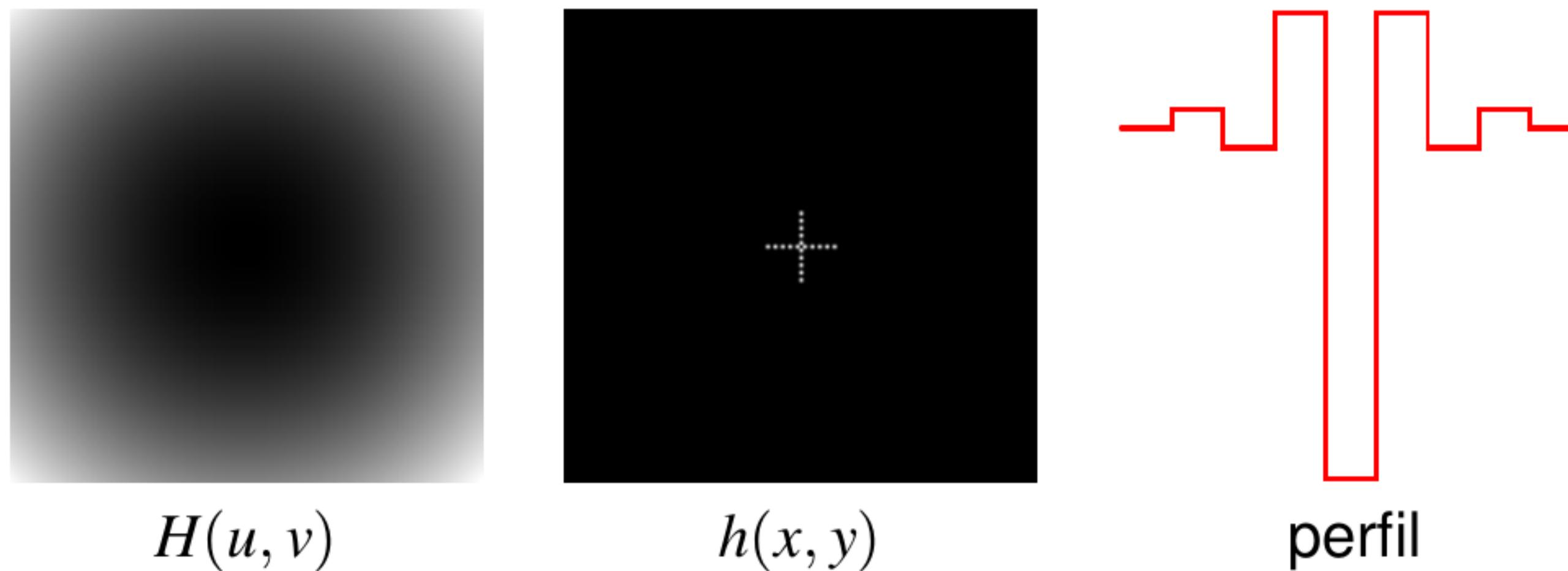
- É possível mostrar que

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right\} = (ju)^n F(u)$$

- Logo, para duas dimensões,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} + \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial y^n} \right] &= (ju)^2 F(u, v) + (jv)^2 F(u, v) \\ &= -(u^2 + v^2) F(u, v) \end{aligned}$$

- Com isso, o filtro laplaciano no domínio da frequência é implementado utilizando o filtro $H(u, v) = -(u^2 + v^2)$.



Filtragem homomórfica

- Baseia-se nos princípios de iluminância e reflectância para realizar a filtragem.

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y)$$

- Iluminação $i(x, y)$: apresenta variações espaciais lentas (frequências baixas);
- Reflectância $r(x, y)$: apresenta variações espaciais rápidas (frequências altas);

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} \neq \mathcal{F}\{i(x, y)\}\mathcal{F}\{r(x, y)\}$$

- Definindo $z(x, y) = \ln f(x) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$, pode-se tomar a transformada de Fourier de $z(x, y)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{z(x, y)\} &= \mathcal{F}\{\ln i(x, y)\} + \mathcal{F}\{\ln r(x, y)\} \\ Z(u, v) &= F_i(u, v) + F_r(u, v)\end{aligned}$$

- Aplicando-se o filtro de frequência, obtém-se uma imagem filtrada

$$\begin{aligned}S(u, v) &= H(u, v)Z(u, v) \\ s(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}\{S_i(u, v)\} + \mathcal{F}^{-1}\{S_r(u, v)\} \\ s(x, y) &= i'(x, y) + r'(x, y)\end{aligned}$$

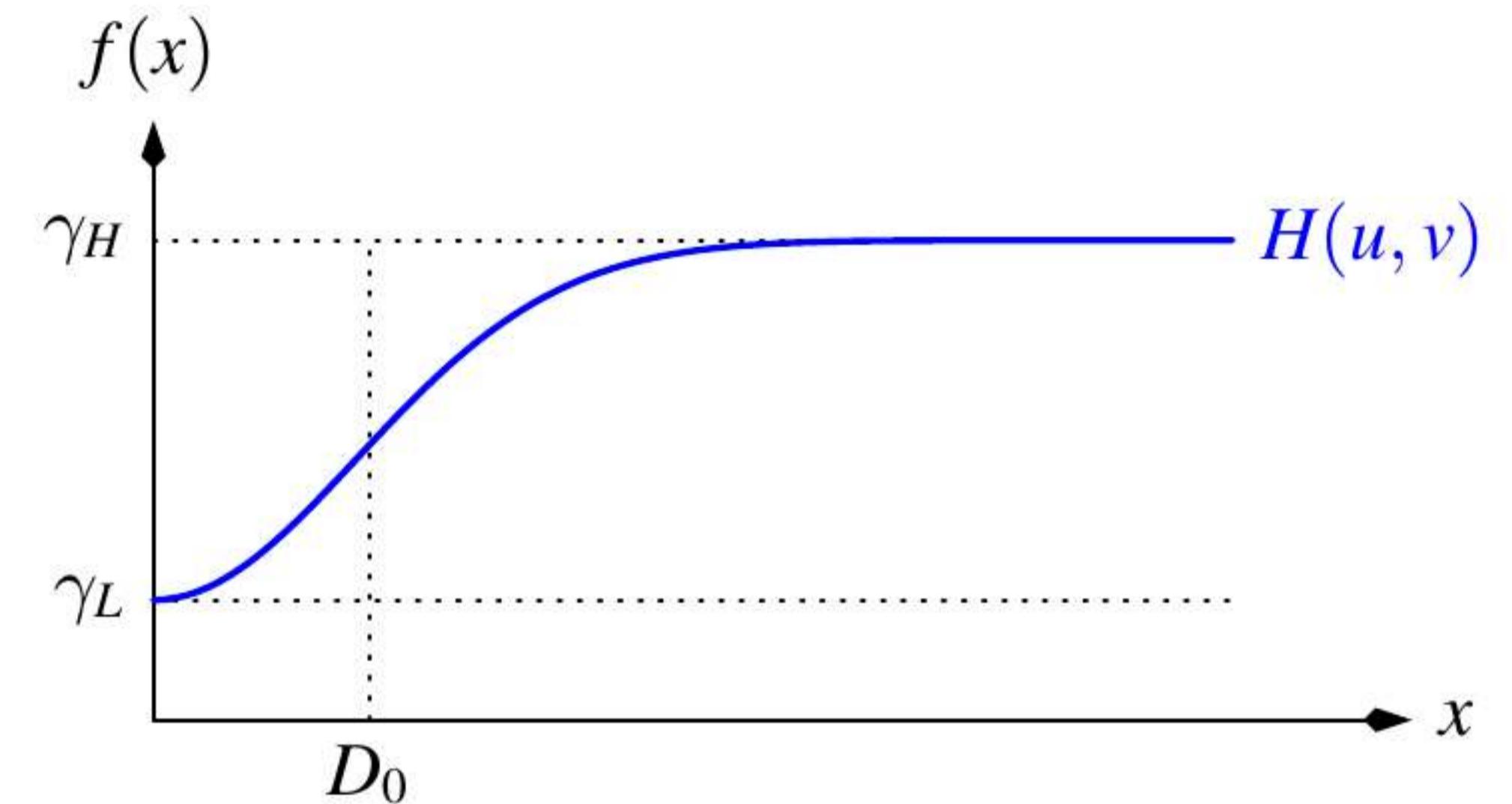
Filtragem homomórfica (cont.)

- A imagem filtrada, $g(x,y)$, é dada por:

$$g(x,y) = e^{s(x,y)} = i_0(x,y)r_0(x,y)$$

- $H(u,v)$: versão modificada do filtro Gaussiano. Deve atenuar as frequências baixas e manter as frequências altas.

$$H(u,v) = (\gamma_H - \gamma_L)(1 - e^{-c(D^2(u,v)/D_0^2)}) + \gamma_L$$



A transformada rápida de Fourier (FFT)

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j \frac{2\pi u x}{N}}$$

- N operações de multiplicação
- N frequências $\rightarrow NO(N) \rightarrow O(N^2)$ operações.
- A FFT reduz para $O(N \log_2 N)$ operações em 1D.
- Em 2D, a FFT uma imagem de dimensões $M \times N$ leva $O(MN \log_2 MN)$ operações. Quando comparado com a DFT, que leva $O(MN(M + N))$ operações, o ganho continua $O(MN \log_2 MN)$.
- Para $M = N = 2^n$, o ganho fica $O(2^n/n)$ operações. Para $n = 15$, o cômputo da FFT seria realizado 2200 vezes mais rápido que a DFT na mesma máquina.
- Limitação da FFT: imagens devem ser quadradas e com lados iguais a potências de 2, ou seja, $M = N = 2^n$.

Padding

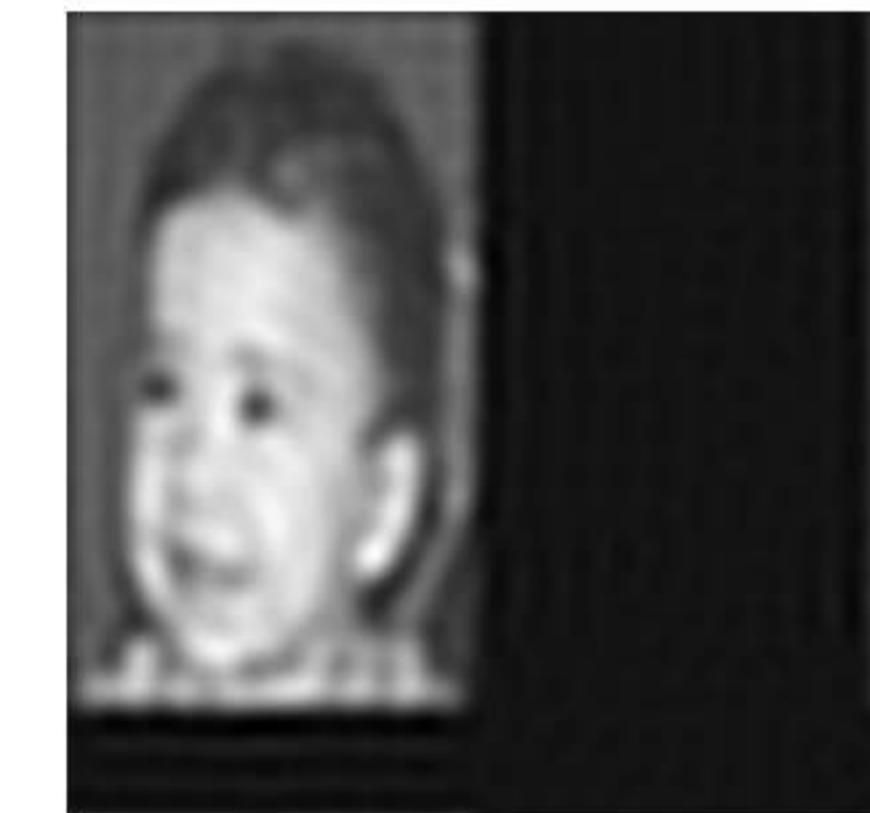
- Quando as imagens possuem tamanho diferente de potências de 2, pode-se realizar a transformada de Fourier aumentando-se a imagem para tamanho igual à menor potência de 2 necessária para armazenar a imagem.
- Uma das soluções é a realização de *zero padding*. Completa-se o restante com 0, realiza-se a filtragem, e recorta-se a imagem filtrada.



220×130



256×256



filtrada



recortada

Correspondência entre os domínios espacial e da frequência

- A principal relação entre os dois domínios é estabelecida pelo teorema da convolução.
- É possível mostrar, da equação acima, as seguinte equivalência entre os domínios

$$\begin{aligned} f(x, y) * g(x, y) &\Leftrightarrow F(u, v)G(u, v) \\ f(x, y)g(x, y) &\Leftrightarrow F(u, v)*G(u, v) \end{aligned}$$

- Dá-se ao tipo especial de convolução que possui correspondência no domínio da frequência o nome de convolução circular. o nome de **convolução circular**.

$$f(x, y) * h(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n)h(x - m, y - n)$$

- Em teoria, o mesmo procedimento de filtragem pode ser realizado em ambos os domínios.
- Na prática, a escolha do domínio adequado para trabalhar pode facilitar a análise do problema e acelerar o cômputo de resultados.

Correspondência entre os domínios espacial e da frequência

- A convolução discreta entre duas funções $f(x, y)$, de tamanho $A \times B$ e $g(x, y)$, de tamanho $C \times D$, deve ser realizada assumindo serem ambos os arrays periódicos e de períodos iguais M e N para as direções x e y , respectivamente.
- Tal assunção evita que ocorra superposição das funções durante o processo de convolução.
- Deve-se portanto, escolher M e N tais que:

$$M \geq A + C - 1$$

$$N \geq B + D - 1$$

Correspondência entre os domínios espacial e da frequência

- Para realizar a convolução digital, criam-se novas funções extendidas $f_e(x, y)$ e $g_e(x, y)$ da seguinte maneira:

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A - 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq B - 1 \\ 0 & A \leq x \leq M - 1 \quad \text{e} \quad B \leq y \leq N - 1 \end{cases}$$

$$g_e(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & 0 \leq x \leq C - 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq D - 1 \\ 0 & C \leq x \leq M - 1 \quad \text{e} \quad D \leq y \leq N - 1 \end{cases}$$

- O processo de preenchimento com zeros acima é normalmente chamado de *zero padding*.
- A convolução de $f_e(x, y)$ com $g_e(x, y)$ é definida como

$$f_e(x, y) * g_e(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n) g_e(x - m, y - n)$$



Obrigado