



Escola Superior de Tecnologia e Gestão

Instituto Politécnico da Guarda

MÉDIA, MEDIANA, MODA, OUTRAS

PAULO NUNES

AV. DR. FRANCISCO SÁ CARNEIRO, 50 - 6301-559 GUARDA

TELF. 271220161, EXT. 161, GAB:20

GPS: LATITUDE: 40.5416236730513, LONGITUDE: -7.28243350982666

VOIP: pnunes@ipg.pt, MSN: pnunes@ipg.pt, SKYPE: pnunes.ipg.pt

EMAIL: Mailto:pnunes@ipg.pt, WEB: <http://www.ipg.pt/user/~pnunes/>



- ❑ Fotos com exercícios
- ❑ Capítulo 3 – Média, mediana, moda e outras medida de tendência central.

ÍNDICE OU NOTAÇÃO POR ÍNDICES

Índices ou notação por índices

O símbolo X_j (leia “ X índice j ”) representa qualquer um dos N valores, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$, assumidos pela variável X . A letra j , em X_j , que pode representar qualquer dos números $1, 2, 3, \dots, N$, é denominada índice. Evidentemente, pode ser usada qualquer outra letra além de j , como i, k, p ou s .

Notação de somatório

O símbolo $\sum_{j=1}^N X_j$ é usado para representar a soma de todos os X_j desde $j = 1$ até $j = N$, i. e., por definição

$$\sum_{j=1}^N X_j = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N.$$

DSC00895.JPG - 30

MÉDIAS ...

Médias e medidas da tendência central

A *média* é um valor típico ou representativo de um conjunto de dados. Como esses valores típicos tendem a se localizar em um ponto central, dentro de um conjunto de dados ordenados segundo suas grandezas, as médias também são denominadas *medidas da tendência central*.

Vários tipos de média podem ser definidos, sendo as mais comuns a *média aritmética* ou, abreviadamente, a *média*, a *mediana*, a *moda*, a *média geométrica* e a *média harmônica*. Cada uma delas apresenta vantagens e desvantagens, dependendo dos dados e dos fins desejados.

MÉDIA



Escola Superior de Tecnologia e Gestão
Instituto Politécnico da Guarda

Média aritmética

A média aritmética, ou *média*, de um conjunto de N números $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ é representada por \bar{X} (leia-se “X barra”) e definida por

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N} = \frac{\sum_{j=1}^N X_j}{N} = \frac{\Sigma X}{N} \quad (1)$$

Exemplo: A média aritmética dos números 8, 3, 5, 12, 10 é:

$$\bar{X} = \frac{8 + 3 + 5 + 12 + 10}{5} = \frac{38}{5} = 7,6$$



EXERCÍCIO - MÉDIA

1. Elabore um algoritmo que permita calcular a média aritmética das notas dos alunos de programação.
2. Elabore um algoritmo que permita calcular a média aritmética das notas dos alunos de programação e armazene num ficheiro de texto as notas e a média.

MÉDIA - FREQUÊNCIA

Se os números $X_1, X_2, X_3, \dots, X_K$ ocorrerem $f_1, f_2, f_3, \dots, f_K$ vezes, respectivamente (i.e., ocorrerem com as frequências $f_1, f_2, f_3, \dots, f_K$), a média aritmética será:

$$\bar{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 + \dots + f_K X_K}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_K} = \frac{\sum_{j=1}^K f_j X_j}{\sum_{j=1}^K f_j} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fX}{N}, \quad (2)$$

onde $N = \Sigma f$ é a *frequência total*, i.e., o total do número de casos.

Exemplo: Se 5, 8, 6, 2 ocorrerem com as frequências 3, 2, 4 e 1, respectivamente, a média aritmética será:

$$\bar{X} = \frac{(3)(5) + (2)(8) + (4)(6) + (1)(2)}{3 + 2 + 4 + 1} = \frac{15 + 16 + 24 + 2}{10} = 5,7$$

EXERCÍCIO - MÉDIA/FREQ

1. Elabore um algoritmo que permita calcular a média aritmética das notas dos alunos de programação sabendo a quantidade de alunos que tiveram uma determinada nota.

□ Exemplo:

Alunos	Nota
1	19
2	17
3	8
5	15
5	12
8	14

2. ... e armazene num ficheiro de texto as notas e a média.

MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

Média aritmética ponderada

Às vezes, associam-se os números X_1, X_2, \dots, X_K a certos *fatores de ponderação* ou pesos w_1, w_2, \dots, w_K , que dependem do significado ou importância atribuída aos números. Nesse caso

$$\bar{X} = \frac{w_1 X_1 + w_2 X_2 + \dots + w_K X_K}{w_1 + w_2 + \dots + w_K} = \frac{\sum wX}{\sum w} \quad (3)$$

tem a denominação de *média aritmética ponderada*. Note-se sua semelhança com (2), que pode ser considerada uma média aritmética ponderada, com os pesos f_1, f_2, \dots, f_K .

Exemplo: Se o exame final, em um curso, tem peso 3 e as provas correntes peso 1, e um estudante tem grau 85 naquele exame e 70 e 90 nas provas, seu grau médio é:

$$\bar{X} = \frac{(1)(70) + (1)(90) + (3)(85)}{1 + 1 + 3} = \frac{415}{5} = 83.$$



EXERCÍCIO – MÉDIA ARITMÉTICA

- ❑ Elabore um algoritmo que permita calcular a média aritmética da nota de um aluno de programação, sabendo que:
 - ❑ Frequência (60%)
 - ❑ Trabalho individual (10%)
 - ❑ Trabalho prático de grupo (30%)

MEDIANA

A mediana

A mediana de um conjunto de números, ordenados em ordem de grandeza (i.e., em um rol), é o valor médio ou a média aritmética dos dois valores centrais.

Exemplo 1. O conjunto dos números 3, 4, 4, 5, 6, 8, 8, 8, 10 tem mediana 6.

Exemplo 2. O conjunto dos números 5, 5, 7, 9, 11, 12, 15, 18 tem mediana $\frac{1}{2} (9 + 11) =$



EXERCÍCIO - MEDIANA

1. Elabore um algoritmo que permita calcular a mediana das notas dos alunos de programação.
2. ... e armazene num ficheiro de texto as notas e a mediana.

MODA

A moda

A moda de um conjunto de números é o valor que ocorre com a maior frequência, i. e., é o valor mais comum. A moda pode não existir e, mesmo que exista, pode não ser única.

Exemplo 1. O conjunto 2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18 tem moda 9.

Exemplo 2. O conjunto 3, 5, 8, 10, 12, 15, 16 não tem moda.

Exemplo 3. O conjunto 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9 tem duas modas, 4 e 7, e é denominado *bimodal*.

Uma distribuição que tem apenas uma única moda é denominada *unimodal*.



EXERCÍCIO - MODA

1. Elabore um algoritmo que permita calcular a moda das notas dos alunos de programação.
2. ... e armazene num ficheiro de texto as notas e a moda.

MÉDIA GEOMÉTRICA

A média geométrica G

A média geométrica G de um conjunto de N números $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ é a raiz de ordem N do produto desses números:

$$G = \sqrt[N]{X_1 X_2 X_3 \dots X_N} \quad (11)$$

Exemplo: A média geométrica dos números 2, 4, e 8 é:

$$G = \sqrt[3]{(2)(4)(8)} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Na prática, G é calculado por meio de logaritmos (veja o Probl. 24). Para a média geométrica de dados agrupados, veja os Probs. 25 e 46.



EXEMPLO – MÉDIA GEOMÉTRICA

- ❑ Se um investimento rende 10% no primeiro ano e 20% no segundo ano, qual o rendimento médio desse investimento?
- ❑ Seja M o montante aplicado inicialmente, após esses dois anos o montante será igual a $M * 1,10 * 1,20 = 1,32 * M$.
 - ❑ Se tomarmos a média aritmética teríamos 15% como média, porém, ao calcular o montante ao final dos dois anos obteríamos $M * 1,15 * 1,15 = 1,3225 * M$, que é diferente de $1,32 * M$.
 - ❑ Por outro lado, a média geométrica entre 10% e 20% é igual a (aproximadamente 1,1489). Aplicando essa média ao montante, é exactamente igual ao valor obtido quando aplicamos os rendimentos originais.



EXERCÍCIO – MÉDIA GEOMÉTRICA

- ❑ Elabore um programa que permita calcular o rendimento médio de um investimento sabendo o número de anos e as taxas anuais. Calcule também o valor no final do investimento.

MÉDIA HARMÓNICA

A média harmónica H

A média harmónica H de um conjunto de N números $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ é a recíproca da média aritmética das recíprocas dos números:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{X_j}} = \frac{N}{\sum \frac{1}{X}} \quad (12)$$

Na prática, é mais fácil lembrar que:

$$\frac{1}{H} = \frac{\sum \frac{1}{X}}{N} = \frac{1}{N} \sum \frac{1}{X} \quad (13)$$

Exemplo: A média harmónica dos números 2, 4 e 8 é:

$$H = \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{3}{\frac{7}{8}} = 3,43$$



MÉDIA HARMÓNICA

- ❑ Podemos interpretar o valor numérico da Média Harmónica H como o número que representa a capacidade média individual da acção de n agentes (indivíduos ou entes) que estão agindo harmonicamente, ou seja, H representa a capacidade de um agente que é capaz de substituir cada um dos n agentes quando actuando em conjunto.
- ❑ A média harmónica é muito útil em diversas situações práticas, mas o Harmónico global, é uma outra medida de carácter harmónico com valor prático muito maior.

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/harmonia/harmonia.htm>

HARMÓNICO GLOBAL

Harmônico Global

O Harmônico Global dos números reais positivos x_1, x_2, \dots, x_n é o número real positivo h , definido por:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$$

isto é, o Harmônico Global h é um número que representa o inverso da soma dos inversos dos n números x_1, x_2, \dots, x_n .

Isto significa na prática que, este número h representa a capacidade média global da ação dos n agentes (entes ou indivíduos) agindo em conjunto de uma forma harmônica, isto é, h representa a capacidade de um único agente substituir todos os agentes ao mesmo tempo.

APLICAÇÕES HG

1. **Torneiras amigas:** Uma torneira enche uma caixa d'água em 4 horas e outra torneira enche a mesma caixa em 6 horas. Abrindo-se as duas torneiras ao mesmo tempo, qual será o tempo t necessário para encher a caixa?

Fórmula	Dados e resposta
$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$	$t_1 = 4h, t_2 = 6h$ $t = 2h \ 24min$

2. **Torneiras inimigas:** Uma torneira enche uma caixa d'água em 4 horas e outra torneira a esvazia em 6 horas. Abrindo-se as duas torneiras simultaneamente, qual será o tempo t necessário para encher a caixa d'água?

Fórmula	Dados e resposta
$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$	$t_1 = 4h, t_2 = -6h$ $t = 12h$

5.

Capacitores em série: Qual é a capacidade equivalente de um capacitor que substitui os capacitores C_1 e C_2 no circuito abaixo se os dois capacitores estão ligados em série?

Fórmula	Dados e resposta	Desenho
$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$	$t_1 = C_1 = 4 \text{ Farad}$ $t_2 = C_2 = 6 \text{ Farad}$ $t = C = 2,4 \text{ Farad}$	

APLICAÇÕES HG

3. **Capacidade pessoal:** Uma pessoa é capaz de construir um muro em 6 horas e outra pessoa tem a capacidade de trabalho para construir este mesmo muro em 9 horas. Pondo-se as duas pessoas trabalhando em conjunto, em quanto tempo t , o muro estará pronto?

Fórmula	Dados e resposta
$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$	$t_1 = 6h, t_2 = 9h$ $t = 3h\ 36min$

4. **Resistores em paralelo:** Qual é a resistência equivalente, no circuito elétrico abaixo contendo as resistências R_1 e R_2 , ligadas em paralelo?

Fórmula	Dados e resposta	Desenho
$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$	$t_1 = R_1 = 4\ \text{Ohm}$ $t_2 = R_2 = 6\ \text{Ohm}$ $t = R = 2,4\ \text{Ohm}$	

APLICAÇÕES HG

6. **Segmentos paralelos e média harmônica:** Quanto mede o segmento EF na figura em anexo, se os segmentos AD e BC medem, respectivamente, 8 cm e 10 cm. Um fato interessante neste exemplo é que se tomarmos um segmento com o *dobro* da medida do segmento h, obteremos um segmento que representa a média harmônica entre os dois segmentos dados AD e BC.

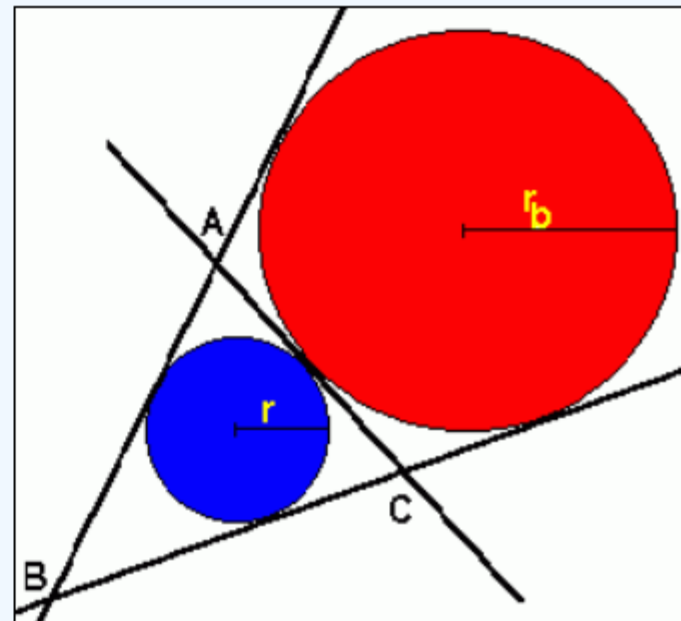
Fórmula	Dados e resposta	Desenho
$\frac{1}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}$	$t_1 = h_1 = 8\text{cm}$ $t_2 = h_2 = 1\text{cm}$ $t = h = 4,44...\text{cm}$	

APLICAÇÕES HG

7.

Circunferências ex-inscritas: Sejam três retas em um plano, formando uma região triangular fechada ABC e outras regiões abertas. Iremos construir uma circunferência com raio r , inscrita no triângulo ABC.

A circunferência inscrita na região aberta, limitada pelas retas contendo os segmentos BA, BC e AC, tem raio r_b e fica externa ao triângulo ABC, razão pela qual é denominada circunferência ex-inscrita ao triângulo ABC. Do mesmo modo, podemos construir outras duas circunferências ex-inscritas de raios r_a e r_c . O raio r é o harmônico global dos raios r_a , r_b e r_c , isto é:



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

APLICAÇÕES HG

8. **Velocidade média:** Um carro se desloca de Londrina até NewLondres (distância de 100 Km), mantendo na ida uma velocidade média de 90 Km/h e na volta ao local de origem mantendo a velocidade média de 110 Km/h. Qual é a velocidade média durante **todo** o trajeto?

Fórmula	Dados
$\frac{2}{v_m} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$	$v_1 = 90\text{km/h}$ $v_2 = 110\text{km/h}$ $v_m = 99\text{km/h} !$

Este problema é uma aplicação imediata da média harmônica e a resposta acima deve dar um susto em muita gente descuidada, pois a maioria das pessoas "gostaria" que fosse 100 km/h!

Distância	100Km	
	Velocidade	Tempo '
Ída	90	66,7
Regresso	110	54,5
		121,2
Média	100,0	99
Média H	99,0	

Distância	100Km	
	Velocidade	Tempo '
Ída	70	85,7
Regresso	130	46,2
		131,9
Média	100,0	91
Média H	91,0	