Sem vložte zadání Vaší práce.

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta informačních technologií
Katedra ... (DOPLŇTE)

Bakalářská práce

Doplňte název práce

Doplňte Vaše jméno a tituly

Vedoucí práce: Doplňte jméno vedoucího práce

27. dubna 2014

Poděkování

Doplňte, máte-li komu a za co děkovat. V opačném případě úplně odstraňte tento příkaz.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval(a) samostatně a že jsem uvedl(a) veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o etické přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona, ve znění pozdějších předpisů. V souladu s ust. § 46 odst. 6 tohoto zákona tímto uděluji nevýhradní oprávnění (licenci) k užití této mojí práce, a to včetně všech počítačových programů, jež jsou její součástí či přílohou a veškeré jejich dokumentace (dále souhrnně jen „Dílo“), a to všem osobám, které si přejí Dílo užít. Tyto osoby jsou oprávněny Dílo užít jakýmkoli způsobem, který nesnižuje hodnotu Díla a za jakýmkoli účelem (včetně užití k výdělečným účelům). Toto oprávnění je časově, teritoriálně i množstevně neomezené. Každá osoba, která využije výše uvedenou licenci, se však zavazuje udělit ke každému dílu, které vznikne (byť jen zčásti) na základě Díla, úpravou Díla, spojením Díla s jiným dílem, zařazením Díla do díla souborného či spracováním Díla (včetně překladu), licenci alespoň ve výše uvedeném rozsahu a zároveň zpřístupnit zdrojový kód takového díla alespoň srovnatelným způsobem a ve srovnatelném rozsahu, jako je zpřístupněn zdrojový kód Díla.

V Praze dne 27. dubna 2014 ....

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta informačních technologií

Odkaz na tuto práci

Doplňte Vaše příjmení, Doplňte Vaše křestní jméno/jména. *Doplňte název práce.* Bakalářská práce. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta informačních technologií, 2014.

Abstrakt

V několika větách shrňte obsah a přínos této práce v češtině. Po přečtení abstraktu by se čtenář měl mít čtenář dost informací pro rozhodnutí, zda chce Vaši práci číst.

Klíčová slova Nahraďte seznamem klíčových slov v češtině oddělených čárkou.

Abstract

Sem doplňte ekvivalent abstraktu Vaší práce v angličtině.

Keywords Nahraďte seznamem klíčových slov v angličtině oddělených čárkou.

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Úvod

Kapitola 1

Úvod do problematiky

Při řešení problémů hledáme způsob jak interpretovat data v takovém formátu, se kterým již umíme pracovat. Jedním ze základních prvků je matice. Ve spoustě případů takové matice obsahují nemalý počet nulových prvků. Například ve 2D/3D grafice, simulaci fyzikálních jevů ať už elektrické či meteorologické, statistice, pagerank a další.

http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/

1.1 Použití násobení matic

Metodou konečných prvků můžeme simulovat různé proudění, deformace a další fyzikální zákony Phttp://ocw.mit.edu/courses/materials-science-and-engineering/3-11-mechanics-of-materials-fall-1999/modules/fea.pdf

Electric Impedance Tomography http://engineering.dartmouth.edu/~d22888z/documents/EIT_Bath_2011_v2.pdf

Teoreticky násobení matice maticí nemá moc praktické využití. V praxi ale můžeme složit více vektorů v jednu matici a tím si zrychlit výpočet. To se obzvlášťhodí pro real-time aplikace.

http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/

TODO: kde se pouziva nasobeni matic

1.2 Matice

Matice $\mathbf{A}$ typu $(m,\ n)$ je mn uspořádaných prkvů z množiny $\mathbf{R}$. O prvku $a_{r,s} \in \mathbf{R}, r \in \{1, 2, \dots, m\}, s \in \{1, 2, \dots, n\}$ říkáme, že je na r-tém řádku a s-tém sloupci matice **A**. Matici **A** zapisujeme do řádků a sloupců takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Matici **M** typu $(m,\ n)$, kde všechny její prvky jsou rovny nule, nazýváme *nulovou maticí.*

O matici typu $(m,\ n)$ budeme říkat, že je m široká a n vysoká. Pokud o matici řekneme že má velikost n, myslíme tím, že je typu $(n,\ n)$.

1.3 Vektor

Matici **V** typu (1, n) nazveme vektorem.

1.4 Násobení matic

Buď **A** matice typu $(m{,}n)$ s prvky $a_{i,j}$ a **B** matice typu $(n{,}p)$ s prvky $b_{j,k}$. Definujeme součin matic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ jako matici **C** typu $(m{,}p)$ s prvky $c_{i,k}$ které vypočteme jako:

$$c_{row,col} = \sum_{k=1}^{N} a_{row,k} b_{k,col} \tag{1.2}$$

Výsledek součinu matic se nezmění, pokud matice doplníme o libovolný počet nulových řádků a nebo sloupců. Této vlastnosti můžeme využít pro získání potřebných rozměrů:

1. Při násobení matice A typu $(m{,}n)$ s maticí B typu $(o{,}p)$, kde $n \neq o$.
2. Pokud potřebujeme matice stejné velikosti.
3. Pokud potřebujeme matice určité velikosti, například $2^{\mathbf{N}}$.

1.5 Složitosti

TODO: popsat notace, mistrovskou metodu

1.6 Řídké matice

Matice, které obsahují velké množství nulových prvků, nazýváme řídké. Nebudeme přesně uvádět, kolik procent z celkového počtu prvků musí být nulových, abychom matici nazývali řídkou. Stejně jako řídkou matici můžeme uložit do formátu pro husté matice, můžeme hustou matici uložit do formátu pro řídké matice.

Řídkost matice budeme vyjadřovat pomocí nnz (Number of NonZero elements), tedy počtem nenulových prvků z celkových mn, pro matici A typu (m, n).

TODO: typy ridkych matic (pasova, atd, pattern, real)

1.7 Numerická stabilita

TODO: numerická stabilita obecne (viz strassen)

1.8 Optimalizace kódu

Dnešní překladače umí velice dobře optimalizovat vygenerovaný kód. Pokusy o nějaké mikrooptimalizace program spíše zpomalí.

Je vhodné používat funkce standartních knihoven, protože bývají optimalizované přímo v assembleru.

TODO: priklady, zdroje

1.8.1 Rozděl a panuj

divide, conquer, combine

1.8.2 Rozbalování cyklů

1.8.3 AoS -> SoA

1.8.4 Loop tiling

Kapitola 2

Algoritmy násobení matic

2.1 Podle definice

Základním algoritmem násobení dvou matic je podle definice. Ve třech for cyklech postupně vybíráme řádky matice A, sloupce matice B a v N krocích násobíme. N je jak šírka matice A, tak i výška matice B.

Algorithm 1 Násobení matic podle definice

```
 1: procedure MMM-DEFINITION(A, B, C)          ▷ A,B,C jsou matice
 2:     for row ← 0 to A.height do              ▷ řádky
 3:         for col ← 0 to B.width do           ▷ sloupce
 4:             sum ← 0;
 5:             for i ← 0 to A.height do
 6:                 sum ← sum + A[row][i] * B[i][col];
 7:             end for
 8:             C[row][col] ← sum;
 9:         end for
10:     end for
11: end procedure
```

Z pseudokódu je vidět, že ve dvou for cyklech provádíme N násobení a N sčítaní. Asymptotická složitost je tedy $O(n^2(n+n)) = O(2n^3)$. V ukázkových výpočtech je násobení pouze $N-1$ krát, to proto, že neuvádíme přičítání k nule (řádek 6).

2.2 Násobení transponovanou maticí

Pokud nám formát uložení matice nedovolí procházet prvky po sloupcích, je řešením druhou matici transponovat. Poté můžeme násobit řádky matice A s řádky transponované matice B.

Algorithm 2 Násobení transponovanou maticí

```
procedure MMM-transpose(A, B, C)                    ▷ A,B,C jsou matice
    B ← transpose(B)
    for rowA ← 0 to A.height do                     ▷ řádky
        for rowB ← 0 to B.height do                 ▷ sloupce
            sum ← 0;
            for i ← 0 to A.height do
                sum ← sum + A[rowA][i] * B[i][rowB];
            end for
            C[rowA][rowB] ← sum;
        end for
    end for
end procedure
```

Podobný algoritmus můžeme použít i pokud nám formát nedovolí procházet prvky po řádcích, ale pouze po sloupcích. Například v této práci neuvedený Compressed Sparse Columns.

2.3 Násobení po řádcích

Další možností jak násobit dvě matice, kde nám formát uložení nedovolí procházet po sloupcích je procházet současně řádky matice A i B a přičítat jednotlivé součiny na správné místo ve výsledné matici C.

Nevýhodou tohoto řešení je velký počet přístupů do pole C. Protože k prvkům přičítáme, tedy načítáme a sčítáme, je potřeba před samotným násobením nastavit všechny prvky matice C na hodnotu nula.

Algorithm 3 Násobení po řádcích

```
procedure MMM-by-rows(A, B, C)                      ▷ A,B,C jsou matice
    for r ← 0 to A.height do                        ▷ řádky matice A i B
        for cA ← 0 to A.width do                    ▷ sloupce matice A
            for cB ← 0 to B.width do                ▷ sloupce matice B
                C[r][cA] ← C[r][cA] + A[r][cA] * B[r][cB];
            end for
        end for
    end for
end procedure
```

2.4 Rekurzivní násobení

Pro matice A i B o stejé velikosti $2^{\mathbf{N}}$ můžeme použít rekurzivní přístup. Tedy programovací techniku rozděl a panuj, kdy rozdělíme větší problémy na menší podproblémy.

Každou z matic rozdělíme na čtvrtiny a jednotlivé podmatice násobíme algoritmem podle definice, tedy jako matice o velikosti dva.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Tento postup opakujeme, dokud velikostí podmatic nenarazíme na práh, tedy hodnotu, při které opustíme rekurzivní algoritmus a použijeme algoritmus lineární. V ukázkovém pseudokódu dělíme podmatice až na velikost prahu jedna, podmatice tedy obsahují pouze jeden prvek.

Algorithm 4 Rekurzivní násobení

```
procedure MMM-RECURSIVE(A, B, C, ay, ax, by, bx, cy, cx, n)
    if n = 1 then
        C[cy][cx] ← C[cy][cx] + A[ay][ax] · B[by][bx];
        return;
    end if
    for all r ∈ {0, n/2} do
        for all c ∈ {0, n/2} do
            for all i ∈ {0, n/2} do
                MMM-recursive(A, B, C, ay + i, ax + r, by + c, bx + i, cy + c, cx + r, n/2);
            end for
        end for
    end for
end procedure
```

Pro ilustraci jako příklad uvádíme výpočet horního levého prvku v násobení dvou matic o velikosti 2^2. Pro větší přehlednost značíme prvky malým písmem z názvu matice a indexy o jejich pozicích.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} \end{pmatrix} = \tag{2.2}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{3,1} & b_{3,2} \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{pmatrix} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \tag{2.3}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,3}b_{3,1} + a_{1,4}b_{4,1} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \tag{2.4}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} + a_{1,4}b_{4,1} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Kvůli režii rekurzivního dělení v praxi nezmenšujeme podmatice až na velikost jedna. Vhodný práh velikosti podmatice je například takový, co se vejde do L1 cache.

Asymptotická složitost je samozřejmě stejná jako u algoritmu podle definice. Asymptotickou složitost rekurzivního algoritmu můžeme spočítat pomocí mistrovské metody.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 8T(n/2) + \Theta(1) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

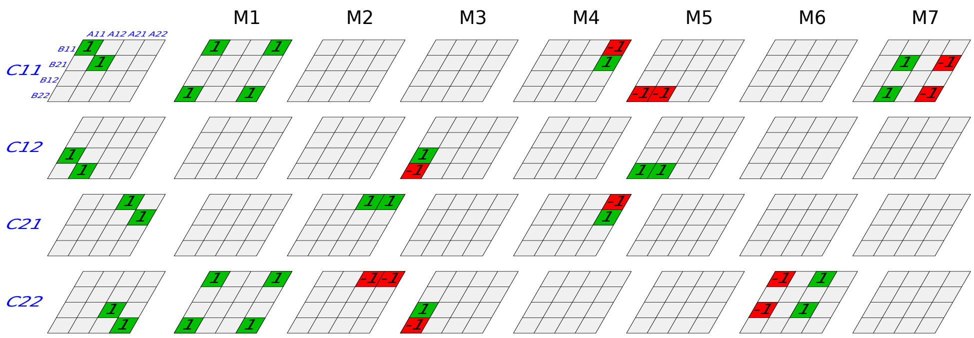
Protože platí, že $a = 8, b = 2, r = \log_2 8, n^r = n^{\log_2 8} = n^3 = \Omega(1)$, tak asymptotická složitost podle mistrovké metody je $\texttt{MMM-recursive}(\mathrm{n}) = O(n^3)$.

2.5 Strassenův algoritmus

V roce 1969 Volker Strassen v časopise Numerische Mathematik publikoval článek [6], ve kterém jako první představil algoritmus násobení dvou matic s menší asymptotickou složitostí než algotimus podle definice, tedy $O(n^3)$.

Algoritmus je založen na myšlence, že sčítání je operace méně náročnejší než operace násobení. Respektive dvě matice umíme sečíst nebo odečíst v složitosti $O(n^2)$, ale vynásobit v $O(n^3)$.

Volker Strassen tedy využil jisté symetrie [3] v násobení dvou matic A a B o velikosti dva a výslednou matici C seskládal pomocí sedmi pomocných matic. Obrázek 2.1 ukazuje, z čeho se pomocné matice skládají a jak jsou do výsledné matice seskládany. V ilustračních maticích o velikosti čtyři ukazujeme, které sčítance pomocná matice do výsledku přičítá a které odečítá.



Obrázek 2.1: Strassen (TODO: převzato z wikipedie: předělat?)

Zápis Strassenova algoritmu vypadá následnovně:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

$$M_1 = (A_{1,1} + A_{2,2}) \cdot (B_{1,1} + B_{2,2}) \tag{2.7}$$

$$M_2 = (A_{2,1} + A_{2,2}) \cdot B_{1,1} \tag{2.8}$$

$$M_3 = A_{1,1} \cdot (B_{1,2} - B_{2,2}) \tag{2.9}$$

$$M_4 = A_{2,2} \cdot (B_{2,1} - B_{1,1}) \tag{2.10}$$

$$M_5 = (A_{1,1} + A_{1,2}) \cdot B_{2,2} \tag{2.11}$$

$$M_6 = (A_{2,1} - A_{1,1}) \cdot (B_{1,1} + B_{1,2}) \tag{2.12}$$

$$M_7 = (A_{1,2} - A_{2,2}) \cdot (B_{2,1} + B_{2,2}) \tag{2.13}$$

$$C = \begin{pmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

V pseudokódu používáme procedury `offset-add` respektive `offset-sub`. Slouží ke sčítání respektive odečítání bloku prvků o velikosti n v maticích od nějakého offsetu `y` a `x`. Paremetry obou funkcí jsou: `offset-*`$(A, B, C, ay, ax, by, bx, cy, cx, n)$.

Algorithm 5 Strassenův algoritmus

```
procedure MMM-strassen(A, B, C, ay, ax, by, bx, cy, cx, n)
    if n = 1 then
        C[cy][cx] ← C[cy][cx] + A[ay][ax] · B[by][bx];
        return;
    end if
    h ← n/2;                                                   ▷ čtvrtina
    m[9] ← init-matrices(9, h);                                ▷ devět pomocných matic
    offset-add(a, a, m[8], ay, ax, ay + h, ax + h, 0, 0, h);   ▷ M1
    offset-add(b, b, m[9], by, bx, by + h, bx + h, 0, 0, h);
    MMM-strassen(m[8], m[9], m[1], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h);
    offset-add(a, a, m[8], ay + h, ax, ay + h, ax + h, 0, 0, h);   ▷ M2
    MMM-strassen(m[8], b, m[2], 0, 0, bx, by, 0, 0, h);
    offset-sub(b, b, m[8], by, bx + h, by + h, bx + h, 0, 0, h);   ▷ M3
    MMM-strassen(a, m[8], m[3], ay, ax, 0, 0, 0, 0, h);
    offset-sub(b, b, m[8], by + h, bx, by, bx, 0, 0, h);       ▷ M4
    MMM-strassen(a, m[8], m[4], ay + h, ax + h, 0, 0, 0, 0, h);
    offset-add(a, a, m[8], ay, ax, ay, ax + h, 0, 0, h);       ▷ M5
    MMM-strassen(m[8], b, m[5], 0, 0, by + h, bx + h, 0, 0, h);
    offset-sub(a, a, m[8], ay + h, ax, ay, ax, 0, 0, h);       ▷ M6
    offset-add(b, b, m[9], by, bx, by, bx + h, 0, 0, h);
    MMM-strassen(m[8], m[9], m[6], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h);
    offset-sub(a, a, m[8], ay, ax + h, ay + h, ax + h, 0, 0, h);   ▷ M7
    offset-add(b, b, m[9], by + h, bx, by + h, bx + h, 0, 0, h);
    MMM-strassen(m[8], m[9], m[7], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h);
    offset-add(m[1], m[4], m[8], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h);         ▷ c1,1
    offset-sub(m[8], m[5], m[8], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h);
    offset-add(m[8], m[7], c, 0, 0, 0, 0, cy, cx, h);
    offset-add(m[3], m[5], c, 0, 0, 0, 0, cy, cx + h, h);      ▷ c1,2
    offset-add(m[2], m[4], c, 0, 0, 0, 0, cy + h, cx, h);      ▷ c2,1
    offset-sub(m[1], m[2], m[8], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h);         ▷ c2,2
    offset-add(m[8], m[3], m[8], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h);
    offset-add(m[8], m[6], c, 0, 0, 0, 0, cy + h, cx + h, h);
end procedure
```

Výpočet asymptotické složitosti vypočteme podobně jako u `MMM-recursive`, tedy mistrovskou metodou.

V každém kroku rekurze počítáme $\Theta(n^2)$ operací na vytvoření pomocných matic.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 7T(n/2) + \Theta(n^2) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

Protože platí, že $a = 7, b = 2, r = \log_2 7, n^r = n^{\log_2 7} = \Omega(n^2)$, tak asymptotická složitost podle mistrovké metody je `MMM-strassen`(n) $= O(n^{\log_2 7}) \approx O(n^{2.8})$.

Stejně jako v předešlém algorimu, i zde demonstrujeme výpočet levého horního prvku matice z násobení dvou matic o velikosti dva. Místo parametrické matice použijeme konkrétní desetinná čísla, abychom ukázali numerickou stabilitu Strassenova algoritmu. Pro ukázku budeme uvažovat počítač, který u čísel ukládá pouze pět cifer, znaménko a desetinnou čárku.

Pomocí algoritmu podle definice, by takový počítač vypočítal součin dvou matic následnovně:

$$\begin{pmatrix} 30.234 & 0.5678 \\ 0.9123 & 10.456 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8912 & 0.3456 \\ 0.7891 & 9.999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27.392 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Správný výsledek je $30.234 \times 0.8912 + 0.5678 \times 0.7891 = 26.9445408 + 0.44805098 = 27.39259178$.

Nyní výpočet provedeme pomocí Strassenova algoritmu:

$$\begin{pmatrix} 30.234 & 0.5678 \\ 0.9123 & 10.456 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8912 & 0.3456 \\ 0.7891 & 9.999 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$M_1 = (30.234 + 10.456) \cdot (0.8912 + 9.999) = 443.12 \tag{2.17}$$

$$\dots \tag{2.18}$$

$$M_4 = 10.456 \cdot (0.7891 - 0.8912) = -1.067 \tag{2.19}$$

$$M_5 = (30.234 + 0.5678) \cdot 9.999 = 307.98 \tag{2.20}$$

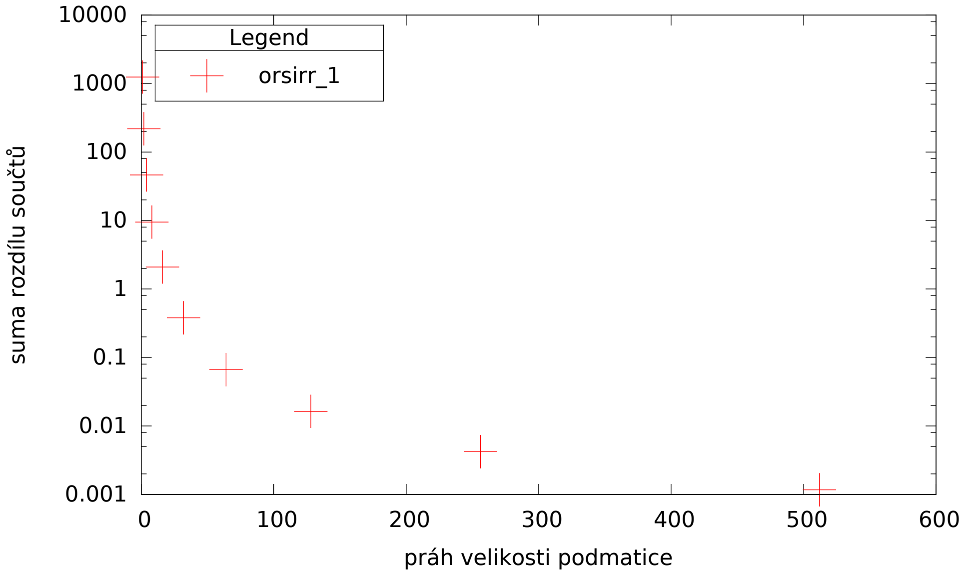
$$\dots \tag{2.21}$$

$$M_7 = (0.5678 - 10.456) \cdot (0.7891 + 9.999) = -106.67 \tag{2.22}$$

$$\begin{pmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27.403 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

Jak můžeme vidět, zatímco u algoritmu podle definice jsme pouze ztratili desetinnou přesnost, výsledek Strassenova algoritmu se lišil už v prvním desetinném čísle.

Pro reálnou představu stability Strassenova algoritmu jsme provedli experiment, ve kterém jsme vynásobili dvě stejné matice (matice orsirr_1, oříznuta na velikost 1024) algoritmem podle definice a Strassenovým algoritmem s různými prahy a sečetli všechny rozdíly mezi výsledky. Násobení probíhalo ve dvojté desetinné přesenosti, tedy v datovém typu `double` jazyka C99. Z grafu 2.2 je vidět exponencionální závislost mezi velikostí prahu a celkovou chybou.



Obrázek 2.2: Ukázka numerické stability Strassenova algoritmu

Strassenův algorimus lze ještě vylepšit. Algoritmům na stejném principu se říká Strassen-like [1]. Pro sedm operací násobení je monžné snížit počet sčítání a odečítání. Pro jednoduchost zde ovšem uvádíme originalní algoritmus.

2.6 Rychlé algoritmy

Po tom, co Strassen ukázal, že existují rychlejší algoritmy než $O(n^3)$, ještě rychlejší algoritmy než ten jeho na sebe nenechaly dlouho čekat. Složitost násobení matic pro jednoduchost označíme jako $O(n^\omega)$.

Nejpomalejší algoritmus s $\omega = 3$ je podle definice. Strassenův algoritmus se sedmi násobeními má $\omega \approx 2.807354$. Jeden z nejrychlejších algoritmů je algoritmus Virginie Williamsové [9][8], pro který je $\omega < 2.3727$.

Hranicí nejlepší možné složitosti může být $\omega = 2$, protože každý prvek z matice musíme nějak započítat. Existují z velké části podložené domněnky na základě teorie grup [5], že $\omega = 2$ skutečně platí, ale přímý důkaz ještě neexistuje.

2.7 Algoritmus podle definice upravený pro řídké matice

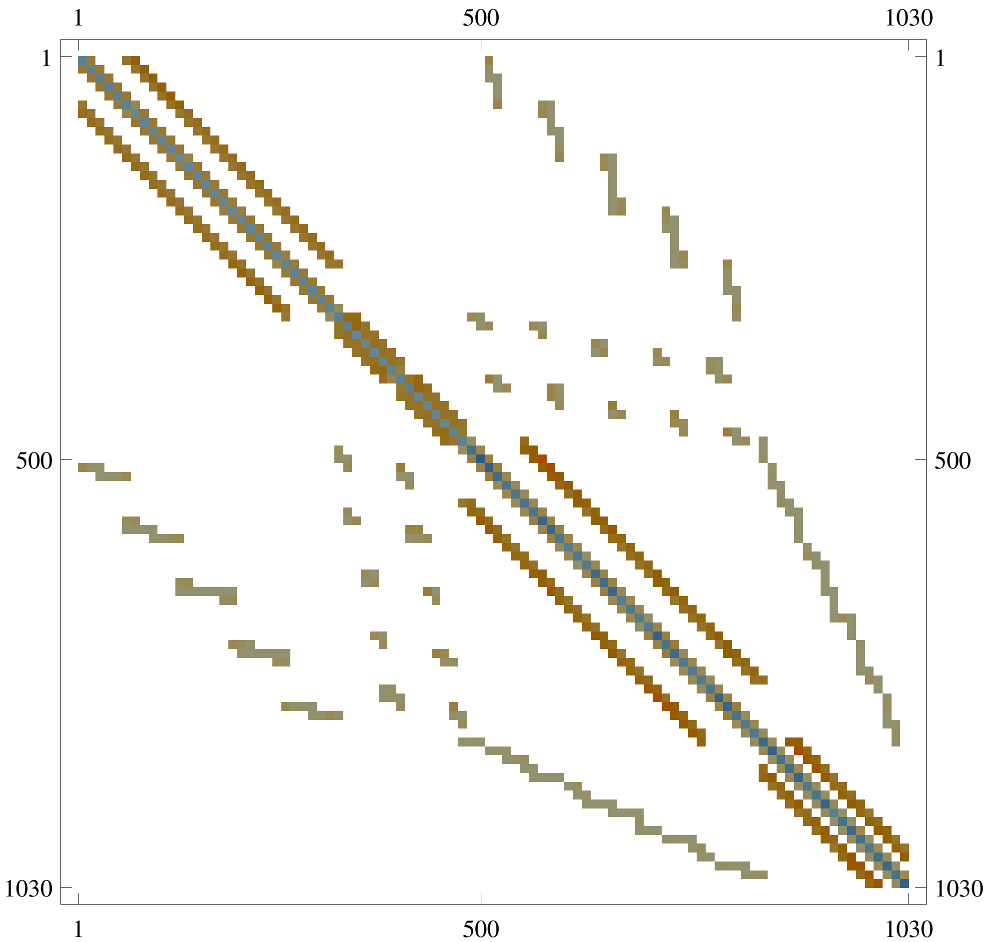
Pokud násobíme řídké matice A a B o velikosti N, můžeme vynechat násobení takových dvou prvků, z nichž je alespoň jeden nulový. Označme $nnzr_{M,i}$

jako počet nenulových prvků v i-tém řádku matice M a $nnzc_{M,i}$ jako počet nenulových prvků v i-tém sloupci matice M. Protože násobíme každý řádek s každým sloupcem, bude celkový počet operací násobení dán vzorcem:

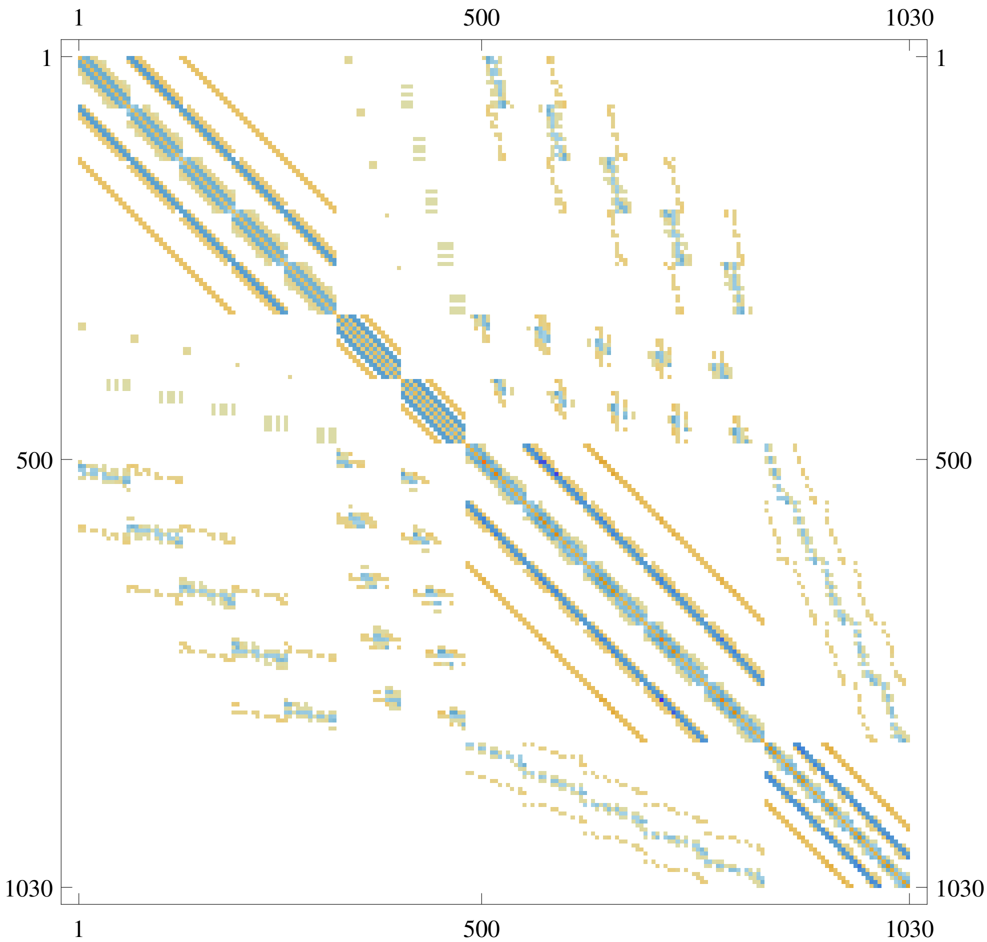
$$\sum_{i=1}^{N} nnzr_{A,i} nnzc_{B,i}$$

Složitost tohoto algoritmu pro násobení dvou matic A a B o velikosti n tedy můžeme vyjádřit jako $O(mn)$, kde $m = max(nnz(A), nnz(B)$. Pro husté matice bez jediného nulového prvku samozřejmě platí, že $m = n^2$. Nutno podotknout, že $O(mn)$ je nejhorší případ, kdy se všechny nenulové prvky matice A budou násobit se všemy nenulovými prvky matice B.

Pro reálnou představu demonstrujeme násobení dvou stejných matic. Opět se jedná o dvě matice orsirr_1. Matice orsirr_1 má velikost $n = 1030$ a $m = 6858$ nnz. Rozmístění nnz před respektive po vynásobení ukazují obrázky 2.3 respektive 6.1.



Obrázek 2.3: Matice orsirr_1 před vynásobením



Obrázek 2.4: Matice orsirr_1 po vynásobením sama se sebou

Kdyby nastal nejhorší možný případ, počet operací násobení při použití algoritmu podle definice pro řídké matice by byl $1030 \times 6858 = 7.063740 \times 10^6$. Pro tento případ ovšem stačí 4.6976×10^4 operací násobení. Oproti nejhoršímu možnému případu nastalo $7.063740 \times 10^6 - 4.6976 \times 10^4 = 7.016764 \times 10^6$ situací, kdy jeden ze dvou prkvů byl nulový a operace násobení nemusela být provedena. Při násobení algoritmem podle definice pro husté matice by v 1.092680024×10^9 případech operace násobení nemusela být provedena, protože alespoň jeden ze dvou prvků by byl nula. Po vynásobení matice orsirr_1 sama se sebou, stoupl její počet nnz z 6858 na 23532. V tomto případě to bylo především z důvodu, že všechny prvky z diagonály matice jsou nenulové, každý prvek se tedy započítá.

2.8 Rychlé násobení řídkých matic

Strassenův algoritmus $\omega = 2.8$ od $nnz < n^{1.8}$ a algoritmus Virginie Williamsové $\omega = 2.3$ od $nnz < n^{1.37}$ jsou asymptoticky stejně rychlé jako algoritmus podle definice upravený pro řídké matice $O(mn)$. Například pro $n = 1000$ je tato hranice pro Strassenův algoritmus 251189 (40 %) nnz a pro algoritmus Virginie Williamsové 12882 (78 %) nnz z celkových možných 1000000 prvků.

Raphael Yuster a Uri Zwick ukázali algoritmus [10] s asymptotickou složitostí $O(m^{0.7}n^{1.2} + n^{2+o(1)})$, který rozdělí permutace řádků a sloupců na řídké a husté. Řídké permutace násobí algoritmem podle definice v úpravě pro řídké matice $O(mn)$. Husté permutace vynásobí v té době nejznámějším nejrychlejším algoritmem a to od Dona Coppersmitha a Shmuela Winograda s asymptotickou složitostí $\omega = 2.3$ [2].

2.9 Další algoritmy pro řídké matice

Algoritmů násobení řídkých matic je mnoho. Často se odvíjejí od typu řídkých matic a formátu v jakém jsou uloženy. Příkladem může být formát, ve kterém se ukládají diagonály [7].

Kapitola 3

Formáty uložení řídkých matic

Formáty uložení řídkých matic obecně ukládají jednotlivé elementy zvlášť a tedy nemusí ukládat ty nulové. To ale přináší řadu nevýhod. Za prvé se musí ukládat informace o souřadicních jednotliých prvcích. Za druhé, ztrácíme možnost přístupu k prvku na libovolných šouřadnicích v čase $\Theta(1)$, protože prvky nemáme přímo indexované podle jejich umístění v řádku a sloupci.

Protože řídké matice můžeme rozdělit do mnoha kategorií a provádět nad nimi mnoho operací, existuje hodně formátů, jak řídkou matici efektivně uložit a pracovat s ní.

`http://www.cs.colostate.edu/~mroberts/toolbox/c++/sparseMatrix/sparse_matrix_compression.html`

3.0.1 Modifikace řídké matice

Formáty uložení řídkých matic můžeme také rozdělit podle toho, zda-li je možné do nich přidávat nebo odebírat prvky.

Při násobení matic $C = A \cdot B$ se matice A ani B nemění. V této práci budeme předpokládat, že matice C bude hustá a formáty umožujícími přidávání nebo odebírání prvků nebudou součástí práce. Stejně tak při násobení matice A vektorem B je výsledek C vektor.

3.0.2 Uspořádanost řídké matice

Dalším kritériem pro rozdělení formátů je uspořádanost nenulových prvků v řídké matici. Pro uspořádané prvky bude efektivnější takový formát, který využije určitý vzor. V řídkých maticích takovým vzorem může být například diagonála, nebo blok prvků. Efektivně lze za vzor považovat i prvky v řádku, nebo ve sloupci.

Uspořádáním může být také symetrie matice, kdy nám stačí uložit pouze polovinu matice. Často řídké matice bývají symetrické podle hlavní diagonály.

3.1 COO - Coordinate list

Formát COO, česky seznam souřadnic, je základní formát řídkých matic. Ke každému nenulovému prvku ukládá jeho souřadnice `y` a `x`. Implementovat tento formát můžeme například jako tři pole, jedno s hodnotami prvků, druhé s `y` souřadnicemi a třetí s `x` souřadnicemi.

Pro ukázku v tomto formátu uložíme matici o velikosti $n = 8$ s $nnz = 5$ nenulovými prvky.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & \mathbf{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

values[5]	1	2	3	4	5
y-coords[5]	1	1	4	7	7
x-coords[5]	0	1	1	5	6

Tabulka 3.1: Matice uložená ve formátu COO

Jak můžeme vidět, délka polí je závislá pouze na nnz. Pro velké matice s malým počtem neuspořádaných nenulových prvků je tento formát velmi efektivní. Pokud by bylo prvků velké množství, informace o uložení `y` nebo `x` souřadnic by byla často redundatní.

Paměťová náročnost formátu COO je $O(3 * nnz)$.

Formát COO je velmi jednoduchý a přímočarý. Při procházení jeho prvků nám stačí jedna iterace přes tři stejně dlouhé pole. Tím je tedy například algoritmus násobení řídké matice ve formátu COO s vektorem velmi jednoduchý:

Algorithm 6 Násobení matice COO s vektorem

```
procedure COO-MVM(COO,V,C)
    for i←0 to COO.nnz do
        V.v[COO.r[i]] += COO.v[i] * V.v[COO.c[i]];
    end for
end procedure
```

Při násobení dvou matic narazíme na problém. Při této operaci se každý prvek násobí dvakrát. Potřebujeme způsob, jak se v matici vrátit zpátky na určité místo. Takový naivní algoritmus pro násobení dvou COO matic by byl složitý. Museli bychom si pamatovat začátky řádků a neustále kontrolovat, jestli jsme nepřesáhli další řádek. Lepším řešením je dopředu si předpočítat, kde který řádek začíná a končí. Předpočítáme si tedy pole, nazvané *row_pointers*, o délce $M.height+1$, obsahující indexy začátků a konců řádek.

Při procházení matice se tak v poli s prvky mezi indexy $row\_pointers[i]$ a $row\_pointers[i+1]$ nachází prkvy na řádku i. Proto je pole právě o jedna delší než výska matice, abychom mohli určit konec posledního řádku.

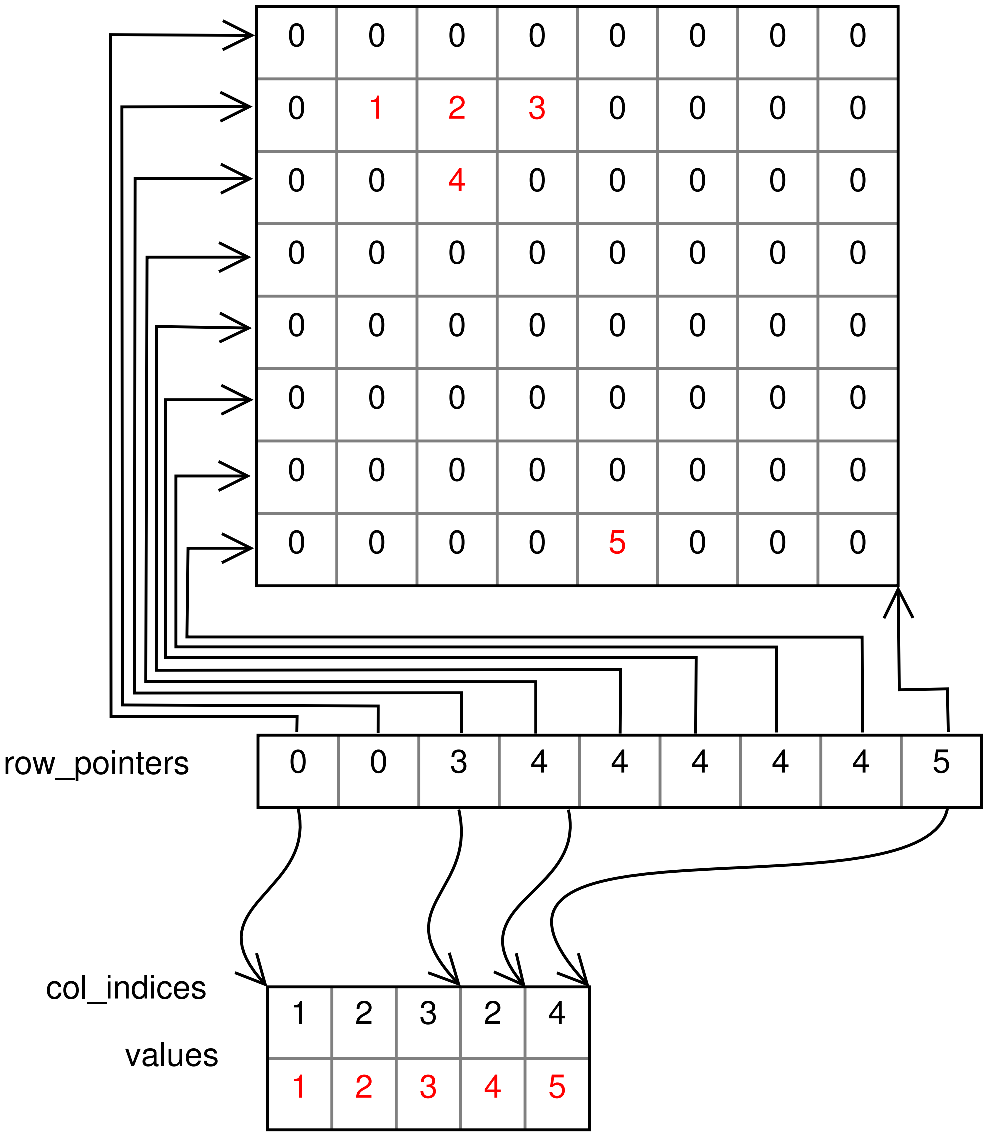
Algorithm 7 Násobení dvou COO matic

```
procedure COO-MMM(A,B,C)
    arp ← InitArray(A.nnz + 1);
    brp ← InitArray(B.nnz + 1);
    for i ← 0 to A.nnz do                        ▷ předpočítání prvků v řádcích matice A
        arp[A.r[i] + 1] = arp[A.r[i] + 1] + 1;
    end for
    for i ← 0 to A.height do
        arp[i + 1] = arp[i + 1] + arp[i];
    end for
    for i ← 0 to B.nnz do                        ▷ předpočítání prvků v řádcích matice B
        brp[B.r[i] + 1] = brp[B.r[i] + 1] + 1;
    end for
    for i ← 0 to A.height do
        brp[i + 1] = brp[i + 1] + brp[i];
    end for
    for i ← 0 to A.height do                                              ▷ násobení
        for ac←arp[i] to arp[i + 1] do
            for bc←brp[A.c[ac]] to brp[A.c[ac] + 1] do
                C.v[r][A.c[bc]] += A.v[ac] * B.v[bc];
            end for
        end for
    end for
end procedure
```

V části s násobením již pole s `y` souřadnicemi nepotřebujeme. Lepší formát uložení řídkých matic pro násobení by byl takový, který namíto pole s `y` souřadnicemi obsahuje předpočítané začátky a konce řádků. Takovým formátem je CSR.

3.2 CSR - Compressed sparse row

Problém efektivnosti formátu COO pro větší množství prvků řeší formát CSR, česky komprimované řídké řádky. Formát CSR obsahuje pole *row_pointers*, které ukládá informace o tom, kolik se v daném řádku nachází prvků, tedy přesně to, co jsme si přespočítali v algoritmu 7. K poli s hodnotami je další pole *col_indicies*, přiřazující ke každému prvku informaci o sloupci.



Obrázek 3.1: Matice uložená ve formátu CSR

Jak je vidět z ilustrace 3.1, řádek s více prvky je uložen efektivně. Díky prázdným řádkům se nezdá pole *row_pointers* rozumně využité.

Při násobení matice CSR s vektorem potřebujeme o jeden for cyklus více než v případě násobení matice COO s vektorem. Důvodem je ztráta informace o řádku prvku.

Algorithm 8 Násobení matice CSR s vektorem

```
procedure CSR-MVM(CSR,V,C)
    for i ← 0  to CSR.h do
        for ci ← CSR.rp[i] to CSR.rp[i + 1] do
            C.v[r] += CSR.v[ci] * V.v[A.ci[ci]];
        end for
    end for
end procedure
```

Násobení dvou CSR matic je stejné jak v případě násobení dvou COO matic 3.1. Jediný rozdíl je, že předpočíné začátky a konce řádků jsou součástí formátu.

Algorithm 9 Násobení dvou CSR matic

```
procedure CSR-MMM(A,B,C)
    for i ← 0 to A.height do                                   ▷ násobení
        for ac ← A.rp[i] to A.rp[i + 1] do
            for bc ← B.rp[A.ci[ac]] to B.rp[A.ci[ac] + 1] do
                C.v[r][B.ci[bc]] += A.v[ac] * B.v[bc];
            end for
        end for
    end for
end procedure
```

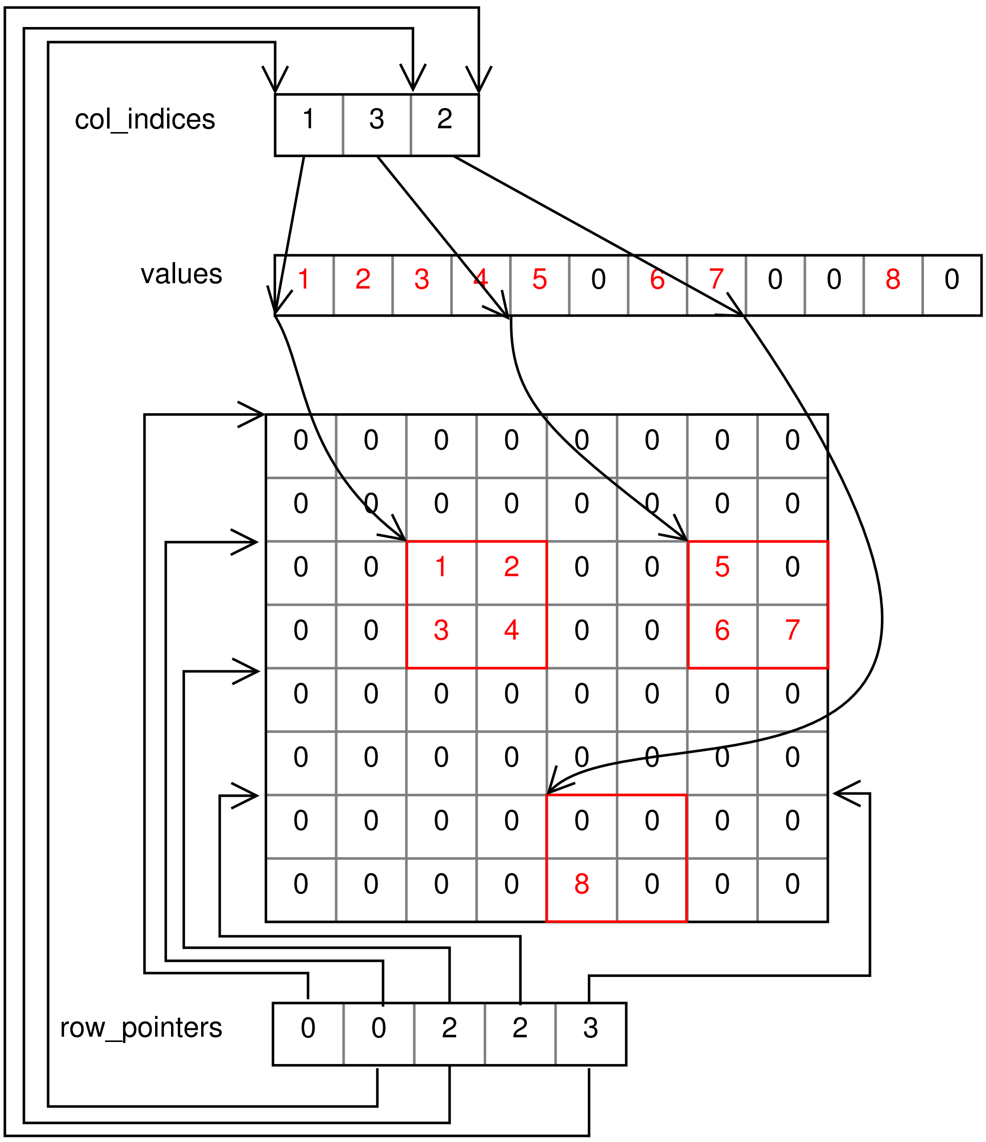
Existuje varianta tohoto formátu, nazvaná CSC - compressed sparse columns, která místo ukládání řádku ukládá sloupce.

3.3 BSR - Block Sparse Row

Jako formát CSR využívá uložení prvků v řádku, formát BSR ještě navíc detekuje a ukládá prvky v blocích.

Protože při násobení matic násobíme každý prvek dvakrát, bylo by dobré tyto dvě operace provést co nejdříve, abychom při druhém znovunačtení prvku mohli sáhnout pro prvek do cache. Pokud jsou prkvy procházené po menších blocích, dostaneme se k prvku podruhé dříve, než jej z cache přemaže jiný prvek.

Matici A ve formátu BSR uklákáme, velice podobně jako u formátu CSR, pomocí tří polí. Je potřeba i jedna proměnná, která uchovává velikost bloku. Tuto proměnnou nazveme *block_size*. Matici rozdělíme do bloků Pole *col_indices* označuje sloupec, ve kterém se blok nachází. Sloupcem rozumíme $A.width/A.block\_size$.



Obrázek 3.2: Matice uložená ve formátu BSR

Uložení matice ve formátu BSR ilustruje obrázek 3.4. Pole *row_pointers* obsahuje informace o tom, na kterém řádku je kolik bloků. Na řádku i je $row\_pointers[i+1] - row\_pointers[i]$ bloků. Ve kterém sloupci se blok prvků nachází udává pole *col_indices*. První blok z řádku i je ve sloupci $col\_indices[row\_pointers[i]]$ a poslední blok je ve sloupci $col\_indices[row\_pointers[i+1]]$. Pole *values* obsahuje prvky v blocích, včetně nulových prvků.

Pokud vezmeme algoritmus násobení dvou CSR matic respektive CSR matice s vektorem, jen místo prvků násobíme bloky, vznikne nám algoritmus pro násobení dvou BSR matric respektive BSR matice s vektorem. Za povšimnutí stojí větší počet for cyklů s menším rozsahem iterace než u CSR. To nám v nejvnitřnějších cyklech dovoluje lépe využívat cache. Jedná se tedy o přístup podobný optimalizační technice loop tiling.

Algorithm 10 Násobení matice BSR s vektorem

```
procedure BSR-MVM(A,B,C)
    bs ← A.block_size;
    for i ← 0 to A.height / bs do
        for ac ← A.rp[i] to A.rp[i + 1] do
            for l ← 0  to A.bs do                      ▷ násobení bloku
                for m ← 0 to bs do
                    C.v[(i * bs) + l] += A.v[ac * (bs * bs) + (l *
bs) + m] * B.v[A.ci[ac] * bs + m];
                end for
            end for
        end for
    end for
end procedure
```

Algorithm 11 Násobení dvou BSR matic

```
procedure BSR-MMM(A,B,C)
    bs ← A.block_size;
    for i ← 0 to A.height / bs do
        for ac ← A.rp[i] to A.rp[i+1] do
            for bc ← B.rp[A.ci[ac]] to B.rp[A.ci[ac]+1] do
                for l ← 0 to A.bs do                   ▷ násobení bloku
                    for m ← 0 to bs do
                        for n ← 0 to bs do
                            C.v[(i * bs) + l][(B.ci[bc] * bs) + m]
+= A.v[ac * (bs * bs) + (l * bs) + n] * B.v[bc * (bs * bs) +
(n * bs) + m];
                        end for
                    end for
                end for
            end for
        end for
    end for
end procedure
```

http://docs.scipy.org/doc/scipy-0.13.0/reference/generated/scipy.sparse.bsr_matrix.ht
https://software.intel.com/sites/products/documentation/doclib/mkl_sa/11/mklman/GUID-9FCEB1C4-670D-4738-81D2-F378013412B0.htm

3.4 Quadtree

Předchozí popsáné formáty uložení řídkých matic jsou velmi přímočaré. Neumožnují rekurzivní přístup, který je pro velké matice vhodnější. Tento problém řeší formát Quadtree [4]. Jedná se o matici uloženou v 4-árním stromě.

Tento formát dělí matici na čtvrtiny do té doby, než se dosáhne velikosti podmatice *sm_size*. Pokud je celá čtvrtina prázdná, je uzel označen jako prázdný, označen E. Pokud obsahuje nějaké prvky, je list označen jako hustý, D. Vnitřní uzly jsou označeny jako smíšené, tedy M.

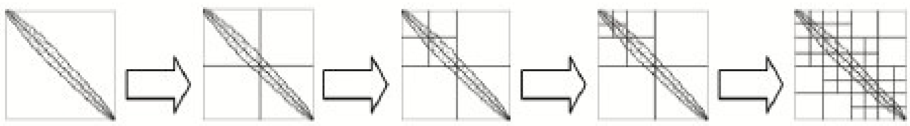


Figure 1. Recursive division on matrix $BCSSTK15$(Model of an offshore platform).

Obrázek 3.3: Rozdělení matice

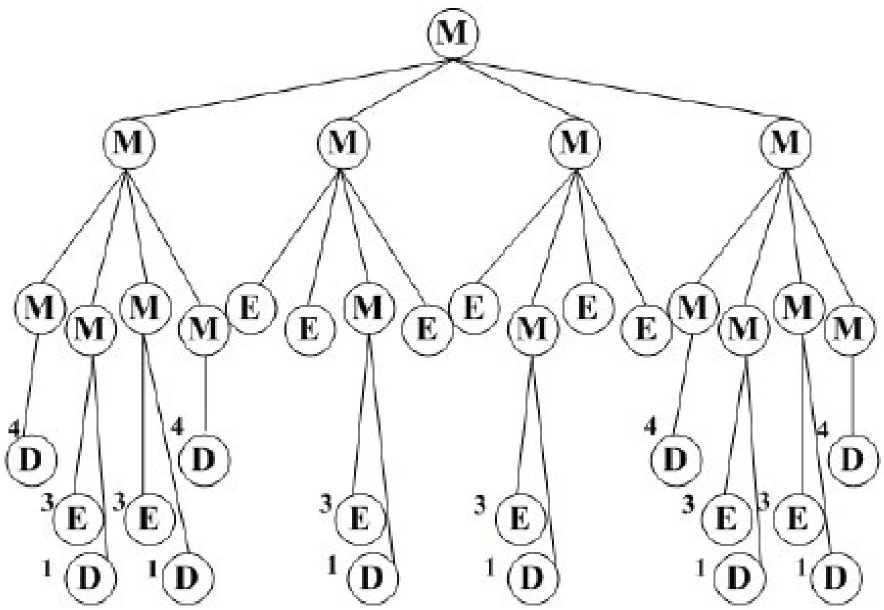


Figure 2. Abstract the divided matrix in Figure 1 into a quadtree based storage format.

Obrázek 3.4: Strom matice uložené ve formátu Quadtree

`http://quardtree.sourceforge.net/`

Algoritmy pro práci s formátem Quadtree budou ukázány v kapitole o obecnějším formátě 3.5.

3.5 ?

TODO: tady jsem chtel spocictat kdy se vyplati mit ridkou matici, ale lepsi bude tabulka. Pokud například uložíme matici o rozměrech 100x100 v dvojté přestnosti, bude zabírat `M x N x sizeof(double) = 100 x 100 x 8 = 80000B = 80kB`. Pokud zvolíme řídký formát matice, kde ke každému elementu uložíme i jeho x a y souřadnici, tak do 80kB uložíme `80000 / (sizeof(int)+sizeof(int)+sizeof(double)) = 80000/16= 5000` elementů. Pokud matice obsahuje více jak 50 % nulových elementů, vyplatí se nám ji uložit do řídkého formátu.

Kapitola 4

Modifikace formátu quadtree

Protože formát Quadtree je 4-ární strom, jeho výška při reprezentaci matice o velikosti n a při velikosti podmatice sm_size je:

$$\left\lceil \log_4 \frac{n^2}{sm\_size^2} \right\rceil \tag{4.1}$$

Například pro matici o velikosti $n = 16384$ s velikostí bloku $sm\_size = 128$ je výška stromu 7.

4.1 KAT - k-ary tree matrix

V této práci navrhneme místo 4-árního stromu obecný k-ární strom. Výška stromu se tím sníží. Pro předchozí příklad by tedy pro 32-ární strom byla výška pouze 3. Tento formát nazveme `k-ary tree matrix` se zkratkou KAT. Pro přehlednost nebudeme uvádět k, ale $KAT.n = sqrt(k)$. Formát Quadtree můžeme prohlásit za matici KAT s $KAT.n = 2$.

4.2 Typy listů

Formát Quadtree definovaný v (cituj) označí všechny nenulové listy jako husté a ukládá je v COO formátu. KAT matice obasahuje proměnnou $KAT.dense\_treshold$, která udává maximální počet prvků, aby se s listem pracovalo některým z řídkých formátů, tedy COO, CSR, BSR. Při překročení této hranice je list uložen ve formátu husté matice, tedy bude obsahovat i nulové prvky.

4.3 Tvoření stromu

Pro každý prvek procházíme strom a hledáme správný list. Protože výška stromu je daná třemy parametry, tedy velikostí matice n, velikostí podmatice *sm_size* a počtu větvení uzlu k, čelíme problému, nejefektivnější využití bude, pokud je n bezezbytku dělitelné $k * sm_size$. Pokud toto neplatí, rodiče listů budou mít část synů nevyužitých i při uložení husté matice.

Algorithm 12 Vyhledání listu pro KAT matici

```
procedure KAT-getNode(KAT, y, x)
    tmpNode ← KAT.root;
    blockY ← 0;                                   ▷ výřez matice
    blockX ← 0;
    blockS ← KAT.sm_size;
        ▷ až do předposledního vnitřního uzlu traverzujeme podle velikosti KAT.n
    while blockS > (KAT.n * KAT.sm_size) do
        nodeY ← (y - blockY) / (blockS / KAT.n);
        nodeX ← (x - blockX) / (blockS / KAT.n);
        tmpNode ← tmpNode.childs[nodeY][nodeX];
        blockY += nodeY * (blockS / KAT.n);
        blockX += nodeX * (blockS / KAT.n);
        blockS /= KAT.n;
    end while
        ▷ do posledního vnitnřního uzlu traverzujeme podle velikosti KAT.sm_size
    nodeY ← (y - blockY) / KAT.sm_size;
    nodeX ← (x - blockX) / KAT.sm_size;
    tmpNode ← tmpNode.childs[nodeY][nodeX];
                                                  ▷ nyní je tmpNode list
    tmpNode.x ← ⌊y / KAT.sm_size⌋ * KAT.sm_size ;
    tmpNode.x ← ⌊x / KAT.sm_size⌋ * KAT.sm_size ;
    return tmpNode;
end procedure
```

4.4 Násobení

Pro násobení budeme používat algoritmus rekurzivního násobení popsaného v 2.4. Popsaný algormus dělí matice na čtvrtiny, jde tedy aplikovat na formát Quadtree. Při násobení matice uložené v k-árním stromě budeme násobit matici podmatic o velikosti k:

Algorithm 13 Násobení matice KAT s vektorem

```
procedure KAT-MVM(KAT, KAT_node, VB, VC)
    for i ← 0 to KAT.n do
        for j ← 0 to KAT.n do
            if KAT_node.childs[i][j] ≠ NIL then
                if KAT_node.childs[i][j].type = "submatrix" then
                    multiplyNode(KAT_node.childs[i][j], VB, VC);
                    coninue;
                end if
                if KAT_node.childs[i][j].type = "inner" then
                    KAT-MVM(KAT,KAT_node.childs[i][j], VB, VC);
                    coninue;
                end if
            end if
        end for
    end for
end procedure
```

Algorithm 14 Násobení dvou KAT matic

```
procedure KAT-MMM(KATa, KATa_node, KATb, KATb_node, C)
    for i ← 0 to KAT.n do
        for j ← 0 to KAT.n do
            for k ← 0 to KAT.n do
                if KATa_node.childs[i][k] ≠ NIL and KATb_node.childs[k][j] ≠ NIL then
                    if KAT_node.childs[i][j].type = "submatrix" then
                        multiplyNode(KAT_node.childs[i][j], KAT_node.childs[i][j], VC);
                        coninue;
                    end if
                    if KAT_node.childs[i][k].type = "inner" then
                        KAT-MMM(KATa,KATa_node.childs[i][k], KATb,KATb_node.childs[k][j] C);
                        coninue;
                    end if
                end if
            end for
        end for
    end for
end procedure
```

je to samostatnej bod v zadani tak by to mohla byt cela chapter

TODO: popsat nevyhody quadtree a obrazkama ukazat jak to udelat lip neco jako quadtree loop unrolling

Kapitola 5

Analýza a návrh

5.1 Práce s řídkými maticemi v moderním software

5.1.1 SciPy.sparse

SciPy je knihovna skriptovacího jazyka Python.

ZDROJ: `http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/sparse.html`

5.1.2 Wolfram Mathematica

Wolfram Mathematica je TODO

Pomocí Wolfram Mathematicy vizualizujeme řídké matice z formátu `.mtx`. MatrixMarket nabízí matice v souborech `.mtx.gz` Wolfram Mathematica umí pracovat i s těmito komprimovanými soubory. Příkaz pro importování řídké matice a její vizualizaci je `Import["/tmp/matrix2.mtx", "Graphics"]`

`http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/format/MTX.html`

5.1.3 Boost

`http://www.boost.org/doc/libs/1_55_0/libs/numeric/ublas/doc/matrix_sparse.htm`

TODO: moznosti implementace, zvolene reseni, ostatni reseni

Kapitola 6

Realizace

6.0.4 Pseudokódy

(XXX: ?) Pro pseudokódy v této práci platí, že pole jsou indexovaná od nuly a for cyklus $for i \leftarrow 0 to 10$ bude iterovat do devátého prvku.

6.1 MatrixMarket

TODO: posat format matrixmarket

6.1.1 Generátor řídkých matic

Algorithm 15 Generování řídkých matic

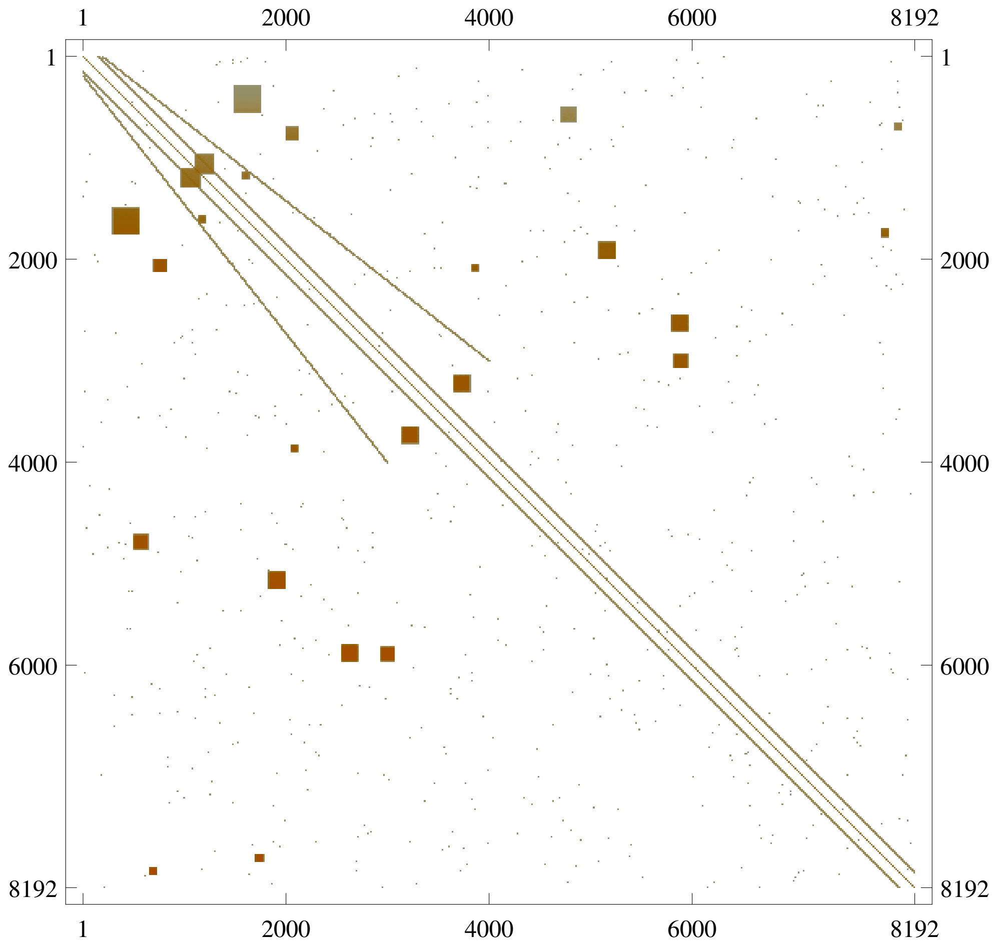
```
procedure SparseMatrixGenerator(file, width, height, ItemList)
    MtxWrapper ← InitMtxWrapper();
    MtxWrapper.PositionVector ← InitVector();
    for all Item ∈ ItemList do
        MtxWrapper.addItem(Item.y, Item.x, Item.properties);
        if Item.type == Mirrored then
            MtxWrapper.addItem(Item.x, Item.y, Item.properties);
        end if
    end for
    MtxWrapper.PositionVector.sort();
    MtxWrapper.PositionVector.removeDuplicates();
    MtxWrapper.write(file);
end procedure
```

Generátor řídkých matic byl implementován v jednom souboru. Lze spouštět s následujícími parametry:

- `-c` matice bude obsahovat hlavní diagonálu

- -H <celé číslo> výška matice
- -i <typ,a,b,c,d,...> seznam objektů, které se do matice přidají
  - diagonal,ay,ax,by,bx,sparsity prvky v přímce od bodu [ax,ay] do bodu [bx,by] s řídkostí sparsity
  - block,ay,ax,by,bx,sparsity blok prvků v obdelníku ohraničiného body [ax,ay] a [bx,by] s řídkostí sparsity
- -n <celé číslo> velikost matice
- -o <soubor> cílový soubor (lze použít i stdout)
- -s <desetinné číslo> řídkost matice (sparsity)
- -S <desetine číslo> startovací číslo
- -W <celé číslo> šířka matice
- -h zobraz nápovědu
- -o <soubor> cílový soubor (lze použít i stdout)
- -v vypisuj průběh generování (verbose)

$./tests/bin/matrix_generator-n8192-s0.00001-imdiagonal, 150, 0, 8192, 8042, 0.95, mdiagonal, 2$
$o/tmp/matrix2.mtx$



Obrázek 6.1: Matice vygenerovaná generátorem

6.2 Optimalizace

TODO: popsat moznosti optimalizace

6.3 ? Design implementace

TODO: C, testy

6.4 Měření

TODO: popsat jak to budu měřit, tedy cas z omp a cachegrind/callgrind

Závěr

Literatura

[1] Cenk, M.; Hasan, M. A.: On the Arithmetic Complexity of Strassen-Like Matrix Multiplications. *IACR Cryptology ePrint Archive*, ročník 2013, 2013: str. 107.

[2] Coppersmith, D.; Winograd, S.: Matrix Multiplication via Arithmetic Progressions. *J. Symb. Comput.*, ročník 9, č. 3, 1990: s. 251–280.

[3] Gates, A. Q.; Kreinovich, V.: Strassen's Algorithm Made (Somewhat) More Natural: A Pedagogical Remark. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science (EATCS)*, ročník 73, 2001: s. 142–145.

[4] Šimeček, I.: Sparse Matrix Computations with Quadtrees. In *Seminar on Numerical Analysis*, Liberec: Technical University, 2008, ISBN 978-80-7372-298-2, s. 122–124.

[5] Stothers, A. J.: *On the Complexity of Matrix Multiplication.* diploma thesis, University of Edinburgh, 2010.

[6] Strassen, V.: Gaussian Elimination is not Optimal. *Numerische Mathematik*, ročník 13, č. 4, Prosinec 1967: s. 354–355.

[7] Tvrdík, P.; Šimeček, I.: A new diagonal blocking format and model of cache behavior for sparse matrices.

[8] Williams, V. V.: Breaking the Coppersmith-Winograd barrier. 2011.

[9] Williams, V. V.: Multiplying matrices faster than coppersmith-winograd. In *STOC*, editace H. J. Karloff; T. Pitassi, ACM, 2012, ISBN 978-1-4503-1245-5, s. 887–898.

[10] Yuster, R.; Zwick, U.: Fast sparse matrix multiplication. *ACM Transactions on Algorithms*, ročník 1, č. 1, 2005: s. 2–13.

Příloha **A**

Seznam použitých zkratek

GUI Graphical user interface

XML Extensible markup language

Seznam obrázků

Seznam algoritmů

Příloha **B**

Obsah přiloženého CD

- `readme.txt` .... stručný popis obsahu CD
- `exe` .... adresář se spustitelnou formou implementace
- `src`
  - `impl` .... zdrojové kódy implementace
  - `thesis` .... zdrojová forma práce ve formátu LaTeX
- `text` .... text práce
  - `thesis.pdf` .... text práce ve formátu PDF
  - `thesis.ps` .... text práce ve formátu PS