

Sem vložte zadání Vaší práce.

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
KATEDRA TEORETICKÉ INFORMATIKY



Bakalářská práce

Vliv formátu uložení řídské matice na výkonnost násobení řídkých matic

Tomáš Nesrovnal

Vedoucí práce: Ing. Ivan Šimeček, Ph.D

5. května 2014

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce Ing. Ivanu Šimečkovi, Ph.D. a bc. Štefanu Šafárovi
za cenné rady.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval(a) samostatně a že jsem uvedl(a) veškeré použité informační zdroje v souladu s Metodickým pokynem o etické přípravě vysokoškolských závěrečných prací.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona, ve znění pozdějších předpisů. V souladu s ust. § 46 odst. 6 tohoto zákona tímto uděluji nevýhradní oprávnění (licenci) k užití této mojí práce, a to včetně všech počítačových programů, jež jsou její součástí či přílohou a veškeré jejich dokumentace (dále souhrnně jen „Dílo“), a to všem osobám, které si přejí Dílo užít. Tyto osoby jsou oprávněny Dílo užít jakýmkoli způsobem, který nesnižuje hodnotu Díla a za jakýmkoli účelem (včetně užití k výdělečným účelům). Toto oprávnění je časově, teritoriálně i množstevně neomezené. Každá osoba, která využije výše uvedenou licenci, se však zavazuje udělit ke každému dílu, které vznikne (byť jen zčásti) na základě Díla, úpravou Díla, spojením Díla s jiným dílem, zařazením Díla do díla souborného či spracováním Díla (včetně překladu), licenci alespoň ve výše uvedeném rozsahu a zároveň zpřístupnit zdrojový kód takového díla alespoň srovnatelným způsobem a ve srovnatelném rozsahu, jako je zpřístupněn zdrojový kód Díla.

V Praze dne 5. května 2014

.....

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta informačních technologií

© 2014 Tomáš Nesrovnal. Všechna práva vyhrazena.

Tato práce vznikla jako školní dílo na Českém vysokém učení technickém v Praze, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna právními předpisy a mezinárodními úmluvami o právu autorském a právech souvisejících s právem autorským. K jejímu užití, s výjimkou bezúplatných zákonných licencí, je nezbytný souhlas autora.

Odkaz na tuto práci

Nesrovnal, Tomáš. *Vliv formátu uložení řádké matice na výkonnost násobení řádkých matic*. Bakalářská práce. Praha: České vysoké učení technické v Praze, Fakulta informačních technologií, 2014.

Abstrakt

V několika větách shrňte obsah a přínos této práce v češtině. Po přečtení abstraktu by se čtenář měl mít čtenář dost informací pro rozhodnutí, zda chce Vaši práci číst.

Klíčová slova Nahradte seznamem klíčových slov v češtině oddělených čárkou.

Abstract

Sem doplňte ekvivalent abstraktu Vaší práce v angličtině.

Keywords Nahradte seznamem klíčových slov v angličtině oddělených čárkou.

Obsah

Úvod	1
1 Úvod do problematiky	3
1.1 Použití násobení matic	3
1.2 Matice	5
1.3 Vektor	5
1.4 Definice násobení matice maticí	5
1.5 Složitosti	6
1.6 Řídké matice	6
2 Algoritmy násobení matic	7
2.1 Podle definice	7
2.2 Násobení transponovanou maticí	8
2.3 Násobení po řádcích	8
2.4 Rekursivní násobení	9
2.5 Strassenův algoritmus	10
2.6 Rychlé algoritmy	14
2.7 Algoritmus podle definice upravený pro řídké matice	14
2.8 Rychlé násobení řídkých matic	18
2.9 Další algoritmy pro řídké matice	18
3 Formáty uložení řídkých matic	19
3.1 COO - Coordinate list	20
3.2 CSR - Compressed sparse row	21
3.3 BSR - Block Sparse Row	23
3.4 Quadtree	26
3.5 ?	27
4 Modifikace formátu quadtree	29
4.1 KAT - k-ary tree matrix	29

4.2	Typy listů	29
4.3	Tvoření stromu	30
4.4	Násobení	30
5	Analýza a návrh	33
5.1	ATLAS	33
5.2	Možnosti řešení	34
5.3	Zvolené řešení	34
6	Realizace	35
6.1	Prostředí	35
6.2	Design implementace	35
6.3	Implementace KAT	36
6.4	Testování	38
6.5	MatrixMarket	38
6.6	Optimalizace	40
6.7	Měření	40
	Závěr	41
	Literatura	43
	A Seznam použitých zkratk	47
	Seznam obrázků	47
	B Obsah příloženého CD	51

Seznam obrázků

1.1	3D neorientovaný graf ve tvaru helikoptéry, jeho reprezentace v řídké matici a výsledek simulace	4
2.1	Strassen (TODO: převzato z wikipedie: předělat?)	11
2.2	Ukázka numerické stability Strassenova algoritmu	14
2.3	Matice orsirr_1 před vynásobením	16
2.4	Matice orsirr_1 po vynásobením sama se sebou	17
3.1	Matice uložená ve formátu CSR	22
3.2	Matice uložená ve formátu BSR	24
3.3	Rozdělení matice	26
3.4	Strom matice uložené ve formátu Quadtree	27
6.1	UML diagram tříd programu	36
6.2	Matice vygenerovaná generátorem	40

Seznam tabulek

3.1	Matice uložená ve formátu COO	20
-----	---	----

Úvod

Úvod do problematiky

Při řešení problémů často hledáme způsob, jak interpretovat data v takovém formátu, se kterým již umíme pracovat. Jedním ze základních prvků je matice. Ve spoustě případů takové matice obsahují nemalý počet nulových prvků. Takové matice obecně nazýváme řídké a při práci s nimi tuto vlastnost využíváme.

Pro výstavu v roce 2011 s názvem Art in Engineering v Harnově Muzeu představila floridská univerzita kolekci ilustrací řídkých matic s názvem The Beauty of Mathematics: As Illustrated by the University of Florida Sparse Matrix Collection [11]. Pro estetické zobrazení řídkých matic byla provedena simulace. Každému uzlu byl přiřazen elektrický náboj a každá hrana představovala pružinu. V simulaci byla celá tato konstrukce položena na tvrdou podložku. Simulace byla zastavena v okamžiku, když se konstrukce přestala hýbat. Pro ilustraci přikládáme výsledek simulace 1.1 na modelu helikoptéry, tedy neorientovaném 3D grafu uloženém v řídké matici.

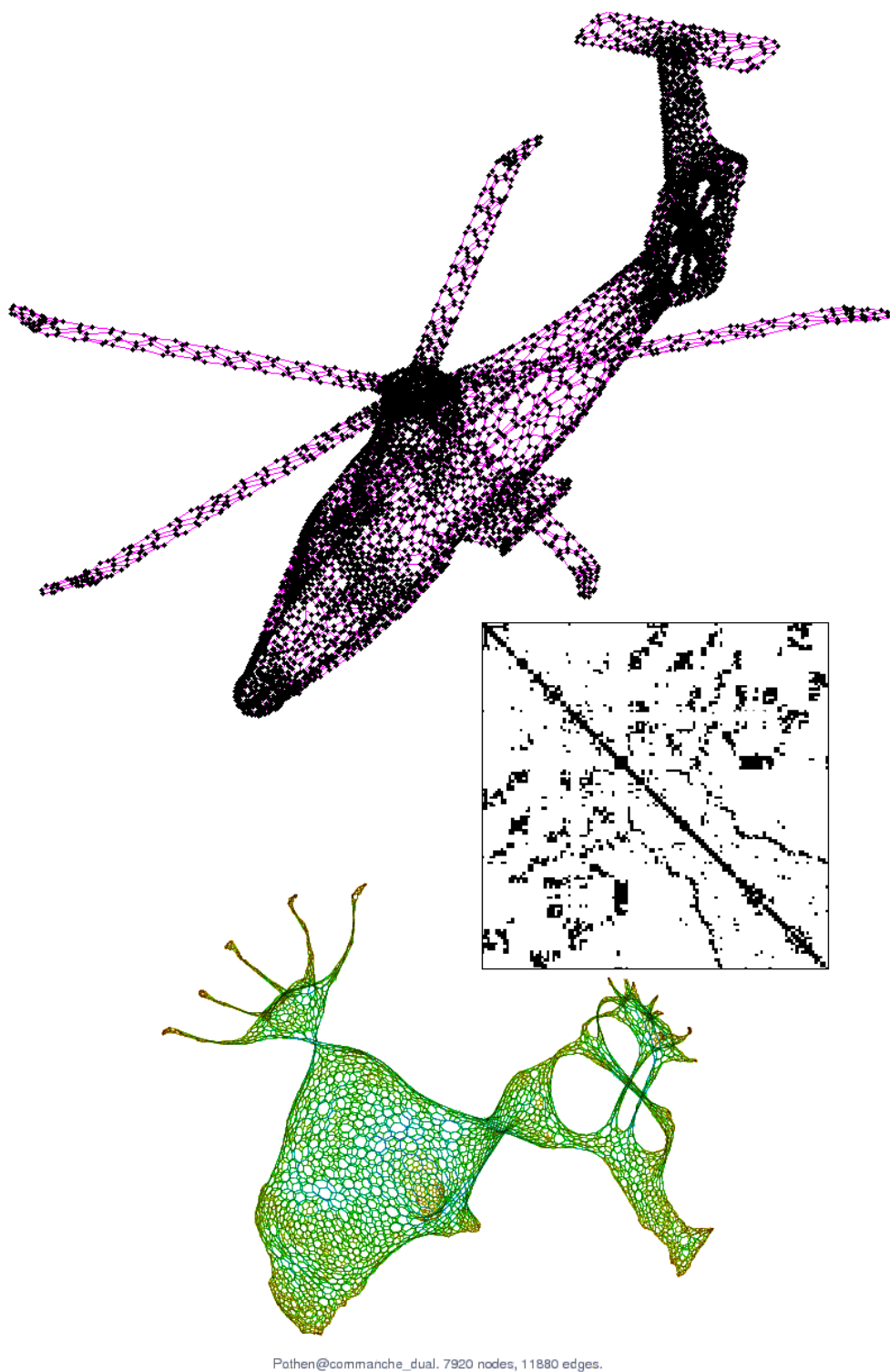
Řídké matice jsou používány ve velké škále oblastí, například výpočty diferenciálních rovnic, Google page rank, 3D grafika, statistika, těžení z dat, kryptografie a další.

1.1 Použití násobení matic

Násobení maticí může znázorňovat nějakou transformaci jednoho stavu do druhého. Největší uplatnění řídkých matic je tedy v simulaci jevů, například fyzikálních, biologických, chemických, ekonomických a dalších.

Jako příklad simulace můžeme uvést metodu konečných prvků [12][6].

Násobení matice maticí má menší praktické využití než násobení matice vektorem. V praxi ale můžeme složit více vektorů v jednu matici a tím si zrychlit výpočet. To se obzvláště hodí pro real-time aplikace.



Obrázek 1.1: 3D neorientovaný graf ve tvaru helikoptéry, jeho reprezentace v řídké matici a výsledek simulace

1.2 Matice

Matice \mathbf{A} typu (m, n) je mn uspořádaných prvků z množiny \mathbf{R} . O prvku $a_{r,s} \in \mathbf{R}, r \in \{1, 2, \dots, m\}, s \in \{1, 2, \dots, n\}$ říkáme, že je na r -tém řádku a s -tém sloupci matice \mathbf{A} . Matici \mathbf{A} zapisujeme do řádků a sloupců takto:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Matici \mathbf{M} typu (m, n) , kde všechny její prvky jsou rovny nule, nazýváme *nulovou maticí*.

O matici typu (m, n) budeme říkat, že je m široká a n vysoká. Pokud o matici řekneme že má velikost n , myslíme tím, že je typu (n, n) .

1.3 Vektor

Matici \mathbf{V} typu $(1, n)$ nazveme vektorem.

1.4 Definice násobení matice maticí

Buď \mathbf{A} matice typu (m, n) s prvky $a_{i,j}$ a \mathbf{B} matice typu (n, p) s prvky $b_{j,k}$. Definujeme součin matic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ jako matici \mathbf{C} typu (m, p) s prvky $c_{i,k}$ které vypočteme jako:

$$c_{row,col} = \sum_{k=1}^N a_{row,k} b_{k,col} \quad (1.2)$$

Výsledek součinu matic se nezmění, pokud matice doplníme o libovolný počet nulových řádků a nebo sloupců. Této vlastnosti můžeme využít pro získání potřebných rozměrů:

1. Při násobení matice \mathbf{A} typu (m, n) s maticí \mathbf{B} typu (o, p) , kde $n \neq o$.
2. Pokud potřebujeme matice stejné velikosti.
3. Pokud potřebujeme matice určité velikosti, například 2^N .

Násobení matice vektorem je pouze případem násobení matice typu (m, n) s maticí typu $(1, n)$.

1.5 Složitosti

K označení složitostí, ať již časových nebo prostorových (paměťových) používáme \mathcal{O} -notaci, která označuje množinu funkcí, asymptoticky roustoucí řádově stejně rychle, nebo rychleji.

$$\mathcal{O}(g(n)) = \left\{ f(n) : \exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n) \right\} \quad (1.3)$$

\mathcal{O} notací budeme popisovat nejhorší možný případ. Obdobně Θ značí funkce roustoucí stejně rychle a Ω stejně rychle, nebo pomaleji.

Pro výpočet složitostí rekurzivních algoritmu používáme Mistrovskou metodu [10]. Pokud $a \geq 1, b > 0$ jsou konstanty a $f(n)$ je funkce o jedné proměnné, tak rekurence

$$t(n) = at(n/b) + f(n) \quad (1.4)$$

má asymptotickou složitost:

1. Pro $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$, kde $\epsilon > 0$ je konstanta platí, že $t(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Pro $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ platí, že $t(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
3. Pro $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, kde $\epsilon > 0$ je konstanta a $af(n/b) \leq cf(n)$ pro konstantu $c < 1$ a $\forall n \geq n_0$, tak platí, že $t(n) = \Theta(f(n))$.

1.6 Řídké matice

Matice, které obsahují velké množství nulových prvků, nazýváme řídké. Nebudeme přesně uvádět, kolik procent z celkového počtu prvků musí být nulových, abychom matici nazývali řídkou. Stejně jako řídkou matici můžeme uložit do formátu pro husté matice, můžeme hustou matici uložit do formátu pro řídké matice.

Řídkost matice budeme vyjadřovat pomocí *nnz* (Number of NonZero elements), tedy počtem nenulových prvků z celkových mn , pro matici A typu (m, n) .

Algoritmy násobení matic

V této kapitole představíme některé základní a pokročilejší algoritmy pro násobení matic. Základní algoritmy mají stejnou asymptotickou složitost $\mathcal{O}(n^3)$ a liší se pouze přístupům k prvkům, což je důležité pro řídké formáty. Pokročilejší algoritmy jsou sice asymptoticky rychlejší, ale přinášejí nevýhodu ve formě numerické stability a velké skryté konstantě.

2.0.1 Pseudokódy

Pseudokódy v této práci jsou ve stylu syntaxe jazyka Fortran, ale budou představovat zápis jazyka C99. Pro pole platí, že jsou indexovaná od nuly a for cyklus `for i ← 0 to 10` bude iterovat od nultého do devátého prvku včetně.

2.1 Podle definice

Základním algoritmem násobení dvou matic je podle definice. Ve třech for cyklech postupně vybíráme řádky matice A, sloupce matice B a v N krocích násobíme. N je jak šířka matice A, tak i výška matice B.

Algorithm 1 Násobení matic podle definice

```
1: procedure MMM-DEFINITION( $A, B, C$ )                                ▷ A,B,C jsou matice
2:   for  $row \leftarrow 0$  to  $A.height$  do                                ▷ řádky
3:     for  $col \leftarrow 0$  to  $B.width$  do                                ▷ sloupce
4:        $sum \leftarrow 0$ ;
5:       for  $i \leftarrow 0$  to  $A.height$  do
6:          $sum \ += A[row][i] * B[i][col]$ ;
7:       end for
8:        $C[row][col] \leftarrow sum$ ;
9:     end for
10:  end for
11: end procedure
```

Z pseudokódu je vidět, že ve dvou for cyklech provádíme N násobení a N sčítání. Asymptotická složitost je tedy $\mathcal{O}(n^2(n+n)) = \mathcal{O}(2n^3)$. V ukázkových výpočtech je násobení pouze $N - 1$ krát, to proto, že neuvádíme přičítání k nule (řádek 6).

2.2 Násobení transponovanou maticí

Pokud nám formát uložení matice nedovolí procházet prvky po sloupcích, je řešením druhou matici transponovat. Poté můžeme násobit řádky matice A s řádky transponované matice B.

Algorithm 2 Násobení transponovanou maticí

```

1: procedure MMM-TRANPOSE( $A, B, C$ )                                ▷ A,B,C jsou matice
2:    $B \leftarrow \text{transpose}(B)$ 
3:   for  $\text{row}A \leftarrow 0$  to  $A.\text{height}$  do                                ▷ řádky
4:     for  $\text{row}B \leftarrow 0$  to  $B.\text{height}$  do                                ▷ sloupce
5:        $\text{sum} \leftarrow 0$ ;
6:       for  $i \leftarrow 0$  to  $A.\text{height}$  do
7:          $\text{sum} += A[\text{row}A][i] * B[i][\text{row}B]$ ;
8:       end for
9:        $C[\text{row}A][\text{row}B] \leftarrow \text{sum}$ ;
10:    end for
11:  end for
12: end procedure

```

Podobný algoritmus můžeme použít i pokud nám formát nedovolí procházet prvky po řádcích, ale pouze po sloupcích. Například v této práci neuvedený Compressed Sparse Columns.

2.3 Násobení po řádcích

Další možností jak násobit dvě matice, kde nám formát uložení nedovolí procházet po sloupcích je procházet současně řádky matice A i B a přičítat jednotlivé součiny na správné místo ve výsledné matici C.

Nevýhodou tohoto řešení je velký počet přístupů do pole C. Protože k prvkům přičítáme, tedy načítáme a sčítáme, je potřeba před samotným násobením nastavit všechny prvky matice C na hodnotu nula.

Algorithm 3 Násobení po řádcích

```

1: procedure MMM-BY-ROWS(A, B, C)                                ▷ A,B,C jsou matice
2:   for r ← 0 to A.height do                                     ▷ řádky matice A i B
3:     for cA ← 0 to A.width do                                   ▷ sloupce matice A
4:       for c ← 0 to B.width do                                 ▷ sloupce matice B
5:         C[r][cA] += A[r][cA] * B[r][cB];
6:       end for
7:     end for
8:   end for
9: end procedure

```

2.4 Rekurzivní násobení

Pro matice *A* i *B* o stejné velikosti 2^N můžeme použít rekurzivní přístup. Tedy programovací techniku rozděl a panuj, kdy rozdělíme větší problémy na menší podproblémy.

Každou z matic rozdělíme na čtvrtiny a jednotlivé podmatice násobíme algoritmem podle definice, tedy jako matice o velikosti dva.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Tento postup opakujeme, dokud velikostí podmatic nenarazíme na práh, tedy hodnotu, při které opustíme rekurzivní algoritmus a použijeme algoritmus lineární. V ukázkovém pseudokódu dělíme podmatice až na velikost prahu jedna, podmatice tedy obsahují pouze jeden prvek.

Algorithm 4 Rekurzivní násobení

```

1: procedure MMM-RECURSIVE(A, B, C, ay, ax, by, bx, cy, cx, n)
2:   if n = 1 then
3:     C[cy][cx] ← C[cy][cx] + A[ay][ax] · B[by][bx];
4:     return;
5:   end if
6:   for all r ∈ {0, n/2} do
7:     for all c ∈ {0, n/2} do
8:       for all i ∈ {0, n/2} do
9:         MMM-recursive(A, B, C, ay + i, ax + r, by + c, bx + i, cy +
          c, cx + r, n/2);
10:      end for
11:    end for
12:  end for
13: end procedure

```

Pro ilustraci jako příklad uvádíme výpočet horního levého prvku v násobení dvou matic o velikosti 2^2 . Pro větší přehlednost značíme prvky malým písmem z názvu matice a indexy o jejich pozicích.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} \end{pmatrix} = \quad (2.2)$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{3,1} & b_{3,2} \\ b_{4,1} & b_{4,2} \end{pmatrix} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \quad (2.3)$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,3}b_{3,1} + a_{1,4}b_{4,1} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \quad (2.4)$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + a_{1,3}b_{3,1} + a_{1,4}b_{4,1} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Asymptotická složitost je samozřejmě stejná jako u algoritmu podle definice. Asymptotickou složitost rekurzivního algoritmu můžeme spočítat pomocí mistrovské metody.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 8T(n/2) + \Theta(1) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

Protože platí, že $a = 8, b = 2, r = \log_2 8, n^r = n^{\log_2 8} = n^3 = \Omega(1)$, tak asymptotická složitost podle mistrovské metody je $\text{MMM-recursive}(n) = \mathcal{O}(n^3)$.

Kvůli režii rekurzivního dělení v praxi nezmenšujeme podmatice až na velikost jedna. Vhodný práh velikosti podmatice je například takový, co se vejde do L1 cache.

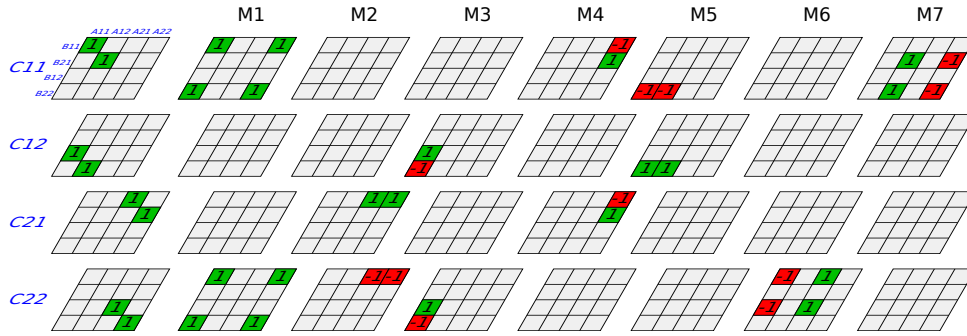
2.5 Strassenův algoritmus

V roce 1969 Volker Strassen v časopise *Numerische Mathematik* publikoval článek [19], ve kterém jako první představil algoritmus násobení dvou matic s menší asymptotickou složitostí než algoritmus podle definice, tedy $\mathcal{O}(n^3)$.

Algoritmus je založen na myšlence, že sčítání je operace méně náročnější než operace násobení. Respektive dvě matice umíme sečíst nebo odečíst v složitosti $\mathcal{O}(n^2)$, ale vynásobit v $\mathcal{O}(n^3)$.

Volker Strassen tedy využil jisté symetrie [14] v násobení dvou matic A a B o velikosti dva a výslednou matici C seskládal pomocí sedmi pomocných matic.

Obrázek 2.1 ukazuje, z čeho se pomocné matice skládají a jak jsou do výsledné matice seskládány. V ilustračních maticích o velikosti čtyři ukazujeme, které sčítance pomocná matice do výsledku přičítá a které odečítá.



Obrázek 2.1: Strassen (TODO: převzato z wikipedie: předělat?)

Zápis Strassenova algoritmu vypadá následovně:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$M_1 = (A_{1,1} + A_{2,2}) \cdot (B_{1,1} + B_{2,2}) \quad (2.7)$$

$$M_2 = (A_{2,1} + A_{2,2}) \cdot B_{1,1} \quad (2.8)$$

$$M_3 = A_{1,1} \cdot (B_{1,2} - B_{2,2}) \quad (2.9)$$

$$M_4 = A_{2,2} \cdot (B_{2,1} - B_{1,1}) \quad (2.10)$$

$$M_5 = (A_{1,1} + A_{1,2}) \cdot B_{2,2} \quad (2.11)$$

$$M_6 = (A_{2,1} - A_{1,1}) \cdot (B_{1,1} + B_{1,2}) \quad (2.12)$$

$$M_7 = (A_{1,2} - A_{2,2}) \cdot (B_{2,1} + B_{2,2}) \quad (2.13)$$

$$C = \begin{pmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & M_3 + M_5 \\ M_2 + M_4 & M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

V pseudokódu používáme procedury **offset-add** respektive **offset-sub**. Slouží ke sčítání respektive odečítání bloku prvků o velikosti n v maticích od nějakého offsetu y a x . Parametry obou funkcí jsou: **offset-*(A, B, C, ay, ax, by, bx, cy, cx, n)**.

Algorithm 5 Strassenův algoritmus

```

1: procedure MMM-STRASSEN( $A, B, C, ay, ax, by, bx, cy, cx, n$ )
2:   if  $n = 1$  then
3:      $C[cy][cx] \leftarrow C[cy][cx] + A[ay][ax] \cdot B[by][bx]$ ;
4:     return;
5:   end if
6:    $h \leftarrow n/2$ ; ▷ čtvrtina
7:    $m[9] \leftarrow \text{init-matrices}(9, h)$ ; ▷ devět pomocných matic
8:   offset-add( $a, a, m[8], ay, ax, ay + h, ax + h, 0, 0, h$ ); ▷ M1
9:   offset-add( $b, b, m[9], by, bx, by + h, bx + h, 0, 0, h$ );
10:  MMM-strassen( $m[8], m[9], m[1], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h$ );
11:  offset-add( $a, a, m[8], ay + h, ax, ay + h, ax + h, 0, 0, h$ ); ▷ M2
12:  MMM-strassen( $m[8], b, m[2], 0, 0, bx, by, 0, 0, h$ );
13:  offset-sub( $b, b, m[8], by, bx + h, by + h, bx + h, 0, 0, h$ ); ▷ M3
14:  MMM-strassen( $a, m[8], m[3], ay, ax, 0, 0, 0, 0, h$ );
15:  offset-sub( $b, b, m[8], by + h, bx, by, bx, 0, 0, h$ ); ▷ M4
16:  MMM-strassen( $a, m[8], m[4], ay + h, ax + h, 0, 0, 0, 0, h$ );
17:  offset-add( $a, a, m[8], ay, ax, ay, ax + h, 0, 0, h$ ); ▷ M5
18:  MMM-strassen( $m[8], b, m[5], 0, 0, by + h, bx + h, 0, 0, h$ );
19:  offset-sub( $a, a, m[8], ay + h, ax, ay, ax, 0, 0, h$ ); ▷ M6
20:  offset-add( $b, b, m[9], by, bx, by, bx + h, 0, 0, h$ );
21:  MMM-strassen( $m[8], m[9], m[6], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h$ );
22:  offset-sub( $a, a, m[8], ay, ax + h, ay + h, ax + h, 0, 0, h$ ); ▷ M7
23:  offset-add( $b, b, m[9], by + h, bx, by + h, bx + h, 0, 0, h$ );
24:  MMM-strassen( $m[8], m[9], m[7], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h$ );
25:  offset-add( $m[1], m[4], m[8], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h$ ); ▷ c1,1
26:  offset-sub( $m[8], m[5], m[8], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h$ );
27:  offset-add( $m[8], m[7], c, 0, 0, 0, 0, cy, cx, h$ );
28:  offset-add( $m[3], m[5], c, 0, 0, 0, 0, cy, cx + h, h$ ); ▷ c1,2
29:  offset-add( $m[2], m[4], c, 0, 0, 0, 0, cy + h, cx, h$ ); ▷ c2,1
30:  offset-sub( $m[1], m[2], m[8], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h$ ); ▷ c2,2
31:  offset-add( $m[8], m[3], m[8], 0, 0, 0, 0, 0, 0, h$ );
32:  offset-add( $m[8], m[6], c, 0, 0, 0, 0, cy + h, cx + h, h$ );
33: end procedure

```

Výpočet asymptotické složitosti vypočteme podobně jako u **MMM-recursive**, tedy mistrovskou metodou.

V každém kroku rekurze počítáme $\Theta(n^2)$ operací na vytvoření pomocných matic.

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n = 1 \\ 7T(n/2) + \Theta(n^2) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

Protože platí, že $a = 7, b = 2, r = \log_2 7, n^r = n^{\log_2 7} = \Omega(n^2)$, tak

asymptotická složitost podle mistrovské metody je $\text{MMM-strassen}(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 7}) \approx \mathcal{O}(n^{2.8})$.

Stejně jako v předešlém algoritmu, i zde demonstrujeme výpočet levého horního prvku matice z násobení dvou matic o velikosti dva. Místo parametrické matice použijeme konkrétní desetinná čísla, abychom ukázali numerickou stabilitu Strassenova algoritmu. Pro ukázkou budeme uvažovat počítač, který u čísel ukládá pouze pět cifer, znaménko a desetinnou čárku.

Pomocí algoritmu podle definice, by takový počítač vypočítal součin dvou matic následovně:

$$\begin{pmatrix} 30.234 & 0.5678 \\ 0.9123 & 10.456 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8912 & 0.3456 \\ 0.7891 & 9.999 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27.392 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Správný výsledek je $30.234 \times 0.8912 + 0.5678 \times 0.7891 = 26.9445408 + 0.44805098 = 27.39259178$.

Nyní výpočet provedeme pomocí Strassenova algoritmu:

$$\begin{pmatrix} 30.234 & 0.5678 \\ 0.9123 & 10.456 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.8912 & 0.3456 \\ 0.7891 & 9.999 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$M_1 = (30.234 + 10.456) \cdot (0.8912 + 9.999) = 443.12 \quad (2.17)$$

$$\dots \quad (2.18)$$

$$M_4 = 10.456 \cdot (0.7891 - 0.8912) = -1.067 \quad (2.19)$$

$$M_5 = (30.234 + 0.5678) \cdot 9.999 = 307.98 \quad (2.20)$$

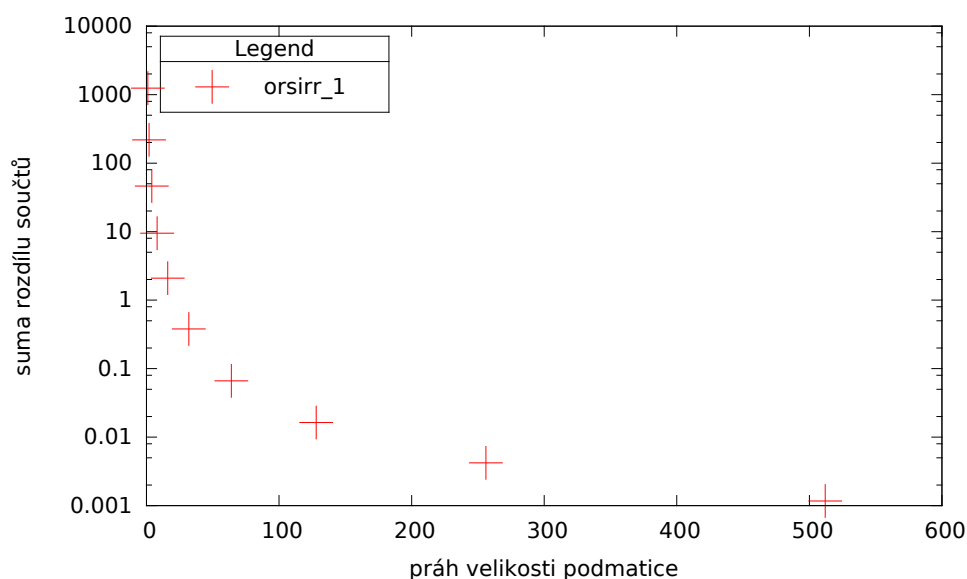
$$\dots \quad (2.21)$$

$$M_7 = (0.5678 - 10.456) \cdot (0.7891 + 9.999) = -106.67 \quad (2.22)$$

$$\begin{pmatrix} M_1 + M_4 - M_5 + M_7 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27.403 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Jak můžeme vidět, zatímco u algoritmu podle definice jsme pouze ztratili desetinnou přesnost, výsledek Strassenova algoritmu se lišil už v prvním desetinném čísle.

Pro reálnou představu stability Strassenova algoritmu jsme provedli experiment, ve kterém jsme vynásobili dvě stejné matice (matice `orsirr_1`, oříznuta na velikost 1024) algoritmem podle definice a Strassenovým algoritmem s různými práhy a sečetli všechny rozdíly mezi výsledky. Násobení probíhalo ve dvojitě desetinné přesnosti, tedy v datovém typu `double` jazyka C99. Z grafu 2.2 je vidět exponenciální závislost mezi velikostí prahu a celkovou chybou.



Obrázek 2.2: Ukázka numerické stability Strassenova algoritmu

Strassenův algoritmus lze ještě vylepšit. Algoritmům na stejném principu se říká Strassen-like [7]. Pro sedm operací násobení je možné snížit počet sčítání a odečítání. Pro jednoduchost zde ovšem uvádíme originalní algoritmus.

2.6 Rychlé algoritmy

Po tom, co Strassen ukázal, že existují rychlejší algoritmy než $\mathcal{O}(n^3)$, ještě rychlejší algoritmy než ten jeho na sebe nenechaly dlouho čekat. Složitost násobení matic pro jednoduchost označíme jako $\mathcal{O}(n^\omega)$.

Nejpomalejší algoritmus s $\omega = 3$ je podle definice. Strassenův algoritmus se sedmi násobeními má $\omega \approx 2.807354$. Jeden z nejrychlejších algoritmů je algoritmus Virginie Williamsové [24][23], pro který je $\omega < 2.3727$.

Hranicí nejlepší možné složitosti může být $\omega = 2$, protože každý prvek z matice musíme nějak započítat. Existují z velké části podložené domněnky na základě teorie grup [18], že $\omega = 2$ skutečně platí, ale přímý důkaz ještě neexistuje.

2.7 Algoritmus podle definice upravený pro řídké matice

Pokud násobíme řídké matice A a B o velikosti N , můžeme vynechat násobení takových dvou prvků, z nichž je alespoň jeden nulový. Označme $nnzr_{M,i}$

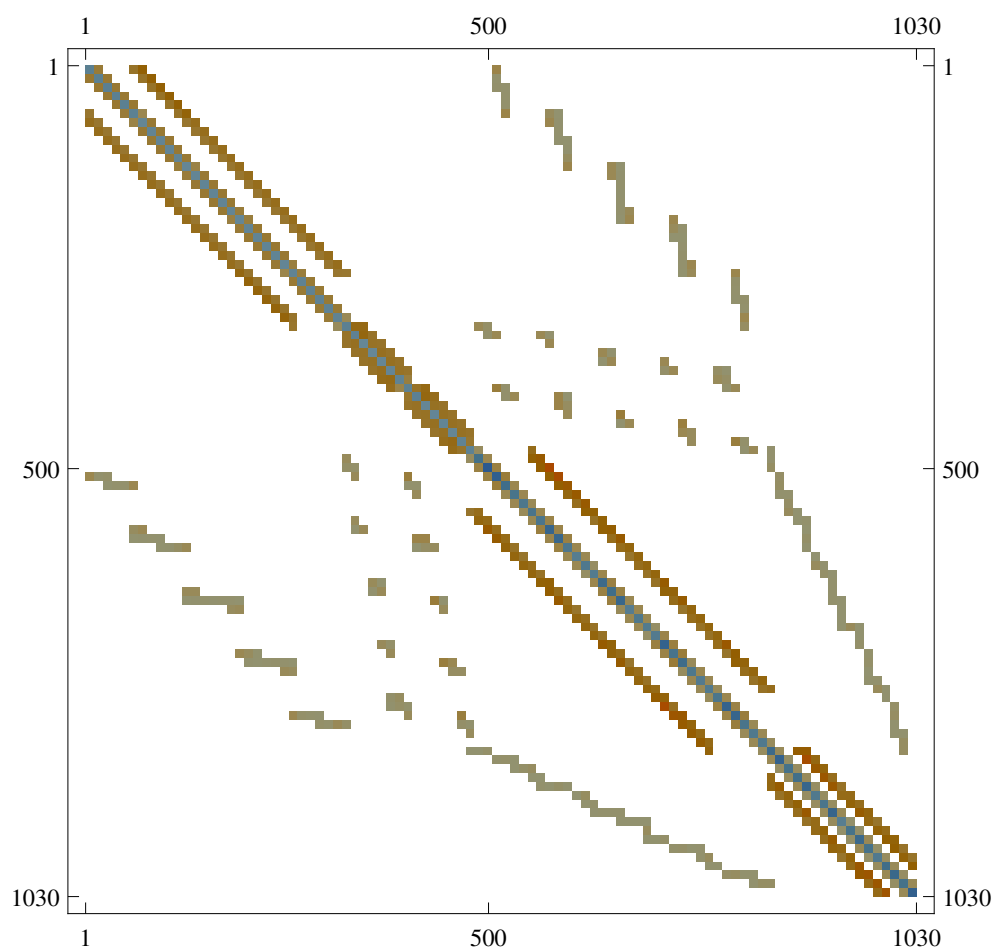
2.7. Algoritmus podle definice upravený pro řídké matice

jako počet nenulových prvků v i -tém řádku matice M a $nnzc_{M,i}$ jako počet nenulových prvků v i -tém sloupci matice M . Protože násobíme každý řádek s každým sloupcem, bude celkový počet operací násobení dán vzorcem:

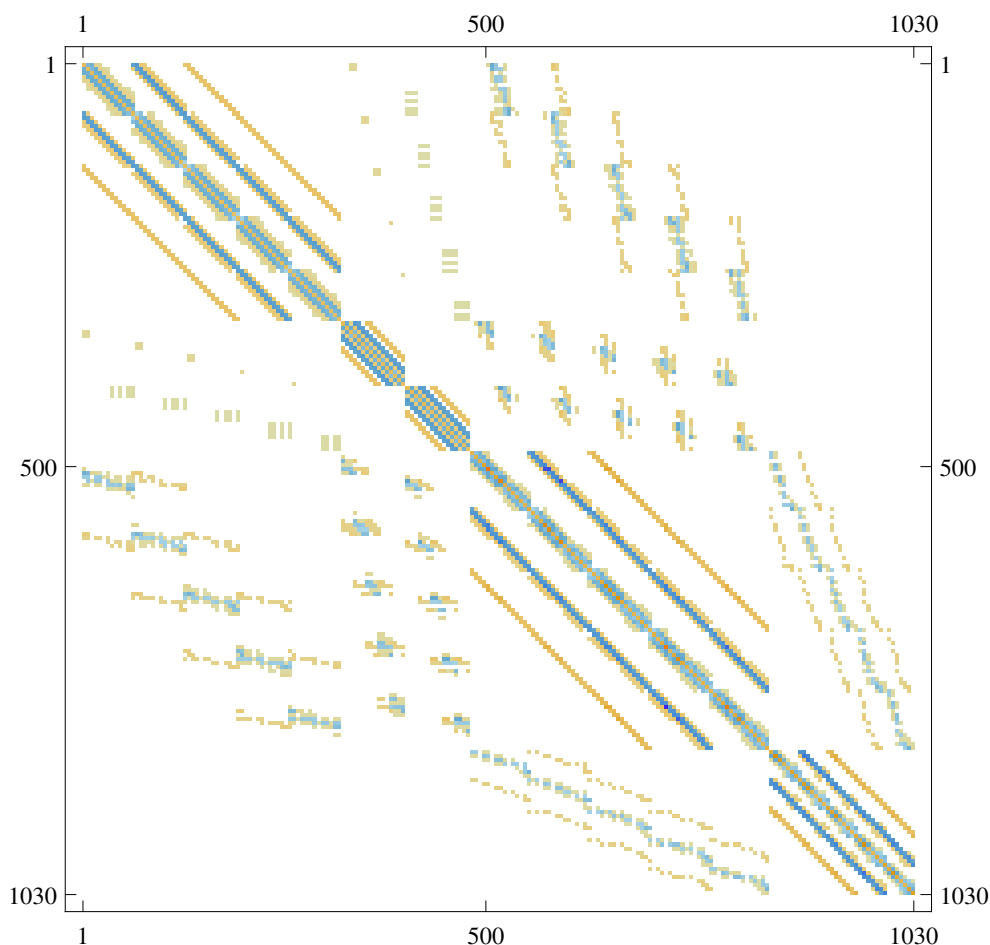
$$\sum_{i=1}^N nnzr_{A,i} nnzc_{B,i} \quad (2.24)$$

Složitost tohoto algoritmu pro násobení dvou matic A a B o velikosti n tedy můžeme vyjádřit jako $O(mn)$, kde $m = \max(nnz(A), nnz(B))$. Pro husté matice bez jediného nulového prvku samozřejmě platí, že $m = n^2$. Nutno podotknout, že $O(mn)$ je nejhorší případ, kdy se všechny nenulové prvky matice A budou násobit se všemy nenulovými prvky matice B .

Pro reálnou představu demonstrujeme násobení dvou stejných matic. Opět se jedná o dvě matice `orsirr_1`. Matice `orsirr_1` má velikost $n = 1030$ a $m = 6858$ nnz. Rozmístění nnz před respektive po vynásobení ukazují obrázky 2.3 respektive 6.2.



Obrázek 2.3: Matice orsirr_1 před vynásobením



Obrázek 2.4: Matice orsirr_1 po vynásobení sama se sebou

Kdyby nastal nejhorší možný případ, počet operací násobení při použití algoritmu podle definice pro řídké matice by byl $1030 \times 6858 = 7.063740 \times 10^6$. Pro tento případ ovšem stačí 4.6976×10^4 operací násobení. Oproti nejhoršímu možnému případu nastalo $7.063740 \times 10^6 - 4.6976 \times 10^4 = 7.016764 \times 10^6$ situací, kdy jeden ze dvou prvků byl nulový a operace násobení nemusela být provedena. Při násobení algoritmem podle definice pro husté matice by v 1.092680024×10^9 případech operace násobení nemusela být provedena, protože alespoň jeden ze dvou prvků by byl nula. Po vynásobení matice orsirr_1 sama se sebou, stoupl její počet nnz z 6858 na 23532. V tomto případě to bylo především z důvodu, že všechny prvky z diagonály matice jsou nenulové, každý prvek se tedy započítá.

2.8 Rychlé násobení řídkých matic

Strassenův algoritmus $\omega = 2.8$ od $nnz < n^{1.8}$ a algoritmus Virginie Williamsové $\omega = 2.3727$ od $nnz < n^{1.37}$ jsou asymptoticky stejně rychlé jako algoritmus podle definice upravený pro řídké matice $\mathcal{O}(mn)$. Například pro $n = 1000$ je tato hranice pro Strassenův algoritmus 251189 (40 %) nnz a pro algoritmus Virginie Williamsové 12882 (78 %) nnz z celkových možných 1000000 prvků.

Raphael Yuster a Uri Zwick ukázali algoritmus [27] s asymptotickou složitostí $\mathcal{O}(m^{0.7}n^{1.2} + n^{2+o(1)})$, který rozdělí permutace řádků a sloupců na řídké a husté. Řídké permutace násobí algoritmem podle definice v úpravě pro řídké matice $\mathcal{O}(mn)$. Husté permutace vynásobí v té době nejznámějším nejrychlejším algoritmem a to od Dona Coppersmitha a Shmuela Winograda s asymptotickou složitostí $\omega = 2.3$ [9].

2.9 Další algoritmy pro řídké matice

Algoritmů násobení řídkých matic je mnoho. Často se odvíjejí od typu řídkých matic a formátu v jakém jsou uloženy. Příkladem může být formát, ve kterém se ukládají diagonály [22].

Formáty uložení řídkých matic

Formáty uložení řídkých matic obecně ukládají jednotlivé elementy zvlášť a tedy nemusí ukládat ty nulové. To ale přináší řadu nevýhod. Za prvé se musí ukládat informace o souřadnicích jednotlivých prvcích. Za druhé, ztrácíme možnost přístupu k prvku na libovolných souřadnicích v čase $\Theta(1)$, protože prvky nemáme přímo indexované podle jejich umístění v řádku a sloupci.

Protože řídké matice můžeme rozdělit do mnoha kategorií a provádět nad nimi mnoho operací, existuje hodně formátů, jak řídkou matici efektivně uložit a pracovat s ní.

http://www.cs.colostate.edu/~mroberts/toolbox/c++/sparseMatrix/sparse_matrix_compression.html

3.0.1 Modifikace řídké matice

Formáty uložení řídkých matic můžeme také rozdělit podle toho, zda-li je možné do nich přidávat nebo odebírat prvky.

Při násobení matic $C = A \cdot B$ se matice A ani B nemění. V této práci budeme předpokládat, že matice C bude hustá a formáty umožňujícími přidávání nebo odebírání prvků nebudou součástí práce. Stejně tak při násobení matice A vektorem B je výsledek C vektor.

3.0.2 Uspořádanost řídké matice

Dalším kritériem pro rozdělení formátů je uspořádanost nenulových prvků v řídké matici. Pro uspořádané prvky bude efektivnější takový formát, který využije určitý vzor. V řídkých maticích takovým vzorem může být například diagonála, nebo blok prvků. Efektivně lze za vzor považovat i prvky v řádku, nebo ve sloupci.

Uspořádáním může být také symetrie matice, kdy nám stačí uložit pouze polovinu matice. Často řídké matice bývají symetrické podle hlavní diagonály.

3.1 COO - Coordinate list

Formát COO, česky seznam souřadnic, je základní formát řídkých matic. Ke každému nenulovému prvku ukládá jeho souřadnice y a x . Implementovat tento formát můžeme například jako tři pole, jedno s hodnotami prvků, druhé s y souřadnicemi a třetí s x souřadnicemi.

Pro ukázkou v tomto formátu uložíme matici o velikosti $n = 8$ s $nnz = 5$ nenulovými prvky.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & \mathbf{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{l|l} \text{values}[5] & 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \\ \text{y-coords}[5] & 1 \quad 1 \quad 4 \quad 7 \quad 7 \\ \text{x-coords}[5] & 0 \quad 1 \quad 1 \quad 5 \quad 6 \end{array}$$

Tabulka 3.1: Matice uložená ve formátu COO

Jak můžeme vidět, délka polí je závislá pouze na nnz . Pro velké matice s malým počtem neuspořádaných nenulových prvků je tento formát velmi efektivní. Pokud by bylo prvků velké množství, informace o uložení y nebo x souřadnic by byla často redundatní.

Paměťová náročnost formátu COO je $O(3 * nnz)$.

Formát COO je velmi jednoduchý a přímočarý. Při procházení jeho prvků nám stačí jedna iterace přes tři stejně dlouhé pole. Tím je tedy například algoritmus násobení řídké matice ve formátu COO s vektorem velmi jednoduchý:

Algorithm 6 Násobení matice COO s vektorem

```

1: procedure COO-MVM(COO,V,C)
2:   for  $i \leftarrow 0$  to COO.nnz do
3:      $V.v[\text{COO}.r[i]] \mathrel{+}= \text{COO}.v[i] * V.v[\text{COO}.c[i]]$ ;
4:   end for
5: end procedure

```

Při násobení dvou matic narazíme na problém. Při této operaci se každý prvek násobí dvakrát. Potřebujeme způsob, jak se v matici vrátit zpátky na určité místo. Takový naivní algoritmus pro násobení dvou COO matic by

byl složitý. Museli bychom si pamatovat začátky řádků a neustále kontrolovat, jestli jsme nepřesáhli další řádek. Lepším řešením je dopředu si předpočítat, kde který řádek začíná a končí. Předpočítáme si tedy pole, nazvané *row_pointers*, o délce $M.height + 1$, obsahující indexy začátků a konců řádek.

Při procházení matice se tak v poli s prvky mezi indexy *row_pointers*[*i*] a *row_pointers*[*i* + 1] nachází prvky na řádku *i*. Proto je pole právě o jedna delší než výška matice, abychom mohli určit konec posledního řádku.

Algorithm 7 Násobení dvou COO matic

```

1: procedure COO-MMM(A,B,C)
2:   arp  $\leftarrow$  InitArray(A.nnz + 1);
3:   brp  $\leftarrow$  InitArray(B.nnz + 1);
4:   for i  $\leftarrow$  0 to A.nnz do    ▷ předpočítání prvků v řádcích matice A
5:     arp[A.r[i] + 1] = arp[A.r[i] + 1] + 1;
6:   end for
7:   for i  $\leftarrow$  0 to A.height do
8:     arp[i + 1] = arp[i + 1] + arp[i];
9:   end for
10:  for i  $\leftarrow$  0 to B.nnz do    ▷ předpočítání prvků v řádcích matice B
11:    brp[B.r[i] + 1] = brp[B.r[i] + 1] + 1;
12:  end for
13:  for i  $\leftarrow$  0 to A.height do
14:    brp[i + 1] = brp[i + 1] + brp[i];
15:  end for
16:  for i  $\leftarrow$  0 to A.height do                                     ▷ násobení
17:    for ac  $\leftarrow$  arp[i] to arp[i + 1] do
18:      for bc  $\leftarrow$  brp[A.c[ac]] to brp[A.c[ac] + 1] do
19:        C.v[r][A.c[bc]] += A.v[ac] * B.v[bc];
20:      end for
21:    end for
22:  end for
23: end procedure

```

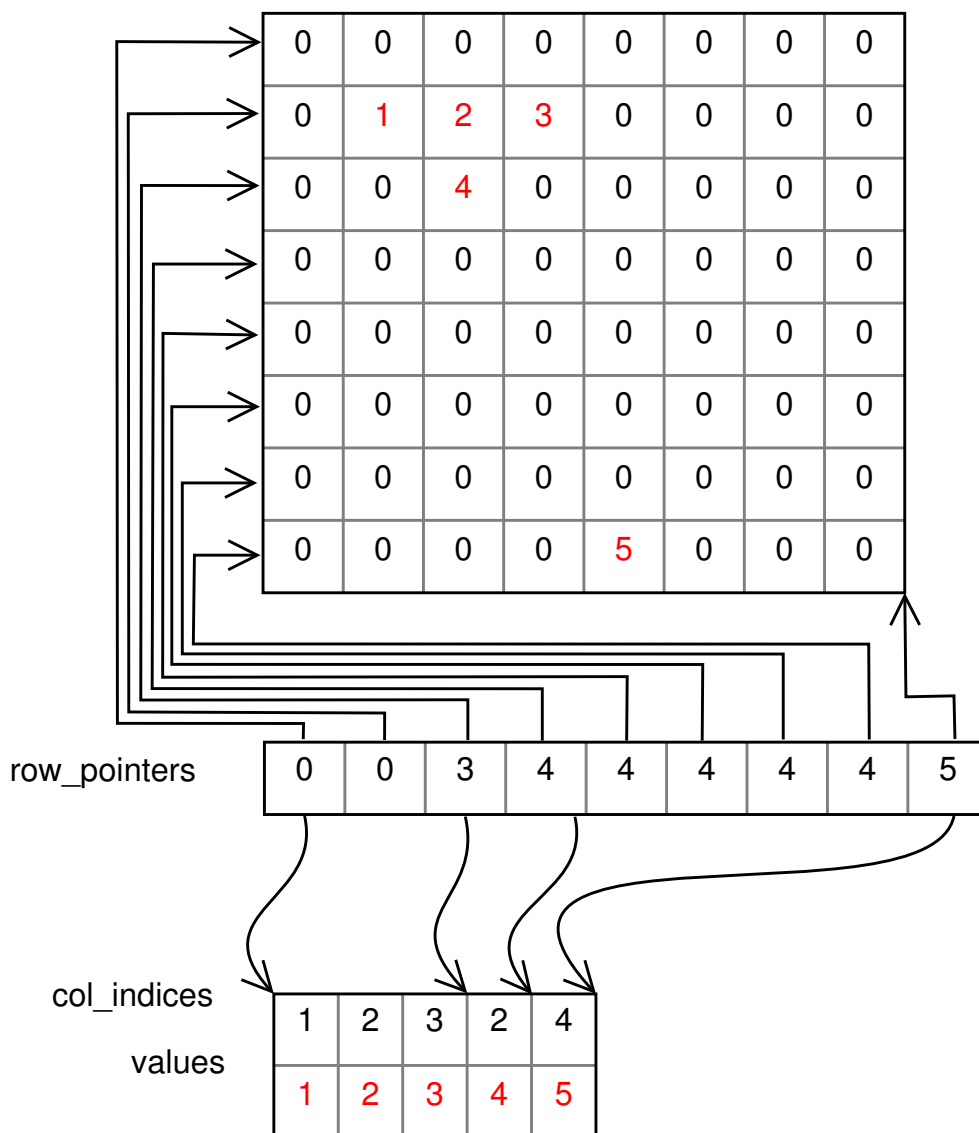
V části s násobením již pole s y souřadnicemi nepotřebujeme. Lepší formát uložení řídkých matic pro násobení by byl takový, který namísto pole s y souřadnicemi obsahuje předpočítané začátky a konce řádků. Takovým formátem je CSR.

3.2 CSR - Compressed sparse row

Problém efektivnosti formátu COO pro větší množství prvků řeší formát CSR, česky komprimované řídké řádky. Formát CSR obsahuje pole *row_pointers*, které ukládá informace o tom, kolik se v daném řádku nachází prvků, tedy

3. FORMÁTY ULOŽENÍ ŘÍDKÝCH MATIC

přesně to, co jsme si přespočítali v algoritmu 7. K poli s hodnotami je další pole *col_indicies*, přiřazující ke každému prvku informaci o sloupci.



Obrázek 3.1: Matice uložená ve formátu CSR

Jak je vidět z ilustrace 3.1, řádek s více prvky je uložen efektivně. Díky prázdným řádkům se nezdá pole *row_pointers* rozumně využité.

Při násobení matice CSR s vektorem potřebujeme o jeden for cyklus více než v případě násobení matice COO s vektorem. Důvodem je ztráta informace o řádku prvku.

Algorithm 8 Násobení matice CSR s vektorem

```

1: procedure CSR-MVM(CSR,V,C)
2:   for  $i \leftarrow 0$  to  $\text{CSR.h}$  do
3:     for  $ci \leftarrow \text{CSR.rp}[i]$  to  $\text{CSR.rp}[i + 1]$  do
4:        $C.v[r] += \text{CSR.v}[ci] * V.v[A.ci[ci]];$ 
5:     end for
6:   end for
7: end procedure

```

Násobení dvou CSR matic je stejné jak v případě násobení dvou COO matic 3.1. Jediný rozdíl je, že předpočítané začátky a konce řádků jsou součástí formátu.

Algorithm 9 Násobení dvou CSR matic

```

1: procedure CSR-MMM(A,B,C)
2:   for  $i \leftarrow 0$  to  $A.height$  do ▷ násobení
3:     for  $ac \leftarrow A.rp[i]$  to  $A.rp[i + 1]$  do
4:       for  $bc \leftarrow B.rp[A.ci[ac]]$  to  $B.rp[A.ci[ac] + 1]$  do
5:          $C.v[r][B.ci[bc]] += A.v[ac] * B.v[bc];$ 
6:       end for
7:     end for
8:   end for
9: end procedure

```

Existuje varianta tohoto formátu, nazvaná CSC - compressed sparse columns, která místo ukládání řádku ukládá sloupce.

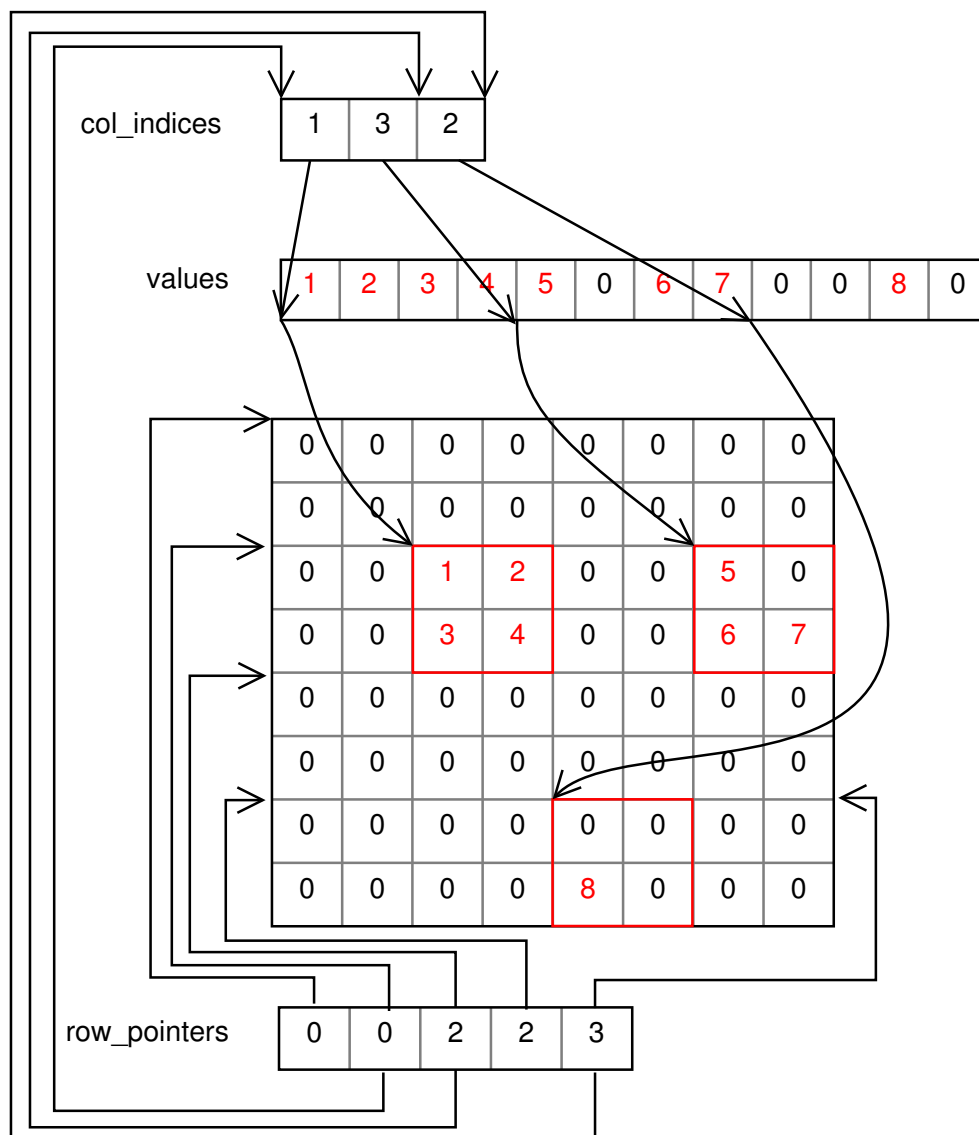
3.3 BSR - Block Sparse Row

Jako formát CSR využívá uložení prvků v řádku, formát BSR ještě navíc detekuje a ukládá prvky v blocích.

Protože při násobení matic násobíme každý prvek dvakrát, bylo by dobré tyto dvě operace provést co nejdříve, abychom při druhém znovunačtení prvku mohli sáhnout pro prvek do cache. Pokud jsou prvky procházené po menších blocích, dostaneme se k prvku podruhé dříve, než jej z cache přemaže jiný prvek.

Matici A ve formátu BSR ukládáme, velice podobně jako u formátu CSR, pomocí tří polí. Je potřeba i jedna proměnná, která uchovává velikost bloku. Tuto proměnnou nazveme *block_size*. Matici rozdělíme do bloků Pole *col_indices* označuje sloupec, ve kterém se blok nachází. Sloupcem rozumíme $A.width/A.block_size$.

3. FORMÁTY ULOŽENÍ ŘÍDKÝCH MATIC



Obrázek 3.2: Matice uložená ve formátu BSR

Uložení matice ve formátu BSR ilustruje obrázek 3.4. Pole `row_pointers` obsahuje informace o tom, na kterém řádku je kolik bloků. Na řádku i je $row_pointers[i + 1] - row_pointers[i]$ bloků. Ve kterém sloupci se blok prvků nachází udává pole `col_indices`. První blok z řádku i je ve sloupci $col_indices[row_pointers[i]]$ a poslední blok je ve sloupci $col_indices[row_pointers[i + 1]]$. Pole `values` obsahuje prvky v blocích, včetně nulových prvků.

Pokud vezmeme algoritmus násobení dvou CSR matic respektive CSR matice s vektorem, jen místo prvků násobíme bloky, vznikne nám algoritmus pro

násobení dvou BSR matic respektive BSR matice s vektorem. Za povšimnutí stojí větší počet for cyklů s menším rozsahem iterace než u CSR. To nám v nejvnitřnějších cyklech dovoluje lépe využívat cache. Jedná se tedy o přístup podobný optimalizační technice loop tiling.

Algorithm 10 Násobení matice BSR s vektorem

```

1: procedure BSR-MVM(A,B,C)
2:   bs  $\leftarrow$  A.block_size;
3:   for i  $\leftarrow$  0 to A.height / bs do
4:     for ac  $\leftarrow$  A.rp[i] to A.rp[i + 1] do
5:       for l  $\leftarrow$  0 to A.bs do ▷ násobení bloku
6:         for m  $\leftarrow$  0 to bs do
7:           C.v[(i * bs) + l] += A.v[ac * (bs * bs) + (l *
            bs) + m] * B.v[A.ci[ac] * bs + m];
8:         end for
9:       end for
10:    end for
11:  end for
12: end procedure

```

Algorithm 11 Násobení dvou BSR matic

```

1: procedure BSR-MMM(A,B,C)
2:   bs  $\leftarrow$  A.block_size;
3:   for i  $\leftarrow$  0 to A.height / bs do
4:     for ac  $\leftarrow$  A.rp[i] to A.rp[i+1] do
5:       for bc  $\leftarrow$  B.rp[A.ci[ac]] to B.rp[A.ci[ac]+1] do
6:         for l  $\leftarrow$  0 to A.bs do ▷ násobení bloku
7:           for m  $\leftarrow$  0 to bs do
8:             for n  $\leftarrow$  0 to bs do
9:               C.v[(i * bs) + l][(B.ci[bc] * bs) + m]
            += A.v[ac * (bs * bs) + (l * bs) + n] * B.v[bc * (bs * bs) +
            (n * bs) + m];
10:            end for
11:          end for
12:        end for
13:      end for
14:    end for
15:  end for
16: end procedure

```

http://docs.scipy.org/doc/scipy-0.13.0/reference/generated/scipy.sparse.bsr_matrix.html
https://software.intel.com/sites/products/documentation/doclib/mkl_sa/11/mklman/GUID-9FCEB1C4-670D-4738-81D2-F378013412B0.htm

3.4 Quadtree

Předchozí popsáné formáty uložení řídkých matic jsou velmi přímočaré. Neumožňují rekurzivní přístup, který je pro velké matice vhodnější. Tento problém řeší formát Quadtree [17][1]. Jedná se o matici uloženou v 4-árním stromě.

Tento formát dělí matici na čtvrtiny do té doby, než se dosáhne velikosti podmatice sm_size . Pokud je celá čtvrtina prázdná, je uzel označen jako prázdný, označen E . Pokud obsahuje nějaké prvky, je list označen jako hustý, D . Vnitřní uzly jsou označeny jako smíšené, tedy M .

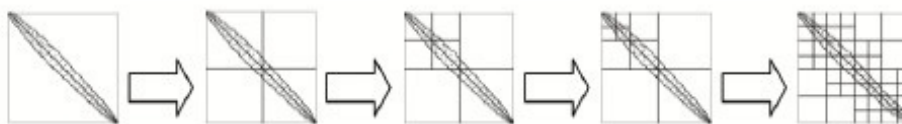


Figure 1. Recursive division on matrix *BCSSTK15*(Model of an offshore platform).

Obrázek 3.3: Rozdělení matice

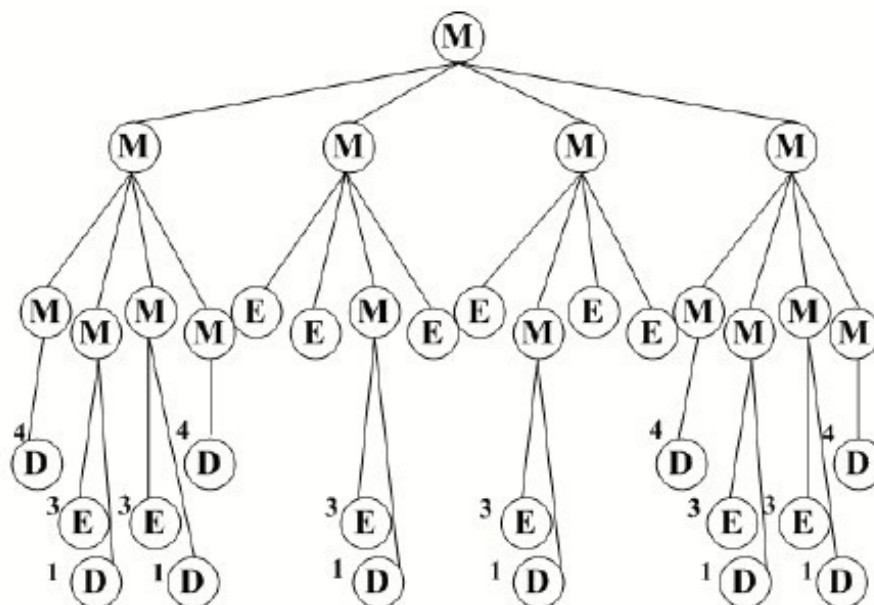


Figure 2. Abstract the divided matrix in Figure 1 into a quadtree based storage format.

Obrázek 3.4: Strom matice uložené ve formátu Quadtree

Algoritmy pro práci s formátem Quadtree budou ukázány v kapitole o obecnějším formátě 3.5.

3.5 ?

TODO: tady jsem chtel spocictat kdy se vyplati mit ridkou matici, ale lepsi bude tabulka. Pokud například uložíme matici o rozměrech 100x100 v dvojité přestnosti, bude zabírat $M \times N \times \text{sizeof}(\text{double}) = 100 \times 100 \times 8 = 80000\text{B} = 80\text{kB}$. Pokud zvolíme řídský formát matice, kde ke každému elementu uložíme i jeho x a y souřadnici, tak do 80kB uložíme $80000 / (\text{sizeof}(\text{int}) + \text{sizeof}(\text{int}) + \text{sizeof}(\text{double})) = 80000 / 16 = 5000$ elementů. Pokud matice obsahuje více jak 50 % nulových elementů, vyplatí se nám ji uložit do řídkého formátu.

Modifikace formátu quadtree

Protože formát Quadtree je 4-ární strom, jeho výška při reprezentaci matice o velikosti n a při velikosti podmatice sm_size je:

$$\left\lceil \log_4 \frac{n^2}{sm_size^2} \right\rceil \quad (4.1)$$

Například pro matici o velikosti $n = 16384$ s velikostí bloku $sm_size = 128$ je výška stromu 7.

4.1 KAT - k-ary tree matrix

V této práci navrhujeme místo 4-árního stromu obecný k -ární strom. Výška stromu se tím sníží. Pro předchozí příklad by tedy pro 32-ární strom byla výška pouze 3. Tento formát nazveme **k-ary tree matrix** se zkratkou KAT. Pro přehlednost nebudeme uvádět k , ale $KAT.n = \sqrt{k}$. Formát Quadtree můžeme prohlásit za matici KAT s $KAT.n = 2$.

Výška stromu pro KAT matici označíme jako `KAT.height` a vypočítáme ji jako výšku quadtree, jen s parametrem k :

$$KAT.height = \left\lceil \log_k \frac{n^2}{sm_size^2} \right\rceil \quad (4.2)$$

Pokud to bude z kontextu jasné, budeme výšku KAT stromu značit pouze `height`.

4.2 Typy listů

Formát Quadtree definovaný v (cituj) označí všechny nenulové listy jako husté a ukládá je v COO formátu. KAT matice obsahuje proměnnou `KAT.dense_threshold`,

kteřá udává maximální počet prvků, aby se s listem pracovalo některým z řídkých formátů, tedy COO, CSR, BSR. Při překročení této hranice je list uložen ve formátu husté matice, tedy bude obsahovat i nulové prvky.

4.3 Tvoření stromu

Pro každý prvek procházíme strom a hledáme správný list. Protože výška stromu je daná třemi parametry, tedy velikostí matice n , velikostí podmatice sm_size a počtu větvení uzlu k , čelíme problému, nejefektivnější využití bude, pokud je n beze zbytku dělitelné $k * sm_size$. Pokud toto neplatí, rodiče listů budou mít část synů nevyužitých i při uložení husté matice.

Algorithm 12 Vyhledání listu pro KAT matici

```

1: procedure KAT-GETNODE(KAT, y, x)
2:   tmpNode  $\leftarrow$  KAT.root;
3:   blockY  $\leftarrow$  0; ▷ výřez matice
4:   blockX  $\leftarrow$  0;
5:   blockS  $\leftarrow$  KAT.sm_size;
6:   ▷ až do předposledního vnitřního uzlu traverzujeme podle velikosti
   KAT.n
7:   while blockS > (KAT.n * KAT.sm_size) do
8:     nodeY  $\leftarrow$  (y - blockY) / (blockS / KAT.n);
9:     nodeX  $\leftarrow$  (x - blockX) / (blockS / KAT.n);
10:    tmpNode  $\leftarrow$  tmpNode.childs[nodeY][nodeX];
11:    blockY += nodeY * (blockS / KAT.n);
12:    blockX += nodeX * (blockS / KAT.n);
13:    blockS /= KAT.n;
14:  end while
15:  ▷ do posledního vnitřního uzlu traverzujeme podle velikosti
   KAT.sm_size
16:  nodeY  $\leftarrow$  (y - blockY) / KAT.sm_size;
17:  nodeX  $\leftarrow$  (x - blockX) / KAT.sm_size;
18:  tmpNode  $\leftarrow$  tmpNode.childs[nodeY][nodeX];
19:  ▷ nyní je tmpNode list
20:  tmpNode.x  $\leftarrow$   $\lfloor y / KAT.sm\_size \rfloor * KAT.sm\_size$  ;
21:  tmpNode.y  $\leftarrow$   $\lfloor x / KAT.sm\_size \rfloor * KAT.sm\_size$  ;
22:  return tmpNode;
23: end procedure

```

4.4 Násobení

Pro násobení budeme používat algoritmus rekurzivního násobení popsaného v 2.4. Popsaný algormus dělí matice na čtvrtiny, jde tedy aplikovat na for-

mát Quadtree. Při násobení matice uložené v k -árním stromě budeme násobit matici podmatic o velikosti k :

Algorithm 13 Násobení matice KAT s vektorem

```
1: procedure KAT-MVM(KAT, KAT_node, VB, VC)
2:   for  $i \leftarrow 0$  to KAT.n do
3:     for  $j \leftarrow 0$  to KAT.n do
4:       if KAT_node.chlds[i][j]  $\neq$  NIL then
5:         if KAT_node.chlds[i][j].type = "submatrix" then
6:           multiplyNode(KAT_node.chlds[i][j], VB, VC);
7:           continue;
8:         end if
9:         if KAT_node.chlds[i][j].type = "inner" then
10:          KAT-MVM(KAT, KAT_node.chlds[i][j], VB, VC);
11:          continue;
12:        end if
13:      end if
14:    end for
15:  end for
16: end procedure
```

Algorithm 14 Násobení dvou KAT matic

```
1: procedure KAT-MMM(KATa, KATa_node, KATb, KATb_node, C)
2:   for i  $\leftarrow$  0 to KAT.n do
3:     for j  $\leftarrow$  0 to KAT.n do
4:       for k  $\leftarrow$  0 to KAT.n do
5:         if KATa_node.chilids[i][k]  $\neq$  NIL and
KATb_node.chilids[k][j]  $\neq$  NIL then
6:           if KAT_node.chilids[i][j].type = "submatrix" then
7:             multiplyNode(KAT_node.chilids[i][j],
KAT_node.chilids[i][j], VC);
8:             coninue;
9:           end if
10:          if KAT_node.chilids[i][k].type = "inner" then
11:            KAT-MMM(KATa, KATa_node.chilids[i][k],
KATb, KATb_node.chilids[k][j] C);
12:            coninue;
13:          end if
14:        end if
15:      end for
16:    end for
17:  end for
18: end procedure
```

Přesnější asymptotická složitost násobení matic v KAT formátu je vyšší než u předchozích formátů, protože je potřeba připočítat průchod stromem. Pokud převedeme hustou matici do formátu KAT se složitostí násobení dvou listů $\mathcal{O}(sm_size^3)$, bude asyptotická složitost násobení dvou KAT matic $\mathcal{O}((\frac{n^2}{sm_size} * (height + sm_size^3)))$.

Paměťová složitost celé KAT matice závisí na typu a hustotě uložení dat. Uvedeme zde pouze paměťovou složitost stromu. Velikost uzlu je pole k odkazů na syny. Počet vnitřních uzlů spočítáme pomocí geometrické posloupnosti. Paměťová složitost stromu KAT matice tedy je $\mathcal{O}(\frac{k^{height-1}-1}{k-1} * k)$

Analýza a návrh

V této kapitole představíme některé známé systémy, které umí pracovat s řídkými maticemi. Popíšeme možnosti implementace a zvolené řešení.

Pokud potřebujeme rychle vynásobit dvě malé matice, můžeme použít obecný nástroj se kterým se snadno pracuje. Čím je ale nástroj obecnější, tím spíš bude pomalejší. Maximální výkonnosti tedy doáhneme, pokud co nejvíce využijeme hardware a náš program bude řešit konkrétní úkol.

5.1 ATLAS

ATLAS [20] je v překladu zkratkou pro automatické generování vylazeného kódu pro software řešící úlohy z lineární algebry. Je tak dosaženo pomocí jak obecných optimalizací kódu, tak optimalizací pro konkrétní architektury.

Podobných projektů je více, konkrétně pro násobení matice s vektorem je to například Sparsity [3], nebo pro násobení matice s maticí je to například PHiPAC [21][4].

5.1.1 SciPy.sparse

SciPy je knihovna skriptovacího jazyka Python [13]. Obsahuje modul pro základní práci s řídkými maticemi, nazvaný sparse [8]. Samotné výpočty nad řídkými maticemi jsou v této knihovně z důvodu rychlosti napsány v jazyce C++.

5.1.2 Wolfram Mathematica

Wolfram Mathematica [25] je mocný výpočetní software. Práce v tomto software je snadná, interaktivní a přitom dokáže efektivně rozdělovat práci nejen na více procesorových jader, ale taky využít i grafické karty. Nechybí tedy ani implementace operací pro řídké matice.

V této práci pomocí Wolfram Mathematicy vizualizujeme řídké matice z formátu `.mtx`, který bude popsán v 6.5. Mathematica umí pracovat i s maticemi v souborech `.mtx.gz`, tedy komprimovanými soubory. Příkaz pro importování řídké matice a její vizualizaci je `Import["/var/tmp/matrix.mtx", "Graphics"]`, následné uložení matice lze provést například příkazem `Export["/var/tmp/matrix.pdf", %]` [26].

5.1.3 Boost

Pro práci s řídkými maticemi v jazyce C++ je možné použít knihovnu uBLAS[15] ze sady knihoven Boost[2]. Knihovna uBLAS obsahuje algoritmy pro řešení základních úkolů z lineární algebry. Protože je kód napsaný pomocí C++ šablon, je vygenerovaný kód výkonný.

5.2 Možnosti řešení

Jedna z možných variant pro porovnání všech zvolených formátů byla doimplementovat formát Quadtree, respektive KAT do knihovny SciPy.sparse. Takový program by byl ale příliš komplexní a nepřímý.

Další možnost byla pokračovat s semestrální prací z předmětu Efektivní implementace algoritmů s tématem násobení matic ve formátu CSR.

5.3 Zvolené řešení

Protože se v této práci zabýváme pouze vlivem uložení řídké matice pro operaci násobení, rozhodli jsme se vytvořit program jen pro tuto operaci. Obecná knihovna pro práci s řídkými maticemi, jakým například SciPy.sparse je, nemůže využít některých vlastností matic při jejich násobení. Hlavně zacházení s násobenými maticemi jako s konstantami.

Navážeme tedy na semestrální práci. Vytvoříme více druhů matic a pro každou implementujeme operaci násobení s maticí a násobení s vektorem.

Realizace

6.1 Prostředí

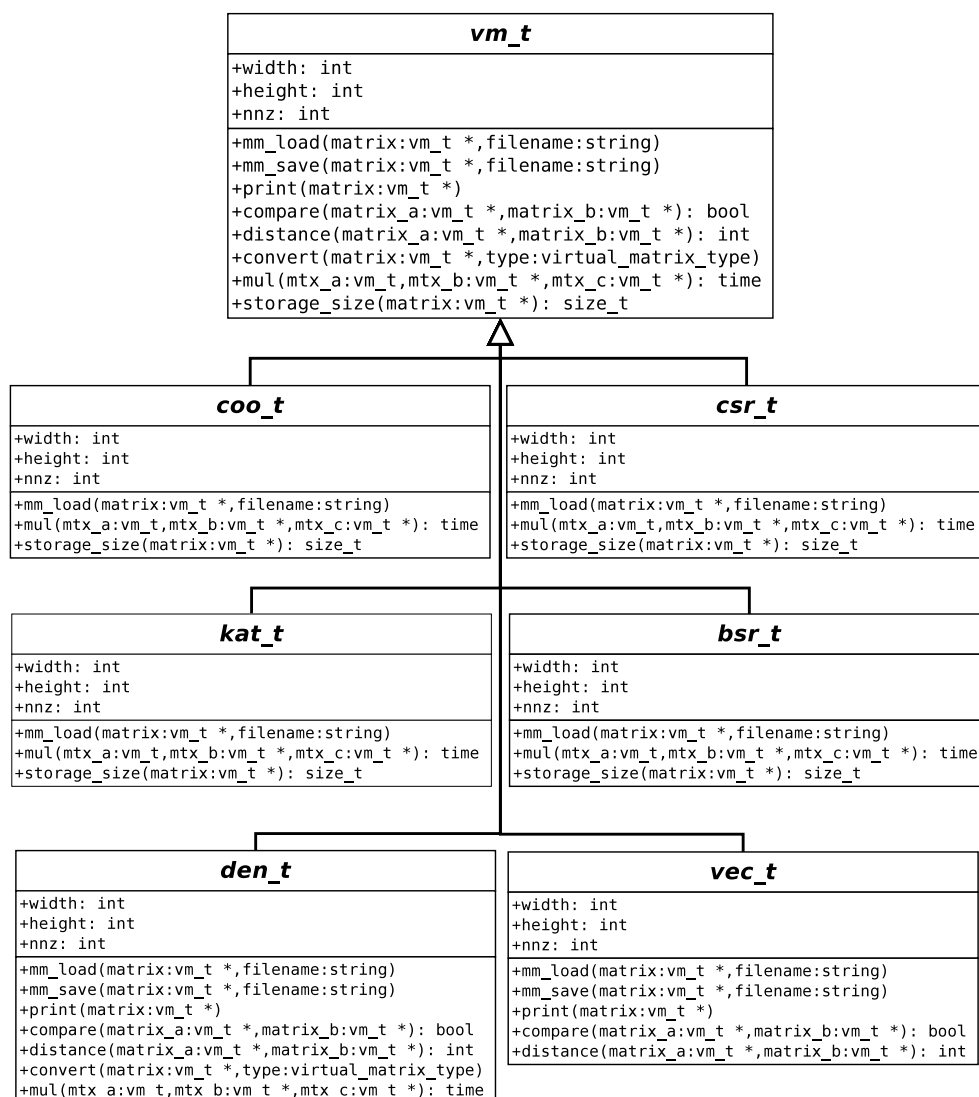
Popsané algoritmy jsme implementovali v jazyce C99. Implementace probíhala v operačním systému Ubuntu, v IDE Eclipse CDT. Zdrojový kód byl kompilován pomocí překladače GNU C, s optimalizačním přepínačem `-Ofast`.

K lazení chyb pro práci s pamětí jsme použili nástroj Valgrind s přepínači `-leak-check=full`. Běžící program jsme krokovali pomocí nástroje GNU Debugger. Zdrojový kód pro lazení chyb byl kompilován s přepínači `-Wall -pedantic -Og -ggdb`.

6.2 Design implementace

Popsané algoritmy byly implementovány v programovacím jazyce C99.

Protože matice mají některé vlastnosti stejné a lze s podobně pracovat, byl zvolen jednoduchý objektově orientovaný model [16]. Nadřazeným objektem je virtuální matice vm_t , obsahující virtuální tabulku funkcí.



Obrázek 6.1: UML diagram tříd programu

Výsledný program načte dvě matice v určitém formátu a vynásobí je. Pomocí přepínačů lze zobrazit, nebo uložit výslednou matici, popřípadě vypsát některé údaje o načtených maticích.

6.3 Implementace KAT

U formátů COO, CSR, BSR je implementace přímočará podle pseudokódů. U implementace KAT máme více možností, proto zde popíšeme naši implementaci.

Jeden z důležitých parametrů je k , tedy maximální počet synů vnitřích uzlů. V naší implementaci je tento parametr uložen v konstantě `KAT.n`, pro připomenutí $KAT.n = \sqrt{k}$. Překladač poté cykly, kde iterujeme do této konstanty, rozbalí. Překladači i explicitně zdělujeme, ať cykly rozbalí přes atribut `__attribute__((optimize("unroll-loops")))`.

V bakalářské práci Rozšíření implementace formátu kvadrantového stromu od Tomáše Karabely [CITACE] je Quadtree implementován jako strom, jehož listy tvoří virtuální matice podobným těm v naší práci. Protože jeho formát byl určený pro algoritmus LU rozklad, jeho virtuální matice musely umět přijímat i další prvky. Protože v naší práci se s formáty uložení řádké matice zachází jako s konstantami, rozhodli jsme se hodnoty prvků a informace v polích `row_pointers` a `col_indices` uložit mimo listy stromu. V listech se nachází ukazatel do velkého pole na příslušné místo pro daný list. Ušetříme tak práci knihovně `libc` s mnohonásobným volání funkce `malloc`.

Protože dovolujeme dva druhy listů, tedy hustý a řídký ve formátu CSR, bylo potřeba implementovat následující algoritmy:

1. hustý list * hustý list
2. hustý list * CSR list
3. hustý list * vektor
4. CSR list * hustý list
5. CSR list * CSR list
6. CSR list * vektor

Protože tyto algoritmy jsou velice podobné již popsaným algoritmům, ukážeme zde pro představu násobení CSR listu s hustým listem.

Algorithm 15 Násobení hustého KAT listu s CSR listem

```

1: procedure KAT-MMM-DEN-CSR( $ka, kb, na, nb, c$ )           ▷  $ka, kb = KAT$ 
   matice;  $na, nb = listy$ ,  $c =$  hustá matice
2:   for  $i \leftarrow 0$  to  $ka.sm\_size$  do
3:     for  $j \leftarrow na.rp[i]$  to  $na.rp[i]$  do
4:       for  $k \leftarrow 0$  to  $ka.sm\_size$  do
5:          $C.v[na.y + i][nb.x + k] += na.v[j] *$ 
            $nb.v[ka.sm\_size * na.ci[j] + j];$ 
6:       end for
7:     end for
8:   end for
9: end procedure

```

6.4 Testování

Pro ověření správnosti algoritmů je potřeba testovací software. Strategie testování spočívá ve výběru testovacích matic, vynásobení v hustém formátu uložení, vynásobení v některém z řídkých formátů uložení a porovnání výsledků.

Algorithm 16 Testování

```
1: procedure TESTFORMATS(PairList, FormatList)
2:   for all pair  $\in$  PairList do
3:     denseA  $\leftarrow$  vm_load(pair.a, DENSE);
4:     denseB  $\leftarrow$  vm_load(pair.b, DENSE);
5:     denseC  $\leftarrow$  vm_mul(denseA, denseB, denseC);
6:     for all format  $\in$  FormatList do
7:       sparseA  $\leftarrow$  vm_load(pair.a, format);
8:       sparseB  $\leftarrow$  vm_load(pair.b, format);
9:       sparseC  $\leftarrow$  vm_mul(sparseA, sparseB, sparseC);
10:      if vm_compare(denseC, sparseC) = NOT_SAME then
11:        print("Error:", pair.a, pair.b, format);
12:      end if
13:    end for
14:  end for
15: end procedure
```

Pro přehled o nefungujících konfiguracích jsme použili testovací framework Cassation.

6.5 MatrixMarket

MatrixMarket [5] je internetová sada matic s vlastním formátem pro uložení řídkých matic `.mtx`. Tato sada obsahuje skoro pětset matic z různých oblastí. Obsahuje i generátory řídkých matic, jejichž výstupy jsou matice různých vlastností.

Pro náš program jsme zvolili právě formát `.mtx`. Podporujeme dva druhy tohoto formátu. Nesymetrický, s banerem `%%MatrixMarket matrix coordinate real symmetric` a symetrický s banerem `%%MatrixMarket matrix coordinate real general`.

6.5.1 Generátor řídkých matic

Generátory z MatrixMarketu běží v internetovém prohlížeči a v jazyce Java. Protože takto není jednoduché matice generovat ve skriptu, aby jsme při distribuci našeho programu nemuseli přikládat velké testovací matice, implementovali jsme jednoduchý generátor řídkých matic. Parametry předáváme pro-

gramu informace o výsledné matici a seznam objektů, tedy buď podmatic nebo diagonál, které se mají být do matice zahrnuty. Manuál ke generátoru je možné vypsat zavoláním `./tests/bin/matrix_generator -h`.

Algorithm 17 Generování řídkých matic

```

1: procedure SPARSEMATRIXGENERATOR(file, width, height, ItemList)
2:   MtxWrapper  $\leftarrow$  InitMtxWrapper();
3:   MtxWrapper.PositionVector  $\leftarrow$  InitVector();
4:   for all Item  $\in$  ItemList do
5:     MtxWrapper.addItem(Item.y, Item.x, Item.properties);
6:     if Item.type == Mirrored then
7:       MtxWrapper.addItem(Item.x, Item.y, Item.properties);
8:     end if
9:   end for
10:  MtxWrapper.PositionVector.sort();
11:  MtxWrapper.PositionVector.removeDuplicates();
12:  MtxWrapper.write(file);
13: end procedure

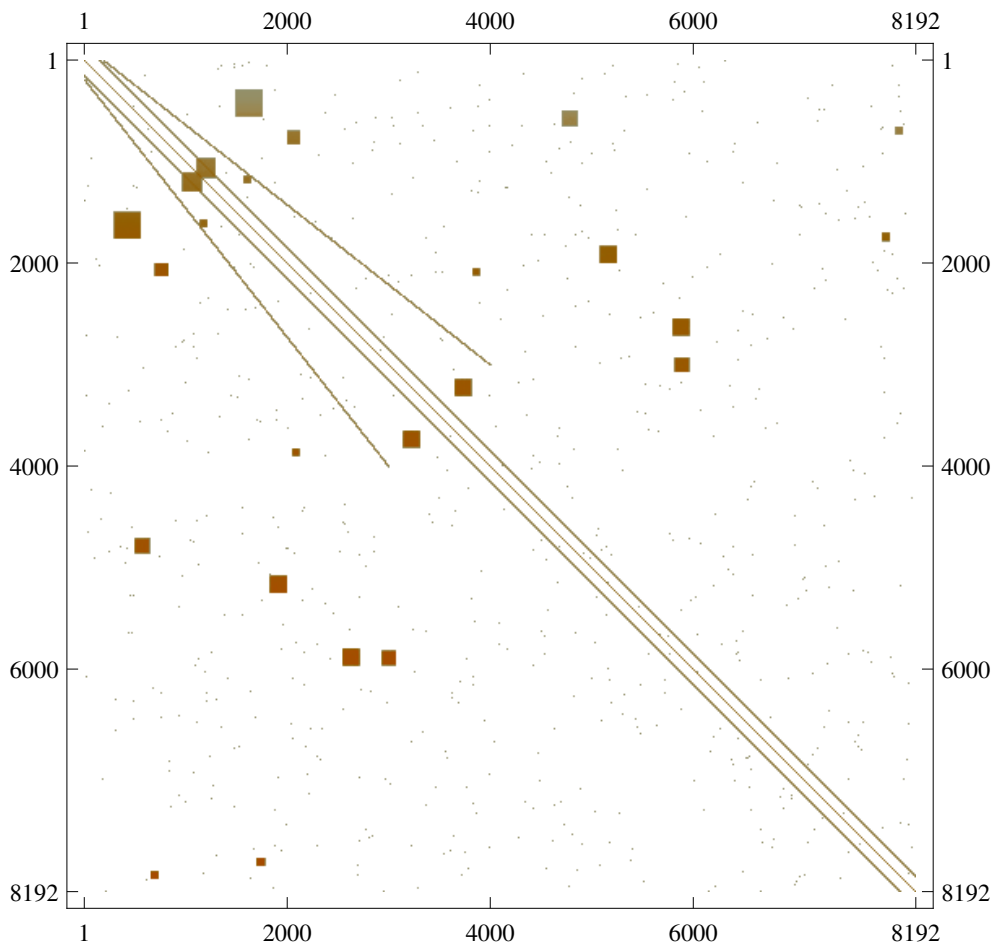
```

Generátor řídkých matic byl implementován v jednom souboru. Lze spouštět s následujícími parametry:

- `-c` matice bude obsahovat hlavní diagonálu
- `-H <celé číslo>` výška matice
- `-i <typ,a,b,c,d,...>` seznam objektů, které se do matice přidají
 - `diagonal,ay,ax,by,bx,sparsity` prvky v přímce od bodu `[ax,ay]` do bodu `[bx,by]` s řídkostí `sparsity`
 - `block,ay,ax,by,bx,sparsity` blok prvků v obdelníku ohraničeného body `[ax,ay]` a `[bx,by]` s řídkostí `sparsity`
- `-n <celé číslo>` velikost matice
- `-o <soubor>` cílový soubor (lze použít i `stdout`)
- `-s <desetinné číslo>` řídkost matice (`sparsity`)
- `-S <desetinné číslo>` startovací číslo
- `-W <celé číslo>` šířka matice
- `-h` zobraz nápovědu
- `-o <soubor>` cílový soubor (lze použít i `stdout`)

- -v vypisuj průběh generování (**verbose**)

```
./tests/bin/matrix_generator -n8192 -s0.00001 -imdiagonal,150,0,8192,8042,0.95,mdiagonal,2  
o/tmp/matrix2.mtx
```



Obrázek 6.2: Matice vygenerovaná generátorem

6.6 Optimalizace

TODO: popsat možnosti optimalizace

6.7 Měření

TODO: popsat jak to budu měřit, tedy čas z omp a cachegrind/callgrind

Závěr

Zaver.

Literatura

- [1] *A Quadtree Based Storage Format and Effective Multiplication Algorithm for Sparse Matrix [online]*. [cit. 2014-04-27]. Dostupné z: <http://quardtree.sourceforge.net/>
- [2] Beman Dawes, R. R., David Abrahams: Boost. 2007. Dostupné z: <http://www.boost.org/>
- [3] of California at Berkeley, U.: Sparsity. 2014. Dostupné z: <http://www.cs.berkeley.edu/~yelick/sparsity/>
- [4] Bilmes, J.; Asanović, K.; Demmel, J.; aj.: PHiPAC: A Portable, High-Performance, ANSI C Coding Methodology and its application to Matrix Multiply. LAPACK working note 111, University of Tennessee, 1996.
- [5] Boisvert, R. F.; Pozo, R.; Remington, K.; aj.: Matrix Market: A Web Resource for Test Matrix Collections. In *Proceedings of the IFIP TC2/WG2.5 Working Conference on Quality of Numerical Software: Assessment and Enhancement*, London, UK, UK: Chapman & Hall, Ltd., 1997, ISBN 0-412-80530-8, s. 125–137. Dostupné z: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=265834.265854>
- [6] Borsic, A.; Halter, R.; Wan, Y.; aj.: Sensitivity study and optimization of a 3D electric impedance tomography prostate probe. *Physiological Measurement*, ročník 30, č. 6, 2009: str. S1. Dostupné z: <http://stacks.iop.org/0967-3334/30/i=6/a=S01>
- [7] Cenk, M.; Hasan, M. A.: On the Arithmetic Complexity of Strassen-Like Matrix Multiplications. *IACR Cryptology ePrint Archive*, ročník 2013, 2013: str. 107.
- [8] community, T. S.: Sparse matrices (scipy.sparse). 2014. Dostupné z: <http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/sparse.html>

- [9] Coppersmith, D.; Winograd, S.: Matrix Multiplication via Arithmetic Progressions. *J. Symb. Comput.*, ročník 9, č. 3, 1990: s. 251–280.
- [10] Cormen, T. H.; Stein, C.; Rivest, R. L.; aj.: *Introduction to Algorithms*. McGraw-Hill Higher Education, druhé vydání, 2001, ISBN 0070131511.
- [11] Davis, T. A.; Hu, Y.: The University of Florida Sparse Matrix Collection. *ACM Trans. Math. Softw.*, ročník 38, č. 1, Prosinec 2011: s. 1:1–1:25, ISSN 0098-3500, doi:10.1145/2049662.2049663. Dostupné z: <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices>
- [12] El-Kurdi, Y.; Gross, W.; Giannacopoulos, D.: Sparse Matrix-Vector Multiplication for Finite Element Method Matrices on FPGAs. In *Field-Programmable Custom Computing Machines, 2006. FCCM '06. 14th Annual IEEE Symposium on*, April 2006, s. 293–294, doi:10.1109/FCCM.2006.65.
- [13] Foundation, P. S.: Python. 2014. Dostupné z: <https://www.python.org/>
- [14] Gates, A. Q.; Kreinovich, V.: Strassen's Algorithm Made (Somewhat) More Natural: A Pedagogical Remark. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science (EATCS)*, ročník 73, 2001: s. 142–145.
- [15] Joerg Walter, G. W. D. B., Mathias Koch: Basic Linear Algebra Library. 2010. Dostupné z: http://www.boost.org/doc/libs/1_55_0/libs/numeric/ublas/doc/index.htm
- [16] Schreiner, A.: *Objektorientierte Programmierung mit ANSI C*. Hanser, 1994, ISBN 9783446174269. Dostupné z: <http://books.google.cz/books?id=sgA2AAAACAAJ>
- [17] Šimeček, I.: Sparse Matrix Computations with Quadrees. In *Seminar on Numerical Analysis*, Liberec: Technical University, 2008, ISBN 978-80-7372-298-2, s. 122–124.
- [18] Stothers, A. J.: *On the Complexity of Matrix Multiplication*. diploma thesis, University of Edinburgh, 2010.
- [19] Strassen, V.: Gaussian Elimination is not Optimal. *Numerische Mathematik*, ročník 13, č. 4, Prosinec 1967: s. 354–355.
- [20] of Tennessee, U.: Automatically Tuned Linear Algebra Software. 2014. Dostupné z: <http://acts.nersc.gov/atlas/>
- [21] of Tennessee, U.: PHiPAC. 2014. Dostupné z: <http://www1.icsi.berkeley.edu/~bilmes/hipac/>

- [22] Tvrdík, P.; Šimeček, I.: A new diagonal blocking format and model of cache behavior for sparse matrices.
- [23] Williams, V. V.: Breaking the Coppersmith-Winograd barrier. 2011.
- [24] Williams, V. V.: Multiplying matrices faster than coppersmith-winograd. In *STOC*, editace H. J. Karloff; T. Pitassi, ACM, 2012, ISBN 978-1-4503-1245-5, s. 887–898.
- [25] Wolfram: Wolfram Mathematica 9. 2014. Dostupné z: <http://www.wolfram.com/mathematica/>
- [26] Wolfram: Wolfram Mathematica 9 Documentation Center: MTX. 2014. Dostupné z: <http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/format/MTX.html>
- [27] Yuster, R.; Zwick, U.: Fast sparse matrix multiplication. *ACM Transactions on Algorithms*, ročník 1, č. 1, 2005: s. 2–13.

Seznam použitých zkratk

COO Coordinate
BSR Block sparse row
CSC Column sparse column
CSR Column sparse row
KAT k-ary tree

Seznam obrázků

1.1	3D neorientovaný graf ve tvaru helikoptéry, jeho reprezentace v řídké matici a výsledek simulace	4
2.1	Strassen (TODO: převzato z wikipedie: předělat?)	11
2.2	Ukázka numerické stability Strassenova algoritmu	14
2.3	Matice orsirr_1 před vynásobením	16
2.4	Matice orsirr_1 po vynásobením sama se sebou	17
3.1	Matice uložená ve formátu CSR	22

3.2	Matice uložená ve formátu BSR	24
3.3	Rozdělení matice	26
3.4	Strom matice uložené ve formátu Quadtree	27
6.1	UML diagram tříd programu	36
6.2	Matice vygenerovaná generátorem	40

Seznam algoritmů

1	Násobení matic podle definice	7
2	Násobení transponovanou maticí	8
3	Násobení po řádcích	9
4	Rekurzivní násobení	9
5	Strassenův algoritmus	12
6	Násobení matice COO s vektorem	20
7	Násobení dvou COO matic	21
8	Násobení matice CSR s vektorem	23
9	Násobení dvou CSR matic	23
10	Násobení matice BSR s vektorem	25
11	Násobení dvou BSR matic	25
12	Vyhledání listu pro KAT matici	30
13	Násobení matice KAT s vektorem	31
14	Násobení dvou KAT matic	32
15	Násobení hustého KAT listu s CSR listem	37
16	Testování	38
17	Generování řídkých matic	39
*		

Obsah přiloženého CD

	readme.txt.....	stručný popis obsahu CD
	exe	adresář se spustitelnou formou implementace
	src	
	impl.....	zdrojové kódy implementace
	thesis	zdrojová forma práce ve formátu L ^A T _E X
	text	text práce
	thesis.pdf	text práce ve formátu PDF
	thesis.ps	text práce ve formátu PS