# Teoremi

Agostino Cesarano

January 2024

# Part II
# Funzioni continue

## 1 Permanenza del segno

Sia $f(x)$ una funzione, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $f$ è continua in $x_0$, e se $f(x_0)$ è diverso da zero (e quindi ha un segno), allora la funzione mantiene lo stesso segno di $f(x_0)$ in tutto un intorno di $x_0$.

In altre parole, se il limite di una funzione in un punto è positivo, allora la funzione sarà positiva in un intorno di quel punto. Analogamente, se il limite è negativo, la funzione sarà negativa in un intorno del punto.

**Attenzione**

È importante notare che questo teorema si applica solo quando il limite della funzione è diverso da zero. Se il limite è zero, la funzione può assumere valori sia positivi che negativi in un intorno del punto.

## 2 Teorema dell'esistenza degli zeri (Teorema di Bolzano)

Sia $f(x)$ una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$, e supponiamo che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segni opposti, cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste almeno un numero $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.
*Metodo di bisezione* Possiamo supporre che $f(a) < 0$ e che $f(b) > 0$ abbiamo un intervallo $I_0 := [a, b]$, e troviamo il punto medio quindi

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Se f(c) è maggiore di zero $f(c) > 0$ allora la funzione ha segno discorde rispetto a $f(a)$, quindi prendo in considerazione l'intervallo $[a, c]$.

$$[a_1, b_1] = [a, c]$$

Troviamo il nuovo punto medio

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

e ripetiamo il procedimento.

Se $f(c) < 0$ allora prendo in considerazione l'intervallo $[c, b]$ poi cerco il punto medio e ripeto il procedimento.

Ripeto il procedimento finché non trovo un punto $c$ tale che $f(c) = 0$.
Ad ogni passo le **dimensioni dell'intervallo si dimezzano**

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$$

cosi abbiamo due successioni:

- $(a_n)\, n \in \mathbb{N}$ crescente e superiormente limitata da $b$.
- $(b_n) n \in \mathbb{N}$ decrescente e inferiormente limitata da $a$.

Essendo crescente e limitata, per il *teorema del limite delle successioni monotone*, la successione $a_n$ ha un limite finito che chiamo $x_0$.

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$$

La successione $b_n$ ha un limite che ricaviamo dall'espressione precedente:

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} a_n + \frac{b - a}{2^n} = x_0 + 0 = x_0$$

Quindi il valore di $f(x_0)$ è uguale al limite:

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(b_n) = 0$$

Sapendo che $f(a_n) \leq 0$ e $f(b_n) \geq 0$ possiamo conculdere che $f(x_0) = 0$.

# 3 (Primo)Teorema dellìesistenza dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. *Conseguenza del teorema dell'esistenza degli zeri*

# 4 Teorema di Weierstrass

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono in $[a, b]$ $x_1, x_2$ tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b]$$

I numeri $x_1, x_2$ sono detti rispettamente punti di minimo e massimo per $f(x)$ nell' intervallo $[a, b]$.

## 5 (Secondo)Teorema dell'esistenza dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo. *Conseguenza del teorema di Weierstrass*

## 6 Teorema di continuità delle funzioni inverse

Sia $f(x)$ una funzione strettamente monotona[1] in $[a, b]$. Se $f(x)$ è continua, anche la funzione $f^{-1}$ è continua.

[1]Strettamente crescente o Strettamente decrescente