Definizioni

Agostino Cesarano

January 2024

Part IV
Derivate

Si chiama **rapporto incrementale** di $f(x)$ nel punto x_0 il rapporto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Sia $f(x)$ definita nell'intervallo aperto (a, b) e sia $x \in (a, b)$. Si dice che $f(x)$ è

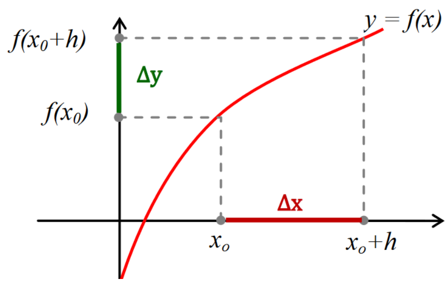


Figure 1: Rappresentazione grafica del rapporto incrementale

derivabile in x se esiste il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to x_0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

e si indica con $f'(x_0)$.
Sia $f(x)$ definita nell'intervallo aperto (a, b) e sia $x \in (a, b)$. Si dice che $f(x)$ è derivabile in x se esiste il limite del rapporto incrementale.

Se una funzione è derivabile in un punto, allora è anche continua in quel punto.

Si definisce derivata a sinistra di $f(x)$ nel punto x_0 il limite

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

e si indica con $f'_-(x_0)$. Si definisce derivata a destra di $f(x)$ nel punto x_0 il limite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

e si indica con $f'_+(x_0)$.

Significato geometrico della derivata
Sia $f(x)$ una funzione derivabile in x_0. Il valore della derivata $f'(x_0)$ rappresenta la pendenza della retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $P(x_0, f(x_0))$.

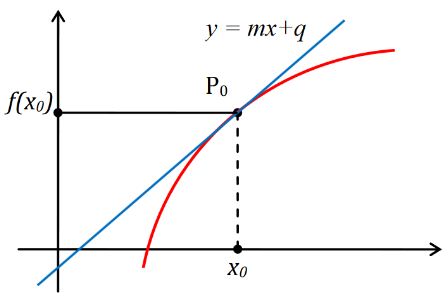


Figure 2: Rappresentazione grafica del significato geometrico della derivata

Operazioni con le derivate
Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili in x_0. Allora valgono le seguenti proprietà:

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
- $(f(g(x)))'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

Se $f(x)$ è una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo $[a,b]$. Se $f(x)$ è derivabile in $x \in (a,b)$ e se $f'(x) \neq 0$, allora $f^{-1}(x)$ è derivabile in $y = f(x)$ e la derivata vale

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

Esempio

$D\sqrt{y} = \frac{1}{D(x^2)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

Criterio di convessità

Supponiamo che $f(x)$ sia derivabile in $[a, b]$ e che ammetta derivata seconda in (a, b). Allora valgono le seguenti proprietà:

- Se $f''(x) \geq 0$ in (a, b), allora $f(x)$ è convessa in $[a, b]$.
- Se $f''(x) \leq 0$ in (a, b), allora $f(x)$ è concava in $[a, b]$.

Per convessa si intende che la funzione è sempre sopra la sua tangente.

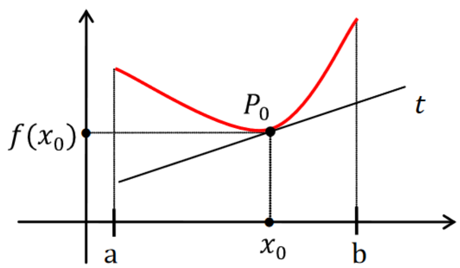


Figure 3: Rappresentazione grafica di una funzione convessa

Per concava si intende che la funzione è sempre sotto la sua tangente.

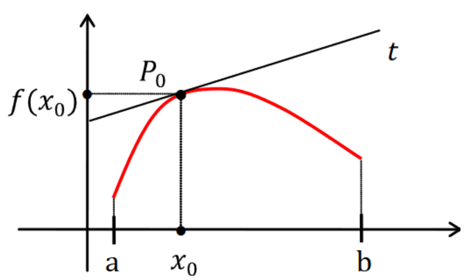


Figure 4: Rappresentazione grafica di una funzione concava

Punti di flesso

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $[a, b]$ e che ammetta derivata seconda in (a, b). Se $f''(x)$ cambia segno in $x_0 \in (a, b)$, allora $P(x_0, f(x_0))$ è un punto di flesso.

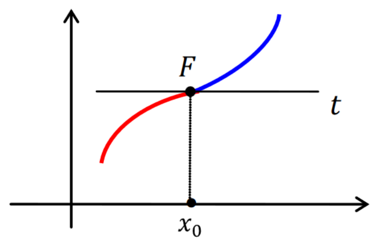


Figure 5: Rappresentazione grafica di un punto di flesso

Punti di non derivabilità

I punti di non derivabilità sono quei punti che appartengono al dominio della funzione ma che non appartengono al dominio della derivata prima.
Questi punti si classificano in:

- **Punti angolosi** Un punto x_0 è angoloso se esiste il limite destro e sinistro della derivata prima ma non sono uguali.

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

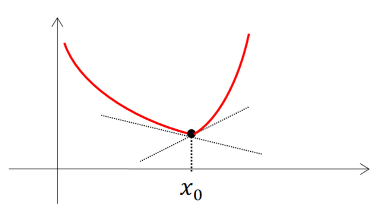


Figure 6: Rappresentazione grafica di un punto angoloso

Almeno uno tra i due limiti destro e sinistro deve essere finito.

- **Punti di cuspide** Un punto x_0 è di cuspide se esiste il limite destro e sinistro della derivata prima non sono finiti e di segno opposto.

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = +\infty$$

oppure

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty$$

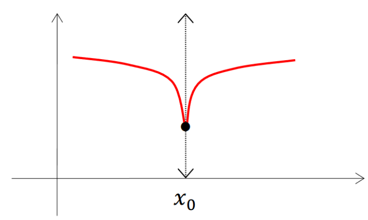


Figure 7: Rappresentazione grafica di un punto di cuspide

Nel primo caso si dice che il punto è di cuspide con concavità verso l'alto, nel secondo caso si dice che il punto è di cuspide con concavità verso il basso.

- **Punti di flesso a tangente verticale** Un punto x_0 è di flesso a tangente verticale se il limite destro e sinistro della derivata prima sono entrambi uguali a $+\infty$ oppure a $-\infty$

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \pm\infty$$

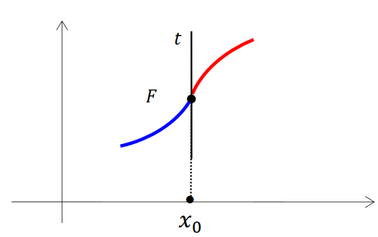
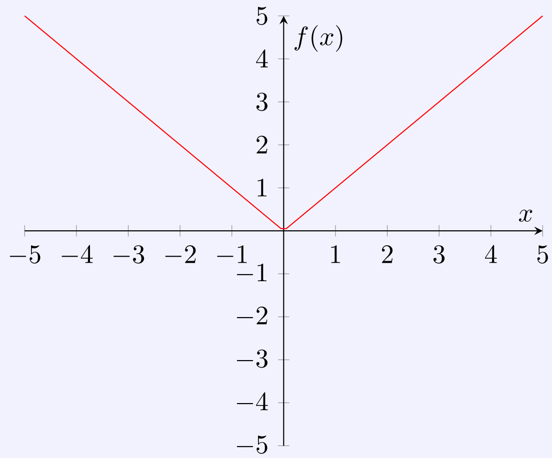


Figure 8: Rappresentazione grafica di un punto di flesso a tangente verticale

Esempio

Sia $f(x) = |x|$.



$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Rapporto incrementale per $x = 0$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$f'(|x|) = \frac{|x|}{x}$

Il dominio di $f'(x)$ è $x \neq 0$
Verifichiamo che tipo di punto è $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 \quad \wedge \quad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -1$$

Quindi $x = 0$ è un punto angoloso.

Punti stazionari

Un punto stazionario è un punto in cui $f'(x) = 0$. I punti stazionari di una funzione sono i punti di massimo o minimo relativo.

- Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$ allora $P(x_0, f(x_0))$ è un punto di minimo relativo.

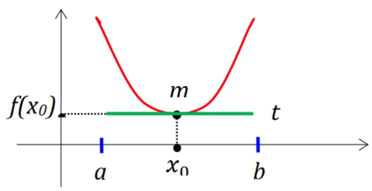


Figure 9: Rappresentazione grafica di un punto di minimo relativo

- Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ allora $P(x_0, f(x_0))$ è un punto di massimo relativo.

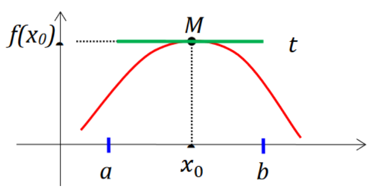


Figure 10: Rappresentazione grafica di un punto di massimo relativo

Derivate delle funzioni elementari

- $(c)' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$