

# Definizioni

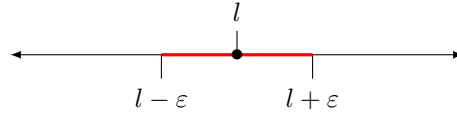
Agostino Cesarano

January 2024

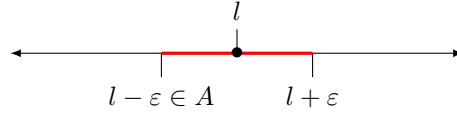
## Premesse

Si definisce intorno di ampiezza  $\varepsilon$  e centro  $l$  l'insieme  $I_\varepsilon(l) = \{x \in \mathbb{R} : |x-l| < \varepsilon\}$ .

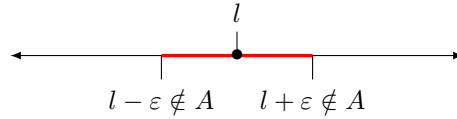
$$I_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$



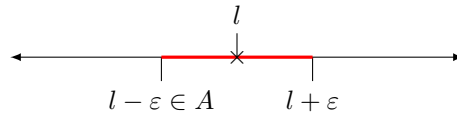
Si dice che  $l$  è un punto di accumulazione di  $A \subseteq \mathbb{R}$  se ogni intorno di  $l$  contiene almeno un punto di  $A$  diverso da  $l$ .



In un intorno di un punto di accumulazione di  $A$  ci sono infiniti punti di  $A$ . Si dice che  $l$  è un punto isolato di  $A \subseteq \mathbb{R}$  se  $l \in A$  e  $l$  non è un punto di accumulazione di  $A$ . Quindi, se  $l$  è un punto isolato di  $A$ , allora  $\exists \varepsilon > 0$  tale che  $I_\varepsilon(l) \cap A = \{l\}$ .



Si dice che  $l$  è un punto di accumulazione bucato di  $A \subseteq \mathbb{R}$  se  $l$  è un punto di accumulazione di  $A$  ma non è un punto di  $A$ .



## Part II

# Limiti

Sia  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e sia  $l$  un punto di accumulazione di  $A$ . Si dice che  $l$  è il limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $l$  se  $\forall \varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che  $0 < |x - l| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ .

$$\begin{cases} (x - l) < \delta \\ -(x - l) < \delta \end{cases} \quad (1)$$

$$l - \delta < x < l + \delta$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) - l < \varepsilon \\ -(f(x) - l) < \varepsilon \end{cases} \quad (2)$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Quindi preso un  $\delta$  qualsiasi tale che  $x$  è compreso tra  $l - \varepsilon$  e  $l + \varepsilon$ , esiste un  $\varepsilon$  tale che  $f(x)$  è compreso tra  $l - \varepsilon$  e  $l + \varepsilon$ .

## Relazione tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Le proprietà di convergenza di una successione  $a_n$  sono le stesse di una funzione  $f(x)$ .

## Limiti notevoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ +\infty & b > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \log x \quad \text{non esiste} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b \log x = 0 \quad (10)$$

Gerarchia degli infiniti in ordine crescente:

$$\log x, \quad x^b, \quad a^x, \quad x!, \quad x^x$$

Valgono quindi i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0 \quad (b > 0) \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \quad (a > 1, b > 0) \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x!} = 0 \quad (13)$$

Molto importante è il seguente limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (15)$$

Limiti notevoli per le successioni trigonometriche:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x \quad \text{non esiste} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x \quad \text{non esiste} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tan x \quad \text{non esiste} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arcsin x = -\frac{\pi}{2} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad (22)$$