Teoremi

Agostino Cesarano

January 2024

Part IV
Integrali

1 Teorema della media integrale

In una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a, b]$ esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(x_0) \cdot (b-a)$$

Dato che f è <u>*continua*</u>*, vale il Teorema di Weierstrass*, e possiamo scrivere che:

$$m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a, b]$$

Per le proprietà degli Integrali (in questo caso la **monotonia dell'integrale**) ci permettono di **integrare tutti i membri di questa catena di disuguaglianze mantenendo inalterati i versi delle disuguaglianze stesse**:

$$\int_a^b m\, dt \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b M\, dt$$

Il *primo e terzo integrale sono banali*

$$\int_a^b m\, dt = |mx|_a^b = mb - ma = m(b-a) \int_a^b M\, dt = |mx|_a^b = Mb - Ma = M(b-a)$$

e possiamo riscrivere la catena di disuguaglianze in questo modo

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq M(b-a)$$

e dividendo per $b-a$ che sarà sempre diverso da zero perché ($a \neq b$) si ha

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt \leq M$$

e siamo arrivati alla conclusione che il valore $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$ è compreso tra m e M, e dato che è continua assume in $[a,b]$ tutti i valori di m e M, secondo il (Secondo)Teorema dell'esistenza dei valori intermedi, quindi esiste sicuramente un $c \in [a,b]$ tale per cui

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$$