

# Definizioni

Agostino Cesarano

January 2024

## Part IV Derivate

Si chiama **rapporto incrementale** di  $f(x)$  nel punto  $x_0$  il rapporto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Sia  $f(x)$  definita nell'intervallo aperto  $(a, b)$  e sia  $x \in (a, b)$ . Si dice che  $f(x)$  è

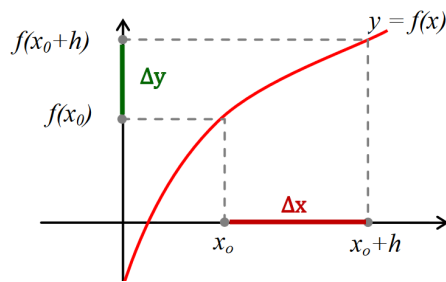


Figure 1: Rappresentazione grafica del rapporto incrementale

derivabile in  $x$  se esiste il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow x_0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

e si indica con  $f'(x_0)$ .

Sia  $f(x)$  definita nell'intervallo aperto  $(a, b)$  e sia  $x \in (a, b)$ . Si dice che  $f(x)$  è derivabile in  $x$  se esiste il limite del rapporto incrementale.

Se una funzione è derivabile in un punto, allora è anche continua in quel punto.

Si definisce derivata a sinistra di  $f(x)$  nel punto  $x_0$  il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e si indica con  $f'_-(x_0)$ . Si definisce derivata a destra di  $f(x)$  nel punto  $x_0$  il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e si indica con  $f'_+(x_0)$ .

### Significato geometrico della derivata

Sia  $f(x)$  una funzione derivabile in  $x_0$ . Il valore della derivata  $f'(x_0)$  rappresenta la pendenza della retta tangente alla curva  $y = f(x)$  nel punto  $P(x_0, f(x_0))$ .

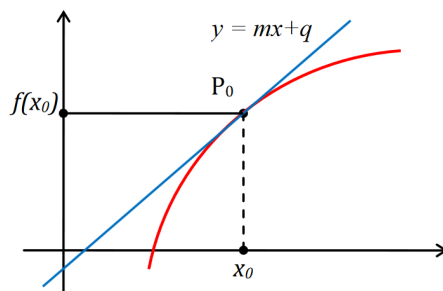


Figure 2: Rappresentazione grafica del significato geometrico della derivata

### Operazioni con le derivate

Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni derivabili in  $x_0$ . Allora valgono le seguenti proprietà:

- $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
- $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$
- $(f(g(x)))'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

Se  $f(x)$  è una funzione continua e strettamente monotona in un intervallo  $[a, b]$ .

Se  $f(x)$  è derivabile in  $x \in (a, b)$  e se  $f'(x) \neq 0$ , allora  $f^{-1}(x)$  è derivabile in  $y = f(x)$  e la derivata vale

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

### Esempio

$$D\sqrt{y} = \frac{1}{D(x^2)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

## Criterio di convessità

Supponiamo che  $f(x)$  sia derivabile in  $[a, b]$  e che ammetta derivata seconda in  $(a, b)$ . Allora valgono le seguenti proprietà:

- Se  $f''(x) \geq 0$  in  $(a, b)$ , allora  $f(x)$  è convessa in  $[a, b]$ .
- Se  $f''(x) \leq 0$  in  $(a, b)$ , allora  $f(x)$  è concava in  $[a, b]$ .

Per convessa si intende che la funzione è sempre sopra la sua tangente.

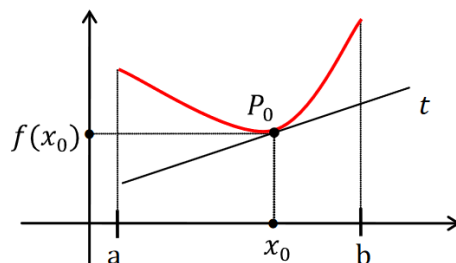


Figure 3: Rappresentazione grafica di una funzione convessa

Per concava si intende che la funzione è sempre sotto la sua tangente.

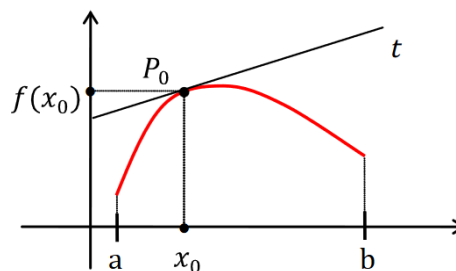


Figure 4: Rappresentazione grafica di una funzione concava

### Punti di flesso

Sia  $f(x)$  una funzione derivabile in  $[a, b]$  e che ammetta derivata seconda in  $(a, b)$ . Se  $f''(x)$  cambia segno in  $x_0 \in (a, b)$ , allora  $P(x_0, f(x_0))$  è un punto di flesso.

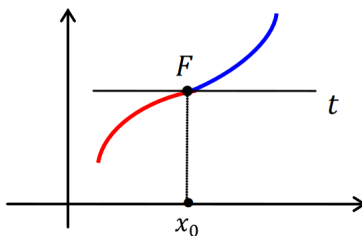


Figure 5: Rappresentazione grafica di un punto di flesso

### Punti di non derivabilità

I punti di non derivabilità sono quei punti che appartengono al dominio della funzione ma che non appartengono al dominio della derivata prima.

Questi punti si classificano in:

- **Punti angolosi** Un punto  $x_0$  è angoloso se esiste il limite destro e sinistro della derivata prima ma non sono uguali.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$$

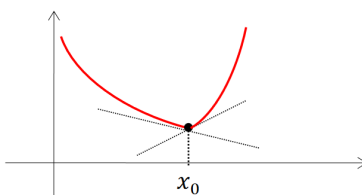


Figure 6: Rappresentazione grafica di un punto angoloso

Almeno una tra le due derivate destro e sinistro deve essere finita.

- **Punti di cuspidi** Un punto  $x_0$  è di cuspidi se esiste il limite destro e sinistro della derivata prima non sono finiti e di segno opposto.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = +\infty$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = -\infty$$

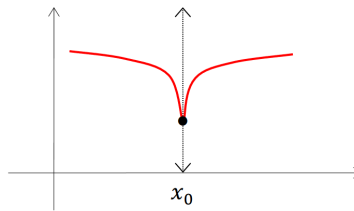


Figure 7: Rappresentazione grafica di un punto di cuspidi

Nel primo caso si dice che il punto è di cuspidi con concavità verso l'alto, nel secondo caso si dice che il punto è di cuspidi con concavità verso il basso.

- **Punti di flesso a tangente verticale** Un punto  $x_0$  è di flesso a tangente verticale se il limite destro e sinistro della derivata prima sono entrambi uguali a  $+\infty$  oppure a  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \pm\infty$$

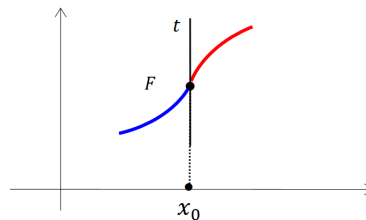
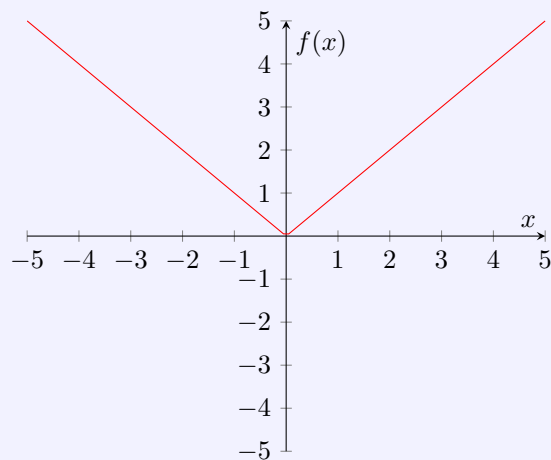


Figure 8: Rappresentazione grafica di un punto di flesso a tangente verticale

### Esempio

Sia  $f(x) = |x|$ .



$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Rapporto incrementale per  $x = 0$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$$f'(|x|) = \frac{|x|}{x}$$

Il dominio di  $f'(x)$  è  $x \neq 0$

Verifichiamo che tipo di punto è  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$$

Quindi  $x = 0$  è un punto angoloso.

## Punti stazionari

Un punto stazionario è un punto in cui  $f'(x) = 0$ . I punti stazionari di una funzione sono i punti di massimo o minimo relativo.

- Se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) > 0$  allora  $P(x_0, f(x_0))$  è un punto di minimo relativo.

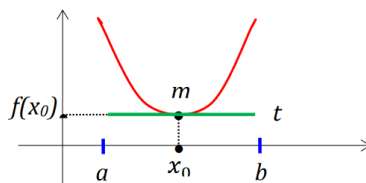


Figure 9: Rappresentazione grafica di un punto di minimo relativo

- Se  $f'(x_0) = 0$  e  $f''(x_0) < 0$  allora  $P(x_0, f(x_0))$  è un punto di massimo relativo.

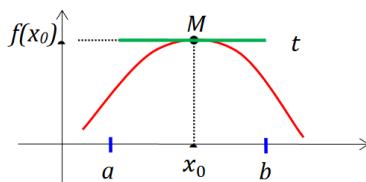


Figure 10: Rappresentazione grafica di un punto di massimo relativo

### Derivate delle funzioni elementari

- $(c)' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$