Definizioni

Agostino Cesarano

January 2024

Part V
Partizione di un intervallo

Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato. Si dice **partizione** di $[a, b]$ un insieme finito di punti $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tali che

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

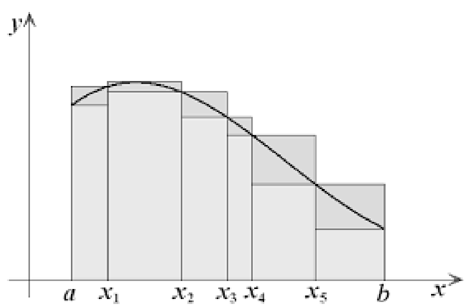

Figure 1: Rappresentazione grafica di una partizione

Ad ogni partizione $[a, b]$ sono associati n intervalli

$$[a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, b] = [a, b]$$

Per ogni numero naturale $k \in \{1, \cdots, n\}$, consideriamo il sup e l'inf della funzione f su $[x_{k-1}, x_k]$

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \qquad m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

M_k e m_k sono rispettivamente l'approssimazione per eccesso e per difetto della funzione f nell'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$.

Definiamo la somma inferiore e la somma superiore della funzione f rispetto alla partizione P come

$$S(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \qquad s(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

Naturalmente, $s(P,f) \leq S(P,f)$.

Part VI
Integrali

Integrazione secondo Riemann

L'integrazione secondo Riemann è un metodo per calcolare l'area sottesa alla curva di una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a,b]$.
Definiamo la somma di Riemann della funzione f rispetto alla partizione P come

$$R(P,f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

dove $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.
Se esiste il limite della somma di Riemann per ogni partizione P di $[a,b]$ e se tale limite è indipendente dalla partizione, allora tale limite è detto integrale definito della funzione f in $[a,b]$ e si indica con

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} R(P,f) = \int_a^b f(x)dx$$

$\lambda(P)$ è la norma della partizione P, ovvero il massimo della lunghezza degli intervalli che compongono la partizione.

Quindi prese partizioni sempre più piccole dell'intervallo $[a,b]$, la somma di Riemann tenderà ad un valore limite, che è l'area sottesa alla curva della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$.

Primitiva di una funzione
Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I. Si dice che $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in I se $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

Formula fondamentale del calcolo integrale
Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a,b]$. Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$ in $[a,b]$.
Allora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Proprietà degli integrali

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$. Allora $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$.

Additività
Se a, b e c sono tre numeri reali tali che $a \leq b \leq c$ e se $f(x)$ è una funzione continua in $[a, c]$, allora

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Linearità
Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue in $[a, b]$ allora

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$ e se $c \in \mathbb{R}$, allora

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

Modulo
Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$, allora

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Monotonia
Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in $[a, b]$. Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Osservazioni
Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Se gli estremi di integrazione sono uguali, l'integrale è nullo.

Integrali indefiniti

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. L'insieme delle primitive di $f(x)$ in $[a, b]$ è dato da

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria.

Integrali immediati

- $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \qquad p \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad x > 0$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

Integrazione di funzioni razionali fratte
Si supponga di dover integrare una funzione razionale fratta del tipo

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono polinomi.
Se il grado di $P(x)$ è maggiore o uguale al grado di $Q(x)$, si divide $P(x)$ per $Q(x)$ e si ottiene

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

dove $K(x)$ è un polinomio e $R(x)$ è un polinomio di grado minore di $Q(x)$.
Si può quindi scrivere

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int K(x)dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

L'integrale del primo termine è immediato, mentre per il secondo termine si procede con la decomposizione in fratti semplici.

Se il grado di $P(x)$ è minore del grado di $Q(x)$, si procede con la decomposizione in fratti semplici.

Decomposizione in fratti semplici
Sia $P(x)$ un polinomio di grado n e sia $Q(x)$ un polinomio di grado m con $n < m$.

Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, allora $Q(x)$ ha due radici reali distinte.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + c$$

Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, allora $Q(x)$ ha due radici reali coincidenti.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \ln|x-a| + B \frac{1}{x-a} + c$$

Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, allora $Q(x)$ ha due radici complesse coniugate.

Numeratore di grado 1 e denominatore di grado 2

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{lx+a}{ax+bx+c} = \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \ln|ax^2+bx+c| + B \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + c$$

Numeratore di grado 0 e denominatore di grado 2

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{ax^2+bx+c}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{A}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + c$$

Se $x^2 + bx + q$ è irriducibile, allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} = \frac{Ax+B}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$$

dove $\alpha = -\frac{b}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}$.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = A \arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right) + B \ln|(x+\alpha)^2+\beta^2| + c$$

Integrazione per sostituzione

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo I. Sia $g(x)$ una funzione derivabile in I.
Se $f(x)$ è della forma $f(g(x))g'(x)$, allora

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

dove $t = g(x)$.

- Capire quale funzione $g(x)$ può essere utile per semplificare l'integrale.
- Calcolare la derivata di $g(x)$.
- Sostituire $t = g(x)$ e $dx = g'(t)dt$.
- Sostituire $f(g(x))g'(x)dx$ con $f(t)dt$.
- Nel caso in cui l'integrale sia definito, sostituire gli estremi di integrazione.

Integrazione per parti

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili in un intervallo I.
Allora

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

- Scegliere $f(x)$ e $g'(x)$.
- Calcolare $f'(x)$ e $g(x)$.
- Sostituire $f(x)g'(x)dx$ con $f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$.