Teoremi

Agostino Cesarano

January 2024

Part II
Funzioni continue

1 Permanenza del segno

Sia $f(x)$ una funzione, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se f è continua in x_0, e se $f(x_0)$ è diverso da zero (e quindi ha un segno), allora la funzione mantiene lo stesso segno di $f(x_0)$ in tutto un intorno di x_0.

In altre parole, se il limite di una funzione in un punto è positivo, allora la funzione sarà positiva in un intorno di quel punto. Analogamente, se il limite è negativo, la funzione sarà negativa in un intorno del punto.

Attenzione

È importante notare che questo teorema si applica solo quando il limite della funzione è diverso da zero. Se il limite è zero, la funzione può assumere valori sia positivi che negativi in un intorno del punto.

2 Teorema dell'esistenza degli zeri (Teorema di Bolzano)

Sia $f(x)$ una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$, e supponiamo che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segni opposti, cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$. Allora esiste almeno un numero $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

3 (Primo)Teorema dellìesistenza dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. *Conseguenza del teorema dell'esistenza degli zeri*

4 Teorema di Weierstrass

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè esistono in $[a, b] x_1, x_2$ tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b]$$

I numeri x_1, x_2 sono detti rispettamente punti di minimo e massimo per $f(x)$ nell' intervallo $[a, b]$.

5 (Secondo)Teorema dell'esistenza dei valori intermedi

Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo. *Conseguenza del teorema di Weierstrass*

6 Teorema di continuità delle funzioni inverse

Sia $f(x)$ una funzione strettamente monotona[1] in $[a, b]$. Se $f(x)$ è continua, anche la funzione f^{-1} è continua.

[1] Strettamente crescente o Strettamente decrescente