Teoremi

Agostino Cesarano

January 2024

Part V
De L'Hôpital e Taylor

1 Teorema di De L'Hôpital

Siano f e g due funzioni derivabili in un intorno del punto x_0 tale che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$$

se $g(x), g'(x) \neq 0$ in un intorno di x_0, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

f, g continue in x_0

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

per ipotesi abbiamo che $f(x_0) = g(x_0) = 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dividendo numeratore e denominatore per $x - x_0$ è da li otteniamo il **rapporto incrementale**, quindi la derivata di $f(x)$ e $g(x)$.

Sviluppo di Taylor

Sia $f(x)$ una funzione derivabile n volte in un intorno di x_0, allora la funzione $f(x)$ può essere sviluppata in serie di Taylor centrata in x_0 come segue:

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

2 Teorema di Taylor con resto di Peano

Il resto di Peano centrato in x_0 è anche detto **Resto di Mc Laurin**

Sia una funzione f derivabile $n - volte$ in x_0 allora

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0) + R_n(x)$$

con

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Sappiamo che

$$R_n(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}$$

sostituiamo $R_n(x)$ nella formula del limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}{(x - x_0)^n}$$

per ipotesi sappiamo che deve essere uguale a 0, deriviamo numeratore e denominatore:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f'^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^{k-1}}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - \sum_{k=2}^{n} \frac{f''^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^{k-2}}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}}$$

questo si può ripetere $n - 1$ volte

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{n-1}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} =$$

$$\frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{n-1}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right] = 0$$