Teoremi

Agostino Cesarano

January 2024

Part III
Funzioni derivabili

1 Teorema di Fermat

Sia $f(x)$ una funzione definita in $[a, b]$ e sia x_0 un punto di massimo o minimo relativo interno ad $[a, b]$. Se f è derivabile in x_0, risulta $f'(x_0) = 0$.
Supponiamo senza perdita di generalità che x_0 sia un punto di massimo; la dimostrazione nel caso in cui x_0 sia un punto di minimo è analoga.
Dato che x_0 è un punto di massimo, per un incremento h sufficientemente piccolo vale $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$. Dividendo la disuguaglianza per h, otteniamo:

- se h è positivo, $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$
- se h è negativo, $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$

Passando al limite per $h \to 0$ in entrambe le disuguaglianze, otteniamo

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \qquad e \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Questi limiti sono rispettivamente il limite destro e il limite sinistro della derivata prima, $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$. Per l'ipotesi di derivabilità di f in x_0, i due limiti devono coincidere [1], quindi essendo $f'_+(x_0) \leq 0$ e $f'_-(x_0) \geq 0$ l'unico caso possibile è $f'_+(x_0) = 0 = f'_-(x_0)$, ossia $f'(x_0) = 0$.
Quindi, il teorema di Fermat ci dice che l'annullamento della derivata prima di una funzione derivabile in un punto x_0 del dominio è condizione necessaria affinché x_0 sia un punto di massimo o minimo relativo (quindi eventualmente anche assoluto) per la funzione.

[1] Se una funzione è derivabile in un punto, allora il limite destro e il limite sinistro della derivata devono coincidere in quel punto.

2 Teorema di Rolle

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e dervibile in (a, b). Se $f(a) = f(b)$, esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui $f'(x_0) = 0$.
Poiché f è continua in $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluti nell'intervallo.
Quindi, chiamati M il valore del massimo assoluto e m il valore del minimo assoluto in $[a, b]$, abbiamo due casi:

- Se il massimo e il minimo assoluti coincidono, cioè $M = m$, la funzione è costante in tutto l'intervallo e la sua derivata è nulla in ogni punto di $[a, b]$, quindi anche in un punto x_0 generico. In questo caso il teorema è dimostrato.
- Se invece $M \neq m$, poiché per ipotesi $f(a) = f(b)$, almeno uno tra i valori M e m è assunto dalla funzione in un punto c interno all'intervallo. Ad esempio, se il massimo M è assunto all'interno dell'intervallo nel punto x_0, quindi $f(c) = M$. Ora, poiché c è un punto di estremo locale e f è derivabile in tutto (a, b), $f'(x_0) = 0$ *per il teorema di Fermat*. Questo conclude la dimostrazione del teorema.

3 Teorema di Lagrange

Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si fa riferimento al Teorema di Rolle. Per applicare il Teorema di Rolle alla nostra funzione, definiamo una nuova funzione $g(x)$ che è la linea retta che passa per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. La pendenza di questa linea è

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ [2]

Quindi, la funzione $g(x)$ può essere scritta come:

$$g(x) = f(x) - [\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)]$$

La funzione $g(x)$ è una funzione lineare(cioè un polinomio di primo grado) [3] ed è quindi sempre derivabile. Inoltre poichè $f(x)$ è continua in $[a, b]$ e dervibaile in (a, b), allora anche $g(x)$ è continua in $[a, b]$ e derviabile in (a, b).[4]

[2] La pendenza viene rappresenta come il tasso di cambiamento medio della funzione f sull'intervallo $[a, b]$. Questo viene calcolato come il cambiamento nel valore della funzione, $f(b) - f(a)$, diviso per il cambiamento nella variabile indipendente, $b - a$.

[3] Equazione di una retta.

[4] Questo perché le operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione (escludendo la divisione per zero) preservano la continuità e la derivabilità delle funzioni. Quindi, se f(x)f(x) è continua e derivabile, allora qualsiasi funzione g(x)g(x) che può essere espressa in termini di f(x)f(x) mediante queste operazioni sarà anch'essa continua e derivabile.

In più considerando le valutazioni di $g(x)$ in a e b abbiamo:

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) + f(a)\right] = f(a) - f(a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a)\right] = f(b) - f(b) + f(a) - f(a) = 0$$

Quindi poichè $g(x)$ è continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e tale che $g(a) = g(b)$, essa rispetta le ipotesi del teorema di Rolle. Di conseguenza, proprio in forza del teorema di Rolle sappiamo per certo che esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che $g'(x_0) = 0$. Calcoliamo anzitutto $g'(x)$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ovvero

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

dimostrando il teorema.

4 Teorema di Cauchy

Sia $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b). Esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ per cui

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Il teorema di Cauchy è una generalizzazione del teorema di Lagrange. Infatti, se $g(x)$ è una funzione costante, allora $g'(x) = 0$ e il teorema di Cauchy si riduce al teorema di Lagrange.