Teoremi

Agostino Cesarano

January 2024

Part IV
Integrali

1 Teorema della media integrale

In una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a, b]$ esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(x_0) \cdot (b-a)$$

Dato che f è <u>continua</u>, vale il Teorema di Weierstrass, e possiamo scrivere che:

$$m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a, b]$$

Per le proprietà degli Integrali (in questo caso la **monotonia dell'integrale**) ci permettono di **integrare tutti i membri di questa catena di disuguaglianze mantenendo inalterati i versi delle disuguaglianze stesse**:

$$\int_a^b m\, dt \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b M\, dt$$

Il *primo e terzo integrale sono banali*

$$\int_a^b m\, dt = |mx|_a^b = mb - ma = m(b-a) \int_a^b M\, dt = |mx|_a^b = Mb - Ma = M(b-a)$$

e possiamo riscrivere la catena di disuguaglianze in questo modo

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq M(b-a)$$

e dividendo per $b - a$ che sarà sempre diverso da zero perché ($a \neq b$) si ha

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt \leq M$$

e siamo arrivati alla conclusione che il valore $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$ è compreso tra m e M, e dato che è continua assume in $[a, b]$ tutti i valori di m e M, secondo il (Secondo)Teorema dell'esistenza dei valori intermedi, quindi esiste sicuramente un $c \in [a, b]$ tale per cui

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$$

2 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il **teorema fondamentale del calcolo integrale** stabilisce una relazione fondamentale tra la derivata e l'integrale di una funzione.

Esso afferma che se una funzione $f(x)$ è una primitiva per un'altra funzione $F(x)$, allora la derivata dell'integrale definito $\int_a^x f(t)\, dt$ è uguale alla funzione originale $f(x)$. Formalmente, questo teorema può essere enunciato così:

Se $F(x)$ è una qualsiasi primitiva di $f(x)$, allora per ogni x nell'intervallo in cui $f(x)$ è continua, abbiamo:

$$F'(x) = f(x)$$

$$\left(\int_a^x f(t)\, dt \right)' = f(x)$$

In altre parole, il teorema fondamentale del calcolo fornisce un metodo per **calcolare l'integrale definito di una funzione, fornendo la relazione diretta tra la primitiva di una funzione e l'integrale definito di quella funzione.**

Si consideri un punto $x_0 \in (a, b)$ e una quantità $h > 0$ **sufficientemente piccola**, in modo che x_0+h sia ancora in (a, b) Grazie alle proprietà dell'integrale, si ha che

$$\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = \int_a^{x_0+h} f(t)dt$$

Inoltre, per definizione di $F(x)$, valgono le seguenti uguaglianze:

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\, dt \text{ e } F(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t)\, dt$$

A questo punto si ottiene facilmente questa relazione:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Dato che f è continua su (a, b), si può applicare il *Teorema della media integrale*, che assicura che esiste un $c \in (x_0, x_0 + h)$ tale per cui

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\, dt = f(c) \cdot (x_0 + h - x_0) = f(c) \cdot h$$

Quindi la relazione può essere rielaborata così:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = f(c)\, h \quad \Rightarrow \quad \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(c)$$

Si può far passare al limite entrambi i membri, ottenendo

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c)$$

Si ha che $F'(x_0) = \lim_{h \to 0} f(c)$.
Analizzando il termine $\lim_{h \to 0} f(c)$, si sfrutta la continuità di f per affermare che

$$\lim_{h \to 0} f(c) = f(L)$$

dove $L = \lim_{h \to 0} c$ Dato che vale sempre $x_0 \leq c \leq x_0 + h$, e che $\lim_{h \to 0} x_0 = x_0$ e $\lim_{h \to 0}(x_0 + h) = x_0$, allora per il Teorema del confronto si ha che

$$L = \lim_{h \to 0} c = x_0$$

e quindi che

$$\lim_{h \to 0} f(c) = f(L) = f(x_0)$$

In sostanza si è mostrato che $F'(x_0) = f(x_0)$, il che significa che F è derivabile, e che calcolare la sua derivata in un qualunque punto $x_0 \in (a, b)$ è come calcolare f in tale punto, così come si voleva dimostrare.

3 (Secondo) Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il **secondo teorema fondamentale del calcolo integrale** (detta anche formula fondamentale del calcolo integrale) afferma che se f è una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$ e G è una primitiva di f su quell'intervallo, allora l'integrale definito di f da a a b può essere calcolato come la differenza tra i valori di G nei punti b e a:

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a) = G(x)|_a^b$$

dove G è una **Funzione primitiva** di $f(x)$

Questo teorema rappresenta una relazione fondamentale tra il calcolo dell'area sotto una curva (integrale) e l'antiderivata della funzione che descrive la curva stessa.

Sia G la primitiva definita da $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C\,\forall c \in \mathbb{R}$ allora

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt + C - \int_a^a f(t)\,dt - C$$

visto che le due C si annullano e $\int_a^a f(t)\,dt = 0$ rimane che

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

e cosi lo dimostriamo.