Definizioni

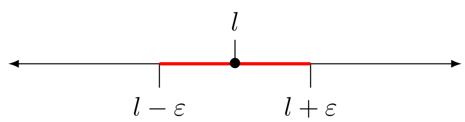
Agostino Cesarano

January 2024

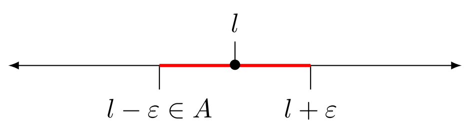
Premesse

Si definisce intorno di ampiezza ε e centro l l'insieme $I_\varepsilon(l) = \{x \in \mathbb{R} : |x-l| < \varepsilon\}$.

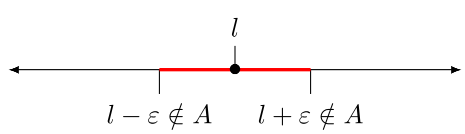
$$I_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$



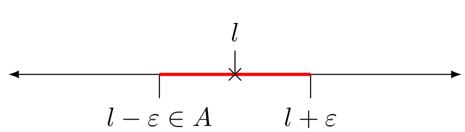
Si dice che l è un punto di accumulazione di $A \subseteq \mathbb{R}$ se ogni intorno di l contiene almeno un punto di A diverso da l.



In un intorno di un punto di accumulazione di A ci sono infiniti punti di A. Si dice che l è un punto isolato di $A \subseteq \mathbb{R}$ se $l \in A$ e l non è un punto di accumulazione di A. Quindi, se l è un punto isolato di A, allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che $I_\varepsilon(l) \cap A = \{l\}$.



Si dice che l è un punto di accumulazione bucato di $A \subseteq \mathbb{R}$ se l è un punto di accumulazione di A ma non è un punto di A.



Part II
Limiti

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e sia l un punto di accumulazione di A. Si dice che l è il limite di $f(x)$ per x che tende a l se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $0 < |x - l| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

$$\begin{cases} (x - l) < \delta \\ -(x - l) < \delta \end{cases} \tag{1}$$

$$l - \delta < x < l + \delta$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{cases} f(x) - l < \varepsilon \\ -(f(x) + l) < \varepsilon \end{cases} \tag{2}$$

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

Quindi preso un δ qualsiasi tale che x è compreso tra $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$, esiste un ε tale che $f(x)$ è compreso tra $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$.

Relazione tra limiti di funzioni e limiti di successioni (Teorema ponte)

Le proprietà di convergenza di una successione a_n sono le stesse di una funzione $f(x)$.

Limiti notevoli

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases} \tag{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^b = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ +\infty & b > 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \tag{4}$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \tag{5}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{6}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty \tag{7}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty \tag{8}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log x \quad \text{non esiste} \tag{9}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^b \log x = 0 \tag{10}$$

Gerarchia degli infiniti in ordine crescente:

$$\log x, \quad x^b, \quad a^x, \quad x!, \quad x^x$$

Valgono quindi i sequenti limiti notevoli:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^b} = 0 \quad (b > 0) \tag{11}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \quad (a > 1, b > 0) \tag{12}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x!} = 0 \tag{13}$$

Molto importante è il seguente limite notevole:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{14}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{15}$$

Limiti notevoli per le successioni trigonometriche:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin x \quad \text{non esiste} \tag{16}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \cos x \quad \text{non esiste} \tag{17}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tan x \quad \text{non esiste} \tag{18}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \tag{19}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arcsin x = -\frac{\pi}{2} \tag{20}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{21}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{22}$$