Definizioni

Agostino Cesarano

January 2024

Part I
Successioni

Una successione è una legge che associa ad ogni numero naturale n un numero reale a_n. Una successione quindi è una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Limiti di successioni

Una successione a_n si dice convergente a $l \in \mathbb{R}$ se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq \delta$.

Una successione a_n si dice divergente a $+\infty$ se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $a_n > M \quad \forall n \geq \delta$.

Una successione a_n si dice divergente a $-\infty$ se $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $a_n < -M \quad \forall n \geq \delta$.

Una successione a_n si dice regolare se $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$.

Una successione che converge a 0 si dice successione infinitesima.

Una successione che diverge a $+\infty$ si dice successione infinita positiva.

Una successione che diverge a $-\infty$ si dice successione infinita negativa.

Operazioni sui limiti

Valgono le seguenti proprietà, dette *operazioni sui limiti*:

Operazione	**Convergenza**		**Limite**
$a_n + b_n$	$a_n \to l$	$b_n \to m$	$l + m$
$a_n - b_n$	$a_n \to l$	$b_n \to m$	$l - m$
$a_n \cdot b_n$	$a_n \to l$	$b_n \to m$	$l \cdot m$
a_n / b_n	$a_n \to l$	$b_n \to m \neq 0$	l/m

Valgono inoltre analoghe proprietà per successioni divergenti:

$a_n \to l$	$b_n \to +\infty$	$\Rightarrow$	$a_n + b_n \to +\infty$
$a_n \to l$	$b_n \to -\infty$	$\Rightarrow$	$a_n + b_n \to -\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to +\infty$	$\Rightarrow$	$a_n + b_n \to +\infty$
$a_n \to -\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Rightarrow$	$a_n + b_n \to -\infty$
$a_n \to l > 0$	$b_n \to +\infty$	$\Rightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to l < 0$	$b_n \to +\infty$	$\Rightarrow$	$a_n \cdot b_n \to -\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to +\infty$	$\Rightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to +\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Rightarrow$	$a_n \cdot b_n \to -\infty$
$a_n \to -\infty$	$b_n \to -\infty$	$\Rightarrow$	$a_n \cdot b_n \to +\infty$
$a_n \to l$	$b_n \to \pm\infty$	$\Rightarrow$	$a_n/b_n \to 0$
$a_n \to l > 0$	$b_n \to +\infty$	$\Rightarrow$	$a_n/b_n \to +\infty$
$a_n \to l < 0$	$b_n \to +\infty$	$\Rightarrow$	$a_n/b_n \to -\infty$
$a_n \to l \neq 0$	$b_n \to 0$	$\Rightarrow$	$\lvert a_n/b_n \rvert \to +\infty$
$a_n \to \pm\infty$	$b_n \to 0$	$\Rightarrow$	$\lvert a_n/b_n \rvert \to +\infty$

Risultano esclusi alcuni casi che schematizziamo nelle forme sequenti, dette *forme indeterminate*:

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \infty/\infty, \qquad 0/0$$

Altre forme indeterminate, legate alla elevazione a potenza, sono:

$$\infty^0, \qquad 1^\infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^\infty$$

Limiti notevoli

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & -1 < a < 1 \\ 1 & a = 1 \\ +\infty & a > 1 \\ \text{non esiste} & a \leq -1 \end{cases} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} 0 & b < 0 \\ 1 & b = 0 \\ +\infty & b > 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \tag{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^b} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{b}{n}} = 1 \quad \forall b >\in \mathbb{R} \tag{4}$$

Gerarchia degli infiniti in ordine crescente:

$$\log n, \quad n^b, \quad a^n, \quad n!, \quad n^n$$

Valgono quindi i sequenti limiti notevoli:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0 \quad (b > 0) \tag{5}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \quad (a > 1, b > 0) \tag{6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1) \tag{7}$$

Molto importante è il seguente limite notevole:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \tag{8}$$

più in generale:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a \tag{9}$$

Limite notevole per le successioni trigonometriche:

$$\lim_{n\to0} \frac{\sin n}{n} = 1 \tag{10}$$

Infine ricordiamo le proprietà seguenti che discendono dai teoremi sulle medie aritmetiche e geometriche di una successione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) \tag{11}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{12}$$

Successioni limitate

Una successione a_n si dice limitata se $\exists M > 0$ tale che $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
$\exists M > 0$ tale che $-M \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Esistono successioni limitate non regolari.

Esempio

Ad esempio $a_n = (-1)^n$ è limitata ma non regolare.
Poichè $\lim_{n\to\infty} a_n$ non esiste.

Successioni monotone

Una successione a_n è monotona se verifica una delle seguenti proprietà:

- Una successione a_n si dice crescente se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Una successione a_n si dice strettamente crescente se $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Una successione a_n si dice decrescente se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Una successione a_n si dice strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Una successione costante è sia crescente che decrescente. Quindi una successione costante è monotona.

Successioni estratte

Una successione a_n si dice estratta da una successione b_n se $a_n = b_{n_k}$ per qualche successione n_k.

Se a_n è una successione convergente a $l \in \mathbb{R}$, allora ogni sua sottosuccessione a_{n_k} è convergente a l.

Successioni di Cauchy

Ogni successione convergente è di Cauchy.

Ogni successione di Cauchy è limitata.

Se una successione di Cauchy a_n contiene una estratta a_{n_k} convergente a $l \in \mathbb{R}$, allora anche a_n è convergente a l.

Critero di convergenza di Cauchy Una successione a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.