

# Teoremi

Agostino Cesarano

January 2024

## Part IV

# Integrali

## 1 Teorema della media integrale

In una funzione  $f(x)$  continua nell'intervallo  $[a, b]$  esiste un punto  $x_0 \in [a, b]$  tale che è soddisfatta la seguente uguaglianza

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(x_0) \cdot (b-a)$$

Dato che  $f$  è continua, vale il Teorema di Weierstrass, e possiamo scrivere che:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$$

Per le proprietà degli Integrali (in questo caso la **monotonia dell'integrale**) ci permettono di **integrare tutti i membri di questa catena di disuguaglianze mantenendo inalterati i versi delle disuguaglianze stesse**:

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b M dt$$

Il primo e terzo integrale sono banali

$$\int_a^b m dt = |mx|_a^b = mb - ma = m(b-a) \quad \int_a^b M dt = |Mx|_a^b = Mb - Ma = M(b-a)$$

e possiamo riscrivere la catena di disuguaglianze in questo modo

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

e dividendo per  $b - a$  che sarà sempre diverso da zero perché ( $a \neq b$ ) si ha

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M$$

e siamo arrivati alla conclusione che il valore  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$  è compreso tra  $m$  e  $M$ , e dato che è continua assume in  $[a, b]$  tutti i valori di  $m$  e  $M$ , secondo il (Secondo) Teorema dell'esistenza dei valori intermedi, quindi esiste sicuramente un  $c \in [a, b]$  tale per cui

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

## 2 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il **teorema fondamentale del calcolo integrale** stabilisce una relazione fondamentale tra la derivata e l'integrale di una funzione.

Esso afferma che se una funzione  $f(x)$  è una primitiva per un'altra funzione  $F(x)$ , allora la derivata dell'integrale definito  $\int_a^x f(t) dt$  è uguale alla funzione originale  $f(x)$ . Formalmente, questo teorema può essere enunciato così:

Se  $F(x)$  è una qualsiasi primitiva di  $f(x)$ , allora per ogni  $x$  nell'intervallo in cui  $f(x)$  è continua, abbiamo:

$$F'(x) = f(x)$$

$$\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

In altre parole, il teorema fondamentale del calcolo fornisce un metodo per **calcolare l'integrale definito di una funzione, fornendo la relazione diretta tra la primitiva di una funzione e l'integrale definito di quella funzione.**

Si consideri un punto  $x_0 \in (a, b)$  e una quantità  $h > 0$  sufficientemente piccola, in modo che  $x_0 + h$  sia ancora in  $(a, b)$ . Grazie alle proprietà dell'integrale, si ha che

$$\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = \int_a^{x_0+h} f(t) dt$$

Inoltre, per definizione di  $F(x)$ , valgono le seguenti uguaglianze:

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t) dt \text{ e } F(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt$$

A questo punto si ottiene facilmente questa relazione:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$$

Dato che  $f$  è continua su  $(a, b)$ , si può applicare il Teorema della media integrale, che assicura che esiste un  $c \in (x_0, x_0 + h)$  tale per cui

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = f(c) \cdot (x_0 + h - x_0) = f(c) \cdot h$$

Quindi la relazione può essere rielaborata così:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = f(c) h \quad \Rightarrow \quad \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(c)$$

Si può far passare al limite entrambi i membri, ottenendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

Si ha che  $F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$ .

Analizzando il termine  $\lim_{h \rightarrow 0} f(c)$ , si sfrutta la continuità di  $f$  per affermare che

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(L)$$

dove  $L = \lim_{h \rightarrow 0} c$ . Dato che vale sempre  $x_0 \leq c \leq x_0 + h$ , e che  $\lim_{h \rightarrow 0} x_0 = x_0$  e  $\lim_{h \rightarrow 0} (x_0 + h) = x_0$ , allora per il Teorema del confronto si ha che

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} c = x_0$$

e quindi che

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(L) = f(x_0)$$

In sostanza si è mostrato che  $F'(x_0) = f(x_0)$ , il che significa che  $F$  è derivabile, e che calcolare la sua derivata in un qualunque punto  $x_0 \in (a, b)$  è come calcolare  $f$  in tale punto, così come si voleva dimostrare.

### 3 (Secondo) Teorema fondamentale del calcolo integrale

Il **secondo teorema fondamentale del calcolo integrale** (detta anche formula fondamentale del calcolo integrale) afferma che se  $f$  è una funzione continua su un intervallo chiuso  $[a, b]$  e  $G$  è una primitiva di  $f$  su quell'intervallo, allora l'integrale definito di  $f$  da  $a$  a  $b$  può essere calcolato come la differenza tra i valori di  $G$  nei punti  $b$  e  $a$ :

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = G(x)|_a^b$$

dove  $G$  è una **Funzione primitiva** di  $f(x)$

Questo teorema rappresenta una relazione fondamentale tra il calcolo dell'area sotto una curva (integrale) e l'antiderivata della funzione che descrive la curva stessa.

Sia  $G$  la primitiva definita da  $F(x) = \int_a^x f(t) dt + C \forall c \in \mathbb{R}$  allora

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt + C - \int_a^a f(t) dt - C$$

visto che le due  $C$  si annullano e  $\int_a^a f(t) dt = 0$  rimane che

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

e così lo dimostriamo.