

Registro delle Lezioni

Anno Accademico 2012-13

Area di Scienze e Ingegneria

Dipartimento di Informatica

Corso di Laurea Magistrale in “Ingegneria e Scienze Informatiche”

Insegnamento: “Ragionamento automatico”

Docente: Prof.ssa Maria Paola Bonacina

Data inizio lezioni: 1 ottobre 2012

Data fine lezioni: 10 gennaio 2013

Prima lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 1 ottobre 2012. **Durata:** 2 ore

Introduzione al corso ed illustrazione delle modalità d'esame. Introduzione storica al ragionamento automatico: come l'invenzione della macchina di Turing e quindi l'inizio dell'informatica sia collegato al problema della decidibilità della validità in logica al primo ordine e quindi all'automazione del ragionamento. Gottfried Leibniz: *caratteristica universale* e *calculemus!* George Boole: i primi progressi nella logica dopo Aristotele e la scolastica; la *logica come algebra* su $\{0, 1\}$ invece che sull'insieme di tutti i numeri. Gottlob Frege: *la logica del primo ordine*; la notazione di Giuseppe Peano; il tentativo di fondare l'aritmetica sulla logica e il fallimento con i *paradossi* di Bertrand Russell. Georg Cantor: esistenza di diverse cardinalità infinite; il metodo di *diagonalizzazione* e l'*ipotesi del continuo*. David Hilbert: il problema della consistenza dell'aritmetica; riduzione della consistenza della geometria euclidea a quella dell'aritmetica; il programma di Hilbert per i fondamenti della matematica; due grandi problemi: completezza della logica al primo ordine; decidibilità della validità in logica al primo ordine (*Entscheidungsproblem*). Kurt Gödel: dimostrazione della *completezza della logica al primo ordine*; precedenti risultati di Thoralf Skolem; il teorema di *incompletezza* per ogni sistema consistente sufficientemente espressivo da incorporare sia la logica al primo ordine che l'aritmetica; il punto cruciale è come la Gödelizzazione permetta di scrivere nel sistema logico frasi sulla provabilità nel sistema stesso; fallimento del programma di Hilbert. Alan Turing: astrazione di ciò che significa computare; la *macchina di Turing*; la macchina di Turing *universale*; sovrapponibilità di *macchina*, *programma*, *dato*; *indecidibilità della terminazione*; riduzione della decidibilità della validità in logica al primo ordine alla decidibilità della terminazione; contemporanei risultati di Alonzo Church con il λ -calcolo e di Kurt Gödel con le funzioni parziali computabili. Jacques Herbrand: la validità in logica al primo ordine è *semi-decidibile*. Ragionamento automatico: *procedure di semi-decisione* per l'insoddisfacibilità o equivalentemente la validità in logica al primo ordine e *procedure di decisione* per la soddisfacibilità in casi particolari (teorie o frammenti decidibili).

Firma:

Totale ore: 2

Seconda lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 3 ottobre 2012. **Durata:** 2 ore

La lezione tace per permettere agli studenti, su loro richiesta, di partecipare al "Security Day."

Firma:

Totale ore: 2

Terza lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 8 ottobre 2012. **Durata:** 2 ore

Formalizzazione di un problema in termini di *assunzioni* o *ipotesi* H e *congettura* φ . Nozioni di *in-*

interpretazione, validità, invalidità, soddisfacibilità, insoddisfacibilità, conseguenza logica. Teorema di deduzione: $H \models \varphi$ se e solo se $\models H \supset \varphi$ se e solo se $H \cup \{\neg\varphi\}$ è insoddisfacibile. Introduzione al teorema fondamentale che rende fattibile il ragionamento automatico in logica al prim'ordine: il teorema di Herbrand. *Teorema di Herbrand:* sia S un insieme di clausole: S è insoddisfacibile se e solo se esiste un insieme finito S' di istanze ground di clausole di S che è insoddisfacibile. Come il teorema di Herbrand implichi la *semi-decidibilità* dell'insoddisfacibilità della logica al primo ordine. Trasformazione di una formula F in un insieme di clausole S . Skolemizzazione.

Firma:

Totale ore: 4

Quarta lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 11 ottobre 2012. **Durata:** 2 ore

Come la skolemizzazione preservi la soddisfacibilità, ma non l'equivalenza logica. *Teorema:* sia F una formula ed S l'insieme di clausole ottenuto per trasformazione di F : F è insoddisfacibile se e solo se lo è S . Dimostrazione del teorema. *Universo di Herbrand e base di Herbrand. Interpretazioni di Herbrand.* Interpretazione di Herbrand associata a un'interpretazione data. Come l'interpretazione di Herbrand associata a un'interpretazione data non sia unica, se si è dovuto introdurre un simbolo di costante per costruire l'universo di Herbrand.

Firma:

Totale ore: 6

Quinta lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 15 ottobre 2012. **Durata:** 2 ore

H-insoddisfacibilità. *Teorema:* sia S un insieme di clausole: S è insoddisfacibile se e solo se è H-insoddisfacibile. Dimostrazione del teorema mediante dimostrazione del *Lemma:* se un'interpretazione soddisfa S , allora tutte le sue interpretazioni di Herbrand associate soddisfano S . Come l'altra direzione del Lemma non valga. Come il teorema e quindi la restrizione alle interpretazioni di Herbrand non sia applicabile a formule arbitrarie, ma solo a clausole. Introduzione al teorema di Herbrand. *Compattezza:* S è soddisfacibile sse tutti i suoi sotto-insiemi finiti sono soddisfacibili. Il teorema di Herbrand come risultato di *compattezza*.

Firma:

Totale ore: 8

Sesta lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 18 ottobre 2012. **Durata:** 2 ore

Albero semantico. Albero semantico completo, interpretazione parziale associata a un nodo o ramo, nodo di fallimento, albero semantico chiuso. Come un albero semantico completo per S sia

una rassegna di tutte le interpretazioni di Herbrand per S . *Teorema di Herbrand*: sia S un insieme di clausole: S è insoddisfacibile se e solo se a ogni albero semantico completo per S corrisponde un albero semantico finito chiuso per S . Dimostrazione del teorema di Herbrand.

Firma:

Totale ore: 10

Settima lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 22 ottobre 2012. **Durata:** 2 ore

Come il teorema di Herbrand implichi la *semi-decidibilità* dell'insoddisfacibilità della logica al primo ordine: schema di procedura che enumera insiemi di istanze ground e ne decide l'insoddisfacibilità applicando un metodo proposizionale. Implementare il teorema di Herbrand: strategie a *generazione di istanze* e strategie a *generazione di conseguenze*. Strategie a generazione di istanze. *Metodo di Gilmore*; enumerazione di istanze e *metodo di moltiplicazione* per la soddisfacibilità proposizionale. Generazione di istanze mediante *collegamento binario* o *iper-collegamento*. Strategie a generazione di conseguenze: *principio di risoluzione*; risoluzione proposizionale e sua correttezza; risoluzione binaria al prim'ordine. Problema comune: come istanziare in modo automatico e non esaustivo le variabili quantificate universalmente. Soluzione: l'*unificazione*.

Firma:

Totale ore: 12

Ottava lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 25 ottobre 2012. **Durata:** 2 ore

Sostituzioni, composizione di sostituzioni, sostituzioni idempotenti; ordinamento di sussunzione tra sostituzioni, unificatore ed unificatore più generale. Unificazione come problema di risoluzione di vincoli; forme risolta ad albero. *Algoritmo di unificazione di Robinson* come un insieme di regole di inferenza: *decomposizione*, *conflitto*, *cancellazione*, *controllo di occorrenza*, *eliminazione*. Come l'algoritmo di Robinson sia usato in pratica, nonostante abbia complessità esponenziale nel caso peggiore.

Firma:

Totale ore: 14

Nona lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 29 ottobre 2012. **Durata:** 2 ore

Procedura di Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL) per la soddisfacibilità proposizionale. Descrizione di DPLL come insieme di regole di inferenza: *analisi dei casi* ("splitting") e *propagazione unitaria*; sua correttezza; propagazione unitaria come *sussunzione unitaria* e *risoluzione unitaria*; regole della *clausola unitaria* e del *letterale puro* come casi particolari della regola di *analisi dei*

casi; eliminazione di tautologie, e regola di scoperta di contraddizione.

Firma:

Totale ore: 16

Decima lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 1 novembre 2012. **Durata:** 2 ore

La lezione tace causa festività.

Firma:

Totale ore: 16

Undicesima lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 5 novembre 2012. **Durata:** 2 ore

Da DPLL come insieme di regole di inferenza all'algoritmo ricorsivo per DPLL. Spazio di ricerca. Ricerca per *profondità*. *Backtracking cronologico*. *Pila* degli assegnamenti. Priorità alle regole della clausola unitaria e del letterale puro rispetto all'analisi dei casi, ovvero priorità alla propagazione unitaria rispetto agli assegnamenti. Come un'applicazione della regola della clausola unitaria possa indurre altre applicazioni della stessa e applicazioni della regola del letterale puro. Come un'applicazione della regola del letterale puro possa indurre altre applicazioni della stessa ma non applicazioni della regola della clausola unitaria. *Euristiche* per la scelta della variabile in analisi dei casi. Pseudo-codice dell'algoritmo ricorsivo per DPLL.

Firma:

Totale ore: 18

Dodicesima lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 8 novembre 2012. **Durata:** 2 ore

Schemi di regole di inferenza: *espansione* e *contrazione*. *Correttezza* e *adeguatezza* di regole di inferenza. *Derivazione* e suo *limite*: insieme delle clausole persistenti S_∞ . *Completezza refutazionale* di un sistema di inferenza I . Sistema di inferenza *non-deterministico* + piano di ricerca = *strategia di dimostrazione di teoremi* deterministica. Perché un piano di ricerca: l'*I*-albero indotto da un sistema di inferenza I per un dato problema. *Equità* di una derivazione ed equità del piano di ricerca. *Ridondanza*: formule eliminate per contrazione sono ridondanti; formule la cui generazione per espansione è impedita da restrizioni basate su ordinamenti sono ridondanti; inferenze che usano o generano formule ridondanti sono ridondanti. Una definizione di ridondanza di clausole basata su un ordinamento ben fondato su clausole. *Completezza*: se il sistema di inferenza è refutazionalmente completo e il piano di ricerca è equo, la strategia di dimostrazione di teoremi è completa. Distinzione tra *derivazione* e *prova*: albero di prova. Ricostruzione della prova dalla derivazione.

Firma:

Totale ore: 20

Tredicesima lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 12 novembre 2012. **Durata:** 2 ore

Principio di risoluzione: risoluzione binaria, fattorizzazione, risoluzione. Alberi di prova per risoluzione. Perché occorre la *fattorizzazione*. Come risoluzione binaria e fattorizzazione siano regole di espansione. Esempi di prove per risoluzione. Regole di contrazione associabili alla risoluzione. Eliminazione di tautologie. *Principio di sussunzione:* ordinamento di sussunzione e regola di sussunzione. *Semplificazione clausale* come combinazione di risoluzione binaria e sussunzione. Un sistema di inferenza refutazionalmente completo per la logica del prim'ordine: risoluzione binaria e fattorizzazione come regole di espansione, ed eliminazione di tautologie, sussunzione e semplificazione clausale come regole di contrazione.

Firma:

Totale ore: 22

Quattordicesima lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 15 novembre 2012. **Durata:** 2 ore

Risoluzione con tecnica del letterale risposta ("answer literal"). *Principio di sussunzione:* varianti; sussunzione stretta o propria; sussunzione di varianti. Completezza refutazionale della risoluzione: argomento intuitivo mediante alberi semantici. *Lemma di sollevamento* ("Lifting lemma") per la risoluzione e sua dimostrazione.

Firma:

Totale ore: 24

Quindicesima lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 19 novembre 2012. **Durata:** 2 ore

Ancora sul *lemma di sollevamento* ("Lifting lemma"): esempi.

Firma:

Totale ore: 26

Sedicesima lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 22 novembre 2012. **Durata:** 2 ore

Ripasso ed esercizi in preparazione della prova intermedia.

Firma:

Totale ore: 28

Diciassettesima lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 26 novembre 2012. **Durata:** 2 ore

Compito in classe, prova intermedia per l'esame.

Firma:

Totale ore: 30

Diciottesima lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 29 novembre 2012. **Durata:** 2 ore

Dimostrazione del teorema di completezza refutazionale della risoluzione. Piani di ricerca per la risoluzione. Strategia di *saturazione per livelli*. *Preferenza unitaria*: preferenza per le inferenze che usano clausole unitarie (*risoluzione unitaria*). Ciclo della *clausola data*. Il controllo della contrazione: *contrazione in avanti* e *contrazione all'indietro*.

Firma:

Totale ore: 32

Diciannovesima lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 3 dicembre 2012. **Durata:** 2 ore

Piano di ricerca con *priorità alla contrazione*. Ciclo della *clausola data*: versione alla Otter e versione alla E. Funzioni di valutazione ed euristiche per selezionare la clausola data. Esempio che mostra come una funzione di valutazione che conti il numero dei letterali invece del numero dei simboli non sia equa perchè ci sono infinite clausole con un dato numero di letterali. Contrazione in avanti e all'indietro: *priorità alla contrazione in avanti*. Esempio che mostra come la sussunzione all'indietro senza sussunzione in avanti possa violare l'equità.

Firma:

Totale ore: 34

Ventesima lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 6 dicembre 2012. **Durata:** 2 ore

Ordinamenti su termini, atomi, letterali per restringere regole d'inferenza d'espansione e definire regole d'inferenza di contrazione. Proprietà importanti in un ordinamento su termini ed atomi: *stabile*, *monotono*, *ben fondato*, con la *proprietà del sottotermine*, *completo* cioè *totale* su termini ed atomi ground. Ordinamento di *riduzione*: stabile, monotono e ben fondato. Ordinamento di *semplificazione*: stabile, monotono e con la proprietà del sottotermine. *Teorema*: gli ordinamenti di semplificazione sono ben fondati. Ordinamenti di semplificazione completi. Preliminari per

ordinamenti su termini ed atomi: *precedenza*, estensione a multiinsieme, estensione lessicografica, status multiinsieme o lessicografico di un simbolo. *Ordinamenti ricorsivi a cammini*. *Teorema*: gli ordinamenti ricorsivi a cammini sono ordinamenti di semplificazione, completi se la precedenza è totale. Estensioni di ordinamenti sui termini ed atomi a letterali, clausole e insiemi di clausole.

Firma:

Totale ore: 36

Ventunesima lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 10 dicembre 2012. **Durata:** 2 ore

Discussione sugli ordinamenti di termini e se debbano essere correlati alla dimensione dei termini. *Ordinamento di Knuth-Bendix* su termini. *Teorema*: l'ordinamento di Knuth-Bendix è un ordinamento di semplificazione, completo se la precedenza è totale. *Strategie basate su ordinamenti*. Restrizione di regole d'inferenza d'espansione mediante ordinamenti: risoluzione binaria ordinata, fattorizzazione ordinata, risoluzione ordinata. Un sistema di inferenza refutazionalmente completo per la logica del prim'ordine: risoluzione binaria ordinata e fattorizzazione ordinata come regole di espansione, ed eliminazione di tautologie, sussunzione e semplificazione clausale come regole di contrazione.

Firma:

Totale ore: 38

Ventiduesima lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 13 dicembre 2012. **Durata:** 2 ore

Assegnamento del progetto valido come prova parziale per l'esame: un dimostratore di teoremi per risoluzione ordinata. Lifting lemma per la risoluzione ordinata.

Firma:

Totale ore: 40

Ventitreesima lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 17 dicembre 2012. **Durata:** 2 ore

Strategia con *insieme di supporto*. Ragionamento equazionale. Simboli interpretati e non. Come l'uguaglianza sia un simbolo interpretato. Assiomi dell'uguaglianza per un dato insieme di clausole. *E-interpretazione* e *E-soddisfacibilità*. *Teorema*: sia S un insieme di clausole ed E_S l'insieme degli assiomi dell'uguaglianza per S : S è E-soddisfacibile se e solo se $S \cup E_S$ è soddisfacibile.

Firma:

Totale ore: 42

Ventiquattresima lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 20 dicembre 2012. **Durata:** 2 ore

Teorema di Herbrand per la logica al primo ordine con uguaglianza, usando la E-insoddisfacibilità invece della insoddisfacibilità. Discussione dell'uso della risoluzione con gli assiomi dell'uguaglianza. Regole di inferenza che incorporino gli assiomi dell'uguaglianza: *paramodulazione* e sua correttezza. Restrizione delle inferenze mediante ordinamenti: *paramodulazione ordinata* e *sovrapposizione*. Come paramodulazione ordinata e sovrapposizione non formino da sole un sistema di inferenza refutazionalmente completo se ristrette a lati massimali di equazioni massimali, equazioni massimali e letterali massimali. Soluzione: aggiungere la *fattorizzazione equazionale* per restaurare la completezza refutazionale. Un'inferenza di contrazione per l'uguaglianza: la *semplificazione equazionale*. Uso di un ordinamento ben fondato nella semplificazione equazionale per escludere sequenze infinite di semplificazione. La *riflessione* o risoluzione ordinata con $x \simeq x$. Un sistema di inferenza refutazionalmente completo per la logica al primo ordine con uguaglianza: risoluzione binaria ordinata, fattorizzazione ordinata, paramodulazione/sovrapposizione ordinata, fattorizzazione equazionale e riflessione come regole di espansione, ed eliminazione di tautologie, sussunzione, semplificazione clausale e semplificazione equazionale come regole di contrazione.

Firma:

Totale ore: 44

Venticinquesima lezione

Luogo (Aula): I. **Data:** 7 gennaio 2013. **Durata:** 2 ore

Ripasso ed esercizi in preparazione della prova finale.

Firma:

Totale ore: 46

Ventiseiesima lezione

Luogo (Aula): M. **Data:** 10 gennaio 2013. **Durata:** 2 ore

Ripasso ed esercizi in preparazione della prova finale.

Firma:

Totale ore: 48