

## II. Filtrage spatial.

### A. Introduction.

Le filtrage spatial est utilisé pour le traitement des images en optique cohérente. En éclairant une image sur diapositive, par une onde plane monochromatique et cohérente, on obtient dans le plan focal d'une simple lentille une figure de diffraction à l'infini (Fraunhofer) dont l'amplitude est, si on néglige l'influence du diamètre de la lentille, proportionnelle à la transformée de Fourier de la transmittance de l'image. En interposant des filtres dans le plan focal de la lentille, on peut supprimer certaines fréquences spatiales du spectre puis ensuite observer l'image après traitement. Comme en électronique la réalisation de filtrages de type passe-bas, passe-haut, passe-bande est aisément réalisable. En optique ces filtres permettent de supprimer un bruit qui altère la qualité d'une image, d'améliorer le contraste des bords et la visibilité des détails, de modifier le contraste de l'image.

L'utilisation de filtres plus sophistiqués qui agissent sur l'intensité et sur la phase (tels que les hologrammes) rend possible la reconnaissance de formes sur une image : recherche sur une lame de microscope d'un microbe particulier entouré d'un grand nombre de globules rouges, reconnaissance de caractères ou de mots dans un texte, identification d'empreintes de doigts ou de signatures ...

On peut aussi améliorer une photographie dégradée par une mauvaise mise au point. La comparaison de photographies ayant peu de différences est facilitée car il est plus commode de comparer les spectres des images plutôt que les images elles-mêmes.

Au cours de cette séance de travaux pratiques l'emploi de filtres simples (masques) illustrera le principe du filtrage spatial.

### B. Rappels de cours.

#### 1. Diffraction de Fraunhofer dans le plan focal d'une lentille.

Grâce aux propriétés fouriérisantes des lentilles, la figure de diffraction de Fraunhofer (à l'infini) d'un objet quelconque apparaît à distance finie, dans le plan focal image d'une lentille (Figure 1). Si l'objet de transmittance  $t(x,y)$  est situé dans le plan focal objet d'une lentille mince convergente de focale  $f$ , l'amplitude en un point  $M(x',y')$  du plan focal image est, en négligeant l'influence du diamètre du support de la lentille, proportionnelle à la transformée de Fourier de la transmittance :

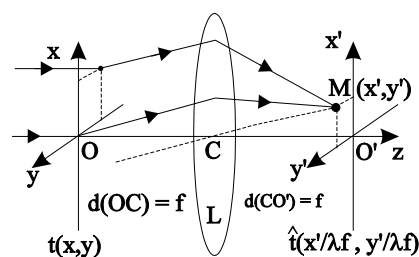


Figure 1 Diffraction de Fraunhofer

$$A(M) \propto \text{TF}_{(u,v)}[t(x,y)] = \hat{t}(u,v) \text{ avec } u = x'/\lambda f \text{ et } v = y'/\lambda f.$$

On dispose donc, dans le plan focal image, du spectre  $\hat{t}(u,v)$  de l'objet  $t(x,y)$ .

## 2. Montages pour le filtrage optique.

### a) Montage 4f (double diffraction).

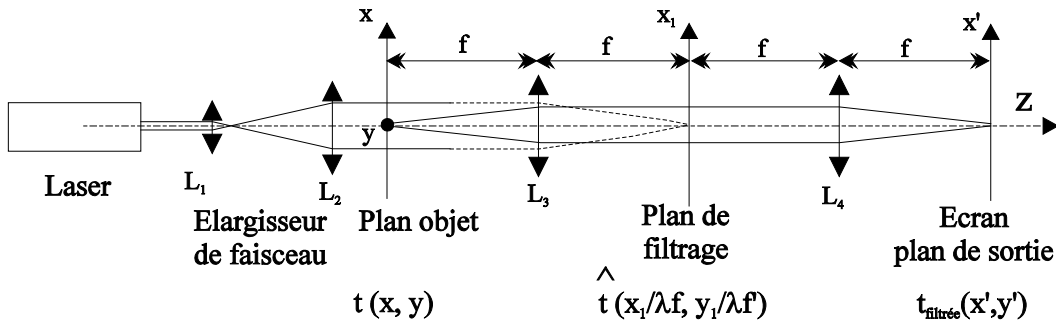


Figure 2 Montage 4f

Le montage de la Figure 2 est du type double diffraction. L'objet que l'on désire traiter, est un cliché transparent de transmittance en amplitude  $t(x, y)$ . Cet objet est éclairé par une onde plane monochromatique et placé dans le plan focal objet d'une lentille mince convergente de focale  $f$  ( $L_3$ ). Son spectre  $\hat{t}(x_1/\lambda f, y_1/\lambda f) = \hat{t}(u, v)$  apparaît donc dans le plan focal image de la lentille : c'est le **plan de filtrage**, plan dans lequel seront placés les filtres simples (masques) qui bloqueront certaines fréquences spatiales. La transformation de Fourier est à nouveau effectuée par une seconde lentille identique  $L_4$  placée à la distance  $2f$  de la précédente. Cela transforme le spectre de  $\hat{t}(u, v)$  en une image filtrée  $t_{\text{filtrée}}(x', y')$  dans le plan focal image de  $L_4$ , c'est le **plan de sortie** dans lequel on observe l'image filtrée de l'objet. L'image filtrée est une image reconstruite à partir du spectre modifié de l'objet. Dans le cas où il n'y a pas de filtre dans le plan de filtrage et en négligeant l'influence du diamètre des lentilles, on obtient dans le plan de sortie une image inversée identique à l'objet :  $t_{\text{filtrée}}(x', y') = t(-x, -y)$ , car le grandissement transversal  $G_t$  du montage 4f est égal à -1. Si on note  $h(x_1, y_1)$  la fonction de filtrage et  $\hat{h}(x'/\lambda f, y'/\lambda f)$  sa transformée de Fourier, l'amplitude dans le plan de filtrage peut s'écrire (à une constante près) :

$$\hat{t}(x_1/\lambda f, y_1/\lambda f) h(x_1, y_1).$$

On a alors dans le plan de sortie :

$$t_{\text{filtrée}}(x', y') = \text{TF}_{(x'/\lambda f; y'/\lambda f)} [\hat{t}(x_1/\lambda f, y_1/\lambda f) h(x_1, y_1)] = t(-x', -y') * \hat{h}(x'/\lambda f, y'/\lambda f).$$

L'image se présente donc comme une convolution entre le signal non filtré  $t(-x', -y')$  et la transformée de Fourier de la fonction de filtrage.  $\hat{h}(x'/\lambda f, y'/\lambda f)$  est appelée réponse impulsionnelle du filtre. En multipliant le spectre du signal d'entrée (objet) par une fonction de filtrage  $h(x_1, y_1)$ , nous réalisons une opération de filtrage linéaire.

### b) Montage à une seule lentille.

Dans le cas où le filtrage est effectué avec des masques (pas de filtre agissant sur la phase), l'utilisation d'une seule lentille est suffisante pour réaliser un banc de filtrage spatial (Figure 3).

L'objet et l'image sont dans des plans conjugués. Si l'objet est situé à une distance  $d$  de la lentille de focale  $f$ , la répartition de l'amplitude complexe dans le plan focal de la lentille est à une constante près :

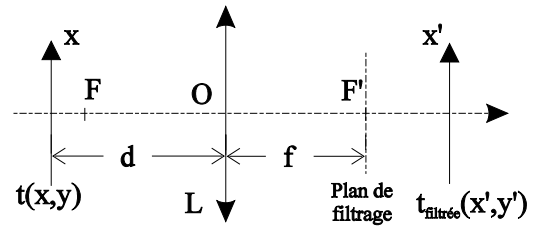


Figure 3 Montage à une seule lentille

$$\hat{t}(x'/\lambda f, y'/\lambda f) \exp\left(i\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\lambda f} \left(1 - \frac{d}{f}\right)\right).$$

Il apparaît un terme exponentiel qui est un terme de phase; seul le terme  $\hat{t}(x'/\lambda f, y'/\lambda f)$  est lié à la structure de l'image. Un masque placé en un point  $M(x', y')$  du plan focal image éliminera le couple de fréquences spatiales ( $u = x'/\lambda f, v = y'/\lambda f$ ) comme s'il agissait sur la transformée de Fourier exacte dans un montage  $4f$ .

En plaçant des masques (fentes, trous, ...) dans le plan de filtrage (plan focal image de la lentille), on supprime des fréquences spatiales de l'objet et on observe aussitôt, dans le plan de sortie (plan image), les modifications engendrées sur l'image. Avec le montage à une seule lentille, le grandissement transversal  $G_t$  peut être différent de -1 et l'expression de  $t_{\text{filtrée}}$  s'obtient par :

$$t_{\text{filtrée}}(x', y') = \exp(i\phi) [t(x'/G_t, y'/G_t) * \hat{h}(x'/\lambda f, y'/\lambda f)]$$

le terme de phase  $\exp(i\phi)$  n'est pas observable, l'œil détecte l'intensité :

$$I_{\text{filtrée}}(x', y') = \left| t(x'/G_t, y'/G_t) * \hat{h}(x'/\lambda f, y'/\lambda f) \right|^2$$

### 3. Spectre d'une trame.

Considérons une trame formée de lignes verticales alternativement claires et sombres. Les lignes claires ont une largeur  $\varepsilon$  et sont distantes de  $a$  ( $a > \varepsilon$ ); la trame est limitée par un support carré de côté  $L$  avec  $L \gg a$ . La transmittance s'écrit donc :

$$t(x, y) = \Pi(x/L) \Pi(y/L) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - na) * \Pi(x/\varepsilon).$$

avec :  $\Pi(x/L) = 1$  pour  $-L/2 \leq x \leq L/2$   
 $\Pi(x/L) = 0$  pour les autres valeurs de  $x$ .  
 et  $\delta(x - na) = 1$  si  $x = na$   
 $\delta(x - na) = 0$  si  $x \neq na$

Si la trame est placée dans le plan objet d'un montage  $4f$ , dans le plan de filtrage l'amplitude s'écrit :

$$\hat{t}(u, v) = \frac{L^2 \varepsilon}{a} \left[ \frac{\sin(\pi u L)}{\pi u L} \frac{\sin(\pi v L)}{\pi v L} \right] * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - n/a) \frac{\sin(\pi u \varepsilon)}{\pi u \varepsilon}$$

l'intensité est donc :

$$\begin{aligned} I(u, v) &= I_0 \left[ \text{sinc}^2(\pi u L) \text{sinc}^2(\pi v L) \right] * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(u - \frac{n}{a}) \text{sinc}^2(\pi u \varepsilon) \\ &= I_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2[\pi L(u - \frac{n}{a})] \text{sinc}^2(\pi v L) \text{sinc}^2(\pi u \varepsilon) \end{aligned}$$

Le produit du carré des sinus cardinaux représente la figure de diffraction à l'infini à travers une ouverture carrée de côté  $L$ . Comme  $L$  est grand devant  $a$ , ces figures de diffraction sont pratiquement localisées sur les couples de fréquences spatiales ( $u = n/a$ ,  $v = 0$ ), ce qui correspond dans le plan de filtrage à des figures de diffraction centrées aux points de coordonnées : ( $x_1 = \lambda f u = \lambda f n/a$ ,  $y_1 = \lambda f v = 0$ ). L'intensité de ces figures de diffraction est modulée par la figure de diffraction d'une fente unique de largeur  $\varepsilon$ .

L'intensité du spectre de la trame est représentée sur la Figure 4 et la Figure 5.

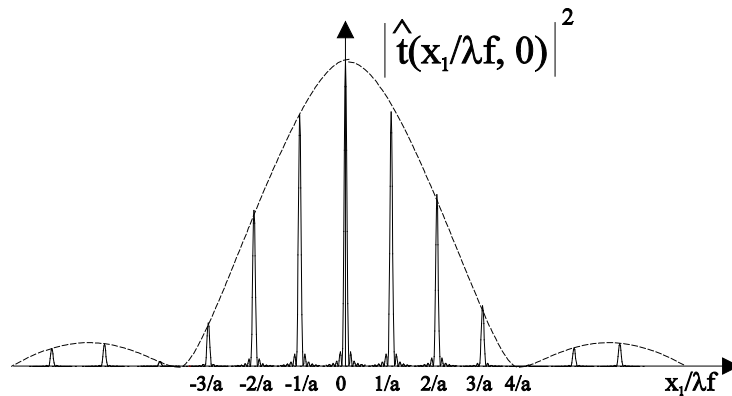


Figure 4 Intensité dans le plan de filtrage

Le spectre de la trame est localisé sur l'axe  $Ox_1$  car la trame n'a pas de périodicité spatiale suivant l'axe des ordonnées.

Sur l'axe des abscisses on distingue les différentes fréquences spatiales qui constituent notre objet.

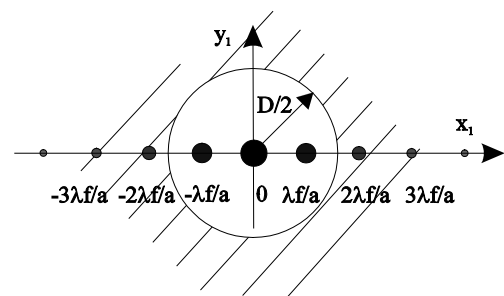


Figure 5 Observation de l'intensité dans le plan de filtrage

- la fréquence  $u = 0$  correspond à un ordre de diffraction nul : elle produit dans le plan de sortie un éclaircissement uniforme (c'est l'analogue de la composante continue en électronique).
- les fréquences  $u = -1/a$  et  $u = 1/a$  correspondent aux ordres de diffraction -1 et +1, elles produisent dans le plan de sortie une variation sinusoïdale de l'amplitude de fréquence  $1/a$  (c'est l'analogue du fondamental en électronique). On remarque que la fréquence négative apparaît car le spectre est défini en notation complexe : une variation sinusoïdale  $\cos(2\pi x/a) = [\exp(i2\pi x/a) + \exp(-i2\pi x/a)]/2$  admet pour fréquences spatiales :  $1/a$  et  $-1/a$ .

- De même les fréquences  $-2/a$  et  $2/a$  définissent une variation sinusoïdale de fréquence  $2/a$  (cela équivaut en électronique au 2<sup>ème</sup> harmonique )...

Si on place un diaphragme de diamètre  $D$  dans le plan de filtrage (Figure 5), seules les fréquences spatiales comprises entre  $-D/(\lambda f_2)$  et  $D/(\lambda f_2)$  sont transmises ; on réalise un filtrage de type passe-bas et la fréquence de coupure du filtre est :  $D/(\lambda f_2)$ . Lorsque seules les fréquences  $-1/a$ ,  $0$ , et  $1/a$  sont conservées, l'amplitude filtrée dans le plan de sortie a l'allure d'une trame sinusoïdale.

## C. Expérimentations.

### 1. Réalisation du montage expérimental.

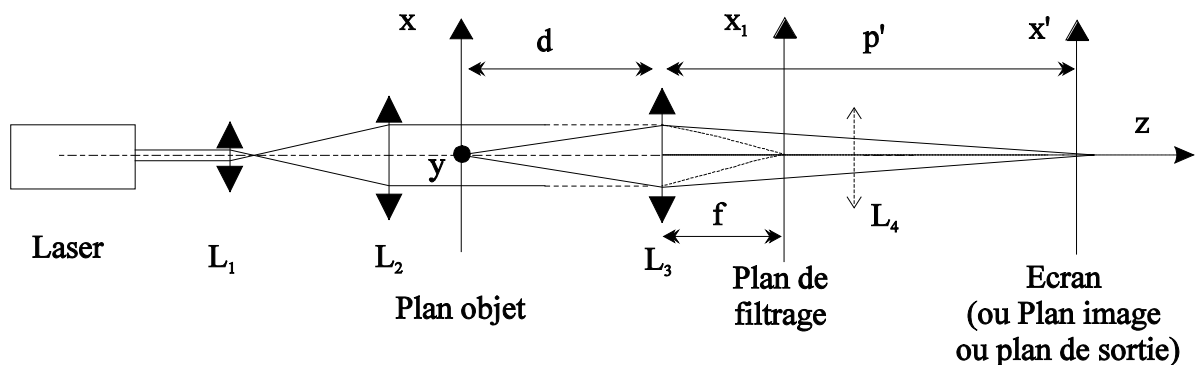


Figure 6 Montage expérimental à une lentille pour le filtrage optique (la lentille  $L_4$  est insérée uniquement pour projeter l'image du plan de filtrage sur l'écran).

Sachant que le laser HeNe 5mW ( $\lambda = 632.8$  nm) est déjà fixé et réglé avec son faisceau parallèle au banc d'optique, réaliser soigneusement, en suivant les indications ci-après, le montage à une seule lentille de la Figure 6.

- L'élargisseur de faisceau constitué par une lentille  $L_1$  de focale 5 mm et une lentille  $L_2$  de focale 200 mm, sera réglé par autocollimation en plaçant le point focal objet de  $L_2$  sur la face de sortie du support de la lentille  $L_1$ . Vérifier à l'aide d'une feuille blanche quadrillée le parallélisme du faisceau après la lentille  $L_2$ . Par action sur les vis de serrage des supports, bloquer les positions des lentilles  $L_1$  et  $L_2$  sur le banc d'optique.
- Placer et bloquer la lentille  $L_3$  de focale 200 mm à environ 40 cm après la lentille  $L_2$ . Ajuster la position du support de l'objet  $T_2$  (diapositive d'une trame) pour que l'image de  $T_2$  se forme sur un écran situé sur le mur de la salle (plan image). Lorsque que l'image est nette bloquer la position du support de  $T_2$  et faire vérifier le montage par l'enseignant

## 2. Observation du spectre d'une trame.

L'objet utilisé est la diapositive notée  $T_1$  formée de fentes de largeur  $\varepsilon$  et distantes de  $a$ . Vérifier, à l'aide d'une feuille de papier blanc, que le spectre de la trame est dans le plan focal de  $L_3$ , puis pour faciliter son observation, former son image, en utilisant une lentille supplémentaire  $L_4$  de focale 50 mm, sur l'écran situé sur le mur. Les observations des spectres seront toujours effectuées en insérant la lentille  $L_4$  qui formera l'image du plan de filtrage sur l'écran.

- (1) Faire un schéma représentant côte à côte dans le plan  $xOy$  l'allure de la trame  $T_1$  et celle de son spectre. Pourquoi le spectre est-il pratiquement localisé sur un axe  $Ox$  ou  $Oy$  ? Combien peut-on observer d'ordres de diffraction ?
- (2) Peut-on observer l'influence de la largeur  $\varepsilon$  des fentes sur le spectre ? Comment se manifeste-t-elle ?
- (3) Quel est l'effet de la taille nécessairement limitée de la diapositive ? Comment évolue le spectre de l'objet lorsqu'on réduit artificiellement la taille  $L$  de la diapositive en diminuant le nombre de traits éclairés ?
- (4) Le spectre du signal est-il modifié lorsqu'on translate l'objet dans le plan  $xOy$  ou lorsqu'on lui fait subir une rotation autour de l'axe  $Oz$  ? Justifiez vos observations.

## 3. Calibration du plan de filtrage avec une trame de pas connu.

Utiliser comme objet la trame étalon dont la période est  $n = 80$  traits/cm. Après avoir placé une feuille de papier sur l'écran d'observation situé contre le mur, visualiser sur celui-ci l'image du plan de filtrage.

- (1) Pointer avec précision, en utilisant un crayon à papier, les positions des différentes fréquences spatiales. Récupérer la feuille et graduer les axes  $Ox$  et  $Oy$  en  $\text{mm}^{-1}$ . Attention, pour que cette calibration reste valable il est impératif de ne plus modifier la distance entre la lentille  $L_3$  et l'écran de projection.
- (2) Dédire de la calibration précédente le grandissement transversal apporté par la lentille  $L_4$ .
- (3) Déterminer le nombre de traits/mm des trames  $T_1$  et  $T_2$ .

## 4. Filtrage optique.

### a) Expériences d'Abbe et Porter

Ces expériences datent du début du siècle et fournissent une démonstration éclatante du mécanisme par lequel se forment les images cohérentes. Le filtre utilisé est une fente de largeur réglable. L'objet est la trame  $T_1$ .

- (1) En vous servant de la lentille  $L_4$  positionner avec précision la fente dans le plan de filtrage, et sélectionner les ordres de diffraction suivants : -1, 0, +1.

Enlever la lentille  $L_4$  et décrire l'aspect de l'image filtrée. Commenter la variation de l'intensité dans le plan de sortie.

- (2) Décrire l'évolution de l'image lorsqu'on élargit progressivement la fente centrée sur l'ordre zéro.
- (3) En faisant trois trous d'épingles sur une feuille, on désire réaliser un filtre permettant d'isoler les ordres -2, 0, +2. Quelle doit être la distance entre les trous (on donne  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ ) ? Utiliser un tel filtre et expliquer l'allure de l'image filtrée.
- (4) Quelle serait l'allure de l'image filtrée si on utilisait un filtre qui ne laisse passer que les ordres de diffraction 0, -3, +3, -6, +6, ... ?

### b) Filtrage sur une grille.

Visualiser le spectre de la grille  $G_1$ .

- (1) Pourquoi les ordres de diffraction ne sont-ils plus localisés sur un seul axe ? Les mailles de la grille sont-elles carrées ? Quelle est l'allure du pic de diffraction correspondant à l'ordre zéro ?
- (2) Mesurer en  $\text{mm}^{-1}$  la périodicité du spectre  $u'$ . En déduire le pas  $p$  de la grille.
- (3) Sélectionner avec la fente réglable les couples de fréquences spatiales  $(u, v)$  tels que  $v = 0$  et dessiner côte à côte l'allure du spectre modifié et celle de l'image filtrée. Justifier l'allure de l'image filtrée.
  - (a) Même question pour les couples suivants :  $(0, v)$  ;  $(u, u)$  ;  $(u, -u)$ .
  - (b) Quel est l'aspect de l'image filtrée si on laisse seulement passer les fréquences telles que :  $v$  est quelconque et  $u = 0$  ou  $u = -1$  ou  $u = +1$  ?

**c) Filtrage d'images.**

**(1) Filtrage passe-bas.**

Le filtrage passe-bas peut être réalisé par une fente de largeur et d'orientation variable, ou bien par un diaphragme de diamètre réglable, centrés dans le plan de filtrage.

(a) Sur les objets proposés  $O_1$  et  $O_2$ , effectuer un filtrage passe-bas et en déduire en  $\text{mm}^{-1}$  la largeur de bande nécessaire pour que :

- ♦ l'image observée soit de "bonne qualité"
- ♦ l'image soit reconnaissable.

(b) Déterminer en mm la taille des plus petits détails observables dans les deux images filtrées.

**(2) Filtrage passe-haut.**

On obtient un filtrage de type passe-haut en plaçant un écran opaque au centre du plan de filtrage. En utilisant le filtre  $F_1$ , réaliser un filtrage passe-haut pour les objets précédents. Quels est le caractère marquant de ce type de filtrage ? Justifier les figures observées. Mesurer en  $\text{mm}^{-1}$  la fréquence de coupure du filtre proposé.

**(3) Filtrage d'objets tramés.**

(a) Comparer les spectres de l'objet  $O_1$  non tramé avec celui du même objet accolé à la trame  $T_1$  ou  $T_2$ .

(b) Effectuer un filtrage passe bande autour des ordres -1, 0, +1 du spectre de l'objet  $O_3$  tramé avec le trame étalon. Justifiez théoriquement vos observations.

(c) Si la fréquence de la trame plaquée contre l'objet est  $a$ , quelle doit être la fréquence spatiale maximale de l'objet pour que l'on puisse obtenir après filtrage adéquat, une image filtrée identique à l'objet ? (en électronique ce résultat est connu sous le nom de théorème de Shannon).

(d) Effectuer un détramage de la photographie  $O_{T1}$ . Quelle est, en  $\text{mm}^{-1}$ , la fréquence de coupure du filtre utilisé ? L'image filtrée est-elle altérée ?



- (e) Observer le spectre de la photographie  $O_{T3}$  , quelles sont les caractéristiques (orientation et pas) du tramage de cet objet.

**d) Strioscopie.**

C'est un filtrage de type passe-haut, dans lequel seul l'ordre 0 (composante continue de l'amplitude) est supprimé. Ce type de filtrage met en évidence dans une image les détails d'un objet qui introduisent de petits retards de phase lorsqu'ils sont traversés par la lumière. Visualiser en utilisant le filtre  $S_1$ , l'image de deux des objets suivants :

- ◆ lame de verre sur laquelle se trouve une empreinte de doigts
- ◆ dissolution de quelques grains de sucre dans une cuve remplie d'eau
- ◆ goutte de glycérine tombant dans une cuve d'eau
- ◆ plume
- ◆ lame de rasoir
- ◆ les objets  $O_1, O_2 \dots$

Citer une application possible de ce type de filtrage.

**5. Questions en forme de conclusion.**

Comment est-il possible de stocker sur une même film plusieurs clichés photographiques qui pourront être ensuite restitués intégralement l'un après l'autre par opération de filtrage ?

Que se passe-t-il dans le plan de sortie lorsqu'on place dans le plan de filtrage un écran opaque percé d'ouvertures circulaires très fines placées à intervalle régulier :  $a$  , sur l'axe des  $x$  ? Comment peut-on appeler ce type de filtre ?

