

# Transition de courants volumiques / surfaciques dans un câble coaxial

par **André DEIBER**

Lycée Fustel de Coulanges - 67000 Strasbourg

**Olivier KEMPF**

IUFM d'Alsace - Site de Strasbourg

et **Laurent MARKIEWICZ**

Lycée Fustel de Coulanges - 67000 Strasbourg

GRESEP Groupe de recherche de l'Université Louis Pasteur et de l'IUFM d'Alsace

## RÉSUMÉ

*L'effet de peau reste souvent un objet théorique pour les étudiants, vu l'absence de contact expérimental direct. Pourtant un câble coaxial permet aisément de mettre en évidence la transition courants volumiques / courants surfaciques lorsque le rayon du conducteur devient voisin de la profondeur de peau, via l'évolution de l'inductance linéique du câble.*

*En outre les divers paramètres de la modélisation électrocinétique sont mesurés indépendamment, ce qui permet de dégager expérimentalement et d'étudier quantitativement l'influence de l'effet de peau sur l'atténuation d'un signal en haute fréquence. La confrontation aux données des constructeurs disponibles sur Internet dégage l'existence d'autres causes d'affaiblissement à des fréquences dépassant 400 MHz.*

## 1. RÉSISTANCE, INDUCTANCE ET EFFET DE PEAU

Le câble coaxial est un objet d'étude expérimentale classique en ce qui concerne les propriétés liées à la propagation : vitesse de phase, ondes stationnaires, réflexion en bout de ligne, impédance caractéristique, etc. L'approche que nous proposons porte sur des objectifs différents :

- mesurer tous les paramètres électrocinétiques du câble *via* une expérience spécifique à chacun ;
- observer l'apparition de l'effet de peau dans l'évolution de l'inductance linéique et ce pour des fréquences de l'ordre de quelques dizaines de kilohertz ;
- étudier l'atténuation du signal en haute fréquence ( $> 1$  MHz) : analyse de la déformation d'un signal, nécessité des répéteurs, norme associée.

Cette étude peut faire l'objet de séances de travaux pratiques, vu la simplicité des expériences proposées. Le câble retenu correspond à la référence RG58C/U, ses caracté-

ristiques techniques peuvent être aisément trouvés sur Internet.

### 1.1. Structure d'un câble coaxial : exemple de ligne à constantes réparties

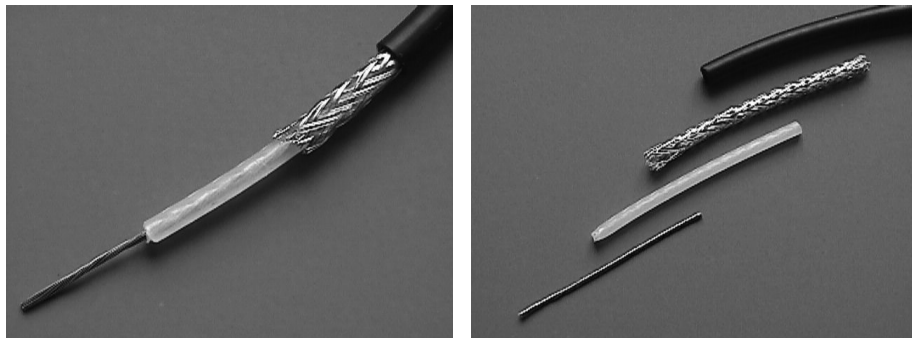


Figure 1 : Photographies d'un câble coaxial.

Comme le montre les photographies ci-dessus le conducteur central ou âme du câble est un fil cylindrique en cuivre étamé de rayon  $r_1 \cong 0,43$  mm tandis que le conducteur extérieur ou gaine est constituée de fils de cuivre étamé, beaucoup plus fins que l'âme, tressés sur un isolant (polyéthylène) de rayon  $r_2 = 1,47$  mm (données indiquées par le constructeur). La gaine peut être modélisée par une couche métallique comprise entre les rayons  $r_2$  et  $r_3 > r_2$ . Comme les fils formant la gaine glissent les uns sur les autres,  $r_3$  est difficile à mesurer directement.

Les propriétés d'une telle ligne de transmission peuvent être décrites en termes de circuit à constantes réparties.

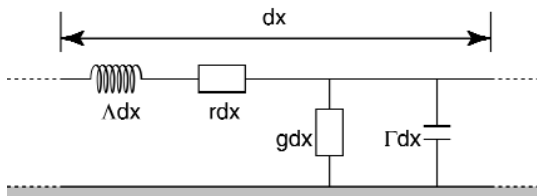


Figure 2 : Modélisation électrocinétique d'une portion de câble.

On définit alors le coefficient d'auto-inductance  $\Delta$  par unité de longueur de la ligne en  $\text{H.m}^{-1}$ , la résistance  $r$  par unité de longueur en  $\Omega.\text{m}^{-1}$ , la capacité  $\Gamma$  par unité de longueur en  $\text{F.m}^{-1}$  et la conductance de fuite (ou encore perditance)  $g$  par unité de longueur en  $\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$ . La conductance de fuite modélise les imperfections de l'isolant (ici du polyéthylène) séparant les deux conducteurs cylindriques coaxiaux du câble coaxial. La ligne est formée par l'association de quadripôles, chaque quadripôle correspondant à une lon-

gueur  $dx$  de ligne.

## 1.2. Impact de l'effet de peau sur la résistance de l'âme du câble

La valeur de  $r$  en  $\Omega \cdot m^{-1}$  s'obtient en sommant les deux contributions dues au conducteur central et à la gaine qui forme l'enveloppe extérieure de l'isolant. Celles-ci sont aisément mesurées avec un ohmmètre.

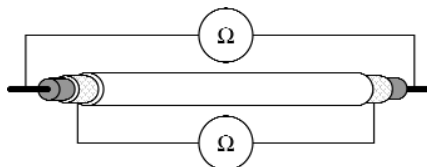


Figure 3 : Mesure des résistances.

On trouve pour l'âme  $1 \Omega$  et aux environs de  $0,5 \Omega$  pour la gaine, soit  $r \cong 0,045 \Omega \cdot m^{-1}$ . Connaissant la conductivité du cuivre  $\gamma = 5,9 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ , ces données peuvent être exploitées pour déterminer les rayons  $r_i$  :  $R_{ame} = \frac{l}{\gamma_{Cu} \pi r_1^2}$  soit  $r_1 = \sqrt{\frac{l}{\gamma_{Cu} \pi R_{ame}}} = 0,86 \text{ mm}$  (cette valeur peut être validée en partant de l'expression de l'impédance caractéristique :  $Z_C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 50 \Omega$  et  $R_{gaine} = \frac{l}{\gamma_{Cu} \pi (r_3^2 - r_2^2)}$  d'où  $(r_3^2 - r_2^2) = \frac{l}{\gamma_{Cu} \pi R_{gaine}}$  et finalement  $(r_3 - r_2) \cong \frac{1}{2r_2} \frac{l}{\gamma_{Cu} \pi R_{gaine}} = 0,12 \text{ mm}$ .

Il va de soi que la résistance ainsi déterminée est la résistance en basses fréquences, elle est susceptible d'augmenter suite à l'effet de peau.

Pour un conducteur limité par une surface plane l'effet de peau se caractérise par une décroissance exponentielle en  $\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)$  avec  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \pi f}}$  de la densité de courant lorsqu'on s'éloigne de la surface de séparation vide / conducteur. Cette conclusion qualitative reste valable pour des conducteurs de géométrie plus complexe si  $\delta$  est très inférieur au rayon de courbure des surfaces conductrices.

*A priori*, si  $\delta$  est supérieur au rayon du fil  $r$ , l'effet de peau ne se manifeste pas. En conséquence il va se manifester dans le conducteur central lorsque la profondeur de peau sera de l'ordre de  $r_1$  soit pour des fréquences de l'ordre de 24 kHz, mais il faudra atteindre des fréquences voisines de 1 MHz pour le ressentir dans la gaine (en prenant  $\delta \approx \frac{r_2 - r_1}{2}$ ). Il ne s'agit là, bien entendu, que d'ordre de grandeur.

Mais cette influence de la fréquence sur la résistance linéique est très délicate à mettre en évidence. En effet, l'impédance d'une portion de câble comporte deux termes

en série  $rdx$  et  $\Lambda dx$ , et il s'avère que le terme  $\Lambda\omega$  va l'emporter devant  $r$ . Par contre les pertes dans le conducteur vont se traduire par une atténuation très sensible des signaux en hautes fréquences comme nous le verrons plus loin.

### 1.3. Modification de l'inductance linéique par effet de peau

L'effet inductif masque donc largement la résistance. Cette circonstance ne compromet pas la mise en évidence de l'effet de peau, car l'évolution de la répartition des courants en particulier dans l'âme du câble entraîne aussi une modification de l'inductance linéique. En basse fréquence, les courants sont volumiques, la densité de courant  $\vec{j}$  est uniforme tandis qu'en hautes fréquences les courants sont repoussés vers la surface ( $r = r_1$ ) et se rapprochent du modèle d'une densité de courants surfaciques ce qui modifie l'énergie magnétique totale  $W_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{ame} B^2 dV + \iiint_{isolant} B^2 dV + \iiint_{gaine} B^2 dV$  d'une portion de câble. A partir de ces considérations énergétiques, on peut montrer qu'en négligeant la contribution de la gaine :

- en basse fréquence,  $L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \times l + \frac{\mu_0}{8\pi} \times l = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{4} \right)$  ;
- en haute fréquence,  $L(\infty) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \times l$ .

Si on fait abstraction de la gaine, on voit que la prévision théorique pour le rapport  $\frac{L(\infty)}{L_0}$  est voisine de 0,83. L'effet de peau doit donc entraîner une chute de 17 % de la valeur de  $\Lambda$ .

Pour des calculs plus complets on pourra se référer à [1].

A ce stade on voit donc que l'effet de peau va se manifester principalement dans le conducteur central. Dans une première approximation négligeons la variation de  $r$  avec la fréquence devant celle de l'inductance linéique  $\Lambda$ .

### 1.4. Protocole de l'expérience et premiers résultats expérimentaux

Lorsque le câble est fermé à son extrémité il se comporte comme une inductance propre  $L = \Lambda \times l$  (lorsque l'extrémité est ouverte le câble est équivalent à un condensateur  $C = \Gamma \times l$ ). Pour mesurer le coefficient  $\Lambda$ , on détermine d'abord l'impédance du câble en fonction de la fréquence dans le domaine 100 Hz-300 kHz. Les appareils de mesure ont souvent beaucoup de mal à suivre à ces fréquences, il faudrait donc utiliser l'oscilloscope comme voltmètre alternatif et un bon multimètre de table comme ampèremètre alternatif.

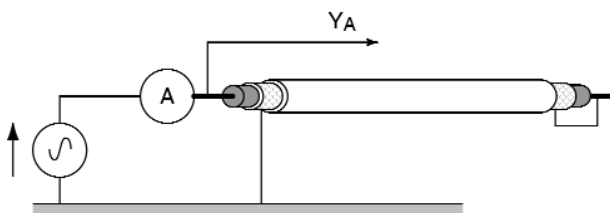


Figure 4 : Montage de mesure de  $A(\omega)$

Pour des fréquences inférieures à 30 kHz, on peut tenter de modéliser le câble par une association série  $L$ ,  $R$  série par  $Z = \sqrt{R_0^2 + L_0^2 \omega^2}$ .

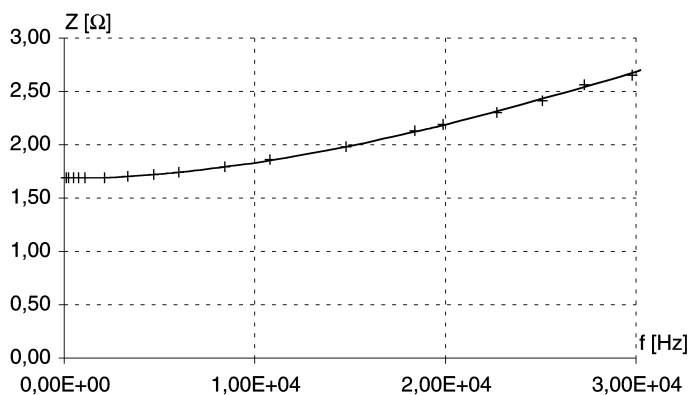


Figure 5 : Impédance du câble en fonction de la fréquence jusqu'à 30 kHz.

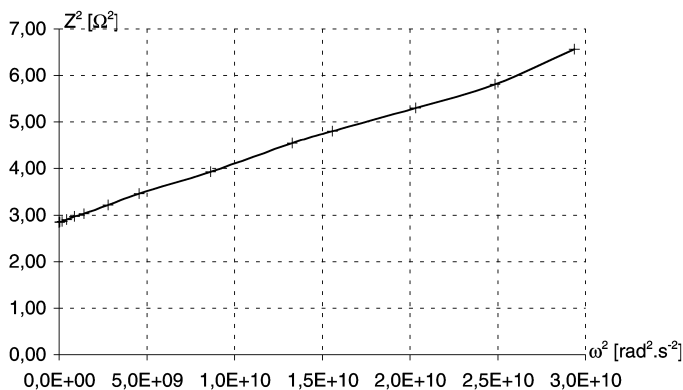


Figure 6 : Linéarisation : représentation de  $Z^2$  en fonction de  $\omega^2$ .

La modélisation est très satisfaisante et donne  $R_0 \cong 1,60 \, \Omega$  et  $L_0 = 11 \, \mu\text{H}$  soit  $\Lambda_{BF} = 3,33 \cdot 10^{-7} \, \text{H.m}^{-1}$ . La valeur donnée pour l'inductance est très voisine de la valeur théorique  $10 \, \mu\text{H}$ . L'erreur est probablement à attribuer à la simplicité du modèle, l'effet de peau modifiant aussi  $R_0$ . Cette dernière est néanmoins en bon accord avec la mesure directe à l'ohmmètre.

### 1.5. Mise en évidence de la transition courants volumiques / courants surfaciques : paramètre de transition

Par contre pour des fréquences plus élevées le modèle  $\underline{Z} = R_0 + jL_0\omega$  ne s'accorde pas bien avec les mesures. Le décrochement avec le modèle se situe au voisinage de 60 kHz. Cet écart au modèle est à attribuer à l'évolution de  $\Lambda$  (et en toute rigueur de  $r$ ).

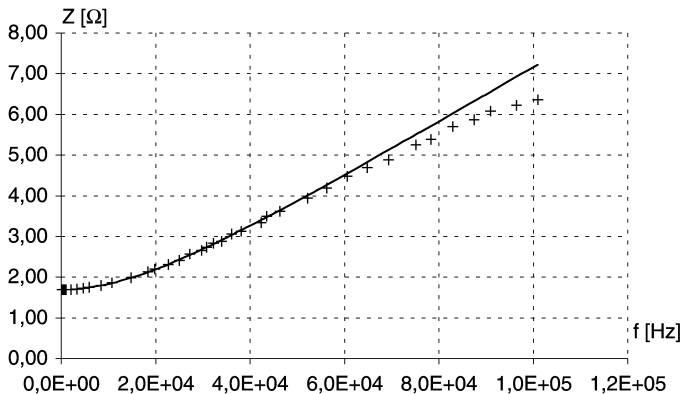


Figure 7 : Impédance et modèle  $\underline{Z} = R_0 + jL_0\omega$  en fonction de la fréquence jusqu'à 120 kHz.

Introduisons alors un paramètre de transition défini par  $x = \frac{r_1}{\delta} = r_1 \sqrt{\mu_0 \gamma \pi f}$ , puis représentons le rapport  $Z/Z_{\text{mod}}$  en fonction de cette variable (cf. figure 8).

Calculons par ailleurs l'auto-inductance du câble  $L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R_0^2}$  en fonction de la fréquence. Pour les basses fréquences on garde la valeur  $L_0$  donnée par la modélisation précédente pour éviter une dispersion anormale des valeurs en très basses fréquences. En traçant le graphe de  $\frac{L(x)}{L(0)}$  on voit apparaître la transition de  $L_0$  à  $L_\infty$   $\left( \lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = L(\infty) \right)$  lorsque le paramètre  $x$  est de l'ordre de l'unité. Le rapport  $\frac{L(\infty)}{L_0}$  est voisin de 0,83 comme le prévoyait notre estimation préalable. On a donc  $\Lambda_{HF} \cong 2,55 \cdot 10^{-7} \, \text{H.m}^{-1}$ .

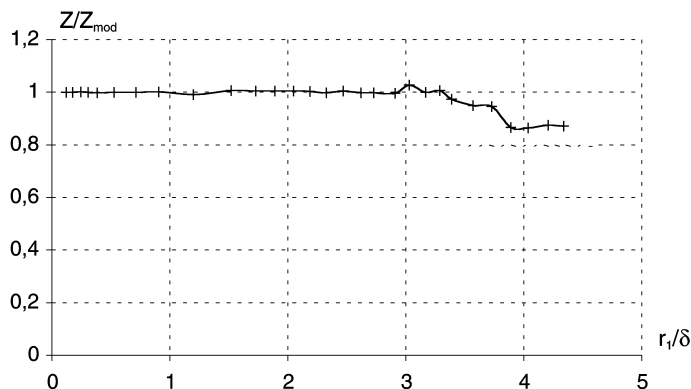


Figure 8 : Écart par rapport au modèle  $\underline{Z} = R_0 + jL_0 \omega$  en fonction de  $r_1/\delta$ .

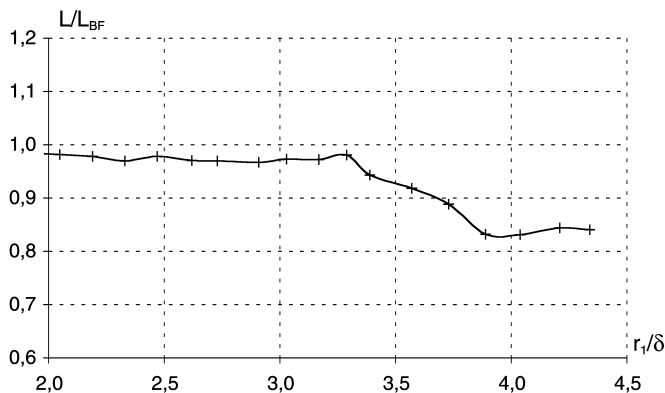


Figure 9 : Transition de l'inductance au voisinage de l'unité.

D'une manière plus précise la transition débute à  $x \cong 3$ , ce qui est relativement surprenant la valeur  $x \cong 1$  étant plus intuitive. Certes l'effet de peau se manifeste d'abord (donc pour  $x \cong 1$ ) au centre de l'âme du câble, mais le champ magnétique y est de toute façon très faible. L'énergie magnétique stockée dans le conducteur central ne commence à décroître sensiblement que lorsque  $\delta$  devient nettement supérieur à  $r_1$ , donc pour  $x \cong 3$ . D'autre part l'effet de peau a un double impact, une augmentation de la résistance linéique et une diminution de l'inductance linéique. L'observation de cette transition est relativement aisée, du fait d'une conjonction favorable de ces deux effets.

2. INDUCTANCE LINÉIQUE ET VITESSE DE PHASE DANS LE CÂBLE

2.1. Mesure directe de la vitesse de phase

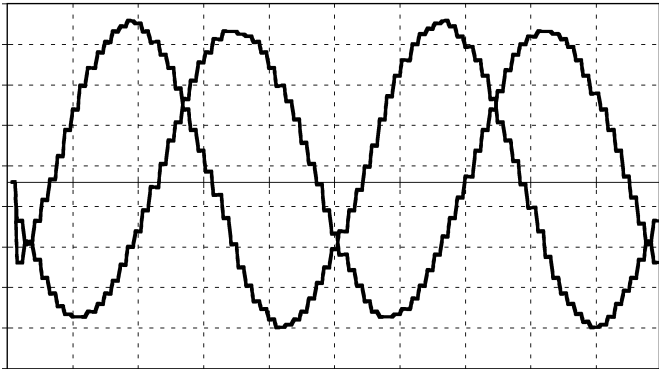


Figure 10 : Durée de propagation d'un signal sinusoïdal, base de temps de l'oscilloscope 200 ns/div, longueur 66 m.

2.2. Détermination de la capacité linéique

En supposant que la vitesse de propagation des signaux électriques dans le câble est de l'ordre de la vitesse de la lumière dans le vide, le temps de propagation sur la longueur de  $l = 33$  m de câble est environ de 100 ns.

Lors d'un régime transitoire de durée grande devant ce temps de propagation, on peut considérer que le câble (lorsqu'il est ouvert à l'autre extrémité) se comporte comme un condensateur : la charge est répartie de manière quasi-uniforme sur la gaine d'une part et sur l'âme d'autre part. La capacité  $\Gamma$  par unité de longueur peut être aisément mesurée *via* une expérience de « charge » du condensateur-câble.

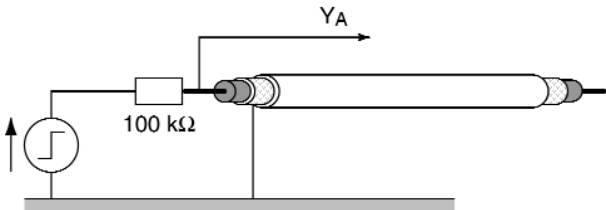


Figure 11 : Principe du montage de mesure du temps de montée.

Le temps de montée 10 % / 90 % de la tension aux bornes du câble, indiqué par l'oscilloscope numérique, varie nettement en fonction de la longueur.

$t_r$ en ms	5,32	4,15	2,8	1,94	0,70
Longueur en m	264	198	132	99	33



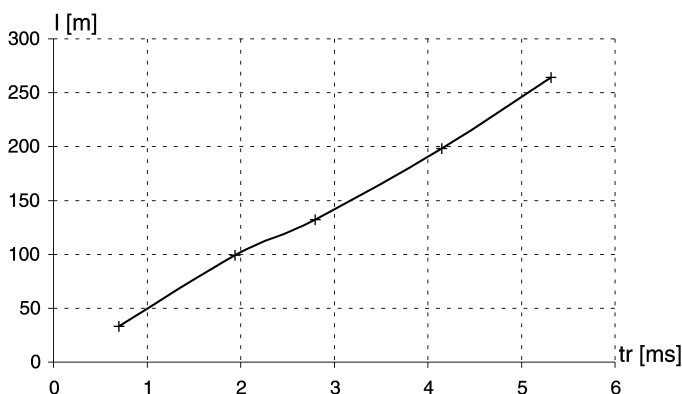


Figure 12 : Temps de montée en fonction de la longueur.

Le temps de montée du signal  $t_r$  est proportionnel à la longueur  $l$  de câble  $t_r = 2,03 \cdot 10^{-5} \times l$ . La résistance de charge de  $100 \text{ k}\Omega$  n'est pas négligeable devant la résistance d'entrée de l'oscilloscope ( $1 \text{ M}\Omega$ ), par contre la capacité du câble ( $3,3 \text{ }\mu\text{F}$ ) est grande devant la capacité de l'oscilloscope ( $20 \text{ pF}$ ).

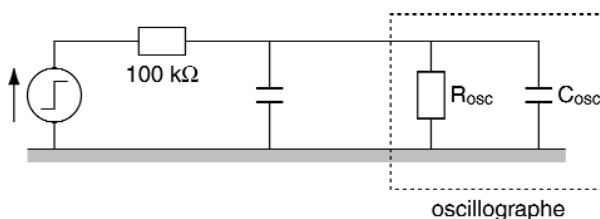


Figure 13 : Prise en compte de l'entrée de l'oscilloscope.

Le temps de montée s'écrit alors  $t_r = \frac{R_c R_{osc}}{R_c + R_{osc}} C_{cable} \ln 9$  soit  $t_r = 1,99 \cdot 10^5 \times \Gamma \times l$ . La comparaison avec la pente de la droite modélisée donne  $\Gamma \cong 103 \text{ pF.m}^{-1}$  (pratiquement la donnée indiquée par le constructeur  $\Gamma \cong 100 \text{ pF.m}^{-1}$ ). Il est intéressant de remarquer que l'on retrouve la valeur théorique  $\Gamma_{theo} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$  avec  $2r_2 \cong 2,95 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_r = 2,26$  pour le polyéthylène.

### 2.3. Valeur de l'inductance en haute fréquences

Dans un câble sans pertes, tension et intensité vérifient l'équation d'onde de d'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \Gamma \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

dont les solutions sont la superposition d'une onde progressive vers les  $x$  croissants et d'une onde progressive vers les  $x$  décroissants. La vitesse de phase est donnée par  $v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\Gamma \Lambda}}$  constante. Celle-ci étant connue pour des fréquences supérieures au MHz, on en tire l'inductance linéique  $\Lambda = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ . On retrouve la limite en hautes fréquences étudiée plus haut. Au-dessus de 200 kHz, le milieu n'est donc pas dispersif.

## 3. INFLUENCE DE LA FRÉQUENCE SUR L'ATTÉNUATION DU SIGNAL

### 3.1. L'équation du télégraphiste

L'intensité  $i$  du courant électrique et la tension  $v$  entre les deux conducteurs cylindriques du câble coaxial sont des fonctions du temps  $t$  et de l'abscisse  $x$  qui repère un point de la ligne. Connaître le comportement de la ligne revient à étudier l'évolution spatio-temporelle de l'intensité et de la tension en tenant compte des pertes dans le diélectrique et dans les conducteurs. Celle-ci est décrite par l'équation du télégraphiste :

$$\frac{f^2 v}{fx^2} = \Gamma \Lambda \frac{f^2 v}{ft^2} + (g\Lambda + r\Gamma) \frac{fv}{ft} + rgv$$

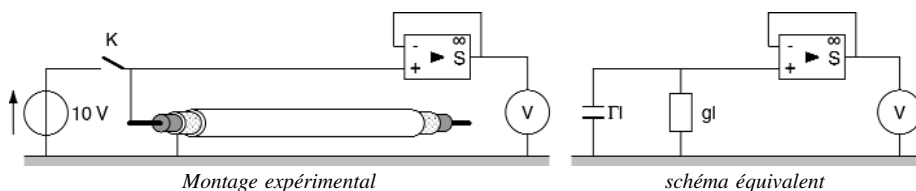
Dans un premier temps, comparons expérimentalement les deux contributions  $g\Lambda$  et  $r\Gamma$  à l'atténuation dans le câble.

### 3.2. Mesure des pertes dans le diélectrique : résistance de fuite en parallèle $gdx$

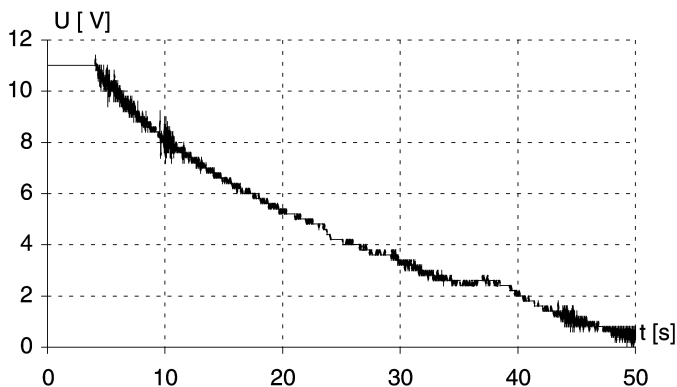
Les pertes dans le diélectrique peuvent provenir d'une très légère conduction ou de la dissipation d'énergie lors de sa polarisation. Par ailleurs, d'après les données disponibles dans le Hand Book, la constante diélectrique  $\epsilon_r$  est quasi-indépendante de la fréquence jusqu'à 100 MHz.

La résistance du manchon en polyéthylène est *a priori* très grande, il est donc illusoire d'utiliser un multimètre car son impédance d'entrée serait très inférieure à la résistance que l'on désire déterminer. Pour contourner ce problème on utilise un amplificateur opérationnel en montage suiveur pour estimer la résistance de fuite.

Pour cela dans le montage ci-contre (cf. figure 14), on ferme l'interrupteur  $K$  en enregistrant l'évolution dans le temps de la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel.



**Figure 14 :** Montage de mesure de la résistance de fuite.



**Figure 15 :** Lente décharge du condensateur-câble dans le diélectrique.

La valeur expérimentale du temps de décroissance  $\tau_d \cong 22$  s donne directement la résistance de l'isolant en polyéthylène  $R_{fuite} = \frac{\tau_d}{\Gamma \times l} \approx 7.10^9 \Omega$  puis  $g \cong 4,3.10^{-12} \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ .

L'expression théorique de cette résistance cylindrique est  $R_{fuite} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\gamma_{isolant}l}$  permet une estimation de la conductivité du polyéthylène  $\gamma_{isolant} \cong 8.10^{-13}$  SI.

L'amplificateur opérationnel doit présenter des courants de polarisation très faibles (type TL081 par exemple). Dans ce cas le courant de fuite du câble  $i_{fuite} = \frac{U}{R_{fuite}}$  (de l'ordre de 1 nA) reste très supérieur au courant de polarisation (50 pA d'après le constructeur).

A ce stade on dispose de tous les paramètres électrocinétiques du câble  $\Gamma = 100 \text{ pF} \cdot m^{-1}$ ,  $\Lambda = 2,51.10^{-7} \text{ H} \cdot m^{-1}$ ,  $g \cong 4,3.10^{-12} \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$  et  $r \cong 0,045 \Omega \cdot m^{-1}$ . Comme  $g\Lambda \cong 10^{-18}$  et  $r\Gamma = 4,5.10^{-12}$  l'équation du télégraphiste se simplifie en  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \Gamma\Lambda \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + r\Gamma \frac{\partial v}{\partial t} + rgv$ .

### 3.3. Pertes dans le cuivre

En guidant les ondes électromagnétiques les conducteurs dissipent une partie de

l'énergie du fait des courants induits qui y apparaissent. Pour déterminer l'influence des pertes énergétiques lors de la propagation, cherchons des solutions du type onde progressive harmonique se déplaçant vers les  $x$  croissants, soit, en travaillant en grandeurs complexes :  $\underline{v}(x, t) = \underline{v}_0 \exp(j(\omega t - kx))$  et  $\underline{i}(x, t) = \underline{i}_0 \exp(j(\omega t - kx))$ ,  $k$  étant *a priori* complexe. L'équation des télégraphistes donne la relation de dispersion caractéristique de la ligne électrique  $k^2 = -(r + j\Lambda\omega)(g + j\Gamma\omega)$ .

D'après les valeurs numériques trouvées plus haut  $r \ll \Lambda\omega$  et  $g \ll \Gamma\omega$ . On peut tirer une forme approchée du nombre complexe  $\underline{k}$  :  $k^2 = -(r + j\Lambda\omega)(g + j\Gamma\omega)$  soit par mise en facteur  $k^2 = \Lambda\Gamma\omega^2 \left(1 - j\frac{r}{\Lambda\omega}\right) \left(1 - j\frac{g}{\Gamma\omega}\right)$  et compte tenu des expressions numériques  $k^2 \cong \Lambda\Gamma\omega^2 \left(1 - \frac{j}{\omega} \left(\frac{r}{\Lambda} + \frac{g}{\Gamma}\right)\right)$ .

Soit finalement la forme approchée du nombre complexe :

$$\underline{k} = \sqrt{\Lambda\Gamma} \omega \left(1 - \frac{j}{2\omega} \left(\frac{r}{\Lambda} + \frac{g}{\Gamma}\right)\right)$$

dont la partie imaginaire vaut  $\Im m \underline{k} = -\frac{\sqrt{\Lambda\Gamma}}{2} \left(\frac{r}{\Lambda} + \frac{g}{\Gamma}\right) \cong -\frac{r\Gamma}{2\sqrt{\Lambda\Gamma}} = -\frac{r}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} = -\frac{r}{2Z_c}$  car  $\frac{g}{\Gamma} \ll \frac{r}{\Lambda}$ .

L'amplitude de l'onde décroît exponentiellement en  $\exp(\Im m \underline{k} \times x)$ .

### 3.4. Vérification expérimentale : atténuation d'un signal sinusoïdal

#### 3.4.1. Un premier modèle

Pour tester cette prévision nous avons utilisé une dizaine de câbles placés en série et fermé sur l'impédance caractéristique de  $50 \Omega$ . Précisons que les bouchons de fin de câble disponible dans le commerce sont nettement plus efficaces qu'une impédance réalisée de manière discrète et ce pour un prix très abordable. En d'autres termes, les élèves ont réalisé un réseau câblé série en travaux pratiques en reliant un poste à l'autre, puis en relevant l'amplitude indiquée par leur oscilloscope.

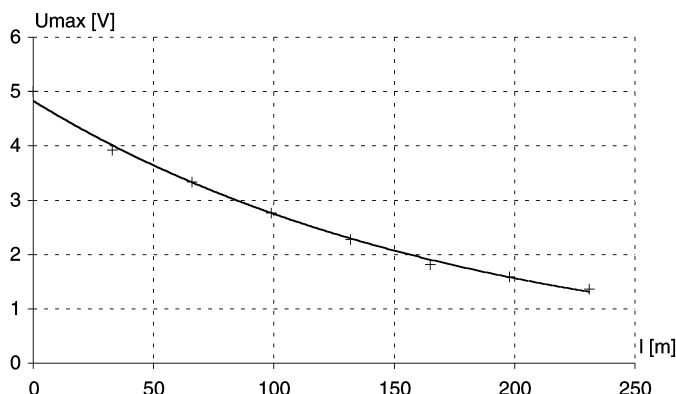


Figure 16 : Atténuation d'un signal à 10 MHz en fonction de la longueur.

La modélisation s'accorde bien avec une exponentielle décroissante :

$$U = 5 \exp(-5,61 \cdot 10^{-3} x)$$

Si la forme est satisfaisante le coefficient numérique  $\Im m \underline{k}$  est en net désaccord avec la valeur théorique du modèle simple vu plus haut car  $\Im m(\underline{k}) = -\frac{r}{2Z_c}$  soit  $\Im m(\underline{k}) \cong -5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ . En supposant que  $r_{BF} = r_{HF}$  la théorie prévoit une distance caractéristique de l'atténuation en  $\left| \frac{1}{\Im m \underline{k}} \right|$  de 2000 m, tandis qu'à 10 MHz l'expérience donne 178 m<sup>(1)</sup>. Il est donc clair qu'il ne faut pas oublier l'incidence de l'effet de peau sur la résistance et donc sur l'atténuation.

### 3.4.2. De la nécessité d'améliorer le modèle : le retour en force de l'effet de peau

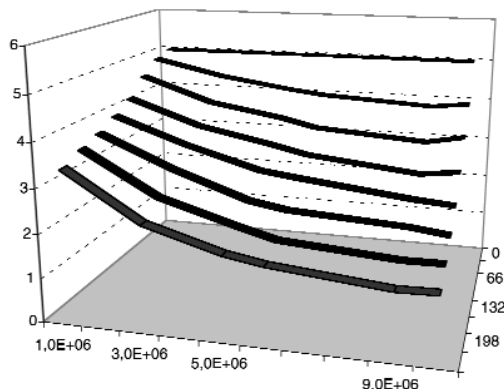
D'une manière plus précise si nous supposons que les courants ne circulent que dans une fine pellicule d'épaisseur  $\delta$  [2] ( $j$  uniforme si  $r \in [r_1 - \delta, r_1] \cup [r_2, r_2 + \delta]$  et nul ailleurs), la résistance linéique devient  $R \cong \frac{1}{\gamma_{Cu} 2\pi\delta} \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right]$  soit :

$$r(f) \cong \frac{1}{\gamma_{Cu} 2\pi\delta} \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \propto \sqrt{f}$$

Ceci permet de proposer le modèle  $U = U_0 \exp \left[ -\frac{x}{4Z_c} \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi\gamma_{Cu}}} \sqrt{f} \right]$  vu l'expression de la profondeur de peau.

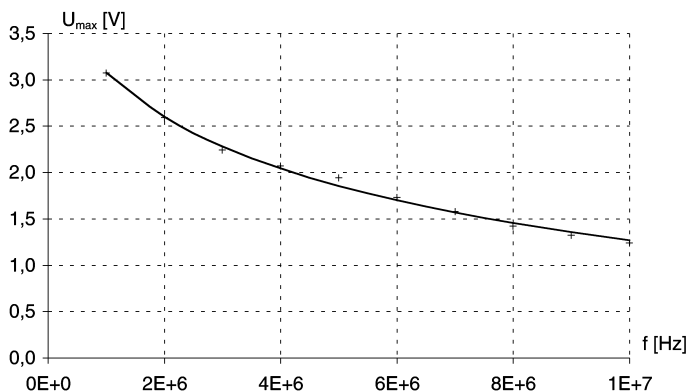
(1) Cette valeur n'est pas fortuite. En effet, la norme IEEE 802-3 Ethernet précise que le 10Base2 (le chiffre 2 signifie  $\cong 200$  m) utilise un câble coaxial de type RG58. La longueur maximale d'un segment est de 185 m (à comparer avec le résultat de la régression). La distance maximale à un débit de 10 Mbits/s et donc de 185 m entre deux répéteurs.

Le graphe expérimental ci-dessous (cf. figure 17) en trois dimensions (longueur, fréquence, amplitude) souligne bien cette double dépendance en  $x$  et  $f$  de l'atténuation du signal lors de la propagation sur le câble.



**Figure 17 :** Influence de la fréquence et de la longueur du câble sur l'amplitude du signal.

Pour une longueur donnée  $l$  de 200 m et une tension de sortie du générateur de 4 V, l'affaiblissement du signal varie bien en  $\sqrt{f}$  entre 1 MHz et 10 MHz (cf. figure 18) comme  $u = 4,64 \exp(-2,048.10^{-6} \times l \times \sqrt{f})$ . On peut noter que le modèle ne s'applique pas en très basse fréquence ( $4,64 > 4$ ), mais on ne trouve qu'un ordre de grandeur du coefficient numérique devant le produit  $l \times \sqrt{f}$ . En effet l'expression théorique de ce coefficient est  $\sqrt{\frac{\mu_0}{\pi \gamma_{Cu}}} \frac{1}{4Z_c} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$  qui donne  $1,27.10^{-7} < 2,05.10^{-6}$ , ce qui tempère quelque peu la pertinence de notre modèle.



**Figure 18 :** Amplitude du signal en fonction de la fréquence pour une longueur de 200 m entre 1 MHz et 10 MHz.

### 3.4.3. Confrontation à des données industrielles

Afin d'élargir le domaine de fréquence disponible pour une modélisation, nous avons recherché les caractéristiques d'atténuation du câble RG58 sur les sites Internet des constructeurs. Les données exprimées en dB/100 m doivent être converties en tension *via* la relation  $X(\text{dB}) = 20 \log\left(\frac{U_0}{U}\right)$ . La plage de fréquences que l'on peut ainsi étudier est considérablement élargie puisqu'elle s'étend jusqu'à 1,3 GHz.

Fréquence en MHz	14	28	50	100	144	200	400	435	600	800	1000	1300
Atténuation en dB/100 m	6,2	8	10,5	15,6	17,8	22,3	32,5	34	41,5	49	55,5	64

Confrontons alors le modèle  $U = A \exp(-B \times l \times \sqrt{f})$  à ces mesures :

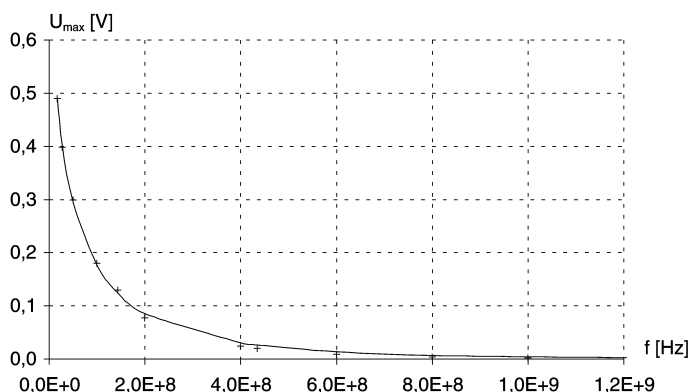


Figure 19 : Amplitude du signal en fonction de la fréquence pour une longueur de 100 m entre 1 MHz et 1,3 GHz.

Le coefficient  $B$  passe maintenant à  $1,74 \cdot 10^{-6}$  S.I., soit une amélioration de 16 % par rapport à nos mesures. L'écart résiduel avec l'expression théorique tient à la nature du conducteur. L'âme et la gaine sont en fait constituées d'un alliage Cuivre-Étain (72,5 %-27,5 %) ce qui entraîne une correction sur la valeur théorique de  $B$  :

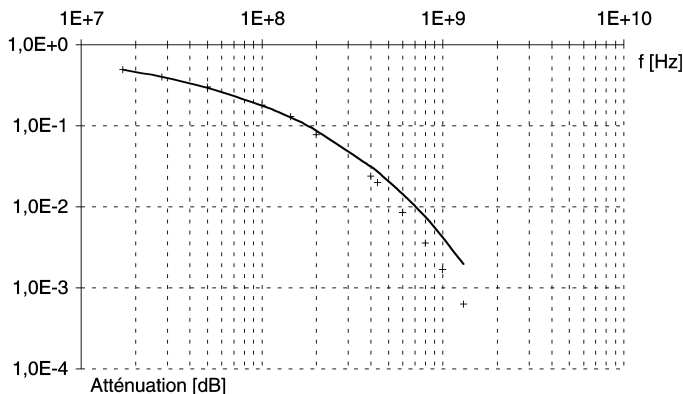
$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\pi \gamma_{Cu}}} \frac{1}{4Z_c} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{\pi \gamma_{Cu - Sn}}} \frac{1}{4Z_c} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

Comme  $\gamma_{Cu} > \gamma_{Cu - Sn}$  nous avons sous-évalué ce coefficient. Par ailleurs, nos mesures ne prenaient pas en compte les connecteurs BNC qui introduisent une atténuation supplémentaire.

### 3.4.4. Les limites du modèle : existence d'autres causes d'atténuation

En représentant l'amplitude en coordonnées logarithmique afin de ne pas écraser la perspective sur les fortes valeurs, on constate que l'effet de peau est bien responsable des

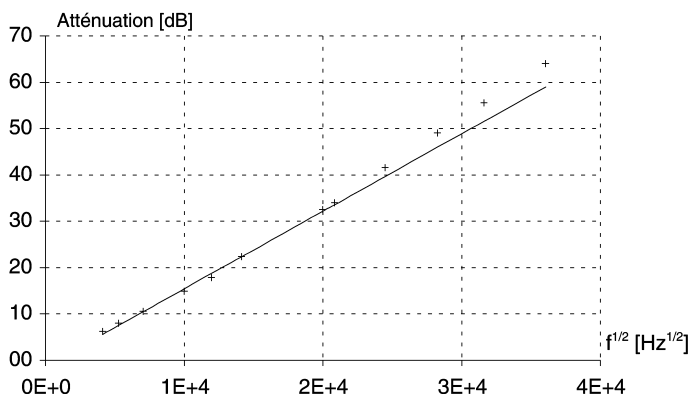
pertes jusqu'à 200 MHz, mais que d'autres causes surgissent progressivement lorsque la fréquence augmente.



**Figure 20 :** Amplitude du signal en fonction de la fréquence en coordonnées logarithmiques.

On peut entrevoir des pertes supplémentaires dans le diélectrique (à ce sujet le Hand Book reste muet sur le comportement en haute fréquence du polyéthylène), des pertes par rayonnement si le conducteur extérieur en forme de tresse est aéré ou encore une atténuation liée à des défauts de concentricité des conducteurs (coude, boucle...).

L'écart au modèle des pertes par effet de peau est encore plus visuel si on représente l'atténuation en dB en fonction de la racine carrée de la fréquence.

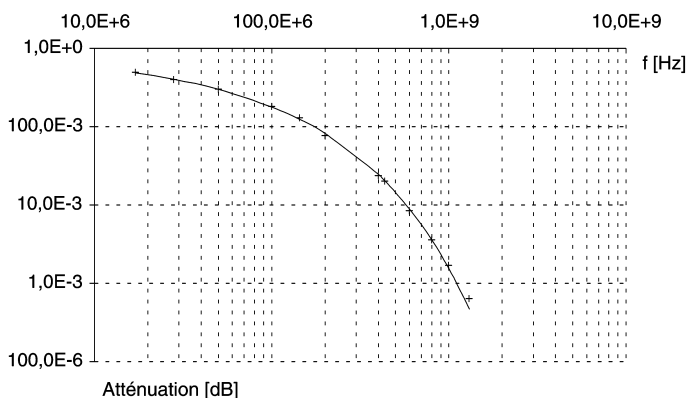


**Figure 21 :** Atténuation en dB/100 m en fonction de  $\sqrt{f}$  entre 1 MHz et 1,3 GHz.

Cette atténuation passe à 5,5 dB/100 m à la fréquence de travail habituelle 10 MHz d'un réseau câblé à 34 dB/100 m à 400 MHz. En haute fréquence les pertes sont donc considérables.



Montrons que cet écart peut être attribué aux pertes dans le diélectrique. Pour cela modélisons la permittivité relative du polyéthylène par une expression du type  $\underline{\epsilon}_r = \epsilon'_r - j\epsilon''_r$ , avec  $\epsilon''_r \ll \epsilon'_r$  a priori. Un calcul classique donne alors l'expression de la contribution à la partie imaginaire de  $\underline{k}$  :  $\Im m(\underline{k}) = \frac{\omega}{2c} \frac{\epsilon''_r}{\sqrt{\epsilon'_r}}$  soit numériquement  $\Im m(\underline{k}) = 7.10^{-9} \times \epsilon''_r \times f$  la fréquence étant exprimée en Hertz. Les pertes étant faibles, il suffit d'ajouter les deux contributions (effet de peau et diélectrique) à la constante d'atténuation ce qui donne la modélisation  $U = A \exp(-B \times l \times \sqrt{f} - C \times l \times f)$ . Comme le montre la figure 22, l'accord est maintenant excellent et correspond à une valeur de  $\epsilon''_r$  de l'ordre de 0,0025. Par ailleurs le paramètre B passe à  $1,46.10^{-6}$  ce qui est pratiquement la valeur théorique.



**Figure 22 :** Pertes par effet de peau et par polarisation du diélectrique.

Il devient donc clair que le câble coaxial est mal placé pour s'adapter à des débits plus élevés de l'ordre de 100 Mbits/s, et il appelé à être remplacé par des « canaux » plus performants en la matière comme la paire torsadée (10BaseT ou 100BaseT) par exemple pour rester dans des systèmes de même nature. Néanmoins ce câble reste pour les enseignants un sujet d'étude privilégié qui permet de concrétiser des concepts électromagnétiques souvent trop abstraits pour les étudiants. Le fait de jeter un pont entre une approche théorique et un objet technologique ne peut que renforcer l'intérêt de nos élèves pour la physique.

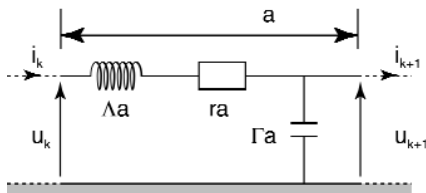
## BIBLIOGRAPHIE

- [1] *Bulletin de l'Union des Physiciens*, novembre 1994, vol. 88, n° 768.
- [2] LORRAIN P. et CORSON D.R. *Champs et ondes électromagnétiques*. Armand Colin, collection U. Ed. 1979.

## Annexe : modèles équivalents du câble coaxial en basses fréquences

Le type de branchement effectué en bout du câble conditionne son comportement électrocinétique en basses fréquences, lorsque la longueur  $L$  du câble est petite devant la longueur d'onde  $\lambda$  et devant la distance  $D = 2\pi r \sqrt{\frac{T}{\Lambda}}$  caractéristique de l'amortissement (comme nous le verrons ci-dessous). Ces deux conditions sont très largement respectées dans le cas d'un câble de 33 m de long pour des fréquences inférieures à 100 kHz.

Si l'extrémité est ouverte, il se comporte comme un condensateur, tandis qu'il est équivalent à une association série résistance / inductance dans le cas d'un branchement en court-circuit. Pour justifier ces affirmations, considérons l'association de  $n$  cellules décrites à la figure ci-dessous, où  $a = \frac{L}{n}$  représente une longueur caractéristique de la cellule. En pratique la conductivité du diélectrique peut-être négligée.



### ÉCRITURE MATRICIELLE DES RELATIONS ÉLECTROKINÉTIQUES

Pour la  $k^{ième}$  cellule, les relations électrocinétiques s'écrivent en régime sinusoïdal forcé :

$$\underline{i}_k = j\Gamma\omega a \underline{u}_{k+1} + \underline{i}_{k+1}$$

$$\text{et : } \underline{u}_k = [j\Lambda\omega a + ra] \underline{i}_k + \underline{u}_{k+1} = [-\Lambda\Gamma\omega^2 a^2 + jr\Gamma\omega a^2 + 1] \underline{u}_{k+1} + [j\Lambda\omega a + ra] \underline{i}_{k+1}$$

La condition  $L \ll \lambda = \frac{2\pi v_\varphi}{\omega}$  entraîne  $a\omega \ll v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ , ce qui permet de simplifier ces relations en ne conservant que les termes d'ordre 1 en  $\frac{a}{\lambda}$  ou  $\frac{a}{D}$ .

Réécrivons alors ce système de relations approchées sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{i}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & [j\Lambda\omega a + ra] \\ j\Gamma\omega a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_{k+1} \\ \underline{i}_{k+1} \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} [j\Lambda\omega a + ra] \\ \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} j\Gamma\omega a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix}$$

du type  $\begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix}$  en introduisant la tension  $v_k = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} i_k$  afin « d'homogénéiser » la matrice.

On en tire  $[M] = \begin{bmatrix} 1 & \left[ j \frac{2\pi a}{\lambda} + \frac{2\pi a}{D} \right] \\ j \frac{2\pi a}{\lambda} & 1 \end{bmatrix}$  en posant  $D = 2\pi r \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}}$ .

## DIAGONALISATION DE LA MATRICE ASSOCIÉE À UNE CELLULE

Pour déterminer la tension et l'intensité à l'entrée en fonction d'une contrainte en sortie, il est utile de diagonaliser cette matrice. Les deux valeurs propres sont :

$$X_1 = 1 + j \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{1 - j \frac{\lambda}{D}} \quad ; \quad X_2 = 1 - j \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{1 - j \frac{\lambda}{D}}$$

associées aux vecteurs propres  $Vec1 = \left( -\sqrt{1 - j \frac{\lambda}{D}}, 1 \right)$  et  $Vec2 = \left( \sqrt{1 - j \frac{\lambda}{D}}, 1 \right)$  exprimés dans la base  $(u, v)$ . Ces valeurs propres ne sont guère surprenantes dans la mesure où on retrouve les ondes progressives sinusoïdales dès lors que l'on peut négliger l'amortissement. On a en effet  $D \gg \lambda \rightarrow X_1 \cong 1 - j \frac{2\pi a}{\lambda} \cong \exp\left(-j \frac{2\pi a}{\lambda}\right)$  et  $X_2 \cong \exp\left(+j \frac{2\pi a}{\lambda}\right)$ .

## LA CONTRAINTÉ EN SORTIE DÉTERMINE L'IMPÉDANCE D'ENTRÉE

### Extrémité en court-circuit

Dans ce cas, le vecteur décrivant la sortie du câble vaut  $(0, v_n)$  ou encore :

$$(0, v_n) = \frac{v_n}{2} Vec1 + \frac{v_n}{2} Vec2$$

On en déduit le vecteur d'entrée  $(u_0, v_0) = X_1^n \frac{v_n}{2} Vec1 + X_2^n \frac{v_n}{2} Vec2$ , qui peut se réécrire  $\left( \frac{v_n}{2} \sqrt{1 - j \frac{\lambda}{D}} [X_2^n - X_1^n], \frac{v_n}{2} [X_2^n + X_1^n] \right)$ .

On en tire l'impédance d'entrée en repassant à la variable intensité et en notant que les valeurs propres sont toutes deux très voisines de l'unité  $Z_e = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \frac{\sqrt{1 - j \frac{\lambda}{D}} [X_2^n - X_1^n]}{[X_2^n + X_1^n]}$ ,

qui vaut approximativement  $\underline{Z}_e \cong \sqrt{\frac{A}{\Gamma}} \times \left(1 - j \frac{\lambda}{D}\right) \times \frac{2j\pi na}{\lambda} = nra + jna\Lambda\omega = R_{eq} + jL_{eq}\omega$  avec  $R_{eq} = r \times (na) = r \times L$  et  $L_{eq} = \Lambda \times (na) = \Lambda \times L$ . Ceci justifie la modélisation du câble par une association série résistance / inductance.

### Extrémité en circuit ouvert

Le vecteur de sortie est égal à :  $(\underline{u}_0, 0) = \frac{\underline{u}_0}{2\sqrt{1-j\frac{\lambda}{D}}} \text{Vec}1 - \frac{\underline{u}_0}{2\sqrt{1-j\frac{\lambda}{D}}} \text{Vec}2$ , ce

qui implique la structure du vecteur d'entrée :

$$\begin{aligned} (\underline{u}_0, \underline{v}_0) &= X_1^n \frac{\underline{u}_0}{2\sqrt{1-j\frac{\lambda}{D}}} \text{Vec}1 - X_2^n \frac{\underline{u}_0}{2\sqrt{1-j\frac{\lambda}{D}}} \text{Vec}2 \\ &= \left( \frac{\underline{u}_0}{2} [X_2^n + X_1^n], \frac{\underline{u}_0}{2\sqrt{1-j\frac{\lambda}{D}}} [X_2^n - X_1^n] \right) \end{aligned}$$

L'impédance d'entrée du câble vaut maintenant :

$$\underline{Z}_e \cong \sqrt{\frac{A}{\Gamma}} \times \frac{\sqrt{1-j\frac{\lambda}{D}}}{\frac{2j\pi na}{\lambda} \sqrt{1-j\frac{\lambda}{D}}} = \sqrt{\frac{A}{\Gamma}} \frac{v_\phi}{jna\omega} = \sqrt{\frac{A}{\Gamma}} \frac{1}{\sqrt{\Gamma\Lambda} jna\omega} = \frac{1}{jna\Gamma\omega} = \frac{1}{jC_{eq}\omega}$$

On retrouve bien l'impédance d'un condensateur.