

EDGAR MANUEL RODRIGUEZ

COD. 75 073 300

EL PENDULO SIMPLE

1. HISTORIA DEL PENDULO SIMPLE

El principio del péndulo fue descubierto por el físico y astrónomo italiano Galileo, quien estableció que el periodo de la oscilación de un péndulo de una longitud dada puede considerarse independiente de su amplitud (la amplitud es la distancia máxima que se aleja el péndulo de la posición de equilibrio – vertical).

Este descubrimiento lo hizo viendo las oscilaciones de una lámpara colgante en la Catedral de Pisa.

¿Qué quiere decir esto? Que aunque la intuición nos diga otra cosa, de lo único que depende el periodo de oscilación es de la longitud del hilo. No importa la pesa que se ponga.

Este fenómeno lo condujo a Galileo a indicar que podría utilizarse para regular la marcha de los relojes. (No obstante, cuando la amplitud es muy grande, el periodo del péndulo sí depende de ella). Galileo indico las posibles aplicaciones de este fenómeno, llamado **isocronismo**, en la medida del tiempo. Sin embargo, el movimiento del péndulo depende de la gravedad que es mas o menos intensa según la latitud y la altitud. Por ejemplo, el periodo de un péndulo dado será mayor en una montaña que a nivel del mar. Por eso, un péndulo permite determinar con precisión la aceleración local de la gravedad.

Luego surgió el péndulo de Foucault, llamado así en honor de su inventor, León Foucault. Se trata de un péndulo largo que puede oscilar libremente en cualquier plano vertical y capaz de oscilar durante horas. Se utiliza para demostrar la rotación de la Tierra y la fuerza de Coriolis.

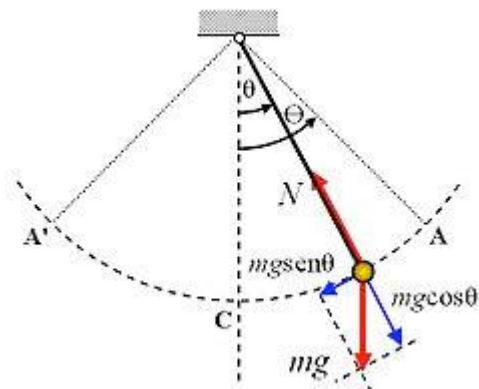
2. ¿Cuál es la diferencia entre **péndulo simple** y **péndulo físico**?

a. El **péndulo simple, IDEAL o matemático** es un sistema idealizado constituido por una partícula de **masa** m que está suspendida de un punto fijo O mediante un hilo inextensible y sin peso. Naturalmente es imposible la realización práctica de un péndulo simple, pero si es accesible a la teoría.

Método de Newton

Consideremos un péndulo simple, como el representado en la Figura. Si desplazamos la partícula desde la posición de equilibrio hasta que el hilo forme un ángulo Θ con la vertical, y luego la abandonamos partiendo del reposo, el péndulo oscilará en un plano vertical bajo

la acción de la **gravedad**. Las oscilaciones tendrán lugar entre las posiciones extremas Θ y $-\Theta$, simétricas respecto a la vertical, a lo largo de un arco de circunferencia cuyo radio es la longitud, ℓ , del hilo. El **movimiento es periódico**, pero no podemos asegurar que sea **armónico**.

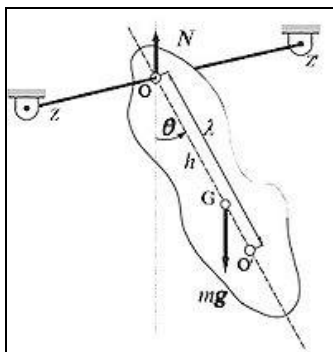


Para determinar la naturaleza de las oscilaciones deberemos escribir la **ecuación del movimiento** de la partícula. La partícula se mueve sobre un arco de circunferencia bajo la acción de dos fuerzas: su propio peso (mg) y la tensión del hilo (N). Tan sólo el peso de la partícula proporciona un componente tangencial a la trayectoria, de modo que la componente tangencial de la ecuación del movimiento, la única componente que nos interesa, se expresa como

$$F_t = -mg \sin \theta = ma_t$$

b. Un **péndulo compuesto, real o físico** es cualquier cuerpo rígido que pueda oscilar libremente en el campo gravitatorio alrededor de un eje horizontal fijo, que no pasa por su centro de masa.

El péndulo físico es un sistema con un sólo grado de libertad; el correspondiente a la rotación alrededor del eje fijo ZZ' (ver figura). La posición del péndulo físico queda determinada, en cualquier instante, por el ángulo θ que forma el plano determinado por el eje de rotación (ZZ') y el centro de gravedad (G) del péndulo con el plano vertical que pasa por el eje de rotación.



Llamaremos h a la distancia del centro de gravedad (G) del péndulo al eje de rotación ZZ' . Cuando el péndulo está desviado de su posición de equilibrio (**estable**) un ángulo θ , actúan sobre él dos fuerzas (mg y N) cuyo momento resultante con respecto al eje ZZ' es un vector dirigido a lo largo del eje de rotación ZZ' , en el sentido negativo del mismo; i.e.,

$$M_e = -mgh \sin \theta$$

3. APLICACIONES DEL PENDULO SIMPLE:

Las más importantes son:

a) Determinación de la aceleración de la gravedad.

Sabemos que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

y despejando g , tenemos: $g = 4\pi^2 \ell / T^2$. Sólo basta medir con buen nivel de precisión ℓ y T para obtener g .

Esta última expresión nos permite calcular con relativa facilidad la aceleración de la gravedad en un lugar determinado.

Esto constituye la aplicación científica de mayor importancia del péndulo. Para estas determinaciones se emplean **péndulos reversibles**, es decir, péndulos que pueden oscilar primero alrededor de un eje y después alrededor de otro. Colocado de tal modo que en cada una de esas posiciones el péndulo posea la misma longitud, y por lo tanto las oscilaciones son **isócronas** (igual tiempo de oscilación).

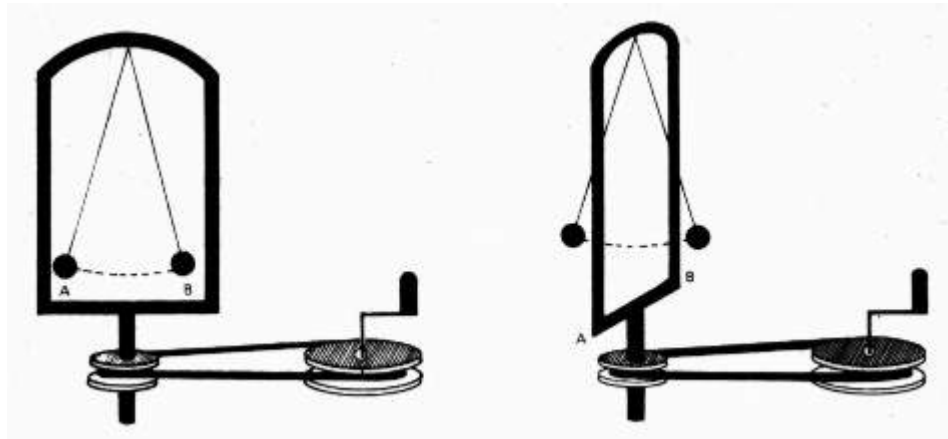
Así se logran valores de gran precisión. **Se debe tener en cuenta en estas determinaciones la temperatura, amplitud de las oscilaciones y las influencias del rozamiento del aire y del soporte del péndulo.**

El método de medición de g , con el péndulo, lo imaginó y expresó Huygens, y fue aplicado por el físico matemático Borda.

b) Determinación del movimiento de rotación de la Tierra.

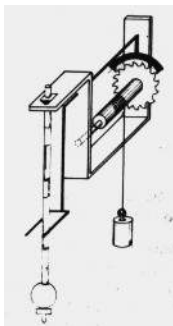
Si disponemos de un péndulo suspendido de un alambre como indica la figura, y procedemos a sacarlo de su posición de equilibrio, observaremos que el plano de oscilación del péndulo no varía al girar el alambre sostén.

Por tanto: **El plano de oscilación de un péndulo se mantiene invariable al modificarse la posición del “plano sostén”** (ver figura).



Foucault, haciendo uso de esa propiedad, pudo demostrar la existencia del movimiento de rotación de la Tierra. Empleó un péndulo que constaba de una esfera de cobre de 25 kilogramos provista de un fiel y suspendida de la cúpula del Panteón (París) por medio de un alambre de acero de 79 m de largo.

En el suelo dispuso una capa de arena húmeda en la cual el fiel de la esfera pendular marcaba los trazos de sus oscilaciones.



Así se pudo ver que, a medida que transcurría el tiempo, esas marcas se iban modificando. Como el plano de oscilación es constante, significaba ello que lo variable era el plano del soporte, es decir, el Panteón o, lo que es igual, la Tierra. En realidad, este experimento puede realizarse en una sala ordinaria con péndulo más corto.

Jean Bernard Léon Foucault [Foucault](#): Físico francés, nacido y muerto en

París (1819-68). **Entre sus trabajos recordamos la invención del giroscopio**, con el que puede determinarse la dirección del meridiano del lugar sin necesidad de la observación astronómica, el método para calcular la velocidad de la luz en el aire y en el agua, así como la demostración del movimiento de rotación de la Tierra valiéndose del péndulo.



c). Medición del tiempo: Huygens fue quien ideó un mecanismo para poder medir el tiempo. Sabemos que, para determinada longitud, el péndulo cumple una oscilación simple en un segundo. Por tanto, dando a un péndulo esa longitud, nos indicará, para cada oscilación, un tiempo igual a un segundo.

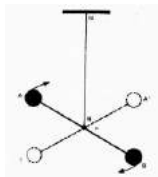
En otras palabras, si construimos un péndulo que efectúe en un día solar medio 86 400 oscilaciones, cada una de éstas nos indica un segundo. Un péndulo que reúna estas

condiciones, aplicado a un mecanismo motor (cuerda o pesas, que harán mover el péndulo) y a un sistema destinado a contar las oscilaciones, o sea, los segundos, constituye un reloj de péndulo (figura izquierda).



En los relojes portátiles (de bolsillo, despertadores, etc.) el péndulo está reemplazado por el volante (rueda) que produce el movimiento oscilatorio del péndulo.

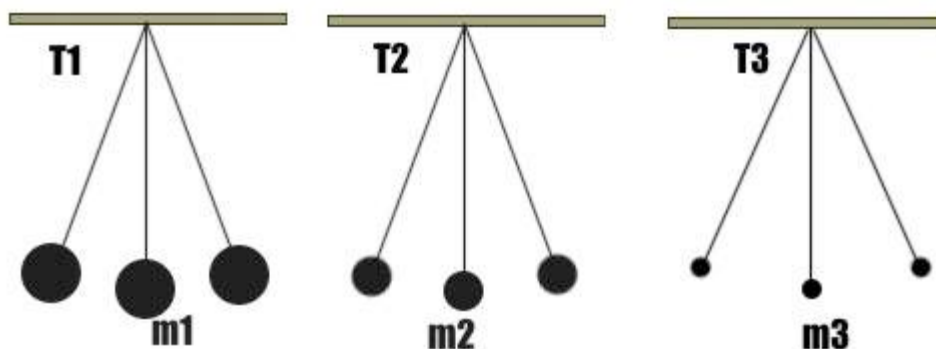
Cristian Huygens: Matemático y astrónomo holandés (1629-1695). Fue un verdadero genio de su siglo. Inventa el reloj de péndulo, y luego, el resorte espiral, para los de bolsillo. Enunció la teoría ondulatoria de la luz, esbozó lo que hoy llamamos **teorema de las fuerzas vivas**; haciendo girar una esfera de arcilla, dedujo que la Tierra no podía ser esférica.



4. LEYES DEL PENDULO:

4.1 LEY DE LAS MASAS

Suspendamos de un soporte (por ejemplo: del dintel de una puerta) tres hilos de coser de igual longitud y en sus extremos atemos sendos objetos de masas y sustancias diferentes . Por ejemplo: una piedra, un trozo de hierro y un corcho. Saquémoslos del reposo simultáneamente. Verificaremos que todos tardan el mismo tiempo en cumplir las oscilaciones, es decir, que todos “van y vienen” simultáneamente. Esto nos permite enunciar la ley de las masas:



LEY DE MASAS: Las tres masas de la figura son distintas entre sí, pero el periodo (T) de oscilación es el mismo. ($T_1=T_2=T_3$)

Los tiempos de oscilación de varios péndulos de igual longitud son independientes de sus masas y de su naturaleza, o también El tiempo de oscilación de un péndulo es independiente de su masa y de su naturaleza.

4.2 LEY DEL ISÓCRONO: Dispongamos dos de los péndulos empleados en el experimento anterior. Separámoslos de sus posiciones de equilibrio, de tal modo que los ángulos de amplitud sean distintos (pero no mayores de 6 o 7 grados).

Dejémoslos libres: comienzan a oscilar, y notaremos que, también en este caso, los péndulos “van y vienen” al mismo tiempo. De esto surge la llamada Ley del isocronismo (iguales tiempos):

*Para **pequeños ángulos de amplitud**, los tiempos de oscilación de dos péndulos de igual longitud son independientes de las amplitudes, o también: **El tiempo de oscilación de un péndulo es independiente de la amplitud (o sea, las oscilaciones de pequeña amplitud son isócronas).***

La comprobación de esta ley exige que los péndulos tengan la misma longitud para determinar que en efecto los péndulos son isocronos*, bastará verificar que pasan simultáneamente por la posición de equilibrio. Se llegará a notar que las amplitudes de algunos de ellos disminuyen más que las de otros, pero observaremos que aquella situación —el isocronismo— subsiste.

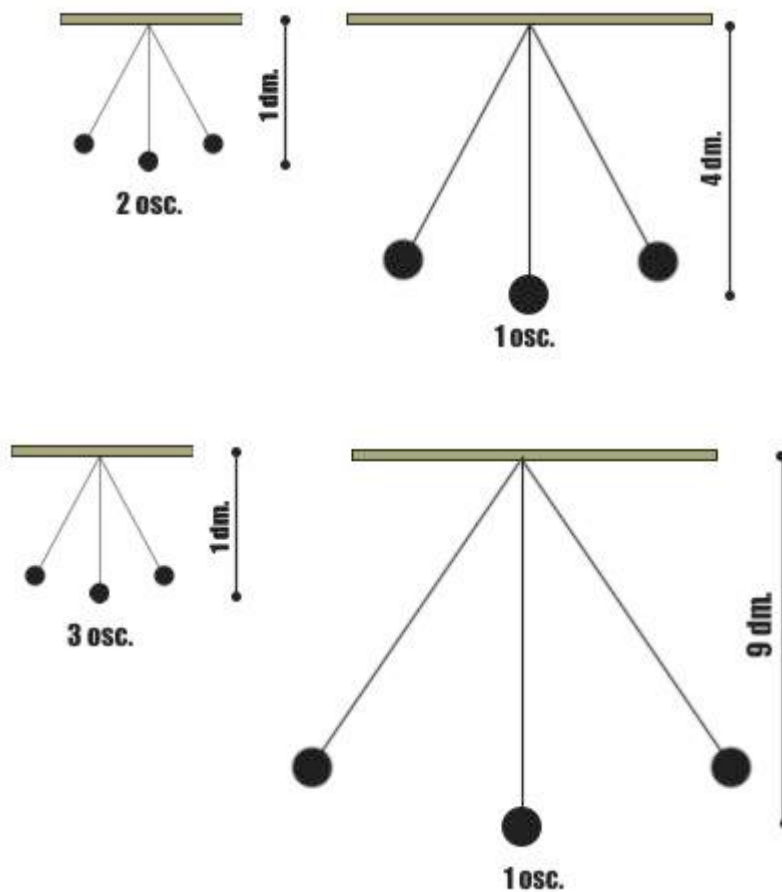
Si disponemos de un buen cronometro, podemos aun mejorar los resultados de esta experimentación. Procedemos a tomar los tiempos empleados por cada uno, para 10 o 100 oscilaciones. Dividiendo esos tiempos por el número de oscilaciones obtendremos el de una sola (en casos de mucha precisión se llegan a establecer tiempos para 1.000, lo que reduce el error por cada oscilación. De este modo puede verificarse que en realidad se cumple la ley. (*) Isócronos tiempos iguales.

4.3 LEY DE LAS LONGITUDES:

Suspendamos ahora tres péndulos cuyas longitudes sean: Péndulo A = (10cm) 1 dm.

Péndulo B = (40 cm) 4 dm.

Péndulo C = (90 cm) = 9 dm.



Procedamos a sacarlos del reposo en el siguiente orden:

1) El de 1 dm. y el de 4dm.

2) El de 1 dm. y el de 9dm.

Observaremos entonces que:

- El de menor longitud va más ligero que el otro, o sea: “a menor longitud menor tiempo de oscilación y a mayor longitud mayor tiempo de oscilación”.
- Mientras el de 4 dm. cumple una oscilación, el de 1 dm. cumple dos oscilaciones.
- Mientras el de 9 dm. cumple una oscilación, el de 1 dm. cumple tres oscilaciones.

Esta circunstancia ha permitido establecer la siguiente ley de las longitudes:

Los tiempos de oscilación (T) de dos péndulos de distinta longitud (en el mismo lugar de la Tierra), son directamente proporcionales a las raíces cuadradas de sus longitudes.

En símbolos

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}}$$

T1 y T2: tiempos de oscilación; l1 y l2 : longitudes.

Para nuestro caso es:

T1= 1 oscilación y l1 = 1dm

T2 = 2 oscilaciones y l2 =4 dm.

luego:

$$\frac{1 \text{ Oscilac.}}{2 \text{ Oscilac.}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}}$$

O sea: 1/2=1/2

Ahora para:

T1=1 oscilación y l1 = 1

T3=3 oscilaciones y l3=9 luego:

$$\frac{1 \text{ Oscilac.}}{3 \text{ Oscilac.}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}$$

Es decir, $1/3=1/3$.

4.4 LEY DE LAS ACELERACIONES DE LAS GRAVEDADES: Al estudiar el fenómeno de la oscilación dejamos aclarado que la acción gravitatoria tiende a hacer parar el péndulo, pues esa es la posición más cercana a la Tierra. Significa esto, en principio, que la aceleración de la gravedad ejerce una acción primordial que evidentemente debe modificar el tiempo de oscilación del péndulo.

Si tenemos presente que la aceleración de la gravedad varía con la latitud del lugar, resultará que los tiempos de oscilación han de sufrir variaciones según el lugar de la Tierra.

En efecto, al experimentar con un mismo péndulo en distintos lugares de la Tierra (gravedad distinta) se pudo comprobar que la acción de la aceleración de la gravedad modifica el tiempo de oscilación del péndulo.

Por ejemplo: si en Buenos Aires el tiempo de oscilación es T_1 , y la gravedad g_1 , en Río de Janeiro el tiempo de oscilación es T_2 y la gravedad g_2 , se verifica la siguiente proporcionalidad:

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}$$

Repitiendo los experimentos para lugares de distinta latitud (por tanto, distinta gravedad) se puede verificar proporcionalidad semejante. De lo cual surge el siguiente enunciado de la Ley de las aceleraciones de la gravedad:

Los tiempos de oscilación de un mismo péndulo en distintos lugares de la Tierra son inversamente proporcionales a las raíces cuadradas de las aceleraciones de la gravedad.

5. ECUACION DEL PENDULO FISICO E INTERPRETACION:

Fórmula del tiempo de oscilación del péndulo:

Para poder obtener el tiempo de oscilación de un péndulo se aplica la siguiente expresión:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Que equivale al período o tiempo de oscilación completa.

Si fuera el correspondiente para una oscilación simple, aplicamos:

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

, t: tiempo de oscilación; l: longitud de péndulo; g: aceleración de la gravedad.

Esta fórmula condensa en sí las cuatro leyes del péndulo. En efecto, observamos:

- 1) En esa expresión no figura la masa m del péndulo, por lo que “el tiempo de oscilación es independiente de la masa”.
- 2) Como tampoco figura el ángulo de amplitud, “el tiempo de oscilación es independiente de la amplitud”.
- 3) La 3ª. y 4ª leyes están incluidas en el factor:

$$\sqrt{\frac{l}{g}}$$

, es decir: "los tiempos de oscilación son directamente proporcionales a las raíces cuadradas de las longitudes e inversamente proporcionales a la de las aceleraciones de las gravedades”.

Péndulo que bate el segundo:

De la expresión:

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

(tiempo de oscilación simple) resulta que el tiempo de oscilación depende de la longitud y de la aceleración de la gravedad.

Si en determinado lugar (g: conocida) deseamos construir un péndulo cuyo tiempo de oscilación sea un segundo, tendremos que modificar su longitud.

Ello se logra aplicando la expresión:

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$l = \frac{g \cdot t^2}{\pi^2}$$

luego:

De este modo para $t=1$ s se logra un

péndulo que “bate el segundo”. Por ello decimos:

Péndulo que bate el segundo es aquel que cumple una oscilación simple en un segundo.

Para el lugar cuya aceleración de la gravedad es normal ($g=9,806$) la longitud del péndulo que bate el segundo es 0,9936 m, mientras que para el que cumple una oscilación doble en un segundo será $l= 24,84$ cm.