1. Una probeta cilíndrica de 10mm de diámetro y 100mm de longitud alcanza los siguientes datos:

   a) Límite de proporcionalidad: $F_P = 3kN$ a los $\Delta L_P = 0{,}2mm$
   b) Límite de elasticidad: $F_E = 3{,}2kN$ a los $\Delta L_E = 0{,}22mm$
   c) Resistencia a la tracción: $F_R = 16kN$ a los $\Delta L_R = 4mm$
   d) Resistencia a la rotura: $F_U = 14kN$ a los $\Delta L_U = 4{,}5mm$

Dibuja la gráfica tensión - deformación , y calcula el módulo de Young del material.

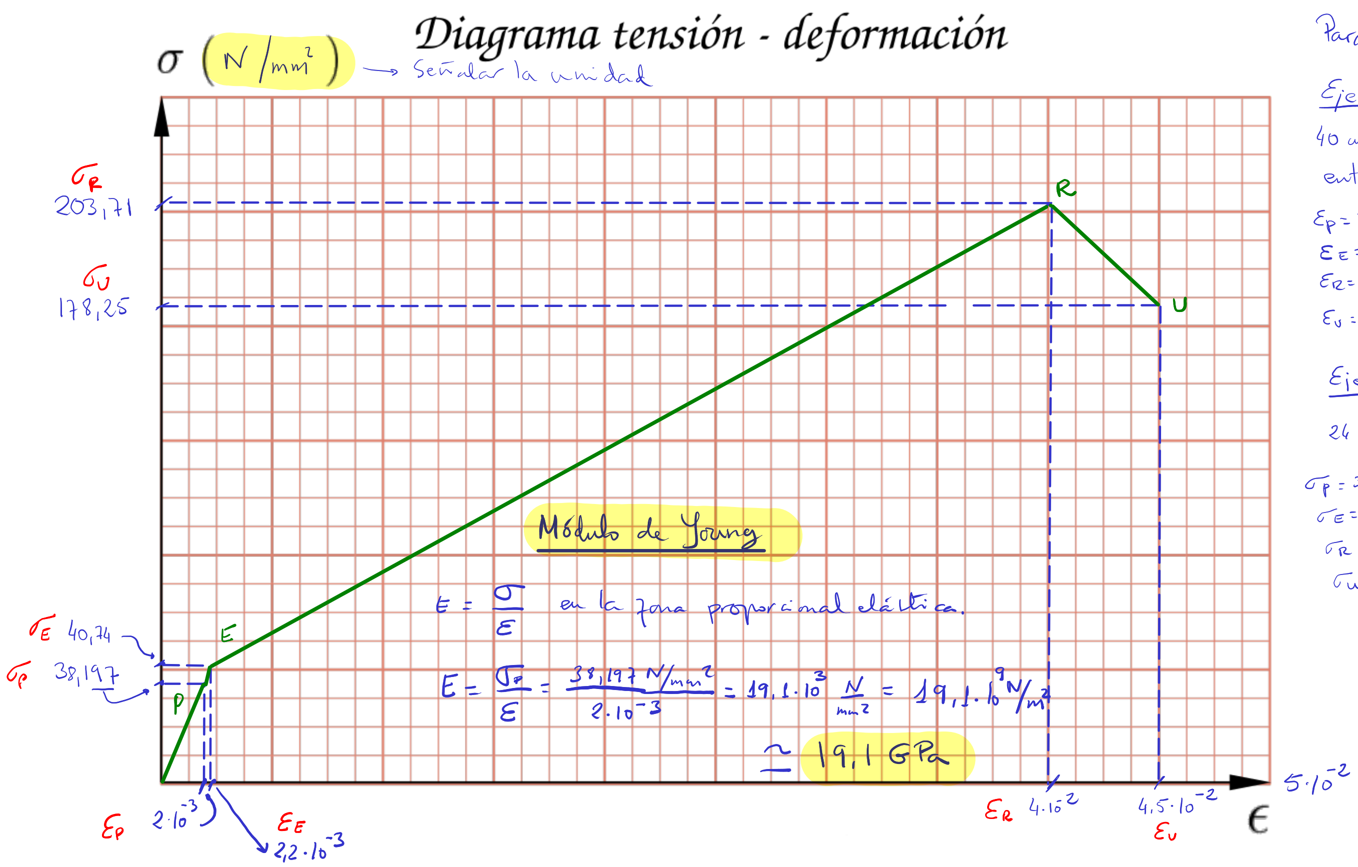
$\phi_0 = 10\,mm \qquad L_0 = 100\,mm \qquad S = \pi\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 = \pi\cdot(5\,mm)^2 = 78{,}54\,mm^2$

a) $\sigma_P = \frac{F_P}{S} = \frac{3kN}{78{,}54\,cm^2} = 38{,}197\ N/mm^2 \qquad \varepsilon_P = \frac{\Delta L_P}{L_0} = \frac{L-L_0}{L_0} = \frac{0{,}2mm}{100\,mm} = 2\cdot10^{-3}$

b) $\sigma_E = \frac{F_E}{S} = \frac{3{,}2\,kN}{78{,}54\,cm^2} = 40{,}74\ N/mm^2 \qquad \varepsilon_E = \frac{\Delta L_E}{L_0} = \frac{0{,}22mm}{100mm} = 2{,}2\cdot10^{-3}$

c) $\sigma_R = \frac{F_R}{S} = \frac{16\,kN}{78{,}54\,cm^2} = 203{,}71\ N/mm^2 \qquad \varepsilon_R = \frac{\Delta L_R}{L_0} = 4\cdot10^{-2} = 40\cdot10^{-3}$

d) $\sigma_U = \frac{F_U}{S} = \frac{14\,kN}{78{,}54\,cm^2} = 178{,}25\ N/mm^2 \qquad \varepsilon_U = \frac{\Delta L_U}{L_0} = 4{,}5\cdot10^{-2} = 45\cdot10^{-3}$



Módulo de Young

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ en la zona proporcional elástica.

$E = \frac{\sigma_P}{\varepsilon} = \frac{38{,}197\ N/mm^2}{2\cdot10^{-3}} = 19{,}1\cdot10^{3}\ \frac{N}{mm^2} = 19{,}1\cdot10^{9}\ N/m^2$

$\simeq 19{,}1\ GPa$

Para dibujar

Eje X

40 cuadritos → $5\cdot10^{-2}$

entonces

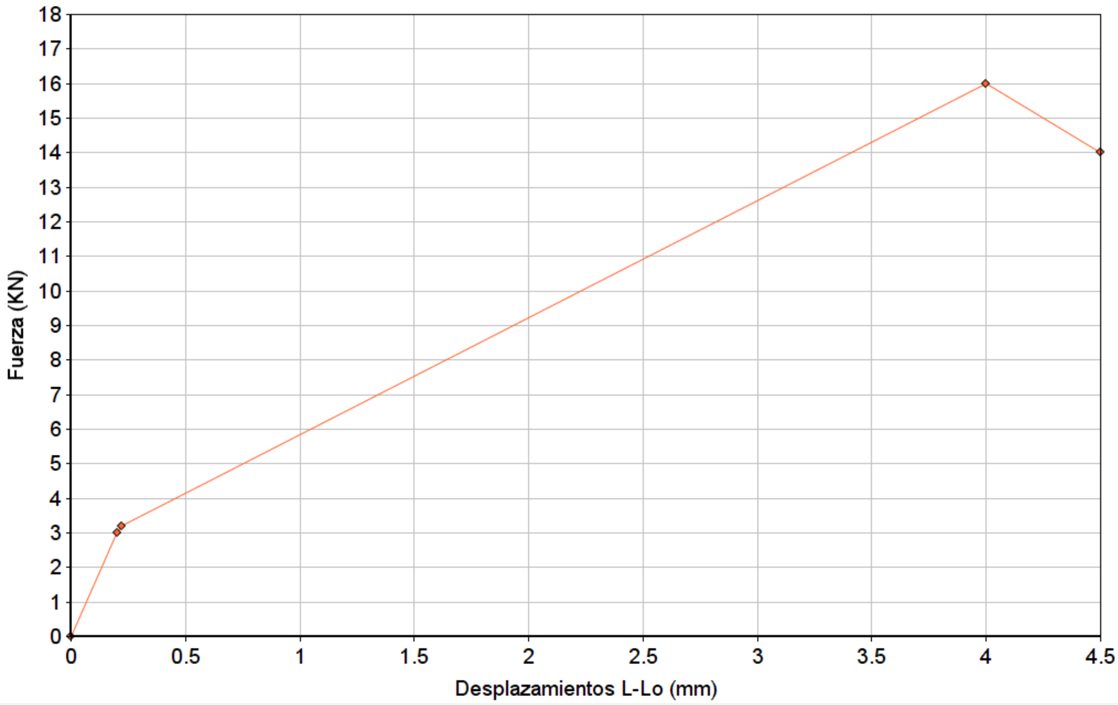
$\varepsilon_P = 2\cdot10^{-3} \rightarrow 1{,}6\,c$
$\varepsilon_E = 2{,}2\cdot10^{-3} \rightarrow 1{,}76\,c$
$\varepsilon_R = 4\cdot10^{-2} \rightarrow 32\,c$
$\varepsilon_U = 4{,}5\cdot10^{-2} \rightarrow 36\,c$

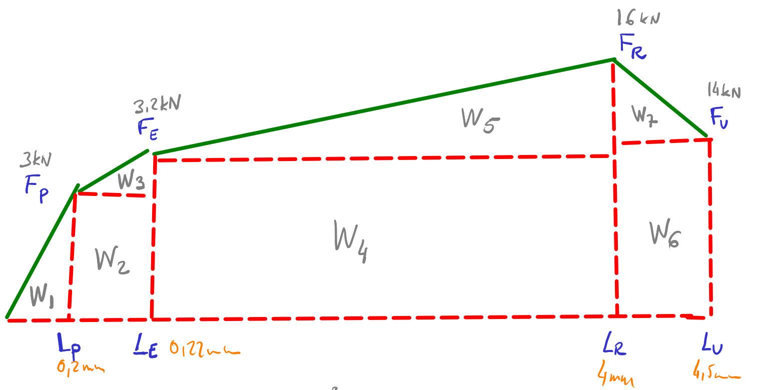
Eje Y

24 cuadritos → 240 N/mm^2

$\sigma_P = 38{,}197\ \frac{N}{mm^2} \rightarrow 3{,}8\,c$
$\sigma_E = 40{,}74\ N/mm^2 \rightarrow 4{,}1\,c$
$\sigma_R = 203{,}71\ N/mm^2 \rightarrow 20{,}3\,c$
$\sigma_U = 178{,}25\ N/mm^2 \rightarrow 17{,}8\,c$

2. Calcula el trabajo realizado para deformar y romper la probeta, según el ejercicio anterior. Considera que entre los puntos consecutivos las líneas son rectas.





$W_1 = F_P \cdot L_P/2 = 3000\,N \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}\,m \cdot 0{,}5 = 0{,}3\,J$

$W_2 = F_P \cdot (L_E - L_P) = 3000\,N \cdot (0{,}02 \cdot 10^{-3}\,m) = 0{,}06\,J$

$W_3 = (F_E - F_P) \cdot (L_E - L_P)/2 = 200\,N \cdot 0{,}02 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5 = 0{,}002\,J$

$W_4 = F_E \cdot (L_R - L_E) = 3200\,N \cdot (4 - 0.22) \cdot 10^{-3}\,m = 12{,}096\,J$

$W_5 = (F_R - F_E) \cdot (L_R - L_E)/2 = (16000\,N - 3200\,N) \cdot 3.78 \cdot 10^{-3}\,m \cdot 0{,}5 = 24{,}192\,J$

$W_6 = (L_U - L_R) \cdot F_U = (0.5 \cdot 10^{-3}\,m) \cdot 14000\,N = 7\,J$

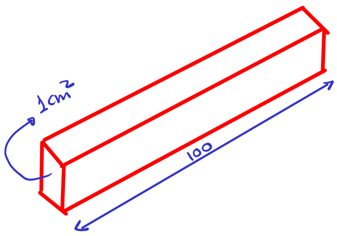
$W_7 = (L_U - L_R)\,(F_R - F_U)/2 = (0{,}5 \cdot 10^{-3}\,m) \cdot 2000\,N \cdot 0{,}5 = 0{,}5\,J$

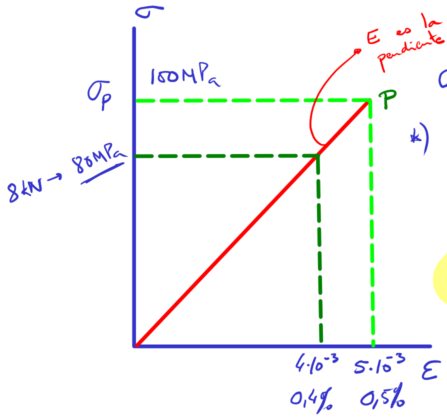
```
# Trabajo bajo la curva
W1=Fp*Lp/2
W2=Fp*(Le-Lp)
W3=(Fe-Fp)*(Le-Lp)/2
W4=Fe*(LR-Le)
W5=(FR-Fe)*(LR-Le)/2
W6=FU*(LU-LR)
W7=(FR-FU)*(LU-LR)/2
W=W1+W2+W3+W4+W5+W6+W7
units(W)=with(ud_units,J)
W
```

```
## 44.15 J
```

La suma $\sum_{i=1}^{7} W_i = \underline{44{,}15\,J}$

3. Tenemos una barra cuadrada de 1cm de lado y 10cm de longitud. Se somete a una fuerza de tracción de 8kN con un módulo de Young de $2MN\ /cm^2$, y su límite de proporcionalidad 100MPa. ¿Qué alargamiento se produce? ¿Qué podríamos decir si la carga fuese de 80kN?





$\sigma_p = 100\ MPa = 1\cdot 10^8\ N/m^2$

$*)\ E = 2\ MN/cm^2 = 2\ \frac{MN}{cm^2}\cdot\frac{10^4\ cm^2}{m^2} =$ ($M \to 10^6$)

$E = 2\cdot 10^{10}\ N/m^2$

$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E} = \frac{1\cdot 10^8\ N/m^2}{2\cdot 10^{10}\ N/m^2} = 5\cdot 10^{-3}$

$\varepsilon_p(\%) = 0.5\%$

a) $F = 8kN \rightarrow \sigma = \frac{F}{S} = \frac{8\ kN}{1\ cm^2}\cdot\frac{10^4\ cm^2}{1\ m^2} = 8\cdot 10^7\ N/m^2 = 80\cdot 10^6\ Pa = 80\ MPa$

Luego la tensión es inferior a 100 MPa, estamos en zona elástica.

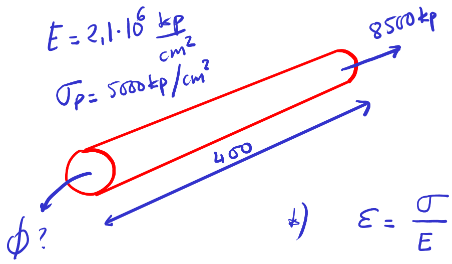
$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{8\cdot 10^7\ N/m^2}{2\cdot 10^{10}\ N/m^2} = 4\cdot 10^{-3}$ $\quad \varepsilon(\%) = 0.4\%$

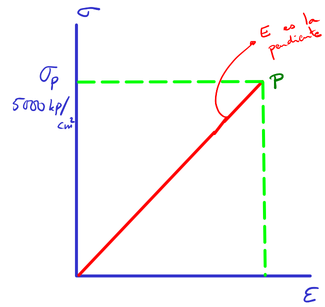
b) Si $F = 80\ kn \rightarrow \sigma = 800\ MPa$ no puedo calcular un alargamiento usando el módulo de Young porque estoy fuera de la zona elástica.

En general $\varepsilon > \frac{\sigma}{E}$

---

4. Una barra elástica de acero, con un límite elástico de 5000 kp/cm^2,es sometida a una fuerza de tracción 8500 kp. Sabiendo que la longitud de la barra de acero es de $400mm$, y su módulo de elasticidad $E = 2{,}1\cdot 10^6 kp/cm^2$, calcular el diámetro de la barra para que su alargamiento total no supere las 50 centésimas de milímetro.





$*)\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{F/S}{E}$

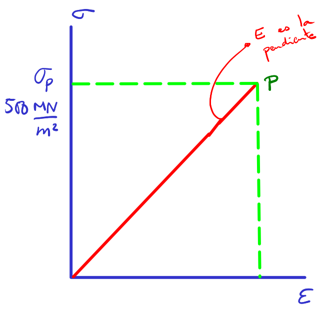
Si $\Delta L < 50\cdot 10^{-2}\ mm \qquad \frac{F\cdot L_0}{S\cdot E} < 50\cdot 10^{-2}\ mm \rightarrow \frac{F\cdot L_0}{E} < 50\cdot 10^{-2}\ mm\cdot S$

$S > \frac{F\cdot L_0}{E\cdot 50\cdot 10^{-2}\ mm} = \frac{8500\ \cancel{kp}\cdot 400\ \cancel{mm}}{2{,}1\cdot 10^6\ \frac{\cancel{kp}}{cm^2}\cdot 50\cdot 10^{-2}\ \cancel{mm}} = 3{,}238\ cm^2$

$\phi > 2{,}03\ cm$

Si $S = \pi\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 \rightarrow \phi = \sqrt{\frac{4\cdot S}{\pi}} \qquad \phi > \sqrt{\frac{4\cdot 3{,}238\ cm^2}{\pi}} = 2{,}03\ cm$

5. ¿Cuál es la sección mínima de un elemento cilíndrico, que soporta 100kN de tracción, con un límite elástico de $500 \cdot MN/m^2$ siendo el coeficiente de mayoración de cargas 1.2 y el de minoración de resistencia del material 1.1? Si el módulo de Young es $E = 2 \cdot MN/cm^2$, ¿Cuál es su deformación unitaria?



$$\sigma_p = \frac{F_p}{S}$$

$$S = \frac{F_p}{\sigma_p} = \frac{100\ kN}{500\ MN/m^2} = 2\cdot 10^{-4}\ m^2 = 2\ cm^2$$

Pero por seguridad se supone que la carga que debe aguantar es mayor $F_p^* = F_p \cdot 1{,}2$ y que el material es menos elástico de lo que es $\sigma_p^* = \sigma_p/1.1$

a) $S^* = \dfrac{F_p^*}{\sigma_p^*} = \dfrac{F_p \cdot 1{,}2}{\sigma_p/1.1} = S \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}1 = \underline{2{,}64\ cm^2}$ → esta sería entonces la sección mínima.

---

b) $E = 2 MN/cm^2$ $\quad \sigma = F/S' = \dfrac{100\ kN}{2{,}64\ cm^2} = 37{,}88\ kN/cm^2$ → mayor fuerza a la que sometemos el material.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{37{,}88\ kN/cm^2}{2 MN/cm^2} = 0{,}0189 = 18{,}9 \cdot 10^{-3} \quad 1{,}89\%$$

---

6. En un ensayo de tracción, con una probeta de 15mm de diámetro y 150mm de longitud se obtuvieron los siguientes datos. Calcular:

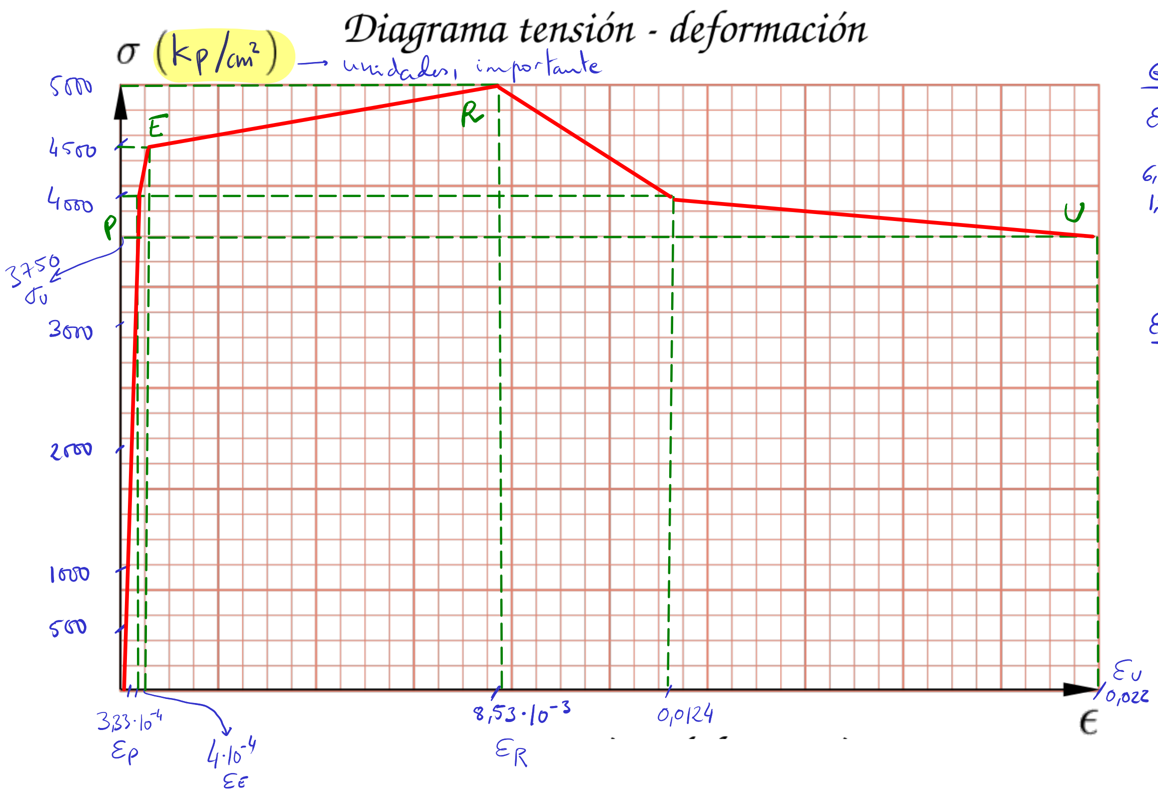
   a) Diagrama esfuerzo - deformación
   b) Módulo de la elasticidad
   c) Alargamiento de rotura

Esfuerzo (kp/cm^2)	Longitud de medida (mm)	ε
0	150	0
500	150.01	$6{,}67 \cdot 10^{-5}$
1000	150.02	$1{,}33 \cdot 10^{-4}$
2000	150.03	$2 \cdot 10^{-4}$
3000	150.04	$2{,}67 \cdot 10^{-4}$
4000	150.05	$3{,}33 \cdot 10^{-4}$
4500	150.06	$4 \cdot 10^{-4}$
5000	151.28	$8{,}53 \cdot 10^{-3}$
4000	151.87	$0{,}0124$
3750 (rotura)	153.28	$0{,}022$

$\frac{L - L_0}{L_0}$

$$S = \pi \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{1{,}5\,cm}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$S = 1{,}77\,cm^2$$



Gráfica

Eje x 40 c → 0,022

$6{,}67 \cdot 10^{-5} \longrightarrow 0{,}12\,c$

$1{,}33 \cdot 10^{-4} \longrightarrow 0{,}24\,c$

⋮

Eje y

$5000\ kp/cm^2 \rightarrow 24\,c$

$500 \rightarrow 2{,}4\,c$

$1000 \rightarrow 4{,}8\,c$

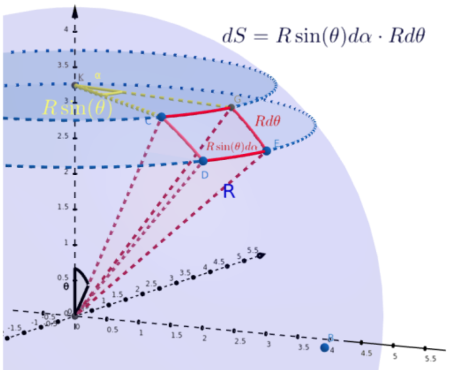
⋮

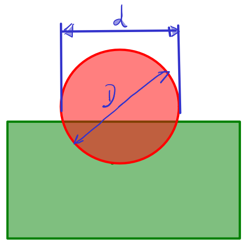
b) $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ con cualquier punto de la zona elástica $E = \frac{1000\ kp/cm^2}{1{,}33 \cdot 10^{-4}} = 7{,}56\ M\,kp/cm^2$

c) $\Delta L_U = L_U - L_0$ / $L_U = \varepsilon_U \cdot L_0 = 0{,}022 \cdot 150\,mm = 3{,}3\,mm$

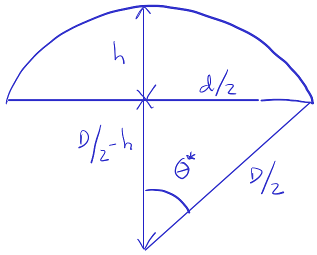
$\varepsilon_U = 0{,}022$ $\quad \varepsilon_U(\%) = 2{,}2\,\%$

1. Demuestra la fórmula de la dureza Brinell





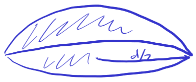
D : diámetro de la bola
d : diámetro de la huella
con $d < D$



$d/2 = D/2 \operatorname{sen}\theta^*$

$d = D \cdot \operatorname{sen}\theta^*$

*)



Área se calcula con

$dS = R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\alpha$

1º) $S = R^2 \int_0^{\theta^*} \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi R^2 \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\theta^*} = 2\pi R^2 \left(1 - \cos\theta^*\right) = \frac{\pi D^2}{2}\left(1 - \cos\theta^*\right)$

si $R = D/2$

2º) $d = D \operatorname{sen}\theta^* \longrightarrow \operatorname{sen}\theta^* = d/D$ y $\cos\theta^* = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta^*} = \sqrt{1 - (d/D)^2}$

3º) $S = \frac{\pi D^2}{2}\left(1 - \sqrt{1-(d/D)^2}\right) = \frac{\pi D}{2}\left(D - D\sqrt{1-(d/D)^2}\right) = \frac{\pi D}{2}\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)$

4º) Defino la dureza Brinell como la relación entre la fuerza aplicada y la superficie del casquete esférico de la huella.

$$HB = \frac{F}{S} = \frac{F}{\frac{\pi D}{2}\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)} = \frac{2F}{\pi D\left(D - \sqrt{D^2-d^2}\right)}$$

---

2. Para determinar la dureza Brinell de un material se ha utilizado una bola de 5mm de diámetro y se ha elegido una constante K=30, obteniéndose una huella de 2.3mm de diámetro. Calcula:

   a) Dureza Brinell del material

   b) Profundidad de la huella

$D = 5mm$ $\quad F = KD^2$ $\quad$ y $d = 2{,}3mm$

a) $HB = \frac{2F}{\pi D\left(D - \sqrt{D^2-d^2}\right)} = \frac{2KD^{\cancel{2}}}{\pi \cancel{D}\left(D - \sqrt{D^2-d^2}\right)} = \frac{2KD}{\pi\left(D - \sqrt{D^2-d^2}\right)} =$

$= \frac{2 \cdot 30\, kp/mm^2 \cdot 5mm}{\pi\left(5mm - \sqrt{(5mm)^2 - (2{,}3mm)^2}\right)} = \frac{300\ kp/mm}{\pi\left(5mm - 4{,}43mm\right)} = 167{,}53\ kp/mm^2 \simeq 168$

b) $h = D/2 - D/2\cos\theta^* = D/2\left(1 - \cos\theta^*\right) = \frac{D}{2}\left(1 - \sqrt{1-(d/D)^2}\right) = \frac{5mm}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2{,}3mm}{5mm}\right)^2}\right) =$

$h = 0{,}28\ mm$

3. Un engranaje de acero tiene en el núcleo una dureza de 200HB y en la superficie de 500HB ¿Por qué? Razona la respuesta.

Porque la superficie está sometida a mayor fricción. El núcleo no necesita ser tan duro.

4. En un ensayo de dureza Brinell se aplica una carga de 3000kp al penetrador, cuyo diámetro es D=10mm.

   a) Si el diámetro de la huella es d=5mm, calcula la dureza del material.

   b) ¿Se obtendría el mismo valor de dureza si D=5mm y la carga fuese de 750kp? ¿Cuál sería el diámetro de la huella en este caso?

a) $$HB = \frac{2F}{\pi D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)} = \frac{2 \cdot 3000\ kp}{\pi\ 10mm \cdot \left(10mm - \sqrt{(10mm)^2 - (5mm)^2}\right)} = 142,55\ kp/mm^2 \simeq 143\ kp/mm^2$$

b) $$\frac{HB \cdot \pi D}{2F} = \frac{1}{D - \sqrt{D^2 - d^2}} \Rightarrow D - \sqrt{D^2 - d^2} = \frac{2F}{HB \cdot \pi \cdot D}$$

$$\sqrt{D^2 - d^2} = D - \frac{2F}{HB \cdot \pi \cdot D} \Rightarrow D^2 - \left(D - \frac{2F}{HB \cdot \pi \cdot D}\right)^2 = d^2$$

$$d = \sqrt{D^2 - \left(D - \frac{2F}{HB \cdot \pi \cdot D}\right)^2} = \sqrt{(5mm)^2 - \left(5mm - \frac{2 \cdot 750\ kp}{143\ kp/mm^2 \cdot \pi \cdot 5mm}\right)^2} = 2,496\ mm$$

---

5. En un ensayo de dureza Brinell de una chapa de acero aleado de 8mm de espesor, se obtiene una huella de 4mm. Hallar (ver Tabla de Cargas según espesores): a) Dureza del acero, constante del ensayo y diámetro de la bola. b) Resistencia aproximada a la rotura por tracción.

Carga en kp (15s/15s)				
Espesor (en mm)	Diámetros D (mm)	Aceros al carbono ($30 \cdot D^2$)	Aceros aleados ($10 \cdot D^2$)	Bronces ($5 \cdot D^2$)
>6	10	3000	1000	500
3-6	5	750	250	125
<3	2.5	187.5	62.5	31.2
Coeficiente de σ_R		0.36	0.34	0.23

FIGURA 1: **TABLA DE CARGAS SEGÚN ESPESORES**

a) $D = 10\ mm$ (de la tabla) $k = 10\ kp/mm^2$ (de la tabla)

$$HB = \frac{2F}{\pi D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)} = \frac{2 \cdot 10\ kp/mm^2 \cdot (10mm)^2}{\pi \cdot 10mm \left(10mm - \sqrt{(10mm)^2 - (4mm)^2}\right)} = 76,25\ kp/mm^2$$

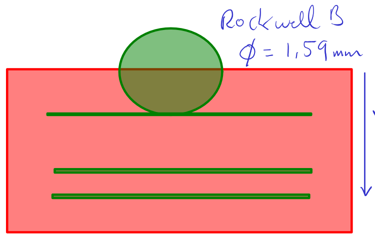
76 HB $\underset{}{\overset{D}{10}}$ $\overset{F}{1000}$ $\overset{t}{15}$

b) $$\sigma_R = 0,34 \cdot 76\ kp/mm^2 = 25,84\ kp/mm^2 = 25,84 \frac{\cancel{kp}}{\cancel{mm^2}} \cdot \frac{9,8N}{1\cancel{kp}} \cdot \frac{10^6\ \cancel{mm^2}}{1m^2} = 2,53 \cdot 10^8\ N/m^2$$

1. En un ensayo de dureza Rockwell B, la profundidad h_1 , cuando se aplica una precarga es de 0.01mm y la profundidad h_3 cuando se mantiene esa precarga después de haber aplicado la totalidad de la carga es 0.144mm ¿Qué dureza tiene el material?

Rockwell B
$\phi = 1,59 mm$

h_2 a 90 kp



$h_1 = 0.01 mm$ a 10 kp

$h_3 = 0.144 m$ otra vez a 10kp

$$e = \frac{h_3 - h_1}{0.002 mm} = \frac{0.144 mm - 0.01 mm}{0,002 mm} = 67$$

$$HRB = 130 - e = 63$$

2. Hemos templado acero al carbono y calculamos su dureza Vickers. Con una carga de 30 kp, y los diagonales de la huella $d_1 = 0,25mm$ y $d_2 = 0,26mm$. Calcular:

   a) La dureza Vickers del acero

   b) Expresar la dureza Vickers si el tiempo de ejercer la carga es de 15s.

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2} = 0,255 mm \quad (\text{semisuma})$$

a) $HV = 1,8544 \, F/d^2 = 1.8544 \cdot \frac{30 kp}{(0,255 mm)^2} = 855,5 \, kp/mm^2 \simeq 856$

b) 856 HV 30 15

---

1. En la figura se representa el diagrama de Wöhler de un material obtenido en un ensayo de fatiga con una tensión media igual a cero. ¿Cómo variará la curva si se repite el ensayo aplicando a la probeta una carga de tracción?

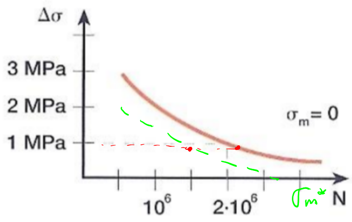
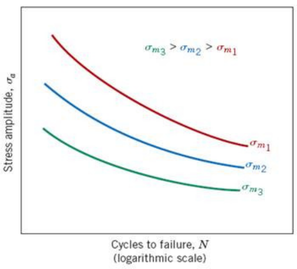


FIGURA 1: **DIAGRAMA DE WÖHLER**



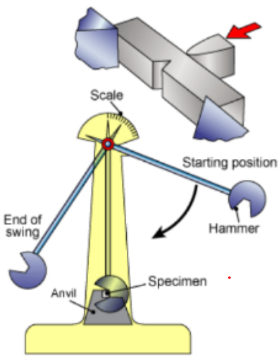
*) Si la tensión media es cero $\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 0 \rightarrow \sigma_{max} = -\sigma_{min}$ — significa compresión

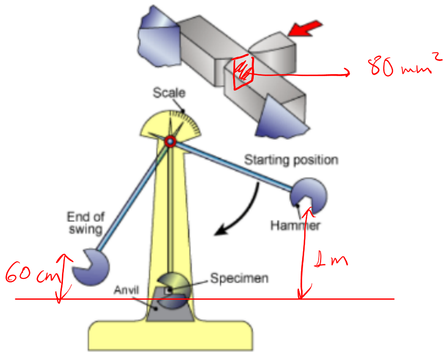
*) Pero si solo hay tracción $\sigma_m^* = \frac{\sigma_{max}^*}{2}$ $(\sigma_{min} = 0)$

Como $\sigma_m^* > \sigma_m$

Se puede ver en la gráfica que, a una tensión dada se necesitan menos ciclos para llegar a la fatiga del material.

2. En un ensayo del péndulo de Charpy, la maza de 20kp cayó sobre una probeta de $80 \cdot mm^2$ de sección desde una altura de un metro y se elevó después 60 cm tras la rotura. ¿Cuál es la resiliencia del material?





$$T = \frac{\Delta E_p}{S'} = \frac{m \cdot g \cdot (h_1 - h_2)}{S'} = \frac{20\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2 \cdot (1\,m - 0{,}6\,m)}{80\,mm^2} = 0{,}98\ J/mm^2$$

$$T = 0{,}98\,\frac{J}{mm^2} \cdot \frac{10^6\,mm^2}{1\,m^2} = 9{,}8 \cdot 10^5\ J/m^2$$