Apuntes básicos de Matemáticas

Aurelio Gallardo

September 23, 2023

Derivadas comunes

- $f(x) = \sin(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \cos(x)$, entonces $f'(x) = -\sin(x)$
- $f(x) = \tan(x)$, entonces $f'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2} = \sec(x)^2$
- $f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin'(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- Se usa la derivada de un cociente
  - $f(x) = a \cdot x^n$, entonces $f'(x) = (a \cdot x^n)' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$
  - $f(x) = a^x$, entonces $f'(x) = (a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$
- $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$
- $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, entonces $f'(x) = (\sqrt[n]{x^m})' = (x^{m/n})' = \frac{m}{n} \cdot x^{(\frac{m}{n}-1)}$
  - Si m=1, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, entonces $f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $f(x) = \ln(x)$, entonces $f'(x) = 1/x$
- $f(x) = \log_a(x)$, entonces $f'(x) = (\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
- Porque $f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

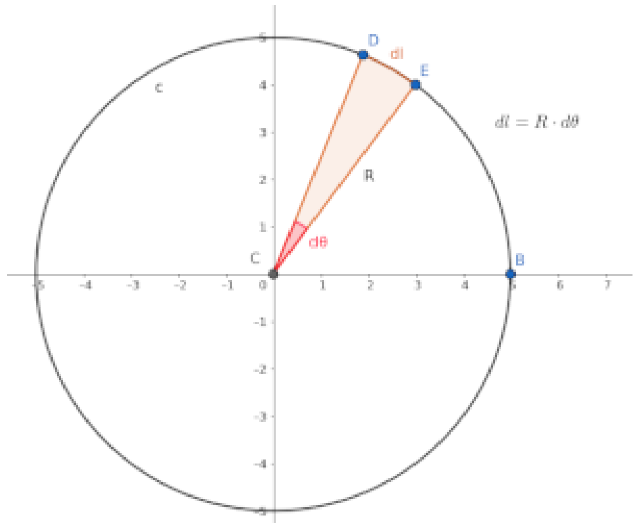
Integrales comunes

En general, $\int f(x) \cdot dx = F(x) + Cte$

- $\int \cos(x) \cdot dx = \sin(x) + Cte$
- $\int \sin(x) \cdot dx = -\cos(x) + Cte$
- $\int e^x \cdot dx = e^x + Cte$
  - $\int a \cdot e^{bx} \cdot dx = \frac{a}{b} e^{bx} + Cte$
- $\int x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{(n+1)} + Cte$
  - Por ejemplo, si n=4 entonces $\int x^4 \cdot dx = \frac{1}{4+1} \cdot x^{(4+1)} + Cte = \frac{x^5}{5} + Cte$
- $\int \frac{1}{x} \cdot dx = ln(x) + Cte$

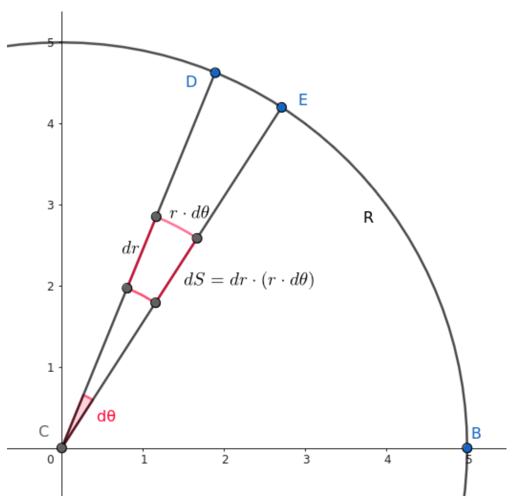
Longitud circunferencia

- La longitud de un arco de circunferencia es siempre el radio por ese ángulo del arco
  - $dl = R \cdot d\theta$
- La longitud de la circunferencia sería integrar desde un ángulo 0 a un ángulo 2π
  - $L = \int dl = \int_0^{2\cdot\pi} R \cdot d\theta = R \cdot \int_0^{2\cdot\pi} d\theta = R \cdot [2 \cdot \pi - 0] = 2 \cdot \pi \cdot R$



Superficie o área del círculo

- La superficie de un pequeño trozo (diferencial) del círculo es $dS = dr \cdot (r \cdot d\theta)$
- Se hace una doble integración en r y en θ

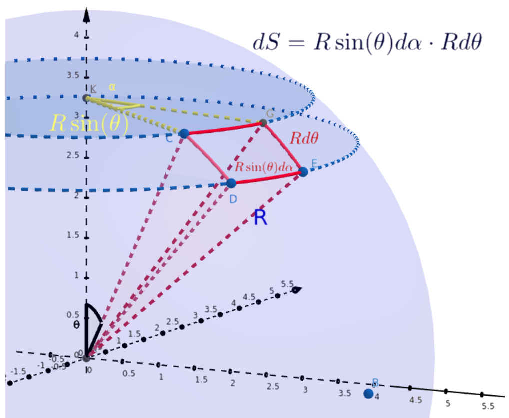


$$S = \int ds = \int_{\theta=0}^{2 \cdot pi} \int_{r=0}^{R} dr \cdot (r \cdot d\theta) = \left(\int_{r=0}^{R} r \cdot dr \right) \left(\int_{\theta=0}^{2 \cdot pi} d\theta \right) = \left(\frac{1}{2} \cdot r^2 \Big|_0^R \right) \cdot \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = \pi \, R^2$$

Área de la esfera

- El área de la esfera, de la "cáscara" de fuera, se puede calcular imaginando un "rectángulo" diferencial formado por 4 arcos.
  - Uno de los arcos ya lo conocemos. Es $R \cdot d\theta$

- El otro arco está sobre una circunferencia paralela al ecuador de la esfera, perpendicular al eje Z. Su radio es $R \cdot \sin(\theta)$. El valor del arco depende de su apertura, $d\alpha$. Luego su longitud diferencial es $R \cdot \sin(\theta) \cdot d\alpha$.
- Y por supuesto, el área de ese "rectángulo diferencial" es $dS = R \cdot \sin(\theta) \cdot d\alpha \cdot R \cdot d\theta$



- Hacemos una integración doble, en α y en θ.
- α toma valores entre 0 y 2π.
- Pero observemos que θ sólo toma valores entre 0 y π. Con eso ya cubre toda la superficie.

$$S = \int ds = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\cdot\pi} R^2 \cdot \sin(\theta) d\theta d\alpha = R^2 \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_{\alpha=0}^{2\cdot\pi} d\alpha =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot (-\cos(\theta))\Big|_0^{\pi} = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot (-\cos(\pi) + \cos(0)) = 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 2 = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

Volumen de la esfera

- El mismo tipo de razonamiento, pero ahora integramos con una 'r' variable desde 0 hasta el radio R.

$$V = \int dV = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\alpha=0}^{2\cdot\pi} r^2 \cdot \sin(\theta) d\theta d\alpha dr = \int_{r=0}^{R} r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_{\alpha=0}^{2\cdot\pi} d\alpha =$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot \left[(-\cos(\theta))\Big|_0^{\pi} \right] \cdot \left[\frac{r^3}{3}\Big|_0^{R} \right] = 2 \cdot \pi \cdot \frac{R^3}{3} \cdot (-\cos(\pi) + \cos(0)) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{R^3}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Vectores

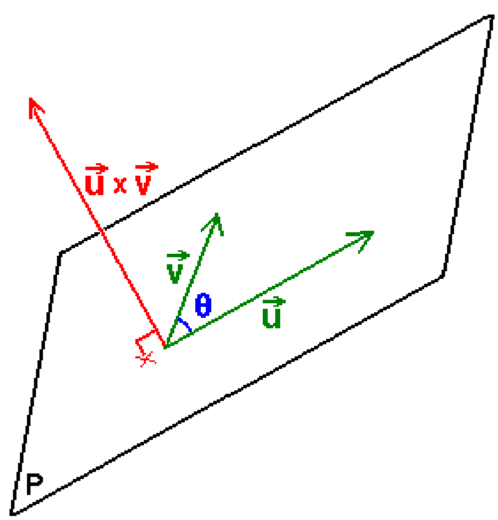
0.1 Producto escalar

- Imaginemos dos vectores en el espacio tridimensional. Cada uno tiene tres coordenadas, para el eje X, para el eje Y y para el eje Z.
- $\vec{u} = (a, b, c) = a \cdot \vec{u_x} + b \cdot \vec{u_y} + c \cdot \vec{u_z}$
- $\vec{v} = (m, n, p) = m \cdot \vec{v_x} + n \cdot \vec{v_y} + p \cdot \vec{v_z}$

    - Cada vector del espacio tridimensional se puede representar como combinación lineal de tres vectores unitarios en las direcciones de los ejes.
    - A estos vectores unitarios los he llamado $\vec{u_x}$, $\vec{u_y}$ y $\vec{u_z}$. Muy frecuentemente se pueden denominar $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.
- El producto escalar de dos vectores unitarios es:
    - 1, si son iguales. Por ejemplo, $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$
    - 0, si son distintos. Por ejemplo, $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$
- De lo anterior se deduce que:
    - El producto escalar de los dos vectores anteriores es
    - $\vec{u} \cdot \vec{v} = a \cdot m + b \cdot n + c \cdot p$
- Algunas consecuencias:
    - Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, su producto escalar será cero.
    - Si se hace el producto escalar de un vector consigo mismo obtendré el valor de su módulo al cuadrado. Luego el módulo de un vector es la raíz cuadrada de su producto escalar consigo mismo.
    - $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- También se puede calcular el producto escalar de dos vectores como el módulo del primero, por el móduclo del segundo, por el coseno del ángulo que forman entre ellos.
    - $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

0.2 Producto vectorial

- El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que pertenecen a un espacio tridimensional, es un tercer vector que tiene las siguientes propiedades:
    - Es perpendicular a los dos vectores originales.
    - Por lo tanto es perpendicular al plano P que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$



- Se denota de dos maneras distintas: $\vec{u}\,x\,\vec{v}$, o bien $\vec{u} \wedge \vec{v}$
- El módulo del producto vectorial es:
    - $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$
- Por lo tanto, el producto vectorial de un vector por sí mismo es cero, ya que el ángulo es cero

y asimismo su seno. Ocurre lo mismo con dos vectores paralelos.

- Las coordenadas del producto vectorial de un vector se pueden calcular de dos maneras:
  - A. Realizando el cálculo de un determinante (simbólico) de la matriz:
    * $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ n & p \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$
    * $\vec{u} \wedge \vec{v} = (bp - nc)\vec{i} - (ap - mc)\vec{j} + (an - mb)\vec{k}$
  - B. Aplicando la propiedad distributiva coordenada a coordenada, sabiendo que:
    * $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, pero $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$
    * $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, pero $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$
    * $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$, pero $\vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$
    * Y que cualquier producto vectorial de un vector por sí mismo es cero.
    * Por ejemplo,

$$\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} \;\; y \;\; \vec{v} = 8\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = 3 \cdot 8 \cdot (\vec{i} \wedge \vec{j}) - 3 \cdot 5 \cdot (\vec{i} \wedge \vec{k}) - 5 \cdot 8 \cdot (\vec{j} \wedge \vec{j}) + 5 \cdot 5 \cdot (\vec{j} \wedge \vec{k}) = 24\vec{k} - 15(-\vec{j}) + 25\vec{i} = 25\vec{i} + 15\vec{j} + 24\vec{k}$$