Corriente Alterna

por Aurelio Gallardo

14 - Octubre - 2023

Índice General

1. Ondas senoidales

En Física, tienen gran importancia los fenómenos ondulatorios. Denominamos **onda** a cualquier magnitud que puede representarse en una gráfica y que varía según la variable **tiempo**.

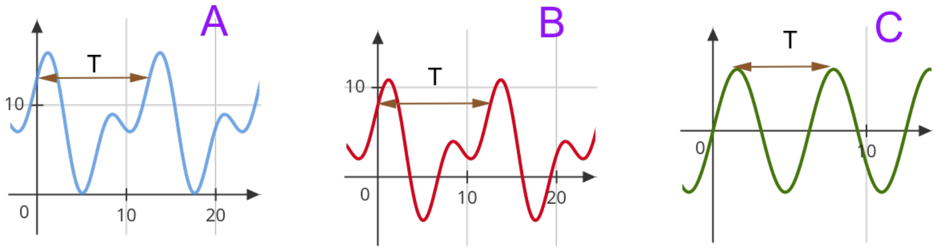


FIGURA (1). Tipos de señales ondulatorias

A) Tenemos una **onda pulsante**. Se repite en el tiempo, según un período T. o sea, cada «T» segundos se repiten los mismos valores.

B) Tenemos una **onda alterna**, ya que además de ser pulsante toma valores positivos y negativos.

C) Tenemos una **onda alterna pura**, y además **senoidal** (ver vídeo)

C.1) **Alterna pura** porque los mismos valores que toma en la zona positiva, los toma en la negativa.

C.2) **Senoidal** porque sus valores se obtienen a través de la función $y = A \cdot sen(k \cdot t)$, donde **A** es la amplitud y «$k \cdot t$» el ángulo variable con el tiempo.

Una característica importante de las ondas es su período, o el tiempo **«T»** que tarda la señal en volver a repetirse. Su inversa es la frecuencia $f = 1/T$. Si T en el S.I. viene medido en segundos, la frecuencia se mide en ciclos por segundo o Hertzios (Hz). Otras posibles unidades son ciclos por segundo, ciclos o revoluciones por minuto, etc.

1.1. Generación de tensión alterna como onda senoidal.

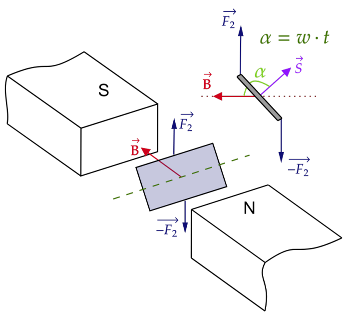


FIGURA (2). Generación de onda de tensión senoidal

Consideremos la espira girando en un campo magnético. El flujo que atraviesa la espira es: $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot cos(w \cdot t)$, siendo **w** la velocidad angular medida en radianes por segundo y **t** el tiempo considerado. Cuando $w \cdot t = 0$, el valor del coseno es **«1»**, la espira está perpendicular al campo y se produce el máximo flujo.

Y si consideramos la ley de Faraday, obtenemos una expresión para la fuerza electromotriz ε inducida en la espira:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = B \cdot S \cdot w \cdot sen(w \cdot t) \quad (1)$$

✔ La fem máxima alcanzada se obtiene cuando $sen(w \cdot t) = 1$, y tiene el valor $E_{max} = B \cdot S \cdot w$, y representa la amplitud de la onda de tensión alterna.

✔ La onda empieza a repetirse en los valores de ángulos $w \cdot t = \{2\pi, 4\pi, \ldots, 2n\pi\}$. Como la definición de período nos dice que es el tiempo «**T**» que tarda la señal en repetirse desde que se produce, coincide con el valor de ángulo 2π .

✔ Por tanto, el período cumple $w \cdot T = 2 \cdot \pi$. Una expresión para la velocidad angular sería: $w = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ o bien, $w = 2 \cdot \pi \cdot f$, bien en función del período o de la frecuencia.

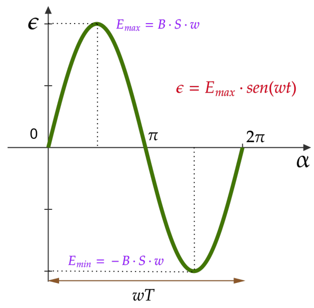


FIGURA (3). Tensión alterna en una espira

1.2. Valores máximo, medio y eficaz en una onda senoidal.

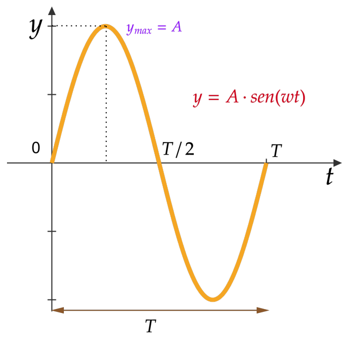


FIGURA (4). Onda genérica

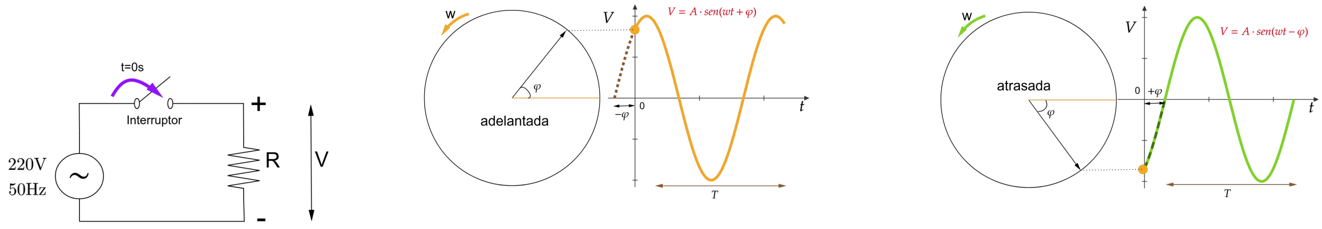
Dada la onda senoidal genérica $y = A \cdot sen(wt)$, de amplitud **A** y velocidad angular **w**, definimos los siguientes valores:

A) El valor medio en un período completo es cero. La suma de todos los valores positivos y negativos en un período suman cero.

B) En un semi-período, el **valor medio** de la onda es $\bar{A} = \frac{2}{\Pi} \cdot A$. Demostrar en problemas.

C) Se define el valor eficaz como $A_{ef} = \dfrac{A}{\sqrt{2}}$. Los valores eficaces son muy usados en el contexto de la electricidad, por razones que veremos posteriormente. Cuando, por ejemplo, decimos que en la red eléctrica de una casa hay 220V de corriente alterna, nos referimos a su valor eficaz.

1.3. Desfase



(A) Circuito (B) Onda adelantada (C) Onda atrasada

FIGURA (5). Circuito desfasado

Llamamos desfase al hecho de que la medida de una tensión alterna no es cero cuando empezamos a contar el tiempo, sino otro valor. Por ejemplo, imaginemos la siguiente situación: una fuente de tensión alterna permanente, un interruptor y una resistencia. La caída de la tensión en la resistencia **V**, que será alterna porque la fuente original es alterna, se empieza a medir desde que activo el interruptor; en ese momento empieza a correr el tiempo.

Pero la tensión aplicada en ese momento no tiene que coincidir con el cero; de hecho es más probable que coincida con cualquier otro valor de la onda senoidal. Por lo tanto, la forma de onda que mediremos será algo como la de la figura 5b o 5c.

Si la onda empieza en un valor positivo, como en la figura 5b, decimos que la onda está adelantada y tiene desfase $-\varphi$. Su ecuación es $V = A \cdot sen(wt + \varphi)$

Si la onda empieza en un valor negativo, como en la figura 5c, decimos que la onda está atrasada y tiene desfase $+\varphi$. Su ecuación es $V = A \cdot sen(wt - \varphi)$

Cuando estudiemos una sola onda senoidal, el desfase de la señal puede ignorarse. El problema estará en cuando combinemos varias señales y estas estén desfasadas unas respecto de otras.

1.4. Ondas senoidales simultáneas

Si dos magnitudes físicas están relacionadas entre sí , y ambas varían de forma senoidal , estamos hablando de **ondas senoidales simultáneas**.

Estudiaremos, por ser las más habituales, las que tienen **igual frecuencia**.

1.4.1. Ondas en fase

Son en las que coinciden en el tiempo los mínimos y los máximos. Por ejemplo, dos ondas de intensidad simultáneas y en fase se representan en la figura 6

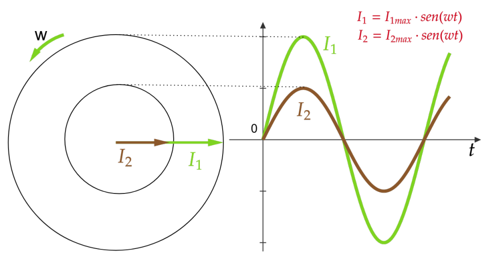


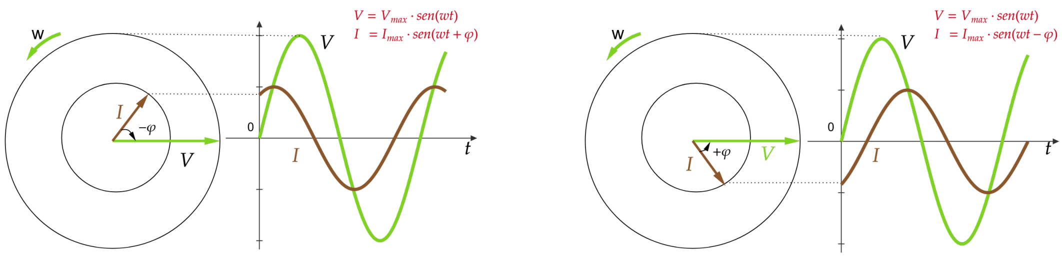
FIGURA (6). Ondas de intensidad simultáneas y en fase

1.4.2. Ondas desfasadas adelantadas

Por comodidad, una de las magnitudes senoidales la consideraré con fase 0. En el caso de la figura 7a, la tensión. La intensidad también representada en la figura 7a está adelantada respecto de la tensión en un ángulo φ. El ángulo se toma desde la onda referida (intensidad) hasta la onda base (tensión), por lo que es negativo.

1.4.3. Ondas desfasadas atrasadas

En este caso, figura 7b, la intensidad está atrasada. Como el ángulo φ se toma desde la onda referida (intensidad) hasta la onda base (tensión), es positivo.



(A) adelantada

(B) retrasada

FIGURA (7). Ondas simultáneas desfasadas

1.4.4. Expresión general de una onda desfasada

La expresión general de una onda desfasada (por ejemplo, para la intensidad) sería: $I = I_{max} \cdot sen(wt - \varphi)$.

- ✔ Si la onda está adelantada, $\varphi < 0$, su ángulo es negativo $\varphi = -|\varphi|$. Por lo tanto la ecuación queda $I = I_{max} \cdot sen(wt + |\varphi|)$
- ✔ Si la onda está atrasada $\varphi > 0$, su ángulo es positivo $\varphi = |\varphi|$. Por lo tanto la ecuación queda $I = I_{max} \cdot sen(wt - |\varphi|)$

1.4.5. Sumas de ondas senoidales

A) Si las ondas están en fase, simplemente se suman sus máximos. por ejemplo, con dos intensidades:

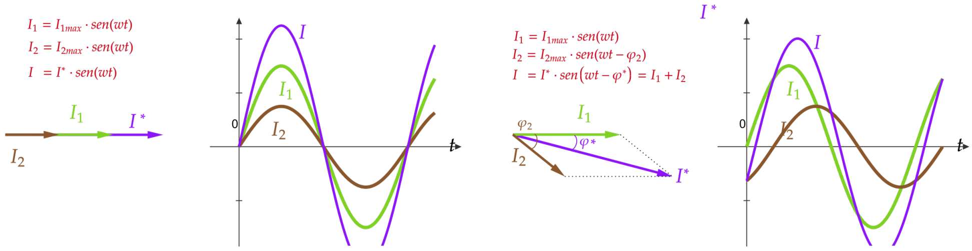
$$I_1 = I_{1max} \cdot sen(wt) \;\; , \;\; I_2 = I_{2max} \cdot sen(wt), \text{ luego } I = I_1 + I_2 = (I_{1max} + I_{2max}) \cdot sen(wt)$$

B) Si las ondas están en desfase, tendremos que hacer lo siguiente:

B.1) $I = I_1 + I_2 = I_{1max} \cdot sen(wt) + I_{2max} \cdot sen(wt - \varphi)$. Y esta expresión se puede igualar, de forma genérica, a una onda $I = I^* \cdot sen(wt - \varphi^*)$

B.2) Sumamos vectorialmente los máximos, según la figura 8b.

B.3) La intensidad I^* es el módulo del vector suma, y su ángulo de desfase es el ángulo φ^* que forma con la horizontal.



(A) Suma de ondas en fase (B) Suma de ondas desfasadas

FIGURA (8). Suma de ondas

Ejemplo: hallar la expresión algebraica de la suma de dos ondas senoidales de tensión, de 127 V y 220V respectivamente, y 50 Hz de frecuencia. La segunda está adelantada 30º respecto de la primera.

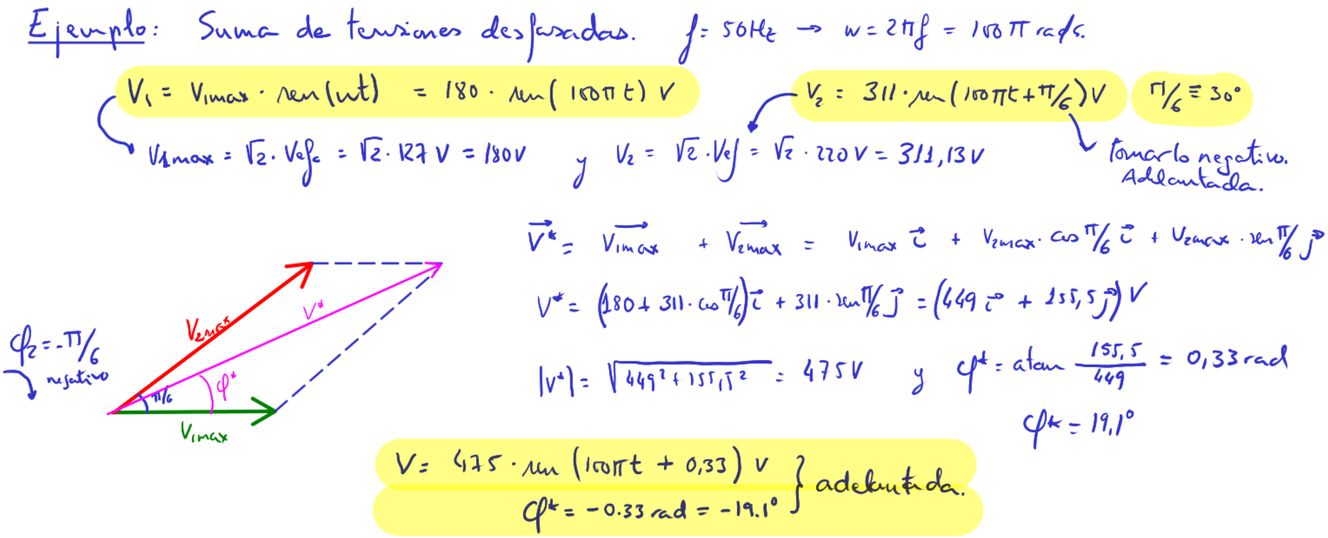


FIGURA (9). Ejemplo de suma de ondas desfasadas

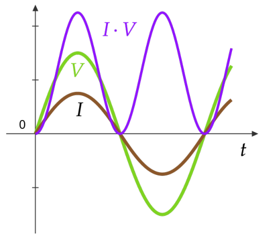
Nota: si necesito la resta en vez de la suma, se suma el opuesto de la segunda a la primera.

1.4.6. Producto de ondas senoidales

Como ejemplo, en electricidad es muy frecuente el uso de la multiplicación de la intensidad por la tensión, resultando la magnitud potencia. Si por ejemplo tenemos una tensión $V = V_o \cdot sen(wt)$ y una intensidad $I = I_o \cdot sen(wt)$, ambas señales en fase [1]

$$P = I \cdot V = I_o \cdot V_o \cdot sen^2(wt) = I_o \cdot V_o \cdot \frac{1 - cos(2wt)}{2} \qquad (2)$$

Fórmula del producto de ondas en fase



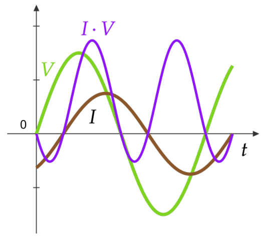
Gráfica

Como podemos ver, la resultante es una onda de doble frecuencia, nunca alterna, sino **pulsante** (siempre positiva).

Si las ondas están desfasadas, $V = V_o \cdot sen(wt)$ y una intensidad $I = I_o \cdot sen(wt - \varphi)$, también tenemos una señal de doble frecuencia, aunque más compleja. En el cálculo es útil el seno del ángulo doble[2].

$$P = I \cdot V = I_o \cdot V_o \cdot sen(wt) \cdot sen(wt - \varphi) =$$
$$= I_o \cdot V_o \cdot \frac{[1 - cos(2wt)] \cdot cos(\varphi) - sen(2wt) \cdot sen(\varphi)}{2} \qquad (3)$$

Fórmula del producto de ondas desfasadas



Gráfica

[1] $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$
Si $\alpha = \beta$, entonces $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha) = \left[1 - sen^2(\alpha)\right] - sen^2(\alpha) = 1 - 2 \cdot sen^2(\alpha)$. Por lo tanto $sen^2(\alpha) = \frac{1-cos(2\alpha)}{2}$

[2] $sen(2wt) = 2 \cdot sen(wt) \cdot cos(wt)$

2. Elementos lineales

Al aplicar una tensión alterna a un circuito, se provoca la circulación de una corriente en el mismo. Si la intensidad de corriente que circula es una onda senoidal de igual frecuencia que la onda de tensión alterna aplicada, el circuito tiene una **respuesta lineal**.

Ahora bien, la onda de intensidad podrá estar en fase, o adelantada o atrasada respecto de la onda de tensión. Habrá pues tres tipos de circuitos, con tres tipos de cargas según sea esta respuesta: **resistivos, capacitivos e inductivos.**

2.1. Circuito resistivo

En un circuito donde solo existen cargas resistivas puras, la tensión y la intensidad estarán en fase. ***En todo momento se cumple la ley de Ohm***.

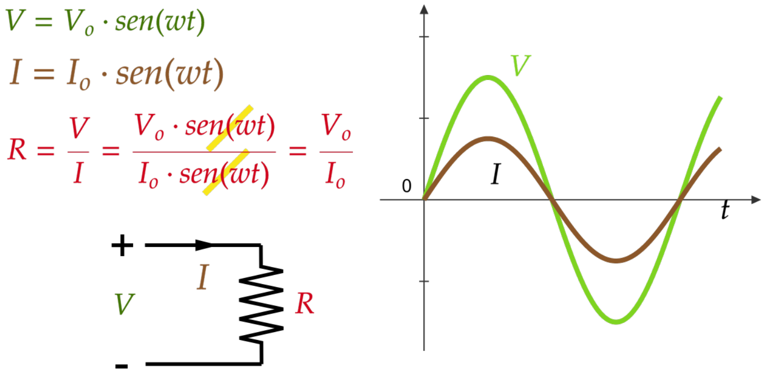


FIGURA (10). Circuito resistivo

2.2. Circuito inductivo

Un circuito es **inductivo** puro, cuando al aplicarle una tensión alterna, la onda de la intensidad que lo atraviesa **está atrasada respecto de ella**.

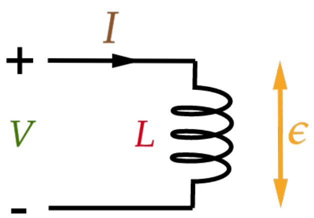


FIGURA (11). Circuito inductivo puro

Consistiría en una bobina ideal, con resistencia considerada nula. En este caso sólo debemos considerar su coeficiente de autoinducción L.

Sabemos que la expresión de la fuerza electromotriz en la bobina (la expresión tiene la «N») es $\varepsilon = -N\frac{d\phi}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$

Pero si observamos el circuito y aplicamos Kirchhoff, tenemos que $V + \varepsilon = 0$, por lo tanto $V = -\varepsilon = L \cdot \frac{dI}{dt}$

Si escogemos V, tal que $V = V_o \cdot sen(wt)$ entonces

$$I = \int \frac{V_o}{L} \cdot sen(wt) \cdot dt = \frac{V_o}{w \cdot L} \cdot [-cos(wt)] \tag{4}$$

Y según las igualdades trigonométricas:

$$cos(\alpha) = sen\left(\frac{\Pi}{2} - \alpha\right) \quad \text{y} \quad sen(-\beta) = -sen(\beta) \quad \text{luego} \quad -cos(\alpha) = -sen\left(\frac{\Pi}{2} - \alpha\right) = sen\left(\alpha - \frac{\Pi}{2}\right)$$

$$I = \frac{V_o}{w \cdot L} \cdot sen\left(wt - \frac{\Pi}{2}\right) \quad \text{siendo} \quad V = V_o \cdot sen(wt) \tag{5}$$

Por lo tanto, obtenemos que la intensidad alterna en una bobina ideal se retrasa respecto de la tensión alterna en 90º. Cuando la tensión «baje», la intensidad «sube» y cuando la tensión tenga un cero la intensidad tendrá un mínimo o un máximo, y viceversa.

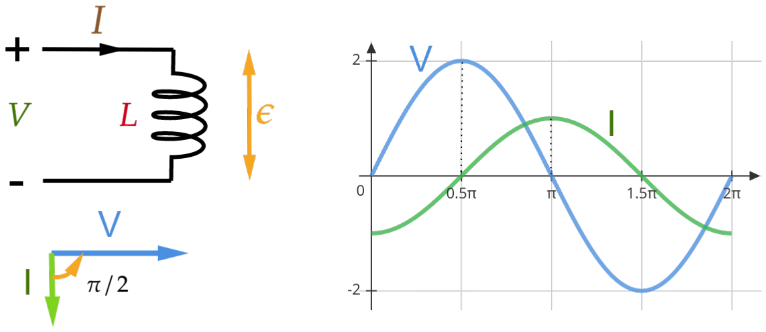


FIGURA (12). Circuito inductivo puro

El valor máximo que circula de intensidad es:

$$I_o = \frac{V_o}{w \cdot L} = \frac{V_o}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L} \tag{6}$$

Y si comparamos con la ley de Ohm, tenemos un término $2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$ que en el circuito inductivo parece estar haciendo de resistencia. Este término se denomina reactancia inductiva; la llamaremos X_L y se mide en unidades de Ohmios **(Ω).**

$$X_L = w \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \tag{7}$$

Así que, entre los valores máximos o los valores eficaces se cumple que: $I_o = \frac{V_o}{X_L}$, $I_{ef} = \frac{V_{ef}}{X_L}$.

La **reactancia inductiva o inductancia** se diferencia en una resistencia pura **que su valor no es constante**. Aunque la autoinducción sea constante, seguirá el valor de X_L dependiendo del valor de la frecuencia de la señal.

2.3. Circuito capacitivo

Un elemento capacitivo es un elemento que hace lo contrario que la inducción: adelanta la intensidad respecto de la tensión. Un elemento capacitivo puro es un condensador ideal con resistencia infinita. El valor de la capacidad de un condensador viene por la expresión:

$$I = C \cdot \frac{dV}{dt} \tag{8}$$

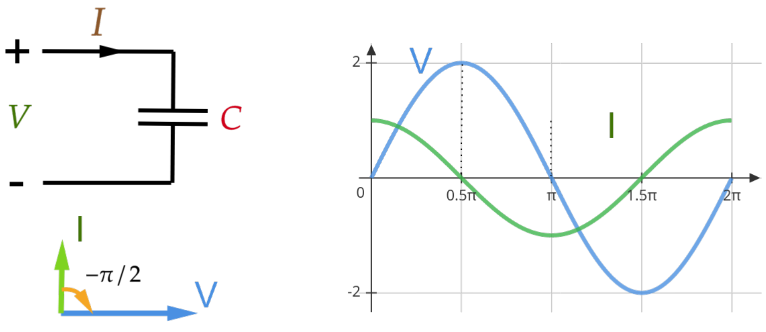


FIGURA (13). Circuito capacitivo puro o condensador

Si escogemos V, tal que $V = V_o \cdot sen(wt)$ (como antes) entonces:

$$I = C \cdot \frac{dV}{dt} = C \cdot V_o \cdot w \cdot cos(wt) \tag{9}$$

$$sen\left(\alpha + \frac{\Pi}{2}\right) = sen(\alpha) \cdot cos\left(\frac{\Pi}{2}\right) + cos(\alpha) \cdot sen\left(\frac{\Pi}{2}\right) = cos(\alpha)$$

$$I = I_o \cdot sen\left(wt + \frac{\Pi}{2}\right) = C \cdot V_o \cdot w \cdot sen\left(wt + \frac{\Pi}{2}\right) \tag{10}$$

$$I_o = C \cdot V_o \cdot w$$

Y, si de manera análoga al inductor, definimos una **reactancia capacitiva o capacitancia** como la relación entre V e I. Al igual que la inductancia, no es constante, sino que depende de la frecuencia. Y X_C se mide también en Ohmios **(Ω).**

$$X_C = \frac{V}{I} = \frac{1}{C \cdot w} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \tag{11}$$

Nota: la capacidad de un condensador se mide en **faradios (F)**. Un faradio se define como la carga que adquiere un condensador de 1 Culombio cuando está sometido a una diferencia de potencial de 1 Voltio.

2.4. Potencia

La potencia en un circuito absorbida por un componente es el producto de la intensidad y de la tensión. Como estoy aplicando tensiones alternas y provocando consumos de corrientes asimismo alternas, la potencia absorbida será también una onda alterna, **instantánea**, es decir conocido su valor en función del tiempo.

2.4.1. Potencia de un circuito resistivo

En un circuito resistivo tenemos los valores en fase de la tensión alterna y la intensidad: $V = V_o \cdot sen(wt) \quad e \quad I = I_o \cdot sen(wt)$

La expresión de la potencia (vista ya en la ecuación 2, punto 1.4.6) sería: $P = I \cdot V = I_o \cdot V_o \cdot sen^2(wt) = I_o \cdot V_o \cdot \frac{1-cos(2wt)}{2}$ siendo I_o, V_o los valores máximos de la intensidad y de la tensión en la onda.

Recordemos que tiene ***forma de onda pulsante***. La señal es siempre positiva, y de frecuencia $2 \cdot w$, el doble de la frecuencia original. La potencia media calculada en un período o un semi-período (ver problemas) puede demostrarse que es:

$$P_m = \frac{I_o \cdot V_o}{2} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \cdot \frac{V_o}{\sqrt{2}} = I_{ef} \cdot V_{ef} \tag{12}$$

El valor de potencia media (lo llamaremos simplemente «P») es el valor que consideremos como potencia eficaz consumida por la resistencia. La llamaremos **potencia activa**, y es la potencia que produce un trabajo útil en el circuito. Su unidad es el **Vatio**. Y es simplemente el producto de los valores eficaces.

2.4.2. Potencia en un circuito inductivo

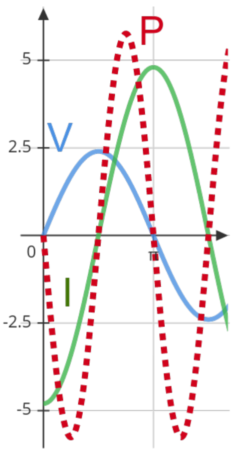


FIGURA (14). Potencia cir. inductivo

En un circuito inductivo, recordamos que

$$I = \frac{V_o}{w \cdot L} \cdot sen\left(wt - \frac{\Pi}{2}\right) \quad \text{siendo} \quad V = V_o \cdot sen(wt)$$

y además que $-cos(\alpha) = sen\left(\alpha - \frac{\Pi}{2}\right)$

La potencia en un circuito inductivo sería [3]:

$$P = I \cdot V = I_o \cdot V_o \cdot sen(wt) \cdot sen\left(wt - \frac{\Pi}{2}\right) = \qquad (13)$$
$$= I_o \cdot V_o \cdot sen(wt) \cdot [-cos(wt)] = -\frac{I_o \cdot V_o}{2} \cdot sen(2wt)$$

Que es una onda alterna de frecuencia doble. Esta onda tiene un valor medio $P_m = 0$,y una potencia instantánea máxima de $P_{max} = -\frac{I_o \cdot V_o}{2}$.

El hecho de que su potencia media sea cero, significa que durante medio ciclo absorbe energía y durante medio ciclo la disipa. El balance es cero.

Sin embargo, puedo definir una **potencia ficticia** (cuyo significado veremos más adelante) que denotaremos con la letra **Q** y **llamaremos potencia reactiva** como el producto de los valores eficaces de la onda. recordemos que $I_{ef} = \frac{V_{ef}}{X_L}$. Por lo tanto...

$$Q = I_{ef} \cdot V_{ef} = X_L \cdot I_{ef}^2 = \frac{V_{ef}^2}{X_L} \qquad (14)$$

Esta potencia, para distinguirla de la real, no se mide en vatios, sino en una unidad equivalente: **voltio-amperio reactivo (VAr)**.

2.4.3. Potencia en un circuito capacitivo

De forma análoga al circuito inductivo, en el capacitivo $I = I_o \cdot sen\left(wt + \frac{\Pi}{2}\right)$ siendo $V = V_o \cdot sen(wt)$

$$P = I \cdot V = I_o \cdot V_o \cdot sen(wt) \cdot sen\left(wt + \frac{\Pi}{2}\right) = \qquad (15)$$
$$= I_o \cdot V_o \cdot sen(wt) \cdot cos(wt) = \frac{I_o \cdot V_o}{2} \cdot sen(2wt)$$

Y, como en el caso anterior, definiremos **la potencia reactiva** como $Q = I_{ef} \cdot V_{ef} = X_C \cdot I_{ef}^2 = \frac{V_{ef}^2}{X_C}$, siendo también su unidad el **voltio-amperio reactivo (VAr)**.

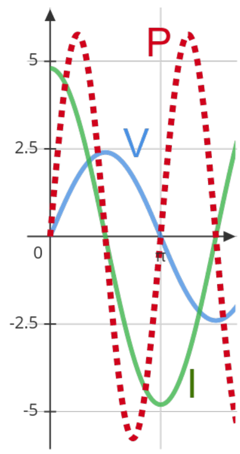


FIGURA (15). Potencia cir. capacitivo

La potencia reactiva no siempre se transforma en trabajo útil; más bien se «almacena» en los elementos de los circuitos, sin producir un trabajo útil.

[3] $sen(2\alpha) = sen(\alpha + \alpha) = 2 \cdot sen(\alpha) \cdot cos(\alpha)$

3. Números complejos

Todos conocemos los números reales. Cualquier número que pertenezca a $\mathbb{R}$ puede representarse en una recta infinita, con valores a la derecha e izquierda del cero. Y podemos hacer cualquier operación con estos números: suma , resta, multiplicación, trigonometría...

¿Cualquiera? Haz la siguiente operación: $\sqrt{-16}$.

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1 \cdot 16} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{-1} \cdot 4$$

¿Y cómo se calcula la raíz del **-1**? ¿Hay algún número real que multiplicado por sí mismo dé **-1**? La respuesta es no.

No tenemos que imaginar un número, que representaremos por la letra «i» que multiplicado por sí mismo dé -1. $i \cdot i = i^2 = -1$. Si hacemos este «truco» podremos calcular la raíz de los números negativos. Entonces $\sqrt{-16} = 4 \cdot \sqrt{-1} = 4 \cdot i$. Así que la raíz de -16 es cuatro veces el número imaginario «i».

¿Y en qué parte de la recta real $\mathbb{R}$ los coloco? Bueno, la recta ya está saturada con los reales. No caben más. Así que necesito otra recta donde ponerlos.... ¿Y dos rectas...? Pues definen un plano, sobre todo si esta segunda recta la escojo perpendicular a la recta de los reales $\mathbb{R}$. Nuestro número $\sqrt{-16} = 4 \cdot i$ lo colocaré en esa recta perpendicular. Así que todos los números «imaginarios», resultado de calcular las raíces de números negativos los colocaré en ese eje «Y» perpendicular al «X».

Pero esas rectas forman un plano, y un plano tiene más puntos que sólo los que hay en la línea del eje X o Y. En general todos los puntos de ese plano representan un número que están a un nivel superior al nivel de los números reales: son los **números complejos** $\mathbb{C}$.

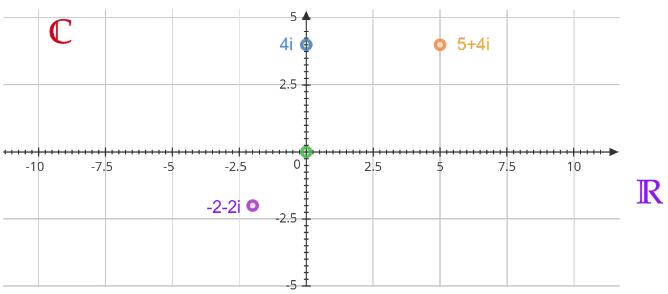


FIGURA (16). Plano complejo y recta real

Denotaremos un número complejo cualquiera por la combinación de su parte real y su parte imaginaria. Así el número $a+bi$ tendrá una parte real **«a»** y una parte imaginaria **«bi»**

3.1. Operaciones con números complejos

Ver calculadora online: https://es.symbolab.com/solver/complex-number-calculator

- ✔ Suma (resta) de números complejos. Ejemplo: $(3+4i)+(5-8i) = (3+5)+(4-8)i = 8-4i$
  - ⇨ Opuesto: el opuesto de $z = a+bi$ es $-z = -a-bi$
- ✔ Multiplicación de números complejos. Ejemplo: $(5+4i)\cdot(7-8i) = 5\cdot 7+4i\cdot 7-5\cdot 8i-4\cdot 8\cdot i\cdot i = 35+28i-40i-32\cdot(-1) = 67-12i$
- ✔ Compleja conjugada. $\bar{z} = \overline{a+bi} = a-bi$. También se puede expresar como z'
- ✔ Multiplicación de un número complejo por su conjugado:

⇨ $z \cdot z' = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$

⇨ $(3+4i)\cdot(3-4i) = 9+16 = 25$

✔ División de un número entre otro. Se multiplica y divide por el conjugado del denominador.

⇨ Ejemplo: $\frac{(5+4i)}{(7-8i)} = \frac{(5+4i)}{(7-8i)} \cdot \frac{(7+8i)}{(7+8i)} = \frac{35+28i+40i-32}{49+64} = \frac{3+68i}{113} = \frac{3}{113} + \frac{68i}{113} = 0{,}026 + 06i$

Un número complejo también es un «vector»

Si nos fijamos, en el plano complejo se representan puntos. A estos puntos puede asociarse un vector, y este vector puede caracterizarse por un módulo y un ángulo o fase. Tengo por tanto dos expresiones equivalente de un número complejo:

✔ La expresión **binómica**: $a+bi$ (real - imaginaria)

✔ La expresión **polar**: $r\angle\alpha$ (módulo - fase)

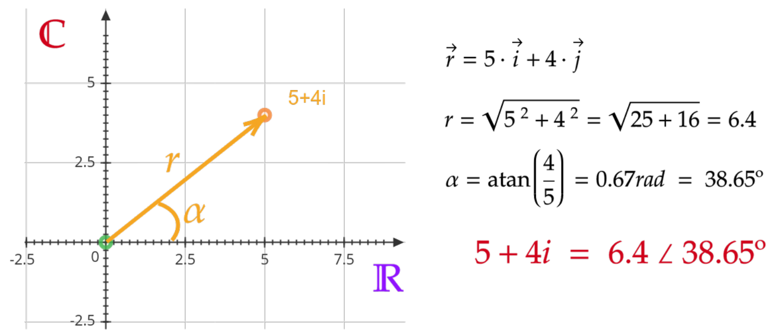


FIGURA (17). Representación polar de un número complejo

✔ Pasamos de la expresión binómica a la polar con las fórmulas: $r = \sqrt{a^2+b^2}$ y $\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

⇨ Observar que $r^2 = z \cdot \bar{z}$, que el módulo al cuadrado es la multiplicación del número complejo por su conjugado.

✔ Pasamos de la expresión polar a la binómica con: $a = r \cdot cos(\alpha)$ y $b = r \cdot sen(\alpha)$

✔ La multiplicación de dos complejos en forma polar es muy fácil: $z_1 = r_1\angle\alpha_1$ y $z_2 = r_2\angle\alpha_2$ entonces $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)\angle(\alpha_1+\alpha_2)$

⇨ $(3\angle 45^\circ)\cdot(-7\angle 22^\circ) = -21\angle 67^\circ = 21\angle 247^\circ$

✔ Y la división igualmente, ya que $\frac{z_1}{z_2} = (r_1/r_2)\angle(\alpha_1-\alpha_2)$, se dividen los módulos y se restan las fases.

✔ Y la potencia de un número polar elevado a un número entero «n»: $z^n = r^n\angle(n\cdot\alpha)$

4. Impedancia

NOTA IMPORTANTE: en corriente alterna y electrónica suele usarse como número imaginario $\sqrt{-1} = j$, la letra «j» en vez de la letra «i» para no dar lugar a la confusión con la representación de la intensidad. Lo usaremos a partir de ahora.

Recordemos el punto 2.2. En un circuito inductivo obteníamos la reactancia inductiva o inductancia $X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$ de la relación de las intensidades y tensiones máximas o eficaces $I_o = \frac{V_o}{X_L}, I_{ef} = \frac{V_{ef}}{X_L}$

Pero como podemos observar en la figura 18, los valores de tensión e intensidad (máximos) están desfasados. La intensidad está retrasada respecto de la tensión en un ángulo de $\pi/2$. ¿Cómo afecta este hecho al cálculo de X_L?

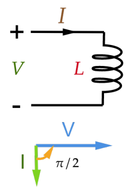


FIGURA (18). Inductancia vectores

En efecto, si considero que I_o y V_o tienen un carácter vectorial, puedo asignarles también una representación en números complejos. Usando la forma polar, no sólo tendrán un módulo, sino una fase: $V_o = V_o\angle 0^o$ e $I_o = I_o\angle -90^o$. Simplemente se observan los vectores para deducir sus fases como números complejos.

$$X_L = \frac{V_o}{I_o} \equiv \frac{V_o\angle 0^o}{I_o\angle -90^o} = X_L\angle\left(0^o\text{-}(\text{-}90^o)\right) = X_L\angle 90^o \tag{16}$$

La reactancia inductiva, por tanto, puede expresarse como un número complejo $X_L = w \cdot L\, j = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L\, j$. En forma vectorial estaría ***adelantada*** a la tensión y apuntaría en sentido contrario a la intensidad.

Los diagramas representando en el plano complejo como vectores las impedancias, tensiones o intensidades en un circuito se denominan **diagramas de Fresnel**. Estos diagramas ayudan a resolver e interpretar los circuitos de corriente alterna.

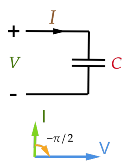


FIGURA (19). Capacitancia vectores

De igual modo, en el punto 2.3 , definíamos la reactancia capacitiva o capacitancia como $X_C = \frac{1}{C \cdot w} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$

Relacionando de forma análoga al caso inductivo, y sabiendo que la intensidad ahora está adelantada respecto de la tensión:

$$X_C = \frac{V_o}{I_o} \equiv \frac{V_o\angle 0^o}{I_o\angle 90^o} = X_C\angle\left(0^o\text{-}90^o\right) = X_C\angle -90^o \tag{17}$$

Luego la expresión compleja de la reactancia capacitiva sería $X_C = \frac{-j}{C \cdot w} = \frac{-j}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$. En forma vectorial estaría ***atrasada*** respecto de la tensión y apuntaría también al sentido contrario de su intensidad.

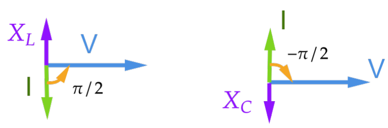


FIGURA (20). X_L y X_C representación vectorial o fasorial.

Tenemos pues en un circuito tres posibles elementos receptores:

✔ La resistencia **R**, cuya expresión en números complejos es simplemente su parte real. Ni siquiera se indica como tal. Se mide en Ohmios.

- ✔ Un elemento inductivo $X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L\, j$, cuya expresión es un número complejo con parte imaginaria positiva.
- ✔ Un elemento capacitivo $X_C = \frac{-j}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$, cuya expresión es un número complejo con parte imaginaria negativa.

En la realidad, cualquier elemento receptor genérico, se podrá expresar por un número complejo que tendrá una parte real (asociada a un valor resistivo) y una parte imaginaria que le da carácter inductivo o capacitivo, según sea su signo.

A este valor número complejo **Z** de un elemento receptor lo llamaré **impedancia**.

La ley de Ohm, que estudiamos en corriente continua en el caso de las resistencias como $V = I \cdot R$, ahora la generalizamos como $V = I \cdot Z$. V e I no tendrán ya asociados un valor escalar sino que tienen un carácter vectorial o complejo, añadiendo el factor fase a los cálculos.

Estudiaremos a continuación circuitos genéricos asociación de resistencias con solenoides y condensadores.

4.1. Circuito RL

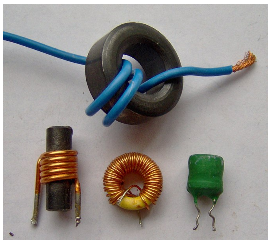


FIGURA (21). Bobinas. Imagen Wikimedia By Miguel

Una bobina, solenoide o choque es una agrupación de espiras de cobre enrollados sobre un núcleo de un elemento ferroso o bien al aire. Un elemento de estas características siempre tendrá asociada una resistencia y una autoinducción. Puede pues representarse como la combinación en serie de una reactancia inductiva y una resistencia (una impedancia con componente inductiva).

En un circuito de estas características $Z = R + jwL$, con lo que la intensidad total sería:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_o \angle 0^o}{R + jwL} \tag{18}$$

Pasando a una representación polar: $Z = |Z| \angle \phi$, siendo $|Z| = \sqrt{R^2 + w^2 L^2}$ y $\phi = \arctan\left(\frac{wL}{R}\right)$. Por lo tanto:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_o \angle 0^o}{R + jwL} = \frac{V_o \angle 0^o}{\sqrt{R^2 + w^2 L^2}\, \angle \phi} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + w^2 L^2}} \angle - \phi \tag{19}$$

Por lo que podemos deducir que el valor instantáneo de la intensidad en ese circuito (atrasado respecto de la tensión) es:

$$I = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + w^2 L^2}}\, sen(wt - \phi) \tag{20}$$

En módulo, podemos decir siempre que $Z = \frac{V_o}{I_o} = \frac{V_{ef}}{I_{ef}}$ (muchas veces se expresa directamente $Z = \frac{V}{I}$, siendo V e I los valores eficaces)

Para este circuito, y de forma más general, podemos calcular tres potencias:

- ✔ **Potencia activa:** $P = I^2 \cdot R = I \cdot V \cdot cos(\phi)$, medida en watios y siendo V e I los valores eficaces.
- ✔ **Potencia reactiva:** $Q = I^2 \cdot X_L = I \cdot V \cdot sen(\phi)$, medida en voltio-amperio reactivo (VAr). Con $X_L = w \cdot L$
- ✔ **Potencia aparente:** $S = I \cdot V$, medida en voltio-amperio. El producto directo de los valores eficaces.

Las tres potencias forman un triángulo de ángulo φ. Un triángulo que es semejante al que forman $\widehat{Z\, R\, X_L}$.

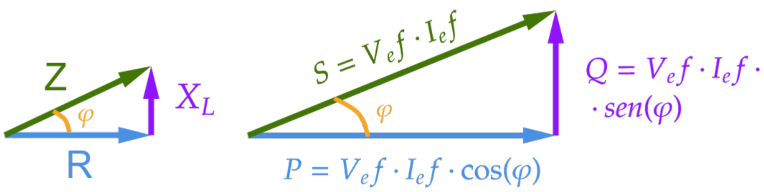


FIGURA (22). Triángulo de potencias en circuito RL

4.2. Circuito RC

FIGURA (23). Condensadores. Imagen Wikimedia By Eric Schrader

Un condensador está formado por dos capas de material conductor separados por un dieléctrico. Este componente, al conectarlo a una fuente de tensión acumula cargas positivas y negativas en ambas capas. Un condensador no ideal presentará también una pequeña resistencia.

En un circuito de estas características $Z = R - \frac{j}{wC}$, con lo que la intensidad total sería:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_o \angle 0^o}{R - \frac{j}{wC}} \tag{21}$$

Pasando a una representación polar: $Z = |Z| \angle \phi$, siendo $|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2 \cdot C^2}}$ y $\phi = \arctan\left(\frac{-1}{w \cdot C \cdot R}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{w \cdot C \cdot R}\right)$. Por lo tanto:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_o \angle 0^o}{R - \frac{j}{wC}} = \frac{V_o \angle 0^o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2 \cdot C^2}} \angle - |\phi|} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2 \cdot C^2}}} \angle |\phi| \tag{22}$$

Por lo que podemos deducir que el valor instantáneo de la intensidad en ese circuito (adelantado respecto de la tensión) es:

$$I = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{w^2 \cdot C^2}}} sen(wt + |\phi|) \tag{23}$$

Para este circuito también podemos calcular tres potencias:

- ✔ **Potencia activa:** $P = I^2 \cdot R = I \cdot V \cdot cos(\phi)$, medida en watios y siendo V e I los valores eficaces.
- ✔ **Potencia reactiva:** $Q = I^2 \cdot X_C = I \cdot V \cdot sen(\phi)$, medida en voltio-amperio reactivo (VAr). Con $X_C = \frac{1}{w \cdot C}$
- ✔ **Potencia aparente:** $S = I \cdot V$, medida en voltio-amperio.

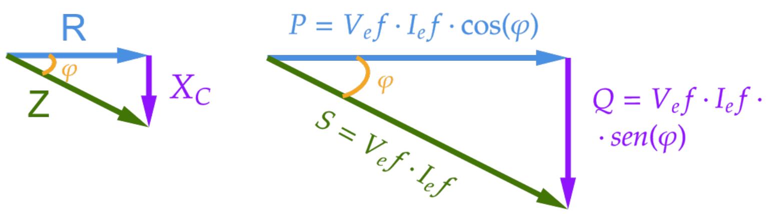


FIGURA (24). Triángulo de potencias en circuito RC

4.3. Circuito RLC en serie

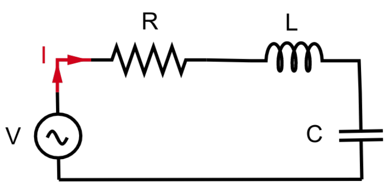


FIGURA (25). Circuito RLC

Este circuito está compuesto por los tres elementos que hemos tratado hasta ahora dispuestos en serie.

Su impedancia total será la suma de las tres impedancias (compleja): $Z = R + X_L + X_c = R + jwL - \frac{j}{wC}$

El módulo de esa impedancia es $Z = \sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}$ y el ángulo de desfase $\phi = \arctan\left(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R}\right)$

Por lo tanto la expresión de la intensidad:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_o \angle 0^{o}}{R + jwL - \frac{j}{wC}} = \frac{V_o \angle 0^{o}}{\sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2} \angle \phi} = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}} \angle - \phi \tag{24}$$

$$I = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}} sen(wt - \phi) \tag{25}$$

Donde es importante tener en cuenta lo siguiente:

- ✔ Si $wL > \frac{1}{wC}$ el ángulo ϕ es positivo, y la intensidad está **retrasada** respecto de la tensión. El circuito tiene carácter inductivo.
- ✔ Si $wL < \frac{1}{wC}$ el ángulo ϕ es negativo, y la intensidad está **adelantada** respecto de la tensión. El circuito tiene carácter capacitivo.
- ✔ Si $wL = \frac{1}{wC}$ el ángulo ϕ es cero. **La intensidad y la tensión están en fase**. Cuando esto ocurre se dice que el circuito está en **resonancia**.

Circuito resonante

En un circuito resonante se cumple que $wL = \frac{1}{wC}$. De aquí obtenemos una expresión para la frecuencia $f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$.

Fijados en un circuito los valores L y C, solo existe una frecuencia para la que el circuito sea resonante. **En un circuito resonante no existe potencia reactiva, solo activa.**

Potencias

Para este circuito podemos calcular tres potencias, como en los circuitos anteriores:

- ✔ **Potencia activa:** $P = I^2 \cdot R = I \cdot V \cdot cos(\phi)$, medida en watios.
- ✔ **Potencia reactiva:** $Q = I \cdot V \cdot sen(\phi)$, medida en voltio-amperio reactivo (VAr). Este valor será positivo si el circuito tiene carácter inductivo, y negativo si tiene carácter capacitivo.
- ✔ **Potencia aparente:** $S = I \cdot V$, medida en voltio-amperio. El producto directo de los valores eficaces.

4.4. Circuito RLC en paralelo y circuitos RLC genéricos

Se procede de manera análoga al caso de corriente continua: donde calculábamos resistencias equivalentes y aplicábamos las leyes de Kirchhoff con las resistencias, ahora lo hacemos con las impedancias, teniendo en cuenta que son números complejos.

Por tanto, los elementos en serie tienen una impedancia equivalente que son la suma de sus impedancias: $Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$. Los elementos en paralelo suman sus impedancias inversas para calcular la impedancia equivalente: $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_3}$

Resolveremos varios circuitos de este tipo en los problemas.

4.5. Admitancia

Sea una impedancia compleja, $Z = R + jX$ genérica. La impedancia es la inversa de esa impedancia $Y = \frac{1}{R+jX}$. Haciendo operaciones...

$$Y = \frac{1}{R+jX} = \frac{1}{R+jX} \cdot \frac{R-jX}{R-jX} = \frac{R-jX}{R^2+X^2} = \frac{R}{R^2+X^2} - j \cdot \frac{X}{R^2+X^2} \tag{26}$$

La **admitancia** se mide en Siemens (S). $1\,S = 1/\Omega$.

Llamamos **conductancia** a la parte real de la admitancia $G = \frac{R}{R^2+X^2}$ y **susceptancia** a la parte imaginaria $B = \frac{X}{R^2+X^2}$.

Cuando tenemos elementos en paralelo, la admitancia del circuito es la suma de las admitancias de cada elemento. $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_3} \quad \Rightarrow \quad Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$

4.6. Factor de potencia

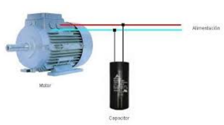


FIGURA (26). Condensador compensador

El factor de potencia es la relación entre la potencia empleada en el circuito para producir un trabajo útil (potencia activa) y la potencia que aparentemente consume el circuito (potencia aparente).

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{I \cdot V \cdot cos(\phi)}{I \cdot V} = cos(\phi) \tag{27}$$

Coincide, evidentemente, con el coseno del ángulo de desfase, y es una magnitud adimensional que vale entre 0 y 1.

En los circuitos de corriente alterna el cálculo del factor de potencia adquiere mucha importancia. El problema radica en que la mayoría de los receptores útiles en un circuito, o bien son resistivos, o bien son inductivos (bobinas en motores) y normalmente estos últimos acumulan una considerable energía magnética que se traduce en una energía o potencia reactiva alta.

Así, un circuito con motores suele consumir de la red eléctrica (potencia aparente) una cantidad de energía superior a la que realmente moverá el motor. Afortunadamente, sabemos que los circuitos inductivos, que retrasan la intensidad respecto de la tensión, pueden compensarse con partes capacitivas. Si un circuito con motor tiene un factor de potencia bajo, por ejemplo, 0.2 lo ideal es acercarlo al valor de 1. Eso podemos conseguirlo añadiendo al circuito del motor algún condensador, en serie o en paralelo.