Multiplicación de números complejos en su forma trigonométrica

Sean $u = r\,\mathrm{cis}\,\alpha$ y $v = s\,\mathrm{cis}\,\beta$, entonces $u\,v = (rs)\,\mathrm{cis}(\alpha+\beta)$. En otros términos:

$$uv = (rs)\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} u\,v &= r\,\mathrm{cis}\alpha \cdot s\,\mathrm{cis}\,\beta \\ &= (rs)(\mathrm{cis}\alpha\ \mathrm{cis}\alpha) \\ &= (rs)(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= (rs)\left(\cos\alpha\ \cos\beta + i\cos\alpha\ \sin\beta + i\sin\alpha\ \cos\beta + i^2\sin\alpha\ \sin\beta\right) \\ &= (rs)\left(\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta + i(\cos\alpha\ \sin\beta + i\sin\alpha\ \cos\beta)\right) \\ &= (rs)\left(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\right) \\ &= (rs)\,\mathrm{cis}(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la multiplicación de dos números complejos en su forma trigonométrica da como resultado un número complejo cuyo módulo es igual al producto de sus módulos y cuyo argumento es igual a la suma de los argumentos.

Ejemplo. Sea $u = 2\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ y $v = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\,sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\,cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Entonces $u\,v = 6\,\mathrm{cis}(0) = 6\left(\cos(0) + i\sin(0)\right) = 6$

Fórmula de Moivre

Empleando el resultado del *Ejercicio 3b* de esta sección, $z^n = r^n\,\mathrm{cis}(n\theta)$, y tomando $r = 1$, tenemos:

$$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\,.$$

Esta expresión es la llamada *fórmula de Moivre.*

Forma exponencial de un número complejo

Vamos a asumir que se siguen cumpliendo, como en los números reales, los conceptos de función, derivadas, series, etc. Vamos a demostrar la *fórmula de Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\ .$$

Empleemos el desarrollo en serie de potencias de la función $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, suponiendo que sea válido para cuando la variable x es un número complejo z .

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots.. + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Si tomamos $z = i\theta$, nos queda:

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + \frac{(i\theta)}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \ldots.. + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \ldots \\
&= 1 + i\frac{\theta}{1!} + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + \ldots \\
&= 1 + i\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \ldots.
\end{aligned}
$$

Agrupando tendremos:

$$
e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots.\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots.\right)
$$

Estos son los desarrollos de $\cos\theta$ y $\sin\theta$ respectivamente. Así que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Sea $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ un número complejo donde r es su módulo y θ su argumento. Entonces mediante el empleo de la fórmula de Euler se obtiene:

$$
z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta} .
$$

Esta expresión es la llamada *forma exponencial* del número complejo. Note que la forma exponencial es equivalente a la trigonométrica pues dependen de los mismos elementos: módulo y argumento del número complejo z . Esta forma es muy cómoda pues podemos efectuar la multiplicación, división y potenciación empleando las leyes del álgebra.

Multiplicación y división de números complejos en su forma exponencial

Sean $u = re^{i\alpha}$ y $v = se^{i\beta}$. Entonces:

$$
u\,v = re^{i\alpha}\,se^{i\beta} = (rs)e^{i(\alpha+\beta)}
$$

$$
\frac{u}{v} = \frac{re^{i\alpha}}{se^{i\beta}} = \left(\frac{r}{s}\right)e^{i(\alpha-\beta)}
$$

Ejemplo: Sea $u = 6e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $v = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$. Entonces $u\,v = 18e^{i\frac{\pi}{2}} = 6i$ y $\frac{u}{v} = 2e^{i(0)} = 2$.

Ejercicios de la Sección 2.

1) Representé:

   (a) en la forma trigonométrica el número complejo $-3+3i$.

   (b) en la forma binómica el número complejo $2(\cos\pi - i\sin\pi)$.

2) Represente:

   (a) en la forma trigonométrica el número complejo $-2-2i$.