



CAPÍTULO VI

EFEMÉRIDES PLANETARIAS

Índice del capítulo.

§ El problema geométrico

§ Aberraciones, perturbaciones y difracción

§ Ejercicios prácticos

§ Más problemas. Masas planetarias, paralajes, la Luna

§ Problemas propuestos

§ Bibliografía



EFEMÉRIDES PLANETARIAS

En este capítulo se sacará provecho de los resultados obtenidos en el anterior. Gracias al establecimiento de ecuaciones que expresan la posición de un cuerpo, orbitando alrededor de otro, en función del tiempo, se pretende predecir para una fecha dada su localización en la esfera celeste. Cabe decir aquí que, aunque el problema de los dos cuerpos haya sido aplicado hasta ahora al caso de un planeta atraído por el Sol, todo aquello sigue teniendo validez para satélites que giran alrededor de sus respectivos planetas. Eso sí, en tales circunstancias, en vez de hablar de afelio y perihelio, se utilizan los términos *apogeo* y *perigeo* para referirse a los puntos de distancia máxima y mínima.

En la primera sección se abordará este estudio desde un punto de vista geométrico, para después describir las diferentes eventualidades que hay que considerar en la práctica. Todo ello será ilustrado más adelante con la resolución de un caso real.

En la última sección se abordarán otros tipos de cuestiones relativas a la observación astronómica cuales son las masas planetarias, estimación de distancias mediante paralajes y las efemérides de la Luna.

§1 El problema geométrico

La trayectoria que sigue un cuerpo de órbita heliocéntrica por la esfera celeste queda determinada por 6 datos que se examinarán a continuación. Aparte de la excentricidad e , el argumento del perihelio ω , el semieje mayor a y el tiempo en el perihelio τ , elementos todos ellos introducidos en el [Capítulo V](#), se precisa de más información a fin de comparar la posición del objeto en el espacio con la que ocupa la Tierra para un tiempo dado. Para ello se considerará la [figura VI.1](#).

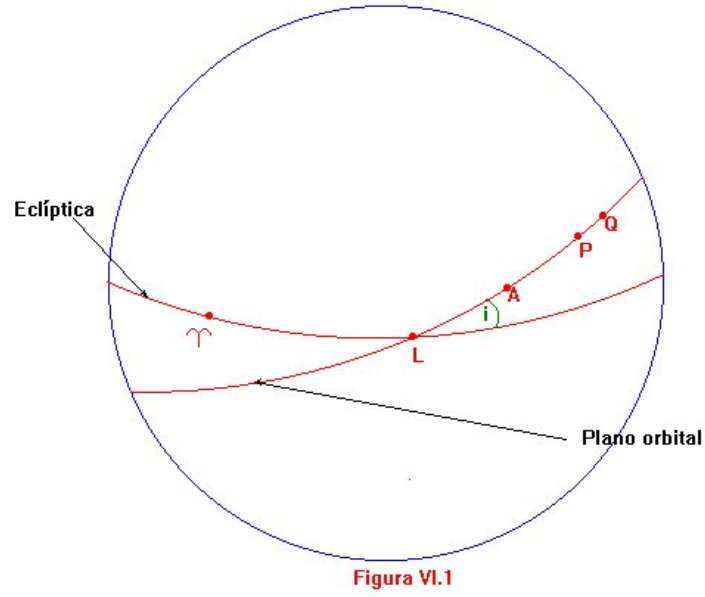


Figura VI.1

En ella está representada una esfera celeste centrada en el Sol. Los puntos P y A son las intersecciones con la esfera de los radios vectores del planeta para los respectivos tiempos t y τ . Dicho de otro modo, los lugares A y P serán la posiciones aparentes del planeta a su paso por el perihelio y en el tiempo t . El círculo máximo AP es, por consiguiente, la trayectoria seguida por el planeta, y el ángulo $\nu = \angle AP$, la anomalía verdadera en el tiempo t . Si la proyección de la órbita del planeta forma un ángulo $i \neq 0$ respecto de la eclíptica, entonces corta a esta en dos puntos, de los que solo es visible L en la figura. A i se le conoce como *inclinación orbital*. En una de las dos intersecciones, el planeta pasa del sur al norte de la eclíptica. Este es el denominado *nodo ascendente*. Su antípoda es el *nodo descendente*. En él, el planeta atraviesa la eclíptica desde el hemisferio norte hacia el sur. Se supondrá que L es el nodo ascendente. En concreto, i es el ángulo esférico $i = (-\Upsilon)LA$, con $-\Upsilon$ el equinoccio opuesto al punto vernal. Tomando el paso por el nodo ascendente como origen de medida de tiempos, se tendrá que el argumento en el perihelio es el ángulo $\omega = \angle LA$. Se introduce la *longitud del nodo ascendente* Ω como el ángulo $\Omega = \angle \Upsilon L$.

Adviértase que mientras Ω puede tomar cualquier valor entre 0° y 360° , la inclinación de la órbita i está confinada a los dos primeros cuadrantes.

Además, conforme a la terminología introducida en el capítulo anterior, determina el sentido de giro del planeta: para $i < 90^\circ$ describirá una órbita directa, mientras que órbitas retrógradas poseen una inclinación entre 90° y 180° .

Los parámetros necesarios para el cálculo de efemérides son pues

$$(a, e, \tau, i, \Omega, \omega).$$

No obstante, hay situaciones en las conviene manejar otro conjunto de datos. En ciertos casos, estas variaciones son incluso imprescindibles. Por ejemplo, la propia órbita de la Tierra, al tener inclinación nula, no determina ningún nodo, por lo que no existen ni ω ni Ω . También hay dificultades de orden práctico para valores muy pequeños de i , como es el caso de los planetas principales. Para superar tal eventualidad, a menudo se reemplaza el argumento en el perihelio ω por la *longitud del perihelio* $\bar{\omega}$ la cual se define como

$$\bar{\omega} = \Omega + \omega.$$

Obsérvese que $\bar{\omega}$ es un “ángulo quebrado” consistente en la suma de dos ángulos esféricos, desde Υ hasta L por la eclíptica más el tramo de órbita entre L y A . Para inclinaciones orbitales muy pequeñas, la longitud del perihelio se aproxima a la longitud eclíptica del planeta a su paso por el perihelio.

Concíbase ahora un objeto Q que se mueve a velocidad angular constante n , por la misma órbita y con idéntico sentido que el planeta, y coincidiendo con él en los pasos por el perihelio. Entonces $AQ = n(t - \tau) = M$, con M la anomalía media introducida en (V-14). El arco quebrado $\lambda = \Upsilon L + LQ$ se denomina *longitud media del planeta en el tiempo t* . Es obvio que tales definiciones comportan que $\lambda = M + \bar{\omega}$.

Así, si en vez de proporcionarnos el tiempo en el perihelio se nos da la longitud media λ_0 para alguna época τ_0 , lo cual suele acontecer a menudo, entonces la anomalía media en el tiempo t vendrá dada por

$$(VI-1) \quad M = n(t - \tau_0) + \lambda_0 - \bar{\omega}.$$

Aunque tampoco es excepcional que se dé directamente la anomalía media.

Hasta ahora se ha venido afirmando que el sexteto $(a, e, \tau, i, \Omega, \omega)$ determinaba la órbita de un planeta. Ello es cierto de suponer el producto $n^2 a^3$ constante, lo que permitiría encontrar el periodo T (o el movimiento medio n) por simple comparación con el de la Tierra. Sin embargo, como se hizo observar en la deducción de (V-19), la tercera ley de Kepler no es exacta, sino solo una aproximación. De ahí que en el *Astronomical Almanac* también se incluya a n como dato adicional. En concreto, se proporcionan $(a, n, e, i, \Omega, \bar{\omega}, \lambda_0)$.

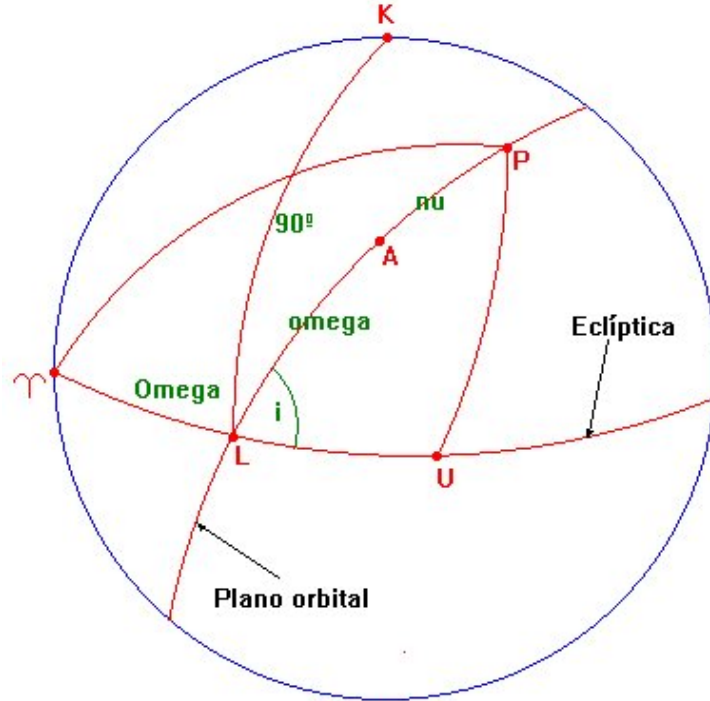


Figura VI.2

Establecidos todos estos términos, es factible ahora abordar el cálculo de las efemérides. Para ello se comenzará recurriendo un sistema de coordenadas cartesianas como el introducido en la [sección §C-iv](#). Con origen en el Sol, punto que se denotará \odot , se consideran los ejes coordenados $\overline{\odot T}$, $\overline{\odot V}$ y $\overline{\odot K}$, donde V es el punto de la eclíptica de longitud 90° y K el polo norte de la eclíptica (véase la [figura VI.2](#)).

Sean $\vec{r} = (\xi, \eta, \zeta)$ las coordenadas del planeta en tal sistema. entonces

$$(VI-2) \quad \vec{r} = r(\cos \Upsilon P, \cos VP, \cos KP),$$

con $r = \|\vec{r}\|$. Las definiciones establecidas más arriba dan

$$\begin{aligned} LP &= \nu + \omega, & \Upsilon L &= \Omega, & LV &= 90^\circ - \Omega, \\ \Upsilon LP &= 180^\circ - i, & VLP &= i, & KLP &= 90^\circ - i. \end{aligned}$$

El ángulo ΥP puede determinarse aplicando el teorema del coseno al triángulo esférico $L\Upsilon P$ mediante

$$\cos \Upsilon P = \cos(\nu + \omega) \cos \Omega - \sin(\nu + \omega) \sin \Omega \cos i.$$

Del mismo modo, considerando los triángulos LVP y LKP , las coordenadas (ξ, η, ζ) de (VI-2) que determinan la posición del planeta quedan en la forma

$$(VI-3) \quad \begin{aligned} \xi &= r[\cos(\nu + \omega) \cos \Omega - \sin(\nu + \omega) \sin \Omega \cos i], \\ \eta &= r[\cos(\nu + \omega) \sin \Omega + \sin(\nu + \omega) \cos \Omega \cos i], \\ \zeta &= r \sin(\nu + \omega) \sin i. \end{aligned}$$

Así, conocidos los elementos Ω , i y ω que sitúan la órbita del planeta respecto de la eclíptica, las ecuaciones anteriores proporcionan su posición tridimensional para cada par de datos r y ν . Ahora bien, a estas alturas se está en condiciones de calcular tales valores para un tiempo dado t . En efecto, se comenzaría evaluando M según (VI-1). A continuación se resolvería la ecuación de Kepler mediante el método de Newton-Raphson (V-16) o cualquier otra técnica del análisis numérico, y, por último, obtenida la anomalía excéntrica E , bastaría con recurrir a las fórmulas (V-12) y (V-15).

Denótese por (x, y, z) a las coordenadas cartesianas heliocéntricas del planeta, con relación a los ejes $\odot \Upsilon$, $\odot U$ y $\odot P$, con P el polo norte celeste y U el punto del ecuador celeste de ascensión recta $6h$. El cambio de coordenadas eclípticas a ecuatoriales estudiado en (IV-11) da

$$\begin{aligned} x &= \xi, \\ y &= \eta \cos \epsilon - \zeta \sin \epsilon, \\ z &= \eta \sin \epsilon + \zeta \cos \epsilon, \end{aligned}$$

con ϵ la oblicuidad de la eclíptica (respecto al ecuador celeste). Eso sí, las igualdades anteriores dan la posición \vec{r} del planeta en un sistema heliocéntrico de coordenadas cartesianas. Para averiguar su posición aparente en el cielo habrá que calcular también desde dónde se le observa, es decir, en qué sitio se encuentra la Tierra para el tiempo t . Sea entonces $\vec{r}_{\odot} = (X, Y, Z)$ el vector de posición de la Tierra en el tiempo t . Este puede de nuevo evaluarse según las fórmulas (V-12) y (V-15), o bien consultarse directamente en el apéndice C del *Astronomical Almanac*. El vector geocéntrico \vec{R} que dará la posición del planeta en el cielo habrá de verificar que

$$(VI-4) \quad \vec{r}_{\odot} = \vec{r} - \vec{R}.$$

Si $\rho = \|\vec{R}\|$ es la distancia entre el planeta y la Tierra y (α, δ) son la ascensión recta y la declinación, entonces, por (IV-7) y (VI-4) se tendrá

$$\begin{aligned} x - X &= \rho \cos \delta \cos \alpha, \\ y - Y &= \rho \cos \delta \sin \alpha, \\ z - Z &= \rho \sin \delta, \end{aligned}$$

de donde

$$(VI-5) \quad \begin{aligned} \alpha &= \arctan \left(\frac{y-Y}{x-X} \right), \\ \delta &= \arcsen \left(\frac{z-Z}{\rho} \right), \\ \text{con} \\ \rho^2 &= (x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2. \end{aligned}$$

§2 Aberraciones, perturbaciones y difracción

En la sección anterior quedó resuelto el problema geométrico de derivar la localización de un planeta en la esfera celeste para un tiempo dado t a partir del conocimiento de sus seis elementos orbitales. Sin embargo, si se apunta a las coordenadas (α, δ) de (VI-5) resultantes de nuestros cálculos será difícil que el objeto buscado aparezca justo en el centro del campo visual del telescopio. Ello es debido a ciertos condicionantes, ya no estrictamente

geométricos, sino de otra naturaleza. Sobre este asunto discurrirá la presente sección. Cabe advertir que, dado el carácter elemental de estos apuntes, no se procederá a un estudio exhaustivo y, en la mayoría de los casos, las fórmulas se enunciarán sin justificación explícita.

Por un lado, no hay que olvidar, como se comentó en el capítulo anterior, que los planetas no siguen trayectorias inmutables ni se comportan como precisos instrumentos de relojería, sino que están afectados por las llamadas perturbaciones planetarias. De ahí que los seis elementos que describen una órbita fluctúen ligeramente con el transcurso de los años. La mecánica celeste ha desarrollado métodos muy sofisticados para evaluar tales perturbaciones. En general se describen mediante expresiones del tipo

$$\eta = \eta_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + \text{términos periódicos} + (t \times \text{términos periódicos}),$$

donde η es alguno de los elementos orbitales, η_0 , el mismo elemento orbital para una cierta época, y t , el tiempo transcurrido desde esa época. A los primeros 3 sumandos se les conoce como *términos seculares*, a los que se añaden términos periódicos y términos mixtos. No hay términos seculares para el semieje mayor hasta el segundo orden, mientras que son los elementos angulares (longitud del nodo ascendente o inclinación de la órbita) los más sensibles a estos términos. Todo ello se comprobará en la sección siguiente.

Otro factor a tener en cuenta, para medidas de alta precisión, es una corrección de índole espacio-temporal. En efecto, las fórmulas (VI-5) indican la posición del planeta en el instante t , pero cuando nos llegue su luz, tanto él como nosotros nos habremos movido de las posiciones calculadas. A la acción conjunta de este fenómeno, junto con la aberración anual que se describirá en breve, se le conoce como *aberración planetaria*. aquí tampoco será cuantificada tal aberración. Baste decir que, en lo tocante al sistema solar conocido, su influencia rara vez sobrepasa los dos minutos de arco.

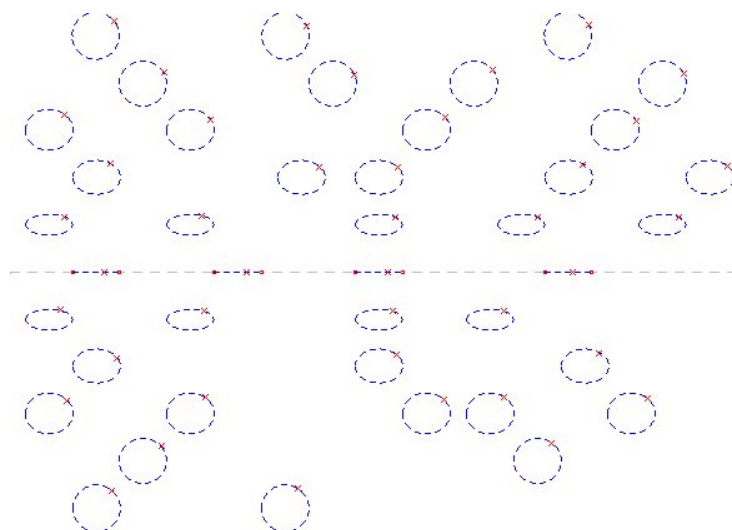


Figura VI.3a

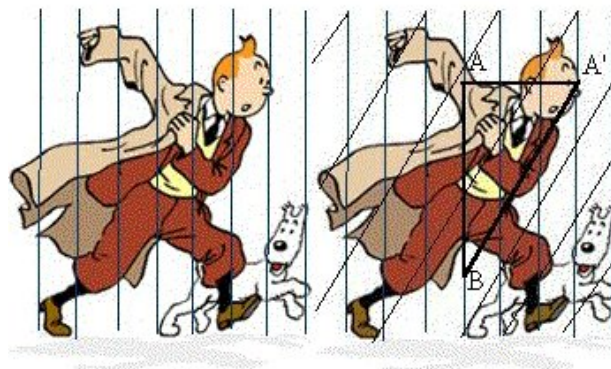
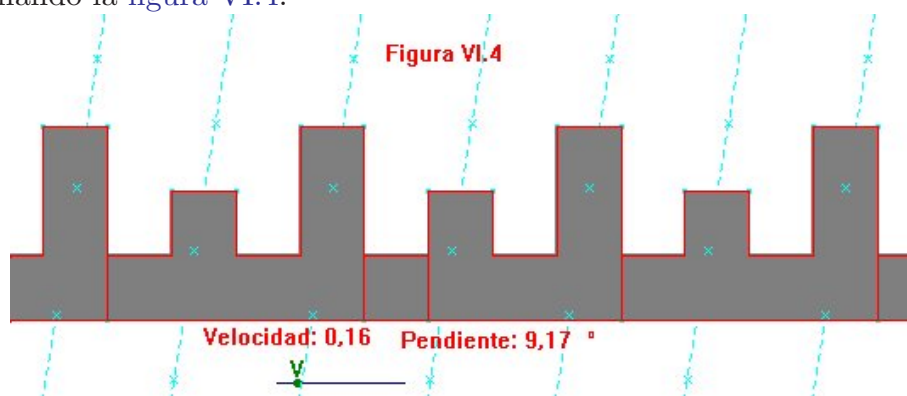


Figura VI.3b

Pero sí que merece la pena, al menos comentar por encima, el principio de la llamada *aberración anual*. Ella afecta, no solo a los planetas, sino a cualquier otro objeto celeste que no se mueva solidariamente con la Tierra, por ejemplo, a las estrellas “fijas”. Y si se ha entrecomillado el adjetivo fijas se debe a que fue un curioso bailoteo de estas la que provocó el descubrimiento realizado por el astrónomo inglés Bradley en 1727. Dedicado a medir la posición de las estrellas, Bradley observó, asombrado, que aquellas no se estaban quietas en su sitio. A lo largo del año, los luceros describían en realidad óvalos minúsculos, tanto más achatados cuanto más cerca del ecuador celeste (figura VI.3a).

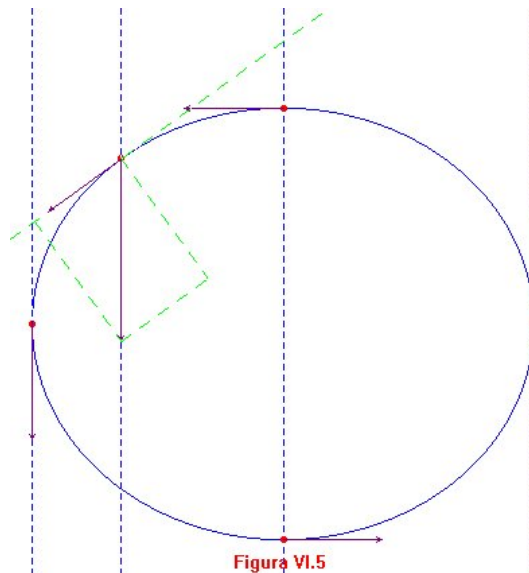
Preocupado por el particular, solo encontró la inspiración necesaria para

resolver el enigma en un paseo en barco por el Támesis. Llovía, cómo no, sobre el río, cuando el científico advirtió que la lluvia siempre le daba en la cara, que por más vueltas y meandros que negociara el navío, el agua se obstinaba en provenir de la misma dirección, la contraria a la de la marcha. Mucha casualidad habría de darse para que el viento se acoplara con tanta exactitud a los virajes. La respuesta puede adivinarse sin más que examinar la [figura VI.3b](#). Allí, la gota que pasó justo por la cara del caminante en el punto A , un instante más tarde, cuando el ojo vaya por A' , habrá caído hasta el lugar B . De esa forma, nuestro empapado transeúnte tendrá la impresión de que el agua sigue una trayectoria inclinada, en vez de vertical. (Esta sensación no es exclusiva del reportero Tintín, sino que también la experimenta su perro Milú.) Además, si se considera constante la velocidad v_1 de la lluvia, el ángulo de inclinación $\alpha = \angle AA'B$ vendrá dado por $\alpha = \arctan \frac{v_1}{v_2}$, con v_2 la velocidad a la que avanza el peatón. Puede asistirse a un simulacro de esta eventualidad examinando la [figura VI.4](#).



La misma circunstancia se produce con la luz que proviene de objetos del espacio al ser contemplados desde una Tierra en movimiento de traslación alrededor del Sol. Aunque el rayo venga directamente hacia nosotros, lo veremos con una dirección algo torcida respecto de la que en realidad se encuentra la fuente de emisión. La razón entre la velocidad de traslación terrestre (unos 30 Km/s) y la de la luz en el vacío (alrededor de 300.000 Km/s) viene a ser del orden de 0.0001 . Al tratarse a fin de cuentas de un cociente de longitudes (las recorridas en un segundo de tiempo), esta diezmilésima

se mide en radianes, y es lo bastante pequeña como para que coincida con su arcotangente. Convertida a grados resulta ser $20''.5$. El valor deducido de observaciones muy precisas llevadas a cabo durante más de dos siglos concluyen con el dato $20''.445$.

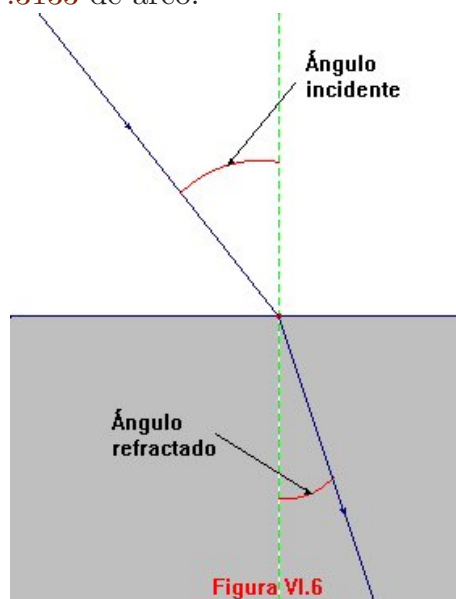


Este fenómeno provoca importantes consecuencias. Por un lado, aportó en su día una prueba del movimiento de traslación. Por otro, proporciona uno de los métodos de evaluación de la unidad astronómica, cuyo valor exacto aún se desconoce. En efecto, estimar la amplitud de la aberración permite, como acaba de exponerse, comparar la velocidad de la Tierra con la de la luz, la cual puede calcularse con extraordinaria precisión en los laboratorios terrestres. Y conocida la velocidad de traslación, la tercera ley de Kepler debe dar el semieje mayor de la eclíptica.

Ahora se explican aquellos óvalos de la [figura VI.3a](#). La luz de una estrella situada en las inmediaciones de los polos de la eclíptica llega perpendicular a ésta durante todo el año. Con una trayectoria casi circular de la Tierra, la aberración anual se manifiesta desviando la posición aparente del foco emisor según la dirección cambiante de la traslación. El astro dibuja entonces en el cielo un “reflejo” de la órbita terrestre, obteniéndose una curva muy próxima a la circunferencia con diámetro de unos $20''$. Por contraste, la dirección con que nos alcanzan los rayos de una estrella situada sobre la propia eclíptica sólo

es ortogonal al vector velocidad de la Tierra en dos puntos, los alineados con el centro de la órbita (figura VI.5). En el resto de fechas, el vector velocidad de la luz v se descompone en dos sumandos, solo uno de los cuales, el $v \cos \lambda$ (con λ la longitud eclíptica del Sol), es perpendicular al vector velocidad de la Tierra. Así, la aberración actúa atenuada por el factor $\cos \lambda$. De hecho, en los puntos de tangencia de los rayos con la órbita, la desviación por el efecto aberrante se anula por completo. El resultado es un vaivén rectilíneo de unos $20''$ de arco. Por último, para el resto de estrellas con posiciones intermedias, también interviene un vector componente según la latitud eclíptica. El efecto conjunto de ambos traza una elipse, tanto más excéntrica cuanto más cercana de la eclíptica esté la fuente

Y si la traslación terrestre es la responsable de la aberración anual, el movimiento de rotación ocasiona, a su vez, una *aberración diaria*, de mucha menor cuantía. Ella es mínima en los polos y máxima en el ecuador, aunque nunca sobrepasa los $0''.3133$ de arco.



En otro orden de cosas, nuestra atmósfera desvía los rayos luminosos que proceden del espacio. Hay que recordar aquí que la luz, al pasar de un medio a otro, sufre el fenómeno conocido como *refracción*. Supóngase que un rayo de luz procedente del vacío incide sobre la superficie plana que lo separa de

cierto medio para refractarse. (Experimente con la [figura VI.6](#).) Si ϕ_i y ϕ_r son los respectivos ángulos que forman el rayo incidente y el rayo refractado con la normal, el *índice de refracción* i del medio se define como el cociente

$$i = \frac{\text{sen } \phi_i}{\text{sen } \phi_r}.$$

Si ahora se considera que el rayo proviene de un medio de índice de refracción i_1 y se refracta a través de otro medio de índice de refracción i_2 , entonces se satisface la igualdad $i_1 \sin \phi_1 = i_2 \sin \phi_2$. Es sabido que el índice de refracción de la atmósfera aumenta con la densidad, y no es el mismo para todas las longitudes de onda.

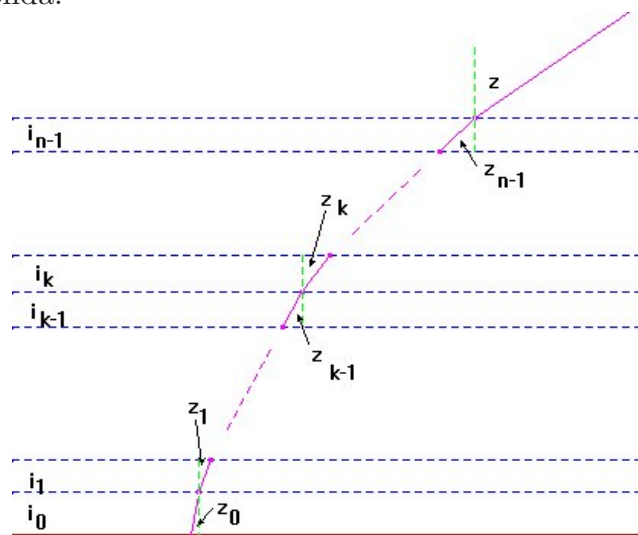


Figura VI.7

Pues bien, una primera aproximación a nuestro problema consiste en suponer la Tierra plana y, sobre ella, sucesivas capas de atmósfera con índices de refracción

$$i_0 \geq i_1 \geq \dots \geq i_{k-1} \geq i_k \geq \dots \geq i_n = 1.$$

El último de ellos corresponde al del vacío ([figura VI.7](#)). La hipótesis de planaridad funciona bastante bien en las cercanías del cenit y para la observación óptica, ya que, para las frecuencias de la luz visible, la refracción solo es significativa en la troposfera, la cual finaliza a unos pocos kilómetros de altitud. Sin embargo, ya sea para la contemplación de objetos a poca altura

sobre el horizonte o para detectar radiación electromagnética en largas longitudes de onda por medio de radiotelescopios, habrá que tener en cuenta la curvatura terrestre. Máxime cuando aquí puede ser importante la refracción de la ionosfera, que se extiende a una altura de más de 1.000 Km.

El caso es que el rayo proveniente de un astro, con una distancia al cenital original de $z = z_n$, da un quiebro en el paso por cada una de los estratos atmosféricos según las relaciones $i_k \text{ sen } z_k = i_{k-1} \text{ sen } z_{k-1}$. La acción conjunta de las n igualdades anteriores produce

$$i_0 \text{ sen } z_0 = \text{sen } z,$$

expresión que evidencia que la distancia cenital z_0 bajo la que se ve al objeto no depende del número de capas imaginadas ni de sus respectivos índices de refracción, salvo el de la zona más próxima a la superficie. Se define el **ángulo de refracción** R como $R = z - z_0$. Sustituyendo en la igualdad de arriba, se tiene $\text{sen } z_0 \cos R + \cos z_0 \text{ sen } R = i_0 \text{ sen } z_0$, y como R es muy pequeño (para las distancias cenitales cortas que se están tratando), se aproxima $\cos R \approx 1$ y $\text{sen } R \approx R$. En definitiva, nuestras suposiciones dan la fórmula aproximada

$$R = (i_0 - 1) \tan z_0,$$

donde los ángulos han de ser expresados en radianes. Si se expresan en grados sexagesimales se escribirá $R = K \tan z_0$, con $K = 206265''(i_0 - 1)$. (1 radián = 206265''.) Ahora bien, el índice de refracción i_0 depende de la densidad del aire, la cual flutúa con la temperatura y la presión. En condiciones normales, esto es, a 760 mm de mercurio y 0° centígrados, se estima $i_0 = 1.0002927$ para la media de las longitudes de onda del rango visible, con lo que

$$(VI-6) \quad R = 60''.4 \tan z_0.$$

Para otra presión P (en milímetros de Hg) y otra temperatura t (en grados Celsius), las leyes que rigen los gases darán

$$R = 60''.4 \frac{\frac{P}{760\text{mm}}}{1 + \frac{t}{273^\circ\text{C}}} \tan z_0.$$

Por supuesto que hay otros factores que intervienen en la densidad atmosférica, aparte de que cada color se difracta con un índice distinto. Pero estas salvedades afectan en poco en la simplificación que se ha supuesto.

Si se tiene en cuenta la curvatura terrestre, abandonando la hipótesis plana examinada, los cálculos se complican en demasía para exponerlos aquí. Baste decir que la correspondiente fórmula de refracción que se obtiene es

$$(VI-7) \quad R = 60''.29 \tan z_0 - 0''.06688 \tan^3 z_0.$$

Compárese esta con la fórmula (VI-6).

Para hacerse una idea de la magnitud de la refracción, para, por ejemplo, una distancia cenital $z_0 = 10^\circ$, los respectivos ángulos de refracción que proporcionan (VI-6) y (VI-7) son $10''.65$ y $10''.63$. Se advierte que no hay una diferencia significativa entre las dos estimaciones. Para un ángulo bastante mayor de, digamos, $z_0 = 60^\circ$, los ángulos de refracción son ahora $1'44''.62$ y $1'44''.08$. La discrepancia aumenta, pero lo importante es que, para medidas de cierta precisión, hay que considerar esos casi dos minutos de arco entre la dirección observada y la real.

Por otra parte, en la serie de razonamientos que conducen a (VI-7), también se realizan varias aproximaciones que provocan su mal funcionamiento a altas distancias cenitales. De hecho, para $z_0 = 90^\circ$ ni siquiera es factible su aplicación pues la tangente de un recto no está definida. En la práctica, el uso de la fórmula de refracción está restringido a distancias cenitales menores que 75° . Y aunque no es usual estudiar objetos próximos al horizonte, donde la atmósfera distorsiona bastante la visión, en ocasiones no hay más remedio, si el interés del fenómeno exige contemplarlo desde una desafortunada localización del telescopio. De ahí que los observatorios astronómicos dispongan de unas tablas de refracción, confeccionadas empíricamente, a las que se recurre en estos casos extremos.

Para objetos situados justo sobre el horizonte sensible, la refracción llega a ser caótica en el sentido de que hay multitud de factores que influyen, entre

ellos, la enorme variabilidad del clima. No obstante, se ha convenido, en vista de la experiencia, estimarla en $50''$. Y como el diámetro aparente del Sol oscila entre los $32'36''$ del perihelio y los $31'31''$ del afelio, se da el caso de que aún vemos al astro rey sobre el horizonte del atardecer, cuando en realidad ya ha traspasado el ocaso astronómico y se encuentra por debajo (figura VI.8). Igual acontece en la aurora, y el Sol ilumina nuestras ventanas con unos dos minutos de antelación a su salida. El amanecer real se produce antes que el astronómico. Así, en la elaboración de los almanaques, se calculan los ortos y ocasos del Sol y de la Luna para alturas cenitales de $90^{\circ}50''$.



Figura VI.8

§3 Ejercicios prácticos

En esta sección ha llegado el momento de poner en práctica la teoría acerca del cálculo de las efemérides. En las tablas T.VI.1 y T.VI.2 de la página siguiente se exponen dos tipos de presentación de los elementos orbitales de los planetas. La primera está referida a la época 15 de enero de 1985, en referencia a la eclíptica y el equinoccio medio de enero del 2000. La longitud media λ_0 se refiere a tal época, lo cual no es impedimento para el cálculo de la anomalía media M mediante la fórmula (VI-1) pues también se proporciona el movimiento medio n en grados por día.

Tabla VI.1

Planeta	n	Ω	i	$\bar{\omega}$	a	e	λ_0
Mercurio	4°.09234	48°.350	7°.0059	77°.434	0.387099 UA	0.205629	209°.6643
Venus	1°.60215	76°.723	3°.3947	77°.434	0.723326 UA	0.006772	67°.1413
Tierra	0°.985582	354°.9	0°.0020	102°.972	1.000018 UA	0.016773	354°.9
Marte	0°.524061	49°.604	1°.8509	335°.942	1.523638 UA	0.093298	11°.8733
Júpiter	0°.0830991	100°.467	1°.3047	15°.662	5.20248 UA	0.048058	300°.3429
Saturno	0°.0333315	113°.713	2°.4846	93°.444	9.56329 UA	0.050916	227°.2512
Urano	0°.0116303	74°.056	0°.7746	177°.048	19.2937 UA	0.047285	249°.2488
Neptuno	0°.00591702	131°.800	1°.7693	357°.07	30.2743 UA	0.006851	272°.2648

Tabla VI.2

Planeta	Símbolo	Ω	i	ω	a	e	M
Mercurio	☿	48°.3313	7°.0047	29°.1241	0.387095 UA	0.205635	168°.6562
Venus	♀	76°.6779	3°.3946	54°.8910	0.723330 UA	0.006773	48°.0052
Tierra (Sol)	♁	0°.0000	0°.0000	282°.9404	1.000000 UA	0.016709	356°.0470
Marte	♂	49°.5574	1°.8497	286°.5016	1.523688 UA	0.093405	18°.6021
Júpiter	♃	100°.4542	1°.3030	273°.8777	5.20256 UA	0.048498	19°.8950
Saturno	♄	113°.6634	2°.4886	339°.3939	9.55475 UA	0.055546	316°.9670
Urano	♅	74°.0005	0°.7733	96°.6612	19.18171 UA	0.047318	142°.5905
Neptuno	♆	131°.7806	1°.7700	272°.8461	30.05826 UA	0.008606	260°.2471

Tabla VI.3

Planeta	$\Delta\Omega$	Δi	$\Delta\omega$	Δa	Δe	ΔM
☿	+3°.24587 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	+5°. · 10 ⁻⁸ <i>d</i>	+1°.01444 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	+0 UA	+5.59 · 10 ⁻¹⁰ <i>d</i>	+4°.0923344368 <i>d</i>
♀	+2°.46590 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	2°.75 · 10 ⁻⁸ <i>d</i>	+1°.3837410-5 <i>d</i>	+0 UA	-1.302 · 10 ⁻⁹ <i>d</i>	+1°.6021302244 <i>d</i>
♁-☉	+0°.0	+0°.0	+4°.70935 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	+0 UA	-1.151 · 10 ⁻⁹ <i>d</i>	+0°.9856002585 <i>d</i>
♂	+2°.11081 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	-1°.78 · 10 ⁻⁸ <i>d</i>	+2°.92961 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	+0 UA	+2.516 · 10 ⁻⁹ <i>d</i>	+0°.5240207766 <i>d</i>
♃	+2°.76854 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	-1°.557 · 10 ⁻⁷ <i>d</i>	+1°.64505 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	+0 UA	+4.469 · 10 ⁻⁹ <i>d</i>	+0°.0830853001 <i>d</i>
♄	+2°.38980 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	-1°.081 · 10 ⁻⁷ <i>d</i>	+2°.97661 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	+0 UA	-9.499 · 10 ⁻⁹ <i>d</i>	+0°.0334442282 <i>d</i>
♅	+1°.3978 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	+1°.9 · 10 ⁻⁸ <i>d</i>	+3°.0565 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	-1.5510 ⁻⁸ UA	-1.55 · 10 ⁻⁸ <i>d</i>	+0°.011725806 <i>d</i>
♆	+3°.1073 · 10 ⁻⁵ <i>d</i>	-2°.55 · 10 ⁻⁷ <i>d</i>	-6°.027 · 10 ⁻⁶ <i>d</i>	+3.31310 ⁻⁸ UA	+2.15 · 10 ⁻⁹ <i>d</i>	+0°.005995147 <i>d</i>

Por el contrario, en la tabla T.VI.2 se ofrece un elemento menos, razón por la cual se ha aprovechado una de las columnas para incluir los símbolos astronómicos de los planetas. Los valores, en esta ocasión, se refieren a las cero horas del 1 de enero del 2000.

Antes de entrar en la descripción de esta segunda tabla, se resolverá un problema práctico utilizando la primera. Supóngase que se desea hallar la posición del planeta Urano el 17 de mayo del 2005. Habrá que empezar por encontrar el número de orden del día previsto para la observación, contado desde el 15 de enero de 1985. El autor, utilizando las funciones de fecha de un lenguaje de programación, ha obtenido $t = 7.428$. Esto permite, usando la fórmula (VI-1), hallar la anomalía media

$$M = 0^\circ.0116303 \cdot 7.428 + 249^\circ.2488 - 177^\circ.0.48 = 158^\circ.590668.$$

En todas las operaciones, efectuadas con una calculadora de bolsillo CASIO *fx-82SX*, se aproximará al sexto decimal. Recurriendo al programa *Kepler* que resuelve la ecuación de Kepler por el método de Newton-Raphson, resulta que la anomalía excéntrica se estabiliza muy rápidamente, debido a la débil excentricidad, en el valor $E = 159^\circ.537787$. Ahora, mediante (V-12) y ((V-15)), se procede al cálculo del radio vector y la anomalía verdadera con

$$\begin{aligned} r &= 19.2937 \text{ UA} \cdot (1 - 0.047285 \cos 159^\circ.537787) = 20.148439 \text{ UA}, \\ \nu &= 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1+0.047285}{1-0.047285}} \tan \frac{1}{2} 159^\circ.537787 \right] = 160^\circ.464868. \end{aligned}$$

A continuación, para el uso de (VI-3), es preciso recuperar el argumento del perihelio ω de los datos de la tabla, para lo cual, teniendo en cuenta que $\bar{\omega} = \Omega + \omega$, se tiene $\omega = 102^\circ.992$. Así,

$$\begin{aligned} \xi &= 20.148439 \text{ UA} [\cos(263^\circ.456868) \cos 74^\circ.056 - \\ &\quad - \sin 263^\circ.456868 \sin 74^\circ.056 \cos 0^\circ.7746] = 18.614703 \text{ UA}, \\ \eta &= 20.148439 \text{ UA} [\cos(263^\circ.456868) \sin 74^\circ.056 + \\ &\quad + \sin 263^\circ.456868 \cos 74^\circ.056 \cos 0^\circ.7746] = -7.705788 \text{ UA}, \\ \zeta &= 20.148439 \text{ UA} \sin(263^\circ.456868) \sin 0^\circ.7746 = -0.270611 \text{ UA}. \end{aligned}$$

La conversión (IV-11) de coordenadas eclípticas a ecuatoriales proporciona entonces

$$\begin{aligned} x &= 18.614703 \text{ UA}, \\ y &= -6.961660 \text{ UA}, \\ z &= -3.314768 \text{ UA}. \end{aligned}$$

Ahora hay que proceder con los mismos cálculos para la Tierra. Para no cansar al lector, he aquí los resultados:

$$\begin{aligned}
M_{\odot} &= 7.572^{\circ}.831096 = 21\text{vueltas} + 12^{\circ}.831096, \\
E_{\odot} &= 13^{\circ}.048064, \\
r_{\odot} &= 0.983678 \text{ UA}, \\
\nu_{\odot} &= 13^{\circ}.266835 \text{ UA}, \\
\omega_{\odot} &= -251^{\circ}.928 = 108^{\circ}.072, \\
\xi_{\odot} &= -0.198529 \text{ UA}, \\
\eta_{\odot} &= -0.963474 \text{ UA}, \\
\zeta_{\odot} &= -0.001955 \text{ UA}, \\
X &= -0.198529 \text{ UA}, \\
Y &= -0.883120 \text{ UA}, \\
Z &= -0.385206 \text{ UA}.
\end{aligned}$$

Y ya se puede recurrir a (VI-5) con

$$\begin{aligned}
\tan \alpha &= \frac{y-Y}{x-X} = -0.323099, \\
\text{sen } \delta &= \frac{z-Z}{\rho} = -0.147576.
\end{aligned}$$

Ahora bien, mientras que no hay confusión para la declinación pues $\delta = \arcsen(-0.147576) \approx -8^{\circ}29'11''$, de las dos posibles arcotangentes para la ascensión recta ha de elegirse, dados los signos de $y - Y$ y $x - X$, la del cuarto cuadrante, de donde $\alpha \approx 186^{\circ}.934878 = 22\text{h } 48\text{m } 23\text{s}$.

Como se ve, el proceso de cálculo de las efemérides es tedioso, aunque no contiene dificultad. Y merece la pena realizarlo a mano, al menos una vez en la vida. Como es de suponer, todo ello puede ser objeto de informatización. Además, se llegaría a un resultado mucho más preciso si se tienen en cuenta las eventualidades descritas en la sección anterior: perturbaciones, refracción y aberración. En parte para eso se han incluido las tablas T.VI.2 y T.VI.3.

La primera contiene los elementos orbitales de los planetas a las 0 horas del 1 de enero del 2000. Adviértase que no está incluido el movimiento medio n y, en vez de L_0 , se da directamente la anomalía media M para la época. Difícil es que, sin alusión al movimiento medio, pueda hallarse la anomalía media a una fecha distinta. Ciertamente que, para ello, siempre podría recurrirse a la tercera ley de Kepler, pero, como se apuntó en su momento, su carácter aproximado provocaría errores significativos en las

efemérides de planetas masivos como júpiter o Saturno. En realidad, el movimiento medio se encuentra camuflado como coeficiente de d (número de días transcurridos desde la época de referencia) en la tercera de las tablas. Pero antes de presentar a esta nueva tabla, conviene echar un vistazo a las dos primeras. Obsérvese cómo han cambiado levemente ciertos elementos en quince años. La inclinación orbital de Mercurio, por ejemplo, ha disminuido doce diezmilésimas de grado. Todo esto es ya conocido, que los planetas no se ciñen a órbitas inmutables, sino que éstas sufren leves variaciones a lo largo del tiempo.

Y es que se va a describir a continuación un método de cálculo de efemérides desarrollado por P. Schlyter, quien se basó en los algoritmos publicados en el *Astrophysical Journal Supplement Series* por T. van Flandern y K. Pulkkinen en 1980. El procedimiento en cuestión está pensado para cometer errores inferiores a los dos minutos de arco y se ajusta a las siguientes características:

- 1) Se contempla la precesión, simplificada por una simple adición a la longitud eclíptica, pero no la nutación ni las aberraciones planetarias (aberración anual y corrección espacio-temporal).
- 2) Se simplifica la forma de medir el tiempo.
- 3) Para las perturbaciones planetarias, se incluyen los términos seculares de primer orden (introducidos al comienzo de la sección §C.vi.2), pero se ignoran los de orden superior. La tabla T.VI.3, con d el número de día desde la época, relaciona tales términos. Esta omisión provoca un error acumulado en 1.000 años de unos $2'$ de arco.
- 4) Sólo se incluyeron las perturbaciones planetarias periódicas de Júpiter, Saturno y Urano, estando incluida la más grande perturbación Urano-Neptuno en sus sendos elementos orbitales.

El tiempo se cuenta desde la época a la que se refiere la tabla T.VI.2. A partir de entonces, el número d de días transcurridos hasta la fecha $a - m - f$

(a el año, m el mes y f el día del mes) se calcula usando la fórmula

$$(VI-8) \quad d = 367 a - [7(a + [(m + 9) : 12]) : 4] + [275 m : 9] + f - 730530,$$

donde se denota por $[m : n]$ al cociente de la división entera de dividendo m y divisor n . Si se desea precisar el momento, dentro del día, no hay más que sumar a d la cantidad $h/24$, con h la hora en tiempo universal. (Si se usa la hora local, no hay que olvidar sumar o restar la zona horaria.) Así, los elementos orbitales de cada planeta a una fecha determinada se obtienen sumando a los valores de la tabla T.VI.2 los incrementos indicados en la tabla T.VI.3. Por ejemplo, a las 0h del 15 de septiembre del 2005, con $d = 2.085$, los elementos orbitales de Urano serán

$$\begin{aligned} \Omega &= 74^\circ.02964413, \\ i &= 0^\circ.773339615, \\ \omega &= 96^\circ.724928025, \\ a &= 19.1816776825 \text{ UA}, \\ e &= 0.04733353325, \\ M &= 167^\circ.03880551. \end{aligned}$$

La inclinación de la eclíptica, la cual, como sabemos, varía con el tiempo, se estima mediante la fórmula

$$\epsilon = 23^\circ.4393 - 3^\circ.563 \times 10^{-7} d.$$

Las coordenadas eclípticas heliocéntricas $(\xi_{\odot}, \eta_{\odot}, 0)$ de la Tierra se calculan como ya se ha descrito, y se obtienen la geocéntricas eclípticas con

$$\begin{aligned} X &= \xi_{\odot}, \\ Y &= \eta_{\odot} \cos \epsilon, \\ Z &= \eta_{\odot} \sin \epsilon. \end{aligned}$$

Ahora bien, en la tabla T.VI.2 se encuentran los datos referidos al Sol, considerado este como orbitando alrededor de la Tierra, por lo que el vector $R = (X, Y, Z)$ es, en realidad, el opuesto del que se usó según el método estándar. Ello ocasiona que habrá que sumárselo al vector heliocéntrico r del planeta, en vez de restar.

Ahora se procede con el cálculo del vector heliocéntrico $r = (\xi, \eta, \zeta)$ del planeta en coordenadas eclípticas. La longitud y latitud eclípticas del planeta vendrán entonces dadas por las expresiones

$$\lambda = \arctan \frac{\eta}{\xi} \text{ y } \beta = \arcsen \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

donde habrá que tener en cuenta el cuadrante donde elegir la arcotangente dependiendo de los signos de η y ξ .

Ahora bien, de los ocho planetas mayores, los únicos que tienen perturbaciones periódicas que dislocan su posición aparente más de $0^\circ.01$ son Júpiter, Saturno y Urano. En el procedimiento descrito por P. Schlyter, este es el momento de proceder a la oportuna corrección.

Si se denotan por M_{J} y M_{S} a las respectivas anomalías medias de Júpiter y Saturno para el día d , la corrección en longitud eclíptica que debiera aplicarse al primero de los planetas por el concepto de perturbación planetaria se efectúa añadiendo a λ los siguientes sumandos:

$$\begin{aligned} &-0.332 \text{ sen}(2M_{\text{J}} - 5M_{\text{S}} - 67^\circ.6), \\ &-0.056 \text{ sen}(2M_{\text{J}} - 2M_{\text{S}} + 21^\circ), \\ &+0.042 \text{ sen}(3M_{\text{J}} - 5M_{\text{S}} + 21^\circ), \\ &-0.036 \text{ sen}(M_{\text{J}} - 2M_{\text{S}}), \\ &+0.022 \text{ cos}(M_{\text{J}} - M_{\text{S}}), \\ &+0.023 \text{ sen}(2M_{\text{J}} - 3M_{\text{S}} + 52^\circ), \\ &-0.016 \text{ sen}(M_{\text{J}} - 5M_{\text{S}} - 69^\circ). \end{aligned}$$

Los correspondientes ajustes para Saturno se obtienen añadiendo a la longitud eclíptica λ los sumandos

$$\begin{aligned} &+0.812 \text{ sen}(2M_{\text{J}} - 5M_{\text{S}} - 67^\circ.6), \\ &-0.229 \text{ cos}(2M_{\text{J}} - 4M_{\text{S}} - 2^\circ), \\ &+0.119 \text{ sen}(M_{\text{J}} - 2M_{\text{S}} - 3^\circ), \\ &+0.046 \text{ sen}(2M_{\text{J}} - 6M_{\text{S}} - 69^\circ), \\ &+0.014 \text{ sen}(M_{\text{J}} - 3M_{\text{S}} + 32^\circ), \end{aligned}$$

más estos otros para la latitud eclíptica β :

$$\begin{aligned} &-0.020 \text{ cos}(2M_{\text{J}} - 4M_{\text{S}} - 2^\circ), \\ &+0.035 \text{ sen}(2M_{\text{J}} - 6M_{\text{S}} - 49^\circ). \end{aligned}$$

Las perturbaciones de Urano se contemplan en los sumandos a añadir a su longitud:

$$\begin{aligned} &+0.040 \operatorname{sen}(M_{\text{h}} - 2M_{\text{g}} + 6^\circ), \\ &+0.035 \operatorname{sen}(M_{\text{h}} - 3M_{\text{g}} + 33^\circ), \\ &-0.015 \operatorname{sen}(M_{\text{h}} - M_{\text{g}} + 20^\circ), \end{aligned}$$

donde M_{g} denota a la anomalía media de Urano.

De entre todas las correcciones, la más apreciable de todas, con un periodo de 918 años afecta al par Júpiter-Saturno. Se trata del primero de los términos relacionados más arriba para las longitudes de ambos planetas, con una amplitud de $0^\circ.332$ para Júpiter y de $0^\circ.812$ para Saturno. La condición Saturno-Urano de amplitud $0^\circ.35$ para Urano, afecta en menos de una centésima de grado a Saturno, por lo que no ha sido incluida. Esta tiene un periodo de 560 años. Hay también una perturbación Urano-Neptuno, con periodo de 4.220 años y amplitud aproximada de un grado, que se ha omitido al estar contemplada en los propios elementos orbitales.

Una vez corregidas, si fuere menester, la longitud y latitud eclípticas, se recupera la posición heliocéntrica tridimensional con

$$\begin{aligned} \xi' &= r \cos \lambda \cos \beta, \\ \eta' &= r \operatorname{sen} \lambda \cos \beta, \\ \zeta' &= r \operatorname{sen} \beta. \end{aligned}$$

El vector geocéntrico del planeta en coordenadas eclípticas será ahora

$$(x, y, z) = (\xi' + \xi_{\text{g}}, \eta' + \eta_{\text{g}}, \zeta').$$

Pasado a ecuatoriales geocéntricas mediante

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \cos \epsilon - z \operatorname{sen} \epsilon, \\ z' &= y \operatorname{sen} \epsilon + z \cos \epsilon, \end{aligned}$$

se llega a la ascensión recta y la declinación con las fórmulas usuales

$$\alpha = \arctan \frac{y'}{x'} \quad \text{y} \quad \delta = \arcsen \frac{z'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}.$$

Recuérdese escoger la arcotangente adecuada según los signos de y' y x' .

El autor de estas notas se ha entretenido en escribir una utilidad informática en lenguaje PHP que automatiza todo este proceso y que el lector puede ejecutar [pinchando aquí](#). En ella, se ha aprovechado la circunstancia de que se tienen a mano los vectores de posición del Sol (o de la Tierra) y del planeta, para ofrecer información adicional, a saber, las distancias geocéntrica y heliocéntrica del planeta y el ángulo que este forma con el Sol, denominado *elongación*.

Si, por curiosidad, se examinan los resultados para Urano el 15 de septiembre del 2005, se obtiene $\alpha = 22^{\text{h}} 36^{\text{m}} 4^{\text{s}}$ y $\delta = -9^{\circ} 40' 15''$. Comparando estas coordenadas con las que más arriba se obtuvieron “a mano”, la ascensión recta difiere en unos 12^{m} y la declinación en algo más de un grado. Aquí se evidencia la necesidad de tomar en consideración las perturbaciones y la precesión para predicciones a medio o largo plazo.

§4 Más problemas. Masas planetarias, paralajes, la Luna

Para finalizar el capítulo, se abordarán otro tipo de cuestiones relacionadas con la teoría desarrollada hasta el momento. Una de ellas es la resolución del problema inverso al de las efemérides, esto es, dada una posición en la esfera celeste, cuándo será esta ocupada por un planeta. Más explícitamente, en qué momento traspasará un planeta una determinada longitud eclíptica heliocéntrica λ_0 .

Esto es, en realidad, más fácil que el planteamiento directo. Dado que el radio vector heliocéntrico $r = (\xi, \eta, \zeta)$ del planeta es función de la anomalía verdadera ν , basta resolver la ecuación $\lambda_0 = \arctan \frac{\eta}{\xi}$ para obtener la anomalía verdadera ν_0 en que se alcanzará la longitud λ_0 . A continuación, la fórmula (V-15) dará la anomalía excéntrica E_0 , la cual, por simple sustitución en la ecuación de Kepler $E_0 - e \sin E_0 = M_0 = n(t - \tau)$, proporcionará el tiempo t buscado.

Lo dicho: fácil.

Pero otro gallo ha de cantar si se trata de averiguar el tiempo para una posición geocéntrica dada, lo que involucra, además, a la localización de la Tierra como punto de vista. Y el caso es que este tipo de circunstancias posee su interés para la observación. Hay momentos en los que los planetas son examinados bajo condiciones muy favorables, y, por el contrario, épocas en las que ni siquiera se permite su contemplación. Por ejemplo, para los *planetas interiores*, Mercurio y Venus, las mejores circunstancias se producen cuando están alejados del Sol, o sea, cuando su elongación sea máxima. Para los exteriores, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno, se prefiere la *oposición* (elongación máxima) a la *conjunción* (elongación mínima en valor absoluto), dado que en la primera postura es cuando más cercano se está del objeto a estudiar, aparte de que en conjunción el Sol también estorba (figura VI.9).

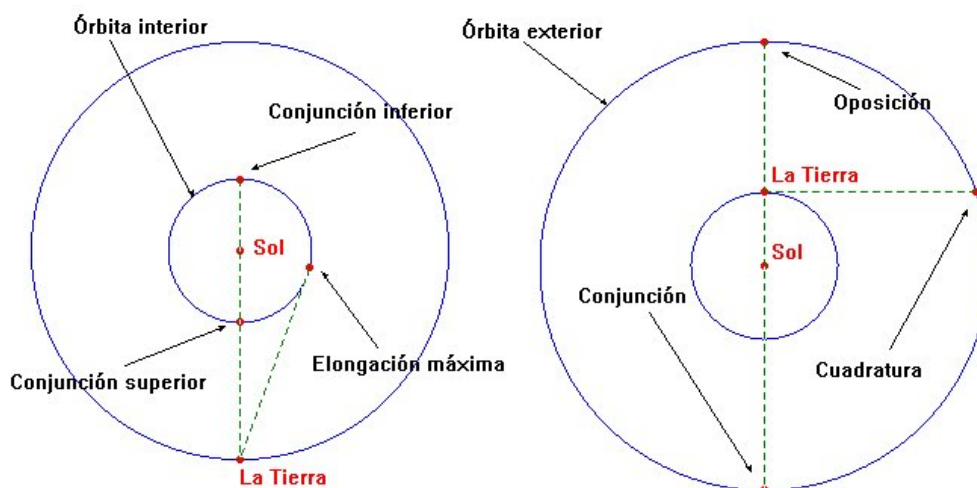


Figura VI.9

Otro punto notable es la *cuadratura*, en el que, con un ángulo planeta-Tierra-Sol de $\pm 90^\circ$, es factible realizar valiosas medidas de paralaje, así como la visión de la línea que separa el día de la noche del planeta, denominada esta *terminador*.

En todos estos casos es imprescindible el cálculo de la elongación como función del tiempo. Como una aproximación, considerando circulares y coplanarias a las órbitas involucradas, razonamientos no en exceso complicados llevan a

la fórmula

$$(VI-9) \quad \tan E = \frac{a \operatorname{sen} n_s t}{1 - a \cos n_s t},$$

válida para planetas interiores, donde E es la elongación, a el semieje mayor de la órbita del planeta, t el tiempo expresado en días (contados desde la última conjunción inferior) y $n_s = n - n_{\oplus}$ la diferencia entre los movimientos medios del planeta y de la Tierra en grados por día. A la cantidad $360^\circ/n_s$ se la conoce como *periodo sinódico* del planeta interior, y representa el tiempo transcurrido entre dos configuraciones idénticas planeta-Sol-Tierra. En la práctica, basta catalogar la sucesión de eventos a lo largo de un periodo sinódico para predecir situaciones de conjunción o elongación máxima. Ahora bien, la aproximación considerada en la obtención de la fórmula (VI-9) no se comporta demasiado bien con Mercurio, debido a su excentricidad e inclinación orbitales de relativa entidad.

Para planetas exteriores, el periodo sinódico se define como

$$\frac{360^\circ}{n_{\oplus} - n},$$

mientras que (VI-9) no expresa ahora la elongación, sino el ángulo bajo el que un observador situado en el planeta vería el radio vector heliocéntrico del planeta. A tal ángulo se le denomina *ángulo de fase*. Por ejemplo, para que el planeta exterior estuviese en cuadratura, el denominador $1 - a \cos n_s t$ ha de anularse, lo que implica

$$t = \frac{1}{2\pi n_s} \arccos \frac{1}{a}.$$

El factor $1/2\pi$, incluido al despejar, se debe a la conversión a radianes. De cualquier modo, todo esto no es más que una aproximación. Para un cálculo exacto habría que considerar los vectores unitarios

$$\begin{aligned} \vec{s}_{\odot} &= (\cos \lambda_{\odot} \cos \beta_{\odot}, \operatorname{sen} \lambda_{\odot} \cos \beta_{\odot}, \operatorname{sen} \beta_{\odot}), \\ \vec{s} &= (\cos \lambda \cos \beta, \operatorname{sen} \lambda \cos \beta, \operatorname{sen} \beta), \end{aligned}$$

con $(\lambda_{\odot}, \beta_{\odot})$ y (λ, β) las respectivas coordenadas eclípticas geocéntricas del Sol y del planeta en cuestión. La elongación viene entonces determinada por el producto escalar

$$\cos E = \vec{s}_{\odot} \cdot \vec{s},$$

expresión que relaciona la elongación en función del tiempo. Para una elongación dada, hallar el tiempo requiere de un cálculo demasiado complejo para estos apuntes. No obstante, en la [figura VI.10a](#) se ha incluido una simulación real con los planetas Mercurio y la Tierra y en la [figura VI.10b](#), otra con todos los planetas de Mercurio a Marte.

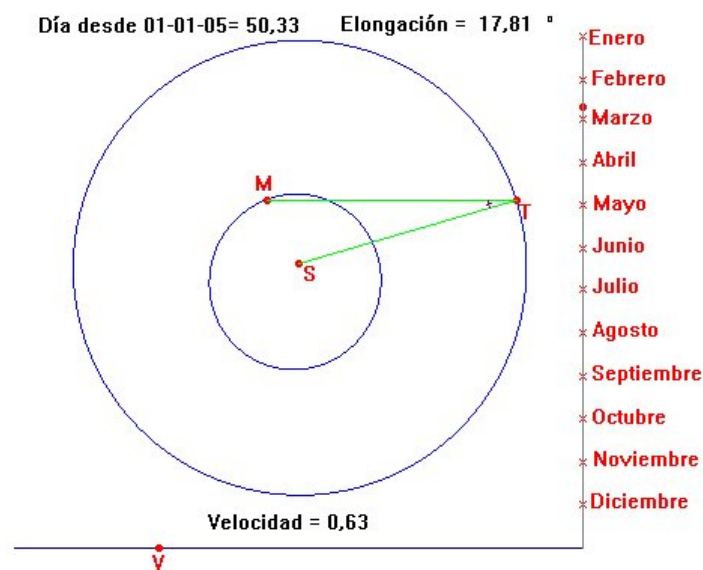


Figura VI.10a

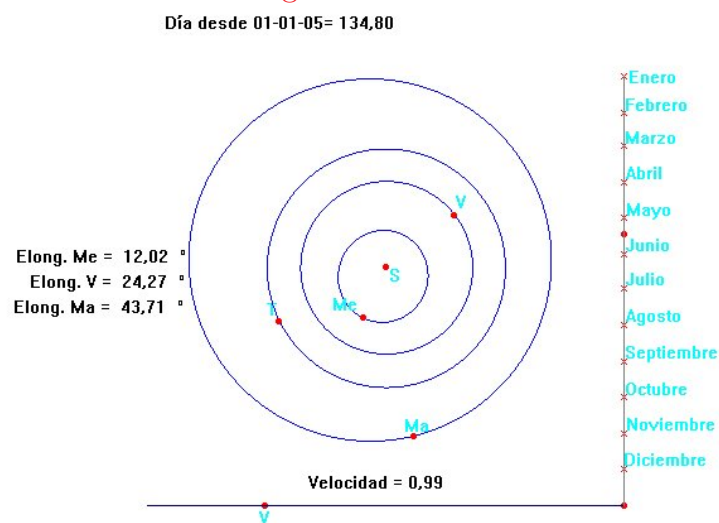


Figura VI.10b

Otro problema de mucho interés es el de la estimación de la masa de los planetas. Volviendo a la segunda de las igualdades de (V-13), que llevó a la tercera ley de Kepler, y recordando el valor de μ , se tiene

$$n^2 a^3 = G(M + m),$$

con M y m las masas respectivas de los cuerpos, G la constante de la gravitación, a el semieje mayor de la órbita y n el movimiento medio expresado en radianes por unidad de tiempo. Para utilizar grados sexagesimales en vez de radianes habrá que escribir

$$(VI-10) \quad n^2 a^3 = \left(\frac{180^\circ}{\pi} \right) G(M + m).$$

La Unión Astronómica Internacional revisó el sistema de constantes en 1976 fijando como unidad astronómica de masa la masa del Sol, como unidad de longitud, la unidad astronómica y como unidad de tiempo, el día, igual a 86.400 segundos del sistema internacional de medidas. Si en tales unidades se evalúa el valor de la constante G , la expresión (VI-10) toma la forma

$$(VI-11) \quad 1.029418 n^2 a^3 = M + m,$$

donde M y m son masas solares, a son unidades astronómicas, y n grados por día. Por ejemplo, el *Astronomical Almanac* da, referidos al 21 de enero de 1984, los siguientes datos para Júpiter:

$$n = 0^\circ.08308945, \quad a = 5.204878 \text{ UA}.$$

Esto da, sustituyendo en (VI-11), $M + m = 1.000955$. Puesto que la masa del Sol es 1, la de Júpiter será $m = 0.000955$, que no es nada despreciable.

Y como todo el argumento utilizado en la resolución del problema de los dos cuerpos también es aplicable a los satélites de los planetas, este método puede utilizarse también en estos casos. El satélite Deimos del planeta Marte

posee una órbita de semieje mayor $a = 2.346 \text{ Km}$ que recorre con un periodo $T = 1^d.2624407$. Haciendo $n = \frac{360^\circ}{T}$ y convirtiendo los quilómetros a unidades astronómicas según $1 \text{ UA} = 1.496 \times 10^8 \text{ Km}$, la ecuación (VI-11) proporciona $M + m = 3.228 \times 10^{-7}$ masas solares. Puesto que Deimos es despreciable en relación a Marte, es lícito tomar esa cifra como masa marciana.

La ventaja de usar satélites para la estimación de las masas planetarias estriba en que estos suelen tener cortos periodos de revolución, horas o días, lo que permite realizar un número considerable de observaciones y refinar bastante la medición. Los satélites artificiales sirven a estos fines con tanta eficacia como los naturales, si no más, debido a su escasa entidad en la suma $M + m$. Gracias a ello y a que se han puesto en órbita satélites en los planetas de Mercurio a Saturno, las masa de estos están calculadas con cierta precisión. Para Urano y Neptuno, donde aún no orbita ningún artefacto terrestre, se ha recurrido a los resultados para órbitas hiperbólicas de la tabla T.V.2. Las sondas Voyager sobrevolaron las cercanías de ambos planetas, concordando los valores de M obtenidos con este método que con los correspondientes para sus satélites naturales.

Tampoco se podía dejar de mencionar en este curso el problema de la estimación de las distancias a las estrellas, y a ello se dedicarán los siguientes párrafos. Considérese la figura VI.11. Allí, C es el centro de gravedad del sistema solar, T , la Tierra y X , una estrella. Al ángulo p bajo el que la estrella “ve” el radio vector baricéntrico de la Tierra se le denomina *paralaje anual*. Aplicando el teorema del seno al triángulo CTX se obtiene

$$\text{sen } p = \frac{R}{r} \text{sen } E,$$

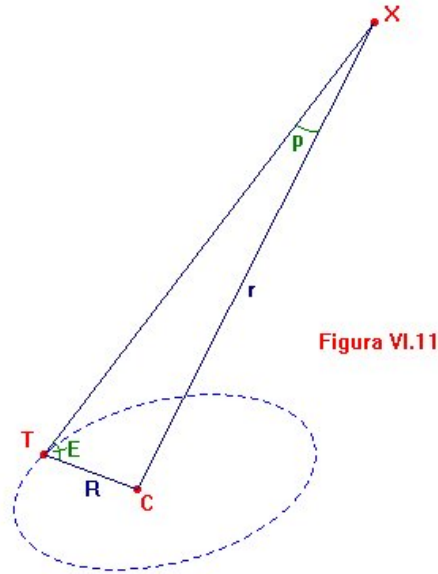


Figura VI.11

donde E es la elongación bajo la cual se ve la estrella desde la Tierra, y R y r las respectivas distancias baricéntricas de la Tierra y la estrella. Se define la *paralaje de la estrella* como el arco π_X tal que $\text{sen } \pi_X = \frac{1}{r}$, con r expresado en unidades astronómicas. La paralaje de la estrella corresponde entonces con la paralaje anual tomando $R = 1$ y $E = 90^\circ$.

Como todas las estrellas tienen unas paralajes en extremo pequeñas, de hecho, inferiores al segundo de arco, se puede aproximar el seno al ángulo y tomar $\pi_X = \frac{1}{r}$. Es esta circunstancia la que llevó a introducir el *parsec* como una de las unidades astronómicas de longitud, muy apropiada para las distancias estelares. En concreto, un parsec corresponde a la paralaje de un segundo de arco, esto es, es la distancia bajo la cual se observa al semieje mayor de la órbita terrestre con un ángulo de $1''$. Las conversiones a otras unidades vienen dadas por

$$1 \text{ parsec} = 3.2616 \text{ años luz} = 3.0857 \times 10^{13} \text{ Km.}$$

El movimiento de la Tierra en su traslación alrededor del Sol, produce, una vez descontada la aberración anual, unas variaciones en la latitud λ y la longitud β de la estrella. Ciertos cálculos elementales, que no se incluirán aquí para no cansar al lector a estas alturas de capítulo, estiman que la estrella dibuja

en la esfera celeste y a lo largo de un año una curva de ecuación

$$(VI-12) \quad \frac{(x - \lambda)^2}{\pi_X^2} + \frac{(y - \beta)^2}{\pi_X^2 \sen^2 \beta} = 1,$$

donde se ha despreciado la excentricidad de la eclíptica debido a lo exiguo de las paralajes. La curva, si se traslada a un plano con longitudes sobre ordenadas y latitudes sobre abscisas, no es más que una elipse con eje mayor paralelo a la eclíptica. Adviértase en la ecuación de arriba cómo a igual paralaje (es decir, para estrellas situadas a la misma distancia de nosotros) el semieje mayor π_X de la elipse se mantiene constante, mientras que el semieje menor $\pi_X \sen \beta$ es mínimo en la eclíptica (se traza un segmento) y máximo en los polos de la eclíptica (se describe una circunferencia de radio π_X).

En la ecuación (VI-12) también se ha supuesto descontada la aberración anual, la cual es la responsable de trazar una elipse bastante más perceptible de semieje mayor $20''.49552$.

Y para finalizar este capítulo, se dedicará un espacio al movimiento de la Luna, de la que hasta ahora apenas se ha hecho mención. Aunque el discurso dedicado al problema de los dos cuerpos también es aplicable a nuestro satélite en su traslación alrededor de la Tierra, la cercanía de aquella y la comparación apreciable entre las masas perturba la limpieza de aquellas fórmulas. Estos son los elementos orbitales que han de ser considerados con sus perturbaciones seculares desde el 1 de enero del 2000 a las 0h de tiempo universal:

$$(VI-13) \quad \begin{aligned} \Omega &= 125^\circ.1288 - 0.0529538083 \times d, \\ i &= 5.1454, \\ \omega &= 318^\circ.0634 + 0.1643573223 \times d, \\ a &= 60.2666 \text{ radios terrestres}, \\ e &= 0.054900, \\ M &= 115^\circ.3654 + 13^\circ.0649929509 \times d, \end{aligned}$$

donde d es el número de días transcurridos desde la época de referencia. Pues bien, como siempre, una vez calculadas las anomalías excéntrica y verdadera, las fórmulas (VI-3) dan directamente la posición geocéntrica (ξ, η, ζ) en coordenadas eclípticas. Ahora bien, las perturbaciones para la Luna son considerables, por

lo que esto solo dará la posición del satélite con una aproximación de unos 2°.

Este error tan abultado quizá pueda admitirse si sólo se quiere saber más o menos la fase de la Luna o por qué constelación se hallará en tal día, pero sería por completo inaceptable para cualquier otro tipo de estudio. Teniendo en cuenta que el diámetro aparente de nuestro satélite es de medio grado, una diferencia de 2° es más que suficiente para que un eclipse total se degrade a parcial o, incluso, que ni llegue a producirse.

Para aumentar la precisión a menos de 2' se necesitan contemplar al menos las mayores perturbaciones, doce sumandos para la longitud eclíptica y cinco para la latitud, con correcciones adicionales para el radio de la órbita. Algunas de estas perturbaciones incluso poseen nombre propio: la *Evección*, por ejemplo, fue descubierta por Ptolomeo y constituyó uno de los epiciclos en su teoría heliocéntrica del cosmos, mientras que la *Variación* y la *Ecuación anual* fueron consideradas ya por Tycho Brahe. Además, todo ello produce la situación geocéntrica de la Luna, esto es, vista desde el centro de la Tierra. Pero la cercanía vuelve a influir en forma de paralaje y hay que ajustar esta posición a las coordenadas geográficas del observador. Todo muy complicado. De cualquiermanera, estas eventualidades han sido recogidas por el autor de estos apuntes en un programa PHP que el lector puede ejecutar [pinchando aquí](#).

En la consecución de un conjunto de ecuaciones que describan los movimientos de la Luna se han realizado enormes esfuerzos a lo largo de la historia. De entre los más épicos, llevados a cabo durante el siglo XIX, cabe mencionar los trabajos analíticos de Delaunay (que hoy en día aún se utilizan en la comprobación del buen funcionamiento de los programas de cálculo simbólico), los puramente numéricos de Hansen y los ideados por Hill y desarrollados por Brown a comienzos del XX. En Colombia se reclama como héroe en este aspecto a Julio Garavito, quien dejó inconclusa su obra *Las tablas de la Luna* debido a su muerte prematura en 1920.

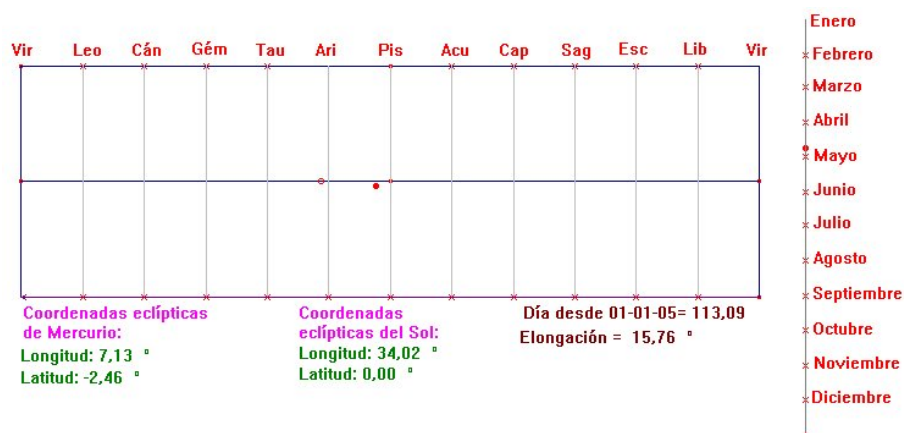


Figura VI.12a

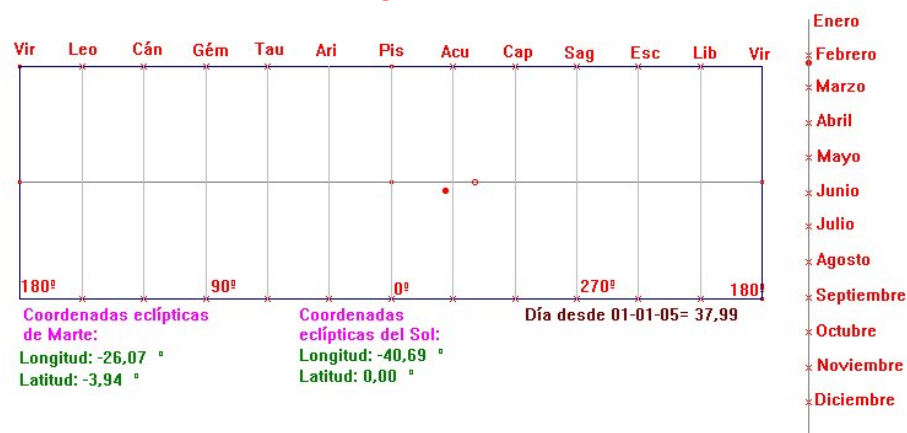


Figura VI.12b

En definitiva, en comparación con el de las estrellas, no es nada fácil la predicción de las curiosas evoluciones de la Luna y los planetas por la banda Zodiacal. De ahí que, para ilustrar la cuestión, se hayan incluido dos simulaciones, las de la figura VI.12a y figura VI.12b, con el movimiento aparente de el Sol, Mercurio y Marte, vistos desde la Tierra, en el transcurso de los años 2005 y 2006.

§5 Problemas propuestos

Problema 1. Usando los datos de la tabla T.VI.1, hállese la posición del planeta Mercurio para las 20h del día 17 de mayo del 2005. ¿Bajo qué elongación será observado en tal fecha?

Problema 2. Exprésese una fórmula aproximada que dé el ángulo de refracción a nivel de mar y a 15°C de temperatura ambiente.

Problema 3. Estímese la masa planetarias de Venus.

Problema 4. El periodo orbital de Tritón en su traslación alrededor de Neptuno es de 5 días, 21 horas, 2 minutos y 39 segundos. Sabiendo que el semieje mayor de la órbita del satélite mide $3.5525 \times 10^5 \text{Km}$, calcúlese la masa de Neptuno. Tómese $1 \text{ UA} = 1.4960 \times 10^8 \text{Km}$.

Problema 5. De una estrella de longitud eclíptica 270° y latitud eclíptica 45° se mide un desplazamiento anual en longitud debido a la paralaje de $0''.8$. ¿Cuál es la correspondiente variación en latitud? Estímese la distancia a la estrella. Indicación: de la ecuación (VI-12) puede deducirse la paralaje y, de ahí, el resto de datos pedidos. Eso sí, téngase en cuenta que la aproximación $\text{sen } x \approx x$ para arcos pequeños presupone que x está expresado en radianes. Por consiguiente, al tomar $\pi_X \approx \frac{1}{r}$, con r en unidades astronómicas, hay que tener en cuenta esta circunstancia.

Problema 6. ¿Cúles han de ser los intervalos de elongación de la Luna correspondientes a sus fases?

Problema 7. El 3 de octubre del 2005 se preve un eclipse anular de Sol entre las 8h 42m 57s y las 12h 20m 33s de tiempo universal. Averígüese el error que se cometería en caso de utilizar las fórmulas (VI-13) para el cálculo de la predicción. Está permitido recurrir al programa efemerides.php para hallar la posición del Sol.

