CAPÍTULO VII
Medida del tiempo

Índice del capítulo

§ Tiempo solar verdadero

§ Sol medio

§ Latitud y cambio de hora

§ Tiempo sidéreo

§ Otras unidades de tiempo

§ Calendario

§ Matematización de los calendarios

§ Problemas propuestos

§ Bibliografía

7. Medida del tiempo

En este último capítulo vamos a tratar el problema de la medida del tiempo. Fundamentalmente estudiaremos el tiempo solar verdadero, el tiempo solar medio así como los calendarios juliano y gregoriano.

7.1. Tiempo solar verdadero

Los dos movimientos más importantes de nuestro planeta, a saber, rotación y traslación determinan dos unidades naturales de tiempo: el día y el año. Para definir lo que es un día necesitamos a su vez definir el *mediodía verdadero* como el instante de la culminación del sol (momento del día en que el sol alcanza su altura sobre el horizonte). Ahora podemos definir el *día solar verdadero* como el intervalo de tiempo que separa dos mediodías consecutivos. Podemos también definir el *tiempo solar verdadero* como el ángulo horario del centro del Sol.

De este modo el día se divide en 24 partes iguales llamadas horas, y estas se cuentan de 0 a 24 de modo que al mediodía corresponden las 12 horas.

Estas unidades de tiempo que hemos introducido son naturales e intuitivamente se corresponden con nuestra noción del mismo. Sin embargo presentan una serie de inconvenientes. En primer lugar, sabemos que la velocidad de la tierra en su órbita alrededor del Sol no es constante. Hemos demostrado en capítulos anteriores que las velocidades extremas se alcanzan en el perihelio y en el afelio . Por lo tanto, dicha velocidad es máxima hacia primeros de enero, mientras que el movimiento de la tierra se ralentiza en verano conforme nos alejamos del Sol. Además aunque el Sol viajara con velocidad constante a lo largo de la eclíptica, dado que el plano de la misma forma un ángulo de $23^o27'$ con el ecuador celeste, el ángulo horario del sol tampoco variaría de modo uniforme.

Esto implica que el tiempo que transcurre entre dos mediodías verdaderos no es siempre el mismo. La diferencia entre la duración de los días solares verdaderos toma el valor máximo de treinta minutos. Aunque esta diferencia de duración del día solar verdadero no tenga gran importancia para la vida cotidiana, sí que la tiene para mediciones de precisión.

Se impone por lo tanto la necesidad de modificar la definición de manera que obtengamos unos días de duración constante.

7.2. Sol medio

La falta de constancia del día solar verdadero se produce, como hemos descrito, por la falta de uniformidad del movimiento del Sol a lo largo de la eclíptica. Para remediar este problema definimos el *Sol medio* como un cuerpo celeste virtual que recorre el ecuador celeste con movimiento uniforme, completando una órbita alrededor de la eclíptica en el mismo tiempo que el sol verdadero y pasando al mismo tiempo que éste por el perigeo. Ahora podemos definir el *día solar medio* como el día determinado por el Sol medio. Del mismo modo en que la definición de día solar verdadero propicia la definición de un tiempo solar verdadero, la definición de día solar medio da lugar a la correspondiente definición de *tiempo solar medio*. La diferencia entre el tiempo solar medio y el tiempo solar verdadero varía de unos días a otros y también varía con el tiempo. Esta variación está tabulada a lo largo del año y a modo de resumen podemos decir que es cero el 16 de abril, 15 de junio, 1 de septiembre, y 25 de diciembre, y tiene máximos y mínimos cerca del 12 de febrero, 15 de mayo, 27 de julio, y 4 de noviembre. Señalemos para acabar que si denotamos por T_v al tiempo solar verdadero y por T_m al tiempo solar medio, definimos $E = T_m - T_v$ donde E se llama por razones históricas ecuación del tiempo, cuya tabulación puede encontrarse en Internet por ejemplo en *www.fcaglp.unlp.edu.ar/ gbaume/ag/datos/eot/eot.htm.*

7.3. Latitud y cambio de hora

Con arreglo a las definiciones dadas, todos los puntos de la tierra que están sobre el mismo meridiano tienen la misma hora solar (ya sea verdadera o media). Como un día tiene 24 horas, la fracción $\frac{360}{24} = 15$ nos dice que a cada 15^o al este le corresponde una hora de adelanto en el reloj. Si esto se aplicara de forma literal, poblaciones cercanas tendrían horas distintas. Por lo tanto para conseguir que todos los territorios de un país (con excepción de los muy grandes) tengan la misma hora, se ha llegado al convenio de establecer los llamados *husos horarios*. Éstos no son más que regiones en el globo terrestre delimitadas por meridianos que tienen 15^o de diferencia de latitud. Se toma como referencia el meridiano de Greenwich, de modo que éste ocupa el centro del primer uso horario también conocido como *huso cero*.

Existen países cuyo territorio esta contenido en un solo huso horario, excepto quizás una pequeña parte del mismo. En estos casos no es extraño modificar la forma del huso horario de modo que no esté exactamente delimitado por dos meridianos, sino que se acomode a las fronteras políticas para evitar que pueblos del mismo país tengan horas distintas. Sin embargo hay países de gran extensión, como Rusia o Estados Unidos, que necesariamente comprenden varios husos horarios.

Pongamos un ejemplo de la forma en que cambia la hora local, en cada huso horario. Si el en huso X son las $11:30$h de un jueves, caminando hacia el Este en el huso XX serían las $21:30$h y en el huso XXIII serían las $0:30$h del viernes. Si se viaja hacia el Oeste, la hora en el mismo huso XXIII serían las $0:30$h del jueves. La línea que coincide aproximadamente con el antemeridiano de Greenwich es la que se conoce como de *cambio de fecha*. Al este de dicha línea, en America, el calendario señala un día menos que al oeste, en Asia oriental.

7.4. Tiempo sidéreo

Se llama *día sidéreo* al tiempo que tarda la tierra en dar una vuelta completa alrededor de su eje. Se mide por el paso de una estrella fija por el meridiano, aunque a efectos prácticos se toma como elemento de referencia el punto Υ. Como se ha descrito en el capítulo V, dicho punto está sometido a un movimiento de precesión, lo que hace que el día sidéreo medido con relación a Υ no coincida exactamente con el día sidéreo medido sobre una estrella fija. La diferencia es de un día entero cada 26000 años (aproximadamente 0.01 segundo al día) lo que es una cantidad prácticamente despreciable. La definición anterior nos lleva a definir el *tiempo sidéreo*, como el ángulo horario del punto Υ . Debido a las casi despreciables variaciones señaladas en la duración del día sidéreo, el tiempo sidéreo es una excelente medida del tiempo. La duración del día solar medio se hace con la ayuda del tiempo sidéreo de manera que

$$1 \text{ día solar medio } = 1.0027379 \text{ días sidéreos } = 1 \text{ día } 3 \text{ minutos } 56.6 \text{ segundos.}$$

7.5. Otras unidades de tiempo

El *año* es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del Sol, pero dependiendo del punto elegido como referencia para indicar el principio de cada órbita, se obtienen distintos tipos de años.

Año trópico : es el intervalo de tiempo comprendido entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto Υ.

Año sidéreo : es el intervalo de tiempo comprendido entre dos pasos consecutivos del Solo por una misma estrella fija. Equivale a 365 días 6 horas 9 minutos y 9 segundos (en tiempo solar medio).

Año anomalístico : es el intervalo de tiempo comprendido entre dos pasos consecutivos del Sol por el perigeo.

Las equivalencias entre estas unidades de tiempo son las siguientes:

$$\text{Año trópico} = 365.2422 \text{ días solares medios.}$$

$$\text{Año sidéreo} = 365.256363051 \text{ días solares medios.}$$

$$\text{Año anomalístico} = 365.2596 \text{ días solares medios.}$$

El año que se toma en la práctica como unidad de medida es el año trópico, ya que es el que mejor se corresponde con la sucesión de las estaciones del año.

El hecho de que el año trópico no tenga un número entero de días tiene interesantes consecuencias de cara a la elaboración de un calendario útil para la vida cotidiana.

7.6. El calendario

En esta sección explicaremos los calendarios juliano y gregoriano (este último actualmente en uso). La referencia bibliográfica fundamental en este apartado es el libro del matemático barcelonés José Comas Solá titulado "Astronomía" (véanse las referencias).

Si la duración del año trópico comprendiera un número exacto de días solares medios, el calendario podría establecerse sobre bases muy sencillas. Al no ser así, el calendario ha pasado por diversas etapas en su evolución. El primer calendario formal fue el juliano, instituido por Julio César 46 años antes de la era cristiana. En este calendario aparece ya la división del año en en meses, como en la actualidad. La duración del año fue fijada en 365 días y un cuarto de día. A efectos prácticos, tal duración se conseguía intercalando un año *bisiesto* (es decir, de 366 días) cada cuatro años. Se estableció el convenio de que los años que fueran múltiplos de cuatro serían bisiestos y el día que se añadía era el 29 de febrero. Pero la duración real del año no es de 365 días más un cuarto de día, es ligeramente menor: unos 11 minutos menos aproximádamente. En consecuencia, el comienzo del año juliano se va retardando progresivamente respecto del año verdadero (el año trópico). Este retardamiento es de 3 días cada 400 años aproximadamente. Como lo ideal es que el año conserve sus caracteríticas estacionales de manera que éstas caigan siempre en las mismas épocas, se hace necesaria una reforma del calendario juliano. A esta corrección obedece el calendario gregoriano

La reforma gregoriana fue ordenada por el Papa Gregorio XIII. Su primer objetivo fue restablecer el acuerdo entre calendario y el movimiento del Sol. En aquella época existía ya una diferencia de 10 días entre el calendario y el movimiento del Sol. La reforma del Papa Gregorio estableció que en Roma el jueves 4 de octubre de 1582 fuera inmediatamente seguido del viernes 15 de octubre, permaneciendo intacta la sucesión de los días de la semana. Por otra parte y para eliminar estos tres días de error cada 400 años, se decidió suprimir tres años bisiestos seculares cada cuatro siglos. Esto quiere decir que con la reforma gregoriana ya no son bisiestos todos los años múltiplos de cuatro. Señalemos en primer lugar que un año se dice secular cuando es múltiplo de cien. Pues bien, en el calendario gregoriano solo se conservan bisiestos los años seculares del conjunto $\{0, 400, 800, 1200, \ldots\}$, es decir, los múltiplos de 400. Así el año 1900, que es secular, no es bisiesto en el calendario gregoriano. Por supuesto los años no seculares que son múltiplos de 4 siguen siendo bisiestos en el calendario gregoriano. Resumiendo: un año es bisiesto en el calendario gregoriano si y solo si es múltiplo de 400 o es múltiplo de 4 pero no de 100. Con este arreglo el lector puede hacer sus propias cuentas y le saldrá que el año gregoriano tiene 365 días 5 horas 49 minutos y 12 segundos. Pasando todo a días sale que el año del calendario gregoriano es igual a 365.2425 días solares medios. Como sabemos de secciones anteriores que el año trópico tiene una duración de 365.2422 días, vemos que el calendario gregoriano es una aproximación excelente al movimiento real del sol. Todavía hay una diferencia de 0.0003 días por año (unos 26 segundos al día). Por lo tanto dentro de unos millares de años tendrá que rebajarse en un día la fecha que corresponda.

7.7. Matematización de los calendarios

Para hacer cálculos tanto en el calendario juliano como en el gregoriano interesa una cierta matematización de los mismos. Con este fin vamos a denotar por B_J el conjunto de los años bisiestos en el calendario juliano y por B_G al conjunto de años bisiestos en el calendario gregoriano. Por lo tanto $B_J = 4\mathbb{N}$, mientras que

$$B_G = \{x \in \mathbb{N} : x \in 400\mathbb{N}, \text{ o } x \in 4\mathbb{N} - 100\mathbb{N}\}.$$

Definamos ahora la función $d : \{1, \ldots, 12\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $d(m, a)$ nos de el número de días del mes m del año a . Con tal intención definimos para el calendario juliano:

$d(m,a)=31$ si $m\in\{1,3,5,7,8,10,12\}$, para todo a ,

$d(2,a)=28$ si $a\notin B_J$,

$d(2,a)=29$ si $a\in B_J$,

$d(m,a)=30$ en el resto de los casos.

Para el calendario gregoriano la definición es la misma excepto en las dos líneas en que pone B_J que deberá poner B_G .

Ahora definimos el conjunto de fechas del calendario juliano como el siguiente subconjunto de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$$F_J=\{(i,j,k):k\in\mathbb{N},j\in\{1,\ldots,12\},1\leq i\leq d(j,k)\}.$$

En este caso la definición del conjunto de posibles fechas del calendario gregoriano F_G se define como el mismo conjunto (la función d definida arriba se encarga de marcar la diferencia entre un calendario y otro).

Vamos a definir la función $s:F_J\to F_J$ o $s:F_G\to F_G$ que nos da el día siguiente de uno dado. La definición en este caso tampoco depende del calendario que se elija. Formalmente s se define del siguiente modo:

$s(28,2,a)=(1,3,a)$ para todo a no bisiesto.

$s(29,2,a)=(1,3,a)$ para todo a bisiesto.

$s(31,j,k)=(1,j+1,k)$ para $j\in\{1,3,5,7,8,10,12\}$.

$s(30,j,k)=(1,j+1,k)$ para $j\in\{4,6,9,11\}$.

$s(31,12,a)=(1,1,a+1)$ para todo a .

$s(i,j,k)=(i+1,j,j)$ en el resto de los casos.

A continuación podemos definir un orden tanto en F_J como en F_G . El orden no es otro que el orden natural de los días: para dos fechas $f,f'\in F_J$ (respectivamente $f,f'\in F_G$) diremos que $f\leq f'$ y lo leeremos: f *es anterior a* f' , si y solo si existe un $n\in\mathbb{N}$ tal que $f'=s^n(f)$. En realidad, lo que expresa la igualdad $f'=s^n(f)$ es que f' es posterior en n días a f .

Vamos a plantearnos ahora el cálculo del número de días entre dos fechas del calendario juliano. Para ello, vamos a fijar una fecha de referencia $f_0 = (1,1,0)$, es decir, el uno de enero del año cero. Si denotamos por $N_J(f)$ el número de días desde f_0 hasta f , entonces el número de días entre dos fechas $f, f' \in F_J$ será simplemente $N_J(f') - N_J(f)$ (suponiendo $f \leq f'$).

Por lo tanto, el cálculo que queremos hacer descansa sobre el cómputo de $N_J(f)$ para cada $f \in F_J$. Es conveniente en este momento recordar algo de notación: la función $E(x)$ va a denotar la parte entera del número real x, la función $D(x) = x - E(x)$ va a denotar la parte decimal del número x y finalmente la función signo se denotará por $Sgn(x)$ y su valor es $Sgn(x) = 1$ si $x > 0$, $Sgn(x) = -1$ si $x < 0$, y $Sgn(0) = 0$.

Vamos pues a hacer el cálculo de $N_J(f)$ para una fecha $f = (i, j, k)$. En primer lugar observamos que $N_J(f) = N_J(1,1,k) + n$ donde n es el número de días desde la fecha $(1,1,k)$ hasta (i,j,k). Los dos sumandos de la expresión anterior son fáciles de calcular. Por un lado $N_J(1,1,k) = 365k + E(k/4) + Sgn(D(k/4))$. La explicación de esta suma es la siguiente: el sumando $365k$ nos da el número de días si todos los años fueran de 365 días, el sumando $E(k/4)$ nos dice el número de años bisiestos anteriores a k , y el sumando $Sgn(D(k/4))$ añade un día más si el año k no es bisiesto. Por otra parte $n = i - 1 + \sum_{p=1}^{j-1} d(p,k)$ (entendemos que la sumatoria es nula en caso de ser $j = 1$). Por lo tanto podemos escribir:

$$N_J(i,j,k) = 365k + E\Big(\frac{k}{4}\Big) + Sgn\Big(D\big(\frac{k}{4}\big)\Big) + i - 1 + \sum_{p=1}^{j-1} d(p,k).$$

El lector puede ahora comprobar que esta es la única función de $x : F_J \to F_J$ tal que $x(f_0) = 0$ y $x(s(f)) = 1 + x(f)$ para toda $f \in F_J$. Esto justifica formalmente el hecho de que N_J nos da el número de días entre f_0 y f.

Un corolario interesante que conviene destacar aquí es el siguiente. Si nos limitamos al período de años comprendido entre 1901 y 2099, los años bisiestos de este período son los mismos en cualquiera de los dos calendarios considerados: juliano o gregoriano. Esto implica que para dos fechas f, f' en dicho intervalo, el número de días comprendidos entre ellas es el mismo en cualquiera de los dos calendarios. En consecuencia, dado que el calendario juliano es más simple desde de un punto de vista computacional que el gregoriano, el cálculo del número de días se hará calculando $|N_J(f')-N_J(f)|$.

Veamos ahora como resolver el problema siguiente: dado $n \in \mathbb{N}$ calcular la fecha $f \in F_J$ tal que $N_J(f) = n$. Queremos pues determinar una función $\theta : \mathbb{N} \to F_J$ tal que $\theta(n) = f$ si y solo si $N_J(f) = n$. Por lo tanto se ha de verificar $\theta(N_J(f)) = f$ lo que equivale a afirmar que N_f tenga función inversa por la izquierda (véase el Problema 2). Una vez justificada la existencia de dicha función θ queda la tarea de calcularla. En este capítulo nos limitaremos a dar la expresión matemática de dicha función, dejando al lector la tarea de demostrar que es la única función que satisface $\theta(0) = f_0$ y $\theta(n+1) = s(\theta(n))$. Para la función θ se tiene la expresión.

$$\theta(n) = (i(n), j(n), k(n))$$

donde

$$k(n) = 4a + X_{[366,\infty)}(n-1461a)\Big[1 + E\Big(\frac{n-1461a-366}{365}\Big)\Big]$$

siendo $a = E\big(\frac{n}{1461}\big)$, y X_S la función característica del conjunto S , es decir, $X_S(z) = 1$ si $z \in S$ y $X_S(z) = 0$ si $Z \notin S$, Para dar la expresión de $j(n)$ necesitamos el vector $d = (0, 31, 59, 90, 120, 151, 181, 212, 243, 273, 304, 334, 365)$ y denotaremos por d_i la i -ésima componente de d . entonces

$$j(n) = 13 - \sum_{m=1}^{12} Sgn\Big[E\Big(\frac{d_m+1}{M+1}\Big)\Big],$$

donde $M = n - N_J(1, 1, k(n))$ y $d_2 = 60$ cuando $k(n)$ es bisiesto (en caso contrario $d_2 = 59$). Finalmente

$$i(n) = n - N_J(1, j, k) + 1.$$

Supongamos entonces el problema siguiente: dada una fecha $f \in F_J$ y un $n \in \mathbb{N}$, determinar la fecha $f' \in F_J$ posterior tal que el número de días entre f y f' sea n . Para ello calculamos $m = n + N_J(f)$ y entonces $f' := \theta(m)$ es la fecha buscada. Para fechas comprendidas en el intervalo de tiempo desde 1901 hasta 2099 (incluidos), este número de días coincide en los dos calendarios: juliano y gregoriano.

7.8. Problemas propuestos

Problema 1. ¿En qué día de la semana nació usted?

Problema 2. Un avión sale desde Málaga y recorre una geodésica terrestre hasta llegar a Buenos Aires. Supongamos que viaja con velocidad constante de 845 Km/h. Busque el lector las coordenadas geográficas de estas dos ciudades y determine la hora de llegada a Buenos Aires (en tiempo local de esa ciudad) si sale de Málaga a las 16 : 30 (hora local de Málaga).

Problema 3. Demuéstrese formalmente que N_J es la única función $F_J \to F_J$ tal que $N_J(f_0) = 0$ y $N_J(s(f)) = 1 + N_J(f)$ para cada $f \in F_J$ (recuérdese que $f_0 = (1, 1, 0)$).

Problema 4. Dos continentes se separan uno de otro a razón de un centímeto al año. Si el 9 de septiembre de 1903 distan 2356 Km uno del otro, ¿qué distancia los separará el 31 de octubre de 2075?

Problema 5. Demuéstrese que la función N_J es creciente en el sentido de que para cualesquiera $f, f' \in F_J$ se tiene $f \leq f'$ implica $N_J(f) \leq N_J(f')$. Compruébese además que si $f \neq f'$, entonces $N_J(f) \neq N_J(f')$, es decir, N_J es inyectiva.

Problema 6. Un determinado cometa sigue una órbita elíptica con período de revolución de 55123 días. Si pasó el dos de mayo de 1956 por su perihelio averíguese la fecha en que volverá a pasar por dicho punto.