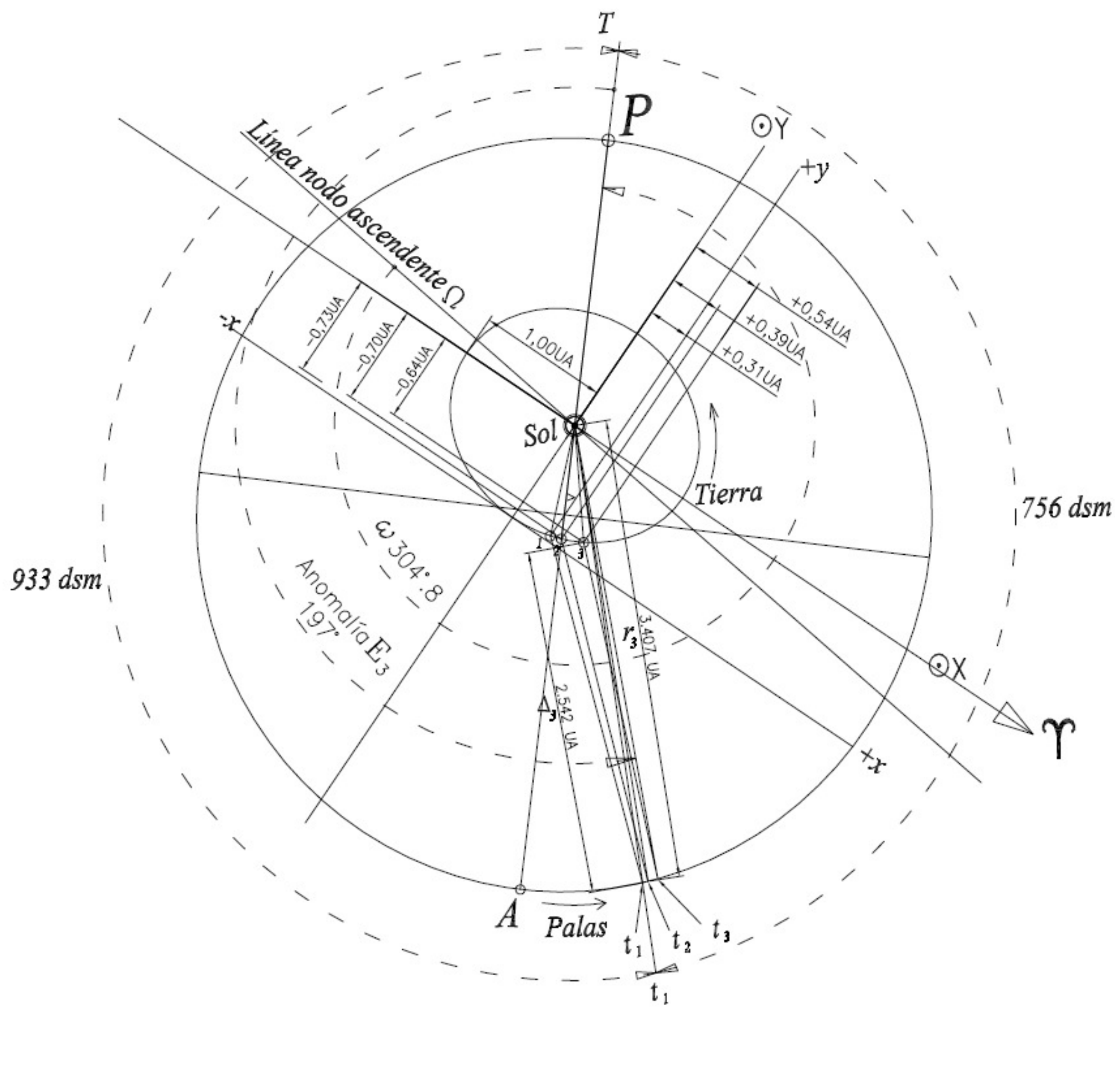
Determinación de órbitas
Método de Gauss
para órbitas elípticas



OBSERVATORIO ASTRONOMICO
PROF. VICTORIO CAPOLONGO

Introducción a la Mecánica Celeste

Determinación de órbitas. Método de Gauss para órbitas elípticas.

Distancia geocéntrica y elementos orbitales de los planetas menores.

Dr. Jeremy B. Tatum
Profesor Retirado.
Dpto. Astronomía y Física, Universidad de Victoria, Columbia Británica, Canadá.
e-mail: jtatum@.uvic.ca

Memoria de cálculo
Elementos orbitales del asteroide Palas

Traducción, elaboración y memoria de cálculo
Carlos E. Montenegro
Observatorio Astronómico Prof. Victorio Capolongo
Rosario – Santa Fe – Argentina.
cmontenegro.oavc@yahoo.com.ar

Dedicado a la memoria del Prof. Juan Pedro Lewis.

Rosario, Argentina. Año 2012

CONTENIDO:

13.0	Prefacio.	Pág. 4
13.1	Primera Parte. Introducción.	6
13.2	Triángulos – Areas.	8
13.3	Sectores – Areas.	10
13.4	Segunda Ley de Kepler.	11
13.5	Coordenadas.	12
13.5.1	Coordenadas Heliocéntricas de la órbita.	12
13.5.2	Coordenadas Eclípticas heliocéntricas.	13
13.5.3	Coordenadas Ecuatoriales Heliocéntricas.	13
13.5.4	Coordenadas Ecuatoriales Geocéntricas.	14
13.5.5	Relación entre coord. Ecuatoriales Geocéntricas y Heliocéntricas.	14
13.5.6	Esquema básico de Gauss.	15
13.5.7	Esquema básico de Gauss en coord. Geocéntricas y Heliocéntricas.	16
13.5.8	Esquema básico de Gauss en el espacio.	17
13.5.9	Planteo de las ecuaciones.	17
13.6	Segunda Parte. Distancias Geocéntricas y Heliocéntricas.	18
13.7	Distancias Heliocéntricas y Geocéntricas.	19
13.7.1	Primera tentativa.	19
13.7.2	Sistema de ecuaciones.	22
13.8	Relaciones mejoradas de los triángulos.	25
13.9	Iteraciones.	29
13.10	Aproximación de orden superior.	31
13.11	Correcciones Tiempo-Luz.	36
13.12	Razón Sector-Triángulo.	36
13.13	Resumen del ejemplo numérico.	42
13.14	Sumario.	44
13.15	Cálculo de los elementos orbitales.	45
13.16	Corrección Geocéntrica-Topocéntrica.	51
13.17	Conclusiones sobresalientes.	52
13.18	Memoria de Cálculo – Construcción de la Planilla.	54
13.19	Reducción de las coordenadas.	54
13.20	Los números Tau (τ).	55
13.21	Cosenos directores l, m, n.	57
13.22	Coordenadas solares geocéntricas X, Y, Z.	58
13.23	Sistema de ecuaciones – Cramer.	60
13.24	Primera iteración.	63
13.25	Primer refinamiento.	64
13.26	Refinamiento de orden superior.	66
13.27	Resultados: Distancia Geocéntrica y Heliocéntrica.	70
13.28	Cálculo de los elementos orbitales.	72
13.28.1	El semi latus rectum l.	72
13.28.2	La excentricidad e.	73
13.28.3	El semieje mayor a.	74
13.28.4	Período sideral P.	74
13.28.5	Tiempo de pasaje por el perihelio T.	74
13.28.6	Cosenos directores P y Q.	77
13.28.7	Argumento del perihelio ω .	78
13.28.8	Longitud del nodo ascendente Ω .	78
13.28.9	Inclinación del plano orbital i.	79
13.29	Resumen de los elementos orbitales.	79
13.30	Esquema de los elementos orbitales.	79
13.30.1	Trazado de la órbita aproximada.	80
13.30.2	Orden del trazado propuesto.	80
13.31	Comentarios.	84
13.32	Apéndice I - Solución del sistema de ec. 13.12.25 y 13.12.26	85
13.33	Apéndice II – Datos de Palas del MPC	87
13.34	Apéndice III – Página web del MPC	88
13.35	Bibliografía de consulta.	91
13.36	Fuentes de figuras y datos.	92
13.37	Agradecimientos.	93

13.0 - PREFACIO.

Con este prefacio quiero decir que este trabajo llegó a buen término porque en la publicación del e-book :"Celestial Mechanics" – Capítulo XIII, del Prof. Jeremy B. Tatum, figuran los resultados parciales de los cálculos desarrollados.

Este hecho es fundamental para saber si lo que se está produciendo es correcto o erróneo.

Para los aficionados a la Astronomía que estuvieran dispuestos a dedicar mucho tiempo libre en el estudio de temas teóricos como este, las cifras son un marcador de buen rumbo.

Al avanzar en los cálculos, podría pensarse que la operatoria aritmética es lo más sencillo, sin embargo no es así. Trabajar con argumentos decimales y expresiones algebraicas extensas, agrupadas a veces en una única celda de una hoja de cálculo, exige una esmerada atención en la sintaxis de las distintas funciones involucradas.

Con frecuencia se cometen errores y omisiones dada la multitud de símbolos. Es posible que algunos ojos cansados no vean errores gruesos. Y solo después de posteriores revisiones, estos errores aparezcan como "evidentes".

Y en estas etapas de control, la comparación de las cifras, y un estricto criterio de exactitud, serán las herramientas que habrá que usar una y otra vez.

Es posible que al comparar dos cifras aparezcan diferencias en los últimos decimales, especialmente en las funciones trigonométricas y sus cálculos asociados.

Habrá que aprender a distinguir entre un error admisible y lo que está mal. Quizá sería mejor utilizar el término "discrepancia", ya que error lleva a pensar en algo erróneo, incorrecto.

Por ejemplo: si una excentricidad es bien conocida, digamos: $e = 0.220\ldots$, una discrepancia admitida (para la exactitud de este trabajo) podría estar en la tercera cifra decimal : $e = 0.226\ldots$, pero no se podría admitir $e = 0.230\ldots$,ó 0,210... En tal caso habría que buscar con gran paciencia errores en las operaciones anteriores. Por eso siempre habrá que estar comparando, para no arrastrar estos errores. Lo más conveniente es desglosar las operaciones aritméticas en varios pasos, pues así se facilita el control, y luego operar con los resultados parciales verificados.

Lo mismo vale decir sobre las medidas angulares, que en los cálculos se dan siempre en radianes.

Para disminuir la posibilidad de discrepancias en los números calculados, es necesario utilizar mantisas de al menos 8 cifras decimales (ideal es 10 cifras decimales, y "redondear al final de todo el cálculo"(como escribió el Prof. J. B. Tatum).

En cuanto a los desarrollos algebraicos, los hay sencillos, y también muy complicados. No todos los desarrollos están explicitados, y algunos, sólo en parte. Este trabajo no es de álgebra, pero un lector inquisitivo quizá estará atraído por hacer las demostraciones correspondientes, y, llegado el caso, trabajará hasta alcanzar las expresiones finales.

Esto sería el máximo del rigor matemático, en buena hora para quién lo encarase.

Sin embargo, no hay que olvidar el propósito primario de este trabajo: "proveer un método para calcular los elementos orbitales"; esto es Matemática aplicada a la Astronomía, y si no hay interés en las demostraciones algebraicas, no hay problema en proceder con la elaboración de la hoja de cálculo. Todos los cálculos necesarios están explicitados, y se dan las soluciones de los sistemas de ecuaciones, explicándose los métodos de resolución.

Puedo decir al lector, que la gran satisfacción que produce un resultado coincidente en varias cifras decimales de cierto cálculo, es fruto de mucho trabajo meticuloso, y constituye el combustible necesario para continuar hasta el final.

Lograr calcular los elementos orbitales de un astro, es una tarea muy tediosa, sólo para gente decidida a terminarla. Hay muchas dificultades, pero son resueltas de una por vez. El hecho de hacer iteraciones varias veces hasta llegar a la convergencia, está en directa relación con la exigencia del astrónomo, pero nunca hay que olvidar esto: "Las cifras de los almanaques astronómicos son el resultado de TODAS las posiciones observadas desde el descubrimiento del *astro", y este método, que está basado en tres posiciones únicas ó seleccionadas de cierta cantidad disponible, es incapaz de proveer cifras coincidentes en todos los decimales. Además de esto, las cifras calculadas servirían para calcular efemérides hasta unos 100 días hacia atrás o hacia adelante, y pasado este lapso, habrá que corregir los elementos, dado que la órbita calculada es tangente sólo en la región del arco orbital donde se ubican las fechas de observación.*

Estimado lector, si está decidido a encarar este trabajo, debe saber que cuando lo finalice, habrá logrado llegar al portal del cálculo orbital. Hay mucho, muchísimo más para aprender, por ejemplo: calcular órbitas de cometas, es decir, parabólicas o hiperbólicas, estimar una órbita circular cuando la excentricidad se aproxima a cero, aprender otros métodos como el Método de Laplace, o el de Olbers, etc.

Si hay algo en el "Método de Gauss" que me motivó a estudiarlo, es que cualquiera que tuviese acceso a un telescopio profesional, bien orientado y nivelado, con cuadrantes angulares simples o digitales, dispone de todo lo necesario (al menos en teoría) para poder determinar una órbita elíptica preliminar de un asteroide o un planeta. Sólo basta determinar las coordenadas del astro en ascensión recta y declinación, y la fecha y hora de la observación (*). También es necesario, buscar en un Almanaque Astronómico, las coordenadas geocéntricas ecuatoriales del Sol para cada una de las fechas de las observaciones. Todo este conjunto de requerimientos existe en un observatorio bien montado.

(*) A veces son necesarias cuatro observaciones para determinar una órbita, es el caso de astros cuya declinación eclíptica es próxima a cero (el planeta Venus, por ejemplo).

El método de cálculo partiendo de cuatro observaciones difiere en el sistema de ecuaciones de las distancias geocéntricas. Habrá una ecuación adicional.

La descripción de tal sistema y su resolución probablemente serán motivo de una extensión futura de este trabajo.

Finalmente:

¡Es realmente asombroso que con sólo estos datos, se pueda saber cuál es la distancia aproximada desde el astro al centro de la Tierra!

Entonces, soy de la creencia que este trabajo podría ser de gran utilidad para los amantes de la Astronomía y la Matemática.

*Quiero dejar en claro, que en mi caso fue decisiva la ayuda del **Dr. Jeremy B. Tatum** en todo momento, por vía e-mail, a lo largo de dos años aproximadamente, sin cuyo apoyo gentil, la superación de algunas dificultades algebraicas y numéricas no habría sido posible, al menos en corto plazo.*

Con esta aclaración deseo mostrar que además de la voluntad personal al afrontar un trabajo como este, es importante poder consultar con los profesionales del tema, pues ellos son capaces de suministrar lo necesario y suficiente, sin hacer perder tiempo al interesado, salvándolo del desaliento que produciría la imposibilidad de avanzar.

C. E. M.
22-Julio-2012.

Cálculo de una órbita elíptica por el Método de Gauss.

FUNDAMENTOS TEORICOS DEL PROBLEMA.

Dr. Jeremy. B. Tatum

13.1 Primera Parte - Introducción:

En este trabajo, veremos el complicado problema de la determinación de los elementos orbitales de los planetas menores conocidas tres posiciones (tres observaciones).
De la geometría analítica sabemos que es posible ajustar una elipse a varios puntos conocidos que pertenezcan todos a un mismo plano (ver Fig. 1).
En el caso de una órbita planetaria, se necesita también conocer la orientación del plano. Esto requiere más información adicional. Entonces se estará en condiciones de determinar la forma, tamaño y orientación de la elipse, partiendo de unos pocos datos de las observaciones.
Al principio, se desconoce "todo" de las posiciones del asteroide o del planeta. Sólo se conocen "dos" coordenadas al momento de la observación:

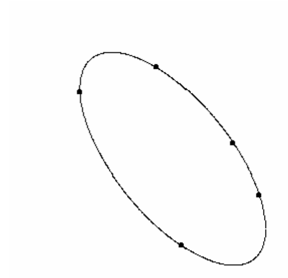
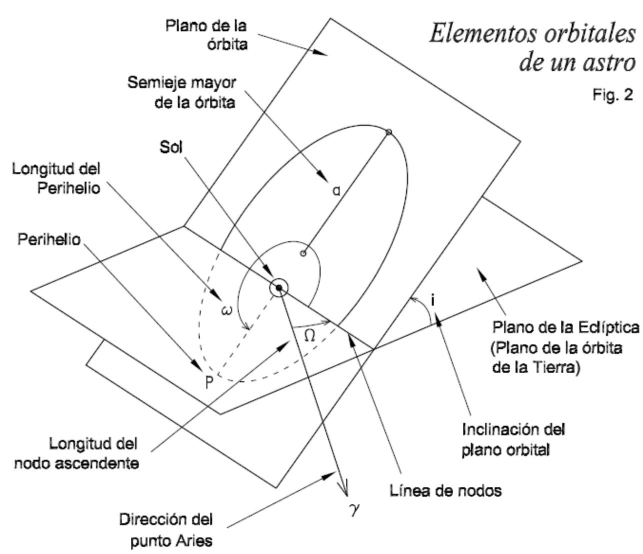


Fig. 1

1.- **Ascensión Recta** "α" (alfa), y
2.- **Declinación** "δ" (delta).

De la distancia Tierra-asteroide no se tiene idea aún. Todo lo que nos dan las observaciones son las direcciones al planeta en el cielo, en un momento dado de tiempo.
Encontrar la "distancia geocéntrica" (Δ : delta mayúscula) en un instante de tiempo dado de cierta observación, es en realidad una de las tareas mas dificultosas.
Una vez que hayamos superado esta etapa, tendremos la solución del problema.
Sin embargo, aunque no conozcamos las distancias geocéntricas, tenemos información adicional para nuestra ayuda. Por un lado, sabemos donde se localiza uno de los focos de la sección cónica. El Sol ocupa uno de ellos, aunque no sepamos inmediatamente cual es.

También se conoce el instante de tiempo de cada observación, y sabemos que el radio vector "A-S" (Asteroide-Sol) barre áreas iguales en tiempos iguales. Esta importante Ley de Kepler (segunda ley), es de gran valor en los cálculos de órbitas.
Para calcular una órbita, tendremos que determinar un grupo de seis "*Elementos Orbitales*". (Ver Figura 2).
Estos son, a saber:



a : **Semieje mayor de la órbita elíptica.**
e : **Excentricidad de la elipse.**
i : **Inclinación del plano orbital del astro.**
Ω : **Longitud del nodo ascendente.**
ω: **Longitud del perihelio de la órbita del astro.**
T: **Tiempo o época de pasaje por el perihelio de la órbita del astro.**

Para una órbita sensiblemente elíptica, o para una órbita de baja excentricidad (casi circular), generalmente se sustituye un ángulo tal como M_0, que es llamado: "anomalía principal de la época", por T (tiempo de pasaje por el perihelio del astro). Entonces se podría calcular la órbita partiendo de seis datos de información (α_1, α_2, α_3, δ_1, δ_2, δ_3).
Si el caso que nos interesa se ha registrado con al menos 3 observaciones convenientemente espaciadas, en las cuales tenemos registradas tres direcciones (α, δ) en tres instantes de tiempo, entonces tenemos seis datos, de los que es posible calcular los seis elementos orbitales.
Debe mencionarse, sin embargo, que tres observaciones son "necesarias" para obtener una solución creíble, pero no siempre resultan ser "suficientes". Las tres observaciones deben estar apartadas de la Eclíptica, y lejos de un punto estacionario (1). Si el cuerpo se moviese directamente hacia nosotros, apenas tendría movimiento aparente en el cielo, tampoco entonces sería posible obtener una solución creíble.

Las observaciones siempre tienen algún error asociado a ellas, y pequeños errores observacionales bajo ciertas circunstancias se traducen en un rango grande de soluciones posibles, o puede ser que no siempre sea posible encontrar el grupo de elementos orbitales partiendo de observaciones que sean levemente erróneas.

En años recientes, los cálculos de las órbitas de algunos asteroides próximos a La Tierra fueron materia de interés de los medios periodísticos, quienes son propensos a precipitarse infundiendo la sugestión de que las observaciones fueron "erróneas" y la órbita "equivocada", como si ellos ignorasen que las mediciones científicas tienen un error asociado con ellas.
Hay una falla en la distinción entre error y entender mal.

Cuando un planeta menor nuevo o un asteroide es descubierto, tras haber reunido los mínimos requerimientos que las observaciones exigen, recién entonces se está en condiciones de calcular una órbita aproximada, después que han sido calculados todos sus elementos orbitales. En este punto, puede entregarse una primera efeméride de aproximación a otros observadores.
El propósito de esta "órbita preliminar" no es decir si La Tierra podría ser destruida por una colisión cataclísmica con un asteroide cercano, sino simplemente proveer a los observadores una efeméride bastante buena que les permita encontrar al asteroide y así obtener más observaciones adicionales.

Muchos, quienes están trabajando en los procesos de observación de asteroides, o calculando sus órbitas, conocen o deberían conocer esto, también saben que las observaciones adicionales sirven para hacer una revisión de la órbita y las correcciones diferenciales para ajustar los elementos cuando ha transcurrido cierto tiempo después del momento del cálculo.
Más aún, la órbita calculada es una órbita "osculatríz" (osculo significa beso, pero aquí se interpreta como que "toca" en un punto a la órbita verdadera, en el punto del momento del cálculo), y los elementos son "elementos osculadores" para una "época de osculación" particular.
Teniendo en cuenta las perturbaciones planetarias, la época de osculación debe ser cambiada cada 200 días, y se calculan nuevos elementos osculadores. Todo este trabajo es rutinario y para tener en cuenta.

Y además, hubo una desafortunada tendencia en años recientes, no sólo por la prensa, sino también de un número de personas quienes se decían de la comunidad científica, que no tenían experiencia para juzgar un cálculo orbital, y que exigían revisiones (numerosas) a las órbitas, por ser supuestamente erróneas, o por ser trabajadas por personas incompetentes o inexpertas. Cuando todas las observaciones para una aparición particular fueron acumuladas, y no hay posibilidad de futuras observaciones, entonces se calcula una órbita definitiva para aquella aparición, partiendo de las observaciones disponibles.

Aún entonces, habrá pequeñas variaciones en los elementos obtenidos por diferentes cálculos. Esto se debe, entre otras cosas, a que cada observación fue críticamente calculada y evaluada. Algunas observaciones pueden ser fotográficas, mayoritariamente en estos días son de gran precisión con las cámaras CCD que capturan imágenes de alta resolución, que son de gran utilidad. Las observaciones deberían ser hechas con diferentes tipos de telescopios y distancias focales, y por supuesto, habrá observadores con distinto grado de experiencia.

Algunas observaciones deberán ser hechas a la mayor brevedad, en la noche inmediatamente siguiente del nuevo descubrimiento.

Cada una de las observaciones será evaluada por el cálculo de una órbita preliminar, aunque puede ser que algunas sean desechadas en la órbita definitiva. No hay un único camino para abordar tales problemas, y si dos cómputos resultan ser levemente diferentes como resultado de diferentes observaciones, esto no quiere decir que una de ellas es "correcta" y la otra es "errónea". Todo esto debe ser muy obvio, aunque algunas palabras que fueron dichas o escritas en años recientes sugieren que hay que repetirlo.

Hay un pequeño número de problemas sobre las observaciones originales que aún están en bruto y habrá que refinar.

Uno es que el instante de tiempo de una observación es registrado y reportado por un observador en TU (Tiempo Universal). Esto es correcto por parte del observador, y es lo que se espera de él o ella.

Sin embargo, una computadora usa como argumento para el cálculo orbital una representación mejor, que es expresar el tiempo como un flujo continuo, y en el presente es TT (Tiempo Terrestre).

La diferencia para el año corriente nunca se conoce exactamente, pero puede ser estimada.

Otra dificultad es que las observaciones no son hechas desde el centro de La Tierra, sino desde algún punto de su superficie (un punto que se mueve en rotación junto con La Tierra). Así, es necesario hacer una pequeña corrección paraláctica a las observaciones – pero no sabemos cuán grande deberá ser esta corrección hasta que conozcamos la distancia al astro.

Hay evidentemente un buen acuerdo implícito en el cálculo de órbitas, que puede ser motivo de un extenso capítulo, aunque realmente, nunca sería escrito con la perfección requerida para cubrir todas las contingencias. Para comenzar, hay que restringir la visión de este trabajo al problema básico de calcular los elementos elípticos a partir de tres observaciones. Existe la posibilidad de extender el trabajo mas tarde, y de incluir el cálculo de órbitas parabólicas e hiperbólicas, por medio de algunos problemas especiales.

En la práctica, calcular los elementos de una órbita hiperbólica es en principio no más difícil que calcular órbitas elípticas, sin embargo, algunas órbitas del sistema solar que son sensiblemente hiperbólicas están sujetas a perturbaciones planetarias relativamente grandes, y así el problema en la práctica no resulta simple. Excluir las correcciones diferenciales a la órbita preliminar hace menos difícil el cálculo, pero no quedará alternativa y deberán aplicarse todas las correcciones tarde o temprano.

(1) ***Puntos estacionarios***: *Puntos en los que se invierte el sentido del movimiento anual de los planetas, pasando de un movimiento directo (de Oeste a Este), a un movimiento retrógrado (de Este a Oeste); o viceversa.*

13.2 Triángulos – Areas.

Comenzaremos con un teorema geométrico que involucra triángulos, que usaremos progresivamente para el cálculo de los elementos orbitales.

La Fig. XIII.1 muestra tres vectores coplanares. Es claramente posible expresar $\vec{r}_2$ como una combinación lineal de los otros dos.

Es decir que, es posible encontrar los coeficientes "a_i" que satisfagan:

$$\vec{r}_2 = a_1\,\vec{r}_1 + a_3\,\vec{r}_3\ . \qquad (13.2.1)$$

Vamos a usar la notación que sigue:
* El triángulo formado por la unión de los segmentos de r_2 y r_3 es $\mathbf{A_1}$.
* El triángulo formado por la unión de los segmentos de r_3 y r_1 es $\mathbf{A_2}$.
* El triángulo formado por la unión de los segmentos de r_1 y r_2 es $\mathbf{A_3}$.

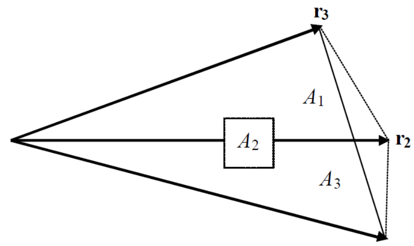


FIGURE XIII.1

Para encontrar los coeficientes en la ecuación 13.2.1, multipliquemos ambos miembros por $\vec{r}_1\ \times$ (por izquierda; aquí $\times$ denota el producto vectorial o producto cruz):

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = a_3 \cdot \vec{r}_1 \times \vec{r}_3\ . \qquad (13.2.2)$$

El módulo del vector resultante: $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$, es numéricamente igual al área del paralelogramo determinado por $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. Igualmente, el módulo del vector: $\vec{r}_1 \times \vec{r}_3$, es numéricamente igual al área del paralelogramo determinado por $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_3$.
Los dos vectores producto son paralelos (cada uno de ellos es perpendicular al plano que determinan ambos vectores), de módulo $2A_3$ y $2A_2$ respectivamente.
$2A_3$ ***es el área*** del paralelogramo del cual los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ forman dos de sus lados, y desde luego, $2A_3$ es el doble del área A_3 del triángulo A_3, dos de cuyos lados son los módulos de $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. Lo mismo vale para el área $2A_2$, del triángulo A_2.
Por lo tanto:

$$\left|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right| = 2A_3\ , \quad \text{y:} \quad \left|\vec{r}_1 \times \vec{r}_3\right| = 2A_2 .$$

Sustituyendo estas áreas en la ecuación 13.2.2 y despejando a_3, resulta:

$$a_3 = 2A_3 / 2A_2\ ,$$

finalmente:

$$a_3 = A_3 / A_2 \qquad (13.2.3)$$

Similarmente, multiplicando ambos lados de la ecuación 13.2.1 por: $\times\ \vec{r}_3$, (por derecha, y después de operar algebraicamente) encontraremos que:

$$a_1 = 2A_1 / 2A_2\ ,$$

y así:

$$a_1 = A_1 / A_2 \qquad (13.2.4)$$

En consecuencia :

$$\vec{r}_2 = A_1/A_2\ \vec{r}_1 + A_3/A_2\ \vec{r}_3$$

Y multiplicando ambos miembros por A_2**, encontraremos la ecuación vectorial buscada:**

$$A_2\vec{r}_2 = A_1\ \vec{r}_1 + A_3\ \vec{r}_3 \quad (13.2.5)$$

13.3 Sectores – Areas.

La Figura XIII.2, muestra una porción de una órbita elíptica (o de otra sección cónica), y se muestran los radiovectores del planeta, que ocupan ciertas posiciones en determinados momentos de tiempo : t_1, t_2, y t_3.

La notación que vamos a usar es la siguiente: $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_3$

* El área del sector formado por la unión de los segmentos de $\vec{r}_2$ **y** $\vec{r}_3$ a lo largo de la órbita es B_1.
* El área del sector formado por la unión de los segmentos de $\vec{r}_3$ **y** $\vec{r}_1$ a lo largo de la órbita es B_2.
* El área del sector formado por la unión de los segmentos de $\vec{r}_1$ **y** $\vec{r}_2$ a lo largo de la órbita es B_3.

* El intervalo de tiempo $t_3 – t_2$ es τ_1.
* El intervalo de tiempo $t_3 – t_1$ es τ_2.
* El intervalo de tiempo $t_2 – t_1$ es τ_3.

Dado que el arco es extremadamente pequeño, para una buena aproximación podríamos aproximar los sectores por triángulos, y entonces utilizar ecuaciones similares a las de los triángulos, así tendríamos:

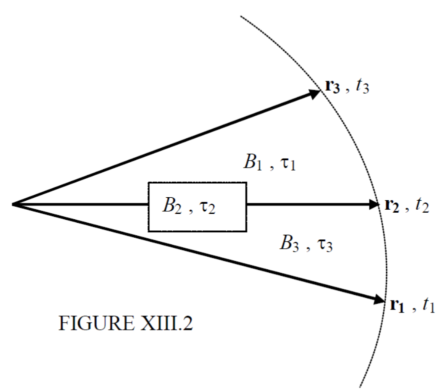


FIGURE XIII.2

$$B_2\ \vec{r}_2 \approx B_1\ \vec{r}_1 + B_3\ \vec{r}_3 \qquad (13.3.1)$$

Esto es:

$$\vec{r}_2 \approx b_1\ \vec{r}_1 + b_3\ \vec{r}_3, \qquad (13.3.2)$$

donde:

$$b_1 = B_1 / B_2 \qquad (13.3.3)$$

y :

$$b_3 = B_3 / B_2 \qquad (13.3.4)$$

Los coeficientes b_1 **y** b_3 **son las razones entre las áreas de los sectores, y los coeficientes** a_1 y a_3 **son las razones entre las áreas de los triángulos. Por la segunda ley de Kepler, las áreas de los sectores son proporcionales a los intervalos de tiempo.**
Esto es:

$$b_1 = \tau_1 / \tau_{2,} \qquad (13.3.5)$$

y:

$$b_3 = \tau_3 / \tau_{2.} \qquad (13.3.6)$$

Así, se obtienen los coeficientes en la ecuación aproximada 13.3.2, para encontrar las distancias heliocéntricas en los instantes de las tres observaciones, y después refinarlos hasta satisfacer la ecuación exacta 13.2.5.

13.4 Segunda Ley de Kepler.

En la sección 13.3 hicimos uso de la 2da. Ley de Kepler, diciendo que el radiovector barre áreas iguales en tiempos iguales.

Explícitamente, la derivada del área barrida $\boldsymbol{B}_{\mathrm{i}}$ respecto del tiempo es:

$$\dot{B} = \tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{2}\sqrt{GMl}. \quad (13.4.1).$$

Analizaremos esto como un problema de dos cuerpos y en consecuencia ignoraremos las perturbaciones planetarias. Sin embargo, vale la pena recordarlas de la sección 9.5 del Capítulo 9, especialmente las ecuaciones: 9.5.17, 9.4.3, 9.5.19, 9.5.20 y 9.5.21; y del preciso significado de los símbolos de la ecuación 13.4.1.
El símbolo " h " es el momento angular por unidad de masa del cuerpo orbitante, y " l " es el "semi latus rectum" de la órbita. Si nos referimos al centro de masa del sistema de los dos cuerpos como origen, entonces h y l son respectivamente : el momento angular por unidad de masa del cuerpo orbitante, y el semi latus rectum relativo al centro de masas del sistema, y M es la función de masa : $M^3/(M+m)^2$ del sistema, donde M y m son las masas del Sol y del planeta respectivamente.

En el Capítulo 9 usamos el símbolo $\mathcal{M}$ para la función de masa. Si nos referimos al centro del Sol como origen, entonces h y l son respectivamente el momento angular por unidad de masa del planeta y el semi latus rectum de la órbita planetaria relativa a aquél origen. M es la suma de las masas del Sol y del planeta, para la cual usamos M en el Capitulo 9. En algunos casos, tales como los asteroides mayores, es probablemente seguro considerar sus masas de cuerpos orbitantes como despreciables comparados con la masa del Sol. En tales casos no hay distinción entre el centro del Sol y el centro de masas del sistema de dos cuerpos, y M en la ecuación 13.4.1 es entonces simplemente la masa del Sol. (Note que no decimos que el baricentro del sistema solar entero coincide con el centro del Sol. La masa de Júpiter, por ejemplo, es próxima a la milésima parte de la masa del Sol, y esto no significa despreciable). El símbolo G representa la constante de gravitación universal. Su valor numérico no es conocido con gran precisión, y por ello tampoco se conoce con exactitud la masa del Sol. El valor aproximado de G es:

$$G = 6{,}672 \,.\, 10^{-11} \text{ N m}^2\text{ kg}^{-2}\,, \text{ y}$$

$$M = 1{,}989 \,.\, 10^{+30} \text{ kg.}$$

El producto GM, sí es conocido con gran precisión:

$$GM = 1{,}32712438 \,.\, 10^{+20} \text{ m}^3\text{ s}^{-2}.$$

Definición:

Hasta junio de 2012, la unidad astronómica de distancia (UA) se definía como el radio de una órbita circular en el que un cuerpo de masa despreciable, en ausencia de perturbaciones planetarias, se movía alrededor del Sol con una velocidad angular de:

0,01720209895	rad. por día solar medio, ó
$1{,}99098367500 \,.\, 10^{-7}$	rad. s^{-1}, ó
0,98560766860°	grados sexagesimales por día solar medio.

Esta velocidad angular se denomina a veces “constante gaussiana”, y se representa con el símbolo k. Con esta definición, el valor de la unidad astronómica era aprox.

$$1 \text{ UA} = 1{,}49597870700 \,.\, 10^{+11} \text{ m.}$$

Sin embargo, en Junio de 2012 la Unión Astronómica Internacional redefinió la unidad astronómica como 149 597 870 700 metros **exactamente**. Esto significa que un cuerpo de masa despreciable en movimiento alrededor del Sol en una órbita circular, en ausencia de perturbaciones planetarias, se mueve con una velocidad angular de aproximadamente:

0,017 202 098 95 radianes por día solar medio, ó
$1{,}990\,675\,983 \cdot 10^{-7}$ rad s^{-1}, ó
0,985 607 668 60 grados sexagesimales por día solar medio.

Pero ahora, esta velocidad angular k con la nueva definición de la UA, ya no es considerada como una de las constantes astronómicas fundamentales. Además, la IAU también ha recomendado que la abreviatura oficial de la unidad astronómica debe ser “ua”.

Si se equiparase la aceleración centrípeta de un cuerpo hipotético que se moviese en una órbita circular de radio 1,000 [ua] a la velocidad angular $\boldsymbol{k}$,($=\omega$), con la fuerza gravitacional (Fg) sobre este por la unidad de masa, (recordando que: $Fcp = \boldsymbol{m}\omega^2 a$ y $Fg = \boldsymbol{GmM}/a^2$) veríamos que:

$Fcp = Fg$, $\quad \boldsymbol{m}\omega^2 a = \boldsymbol{GmM}/a^2$, $\quad$ o bien $\boldsymbol{m}k^2 a = \boldsymbol{GmM}/a^2$, $\quad k^2\, a = \boldsymbol{GM} / a^2$,

así: $$\boldsymbol{GM} = k^2\, a^3 \qquad (13.4.2)$$

donde $\boldsymbol{a}$ es la medida lineal de la unidad astronómica y $\boldsymbol{k}$ es la constante gaussiana.

13.5 Coordenadas.

Necesitaremos hacer uso de varios sistemas de coordenadas, y reproduciremos aquí las descripciones de la sección 10.7 del Capítulo X, estas son:

13.5.1 - Coordenadas heliocéntricas de la órbita.

Plano de la órbita heliocéntrica:

Es el plano orbital del astro, que pasa por el centro del Sol. Es un plano ideal, pues el movimiento que suponemos es no perturbado. El sistema de coordenadas se designa por los ejes x,y,z, y el Sol (cuyo símbolo es ⊙) ocupa el origen de este sistema, que se simboliza así:

$$\odot xyz,$$

(Ver Fig. 3). con el eje x dirigido hacia el perihelio del astro. Las coordenadas polares en el plano de la órbita son: la distancia heliocéntrica “r” y la

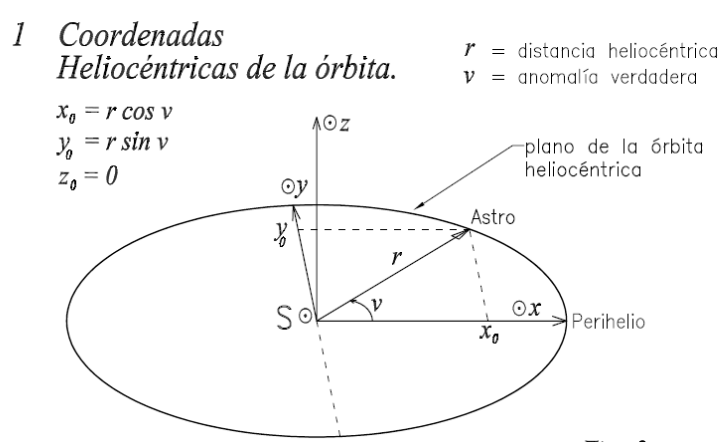


Fig. 3

anomalía verdadera “v”, que es un ángulo que nace en el eje $\odot x$.
La componente z del astro es necesariamente cero, entonces:

$$x = r \cos v, \qquad y = r \operatorname{sen} v, \qquad z = 0.$$

13.5.2 - Coordenadas Eclípticas Heliocéntricas:

El plano principal de referencia es el de la Eclíptica, es decir, el plano de la órbita de la Tierra, con el Sol en el origen (Fig. 4). El sistema de coordenadas rectangulares se designa por $\odot XYZ$, con el eje $\odot X$ dirigido hacia el Primer Punto Aries ó simplemente Punto Aries “♈”, donde La Tierra, como si fuese vista por un observador desde el Sol, estaría situada sobre ó cerca del 22 del Septiembre.

Las coordenadas esféricas de este sistema son:

La distancia heliocéntrica: r,
La longitud eclíptica: λ, y
La latitud eclíptica: β.

Tal que:

$$X = r \cos \beta \cos \lambda \,,$$

$$Y = r \cos \beta \operatorname{sen} \lambda \,,$$

$$Z = r \operatorname{sen} \beta \,.$$

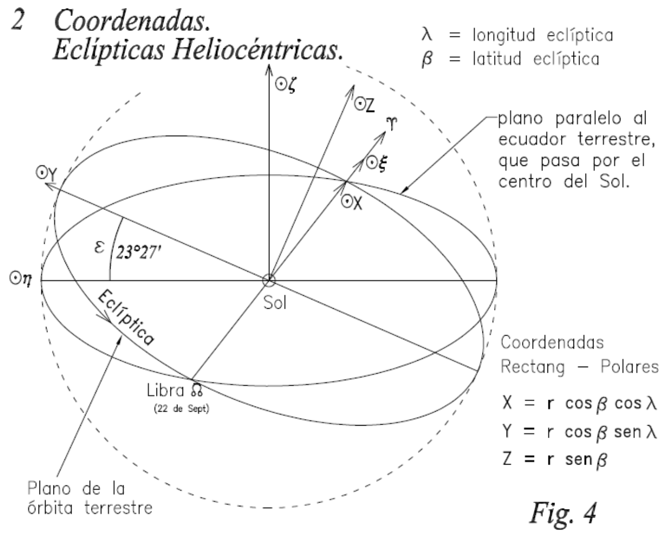


Fig. 4

13.5.3 - Coordenadas Ecuatoriales Heliocéntricas:

El plano principal es un plano paralelo al plano del ecuador terrestre, que pasa por el centro del Sol, que es el origen del sistema de coordenadas. Se designa con $\odot\xi\eta\zeta$, el eje $\odot\xi$ está dirigido hacia el Primer Punto Aries y en consecuencia es paralelo y coincidente con el eje $\odot X$.

El ángulo entre el eje $\odot Z$ y el eje $\odot\zeta$, es ε, la oblicuidad de la eclíptica. También es el ángulo que forman el plano XY (plano de la Eclíptica o de la órbita terrestre) y el xy (plano del ecuador terrestre). Ver Figura 5.
Les daremos uso para el cálculo de las distancias heliocéntricas, en componentes rectangulares.

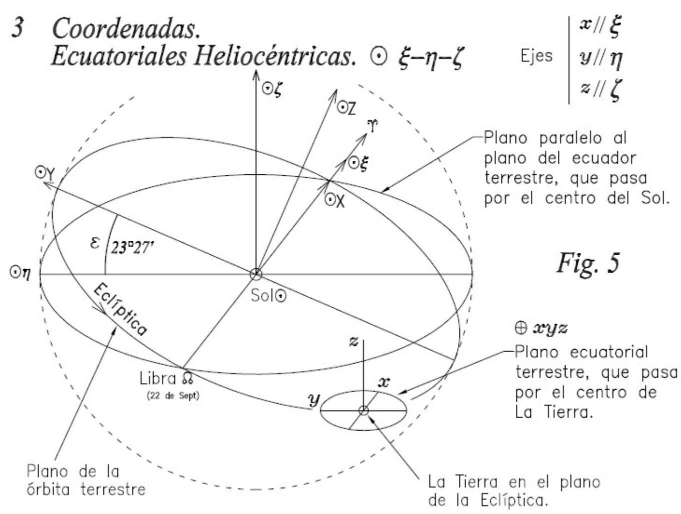


Fig. 5

13.5.4 - Coordenadas Ecuatoriales Geocéntricas:

Este sistema tiene su origen en el centro de La Tierra. El plano principal es el plano del ecuador terrestre. Se designa con $\oplus xyz$,y el eje $\oplus x$ está dirigido hacia el Punto Aries. Las coordenadas esféricas en este sistema son:

La distancia geocéntrica "Δ",
La ascensión recta "α", y
La declinación "δ".

En la Fig. 6 **La Tierra ocupa el centro de la esfera celeste. Se ha representado el Sol con su sistema de coordenadas sobre el plano de la Eclíptica.**
Las componentes rectangulares en este sistema son:

$$x = \Delta \cos \delta \cos \alpha ,$$
$$y = \Delta \cos \delta \ \text{sen}\ \alpha ,$$
$$z = \Delta \cos \delta .$$

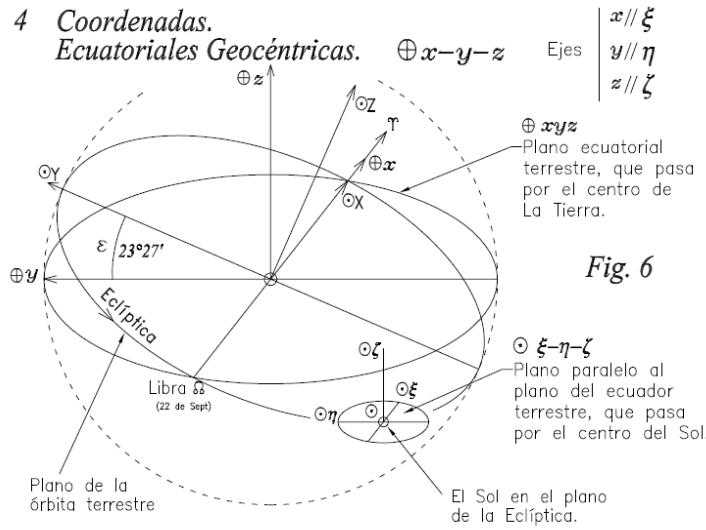


Fig. 6

13.5.5 - Relación entre Coordenadas Ecuatoriales Geocéntricas y Heliocéntricas:

Las ecuaciones de transformación de coordenadas en el sistema geocéntrico adoptado resultan sencillas de resolver, tan sólo un poco de álgebra y resolver un sistema de ecuaciones para encontrar el primer dato importante: la distancia geocéntrica Δ.
Antes de entrar en el planteo de las ecuaciones, veamos el esquema de Gauss, como fue planteado por él en 1801.

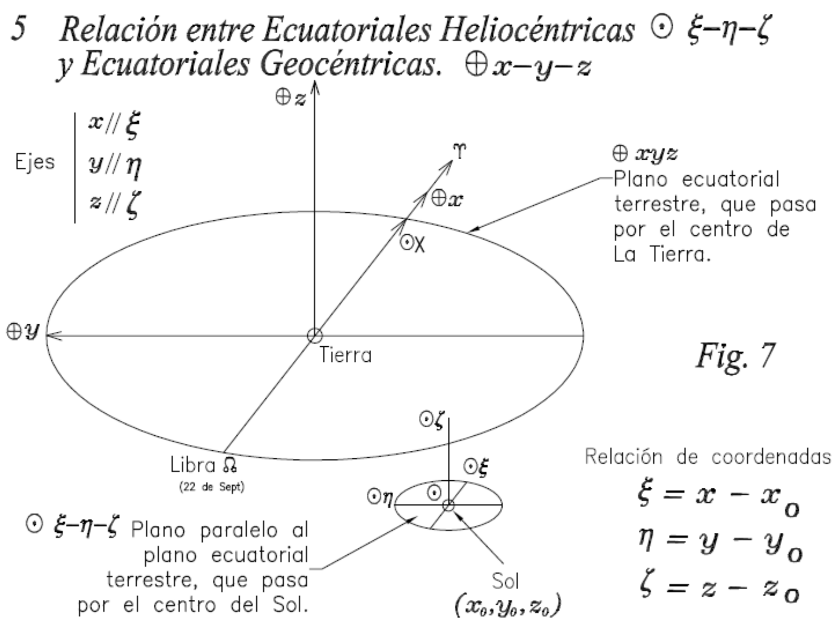
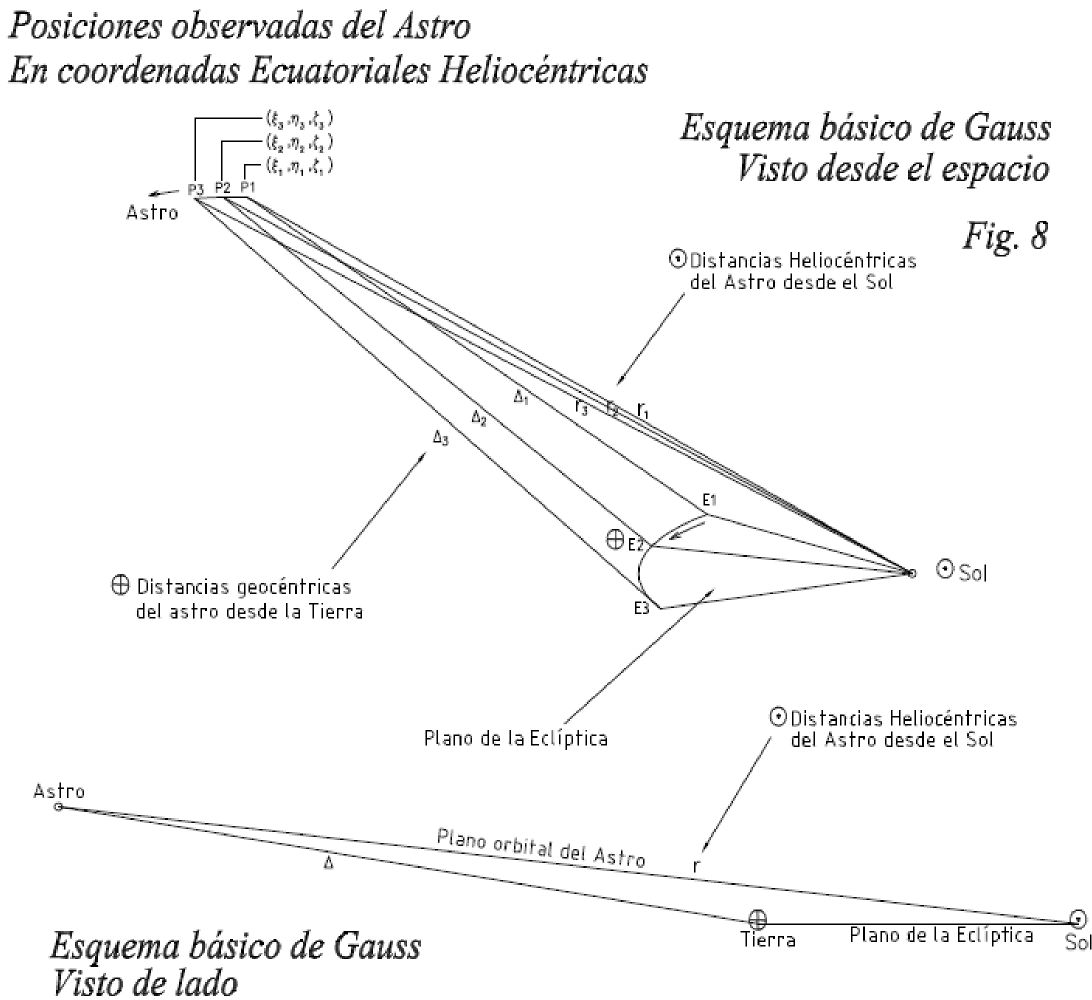


Fig. 7

13.5.6 - Esquema Básico de Gauss (simplificado):



El esquema intenta exponer las relaciones geométricas de la situación. Básicamente hay tres triángulos cuyos vértices están ocupados por el Sol, La Tierra, y el Astro del que se quiere determinar su órbita elíptica. Cada triángulo corresponde a una observación. Las que deberían estar hechas entre lapsos de tiempos convenientes. Hay que registrar en cada una de ellas, la ascensión recta, la declinación, y también el momento de tiempo expresado en Tiempo Terrestre (TT). ***(TT es un tiempo que fluye uniforme, basado en un promedio de muchos relojes atómicos, cada segundo tiene la misma duración que otro, así fue acordado en la reunión de UAI de 1991 en Argentina).***

Aunque parece conveniente usar las coordenadas eclípticas para este esquema, al momento de calcular resulta más conveniente usar coordenadas ecuatoriales, pues requieren menos complejidad de cálculo, evitando aplicar matrices para transformación de coordenadas eclípticas a ecuatoriales, y el resultado es igualmente bueno.

Veamos ahora cómo plantear el esquema para usar las coordenadas ecuatoriales.

13.5.7 - Esquema Básico de Gauss en Coord. Ecuatoriales Geocéntricas y Heliocéntricas:

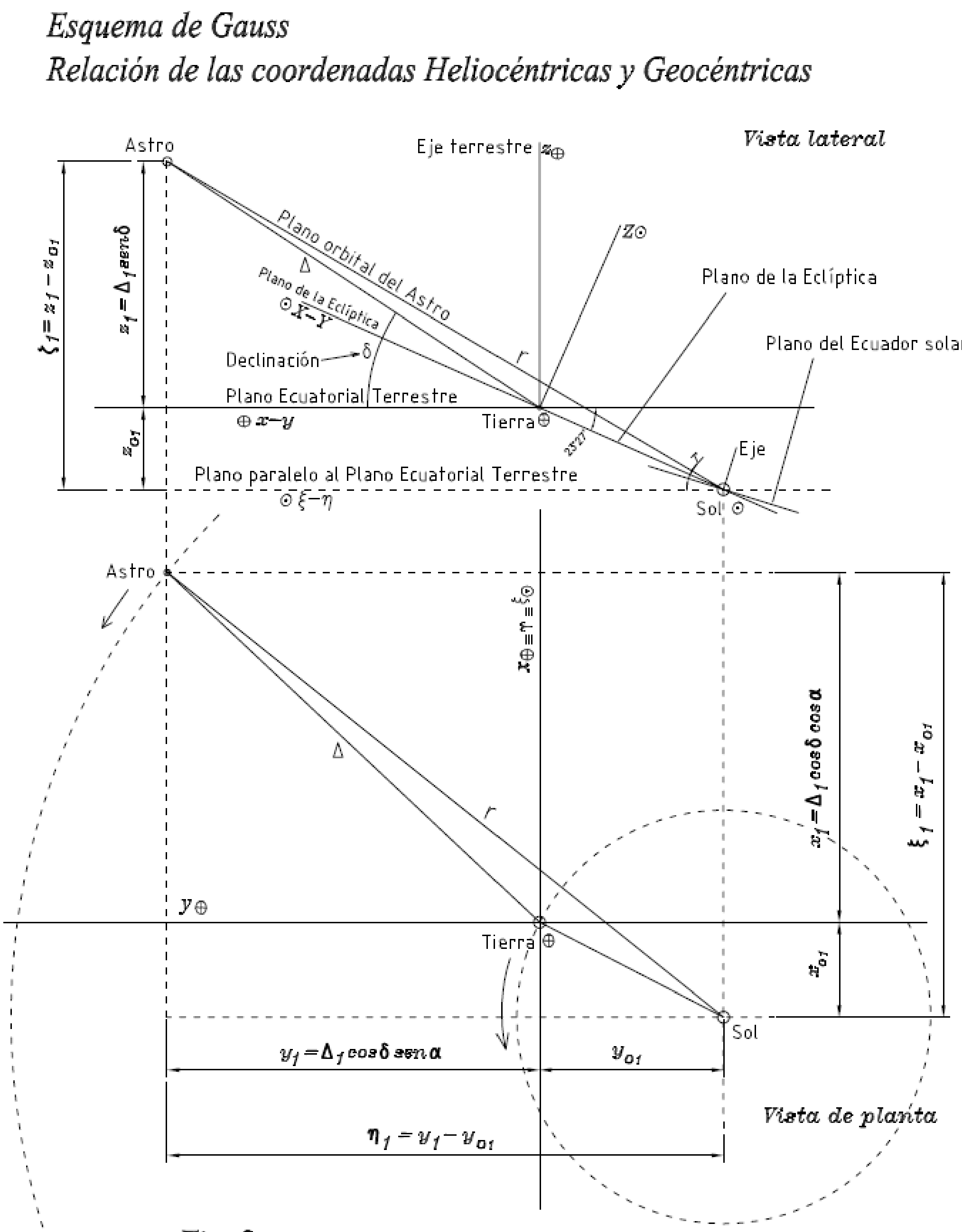
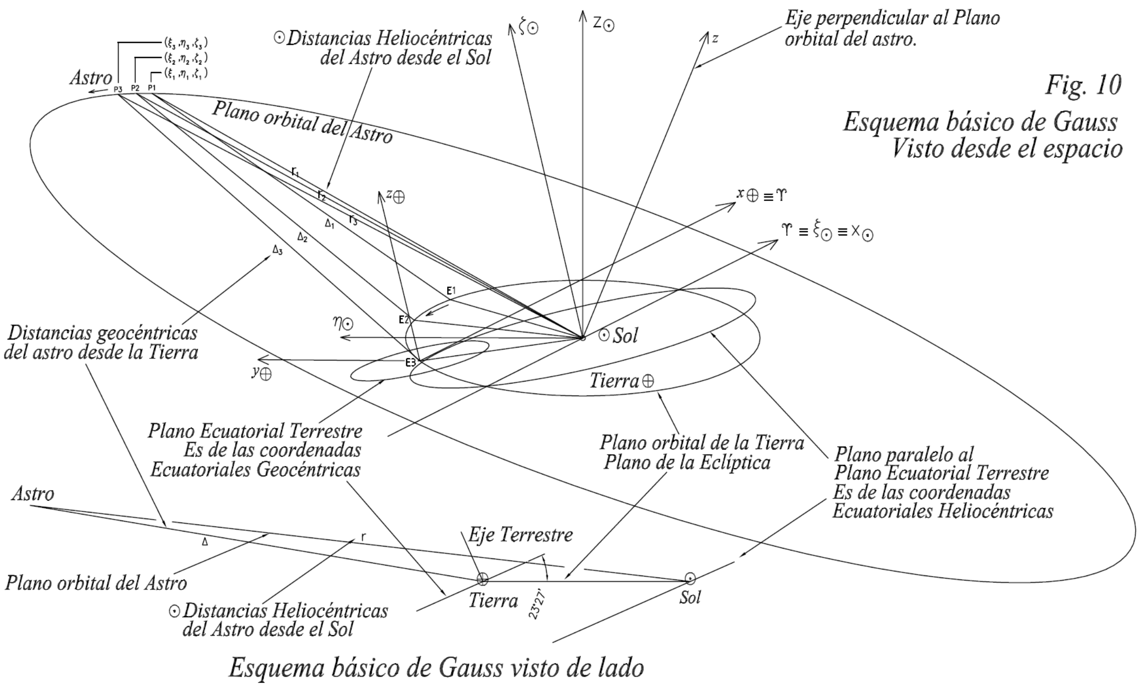


Fig. 9

Si se observa la Fig. 9, se verá que el triángulo básico de la Fig. 8 permanece igual, porque las posiciones relativas entre los astros son las mismas. La diferencia es que ahora el plano a usar es el plano del ecuador terrestre, y las coordenadas serán Ecuatoriales Geocéntricas. Por el Sol pasa un plano que es paralelo al plano ecuatorial terrestre, pero NO ES el plano del ecuador del Sol. Para el cálculo de la distancia heliocéntrica del Astro, esta diferencia no es importante. Una visión espacial completa del esquema se ha intentado mostrar en la Fig. 10.

13.5.8 - Esquema Básico de Gauss en el espacio (Fig. 10):

Observar la posición de los planos para este determinado momento de tiempo. Si nos ayudamos con las vistas de la Fig. 9, resultará mas clara la visión de las relaciones de las coordenadas. Así podremos hacer el planteo de las ecuaciones necesarias para encontrar las distancias geocéntricas primero, y después las distancias heliocéntricas del astro.



13.5.9- Planteo de las Ecuaciones:

El sistema de ecuaciones referido a la Fig. 9 es el siguiente: (vale para todos los cuerpos celestes del sistema solar, desde una partícula de polvo hasta un planeta gigante).

$$x = \Delta \cos\alpha \cos\delta = l\Delta = x_o + \xi, \qquad 13.5.1$$

$$y = \Delta \sin\alpha \cos\delta = m\Delta = y_o + \eta, \qquad 13.5.2$$

$$z = \Delta \sin\delta = n\Delta = z_o + \zeta. \qquad 13.5.3$$

Aquí l, m, y n son los cosenos directores de los radiovectores geocéntricos del planeta. Estos ofrecen un camino alternativo a (α, δ) para expresar la dirección del astro como se ve desde la Tierra. Los cosenos directores no son independientes, y están relacionados por:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \qquad 13.5.4$$

Los símbolos x_0, y_0, y z_0 son las coordenadas ecuatoriales geocéntricas del Sol. Suele usarse para estas coordenadas el símbolo solar ⊙.

Fin de la Primera Parte.