



# CAPÍTULO I

## TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

---

### Índice del capítulo

- § Preliminares
  - § Fórmula del coseno
  - § Fórmula del seno
  - § Otras fórmulas
  - § Polaridad
  - § Triángulos esféricos
  - § Problemas propuestos
  - § Bibliografía
- 



# 1. Trigonometría esférica

Vamos a introducir unas nociones mínimas de trigonometría esférica para poder abordar el resto de la asignatura. Al contrario de otros textos, nuestra filosofía es la de intentar que las demostraciones no dependan demasiado de representaciones gráficas. Sin embargo en algunas secciones no hemos tenido más remedio que apelar a la intuición geométrica, para descargar algo las demostraciones de contenido algebraico. Algunas de las herramientas básicas en este capítulo son ciertas propiedades del producto escalar y del producto vectorial en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.1. Preliminares

La geometría que queremos estudiar en esta sección es la *geometría esférica*. Si consideramos una esfera  $S$  de centro  $O$  en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ , y dos puntos  $A, B \in S$  distintos, se demuestra en geometría de variedades que la curva de longitud mínima que pasa por dichos puntos es un arco de la circunferencia centrada en  $O$ , que pasa por  $A$  y  $B$ . Por eso consideraremos el espacio  $E$  cuyos puntos son los puntos de  $\mathbb{R}^3$  situados sobre  $S$  y cuyas rectas son las circunferencias contenidas en  $S$  con centro en  $O$ . Llamaremos a estas circunferencias *círculos máximos* porque son las circunferencias de radio máximo contenidas en  $S$ . Utilizaremos la denominación círculo para lo que en realidad es una circunferencia, siguiendo la tradición habitual en astronomía.

Supongamos ahora que  $S = S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$  donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclídea. Tomemos tres vectores  $u, v, w \in S^2$  (diferentes dos a dos y no coplanarios). Consideraremos entonces el *triángulo esférico* determinado por dichos tres vectores. Como elementos notables de dicho triángulo tenemos los vectores  $u, v$  y  $w$  (que se pueden identificar con los vértices del triángulo). En cada uno de los vértices hay un ángulo delimitado por los pares de rectas  $a, b$  y  $c$ . Adoptamos el ya clásico convenio de denotar el ángulo opuesto al lado  $a$  con la letra  $A$  y análogamente con los otros vértices del triángulo.

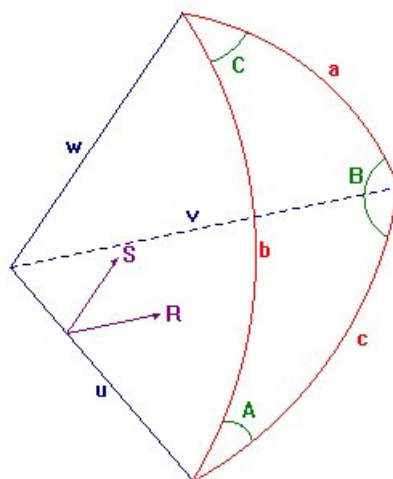


Figura I.1

Figura 1. Elementos de un triángulo esférico.

¿Cómo medir el ángulo  $A$  limitado por las rectas  $b$  y  $c$ ? En geometría esférica, dicho ángulo es el ángulo diedro formado por los planos  $\langle u, w \rangle$  y  $\langle u, v \rangle$ . Es bien conocido que para medir dicho ángulo tenemos que determinar vectores  $R \in \langle u, v \rangle$  y  $S \in \langle u, w \rangle$  tales que  $R$  y  $S$  sean perpendiculares a la recta de intersección  $\langle u, w \rangle \cap \langle u, v \rangle = \langle u \rangle$ . Entonces el ángulo determinado por  $R$  y  $S$  será la medida de  $A$ . El lector puede comprobar sin dificultad que tal medida coincide con el ángulo que forman en el extremo de  $u$ , las tangentes a las rectas  $c$  y  $b$ .

¿Cómo se suele dar la medida de los arcos  $a$ ,  $b$  y  $c$ ? Es costumbre en trigonometría esférica dar la medida de dichos arcos en grados (sexagesimales). Téngase en cuenta que el radio de la esfera es 1 por lo que los arcos  $a$ ,  $b$  y  $c$  coinciden con sus respectivos ángulos centrales.

## 1.2. Fórmula del coseno

Considérese una esfera (de radio unidad) centrada en el origen de coordenadas del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^3$ . Sean  $u$ ,  $v$  y  $w$  tres vectores distintos no coplanarios de norma unidad que definen sendos puntos sobre la esfera. Si denotamos por  $x \cdot y$  el producto escalar en  $\mathbb{R}^3$  se tendrá trivialmente  $u \cdot u = v \cdot v = w \cdot w = 1$ . Definamos los ángulos  $a, b, c \in (0, \pi)$  de modo

que

$$\begin{aligned}v \cdot w &= \cos a \\w \cdot u &= \cos b \\u \cdot v &= \cos c.\end{aligned}$$

Entonces  $R := v - (v \cdot u)u$  está en el plano  $\langle u, v \rangle$  y se comprueba de inmediato que  $R \cdot u = 0$ . Por lo tanto  $R$  es perpendicular a  $u$ . Del mismo modo,  $S = w - (w \cdot u)u$  está en el plano  $\langle w, v \rangle$  y  $S \cdot u = 0$  implicando que  $S$  es normal a  $u$ . Ahora bien,  $R \cdot R = 1 - (v \cdot u)^2 = 1 - \cos^2 c = \text{sen}^2 c$ . Por lo tanto  $\|R\| = \text{sen } c$  (y análogamente  $\|S\| = \text{sen } b$ ). Entonces

$$\frac{R}{\|R\|} = \frac{v - \cos c \, u}{\text{sen } c}, \quad \frac{S}{\|S\|} = \frac{w - \cos b \, u}{\text{sen } b}$$

y además el producto escalar de  $\frac{R}{\|R\|}$  por  $\frac{S}{\|S\|}$  es el coseno del ángulo que forman, es decir  $\cos A$ . Teniendo en cuenta las expresiones que hemos encontrado para  $\frac{R}{\|R\|}$  y  $\frac{S}{\|S\|}$ , tenemos

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\text{sen } c \text{ sen } b}.$$

Manipulando un poco esta última expresión encontramos la *ley de los cosenos*:

$$\cos a = \text{sen } b \text{ sen } c \cos A + \cos b \cos c.$$

## 1.3. Fórmula del seno

A partir de la fórmula *del coseno* tenemos

$$\text{sen } b \text{ sen } c \cos A = \cos a - \cos b \cos c$$

y elevando al cuadrado:

$$\begin{aligned}\text{sen}^2 b \text{ sen}^2 c (1 - \text{sen}^2 A) &= \cos^2 a + (1 - \text{sen}^2 b)(1 - \text{sen}^2 c) - 2 \cos a \cos b \cos c \\ \text{sen}^2 b \text{ sen}^2 c - \text{sen}^2 b \text{ sen}^2 c \text{ sen}^2 A &= \\ &= 2 - (\text{sen}^2 a + \text{sen}^2 b + \text{sen}^2 c) + \\ &+ \text{sen}^2 b \text{ sen}^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c\end{aligned}$$

Simplificando:

$$- \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c \operatorname{sen}^2 A = 2 - (\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c) - 2 \cos a \cos b \cos c.$$

Dividamos ahora entre  $-(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c)^2$  y obtenemos una expresión cuyo miembro de la derecha es invariante frente a permutaciones de los ángulos  $a$ ,  $b$  y  $c$ :

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{2 - (\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c) - 2 \cos a \cos b \cos c}{-(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c)^2}.$$

Esto permite concluir la *ley de los senos* que afirma:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} c}.$$

Además la demostración que hemos dado para la ley de los senos nos proporciona el valor

$$\sqrt{\frac{-2 + (\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen}^2 b + \operatorname{sen}^2 c) + 2 \cos a \cos b \cos c}{(\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c)^2}},$$

común para las tres fracciones.

## 1.4. Otras fórmulas

La fórmula *del coseno* se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B &= \cos b - \cos c \cos a = \\ &= \cos b - \cos c (\cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A) =, \\ &= \operatorname{sen}^2 c \cos b - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos c \cos A \end{aligned}$$

y dividiendo por  $\operatorname{sen} c$  tenemos:

$$\operatorname{sen} a \cos B = \cos b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \cos c \cos A,$$

que es conocida como la *fórmula análoga*. Por otra parte, si aplicamos la fórmula del coseno dos veces tenemos:

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B \\ &= \cos a (\cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C) + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B. \\ &= \cos^2 a \cos b + \operatorname{sen} a \cos a \operatorname{sen} b \cos C + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sin^2 a \cos b = \sin a \cos a \sin b \cos C + \sin a \sin c \cos B$$

y dividiendo por  $\sin a \sin b$  tenemos

$$\sin a \cot b = \cos a \cos C + \frac{\sin c}{\sin b} \cos B,$$

pero a partir de la fórmula del seno se tiene  $\frac{\sin c}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin B}$  luego la fórmula anterior se puede escribir como:

$$\sin a \cot b = \cos a \cos C + \sin C \cot B,$$

o bien

$$\cos a \cos C = \sin a \cot b - \sin C \cot B,$$

expresión que se conoce como la fórmula de las *cuatro partes*.

## 1.5. Polaridad

Dado un triángulo esférico definido por la terna de vectores  $T = \{u, v, w\}$  (tales que  $\det(u, v, w) > 0$ ), llamamos *triángulo polar* del anterior, al triángulo definido por

$$T' = \left\{ \frac{v \times w}{\|v \times w\|}, \frac{w \times u}{\|w \times u\|}, \frac{u \times v}{\|u \times v\|} \right\}.$$

Esta definición encierra una pequeña tarea para el lector: si  $\{u, v, w\}$  define un triángulo esférico, entonces el conjunto anterior es linealmente independiente (y recíprocamente). Por lo tanto hay que demostrar que el nuevo conjunto  $T'$  es también linealmente independiente.

Una vez resulta la cuestión anterior, vamos a convenir en denotar al triángulo polar  $T'$  de la forma  $T' = \{u', v', w'\}$  donde  $u' = \frac{v \times w}{\|v \times w\|}$ ,  $v' = \frac{w \times u}{\|w \times u\|}$ , y  $w' = \frac{u \times v}{\|u \times v\|}$ . Se tiene entonces trivialmente el siguiente conjunto de relaciones de perpendicularidad:

$$u' \perp \langle v, w \rangle, \quad v' \perp \langle u, w \rangle, \quad w' \perp \langle u, v \rangle$$

y sus duales

$$u \perp \langle v', w' \rangle, \quad v \perp \langle u', w' \rangle, \quad w \perp \langle u', v' \rangle.$$

Supongamos que los triángulos  $T$  y  $T'$  están representados con sus elementos notables como en la siguiente figura:

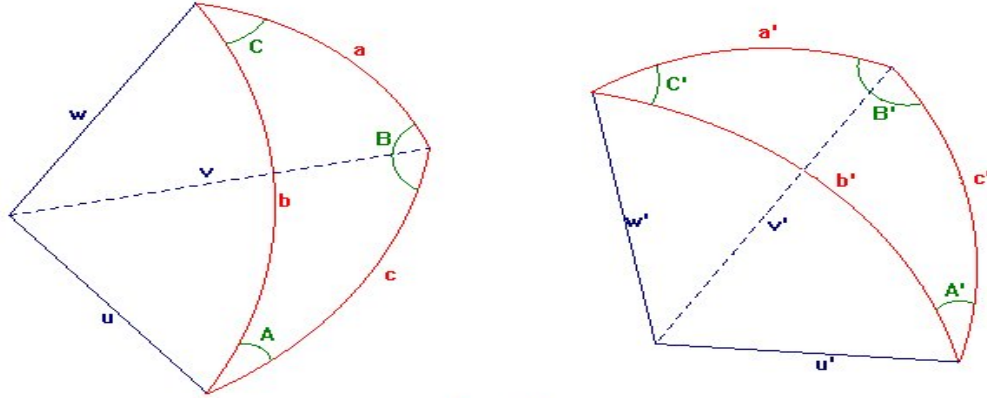


Figura 1.2

Figura 2. Un triángulo y su polar.

Hemos representado, para mayor facilidad visual, cada triángulo independientemente uno del otro. Entonces el conjunto de relaciones de perpendicularidad anterior se traduce en el siguiente conjunto de relaciones:

$$\begin{aligned} u' \perp a, \quad v' \perp b, \quad w' \perp c \\ u \perp a', \quad v \perp b', \quad w \perp c'. \end{aligned}$$

Podemos enunciar entonces el siguiente:

**Teorema I.1** Si  $T$  y  $T'$  son un triángulo esférico y su dual como en la figura, entonces

$$\begin{aligned} A' &= 180^\circ - a, \quad B' = 180^\circ - b, \quad C' = 180^\circ - c, \\ A &= 180^\circ - a', \quad B = 180^\circ - b', \quad C = 180^\circ - c'. \end{aligned}$$

Dem. Sea  $L$  el punto de intersección de la recta que contiene al lado  $a$  con la recta  $c'$  común a los ángulos  $A'$  y  $B'$  (véase el dibujo). Análogamente definimos el punto  $M$  de la recta  $b'$ .

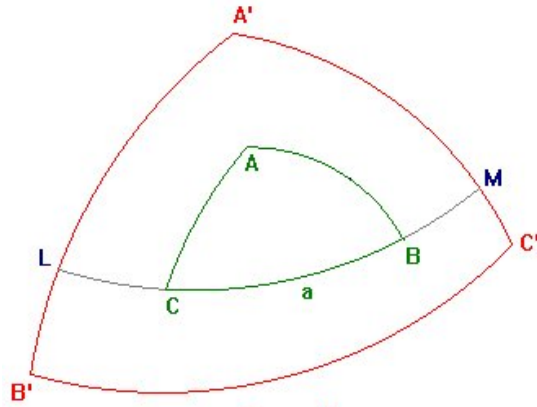


Figura I.3

Entonces, siendo  $O$  el centro de la esfera, el vector  $OL$  está en el plano  $\langle u', v' \rangle$  y es perpendicular a  $u'$  (esto último se debe a que  $OL \in \langle v, w \rangle$  mientras que  $u' \perp \langle v, w \rangle$ ). Del mismo modo  $OM \in \langle u', w' \rangle$  y  $OM \perp u'$ . Por lo tanto el valor del ángulo  $A'$  es el del ángulo que forman  $OL$  y  $OM$ . Pero dicho ángulo es la suma del ángulo que forman  $OL$  y  $v$  más el ángulo que forma  $v$  con  $w$  más el ángulo que forma  $w$  con  $OM$ . Por lo tanto  $A' = \text{ang}(OL, v) + \text{ang}(v, w) + \text{ang}(w, OM)$  como puede verse en el dibujo.

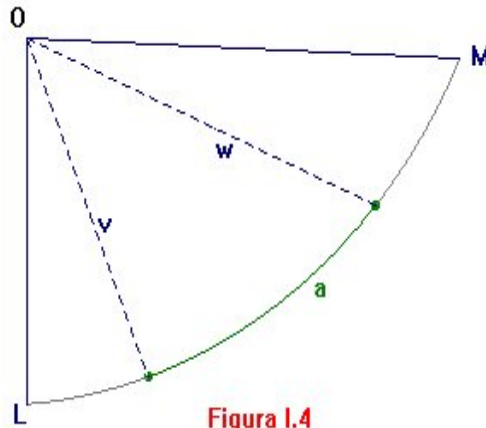


Figura I.4

Pero por otra parte, si volvemos a nuestro triángulo esférico junto con su polar de la figura I.3), tenemos que  $w = OC$  es perpendicular a la recta que contiene a  $A'$  y  $B'$  (esto no es más que una forma de decir lo que ya sabemos:  $w \perp \langle u', v' \rangle$ ). Por lo tanto el ángulo que forma  $w$  con  $OL$  es de  $90^\circ$ . Simétricamente el ángulo que forma  $v$  con  $OM$  también es  $90^\circ$ . Podemos



pues escribir:

$$\text{ang}(OL, w) = 90^\circ = \text{ang}(OL, v) + \text{ang}(v, w) = \text{ang}(OL, v) + a$$

$$\text{ang}(v, OM) = 90^\circ = \text{ang}(v, w) + \text{ang}(w, OM) = a + \text{ang}(w, OM).$$

En resumen

$$\begin{aligned} A' &= \text{ang}(OL, v) + \text{ang}(v, w) + \text{ang}(w, OM) = \text{ang}(OL, v) + a + \text{ang}(w, OM) \\ &= 90^\circ + \text{ang}(w, OM) = 90^\circ + 90^\circ - a = 180^\circ - a. \end{aligned}$$

Análogamente se demuestran las igualdades  $B' = 180^\circ - b$  y  $C' = 180^\circ - c$ . El resto de las igualdades que tenemos que demostrar son inmediatas aplicando las ya demostradas al polar  $T'' = T$  de  $T$ . ■

Se pueden obtener algunas consecuencia inmediatas de la polaridad aplicando las fórmulas que hemos demostrado al triángulo polar de uno dado. Si  $T$  es el triángulo de ángulos  $A, B, C$  y lados  $a, b, c$ , sabemos que el triángulo polar  $T'$  tiene por ángulos  $180^\circ - a, 180^\circ - b, 180^\circ - c$ , y por lados  $180^\circ - A, 180^\circ - B, 180^\circ - C$ . Entonces la fórmula del coseno aplicada a  $T'$  no dice

$$-\cos C = \cos B \cos A - \sin B \sin A \cos c$$

y por lo tanto podemos obtener el coseno de un ángulo conociendo los otros dos y el lado opuesto al ángulo. La polaridad es una herramienta interesante ya que todas las fórmulas demostradas tiene un versión polar que es interesante salvo en el caso de la fórmula de los senos que es autopolar.

Otro corolario de la polaridad es la posibilidad de resolver el triángulo esférico del que se conocen sólo los tres ángulos. Tal triángulo no se puede resolver en geometría euclídea por tener infinitas soluciones. Pero en trigonometría esférica pasaríamos al triángulo polar del que conoceríamos entonces sus tres lados. Las fórmulas que hemos estudiado en este capítulo permiten resolver el triángulo conocidos sus tres lados y polarizando de nuevo obtendríamos

la solución del triángulo conocidos sus tres ángulos. En la sección siguiente nos vamos a plantear los diferentes casos que se pueden dar en la resolución de triángulos esféricos.

## 1.6. Resolución de triángulos esféricos

**Triángulo LLL.** En este primer apartado consideraremos el problema en que se conocen los lados  $a, b$  y  $c$  de un triángulo esférico y nos planteamos conocer los ángulos  $A, B$  y  $C$ . La fórmula del coseno nos permitirá determinar uno de los ángulos y la del seno los restantes. Hagámoslo en un supuesto práctico. Sea el triángulo tal que  $a = 15^\circ 12'$ ,  $b = 20^\circ$ , y  $c = 19^\circ 1'$ . Entonces como  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$  tenemos

$$A = \arccos \left( \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right) = 46^\circ 34' 27.5741''.$$

Ahora la fórmula de los senos nos da

$$\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}, \quad \sin C = \frac{\sin A \sin c}{\sin a},$$

lo que nos permite resolver el problema por completo.

**Triángulo LLA-1.** Se conocen  $a, b$  y  $A$  (daría igual conocer  $a, b$  y  $B$ ). En este caso el teorema del seno nos da  $\sin B = \frac{\sin A \sin b}{\sin a}$ . Se podría aplicar ahora alguna fórmula como las *analogías de Napier* que nos darían la solución directamente. Pero para no complicar mas este capítulo recurriremos al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \end{cases}$$

donde todo es conocido excepto  $\sin c$  y  $\cos c$ .

Otra posibilidad es hacer uso de la fórmula del coseno que nos produce una ecuación del tipo

$$a_1 \cos c + a_2 \sin c = a_3,$$

donde la incognita es  $c$ . Entonces haciendo uso de las transformaciones  $\operatorname{sen} c = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos c = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  donde  $t = \tan \frac{c}{2}$ , llegamos a que la solución viene dada por la igualdad

$$\tan \frac{c}{2} = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}}{a_1 + a_3}.$$

**Triángulo LLA-2.** Se conocen  $a, b$  y  $C$ . Este caso es más sencillo: la fórmula del coseno nos da directamente  $c$  y ahora la fórmula de los senos nos proporciona los valores de  $A$  y  $B$ .

**Resto de los casos.** Nos falta por analizar los casos AAL y AAA, pero éstos se resuelven pasando al triángulo polar que será de alguno de los casos LLA-1, LLA-2, o LLL ya estudiados.

## 1.7. Problemas propuestos

**Problema 1.** En la esfera de radio unidad  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , se definen los siguiente elementos:

- (i) El *ecuador* como la intersección de  $S^2$  con el plano  $z = 0$ . El ecuador es un círculo máximo que divide a  $S^2$  en el *hemisferio norte* definido como

$$S_+^2 := \{(x, y, z) \in S^2 : z > 0\},$$

y el *hemisferio sur*  $S_-^2$  cuyos puntos tienen coordenada  $z$  estrictamente negativa.

- (ii) El *meridiano cero* como la intersección de  $S^2$  con el plano  $y = 0$ . Este círculo máximo divide a  $S^2$  en dos semiesferas. Los puntos  $(x, y, z)$  de  $S^2$  con  $y < 0$  se dice que están al *oeste* del meridiano. Aquellos puntos  $(x, y, z)$  de  $S^2$  con  $y > 0$  se dicen al *este* del meridiano cero.
- (iii) El *polo norte* como el punto  $N = (0, 0, 1)$  y el *polo sur*  $S$  como su opuesto.
- (iv) La *colatitud* de un punto  $X$  cualquiera de la esfera, como la medida del ángulo  $\widehat{NOX}$  (de modo que  $N$  y  $S$  tienen colatitud  $0$  y  $180^\circ$  respectivamente).

- (v) Se define la *latitud*  $\phi$  de un punto del hemisferio norte como el complementario de su colatitud:  $\phi = 90 - \text{colatitud}$ . La latitud de un punto  $X$  del hemisferio sur es la opuesta de la latitud de  $-X$ . De este modo la latitud de  $N$  sería  $90^\circ$  mientras que la de  $S$  sería  $-90^\circ$ .
- (vi) El conjunto de todos los puntos de  $S^2$  con la misma latitud se llama *paralelo*. Es una circunferencia cuyo plano es paralelo al ecuador.
- (vii) Se define la *longitud* de un punto  $X$  al este del meridiano cero como el valor del ángulo  $\widehat{YRX}$  donde  $Y$  es el único punto del meridiano cero que tiene la misma latitud que  $X$ , y  $R$  es el centro del paralelo que pasa por  $X$  e  $Y$ . Por su parte la longitud de un punto  $X$  al oeste del meridiano cero es el opuesto del valor del ángulo  $\widehat{YRX}$  (donde  $Y$  es como antes). De este modo la longitud varía de  $0$  a  $180^\circ$  para puntos del oeste, y de  $-180^\circ$  a  $0$  para los puntos del este.

Encuéntrense expresiones analíticas que expresen las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  de un punto de  $S^2$  en función de la latitud y la longitud de dicho punto (podemos simplificar suponiendo por ejemplo que el punto está en el hemisferio norte y al este del meridiano cero). Recíprocamente, se pide expresar latitud y longitud en función de las coordenadas cartesianas.

**Problema 2.** Demuéstrese que el triángulo polar  $T''$  del polar  $T'$  de un triángulo esférico  $T$ , es el propio  $T$ .

**Problema 3.** En la esfera  $S$  de centro  $O$  se supone dada una recta esférica  $r$  como intersección de un plano  $\Pi$  (que pasa por  $O$ ) con la propia esfera  $S$ . Se definen los *polos* de  $r$  como los puntos de intersección de la perpendicular a  $\Pi$  por  $O$  con  $S$ . De forma dual, si  $P$  es un punto de la esfera, se define su *recta polar* como la intersección del plano ortogonal a  $OP$  que pasa por  $O$  con la esfera. Demuéstrese que si tres puntos están alineados en una recta esférica  $r$ , entonces sus rectas polares inciden en un polo de  $r$ . Demuéstrese la propiedad dual de la que acabamos de enunciar.

**Problema 4.** Demuéstrese que la noción de triángulo polar que se ha dado en este capítulo es equivalente a la siguiente definición de corte más

geométrico: Dado un triángulo esférico  $T$  de vértices  $P, Q, R$  y lados  $p, q, r$  se define el polar  $T'$  como aquel cuyos vértices son  $P', Q', R'$  de modo que  $P'$  es el polo de  $p$  que está en el mismo hemisferio que  $P$  respecto del círculo máximo  $p$  (y análogamente se definen  $Q'$  y  $R'$ ).

**Problema 5.** En un triángulo esférico se conoce  $C = 90^\circ$ ,  $a = 119^\circ 46' 36''$  y  $B = 52^\circ 25' 38''$ . Determinar los valores de  $b, c$  y  $A$ . (Solución:  $48^\circ 26' 49''$ ,  $109^\circ 14'$  y  $113^\circ 10' 46''$ ).

**Problema 6.** En un triángulo esférico se conoce  $a = 57^\circ 22' 11''$ ,  $b = 72^\circ 12' 19''$ , y  $C = 94^\circ 1' 49''$ . Determinar los valores de  $c, A$  y  $B$ . (Solución:  $83^\circ 46' 32''$ ,  $57^\circ 40' 45''$  y  $72^\circ 49' 50''$ ).

**Problema 7.** En un triángulo esférico se conoce  $c = 90^\circ$ ,  $B = 62^\circ 20' 42''$ , y  $a = 136^\circ 19'$ . Determinar los valores de  $A, C$  y  $b$ . (Solución:  $139^\circ 46' 13''$ ,  $69^\circ 14' 45''$  y  $71^\circ 18' 9''$ ).

**Problema 8.** Dos barcos  $X$  e  $Y$  viajan a lo largo de sendos paralelos de latitud  $48^\circ$  Norte y  $15^\circ$  Sur respectivamente. Se sabe que en todo momento los dos barcos están en el mismo meridiano de longitud. Si la velocidad de  $X$  es de  $15$  km/h, encuéntrase la velocidad de  $Y$ .

**Problema 9.** Éste, no es en realidad un problema de trigonometría esférica. Pero es el fundamento del cálculo del punto de mayor latitud en un círculo máximo: consideremos un círculo máximo que no sea el ecuador ni un meridiano. Demuéstrese que el punto de mayor latitud de dicho círculo es aquel en el que el círculo máximo corta perpendicularmente a los meridianos.

**Problema 10.** Pruébese que dos lados de un triángulo esférico son iguales si y sólo si sus ángulos opuestos lo son.

**Problema 11.** En un triángulo esférico isosceles, escribase:

- (i) La expresión del lado desigual en función del lado de valor repetido y del ángulo comprendido.
- (ii) Escribase en función de las mismas variables el valor del ángulo repetido.

**Problema 12.** Supónganse que  $P$  y  $Q$  son dos puntos con la misma latitud  $\phi$  y cuya diferencia de longitudes es  $2l$ . Sea  $X$  el punto del círculo

máximo que pasa por  $P$  y  $Q$  que tiene latitud máxima. Escribase dicha latitud máxima en función de  $\phi$  y  $l$ .

