



CAPÍTULO V

ÓRBITAS PLANETARIAS

Índice del capítulo.

- § El problema de los dos cuerpos
 - § Leyes de Kepler
 - § Consideraciones adicionales
 - § Un caso real
 - § Problemas propuestos
 - § Bibliografía
-



ÓRBITAS PLANETARIAS

El objeto de este capítulo es el cálculo de la posición de los planetas u otros objetos sometidos a la influencia gravitatoria de un cuerpo central en relación a un sistema de coordenadas centrado en éste. En la primera sección se precisarán de algunas herramientas matemáticas que no suelen incluirse en los programas de la enseñanza media, razón por la cual se expondrán en esta breve introducción. Una de ellas es la de derivada de un vector.

Tanto en matemáticas como en física u otras disciplinas surgen de modo natural funciones $t \mapsto v(t)$ que a números reales t asocian vectores $v(t) = (x(t), y(t), z(t))$ del espacio euclídeo tridimensional \mathbb{R}^3 . Las expresiones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ vienen a indicar que las componentes del vector $v(t)$ dependen del parámetro t . Así, la aplicaciones componentes $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ y $t \mapsto z(t)$ no son sino las habituales funciones reales de variable real que se estudian en bachillerato. Pues bien, si estas tres funciones son derivables, por *derivada del vector* $v(t)$ (o *derivada de la función* $t \mapsto v(t)$) se entiende a la nueva función $t \mapsto v'(t)$ dada por $v'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Por ejemplo, la derivada de

$$v(t) = (3t^2, 2 \cos t, \frac{5}{t}) \quad \text{es} \quad v'(t) = (6t, -2 \sin t, \frac{-5}{t^2}).$$

Si $v(t)$ se concibe como la trayectoria tridimensional que sigue una partícula en función del tiempo t , se interpreta a su primera derivada $v'(t)$ como la velocidad en el instante t y a la segunda derivada $v''(t)$ como la aceleración.

Las reglas de derivación de vectores son pues fáciles de deducir. En particular se usarán las siguientes para los productos vectorial y escalar de funciones:

$$(V-1) \quad \begin{array}{ll} \text{Si } w(t) &= u(t) \times v(t), \text{ entonces } w'(t) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t), \\ \text{Si } w(t) &= u(t) \cdot v(t), \text{ entonces } w'(t) = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t), \end{array}$$

las cuales, como se observa, son semejantes a la derivada de un producto de funciones reales de variable real.

También nos encontraremos con igualdades en las que concurren funciones desconocidas (es decir, haciendo el papel de incógnitas) junto con sus derivadas, expresiones del tipo

$$v'(t) \cdot v(t) = 3t^2(v''(t) \cdot v''(t)),$$

llamadas *ecuaciones diferenciales*. No se pretende aquí, ni mucho menos, desarrollar un tratado sobre las ecuaciones diferenciales. Sobre todo porque las que aparecerán serán de fácil integración. Por ejemplo, a la vista de (V-1), es evidente que la igualdad

$$2u'(t) \cdot u''(t) = 3t^2 \text{ implica } u'(t) \cdot u'(t) = t^3 + C,$$

con C una constante de integración.

En las primeras dos secciones se seguirá, esencialmente, el argumento de [S. Green].

§1 El problema de los dos cuerpos

El asunto más importante de la mecánica celeste es el conocido como *problema de los n cuerpos*. En pocas palabras, este consiste en que, dados n cuerpos, cada uno con su correspondiente masa, situación y velocidad inicial, establecer cuáles serán, transcurrido un tiempo t , sus nuevas localizaciones y velocidades. Por desgracia, el problema general plantea ecuaciones diferenciales demasiado complejas. Incluso en el caso de tres cuerpos, solo están bien estudiadas ciertas soluciones para casos específicos. Sin embargo, no es demasiado difícil abordar la cuestión para dos cuerpos solitarios a los que se supone libres de influencias gravitacionales distintas de las que ejercen uno sobre el otro. La clave, como el lector puede intuir, se encuentra en la ley de Newton

$$(V-2) \quad \vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r},$$

donde \vec{F} es el vector fuerza ejercida por un cuerpo de masa m_1 sobre otro cuerpo de masa m_2 separado del primero por un vector espacio \vec{r} . Por r

se ha denotado al módulo $\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$ del vector \vec{r} , es decir, a la distancia que media entre los dos cuerpos. Aplicando módulos a ambos miembros de (V-2), resulta la conocida regla de que *dos cuerpos se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversa al cuadrado de la distancia que los separa*. Así pues, no debe de extrañar el cubo que afecta al denominador de (V-2), ya que se simplifica hasta un cuadrado al tomar módulos. La razón de proporcionalidad G que aparece es la denominada *constante de la gravitación universal*.

Como se demostrará en breve, la condición impuesta por la ley de Newton provoca que los cuerpos afectados sigan, bien trayectorias abiertas, bien órbitas cerradas. No sería del todo riguroso afirmar, en este último caso, que un cuerpo evoluciona alrededor del otro, sino que ambos giran en torno al centro de gravedad del sistema. Sin embargo, para simplificar el planteamiento, se adoptará el punto de vista del cuerpo más masivo, por ejemplo, el cuerpo S con masa m_1 , tomándolo como centro de un sistema de coordenadas. Nuestro objetivo será, entonces, encontrar la ecuación del movimiento del segundo cuerpo P en referencia a este sistema de coordenadas. Sean $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$ los vectores con origen en el centro de masas C y extremos respectivos en S y P (véase la figura V.1). Si se han escrito estos vectores en función del parámetro t , es para indicar que se trata de funciones vectoriales que dependen del tiempo, aunque, por regla general, se omitirá esta circunstancia a fin de simplificar la notación. La situación de equilibrio de fuerzas sobre el centro de gravedad C lleva a que

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0}.$$



Figura V.1

Habida cuenta de que nos interesa hallar la posición relativa de P respecto de S , sea $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Los movimientos de S y P obedecen a sendas

reglas

$$(V-3) \quad -\vec{F} = m_1 \vec{r}_1'' \quad \text{y} \quad \vec{F} = m_2 \vec{r}_2''.$$

Las igualdades de arriba se justifican sin más que recordar que la derivada segunda de la trayectoria es la aceleración. Adviértase que \vec{F} también es función de t . Combinando (V-2) y (V-3), se obtiene

$$\vec{r}'' = \vec{r}_2'' - \vec{r}_1'' = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r},$$

expresión que se simplifica a

$$(V-4) \quad \vec{r}'' = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r},$$

si se define $\mu = G(m_1 + m_2)$. Esta última ecuación diferencial, que rige el movimiento relativo de P respecto a S , es la que nos proponemos estudiar.

Si se efectúa el producto vectorial de ambos miembros de (V-4) por \vec{r} se tendrá $\vec{r} \times \vec{r}'' = \vec{0}$, lo cual indica, teniendo en cuenta (V-1), que el producto vectorial

$$(V-5) \quad \vec{r} \times \vec{r}'' = h,$$

de \vec{r} por \vec{r}'' es un vector constante \vec{h} . Esto permite introducir un sistema de ejes coordenados con origen en S y cuyo semieje z positivo tenga la dirección de \vec{h} . En tal sistema, tanto el vector de posición \vec{r} de P como su vector velocidad \vec{r}' están confinados en el plano xy . Por razones que se verán en breve, conviene recurrir, en dicho planos, a coordenadas polares. Entonces, las expresiones de \vec{h} , \vec{r} y \vec{r}' toman la forma

$$\begin{cases} \vec{h} = (0, 0, h), \\ \vec{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0), \\ \vec{r}' = (r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta, r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta, 0), \end{cases}$$

con r y θ funciones que dependen de t . Un cálculo directo prueba que $\vec{r} \cdot \vec{r}' = rr'$. Multiplicando ambos miembros de (V-4), ahora escalarmente por \vec{r}' se obtiene

$$2\vec{r}' \cdot \vec{r}'' = -2\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{r}' = -2\frac{\mu r'}{r^2}.$$

Y de nuevo por (V-1) resulta

$$(V-6) \quad \vec{r}' \cdot \vec{r}' = \frac{2\mu}{r} + C,$$

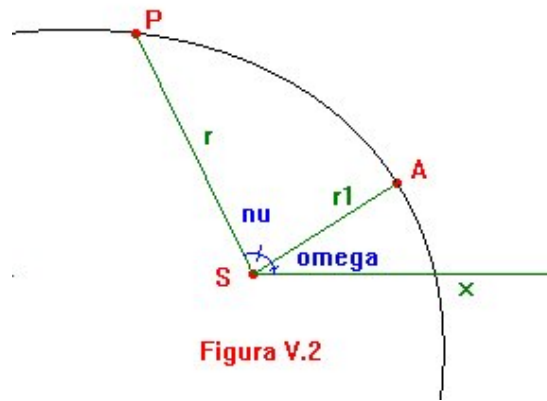
con C una constante de integración que los físicos interpretan como proporcional a la energía total del sistema. Expresando \vec{r} , \vec{r}' y \vec{h} en nuestro sistema de coordenadas y recurriendo a (V-5) y (V-6), resultan

$$(V-7) \quad r^2\theta' = h \quad \text{y} \quad (r')^2 + r^2(\theta')^2 = 2\frac{\mu}{r} + C,$$

que combinadas dan

$$(V-8) \quad (r')^2 + \frac{h^2}{r^2} = 2\frac{\mu}{r} + C.$$

Si se supone $C < 0$, no hay inconveniente en escribir $C = -\frac{\mu}{a}$ para cierta constante positiva a cuya interpretación se verá más adelante. En tal situación, observando que el primer miembro de (V-8) es no negativo, resulta $r \leq 2a$, lo que significa que la órbita de P está acotada. Puede demostrarse que para otros valores de C se obtienen trayectorias no acotadas indicando que la influencia gravitatoria entre los cuerpos no es lo suficientemente grande como para efectuar una captura. Este caso no será tratado aquí, por lo que, desde este momento, se tomará $C < 0$.



Lo que sí que nos interesa es encontrar la ecuación del movimiento de P . Para ello, y dado que su órbita está confinada en el plano xy , se considerará

la figura [figura V.2](#), donde se representa la trayectoria seguida por P . El punto A , denominado el [perihelio](#), es el más próximo a S . Al ángulo ω entre el semieje x positivo y la recta \overline{SA} se le llama [argumento del perihelio](#). Conforme P se mueve, varía en función del tiempo el ángulo $\nu = \angle ASP$, al cual se le conoce por la [anomalía verdadera](#). Es obvio que la anomalía verdadera y la función angular θ están ligadas por la relación $\nu = \theta - \omega$. Más abajo también se usará el [tiempo en el perihelio](#) τ , que es el transcurrido desde que P ocupa la posición $\theta = 0$ hasta que llega al perihelio con $\theta = \omega$.

Volviendo ahora a la ecuación (V-8), conviene reescribirla en la forma

$$(V-9) \quad (r')^2 = -\frac{\mu}{ar^2}p(r),$$

donde $p(r)$ es el polinomio de segundo grado en r dado por

$$(V-10) \quad p(r) = r^2 - 2ar + \frac{h^2a}{\mu}.$$

Ahora bien, la igualdad (V-9) obliga a que $p(r) \leq 0$, y como el polinomio $p(r)$ tiene coeficiente principal positivo, ha poseer dos raíces reales r_1 y r_2 que acotan al radio vector de P mediante $r_1 \leq r \leq r_2$. Adviértase que, a pesar de que r es una función de t , los valores r_1 y r_2 son constantes. A r_1 le corresponde el radio en el perihelio, mientras que r_2 se interpretará como el radio en el [afelio](#), esto es, el lugar de la órbita más alejado de S . Otra constante que interesa introducir es

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}.$$

Recordando las propiedades de las raíces de un polinomio de segundo grado se tiene $r_1 + r_2 = 2a$ y $r_1 r_2 = \frac{h^2a}{\mu}$. Sencillas manipulaciones algebraicas con estas igualdades permiten expresar r_1 , r_2 y h en los términos exclusivos de a y e . en concreto

$$(V-11) \quad r_1 = a(1 - e), \quad r_2 = a(1 + e), \quad h^2 = \mu a(1 - e^2).$$

Las restricciones encontradas para la función r permiten reparametrizarla mediante el cambio de variable

$$(V-12) \quad r = a(1 - e \cos E),$$

donde E es una función de t denominada *anomalía excéntrica*. Obsérvese que $r(\tau) = a(1 - e)$ implica que E toma el valor cero en el tiempo del perihelio. Además, en cada órbita completa la anomalía excéntrica ha de incrementarse en 2π . Pues bien, introduciendo el cambio de variable (V-12) en el polinomio $p(r)$ y teniendo en cuenta (V-11), resulta $p(r) = -a^2 e^2 \sen^2 E$. Por otro lado, $r' = aeE' \sen E$. Sustituyendo las dos últimas expresiones en la ecuación (V-9) y operando se obtiene

$$(1 - e \cos E)E' = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

La ecuación diferencial de arriba es muy fácil de resolver puesto que el primer miembro tiene como primitiva $E - e \sen E$, y, el segundo, $\sqrt{\mu/a^3}t$, de donde

$$E - e \sen E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - K),$$

donde en K se han agrupado las constantes de integración. Para determinar el valor de K basta recordar que $E(\tau) = 0$, con lo que

$$(V-13) \quad E - e \sen E = n(t - \tau), \quad \text{con } n^2 a^3 = \mu.$$

La de arriba se conoce como *ecuación de Kepler*, y jugará un importante papel de ahora en adelante. El segundo miembro de la ecuación de Kepler define la función

$$(V-14) \quad M = n(t - \tau),$$

denominada *anomalía media* porque, al contrario de la anomalía real ν y la anomalía excéntrica E , aquella siempre incrementa uniformemente con el tiempo t . De ahí que a la tasa de incremento n se la conozca como el

movimiento medio. La importancia matemática de la anomalía excéntrica estriba en que, hasta el momento, se ha logrado expresar en función de ella al tiempo y al radio vector, tarea también posible para el argumento θ o, equivalentemente, la anomalía verdadera ν . En efecto, de $\nu = \theta - \omega$, (V-7) y (V-11) se obtiene

$$\nu' = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e\cos E)^2}.$$

Teniendo en cuenta la definición de la anomalía verdadera n y que la derivada de la ecuación de Kepler ((V-13)) da $n = (1-e\cos E)E'$, se plantea la ecuación diferencial

$$\nu' = \sqrt{1-e^2} \frac{E'}{1-e\cos E}$$

Mientras que una primitiva del primer miembro es ν , la integral del segundo miembro puede resolverse con el cambio estándar $z = \tan \frac{1}{2}E$. Así, tras observar que la constante de integración ha de ser nula pues $\nu = 0$ para $E = 0$, se llega a

$$(V-15) \quad \nu = 2 \arctan \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{1}{2}E \right], \text{ o } \tan \frac{1}{2}\nu = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{1}{2}E.$$

La posición del planeta P ha quedado entonces completamente determinada en función de la anomalía excéntrica E mediante las ecuaciones (V-12) y (V-15).

El problema estriba ahora en resolver la ecuación de Kepler $E - e \sin E = M$ a fin de hallar la anomalía excéntrica para un tiempo dado. Por desgracia esto no es tan sencillo. En la ecuación no solo figura la incógnita E libre, sino afectada por una función trascendente como es el seno. A falta de otras fórmulas, en estas situaciones suele recurrirse a las técnicas del cálculo numérico. Una que tiene bastante éxito consiste en el *método de las aproximaciones sucesivas*. Aplicado a nuestro caso consistiría en escribir la ecuación en la forma $E = M + e \sin E$, lo cual sugiere considerar la sucesión recursiva $\{E_n\}$ con un primer término E_0 como “semilla” y cada término calculado en función del anterior por medio de $E_{n+1} = M + e \sin E_n$. Si todo va bien, la

sucesión de valores (E_0, E_1, E_2, \dots) converge a la solución E de la ecuación. No obstante, hay que advertir aquí que este método no siempre funciona en el sentido de que existen condiciones bajo las cuales la convergencia no está asegurada. Sin meternos en las honduras del análisis numérico, créase el lector que esto sucede, para valores pequeños $e < 1$ y con semilla $E_0 = M$. No obstante, no se trata de un procedimiento muy práctico ya que con e cercano a 0 la convergencia es muy lenta, lo que exige el cálculo de bastantes aproximaciones.

Mejor resultado da el *método de Newton-Raphson* (basado en los primeros términos de una serie de Taylor), con la sucesión

$$E_{n+1} = E_n + \frac{M - E_n + e \operatorname{sen} E_n}{1 - e \cos E_n},$$

si se usan radianes, o

$$(V-16) \quad E_{n+1} = E_n + \frac{M - E_n + (180^\circ e / \pi) \operatorname{sen} E_n}{1 - e \cos E_n},$$

si se miden las anomalías en grados sexagesimales.

§2 Leyes de Kepler

Esta sección está dedicada a las conocidas leyes de Kepler que revolucionaron, no solo la astronomía, sino toda la ciencia. He aquí su formulación original:

Primera ley: Los planetas se mueven según órbitas elípticas que tienen al Sol como uno de sus focos.

Segunda ley: El radio que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

Tercera ley: Los cubos de los radios medios de las órbitas de los planetas son proporcionales a los cuadrados de los tiempos que invierten en recorrerlas.

Las dos primeras fueron publicadas en 1609 en el libro *Astronomia nova*. La tercera, en *Harmonice mundi* (1618). Aquí, este trío de bellos resultados se deducirán de las soluciones al problema de los dos cuerpos establecidas en

la sección anterior. Recuérdese que aquellas tuvieron como punto de origen argumental la ley de la gravitación universal. Sin embargo, Isaac Newton la formuló con posterioridad a las de Kepler. De hecho, fueron las leyes de Kepler, en especial la tercera, las que llevaron a Newton a su descubrimiento. La historieta de la manzana contribuyó más bien a inspirarle la idea de que las masas inercial y gravitatoria de Galileo eran la misma cosa o, lo que es lo mismo, que la aceleración y la gravedad no son sino manifestaciones del mismo fenómeno.

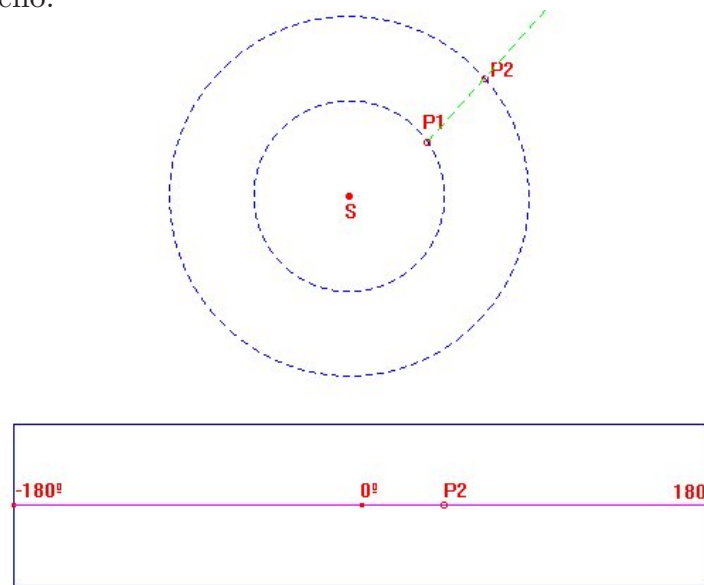
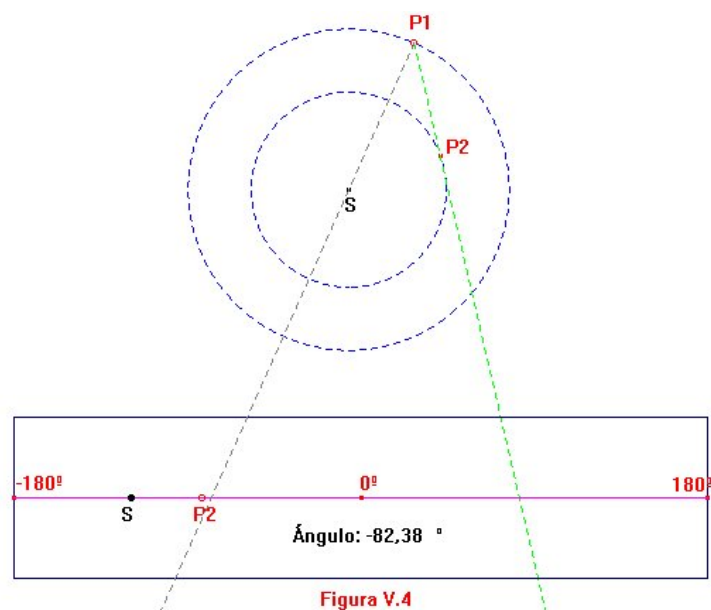


Figura V.3

Todo este asunto comienza por la observación del errático movimiento de siete cuerpos (el Sol, la Luna, Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno) por la bóveda celeste en contraste con la inmovilidad de las “estrellas fijas”. en la figura V.3 se simula la situación para dos cuerpos P_1 y P_2 que orbitan alrededor de S según circunferencias de distinto radio. El planeta P_1 se desplaza a mayor velocidad que P_2 . Adoptando el punto de vista de P_1 , la proyección de P_2 sobre la esfera celeste realiza extraños quiebros. Mientras que la mayor parte del tiempo avanza hacia el punto marcado como 180° , en ocasiones se frena poco a poco, retrocede unos grados (*movimiento retrógrado*), para en breve retomar de nuevo su primitiva dirección.



Si ahora es P_2 el planeta interior figura V.4, lo veríamos moverse siempre en las inmediaciones del Sol, unas veces adelantado, otras retrasado, pero manteniendo una separación angular que alcanza sus extremos en puntos denominados de *elongación máxima*. Como quiera que la Tierra ocupa una posición intermedia, y hay planetas más cercanos y más alejados del Sol que ella, ambos tipos de fenómenos fueron advertidos desde la antigüedad. Sucesivos intentos de explicación condujeron a curiosas teorías cosmológicas. La que, sin lugar a dudas, tuvo mayor éxito en el mundo clásico fue la Ptolemaica, que situaba a la Tierra en el centro de un conjunto de circunferencias, dos de las cuales eran descritas por el Sol y la Luna. Los planetas, a fin de justificar esos tirones, giraban a su vez siguiendo otras circunferencias más pequeñas, cuyos centros invisibles eran los que se ajustaban a las circunferencias centradas en la Tierra. Las trayectorias de los planetas no eran pues circunferencias, sino otro tipo de curvas que se dieron en llamar *epiciclos*. De cualquier forma, no dejaba de ser sorprendente que esos hipotéticos puntos invisibles coincidieran en su posición aparente una vez al año. La razón de elegir circunferencias tenía un origen místico: el cosmos, como obra de los dioses, debía de ser perfecto, y nada más perfecto que un círculo.

Copérnico elaboró otra teoría, que solo se atrevió a publicar al final de su

vida (*De revolutionibus orbium coelestium* en 1530), en la que se aplicaba un mayor grado de sensatez. En lugar de aquel complicado mecanismo de esferas con centros fantasmales, todos los cuerpos, salvo la Luna, giraban alrededor del Sol. Las cinco casualidades del sistema ptolemaico se interpretaban ahora como cinco reflejos de la misma circunstancia: el solo movimiento de traslación de la Tierra. Al margen de las evidentes mejoras del universo copernicano en cuanto a simplificación y elegancia sobre su antecesor, las observaciones realizadas guardaban mayor concordancia con las predicciones. No obstante, y aunque Copérnico llegaba incluso a tratar asuntos muy profundos como la precesión de los equinocios o la irregularidad del movimiento solar, aún existían ciertas discrepancias entre las posiciones medidas y las calculadas. Por ende, al conservar la circunferencia como curva básica, no solo hubo de recurrir a más epiciclos, sino que el mismo Sol (junto con los planetas) tenía que girar alrededor del centro de la órbita terrestre. El planeta que más guerra daba era Marte, en el que las disparidades iban más allá de los errores de observación.

Fue precisamente esa la razón que llevó al astrónomo danés Tycho Brahe a contratar a Kepler, la de ayudarle en las investigaciones necesarias para meter en cintura al planeta rojo. El alemán Johannes Kepler (1571-1630), sin aptitudes apropiadas para la observación instrumental (padecía de doble visión y era miope y de dedos deformes), sí que estaba bien dotado para las matemáticas. La breve relación entre Tycho y Kepler estuvo marcada por el recelo mutuo. Mientras que Brahe pretendía demostrar su propio modelo del sistema solar no copernicano, Kepler, ferviente defensor de la obra de Copérnico, anhelaba acceder a las valiosas *Tablas rudolfinas* que su jefe había elaborado con tanta precisión y de las que solo le mostraba lo estrictamente necesario. Al año y medio de reclutar a Kepler, Brahe murió a los pocos días de indisponerse durante una cena. El alemán confesó sin pudor: *me aproveché rápidamente de la ausencia, o falta de circunspección, de los herederos, y tomé bajo mi control las observaciones, quizá usurpándolas*. Historiadores

de tiempos recientes han especulado sobre si Kepler llegó a asesinar a su jefe. Aquí, por descontado, no nos pronunciaremos. El caso es que con aquellos datos valiosísimos, emprendió la tarea de predecir el movimiento de los planetas.

Sin buscar, en realidad, una causa física, también había en Kepler un objetivo místico, el de desentrañar los planes del Creador. Así, con una curiosa mezcla de ingredientes (sólidos regulares, armonías musicales y geométricas), consiguió enunciar las tres leyes del comienzo de esta sección, que han de ser consideradas más fruto del empirismo (y la inspiración genial) que de la deducción. He aquí el enunciado literal de la tercera: *Mas es cosa ciertísima y en todo exacta que la proporción que existe entre los tiempos periódicos de dos planetas cualesquiera sea precisamente la proporción sesquialtera (potencia $\frac{3}{2}$) entre las distancias medias*. Más tarde, Isaac Newton pudo obtenerlas como consecuencia de la gravitación universal tarea que se comenzará de inmediato tras este preámbulo histórico.

En la demostración de la fórmula (V-15), se llegó a la conclusión de que

$$\nu' = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E} E' \quad \text{si y solo si} \quad \tan \frac{1}{2}\nu = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{1}{2}E.$$

Si de la segunda igualdad se despeja E en función de ν y se deriva, se obtiene, sin más que intercambiar los papeles de E y ν , que

$$E' = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos \nu} \nu' \quad \text{si y solo si} \quad \tan \frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{1}{2}\nu.$$

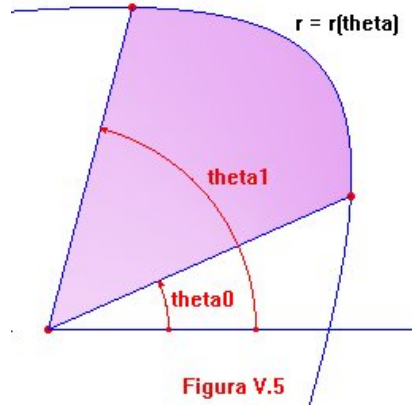
Así,

$$\nu' = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E} \frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos \nu} \nu'.$$

Operando y aplicando (V-12), se tiene

$$(V-17) \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos \nu}.$$

La ecuación anterior expresa la curva seguida por P en coordenadas polares. En ella se reconoce a una elipse de semieje mayor a y excentricidad e . La primera ley de Kepler ha quedado probada.



Para la segunda hay que recordar cómo se obtiene el área de una curva $r = r(\theta)$ en coordenadas polares. En cualquier libro de cálculo infinitesimal se deduce sin demasiada dificultad que si r es, por ejemplo, continua, el área barrida por el radio r entre los argumentos θ_0 y θ_1 (figura V.5) viene dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta) d\theta.$$

En nuestro caso, el área barrida por el radio vector $r = r(\nu)$ entre un tiempo t_0 y el tiempo t es la función

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_{\nu(t_0)}^{\nu(t)} r^2(\nu) d\nu.$$

Ahora bien, aplicando el cambio de variables $\nu = \nu(t)$, que proporciona $d\nu = \nu'(t)dt$, resulta

$$\int r^2(\nu) d\nu = \int r^2(t) \nu' dt.$$

Teniendo en cuenta (V-7) y que $\nu' = \theta'$ se obtiene

$$A(t) = \frac{1}{2} h(t - t_0),$$

con lo que el área barrida por \vec{r} es proporcional al tiempo que se invierte en trazarla, con constante de proporcionalidad $\frac{1}{2}h$. En la figura V.6 se simula esta segunda ley de Kepler. Allí se advierte que el planeta P remolonea en las cercanías del afelio y toma carrerilla en el perihelio a fin de mantener una velocidad aerolar constante. Esta y no otra era la causa de la irregularidad

del movimiento del Sol que llevó a Copérnico a considerar una órbita especial para él.

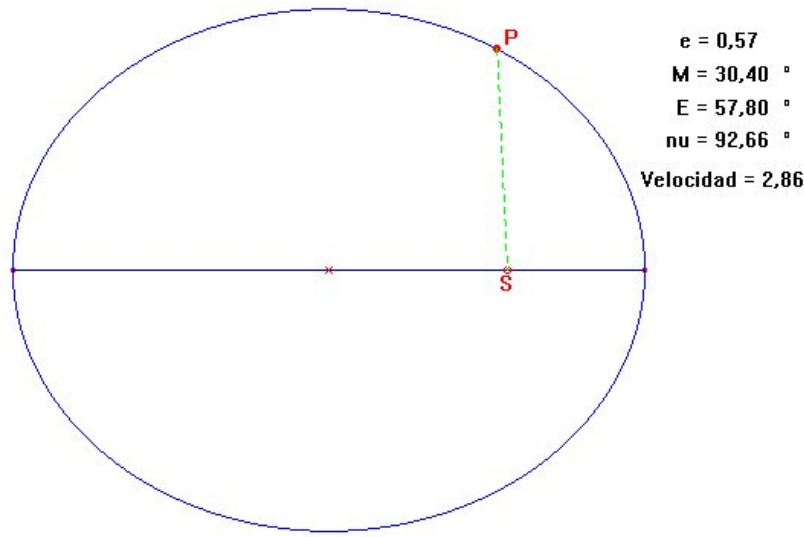


Figura V.6

Por último, se define el *periodo* como el tiempo T invertido por P en realizar una órbita completa. Entonces la anomalía media M , expresada en radianes, toma los valores $M(\tau) = 0$ y $M(T + \tau) = 2\pi$. Usando la expresión ((V-14)) resulta

$$(V-18) \quad n = \frac{2\pi}{T}.$$

Recordando ahora la definición (V-13) del movimiento medio y que $\mu = G(m_1 + m_2)$ se obtiene

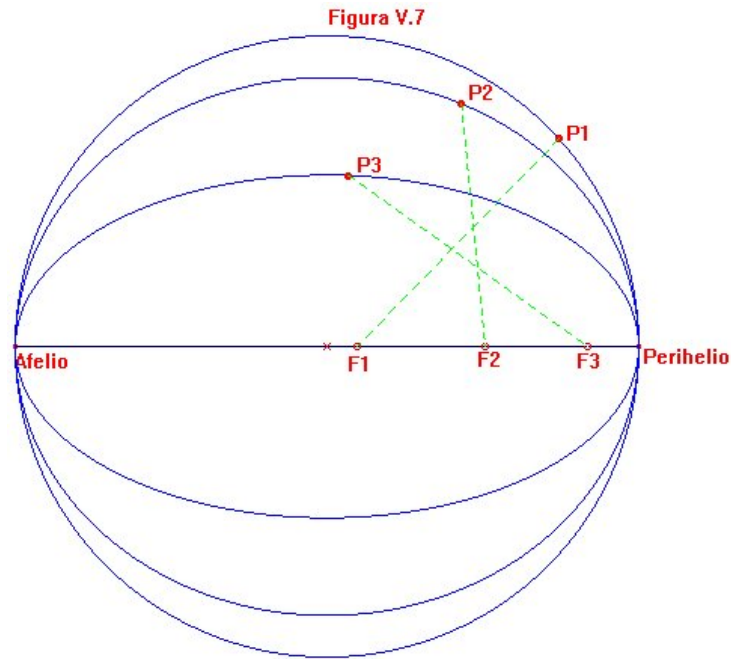
$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}(m_1 + m_2),$$

igualdad que puede escribirse en la forma

$$(V-19) \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{Gm_1}{4\pi^2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right).$$

Así, cuando la masa m_2 del planeta es insignificante en relación a la del Sol, a^3 es proporcional a T^2 con razón de proporcionalidad $\frac{Gm_1}{4\pi^2}$. Adviértase entonces que, si bien las dos primeras leyes de Kepler son “exactas”, la tercera se trata solo de una aproximación. Para, Júpiter, el más masivo de los planetas del sistema solar, se produce un error del orden de una milésima.

En la [figura V.7](#) se realiza una simulación del movimiento de tres planetas de la misma masa, con idéntico semieje mayor, pero con distintas excentricidades. Allí se han superpuesto las órbitas para poner de manifiesto que el periodo solo depende de a . Además, a efectos de visualización, los cálculos internos del simulador suponen que cada sol ejerce influencia gravitatoria solo sobre su correspondiente planeta.



§3 Consideraciones adicionales

Cuando se planteó la ecuación diferencial (V-8), se hizo observar que la constante C podía interpretarse como proporcional a la energía total del sistema integrado por los dos cuerpos S y P . La suposición $C < 0$ nos llevó a la solución descrita en la sección §C.V.1, que, a su vez, permitió probar las leyes de Kepler. Además, también se adelantó que valores positivos de C llevaban a soluciones no acotadas en las que cada cuerpo escapaba a la influencia gravitacional del otro. No es objeto de estas notas tratar este caso con exhaustividad, pero sí que se comentarán los resultados que se habrían obtenido de recalcular todos los pasos con $C > 0$.

Tabla T.1
Fórmulas para órbitas elípticas
Leyes de Kepler

Primera	$r = a \frac{1-e^2}{1+e \cos \nu}$
Segunda	$r^2 \nu' = h$
Tercera	$n^2 a^3 = \mu \quad (= G(m_1 + m_2))$ con $h^2 = \mu a(1 - e^2)$
Fórmulas posicionales	
Ecuación de Kepler	$n(t - \tau) = M = E - e \sin E$ $r = a(1 - e \cos E)$ $\tan \frac{1}{2} \nu = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{1}{2} E$
Velocidad	$(r')^2 = V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$

En la tabla (T.1), se han compendiado los resultados de las dos secciones anteriores, esto es, para órbitas elípticas. De rehacer todos los razonamientos con $C > 0$, se llegaría a expresiones similares sustituyendo a por $-a$, n por in , M por iM y E por iE , con $i = \sqrt{-1}$ la unidad imaginaria. El resumen correspondiente se encuentra en la tabla (T.2).

Tabla T.2
Fórmulas para órbitas hiperbólicas
Leyes de Kepler

Primera	$r = a \frac{e^2-1}{1+e \cos \nu}$
Segunda	$r^2 \nu' = h$
Tercera	$n^2 a^3 = \mu \quad (= G(m_1 + m_2))$ con $h^2 = \mu a(e^2 - 1)$
Fórmulas posicionales	
Ecuación de Kepler	$n(t - \tau) = M = e \sinh E - E$ $r = a(e \cosh E - 1)$ $\tan \frac{1}{2} \nu = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{1}{2} E$
Velocidad	$(r')^2 = V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$

Se observa en ella que la trayectoria es una hipérbola de excentricidad e y semieje real a . Y aunque no se pueda hablar aquí con propiedad del periodo, pues no se trata de órbitas cerradas donde las posiciones se repiten periódicamente, la relación $n^2 a^3 = \mu$ sí que deja traslucir cierta relación entre el “tamaño” de la órbita a y el “tiempo invertido” n en recorrerla.

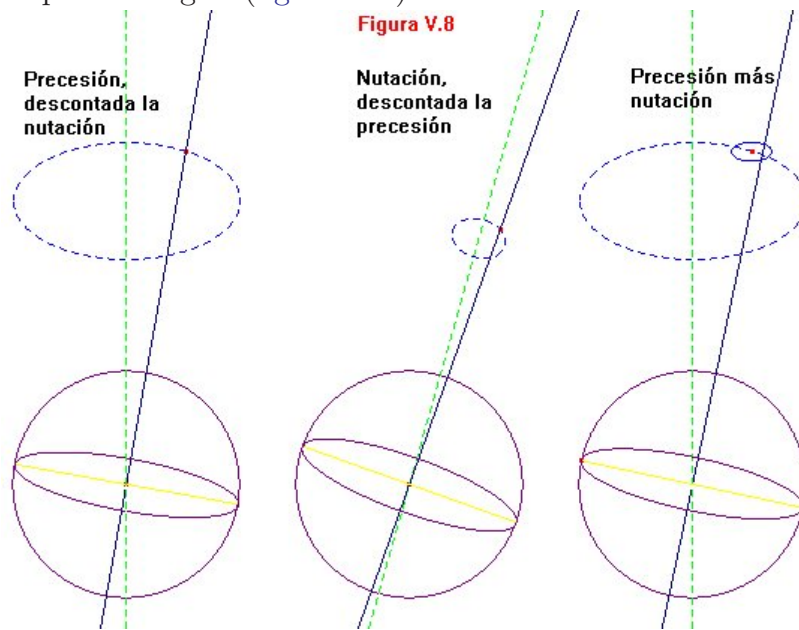
Ahora toca abordar otras consideraciones que quedan al margen del problema “puro” de los dos cuerpos, pero que intervienen en el *ballet* de

la mecánica celeste. Y es que incluso desde la antigüedad ya eran conocidas ciertas anomalías cósmicas originadas en la combinación de los movimientos de la Tierra. Aparte de los de rotación y traslación, un cúmulo de causas de diversa índole anima a nuestro planeta (y también a los restantes) a ejercitar piruetas menos llamativas que las dos principales, desde la influencia gravitacional de la Luna y los demás planetas, hasta la propia forma no esférica de la Tierra o la elasticidad y distribución del material en la atmósfera, la corteza, el manto y el núcleo, pasando por cataclismos, ya sean o no de origen terrestre, así como los efectos geométricos de la relatividad general.

Algunas civilizaciones arcaicas habían observado que el punto vernal (aunque no lo denominasen de esa forma), se desplazaba en sentido retrógrado sobre la eclíptica completando una vuelta en unos 26.000 años, minuto más minuto menos. En realidad fueron 26.000 para el año 50 de la era cristiana, 25.788 para el 1900 y 25.695 los estimados para el 2715. La razón de esta arritmia se debe al alejamiento entre el Sol y el equinocio, que se mencionará más abajo. Y como el punto vernal no es sino una de las intersecciones de plano de la eclíptica con el ecuatorial, este retroceso anual de 55".26 ha de significar que el eje de rotación terrestre no se mantiene paralelo a sí mismo. De hecho, el polo celeste realiza casi una circunferencia centrada en el polo de la eclíptica de radio unos 23°27'. De ahí que la estrella del cielo que haya hecho las veces de polar cambie con el transcurso de la historia. Mientras que los primeros astrónomos chinos y egipcios tenían como polar a α del Dragón, y no a α de la Osa menor, como en la actualidad, dentro de unos 12 milenios el polo celeste norte estará muy cercano a la estrella Vega, la más brillante de la constelación de Lira. Ello ocasiona que las coordenadas celestes de los luceros cambien de un año a otro, por lo cual los catálogos siempre hacen referencia a la fecha en la que se compilaron.

Ahora bien, este gran movimiento del eje terrestre, denominado *precesión de los equinocios*, no se efectúa con total regularidad. Por un lado, la oblicuidad de la eclíptica no permanece constante, sino que experimenta una variación de

muy largo periodo entre $24^{\circ}36'$ y $21^{\circ}59'$. En nuestra época nos encontramos en el periodo decreciente, por lo que los $23^{\circ}27'$ a los que se ha hecho alusión en varias ocasiones se van cerrando poco a poco. Este movimiento es conocido como *nutación* y se debe, de nuevo, a la influencia gravitatoria de la Luna sobre el abultamiento ecuatorial terrestre, al girar el plano de aquella respecto a nuestro globo. Si se descontara el efecto de la precesión de los equinocios, el eje de la Tierra dibujaría sobre la esfera celeste una elipse de unos $18''$ por $14''$ en el transcurso de 18 años, que es lo que tarda el plano orbital de la Luna en completar un giro (figura V.8).



A este efecto se suma una “mininutación”, menos sensible, de seis meses de duración originada por la misma causa, pero producida por la atracción del Sol sobre el michelín del ecuador. La cuarta perturbación del eje tiene un periodo de 14 días, al moverse la Luna oblicuamente respecto del planeta. Por último, hay otro orden de irregularidades que sacuden el eje de rotación respecto de la propia Tierra, es decir, que no se puede plantar una bandera, por ejemplo, en el polo sur para señalarlo con total exactitud. A veces, se trata de desplazamientos del orden de centímetros o metros y transcurren desde días hasta fracciones de segundo. Se supone que estas variaciones ocurren a consecuencia de los movimientos de masas de hielo, de agua o atmosféricas,

o la redistribución de material en la corteza, el manto y el núcleo. Gracias a ello, y a las sensibles mediciones que proporcionan los GPS, se está hoy en día en condiciones muy favorables para abordar un estudio concienzudo del interior del globo.

Y si hasta ahora se ha hablado del giro de la Luna en torno a la Tierra, ha llegado el momento de matizar semejante aseveración. Al plantear el problema de los dos cuerpos, se concibió un centro de masas del sistema. Pues bien, en el caso del sistema Tierra-Luna ese centro de masas se encuentra bastante alejado del centro del planeta, en concreto, a unos 1.000km de profundidad bajo la superficie terrestre. Y es que nuestro caso goza de cierta excepcionalidad en el sistema solar: si en el resto de los planetas con satélites estos poseen masas despreciables respecto de aquellos, la Luna resulta comparable en magnitud con la Tierra. De hecho, cualquier visitante de otros soles describiría la situación como un “planeta doble”. De ahí que en ocasiones se utilice el término *par Tierra-Luna*. Solo Plutón y su satélite Caronte están en análogas circunstancias. Así, quien describe la órbita heliocéntrica terrestre no es el centro de la Tierra, sino el centro de gravedad del par Tierra-Luna, por lo que el centro de la Tierra serpentea a uno y otro lado.

Pero aquí no queda el asunto. La propia órbita de la Tierra tampoco es inmutable. Por un lado, la excentricidad de la eclíptica varía de 0.003 a 0.002 en el transcurso de unos 80.000 años. El mínimo se alcanzará dentro de 240 siglos. Además, la *línea de los ápsides*, que es la determinada por el perihelio y el afelio, gira 11".5 anuales en sentido directo. Se cree que la resultante de todos estos movimientos, junto a los del eje de rotación, es la que causa las variaciones climáticas a largo plazo con periodos glaciares fríos seguidos de breves lapsos interglaciares templados. Por añadidura, hay que sumar a todo lo anterior las perturbaciones gravitatorias del resto de nuestros compañeros planetarios. Ni que decir tiene que ellos sufren de anomalías de idéntico tenor, algunas de ellas atenuadas al no disponer de satélites tan dominantes.

Y se acabará esta sección comentando la solución relativista al problema

de los dos cuerpos. En relatividad general se concibe el espacio-tiempo como una variedad provista de una métrica (la métrica riemanniana). Allí los cuerpos son concebidos como partículas que siguen geodésicas de la variedad (las líneas del mundo). El planteamiento de la correspondiente ecuación diferencial y su resolución llevan a expresiones que guardan un enorme parecido, al menos visual, con la teoría newtoniana. De hecho, la ecuación del movimiento que se obtiene también es la de una elipse con el objeto más masivo en el foco. Sin embargo, en el caso relativista esta elipse no es fija, sino que el argumento del perihelio aumenta con velocidad angular constante. En concreto, tras un periodo orbital, el incremento de este argumento viene dado por la expresión

$$\Delta\omega = \frac{6\pi m_1}{a(1 - e^2)}.$$

Esta es una de las predicciones clásicas para la comprobación experimental de la teoría de la relatividad general. De hecho, despejó en su día las interrogantes en torno al avance de $43''$ anuales del perihelio de Mercurio. Con anterioridad, este fenómeno, fácilmente detectable, no se lograba explicar por el exclusivo medio de las perturbaciones gravitatorias del resto de los planetas. Incluso llegó a concebirse un planeta más interno, que se dió en llamar Vulcano, a fin de que los cálculos cuadraran. La relatividad general ofreció una respuesta, aunque hay que admitir que el resultado teórico no corresponde con total exactitud con el que se obstinan en proclamar los tercios instrumentos de medida.

Adviértase que $\Delta\omega$ es inversamente proporcional al semieje mayor. De ahí que el incremento de ω se minimice en los planetas desde Venus en adelante, hasta el punto de que no se ha conseguido aislar este giro de la línea de los ápsides en ninguno de ellos. No obstante sí que se ha puesto de manifiesto en el comportamiento de ciertos púlsares binarios.

§4 Un caso real

Antes de proponer una relación de problemas, conviene pisar tierra y ejercitarse en el uso de las fórmulas que rigen el movimiento planetario.

En la página 396 del popular libro *Astronomía* del astrónomo español José Cosmas Solá (Ramón Sopena, S.A., Barcelona 1962), encontramos los siguientes datos para el cometa Encke:

Distancia perihélica en unidades astronómicas: 0.34034.

Distancia afélica en unidades astronómicas: 4.096.

Periodo de revolución en años: 3.30353.

(La *unidad astronómica* es, por definición, la longitud del semieje mayor de la órbita terrestre, que viene a medir 1.496×10^8 km.)

Se trata de hallar la posición del cometa Encke un año después del paso por el perihelio. Habrá que comenzar calculando la excentricidad de su órbita.

Si $x = 0.34034$ UA es la distancia perihélica y $y = 4.096$ UA, la afélica, el semieje mayor de la elipse será $a = \frac{x+y}{2} = 2.21817$ UA, y la semidistancia focal $c = a - x = 1.87783$ UA, de donde se obtiene la excentricidad $e = \frac{c}{a} \approx 0.846567$. Adviértase que también podría deducirse el semieje mayor de la tercera ley de Kepler. En efecto, escribiendo

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{(1 \text{ UA})^3}{(1 \text{ año})^2},$$

resulta $a \approx 2.21812$ UA. La discrepancia en el quinto decimal proviene del carácter aproximado de la tercera ley.

El movimiento medio n (expresado en grados sexagesimales), es, por (V-18), $n = \frac{360^\circ}{3.30353} \approx 108^\circ.9743$. Recurriendo a (V-14), con $t = \tau + 1$, resulta que la anomalía media vale $M = 108^\circ.9743$. Se precisa ahora calcular la anomalía excéntrica, por lo que, siguiendo el método de Newton-Raphson ((V-16)), se

realizan las iteraciones:

$$\begin{aligned} E_0 &= 108^\circ.9743, \\ E_1 &= 144^\circ.9429, \\ E_2 &= 140^\circ.1538, \\ E_3 &= 140^\circ.0925, \\ E_4 &= 140^\circ.0925, \\ E_5 &= 140^\circ.0925, \\ E_6 &= 140^\circ.0925, \\ E_7 &= 140^\circ.0925, \\ E_8 &= 140^\circ.0925. \end{aligned}$$

El autor ha confeccionado estos datos mediante un sencillo programa de ordenador cuya versión PHP puede ejecutarse [pinchando aquí](#). Adviértase cómo la sucesión se estabiliza extraordinariamente bien a partir de la tercera iteración, por lo que se tomará $E = 140^\circ.0925$. Ahora, según las fórmulas (V-12) y ((V-15)), se obtienen los valores

$$\begin{aligned} r &= a(1 - e \cos E) \approx 1.79246 \text{ UA}, \\ \nu &= 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{1}{2} E \right) \approx 168^\circ.0512, \end{aligned}$$

que indican la situación de Encke en un sistema de coordenadas polares sobre el plano de su órbita, con el Sol como polo y el perihelio como origen de medida de los ángulos. Para localizar la posición del cometa en la bóveda celeste serán precisos más datos, puesto que depende también del lugar que ocupa la Tierra para la época pedida. A ello se dedicará el próximo capítulo.

§5 Problemas propuestos

Problema 1. El cometa Halley posee un periodo de **76.0081** años y sigue una órbita de excentricidad **0.9673**. Hállese su posición 10 años después del paso por el perihelio.

Problema 2. De la órbita del planeta Marte se conocen los siguientes datos: $a = 1.5236$ UA, $e = 0.0934$. Si el 1 de enero de 1984 su distancia heliocéntrica era **1.6609 UA**, y decreciendo, calcúlese el tiempo que ha de transcurrir para el siguiente paso por el perihelio.

Problema 3. En su movimiento de traslación alrededor del Sol, ¿cuáles son las velocidades máxima y mínima de la Tierra? Exprésense en unidades astronómicas por año y en kilómetros por segundo.

Problema 4. Se observa un objeto, a buen seguro procedente de la nube de Oort, que sigue una trayectoria hiperbólica de excentricidad $e = 1.2001$. Si a la fecha de hoy se encuentra a 10.245 UA del Sol y se estima que la distancia mínima a la que pasará es de 0.2308 UA , ¿cuanto tardará en atravesar el perihelio?

