Анализ данных для лингвистов

Г. А. Мороз

Оглавление

1 О курсе **5**

2 Распределения **7**

2.1 Распределения в R 7

2.2 Дискретные переменные 10

2.3 Числовые переменные 16

3 Функция правдоподобия **19**

3.1 Оценка вероятности 19

Глава 1

О курсе

Материалы для курса Анализа данных для лингвистов, Школа лингвистики НИУ ВШЭ.

Глава 2

Распределения

```
library(tidyverse)
```

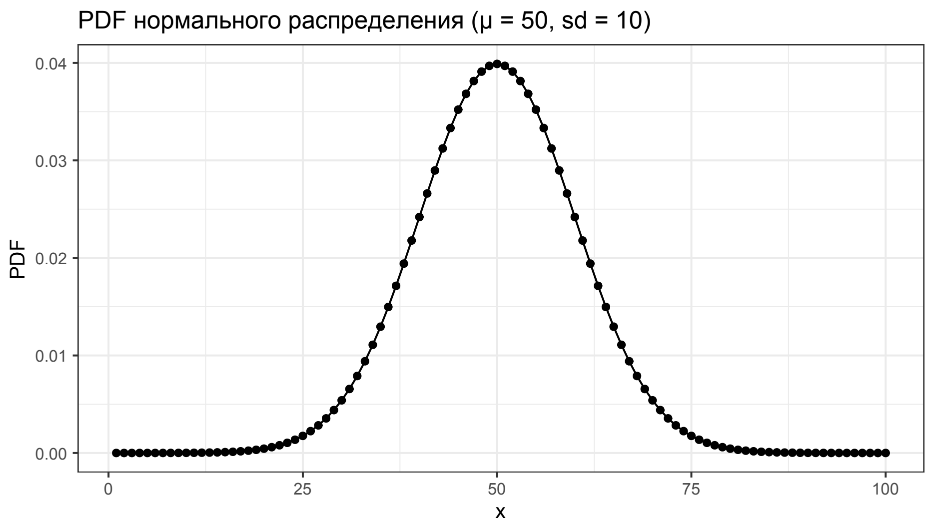
2.1 Распределения в R

В R встроено какое-то количество известных распределений. Все они представлены четырьмя функциями:

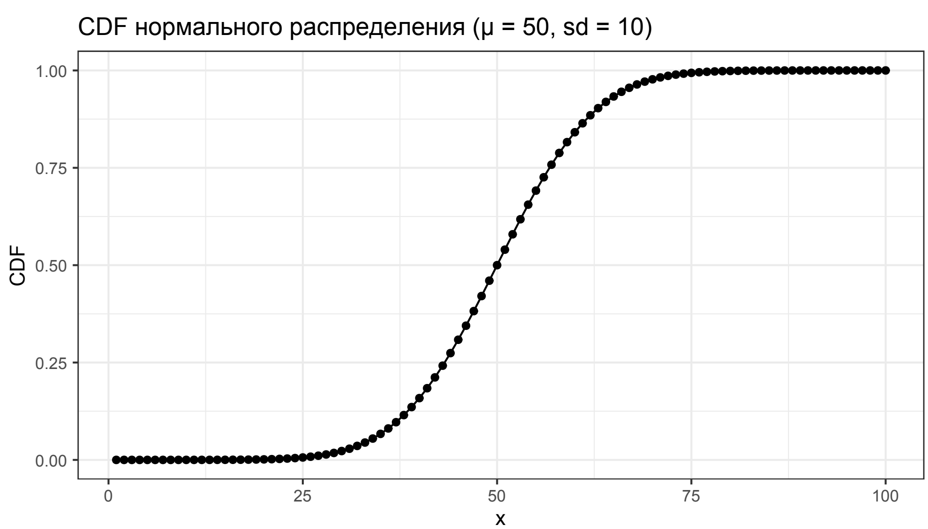
- `d...` (функция плотности, probability density function),
- `p...` (функция распределения, cumulative distribution function) — интеграл площади под кривой от начала до указанной квантили
- `q...` (обратная функции распределения, inverse cumulative distribution function) — значение p-той квантили распределения
- и `r...` (рандомные числа из заданного распределения).

Рассмотрим все это на примере нормального распределения.

```
tibble(x = 1:100,
       PDF = dnorm(x = x, mean = 50, sd = 10)) %>%
  ggplot(aes(x, PDF))+
  geom_point()+
  geom_line()+
  labs(title = "PDF нормального распределения (μ = 50, sd = 10)")
```

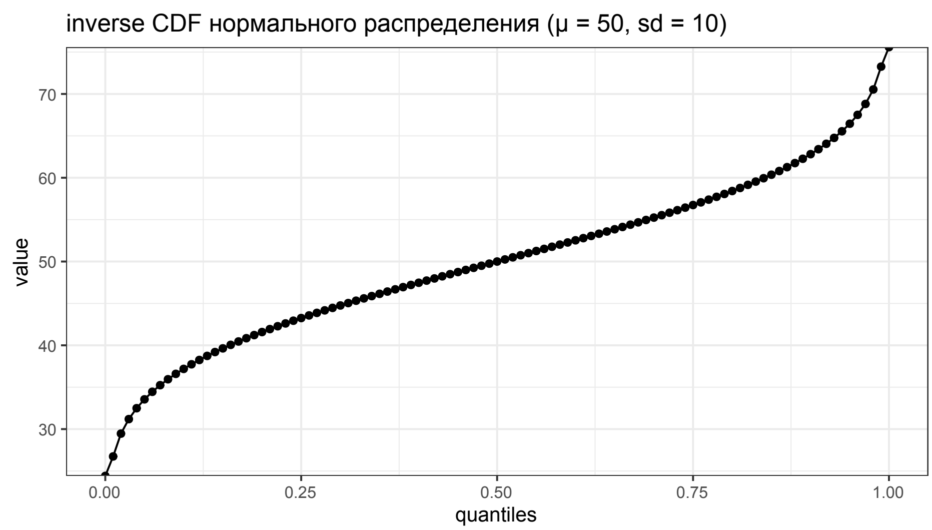



```
tibble(x = 1:100,
       CDF = pnorm(x, mean = 50, sd = 10)) %>%
  ggplot(aes(x, CDF))+
  geom_point()+
  geom_line()+
  labs(title = "CDF нормального распределения (μ = 50, sd = 10)")
```

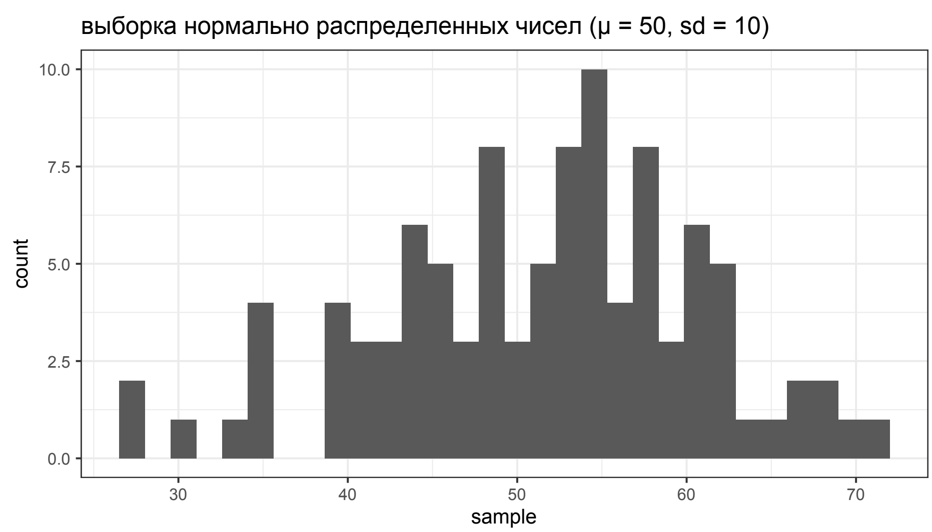



```
tibble(quantiles = seq(0, 1, by = 0.01),
       value = qnorm(quantiles, mean = 50, sd = 10)) %>%
  ggplot(aes(quantiles, value))+
```

```
  geom_point()+
  geom_line()+
  labs(title = "inverse CDF нормального распределения (μ = 50, sd = 10)")
```




```
tibble(sample = rnorm(100, mean = 50, sd = 10)) %>%
  ggplot(aes(sample))+
  geom_histogram()+
  labs(title = "выборка нормально распределенных чисел (μ = 50, sd = 10)")
```



Если не использовать `set.seed()`, то результат работы рандомизатора нельзя будет повторить.

Какое значение имеет 25% квантиль нормального распределения со средним в 20 и стандартным отклонением 90? Ответ округлите до трех знаков после запятой.

Данные из базы данных фонетических инвентарей PHOIBLE [@phoible], достаточно сильно упрощая, можно описать нормальным распределением со средним 35 фонем и стандартным отклонением 13. Если мы ничего не знаем про язык, оцените с какой вероятностью, согласно этой модели произвольно взятый язык окажется в промежутке между 25 и 50 фонемами? Ответ округлите до трех знаков после запятой.

Какие есть недостатки у модели из предыдущего задания?

2.2 Дискретные переменные

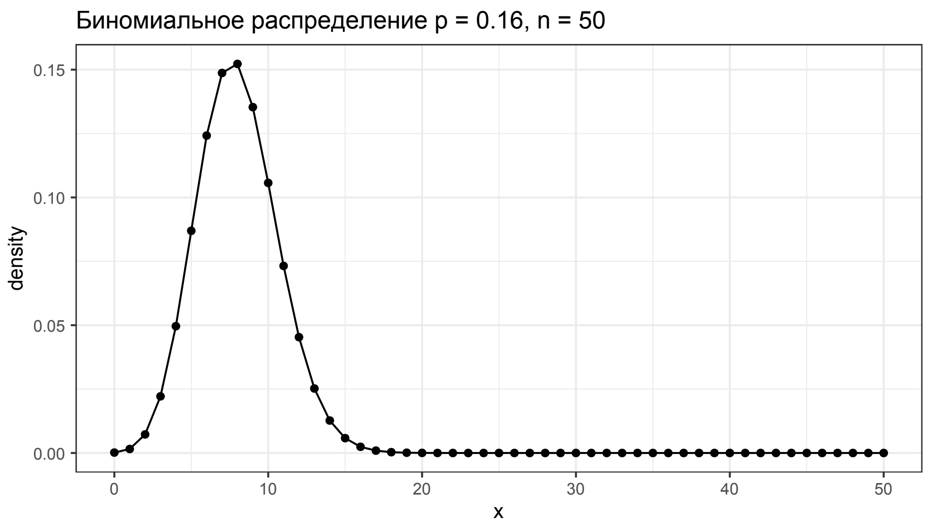
2.2.1 Биномиальное распределение

Биномиальное распределение — распределение количетсва успехов эксперементов Бернулли из *n* попыток с вероятностью успеха *p*.

$$P(k|n,p) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$0 \leq p \leq 1; n, k > 0$$

```
tibble(x = 0:50,
       density = dbinom(x = x, size = 50, prob = 0.16)) %>%
  ggplot(aes(x, density))+
  geom_point()+
  geom_line()+
  labs(title = "Биномиальное распределение p = 0.16, n = 50")
```



Немного упрощая данные из статьи [@rosenbach03: 394], можно сказать что носители британского английского предпочитают *s*-генитив (90%) *of*-генитиву (10%). Какова вероятность, согласно этим данным, что в интервью британского актера из 118 контекстов будет 102 *s*-генитивов? Ответ округлите до трёх или менее знаков после запятой.

А какое значение количества *s*-генитивов наиболее ожидаемо, согласно этой модели?

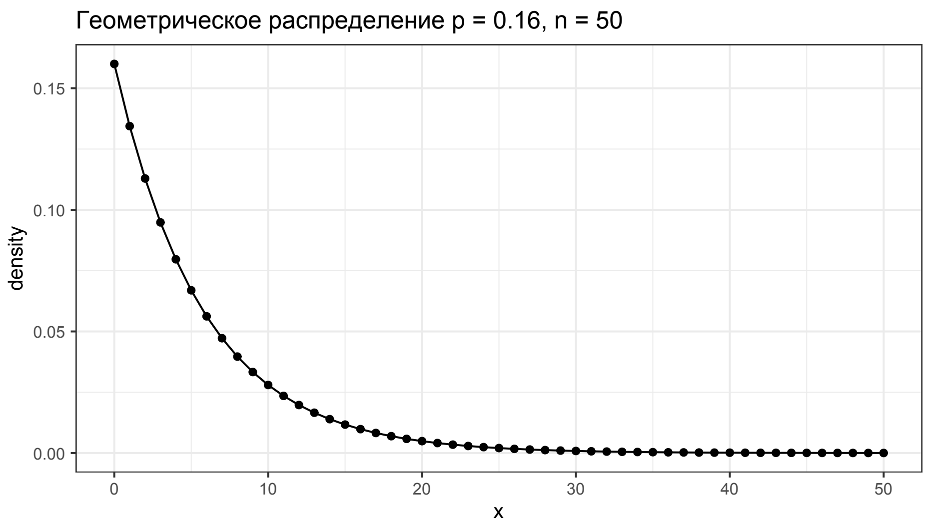
2.2.2 Геометрическое распределение

Геометрическое распределение — распределение количетсва эксперементов Бернулли с вероятностью успеха p до первого успеха.

$$P(k|p) = (1-p)^k \times p$$

$$k \in \{1, 2, \dots\}$$

```
tibble(x = 0:50,
       density = dgeom(x = x, prob = 0.16)) %>%
  ggplot(aes(x, density))+
  geom_point()+
  geom_line()+
  labs(title = "Геометрическое распределение p = 0.16, n = 50")
```



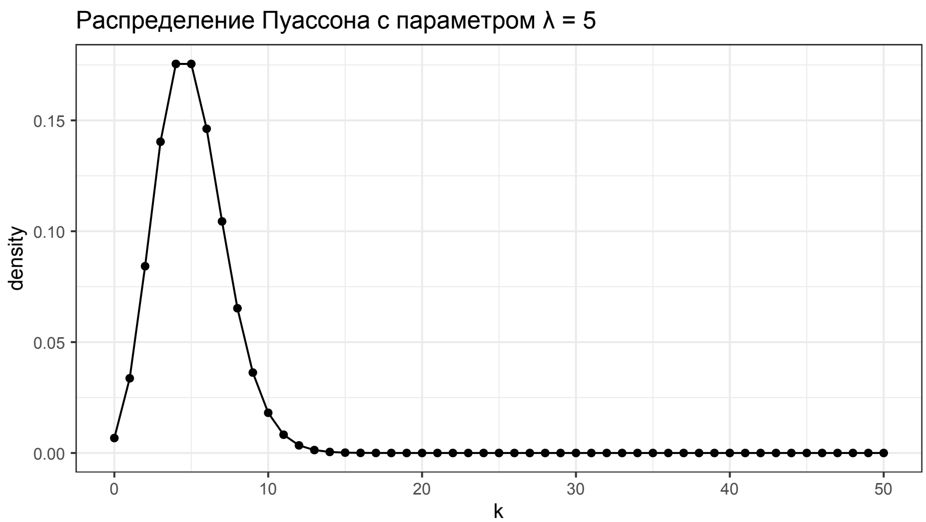
Приняв модель из [@rosenbach03: 394], какова вероятность, что в интервью с британским актером первый *of*-генитив будет третьим по счету?

2.2.3 Распределение Пуассона

Распределение дискретной переменной, обозначающей количество случаев k некоторого события, которое происходит с некоторой заданной частотой λ.

$$P(\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$$

```
tibble(k = 0:50,
       density = dpois(x = k, lambda = 5)) %>%
  ggplot(aes(k, density))+
  geom_point()+
  geom_line()+
  labs(title = "Распределение Пуассона с параметром λ = 5")
```

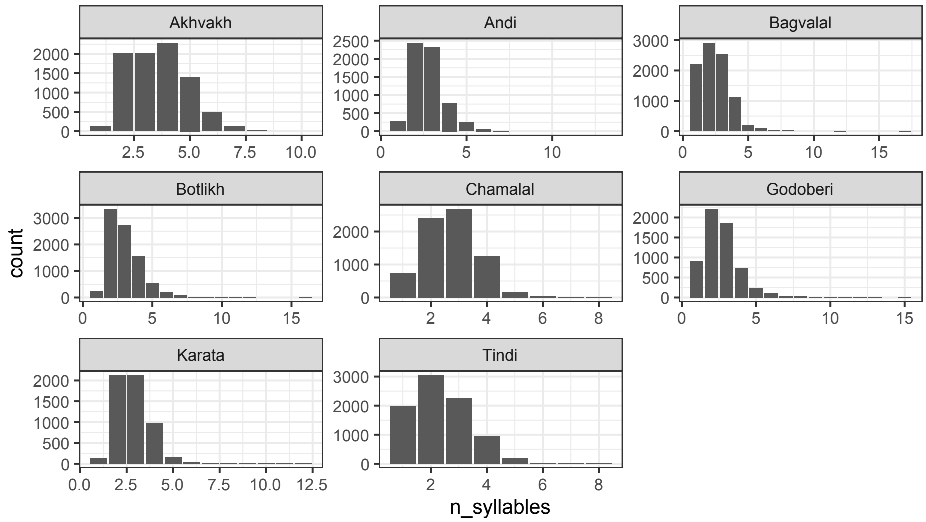


Параметр λ в модели Пуассона одновременно является и средним, и дисперсией.

Попробуем воспользоваться распределением Пуассона для моделирования количества слогов в андийском языке. Количество слогов – это всегда натуральное число (т. е. не бывает 2.5 слогов, не бывает -3 слогов и т. д., но в теории может быть 0 слогов), так что модель Пуассона здесь применима. Согласно модели Пуассона все слова независимо друг от друга получают сколько-то слогов согласно распределению Пуассона. Посмотрим на данные:

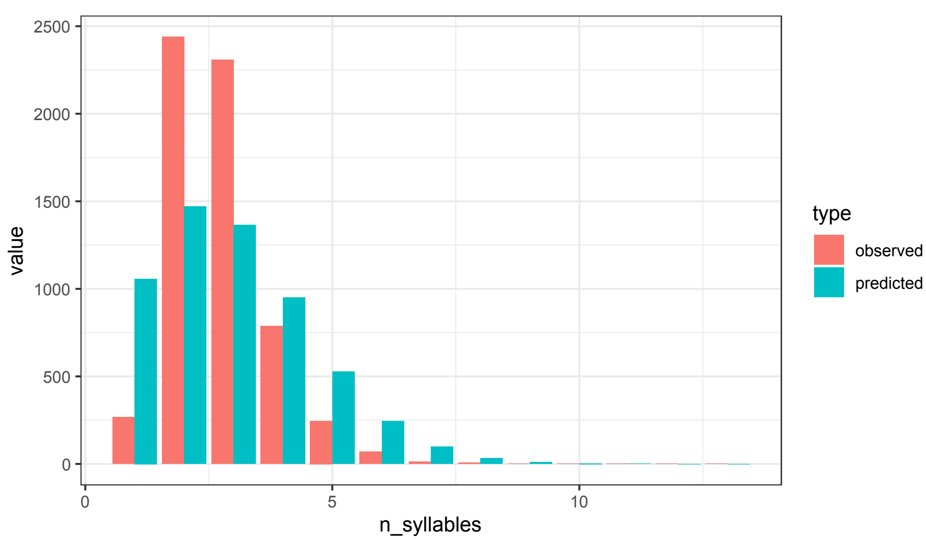
```
andic_syllables <- read_csv("https://raw.githubusercontent.com/agricolamz/2021_da4l/master/data/andic_syllables.csv")

andic_syllables %>%
  ggplot(aes(n_syllables, count))+
  geom_col()+
  facet_wrap(~language, scales = "free")
```

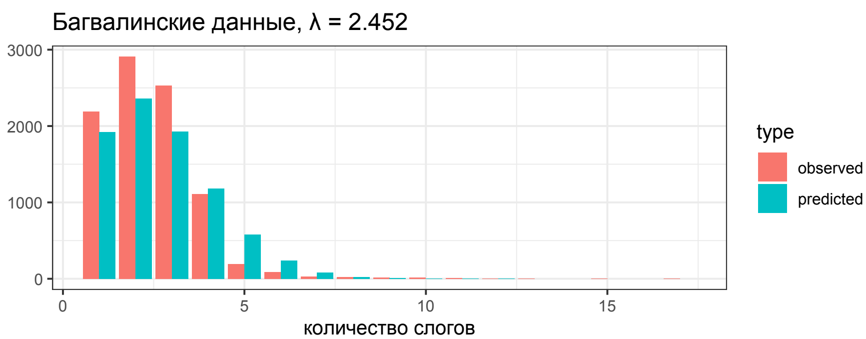


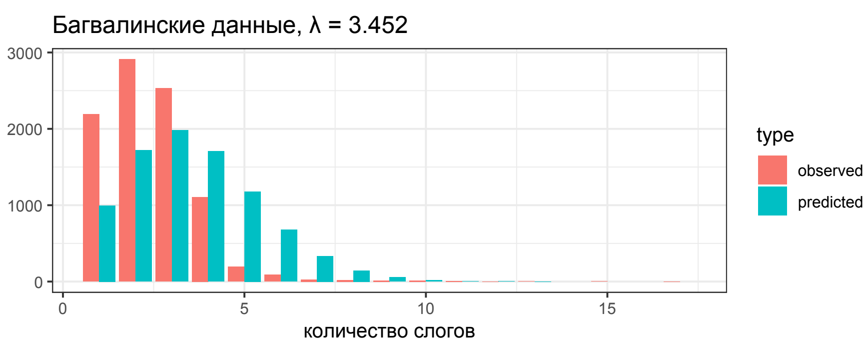
Птичка напела (мы научимся узнавать, откуда птичка это знает на следующем занятии), что андийские данные можно описать при помощи распределения Пуассона с параметром $\lambda = 2.783$.

```
andic_syllables %>%
  filter(language == "Andi") %>%
  rename(observed = count) %>%
  mutate(predicted = dpois(n_syllables, lambda = 2.783)*sum(observed)) %>%
  pivot_longer(names_to = "type", values_to = "value", cols = c(observed, predicted)) %>%
  ggplot(aes(n_syllables, value, fill = type))+
  geom_col(position = "dodge")
```



На графиках ниже представлены предсказания трех Пуассоновских моделей, какая кажется лучше?





Выше было написано:

> Согласно модели Пуассона все слова **независимо друг от друга** получают сколько-то слогов согласно распределению Пуассона.

Какие проблемы есть у предположения о независимости друг от друга количества слогов разных слов в словаре?

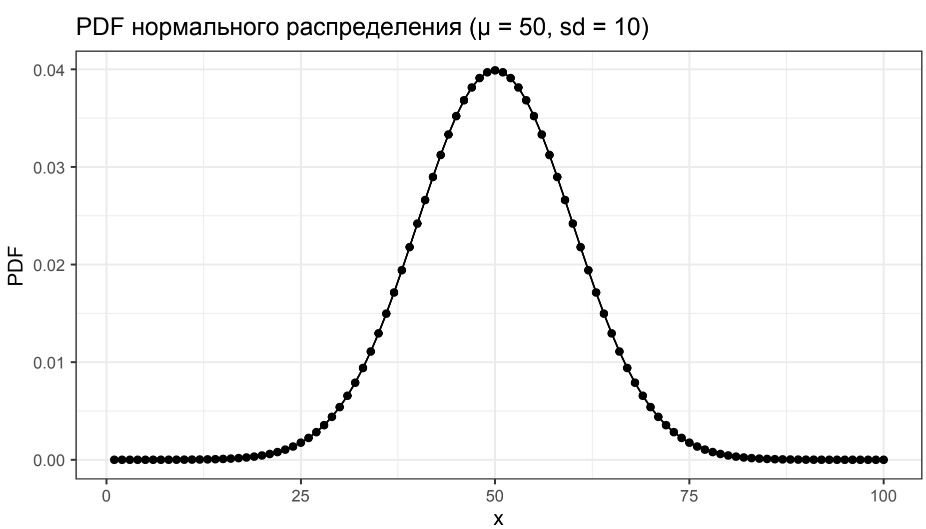
2.3 Числовые переменные

2.3.1 Нормальное распределение

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

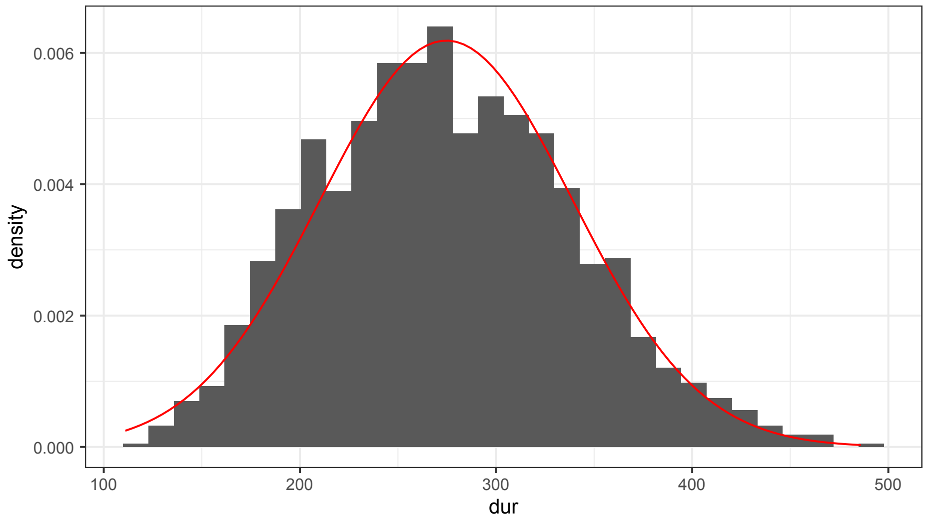
$$\mu \in \mathbb{R}; \sigma^2 > 0$$

```
tibble(x = 1:100,
       PDF = dnorm(x = x, mean = 50, sd = 10)) %>%
  ggplot(aes(x, PDF))+
  geom_point()+
  geom_line()+
  labs(title = "PDF нормального распределения (μ = 50, sd = 10)")
```



Птичка напела, что длительность гласных американского английского из (Hillenbrand et al., 1995) можно описать нормальным распределением с параметрами $\mu = 274.673$ и $\sigma = 64.482$. Посмотрим, как можно совместить данные и это распределение:

```
vowels <- read_csv("https://raw.githubusercontent.com/agricolamz/2021_da4l/master/data/phonTools_hillenbrand_1995.csv")
vowels %>%
  ggplot(aes(dur)) +
  geom_histogram(aes(y =..density..)) + # обратите внимание на аргумент ..density..
  stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = 274.673, sd = 64.482), color = "red")
```

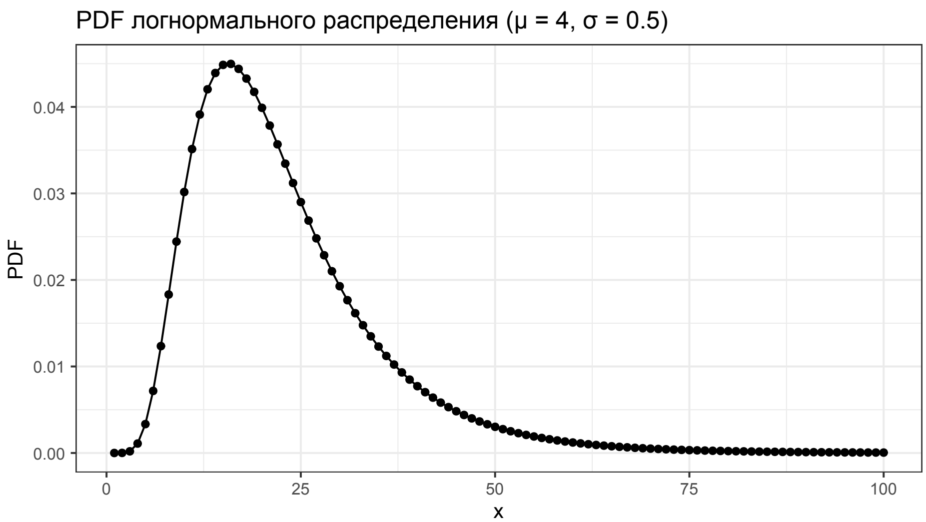


2.3.2 Логнормальное распределение

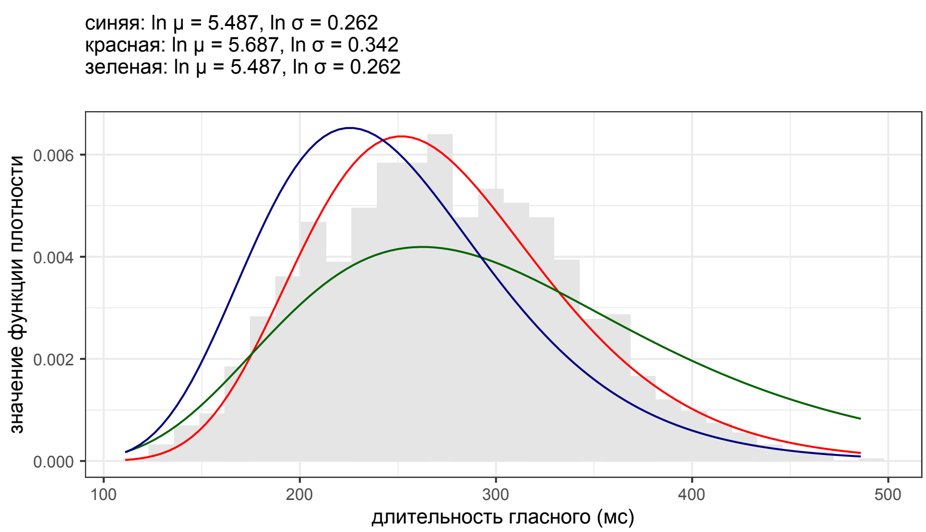
$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{x\sigma 2\pi}} \times e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mu \in \mathbb{R}; \sigma^2 > 0$$

```
tibble(x = 1:100,
       PDF = dlnorm(x = x, mean = 3, sd = 0.5)) %>%
  ggplot(aes(x, PDF))+
  geom_point()+
  geom_line()+
  labs(title = "PDF логнормального распределения (μ = 4, σ = 0.5)")
```



Какая из логнормальных моделей для длительности гласных американского английского из [@hillenbrand95] лучше подходит к данным? Попробуйте самостоятельно построить данный график.



2.3.3 Что еще почитать про распределения?

Люди придумали очень много разных распределений. Стоит, наверное, также понимать, что распределения не существуют отдельно в вакууме: многие из них математически связаны друг с другом. Про это можно посмотреть вот здесь[1] или здесь[2].

[1] http://www.math.wm.edu/~leemis/chart/UDR/UDR.html

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Relationships_among_probability_distributions

Глава 3

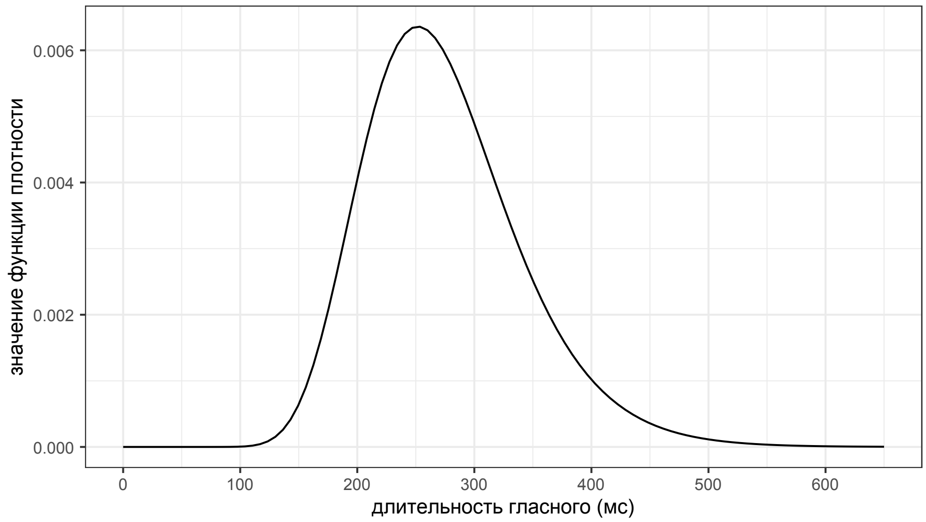
Функция правдоподобия

3.1 Оценка вероятности

```
library(tidyverse)
```

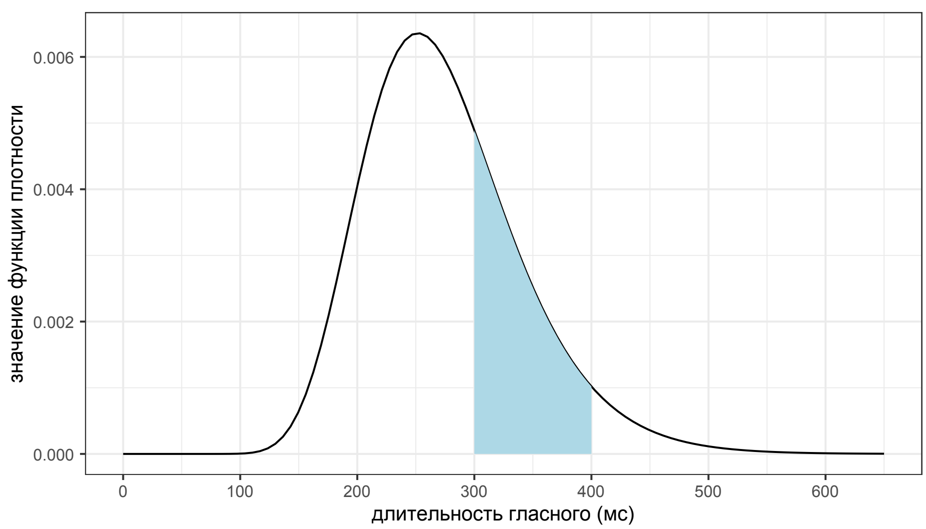
Когда у нас задано некоторое распределение, мы можем задавать к нему разные вопросы. Например, если мы верим что длительность гласных американского английского из (Hillenbrand et al., 1995) можно описать логнормальным распределением с параметрами $\ln \mu = 5.587$ и $\ln \sigma = 0.242$, то мы можем делать некотрые предсказания относительно интересующей нас переменной.

```
vowels <- read_csv("https://raw.githubusercontent.com/agricolamz/2021_da4l/master/data/phonTools_hillenbrand_1995.csv")
ggplot() +
  stat_function(fun = dlnorm, args = list(mean = 5.587, sd = 0.242))+
  scale_x_continuous(breaks = 0:6*100, limits = c(0, 650))+
  labs(x = "длительность гласного (мс)",
       y = "значение функции плотности")
```



Если принять на веру, что логнормальное распределение с параметрами $\ln \mu = 5.587$ и $\ln \sigma = 0.242$ описывают данные длительности гласных американского английского из [@hillenbrand95], то какова вероятность наблюдать значения между 300 и 400 мс? То же самое можно записать, используя математическую нотацию:

$$P\left(X \in [300,\ 400] | X \sim \ln \mathcal{N}(\ln \mu = 5.587, \ln \sigma = 0.242)\right) = ??$$



Литература

Hillenbrand, J., Getty, L. A., Clark, M. J., and Wheeler, K. (1995). Acoustic characteristics of American English vowels. *The Journal of the Acoustical society of America*, 97(5):3099–3111.