Корреляции и другие связи переменных. Регрессионный анализ

Г. Мороз

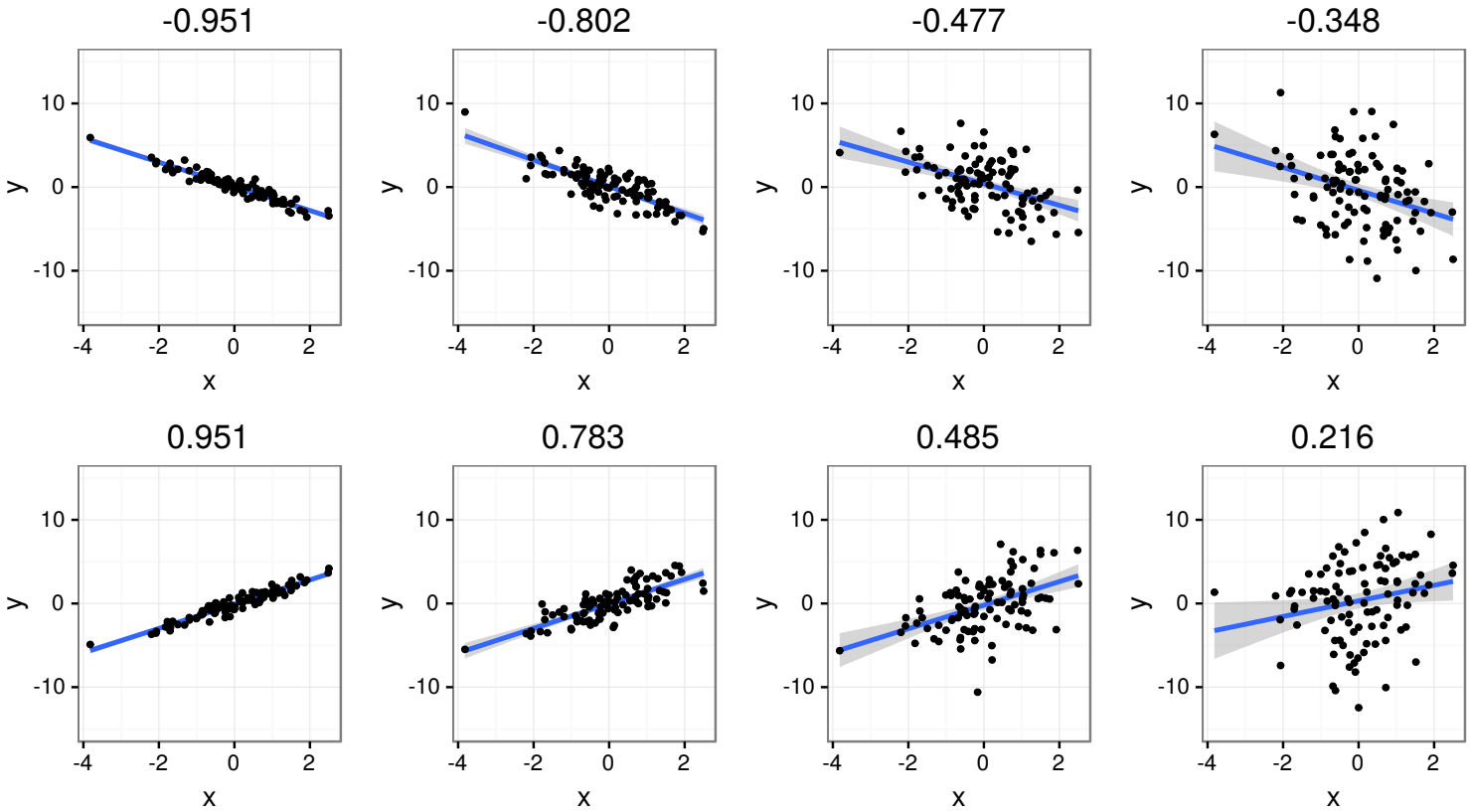
Связаны ли одни переменные с другими?

- две количественные переменные — как связаны?
  - $\Rightarrow$ коэффициенты корреляции Пирсона, Спирмана, Кенделла
- две качественные переменные
  - $\Rightarrow$ aggregate(), χ^2, тест Фишера — связи нет?
- одна количественная и одна качественная переменная
  - $\Rightarrow$ ANOVA — связи нет?

К сожалению, слово *"корреляция"* и его однокоренные в языке используется куда шире (примеры из НКРЯ):
"...существует четкая корреляция между континентом проведения соревнований и результатом..."
"...существует прямая корреляция между владением азиатскими «тональными» языками и хорошим музыкальным слухом..."
"...прямая корреляция количества крыс в доме зависит от наличия мусоропровода и его состояния..."
В статистике **корреляция** — это отношение между **числовыми** переменными.

Коэффициент корреляции Пирсона

Коэффициент корреляции позволяет показать степень взаимосвязи между двумя величинами. Коэффициент корреляции изменяется от -1 до 1, где 0 обозначает отсутствие взаимосвязи, положительное значение коэффициента указывает на прямую взаимосвязь (чем больше x, тем больше y), а отрицательное — на обратную (чем больше x, тем меньше y).



Коэффициент корреляции Пирсона

Значение коэффициента корреляции Пирсона зависит от удаленности точек от регрессионной прямой и **никак** не зависит от наклона данной прямой. См. примеры из Википедии.

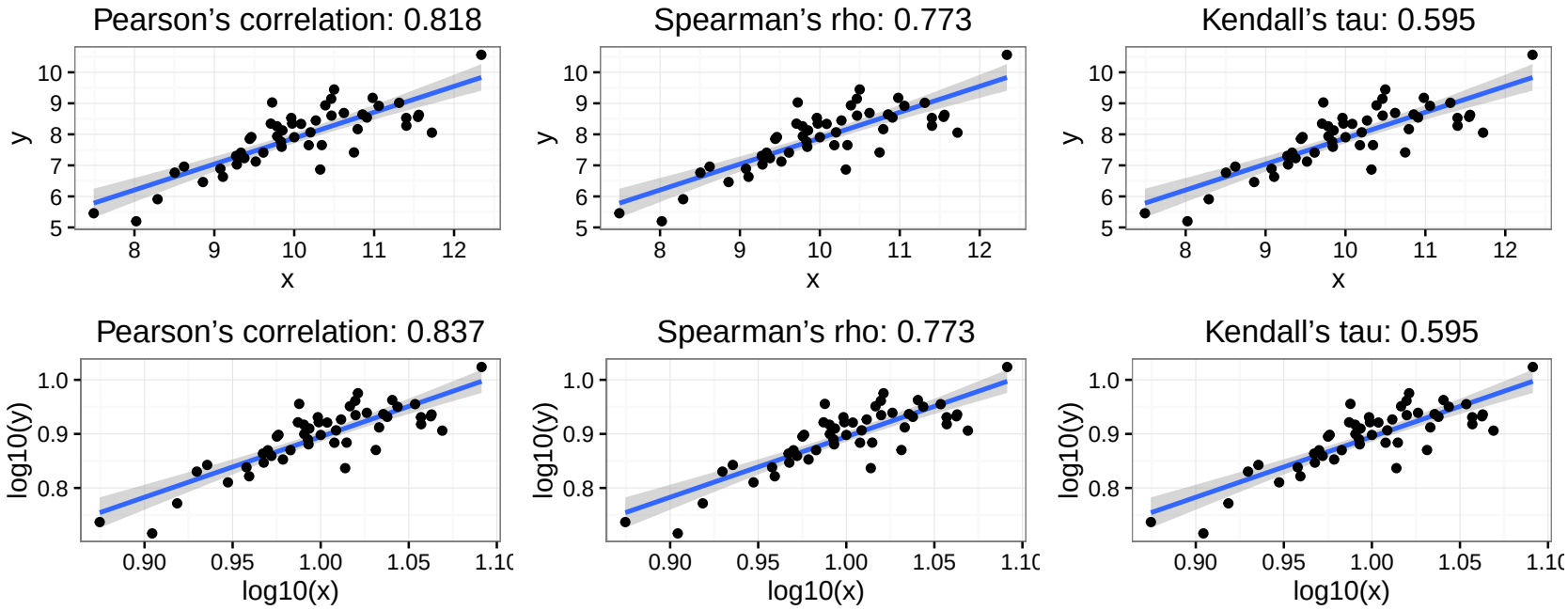
```
x <- c(2, 8, 3, 7, 11, 3)
y <- c(12, 7, 10, 8, 5, 11)
cor(x, y)  # по умолчанию считается коэффициент корреляции Пирсона
cor.test(x, y)                                  # H0: коэффициент равен нулю
```

```
Pearson's product-moment correlation
data: x and y
t = -12.03, df = 4, p-value = 0.0002737
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.9985831 -0.8770124      доверительный интервал для коэффициента
sample estimates:
-0.9864609                                  коэффициент корреляции
```

тип данных: числовой

параметрический (требует линейности связи)

Коэффициенты корреляции Спирмана, Кенделла



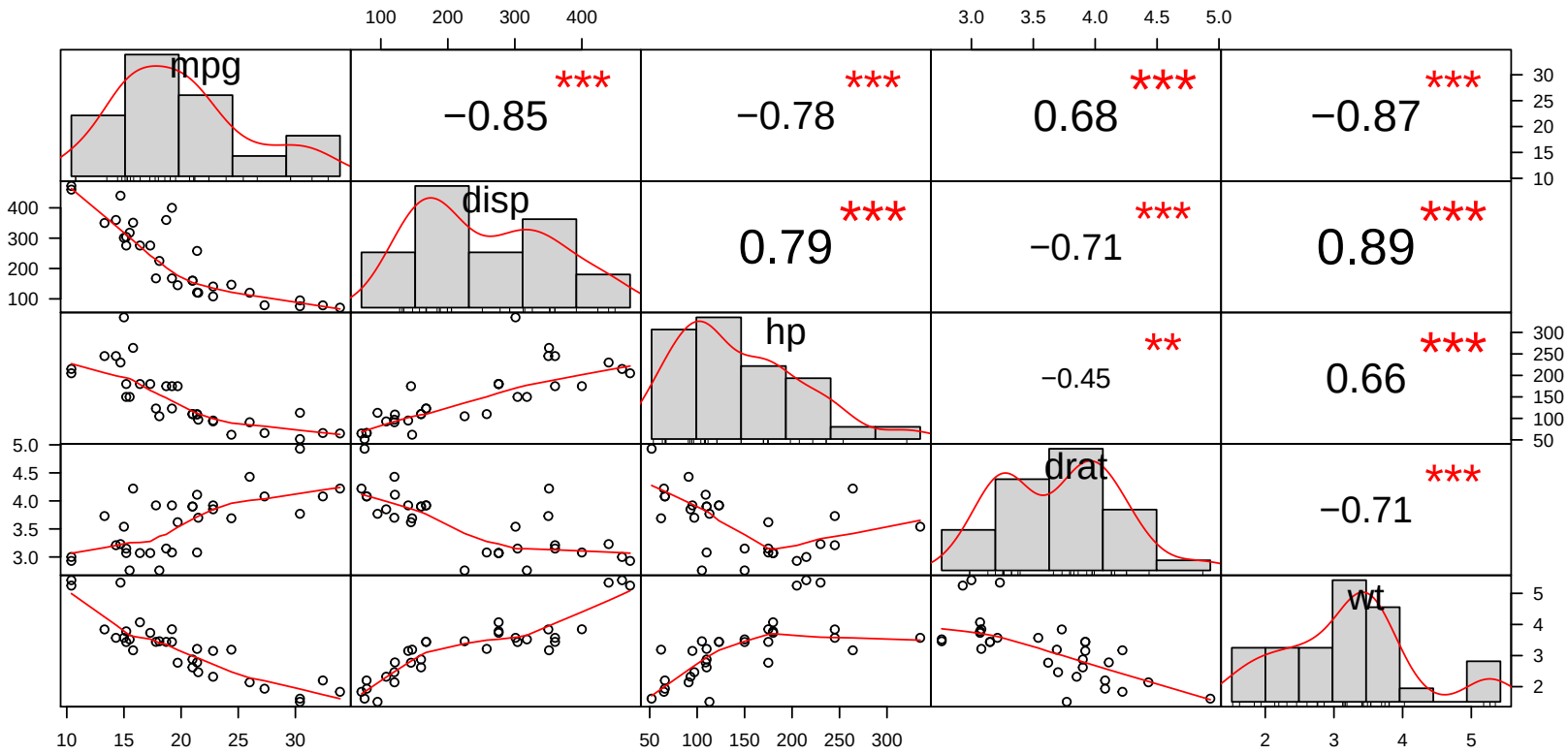

```
x <- c(2, 8, 3, 7, 11, 3)
y <- c(12, 7, 10, 8, 5, 11)
cor(x, y, method = "spearman")    # коэффициент корреляции Спирмана
cor.test(x, y, method = "spearman")
cor(x, y, method = "kendall")     # коэффициент корреляции Кенделла
cor.test(x, y, method = "kendall")
```

тип данных: числовой

непараметрический

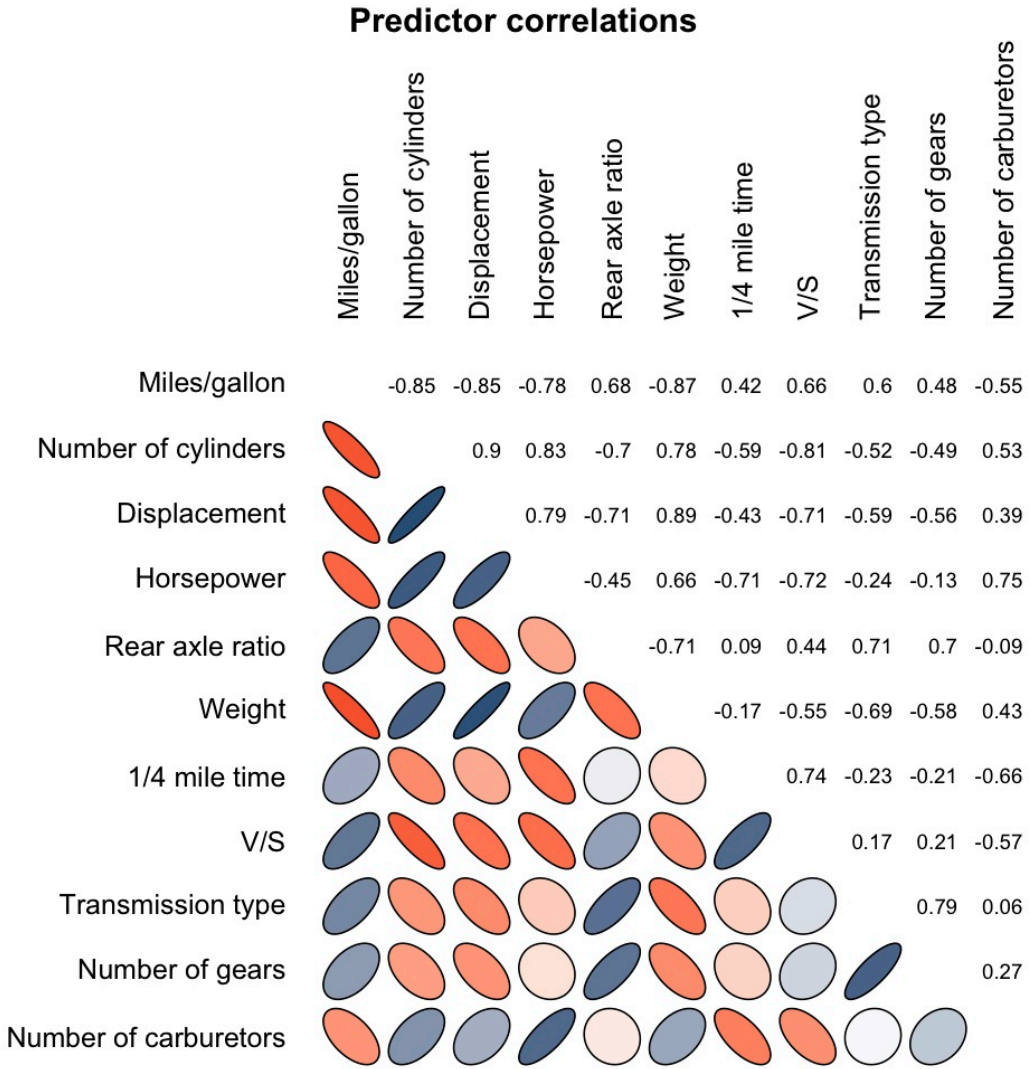
Корреляционная матрица: PerformanceAnalytics

```
library(PerformanceAnalytics)
chart.Correlation(mydata)
chart.Correlation(mydata, method = "spearman")
chart.Correlation(mydata, method = "kendall")
```



Корреляционная матрица: ellipse

Здесь пример использованием пакета ellipse.



aggregate()

В работе [Cedergren 1973] ис следовались отпадение согласного [s] в конце слова в речи жителей Панамы. При каких условиях выпадение [s] происходит чаще всего?

```
tail(dat)
```

	s.deletion	gramm.cat	phon.cont	social
8841	not deleted	noun	pause	2
8842	not deleted	noun	pause	2
8843	not deleted	noun	pause	3
8844	not deleted	noun	pause	3
8845	not deleted	noun	pause	4
8846	not deleted	noun	pause	4

```
sapply(dat, table)
$s.deletion
  deleted not deleted
     5091        3755
$gramm.cat
  adjective determiner  noun separate morpheme  verb
        609       1393  2268              4460   116
$phon.cont
  consonant  pause  vowel
       5600   1304   1942
$social
   1    2    3    4
 579 2547 2385 3335
```

```
aggregate(s.deletion~gramm.cat,                    # формула
data = a[a$s.deletion == "deleted",],               # данные
length)                                            # функция
```

	gramm.cat	s.deletion
1	adjective	298
2	determiner	604
3	noun	1594
4	separate morpheme	2556
5	verb	39

```
aggregate(s.deletion~gramm.cat + phon.cont,        # формула
data = a[a$s.deletion == "deleted",],               # данные
length)                                            # функция
```

	gramm.cat	phon.cont	s.deletion
1	adjective	consonant	205
2	determiner	consonant	524
3	noun	consonant	733
4	separate morpheme	consonant	1355
5	verb	consonant	23
6	adjective	pause	48
7	noun	pause	485
8	separate morpheme	pause	471
9	adjective	vowell	45
10	determiner	vowell	80
11	noun	vowell	376
12	separate morpheme	vowell	730
13	verb	vowell	16

Correlation does not imply causation!

Это говорят на всех курсах по статистике. Примером могут служить сайт и сделанная на его основе книга *Spurious correlations*.

Если есть корреляция между двумя переменными a и b, то может быть один из следующих вариантов:

- a вызывает b
- b вызывает a
- a вызывает b, а b вызывает a
- a вызывает c, а c вызывает b
- c вызывает a и b, но a и b не связаны
- a и b не связаны

Однако часто приводят примеры лишь на последнее. Кстати, вы знали, что количество пиратов влияет на глобальное потепление? А еще... чем больше пожарников посылают тушить пожар, тем больше ущерба он наносит.

Статистическая модель

Когда мы работаем с данными и находим отношения между какими-то из переменных, мы создаем упрощенное представление некоторой системы, которые мы в дальнейшем будем называть *моделью*. Получившаяся модель позволяет нам с некоторой точностью предсказывать некоторый результат на основе той или иной конфигурации параметров модели. Чаще всего в статистические модели закладывается стохастический элемент, т. е. даже в самой простой модели будет случайная переменная, которую еще называют остатками модели:

$$y = 4 + \varepsilon_i$$

Таким образом любое статистическое моделирование — это поиск наилучшей аппроксимация закона распределения исследуемой переменной, так чтобы обеспечить минимум средней ошибки ε_i.

Линейная регрессия

В работе исследовалась зависимость средней значения частоты основного тона от возраста (мужчины и женщины следует считать отдельно). Какие коэффициенты получит регрессионные линии и сколько процентов дисперсии объяснят наши модели, если мы предположим линейную зависимость между переменными?

Линейная регрессия

В работе исследовалась зависимость средней значения частоты основного тона от возраста (мужчины и женщины следует считать отдельно). Какие коэффициенты получит регрессионные линии и сколько процентов дисперсии объяснят наши модели, если мы предположим линейную зависимость между переменными?

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x + \varepsilon_i,$$

где x — предиктор, β_0 — свободный член, β_1 — угловой коэффициент, ε_i — средняя ошибка.

Линейная регрессия: строим модель

```
summary(df)
   sex          age              pitch
 f:20   Min.   :23.00   Min.   :139.3
 m:20   1st Qu.:46.50   1st Qu.:154.3
        Median :62.50   Median :158.8
        Mean   :59.12   Mean   :159.3
        3rd Qu.:71.25   3rd Qu.:162.4
        Max.   :83.00   Max.   :176.4
```

```
dfm <- subset(df, sex=="m")                    # сгруппируем по полу
dff <- subset(df, sex=="f")                    # сгруппируем по полу

fit.f <- lm(pitch~age, dff)                    # строим регрессию
fit.m <- lm(pitch~age, dfm)                    # строим регрессию
```

В случае, если в задаче требуется исключить свободный член, то в формулу нужно добавить -1:

```
fit.m2 <- lm(pitch~age - 1, dfm)               # исключаем свободный член
```

Линейная регрессия: анализ результатов

```
fit.f <- lm(pitch~age, dff)          # строим регрессию по данным женщин
summary(fit.f)

Call:
lm(formula = pitch ~age, data = dff)          # формула, вдруг забыли

Residuals:                                    # распределение остатков
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.33997 -0.62471 -0.06519  0.70728  1.66992

Coefficients:                                 # коэффициенты модели
             Estimate   Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept)  189.87935  1.00978    188.04   < 2e-16  ***   # β0
age          -0.39820   0.01605    -24.81   2.27e-15 ***   # β1
---
Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.134 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9716, Adjusted R-squared: 0.97
F-statistic: 615.5 on 1 and 18 DF, p-value: 2.267e-15
```

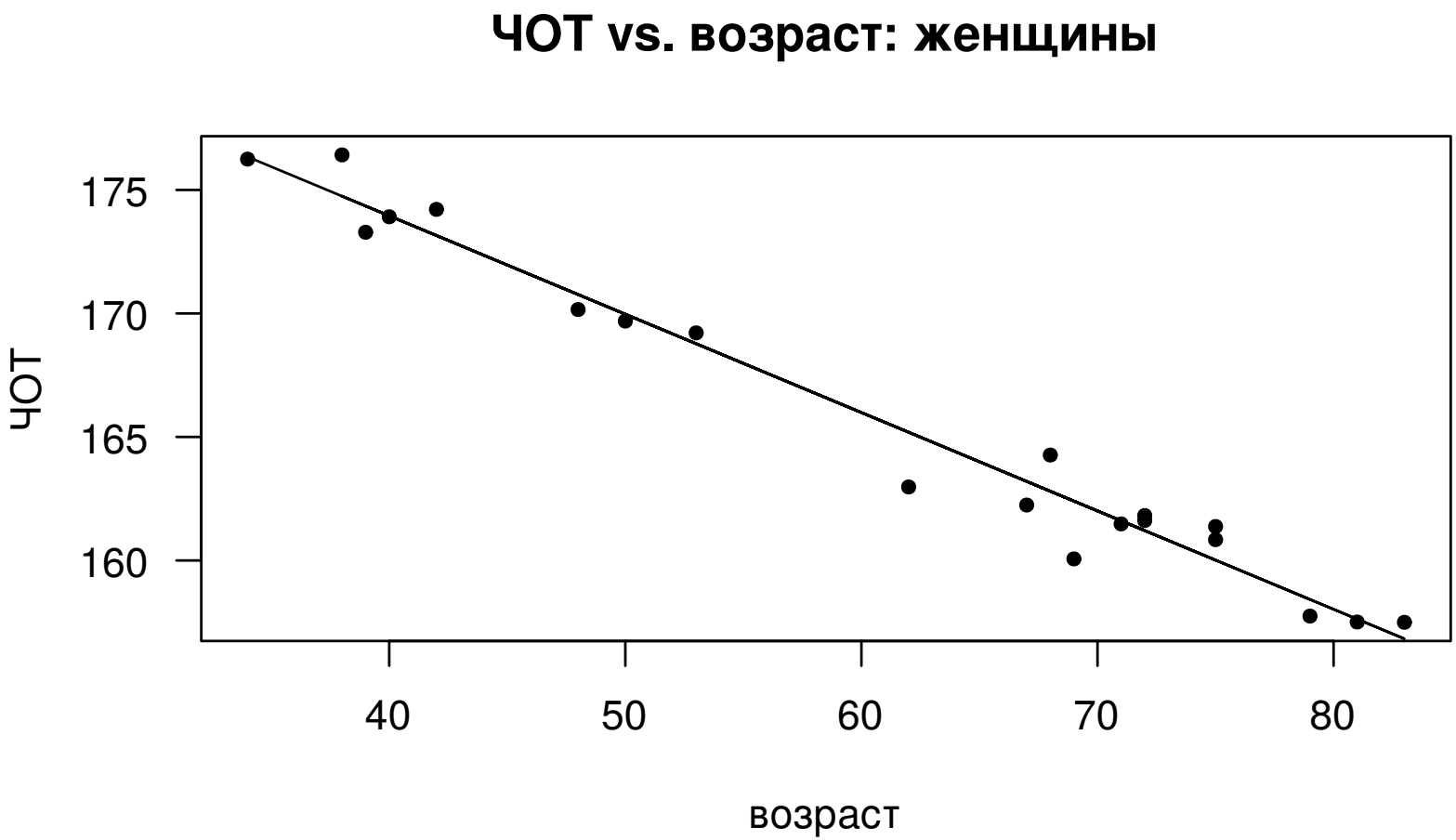
Что означают p-values?

Линейная регрессия: анализ результатов

```
fit.m <- lm(pitch~age, dfm)        # строим регрессию по данным женщин
summary(fit.m)

Call:
lm(formula = pitch ~age, data = dfm)              # формула, вдруг забыли

Residuals:                                        # распределение остатков
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.87771 -0.54867  0.05222  0.88251  1.79433

Coefficients:                                     # коэффициенты модели
             Estimate   Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept)  130.07015  0.90750    143.33   < 2e-16  ***   # β0
age          0.39790    0.01534    25.94    1.04e-15 ***   # β1
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.9985 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.974, Adjusted R-squared: 0.9725
F-statistic: 673 on 1 and 18 DF, p-value: 1.036e-15
```

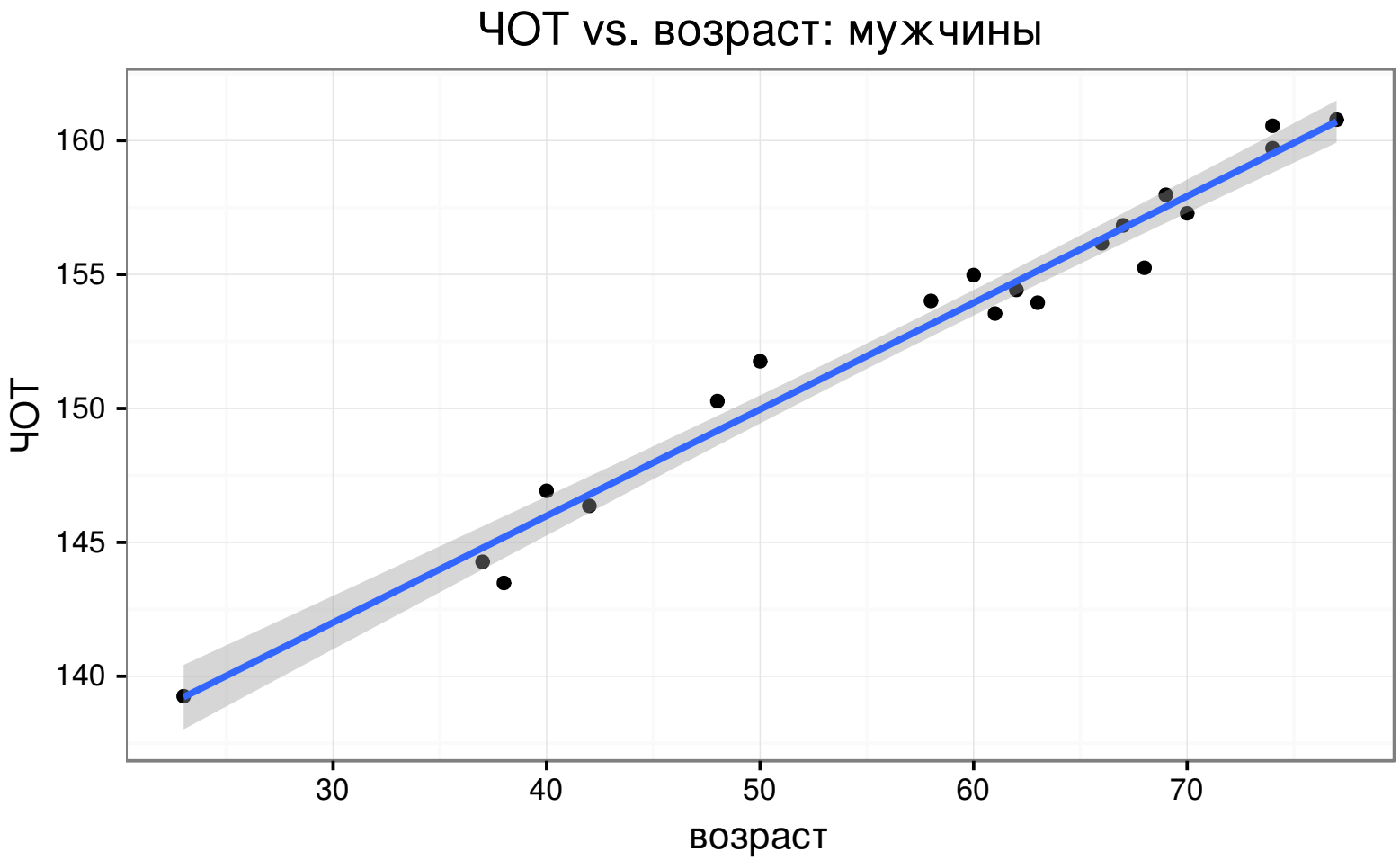
Что означают p-values?

Линейная регрессия: визуализация, R-base




```
fit.f <- lm(pitch~age, dff)
plot(dff$age, dff$pitch)
lines(dff$age, fit.f$fitted.values)
```

Линейная регрессия: визуализация, ggplot2




```
library(ggplot2)
ggplot(dfm, aes(x=age, y = pitch))+
geom_point()+
geom_smooth(method = "lm")          # уже встроена линейная регрессия
```

Линейная регрессия: доверительный интервал

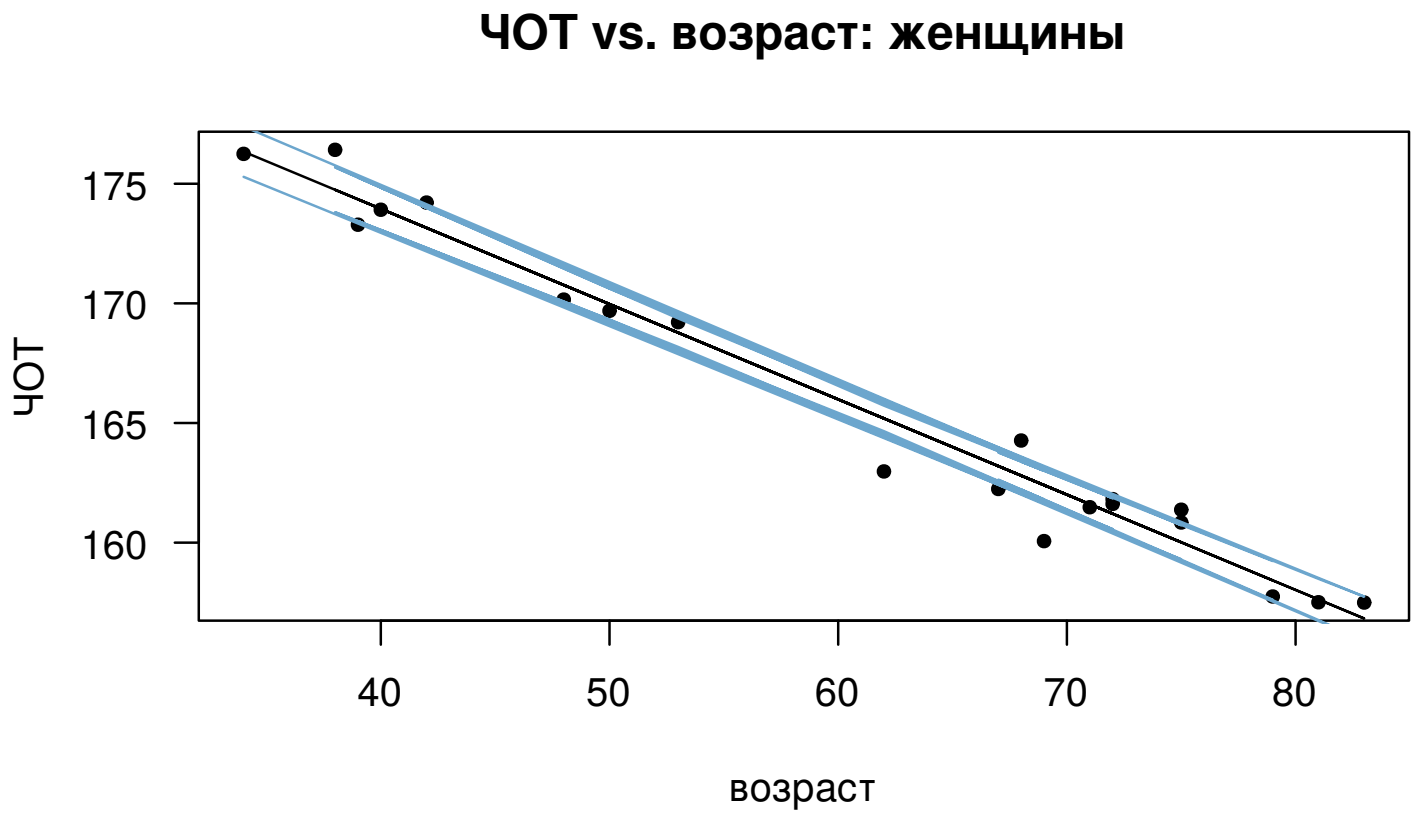
Так как регрессия строится по выборочным данным, мы не знаем, как бы проходила линия, если бы мы взяли другую выборку. Т. е. значения коэффициентов β_0 и β_1, вычисленные функцией lm(), являются лишь некоторым приближением к коэффициентам регрессии, которая бы описывала параметры генеральной совокупности.

В вязи с этим стоит строить доверительный интервал регрессии, что позволяет делать команда predict().

```
head(predict(fit.f, interval = "conf"))
```

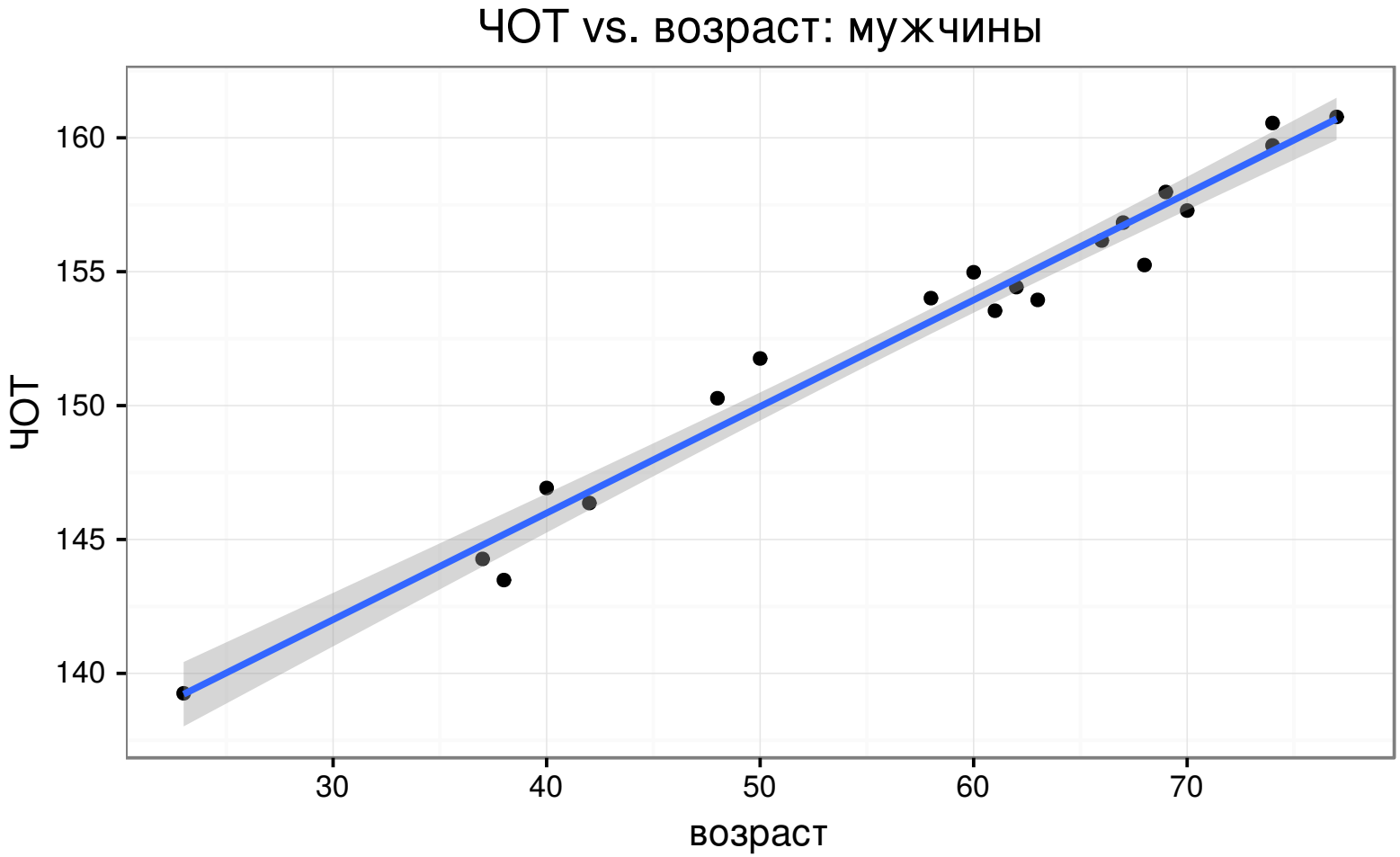
	fit	lwr	upr
1	158.4218	157.6118	159.2319
2	162.8020	162.2180	163.3859
3	162.4038	161.8052	163.0023
4	163.2002	162.6292	163.7711
5	161.6074	160.9752	162.2396
6	161.2092	160.5582	161.8602

Линейная регрессия: CI, R-base




```
fit.f <- lm(pitch~age, dff)                          # строим модель
pred.f <- predict(fit.f, interval = "conf")          # строим границы
plot(dff$age, dff$pitch)
lines(dff$age, pred.f[,1])                           # линия регрессии
lines(dff$age, pred.f[,2], col = "skyblue3")         # нижняя гр. CI
lines(dff$age, pred.f[,3], col = "skyblue3")         # верхняя гр. CI
```

Линейная регрессия: CI, ggplot2



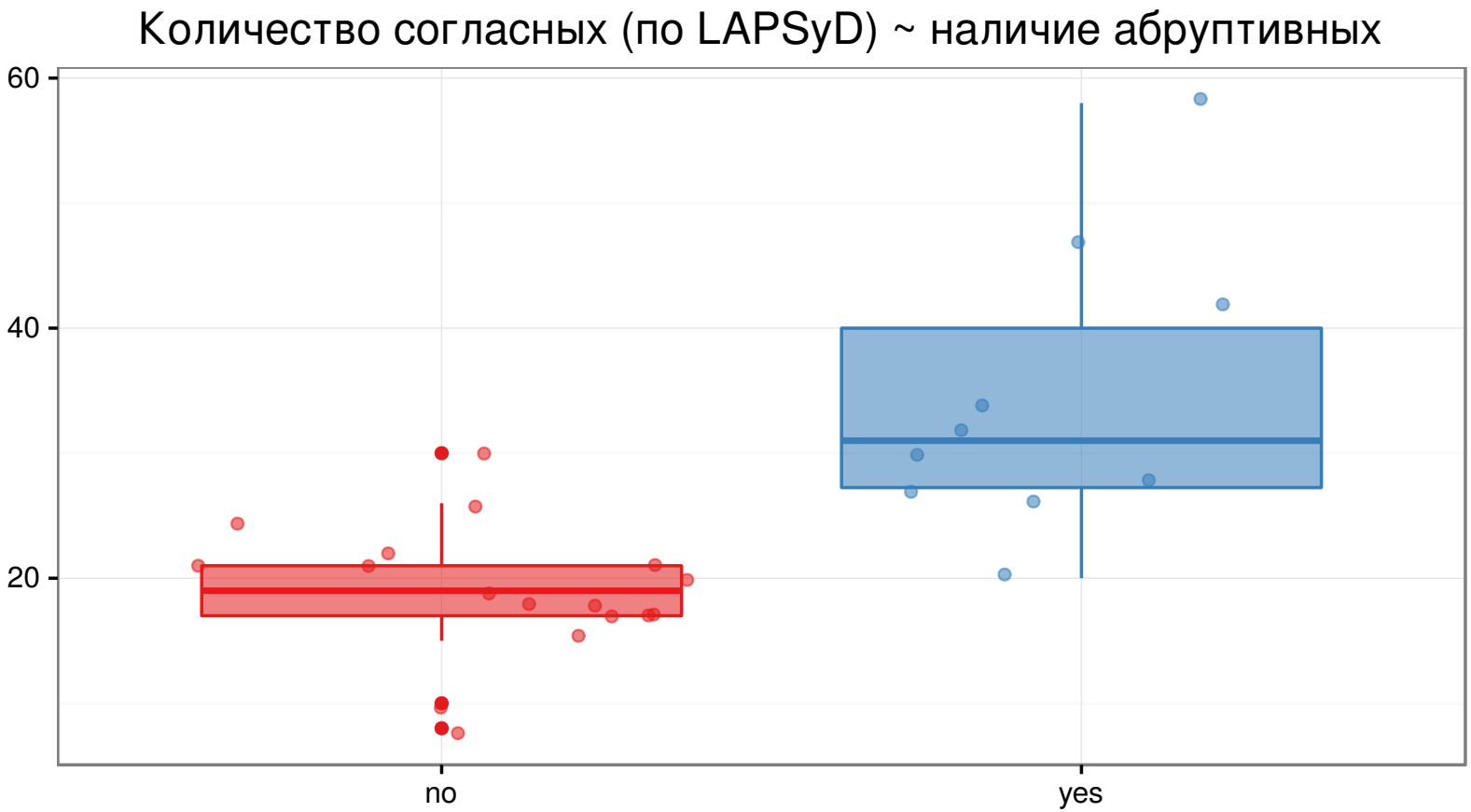

```
library(ggplot2)
ggplot(dfm, aes(x=age, y = pitch))+
geom_point()+
geom_smooth(method = "lm")                    # уже встроен CI
```

dummy-переменные

В регрессионные модели можно включить и категориальные предикторы. Для этого вводятся фиктивные переменные (dummy variables), принимающие значение либо 1, либо 0. При этом фиктивных переменных должно быть на одну меньше, чем значений, которые принимает категориальные переменные.

dummy-переменные

Проанализируем данные, содержащих выборку языков с указанием количества согласных и наличия в данном языке абруптивных согласных. На графике представлен результат (можно посмотреть более интерактивный вариант):



dummy-переменные

```
m <- lm(n.cons.lapsyd ~ ejectives, data = ejectives)
summary(m)

Call:
lm(formula = n.cons.lapsyd ~ ejectives, data = ejectives)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-14.400   -4.229   -1.059    2.441   23.600

Coefficients:
                Estimate Std. Error       t     value Pr(>|t|)
   (Intercept)    19.059      1.953   9.758  5.25e-10      ***
  ejectivesyes    15.341      3.209   4.780  6.59e-05      ***
---
Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 8.053 on 25 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.4775, Adjusted R-squared: 0.4566
F-statistic: 22.85 on 1 and 25 DF, p-value: 6.588e-05
```

dummy-переменные

Естественно в модели переменная может принимать больше двух значений.

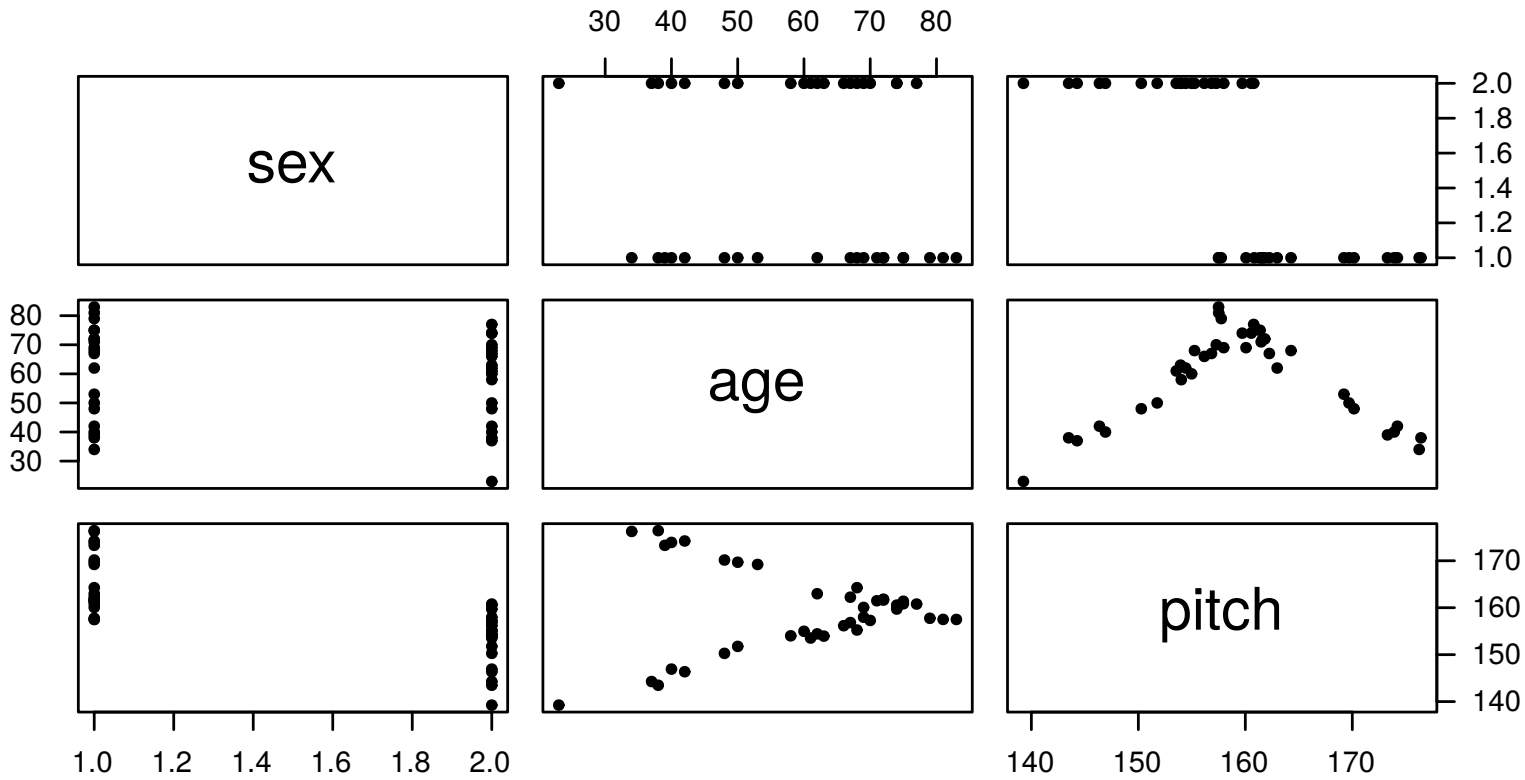
Регрессионное моделирование, в котором предсказываемая переменная — количественная, а все предикторы — категориальные, называют ANOVA (Analysis of Variance).

А что если количество предикторов больше двух?

- попарное сравнение pairs()
- несколько регрессий
- множественная регрессия
- ...

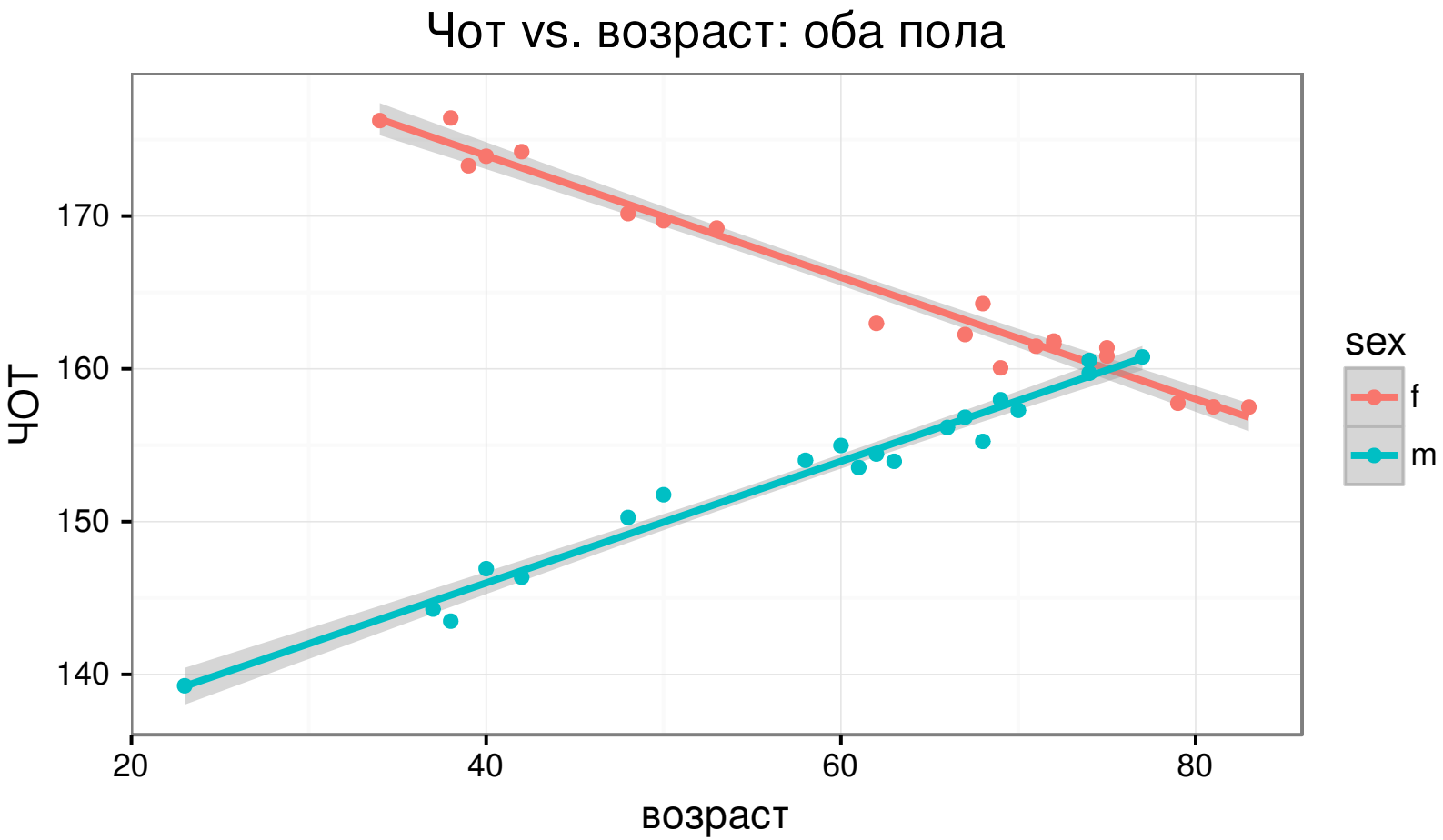
А что если количество предикторов больше двух?

- попарное сравнение pairs()



А что если количество предикторов больше двух?

- несколько регрессий



Множественная регрессия

Естественным обобщением линейной регрессии является множественная регрессия, в которой имеется не один предиктор, а несколько:

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + \cdots + \beta_k \cdot x_k + \varepsilon_i,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — предиктор, β_0 — свободный член, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — коэффициенты регрессии, ε_i — средняя ошибка.

Как сравнить модели?

Для сравнения моделей используют несколько параметров:

- p-value модели, и p-value коэффициентов регрессии
- R^2 и adjusted R^2 — доля дисперсии, объясняемая моделью
- AIC — информационный критерий Акаике (чем меньше, тем лучше)
- BIC — байесовский информационный критерий Шварца (чем меньше, тем лучше)
- результаты перекрестной проверки (cross-validation) — существует много разных техник

В работе [Stone 1977], видимо, показано, что AIC и некоторые методы перекрестной проверки асимптотически эквивалентны.

Как сравнить модели? p-value

Для сравнения моделей используют несколько параметров:

- p-value модели, и p-value коэффициентов регрессии.

```
Call:
lm(formula = pitch ~age, data = dfm)              # формула, вдруг забыли

Residuals:                                        # распределение остатков
      Min        1Q    Median        3Q       Max
 -1.87771  -0.54867   0.05222   0.88251   1.79433

Coefficients:                                     # коэффициенты модели
             Estimate    Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept)  130.07015   0.90750     143.33   < 2e-16   ***   # β0
age          0.39790     0.01534     25.94    1.04e-15  ***   # β1
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.9985 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.974, Adjusted R-squared: 0.9725
F-statistic: 673 on 1 and 18 DF, p-value: 1.036e-15
```

Как сравнить модели? R^2 и adjusted R^2

Для сравнения моделей используют несколько параметров:

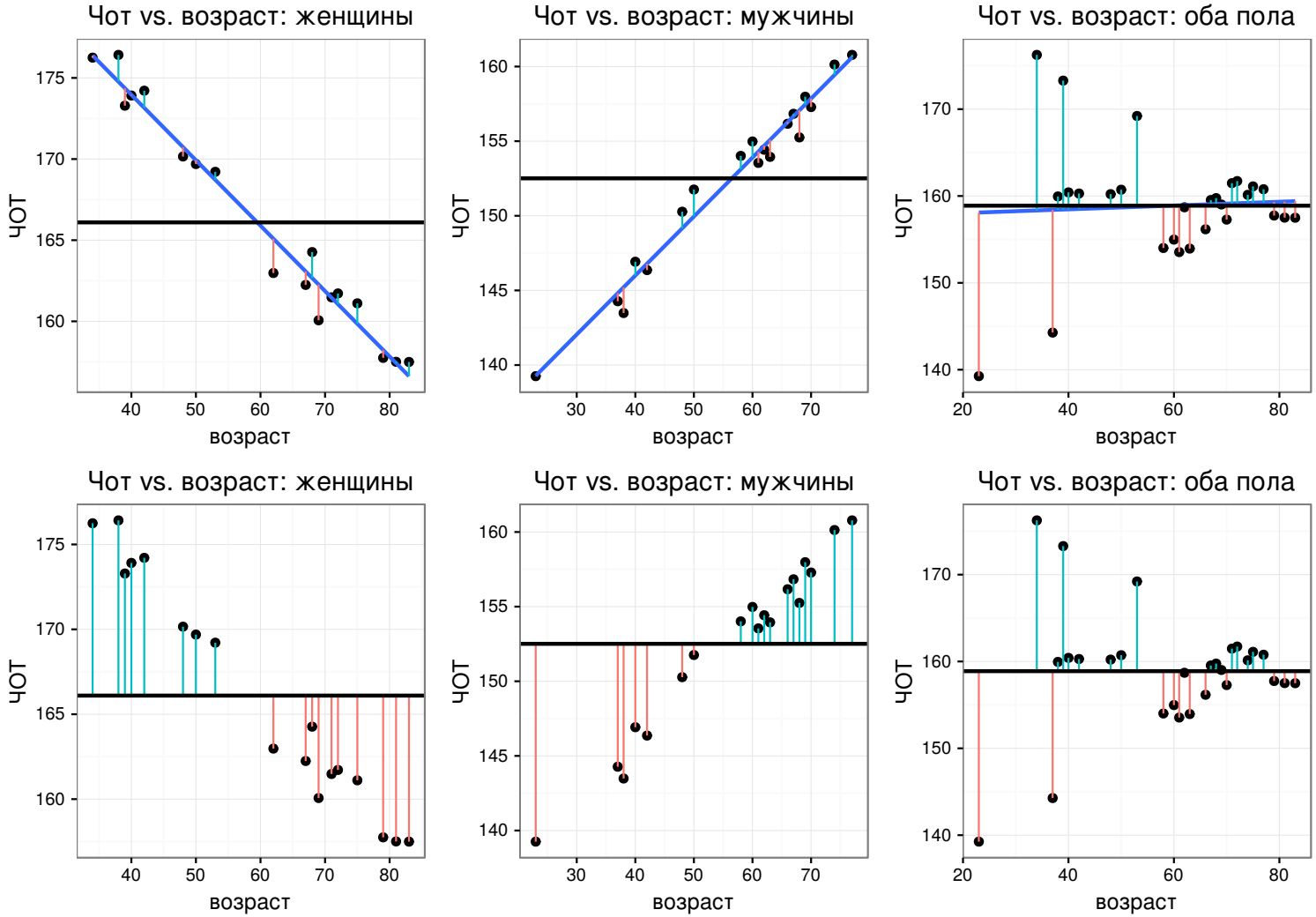
- R^2 и adjusted R^2 — доля дисперсии, объясняемая моделью.

```
Call:
lm(formula = pitch ~age, data = dfm)              # формула, вдруг забыли

Residuals:                                        # распределение остатков
      Min        1Q    Median        3Q       Max
 -1.87771  -0.54867   0.05222   0.88251   1.79433

Coefficients:                                     # коэффициенты модели
             Estimate   Std. Error  t value  Pr(>|t|)
(Intercept)  130.07015  0.90750    143.33   < 2e-16   ***   # β0
age          0.39790    0.01534    25.94    1.04e-15  ***   # β1
---
Signif. codes: 0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 0.9985 on 18 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.974, Adjusted R-squared: 0.9725
F-statistic: 673 on 1 and 18 DF, p-value: 1.036e-15
```

Как сравнить модели? R^2 и adjusted R^2

Для сравнения моделей используют несколько параметров:

- R^2 и adjusted R^2 — доля дисперсии, объясняемая моделью



Во многих дисциплинах достаточно высокими считаются значения

Как сравнить модели? AIC, BIC

Для сравнения моделей используют несколько параметров:

- AIC — информационный критерий Акаике (чем меньше, тем лучше)

  AIC()
- BIC — байесовский информационный критерий Шварца (чем меньше, тем лучше)

  BIC()

... надо сказать, разных вариантов этих критериев много, AIC и BIC — самые популярные.

Перебор моделей

Существует несколько стратегий перебора моделей:

- построить модель из всех предикторов, а потом "выкидывать"не значимые
- строить модель снизу вверх добавляя по одному предиктору, выясняя какие значимы, а какие нет

Если много предикторов, то возникает желание перебрать все возможные варианты и узнать, в какой модели лучше скорректированный R^2, AIC и BIC. Для этого, естественно уже написаны готовые функции (см. функцию `regsubsets` в пакете `leaps` или `bestglm` в пакете `bestglm`). Однако многие высказывают недовольство такой стратегией выискивания лучшей из моделей, построенных на одних и тех же данных, приравнивая ее к ***data fishing***.

В данной презентации не рассказано о...

- полиномиальной регрессии,
- нелинейной регрессии,
- логистической регрессии,
- гребневой и лассо-регрессии,
- и, наверное, о массе всего другого.

Спасибо за внимание

Пишите письма

agricolamz@gmail.com

Список литературы

Cedergren, H. C. J. (1973). *The interplay of social and linguistic factors in Panama*. Cornell University.

Hatano, H., T. Kitamura, H. Takemoto, P. Mokhtari, K. Honda, and S. Masaki (2012). *Correlation between vocal tract length, body height, formant frequencies, and pitch frequency for the five Japanese vowels uttered by fifteen male speakers*. International Speech Communication Association.

Stone, M. (1977). An asymptotic equivalence of choice of model by cross-validation and akaike's criterion. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B* (*Methodological*), 44--47.